МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГБОУ ВПО «ЯРОСЛАВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. К.Д. УШИНСКОГО»

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. М.В. ЛОМОНОСОВА

ТРУДЫ
IX МЕЖДУНАРОДНЫХ КОЛМОГОРОВСКИХ ЧТЕНИЙ

Ярославль
2011

УДК 51; 51:372.8; 51(091)
ББК 22.1 я434
Т 782

Печатается по решению редакционно-издательского совета ЯГПУ им. К. Д. Ушинского

Труды IX международных Колмогоровских чтений : сборник статей. – Ярославль :
Т 782 Изд-во ЯГПУ, 2011. – 324 с.

ISBN 978-5-87555-738-5

Начиная с юбилея (100-летия со дня рождения академика А.Н. Колмогорова, 2003 г.), на родине выдающегося математика XX столетия в Ярославле проводятся традиционные Колмогоровские чтения.

Настоящий сборник статей IX Международных Колмогоровских чтений (2011 г.) так или иначе отражает интересы А.Н. Колмогорова во многих областях математики, теории и методики обучения математике, истории математики и математического образования. Воспоминания учеников и коллег А.Н. Колмогорова содержат новые факты его биографии и аспекты научно-методических интересов ученого.

Сборник будет полезен преподавателям школ и вузов, студентам и всем, кто интересуется математикой, методикой ее преподавания и историей российского образования.

УДК 51; 51:372.8; 51(091)
ББК 22.1 я434

ISBN 978-5-87555-738-5

Оглавление

Глава 1

Пленарные доклады: А.Н. Колмогоров и математика XX столетия

О возможности единого подхода к математическому образованию в школе, вузе, университете

В.М. Тихомиров

Кому нужна математика и зачем ее надо учить?
Часто цитируют слова, приписываемые Галилею: "Il libro della natura é scripto il lingua matematica" – *книга природы написана языком математики*, и в этом, наверное, состоит важнейшая заслуга математики перед человечеством. *"Вряд ли нужно доказывать, писал наш великий соотечественник А.Н. Колмогоров (1903-1987), насколько желательно, с общеобразовательной точки зрения, достигнуть того, чтобы все учащиеся могли вполне конкретно понять хотя бы ньютоновскую концепцию математического естествознания."*

Каждая страна должна быть заинтересована в том, чтобы атомные станции не взрывались, мосты и гидростанции не рушились, самолеты не разбивались, чтобы экономика плодотворно развивалась и т.п., а для этого нужны квалифицированные инженеры и экономисты. Инженерное и экономическое образования невозможны без математики. О важности математики для отдельной личности некогда были сказаны замечательные слова:[1] *«Математика и свойственный ей стиль мышления должны рассматриваться как существенный элемент общей культуры современного человека, даже если он не занимается деятельностью в области точных наук или техники; обучение математике должно приводить учащихся к пониманию роли, которую математика играет в научной и философской концепции современного мира»*. Метод точного мышления, которому дóлжно учить на уроках математики, необходим фактически любому человеку, который собирается сделать что-то существенное: врачу, экономисту, лингвисту, юристу, государственному деятелю. С математикой личность обретает бесценный дар – чувство интеллектуальной свободы. Снова предоставим слово Галилею:"Авторитет, основанный на мнении тысячи, в вопросах науки не стоит искры разума одного единственного [человека]."

О единстве математики.

У одного из крупнейших математиков прошедшего века – Израиля Моисеевича Гельфанда (1913-2009) – в детстве и юности было много необычного, непохожего на то, как протекали ранние годы у большинства знаменитых ученых.

"Я родился в маленьком городке, – рассказывал как-то Гельфанд, – в котором была лишь одна школа. Мой учитель математики был очень добрым человеком (его фамилия была Титоренко). Я никогда не встречал лучшего учителя, хотя я знал больше, чем он, и он осознавал это. [...] Мои родители не имели возможности покупать мне математические книги – у них не было средств для этого. Но мне повезло. Когда мне было 15 лет, родители повезли меня в Одессу делать операцию аппендицита. Я сказал, что не пойду в госпиталь, если они мне не купят книгу по математике".

И книга была куплена. Это был очень ординарный учебник по анализу. Но он радикально изменил представление пятнадцатилетнего юноши о математике. Перед тем он думал, что существуют две различные математики: алгебра и геометрия. А когда он увидел формулу Маклорена [о разложении синуса в ряд Тейлора в нуле], он осознал, что между этими науками нет пропасти: "Математика предстала передо мной в своем единстве. И с той поры я понял, что разные области математики вместе с математической физикой образуют единое целое". Одна из наших тем в этой статье – действительно ли "различные области математики вместе с математической физикой образует единое целое" можно ли преподавать математику, как единую науку. Я хочу представить вам

«Дом» математики

ЭТАЖИ	Ур-ние	Пр-во	Ур-ние	Пр-во	Ур-ние	Пр-во
3. Университет	Ax=b,	$x \in \ell_2$	f(x)=y,	$x, y \in C([a,b])$	$\langle Ax, x\rangle = c,$	$x \in \ell_2$
2. ВУЗ	Ax=b,	$x \in \mathbb{R}^n$	f(x)=y,	$x, y \in \mathbb{R}^n$	$\langle Ax, x\rangle = c,$	$x \in \mathbb{R}^n$
1. Школа	Ax=b,	$x \in \mathbb{R}^2$	f(x)=y,	$x, y \in \mathbb{R}$	$Ax^2 = c,$	$x \in \mathbb{R}$
ПОДЪЕЗДЫ	ПЕРВЫЙ		ВТОРОЙ		ТРЕТИЙ	

[1]В «Рекомендации XIX Международной конференции по народному просвещению», проходившей в 1956 году в Женеве под эгидой ЮНЕСКО, с которой Конференция обратилась к Министерствам народного просвещения.

Теория линейных уравнений (первый подъезд)

ЭТАЖ	УР-Е	ПР-ВО
3. Университет	Ax=b,	$x \in \ell_2$
2. ВУЗ	Ax=b,	$x \in \mathbb{R}^n$
1. Школа	Ax=b,	$x \in \mathbb{R}^2$
Первый подъезд		

Первый этаж (школа). **Задача 1.** *Маме с дочкой вместе сорок лет. Мама старше дочки на 24 года. Сколько им лет?*

Сколько лет маме и сколько лет дочке неизвестно. Обозначим возраст мамы через x, а возраст дочки через y. Тогда им вместе $x + y$ лет. А это число нам известно: оно равно сорока. Получили уравнение $x + y = 40$. Разность возрастов мамы и дочки равна $x - y$. Это приводит ко второму уравнению: $x - y = 24$. Получилась *система двух уравнений с двумя неизвестными*: $\begin{cases} x + y = 40, \\ x - y = 24. \end{cases}$ Это, безусловно, школьная задача.

Поставим перед собой цель решить, не только эту конкретную систему, но вообще **любую** систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2. \end{cases} \tag{1}$$

Теория линейных уравнений складывается из двух компонент: *метода решения систем линейных уравнений* и *условий разрешимости этих систем.*

Метод решения системы (1), который будет сейчас описан, назван именем Карла Фридриха Гаусса (1777-1856) – великого математика и замечательного вычислителя (его называли «королем математиков»).

Метод Гаусса основанн на идее *исключения неизвестных*, Он состоит в следующем. Если все коэффициенты a_{ij} системы уравнений (1), равны нулю, то, решение возможно лишь если $b_1 = b_2 = 0$, и им является любая пара чисел x и y, если же хотя бы одно из чисел b_1 или b_2 отлично от нуля, решения нет. В этом случае говорят, что система (1) *несовместна*. Если же, скажем, $a_{22} \neq 0$, то, выразив y из второго уравнения через x, подставим полученное выражение в первое уравнение. В итоге мы приходим к одному уравнению с одним неизвестным (а было предположено, что такие уравнения читатели решать умеют). Решив его, если уравнение совместно, найдем x, а затем y; если же получившееся уравнение несовместно, то и изначальная система несовместна.

В **условиях разрешимости** попробуем разобраться с помощью рисунков. Но сначала вернемся к тому, что было. Система (1) определяется тремя столбцами $a^1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$, $a^2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$ и $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$. Имеются три возможности: 1) столбцы a^1 и a^2 не пропорциональны, 2) первые два столбца пропорциональны, а столбец правых частей им не пропорционален, наконец, 3) все три столбца пропорциональны друг другу. В первом случае метод Гаусса приведет к однозначному разрешению системы, и каждый может выписать явные формулы. Нетрудно сообразить, что во втором случае система несовместна, а в третьем существует множество решений. Доказать эти факты не составляет труда. Эти три случая иллюстрируют наши рисунки. На рис. 1 столбцы $a^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ и $a^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ матрицы коэффициентов непропорциональны и прямые $x + y = 40$, $x - y = 24$ пересекаются в точке $(8, 32)$. На рис. 2 прямые $x + y = 20$ и $x + y = 40$ не пересекаются, а на рис. 3 прямые $x - y = 24$ и $2x - 2y = 48$ совпадают и совокупность решений состоит из графика функции $y = x - 24$.

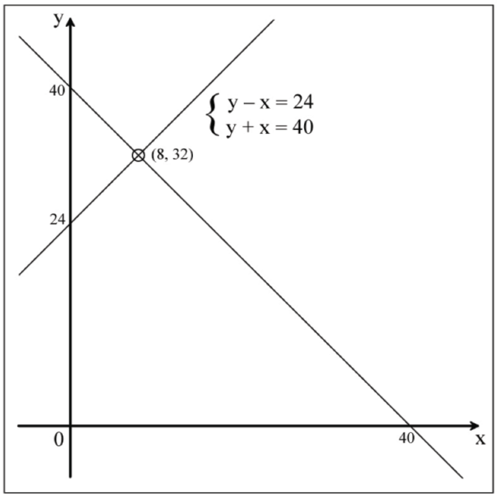


Рис. 1. Мать и дочь

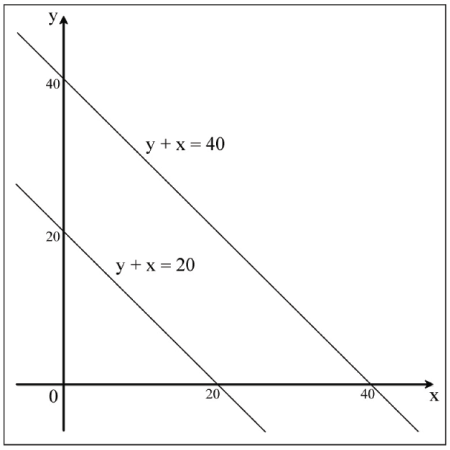


Рис. 2

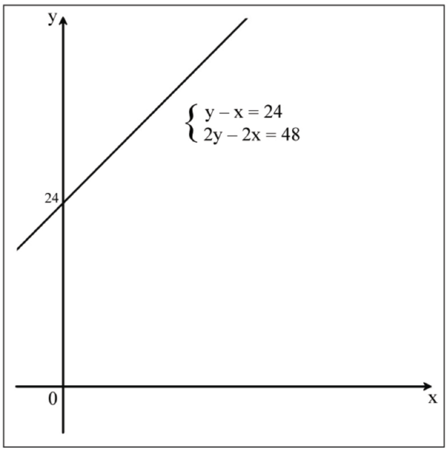


Рис. 3

Вот чуть усложненная задача 1:

Задача 1′. *В клетке фазаны и кролики. У них вместе 35 голов и 94 ноги. Сколько в клетке фазанов и сколько кроликов?* Эта задача взята из китайского трактата, написанного во втором веке нашей эры, примерно 1800 лет тому назад. Мы придадим этой задаче несколько другую форму и решим ее уже в вузе.

Второй этаж (вуз). **Задача 2.** *Через три точки* (x_i, y_i), $i = 1, 2, 3$ *провести параболу (проинтерполировать три точки полиномом второй степени).*

Коэффициенты параболы неизвестны. Обозначим их, как обычно через a, b, c. Пусть к примеру $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $y_1 = 0$, $y_2 = 35$, $y_3 = 94$.

Получаем *системы трех уравнений с тремя неизвестными*:

$$\begin{cases} c = 0, \\ a + b + c = 35. \\ 4a + 2b + c = 94. \end{cases}$$

Если во второе и третье уравнение подставить $c = 0$ (это следует из первого уравнения), мы получим систему про фазанов и кроликов, которую научились решать в школе. (Ответ: 12 кроликов и 23 фазана.)

И снова поставим перед собой цель решить не только эту конкретную систему, но вообще **любую** систему трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \tag{2}$$

И снова применим метод Гаусса исключения неизвестных. Если все коэффициенты a_{ij} системы уравнений (2), равны нулю, то, решение возможно лишь если $b_1 = b_2 = b_3 = 0$, и им является любая тройка чисел x_1, x_2, x_3, если же хотя бы одно из чисел b_1, b_2 или b_3 отлично от нуля, решения нет: система (2) *несовместна.* Если же, скажем, $a_{33} \neq 0$, то, выразив x_3 из третьего уравнения через x_1, x_2, подставим полученное выражение в первое и второе уравнение. В итоге мы приходим к системе двух уравнений с двумя неизвестными (а такие системы мы решать научились). Решив полученную систему, если она совместна, найдем x_1, x_2, а затем x_3; если же получившаяся система несовместна, то и изначальная система несовместна.

Итак, мы научились решать систему двух уравнений с двумя неизвестными, на базе этого – систему трех уравнений с тремя неизвестными, мы по сути объяснили, как последовательно, шаг за шагом научиться решать любую систему n уравнений с n неизвестными. Бесконечномерные системы решаются точно также.

А решение систем линейных уравнений – это база всей прикладной математики, инженерии и прикладного естествознания. В этом состоит **мотивировка** этого рассмотрения, мотивировка важности «первого подъезда» в Доме математики.

И еще надо сказать, что уже в пределах моей собственной жизни, т.е. с исторической точки рения совсем недавно, вошла в математику теория линейных неравенств, на которых основывается математическая экономика. Эта теория столь же естественная и простая, как и теория линейных уравнений, ждет своего хотя бы самого небольшого внедрения в школу.

Решение нелинейных уравнений (второй подъезд)

ЭТАЖ	УР-Е	ПР-ВО
3. Университет	f(x)=y,	$x, y \in C([a,b])$
2. ВУЗ	f(x)=y,	$x, y \in \mathbb{R}^n$
1. Школа	f(x)=y,	$x \in \mathbb{R}$
Второй подъезд		

Начнем опять с задачи. Простейшая нелинейная функция – квадратичная, а простейшая среди квадратичных функция $F(x) = x^2$.

Задача 2. *Решить уравнение* $x^2 = 2$.

Кое-кто может удивиться:"А чего его решать, его решение это ведь $\pm\sqrt{2}$, не так ли?" Но $\sqrt{2}$ это просто символ, а в чем его суть?

Нет такой дроби, квадрат которой в точности равен двум (это установили еще пифагорейцы). Решить поставленную выше задачу 2, т.е. решить уравнение $x^2 = 2$ в нынешнем понимании означает УКАЗАТЬ СПОСОБ (математики говорят *алгоритм*) ПРИБЛИЖЕНИЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ $x^2 = 2$ (С ЛЮБОЙ ТОЧНОСТЬЮ) ДРОБЯМИ.

Осталось пояснить значение двух слов. Слово «алгоритм» означает точное предписание, ведущее к цели. Считается, что первый алгоритм для решения уравнения $x^2 = 2$, принадлежит древнегреческому математику Герону, жившему в первом веке до нашей эры. Алгоритм Герона описывается так: надо выбрать любую дробь x_0 и затем использовать такую итеративную последовательность: $x_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}}), n = 1, 2\dots$

Решим задачу 2 по-своему. «Наша» процедура вычисления корня из двух изображена на рис. 4.

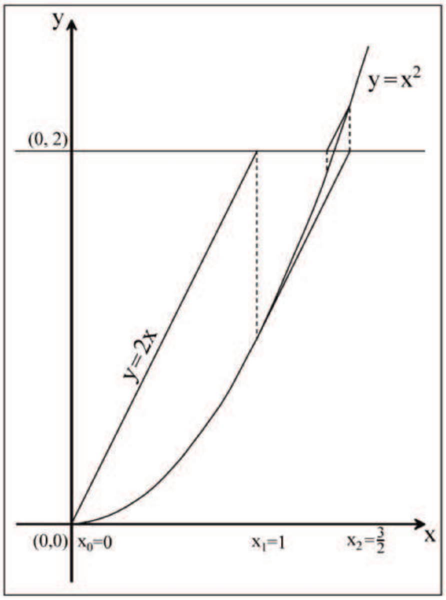


Рис. 4

Она производит последовательность чисел $\{0, x_1, \dots\}$, начиная с нуля по следующему итеративному правилу: $x_n = x_{n-1} + \frac{1}{2}(2 - x_{n-1}^2)$, $n = 1, 2, \dots$ Вычисляя последовательно по этой формуле, мы получим $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{3}{2}$, $x_3 = \frac{5}{4}$, и так далее. Квадраты четных членов этой последовательности будут больше, а нечетных меньше двух. При этом квадраты нечетных членов последовательности будут со все большей точностью приближаться к двум слева, а квадраты четных членов последовательности будут все с большей точностью приближаться к двум справа. В этом случае говорят, что *предел последовательностей* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{x_{2n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ *и* $\{x_{2n-1}\}_{n\in\mathbb{N}}$ *равен корню их двух.* Разумеется, алгоритмов неисчислимое множество, и выбор конкретного – дело вычислителя.

Нетрудно дать математическую формулировку понятию предела, но на интуитивном уровне оно означает: *чем больше* n *тем ближе* x_n *к* a, и такого понимания на первых порах может оказаться достаточным.

Понятие предела фундаментально, на нем, собственно, базируется весь математический анализ – основа математического естествознания и инженерии. В этом мотивированность внедрения этого понятия в сознание тех, кто хочет понимать суть математики.

И снова поставим перед собой цель решить, не только задачу 2, но вообще научиться решать уравнение $f(x) = b$, где f *любой (скажем) полином.*

Сейчас будет точно (за исключением выбора начальной точки, что является делом самого вычислителя) описан *модифицированный метод Ньютона* (см. рис. 5).

Итак, пусть нам даны полином f и число b. Для решения уравнения $f(x) = b$ выберем два числа x_0 и R и начнем строить такую итеративную последовательность:

$$x_n = x_{n-1} + R(b - f(x_{n-1})). \tag{3}$$

Действительно, посмотрите на рис. 5. Что происходит на первом шаге? Берется точка плоскости с координатами $(x_0, f(x_0))$ и через нее проводится прямая $y = \frac{1}{R}(x - x_0) + f(x_0)$ с углом наклона $\frac{1}{R}$. Эта прямая пересекается с прямой $y = b$ в точке (x_1, b), где x_1 ищется из уравнения $b = \frac{1}{R}(x_1 - x_0) + f(x_0)$, откуда следует, что $x_1 = x_0 + R(b - f(x_0))$, а это есть формула (3) при $n = 1$. А дальше все повторяется: берется точка плоскости с координатами $(x_1, f(x_1))$ и через нее проводится прямая $y = \frac{1}{R}(x - x_1) + f(x_1)$ с углом наклона $\frac{1}{R}$, которая пересекается с прямой $y = b$ в точке (x_2, b), где x_2 ищется из уравнения $b = \frac{1}{R}(x_1 - x_0) + f(x_0)$, откуда следует, что $x_2 = x_1 + R(b - f(x_2))$, а это есть формула (3) при $n = 2$ и так далее.

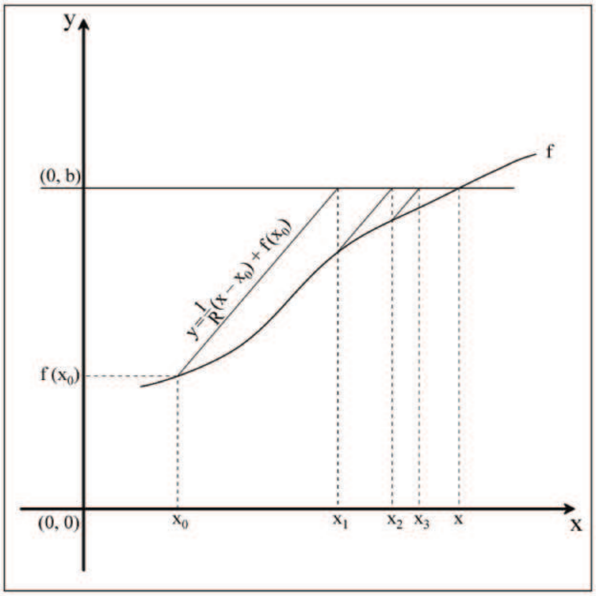


Рис. 5

"А как же все-таки выбирать x_0 и R?" – можете вы спросить. Уже было сказано, что *это ваша забота, забота вычислителя.* Подумайте, что вам удобнее. Вернемся к корню из двух. Мы начинали с точки $(0, 0)$ и выбрали наклон прямой равным двум. Но ведь мы могли начать с точки $(1, 1)$ с тем же наклоном, могли начать с любой точки (x_0, x_0^2), $0 \le x_0 \le 1$ с тем же наклоном. А можно было начать с той же точки $(0, 0)$, но взять более «крутой маршрут», вместо двух, скажем взять три, и все равно вы придете к цели. А слишком полого стартовать из точки $(0, 0)$ нельзя. Посмотрите, например, что будет, если в качестве наклона выбрать единицу. Словом, для разумного выбора начального шага *надо подумать!*

Возможно, что это покажется поразительным, что и в вузе и в университете можно реализовать **точно такой же** метод решения систем n нелинейных уравнений с n неизвестными и бесконечного числа уравнений с бесконечным числом неизвестных. Только надо число R заметить обратимой матрицей.

А если применить описанную процедуру к уравнению $y(x) = \int\limits_0^x y(x)dx + 1$, начавши с константы $y_0(t) \equiv 0$, то мы приходим к ряду Маклорена для функции $y(x) = e^x$. На аналогичном пути получается ряд Маклорена для синуса: $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \ldots$, так поразивший пятнадцатилетнего Гельфанда.

Наконец, совсем кратко пройдемся по третьему подъезду.

Теория квадрик (третий подъезд)

ЭТАЖ	УР-Е	ПР-ВО
3. Университет	$\langle Ax, x\rangle = b,$	$x \in \ell_2$
2. ВУЗ	$\langle Ax, x\rangle = b,$	$x \in \mathbb{R}^n$
1. Школа	$Ax^2 = b,$	$x \in \mathbb{R}^2$
Третий подъезд		

Мудреное слово «квадрики» может испугать. Но это совсем простая вещь. Простейшая квадрика – это квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, а для двух переменных это окружность $x^1 + y^2 = 1$, гипербола $xy = 1$, парабола $y = x^2$, а в общем случае это *множество уровня квадратичной функции.*

Начнем опять с задачи.

Задача 3. *Каковы множества уровня функции* $f(x) = x^2$. Или иначе, что является решением уравнения $x^2 = b$.

Разумеется, это два числа $\pm\sqrt{b}$, если $b > 0$, одно число нуль, если $b = 0$ и пустое множество, если $b < 0$.

А в случае двух переменных, что это за множество $\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 = b$? Тут классификация этих множеств уровня (их называют *кривыми второго порядка*) чуть сложнее. Если $\alpha\gamma - \beta^2 \neq 0$ это эллипсы (см. Рис 6, в частности, окружности), гиперболы, пары пересекающихся прямых (являющихся нулевым множеством уровня функции $f(x, y) = xy$, может быть одна точка, как нулевое множество уровня функции $f(x, y) = x^2 + y^2$, наконец, это может быть пустое множество, как в случае уравнения $x^2 + y^2 = -1$.

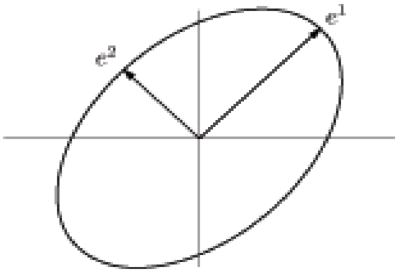


Рис. 6

Несколько слов в заключение.

Мне не хотелось бы, чтобы вы думали обо мне, как о человеке, который не понимает современного состояния математического образования. Я не в первый раз выступаю перед учителями и преподавателями вузов. И всегда слышу восклицания: "Ну, какие нелинейные уравнения, какие квадрики? **Их** (нынешних школьников и студентов) **ничему** нельзя научить!"

Но трудно жить, не думая о будущем, и еще труднее жить без надежды. Мне хотелось бы верить в то, что в будущем кое-что изменится в лучшую сторону. В надежде на это «лучшее будущее» я и решил построить для вас, моих слушателей, свой Дом математики. Чтобы показать, что Математика проста, естественна, красива и фундаментальна. Что можно мотивированно (т.е. каждый раз объясняя замысел и цель) учить фундаментальным вещам в математике сызмальства. Что путь до вершин Математики, на языке которой написана Книга природы, просматривается от самых ее оснований. Что зародыши результатов, которые принадлежат вершинам университетского образования, таким как теоремы Фредгольма, Люстерника, Гильберта, как методы Гаусса и Ньютона, как начала математического анализа и математического естествознания доступны любому человеку, который не боится думать.

А сколько таковых? Интересный вопрос! По моим оценкам таковых не менее десяти процентов среди окружающих нас людей (эти оценки для учащихся в школе возможно уточнить, если воспользоваться объективными данными, которые может предоставить Единый государственный экзамен). Десять процентов мыслящих людей, способных к анализу, способных тем самым к творчеству, это немало.

Вести таких людей к вершинам науки – такую цель ставил перед собой Андрей Николаевич Колмогоров, имя которого освещает наше сегодняшнее собрание.

Технолого-инструментальные основания проектирования методической системы преподавания с наперед заданными свойствами в условиях ФГОС III поколения

В.М. Монахов

Переход от ступенчатой системы образования на двухуровневую (бакалавр, магистр), естественно, упирается, во-первых, в необходимость смены парадигмы образования, во-вторых, в многочисленные зоны кризиса, накопившиеся как в теории, так и в образовательной практике за последние годы.

Проведем обзор таких зон кризиса с позиции философского осмысления сложившегося положения.

Первая зона кризиса не только отечественного, но и мирового образования, это **целеполагание**. Другими словами, это необходимость правильного понимания и осознания того, что мы хотим получить на выходе или в результате предстоящих проектировочных и экспериментальных педагогических исследований.

Вторая зона кризиса – это непонимание того, что, к глубокому сожалению, педагогическая наука **не обладает точными методами** решения педагогических задач. Все решается или волевыми методами, или методами, не имеющими ничего общего с наукой. Здесь необходимо философское осознание разницы между точными методами и приближенными методами.

Третья зона кризиса состоит в том, что при реформировании и модернизации отечественного образования не была в должной степени использована **философия и методология педагогического проектирования**. А педагогическое проектирование позволяет достаточно точно представить вектор движения к цели, целесообразную последовательность этапов проектировочной деятельности, логическую структуру содержания пути исследования от поставленной цели к ожидаемому результату.

Четвертая зона кризиса. Не менее важна проблема соотнесения получаемого результата с ранее поставленной целью. При этом возникает целый спектр вопросов: как выбирать оценочные параметры для такого сравнения? какие отклонения допустимы? и т.д.

Пятая зона кризиса – самая главная для педагогических исследований - это философское обоснование соотношения между проектировочной деятельностью по решению педагогической проблемы и экспериментальной деятельностью, подтверждающей или не подтверждающей правомочность или неправомочность построенного объекта или системы.

В XX веке в педагогике появилось предложение формулировать *цель в образе результата*. Следует только уточнить – результата какого: проектируемого, ожидаемого, заданного или приближенного, но допускающего экспериментальное его улучшение и приближение к цели. Определенную объективизацию в постановке цели сделали В.П. Беспалько для глобальных целей и таксономия Блюма для частных целей.

В настоящее время целый ряд исследователей серьезно обеспокоены первой из перечисленных зон кризиса – зоны целеполагания. Так А.В. Боровских и Н.Х. Розов считают, что:

"а) Современное состояние педагогической аргументации явно неудовлетворительно. Она использует целый ряд логических систем, подчас противоречащих друг другу уже в исходных посылках. Поэтому простое совмещение их невозможно, а приоритет ни одной из них отдать нельзя, поскольку каждая из них является вполне разумной, но только в определенных рамках.

б) Реальная педагогическая деятельность не дает решения возникших вопросов, поскольку сама изобилует хаотичными и бессвязными инициативами и инновациями.

в) Проблемы образования являются системными и упираются в главный вопрос – о целях образования" [7, с. 74].

Таким образом, как указывают А.В. Боровских и Н.Х. Розов, проблемы отечественного образования являются системными и естественно требуют системного анализа, как хода реформы, так и модернизанизации образования. С моей точки зрения, такой системный анализ был сделан профессором В.А. Сухомлиным в докладе "Реформа высшей школы – анализ итогов" на V Международной научно-практической конференции "Современные информационные технологии и ИТ-образование" 2010 г. В этом докладе были сделаны заключения, которые констатируют следующее:

1) "замена в образовательных стандартах обязательного минимума содержания обучения компетенциями";

2) "...с помощью ФГОС знания или содержание обучения изгоняется из нормативного пространства Российской системы ВПО и заменяется лозунгами";

3) "В ФГОС используется примитивнейшая модель компетенции";

4) "В мировой образовательной практике давно применяются гораздо более искусные системы компетенций, в том числе использующие специальные метрики для количественной оценки компетенций-целей обучения. Такие системы основаны на описаниях **стандартизованных объемов знаний**";

5) "...весь мир вовлечен в процесс проектирования знаний, и эти знания есть **основной продукт** и **товар** в обществе";

6) "...переход к ФГОС разрушает годами формирующуюся **систему учебно-методического обеспечения высшей школы**".

Все вышеприведенное убедительно показывает, насколько "дезориентирован вектор методической работы системы ВПО".

Если суммировать все вышеприведенные цитаты безусловных авторитетов в области высшего профессионального образования, то можно сказать с некоторой натяжкой, что участвуя в перестройке, своего рода переналадке всей системы учебно-методического обеспечения ВПО, (на примере университета МГГУ им. М.А. Шолохова), я рассматриваю поставленную МОН РФ задачу как решение **некорректно поставленной методической задачи корректными методическими методами**. Прошу не винить меня в нескромности, но это напоминает формулировку Постановления Совета министров СССР о присуждении Государственной премии академику А.Н. Тихонову "За решение некорректно поставленных задач корректными математическими методами". Все сказанное найдет реализацию в созданной технологии проектирования методичсекой системы преподавания с наперед заданными свойствами в современных условиях функционирования ФГОС III поколения.

Рассмотрим один из методических подходов к **конструктивной детализации категории цель**. Если цель рассматривать как педагогический объект, то логика этапов его построения для компетентностного подхода может выглядеть так:

– модель педагогического объекта;

– внутримодельные исследования объекта для уточнение ряда его параметров;

– детализация самой модели на языке основных параметров. (Философское понимание модели как системы параметров, при функционировании которой можно определить оптимальные значения параметров, которые затем фиксируются в виде оптимальных критериев); возможен также аксиоматический подход к построению модели педагогического объекта;

– классификация педагогических объектов, выступающих в качестве прикладной реализации цели:

процесс (учебный, педагогический, образовательный);

система (методическая, дидактическая, педагогическая);

траектория профессионального становления специалиста.

– очень важное утверждение: любую систему образования можно построить, используя три вышеуказанных педагогических объекта;

– для построения системы образования через вышеуказанные три объекта необходимы три педагогических технологии:

– технология проектирования учебного процесса;

– технология проектирования методической системы преподавания (МСП);

– технология проектирования траектории.

Более подробную информацию можно получить об этих технологиях на сайте "Центра педагогических технологий В.М. Монахова" http://www.ctm-tlt.ru или по адресу http://www.ctm-tlt.ru/login.php

В МГГУ им. М.А. Шолохова в настоящее время реализуется компетентностно-контекстная модель профессионального становления бакалавра, отвечающая современным требованиям образовательных стандартов к качеству высшего профессионального образования (В.Д. Нечаев) [1].

В образовательной практике ВПО накоплен значительный инновационный педагогический опыт, который обощается и систематизируется с теорией контекстного обучения А.А. Вербицкого [3] и с теорией педагогических технологий В.М. Монахова [2]. Взаимодействие этих теорий позволяет целенаправленно отбирать и проектировать новое содержание образования, целесообразно и динамично его развертывать, соблюдая профессиональную логику становления специалиста. Эта модернизация естественно затрагивает логическую структуру и все звенья педагогической и методической системы, предполагая их системную методическую переналадку. В этой большой перспективной работе мною выдвинута **идея создания технологии проектирования методической системы с наперед заданными свойствами** [4]. Фактически речь идет о формировании новой парадигмы образования, требующей новых решений таких принципиальных проблем дидактики и методики, как:

– построение **модели учебного процесса,** адекватно отражающей как принципы компетентностно-контекстного формата обучения (**ККФО**), так и пригодной для последующей технологизации и информатизации;

– технологическое решение вопросов **управления** как самим учебным процессом, так и процессом формирования ключевых компетенций;

– разработка **параметров и критериев оценки эффективности** функционирующей системы профессиональной подготовки бакалавров, позволяющих системно оптимизировать образовательную деятельность университета, когда целевой функцией выступает профессиональная компетентность и безусловная конкурентоспособность выпускника.

Впервые сделана попытка интеграции теории контекстного обучения А.А. Вербицкого и теории педагогических технологий В.М. Монахова, как **принципиально новый подход к проектированию основных педагогических объектов** (учебный процесс, методическая система преподавания, траектория профессионального становления бакалавра), реализующих ККФО при подготовке бакалавра:

– приведение в полное соответствие логическую структуру учебно-познавательной деятельности в условиях ККФО с логической структурой (содержание этапов и их последовательность) будущей профессиональной деятельности бакалавров;

– новый компетентностно-контекстный подход к **проектированию целевых составляющих учебных дисциплин** в строгом соответствии с ФГОС III поколения;

– модификация проектирования содержания диагностик, устанавливающих факт сформированности данной ключевой компетенции у студента или факт ее несформированности;

– использование при проектировании педагогических объектов ККФО методологии нечеткого моделирования;

Перечислим основные **инновационные моменты этой переналадки.** Прежде всего, все сказанное должно найти воплощение в **модели** учебного процесса создаваемой методической системы профессиональной подготовки бакалавра. Для этого необходимо модифицировать уже построенную модель учебного процесса – базового понятия теории педагогических технологий.

Моделируя процесс формирования профессиональной компетентности в ККФО, в качестве базовой категории, следует брать понятие траектории и в дальнейшем оперировать категорией – **траектория профессионального становления бакалавра на уровне заданной компетентности**.

Прикладным выходом переналадки должны стать три существенно *модифицированных технологии*:

– технология проектирования учебного процесса по основным дисциплинам, представляемых компетентносто-ориентированными модулями, обеспечивающими **гарантированное** формирование основных компетенций бакалавра в соответствии с требованиями ФГОС III поколения;

– технология проектирования методической системы преподавания основных учебных дисциплин при подготовке бакалавра, направленная на качественное формирование основных компетенций в соответствии с принципами ККФО;

– технология проектирования траектории профессионального становления бакалавра (в этой технологии заложены большие резервы оптимизации системы подготовки бакалавра).

Особое внимание следует обратить на вторую технологию. Почему? Нами выдвигается **инновационная методическая идея о переналадке вышеуказанной технологии МСП в технологию проектирования МСП с наперед заданными свойствами.**

В чем суть **МСП с наперед заданными свойствами**? Принципиально новый язык формулировки ЦЕЛЕПОЛАГАНИЯ

- на уровне цели МСП (курса в целом);
- на уровне цели разделов курса;
- на уровне микроцели.

Критерием правильности структуры этой иерархии целей могут стать следующие неравенства:

Цель курса $\leq \sum B_{ij}$ (всех микроцелей);

Цель раздела (учебной темы) $\leq \sum B_j$.

Специфика целеполагания в условиях ККФО заключается в соотношении традиционного проектирования содержания учебного процесса (здесь дидактическая задача усвоения студентом микроцелей) и процесса квазипрофессиональной деятельности, формирующей основные ключевые компетенции.

Одним из возможных решений может быть наложение траекторий формирования заданных стандартом ключевых компетенций на более-менее традиционное дидактическое поле усвоения микроцелей (рис. 1).

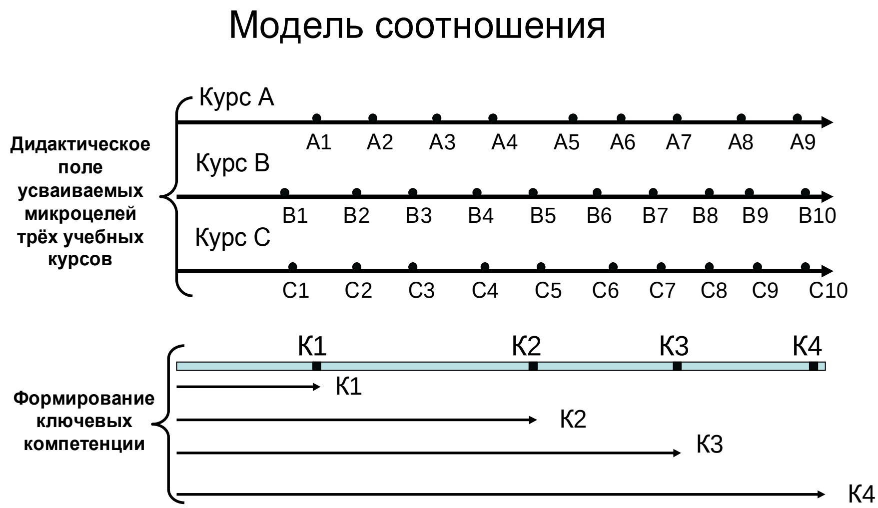


Рис. 1

Тонкий момент при построении модели соотношения связан с трансформацией учебной деятельности студентов в квазипрофессиональную деятельность будущих бакалавров. А.А. Вербицкий в теории контекстного обучения [3] заметил о неполной адекватности логических структур будущей профессиональной деятельности и традиционной учебно-познавательной деятельности студентов. Если представить схематично две логические структуры, то есть состав компонентов и их последовательность выполнения профессиональной деятельности с логической структурой учебной деятельности, то на лицо явное несоответствие (рис. 2).

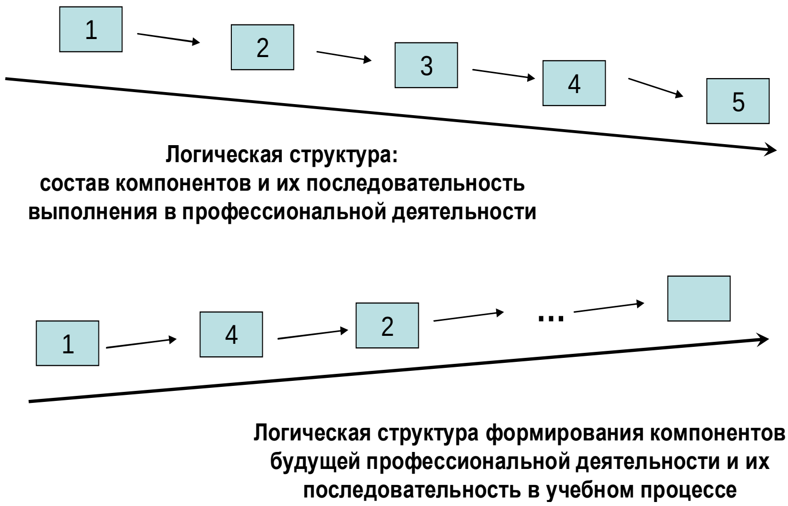


Рис. 2

Мною выдвинут тезис о необходимости установления **гомоморфизма между логической структурой профессиональной деятельности и логической структурой проектируемой учебной деятельности.**

Модель реализации соотношения между усваиваемыми микроцелями и формируемыми ключевыми компетенциями может быть представлена формулами:

$$K1 = \sum_{i=1}^{7} Ai + \sum_{j=1}^{6} Bj + \sum_{k=1}^{4} Ck,$$

$$K2 = \sum_{i=6}^{12} Ai + \sum_{j=3}^{7} Bj + \sum_{k=5}^{18} Ck,$$

$$K3 = \sum_{i=13}^{17} Ai + \sum_{j=4}^{13} Bj + \sum_{k=3}^{14} Ck.$$

Конечно после вышеприведенных выкладок напрашивается тривиальная модель реализации компетентностно-контекстного формата обучения, а именно после систематизации и классификации всех ключевых компетенций, декларируемых стандартом и добавляемых самим университетом, получается следующее соответствие: компетенции К1, К2, К3 опираются на поля дидактических микроцелей А1, А2, А3,...; В1, В2, В3,..., С1, С2, С3,..., которые после соответствующей реорганизации могут быть собраны в один интегрированный курс, формирующий компетенции К1, К2, К3. Для следующих ключевых компетенций К4, К5, К6 собирается другой набор микроцелей и другой интегрированный курс.

С точки зрения проектирования это более целесообразно, естественно, логично и результативно. А с точки зрения практических проблем образования – это "Эверест" неожиданных проблем и трудностей и сплошные точки разрыва в системе образования, начиная с вопроса, где взять преподавателей, готовых к работе в такой системе, кончая учебниками и необходимостью гигантского педагогического эксперимента.

Сложнейший вопрос: как **согласовать факт фиксации достижения дидактической микроцели с фактом сформированности той или иной ключевой компетенции**? Установление факта достижения микроцели - деятельность традиционная, а установление факта сформированности той или иной компетенции видимо потребует использование методологии нечеткого моделирования [6] и ввод соответствующих шкал нечетких оценок.

После перечисления кардинальных моментов философии образования и обзора возможных решений насущных проблем бытия современного образования, остановимся на следующих вопросах:

1. Модернизация образования предполагает эволюционное перерастание отдельных компонентов традиционной системы в инновационную или их одномоментную замену, другими словами, или выстраивание новой системы идет с нуля, или бесконечное совершенствование компонентов.

2. На этом фоне частными проблемами выглядят:

философия обобщения педагогического опыта,

философия смены парадигмы образования,

философия понимания того, что надо от информационных технологий образованию и надо ли,

философия осознания пророческих слов Яна Амоса Коменского о том, что видимо в будущем человечество придумает дидактическую машину, делающую обучение неизбежно успешным.

3. Компетентностно-контекстный формат обучения по своей идее предполагает построение системы с наперед заданными свойствами (естественно **главные свойства задаются обозначенными в стандарте ключевыми компетенциями**).

Первая задача: ключевые компетенции формулируются в виде **заданных свойств**.

Вторая задача: заданные свойства переводятся на язык **основных параметров методической системы преподавания**, придавая им инструментальные основы модельных представлений.

Третья задача: модели трех педагогических объектов, в совокупности представляющие и описывающие ту или иную систему, "оснащаются" вышеуказанными **параметрами, как переменными оценочными показателями функционирующей модели**.

Четвертая задача: в специально поставленном педагогическом эксперименте определяется **рабочее поле переменных параметров**, которое позволяет приблизиться к **допустимому (а лучше к оптимальному) режиму функционирования методической системы.**

Пятая задача: выявляется **оптимальный режим функционирования модели МСП, реализующей наперед заданные свойства системы.**

Принятие этой философии образования естественно устанавливает следующий спектр важнейших **методологических проблем**, без решения которых проектируемая методическая система преподавания при своем функционировании не будет в полной мере проявлять наперед заданные свойства.

Первый блок. **МЕТОДОЛОГИЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ** вышеуказанных трех педагогических объектов, совокупность которых и представляет образовательную систему ККФО. Моделирование мы рассматриваем как процесс создания моделей педагогических объектов и процессов, которые в свою очередь выступают инструментальной основой технологизации и информатизации системы образования.

Второй блок. **КОНЦЕПТУАЛЬНАЯ ОСНОВА МОНИТОРИНГА** и его инструментализация и компьютеризация.

Третий блок. **ОПТИМИЗАЦИЯ ОБЪЕКТОВ И ПРОЦЕССОВ**. Методы оптимизации, начиная с Ю.К. Бабанского, дают возможность говорить об эффективности, как педагогических систем, так и учебного процесса и методической системы преподавания, и предоставляют инструментарий для мониторинга и управления качеством образовательного процесса. Конкретнее и подробнее мониторинг управления качеством рассмотрен в работе, в которой предлагается построение шкалы оценок на основе методологии нечеткого моделирования [6].

Подробнее остановимся на *первом блоке* **МЕТОДОЛОГИЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ**. В связи с тем, что в стратегию развития МГГУ имени М.А. Шолохова взят компетентностно-контекстный формат, то проблема целеполагания является ведущей и предполагает построение инструментальной **модели конструирования целеполагания и фиксации факта достижения цели**. Проблема технологизации и информатизации компетентностно-контекстного формата требует создания **модели динамики модернизации** образовательного процесса.

Методология моделирования оптимального образовательного процесса компетентностно-контекстного формата предполагает решение следующих задач:

1. Разработка методологии моделирования категории компетентность, состоящая из исследования возможных **моделей структуры компетентности** с целью выбора наиболее инструментальной модели структуры. В качестве одного из примеров укажем матричную модель компетентности, когда каждой ключевой компетенции ставится в соответствие последовательность профессиональных задач.
2. Выбор **модели соотношения логической структуры** будущей профессиональной деятельности выпускника и логической структуры учебно-познавательной деятельности при его профессиональном обучении.
3. **Модель оптимальной поддержки и сопровождения учебного процесса** на базе использования результатов интеграции информационных и педагогических технологий.

Второй блок **КОНЦЕПТУАЛЬНАЯ ОСНОВА МОНИТОРИНГА** предполагает создание трех компьютерных систем.

Первая – компьютерная система аналитической обработки всех результатов диагностик, что фактически представляет собой создание открытого эффективного и объективного мониторинга, отслеживающего динамику успехов каждого студента и системный текущий контроль, несущий в себе большой воспитательный потенциал, позволяющий мотивировать переход студентов из группы неуспевающих в группу успевающих, а из группы успевающих в лидеры научно-исследовательских групп.

Вторая – компьютерная система мониторинга, объективно отслеживающего правильность пути к конечной цели – новой системе образования с наперед заданными свойствами.

Третья – компьютерная система фиксации сформированности или несформированности ключевых компетенций.

Третий блок **ОПТИМИЗАЦИЯ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ И ПРОЦЕССОВ** органично связан с исследованиями инновационных закономерностей учебного процесса в вузе. Методология оптимизации предполагает следующие уровни исследования:

1. Разработка **оптимальной модели компетентности** выпускника.
2. Проектирование **оптимальной траектории профессионального становления** выпускника (оптимальность траектории напрямую связана с высоким уровнем эффективности образовательного процесса), логическая структура которой задает логическую структуры основной образовательной программы (ООП).
3. **Оптимальное насыщение траектории** профилирующими учебными дисциплинами (или оптимальное распределение модулей) по параметрам: параметр оптимизации интенсивности подачи учебного материала по годам обучения, параметр оптимальной синхронизации понятийного аппарата, параметр оптимального распределения образовательной учебной деятельности, квазипрофессиональной деятельности и профессиональной деятельности.
4. **Оптимизация соотношений масштабов** частоты диагностик дидактических микроцелей и частоты диагностик, устанавливающих факт сформированности ключевых компетенций или факт неполной или недостаточной их сформированности.
5. **Оптимизация корреляционной связи** между результатами диагностик, как оценки факта усвоения микроцелей, и результатами диагностик, как оценки факта сформированности ключевых компетенций.
6. **Оптимизация компьютерной системы** аналитической обработки результатов всех диагностик и результатов сформированности ключевых компетенций.
7. **Оптимизация коррекционной работы** по результатам, выданным компьютерной системой аналитической обработки.

В основу технологии положена концепция модернизации МГГУ имени М.А. Шолохова, обеспечивающая по замыслу разработчиков во главе с ректором МГГУ В.Д. Нечаевым реализацию основных образовательных программ на базе ФГОС III поколения. Данная концепция предполагает решение таких новых теоретических и прикладных задач, как:

- разработку компетентностных моделей выпускников;
- обеспечение перехода от компетентностных моделей к основным образовательным программам (ООП);
- измерение уровня сформированности компетенций из обязательного набора данного профиля;

- разработку алгоритма создания компетентностно-ориентированных модулей ООП.

В настоящей статье внимание сфокусировано на поиске решения последней сформулированной задачи. Результатом исследования стала технология создания компетентностно-ориентированных модулей, как основной части проектируемой методической системы преподавания с наперед заданными свойствами. Рабочее поле поиска естественно в той или иной степени затрагивает и три предыдущие задачи.

Основные принципиальные положения технологии проектирования компетентностно-ориентированных модулей:

1. Модуль трактуется как **функциональный узел методической системы** профессиональной подготовки в МГГУ им. М.А. Шолохова и понимается как *часть* ООП, имеющая определенную логическую завершенность по отношению к целям образования.
2. Модуль представляет собой **проект учебно-познавательной деятельности студентов**, содержание которого направлено на формирование у них определенных компетенций.
3. В модуле моделируются *ключевые параметры* будущей профессиональной деятельности выпускника, как решение задачи *включения контекста профессиональной деятельности* в учебную деятельность, вытекающей из теории контекстного обучения.
4. Теория контекстного обучения, задавая методологию перехода от профессиональной деятельности к учебной, фактически требует *гомоморфизма логических структур* профессиональной деятельности и учебно-познавательной деятельности, что является источником усиления профессиональной направленности содержания модуля.
5. В учебной деятельности, проектируемой в модуле, моделируется предметное и социальное содержание профессионального труда, которое следует выбирать из двух основных источников: *содержания наук и содержания будущей профессиональной деятельности.* Из содержания наук формируется *теоретическая составляющая модуля*, а из содержания будущей профессиональной деятельности формируется **задачно-деятельностная составляющая модуля**.
6. Сформированность той или иной ключевой компетенции у студента трактуется, как **готовность студента решать профессиональную задачу** (в отдельных случаях квазипрофессиональную задачу). Эту готовность обеспечивает **технология проектирования системы задач и упражнений**, самостоятельное решение которых студентами обеспечивает гарантированную реализацию требований образовательного стандарта.
7. Технология проектирования системы задач и упражнений каждую профессиональную задачу рассматривает как **цель для построения подсистемы дидактических или учебных задач**. Другими словами, самостоятельное выполнение студентами всех учебных задач из подсистемы гарантирует готовность успешного решения профессиональных задач, то есть **сформированность данной ключевой компетенции**.
8. Технология создания модуля базируется на теории педагогических технологий В.М. Монахова и использует:

а) **параметрическую модель** учебного процесса, модифицируемую к условиям ККФО;

б) *технологию проектирования учебного процесса* и *технологию проектирования методической системы* преподавания в вузе, точнее их модификации в условиях компетентностно-контекстного формата обучения (см. http://www.ctm-tlt.ru);

в) *систему диагностирования* учебных успехов студентов (см. http://www.ctm-tlt.ru);

г) *компьютерную систему* аналитической обработки результатов диагностик решения учебных задач (см. http://www.ctm-tlt.ru).

1. Принципиально другая **природа оценки учебных достижений студентов** в ККФО. Оценкой учебных достижений студента является **фиксация факта сформированности ключевой компетенции, как готовности студента** к решению профессиональных задач (а не как арифметическая сумма промежуточных оценок). Степень готовности студента к решению профессиональных задач выражается в виде нечеткой оценки: *готовность сформирована в полной мере; готовность сформирована недостаточно; готовность сформирована частично; готовность не сформирована* [6].
2. **В концепции МГГУ им. М.А. Шолохова этап перехода от компетентностной модели выпускника к ООП следует предварить этапом создания компетентностно-ориентированного модуля, и только создав все модули, сделать переход к этапу создания ООП(!!!)**.
3. Траектория профессионального становления выпускника представляется как последовательность модулей – функциональных узлов. Последовательность всех компонентов траектории и определяет логическую структуру и содержание ООП.

Процедурная схема проектировочной деятельности по созданию компетентностно-контекстного модуля ООП

Процедура 1. Представить построенную компетентностную модель выпускника (КМВ) как сумму ключевых компетенций к$_i$, вытекающих из требований ФГОСа III поколения и достроенных в данном вузе: $K\text{МВ} = \sum\limits_{i=1}^{n} k_i = k_1 + k_2 + k_3 + \cdots + k_n$. Сумма компетенций берет на себя функции цели образования (наперед заданные качества выпускника), а набор модулей становится средством достижения цели.

Процедура 2. Исходя из положения, что человек, обладающий той или иной компетенцией, способен успешно осуществить определенный вид профессиональной деятельности, то есть готов к решению профессиональных задач, **представить** каждую ключевую компетенцию к$_i$ как сумму профессиональных задач $k_i = \text{ПЗ}_{i1} + \text{ПЗ}_{i2} + \cdots + \text{ПЗ}_{im}$ (число профессиональных задач для каждой компетенции желательно не более трех)**.** Набор профессиональных задач берет на себя функции *целевой составляющей модуля.*

Процедура 3. Представить набор ключевых компетенций и соответствующие им профессиональные задачи ПЗ$_{ij}$ в виде таблицы (матрицы) (рис. 3):

K_1	ПЗ$_{11}$	ПЗ$_{12}$	ПЗ$_{13}$	ПЗ$_{14}$	...
K_2	ПЗ$_{21}$	ПЗ$_{22}$	ПЗ$_{23}$	...	...
K_3	ПЗ$_{31}$	ПЗ$_{41}$	...	...	...

Рис. 3

Процедура 4. Для каждой профессиональной задачи ПЗ$_{ij}$ компетенции к$_i$ **разработать** систему дидактических или учебных задач, в содержании и решении которых в достаточно полной мере рассматриваются все элементы, особенности, логика и алгоритмы решения профессиональной задачи ПЗ$_{ij}$ (рис. 4). Другими словами, если студент самостоятельно решил всю систему учебных задач и технологическая диагностика положительно оценила это, то можно переходить к диагностики **о готовности студента решать профессиональную задачу**. В систему учебных задач могут входить задачи повторительного характера, подготовительного характера, промежуточно-вспомогательного характера. Принципиально важно, чтобы целевой составляющей системы учебных задач выступала профессиональная задача.

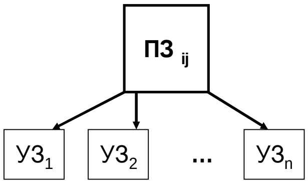


Рис. 4

Процедура 5. Представить совокупность систем учебных задач УЗ$_{ij}$, соответствующих всем профессиональным задачам данной компетенции к$_i$, в виде следующей последовательности учебных задач, изображенной на рисунке рис. 5.

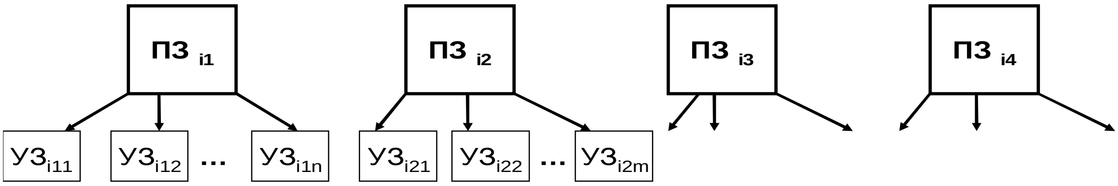


Рис. 5

Процедура 6. Последовательно **поблочно распределить** все системы учебных задач, относящихся к соответствующим профессиональным задачам данной компетенции (рис. 6).

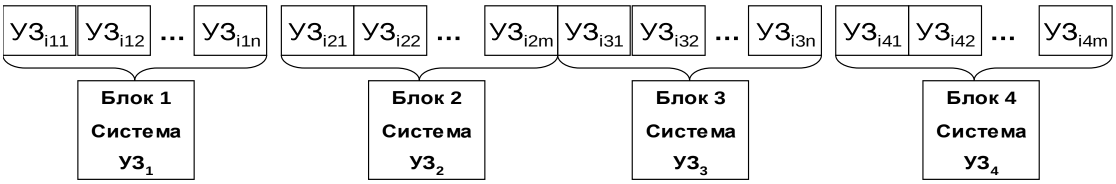


Рис. 6

Процедура 7. Полученную систему учебных задач компетенции $к_i$ привести в соответствие со следующей логической структурой модуля (рис. 7).

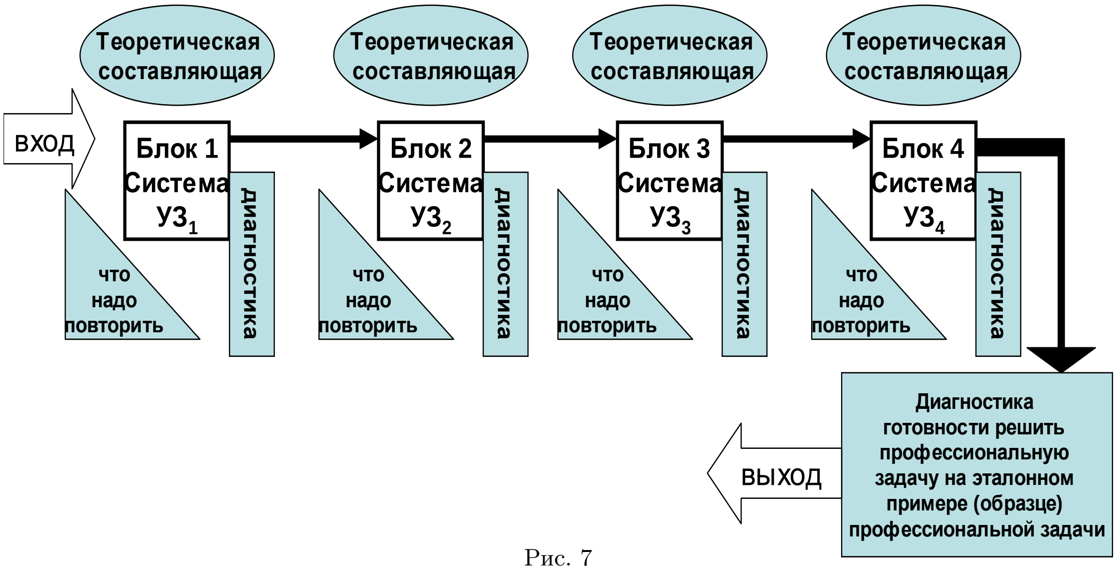


Рис. 7

Процедура 8. Исходя из гипотетической траектории профессионального становления выпускника, в первом приближении **распределить** набор ключевых компетенций (рис. 8).

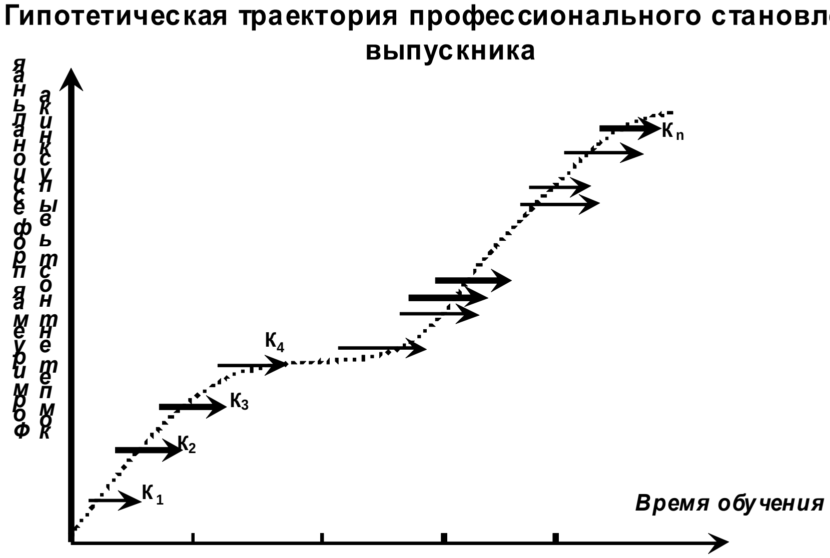


Рис. 8

Процедура 9. Процедура связана с решением сложнейшей методической задачи: распределение показанных на графике компетенций по отдельным модулям. Можно каждой компетенции поставить в соответствие один модуль, можно формирование двух компетенций реализовать в одном модуле, можно формирование трех компетенций реализовать в одном модуле. В соответствии с выбранными *вариантами насыщения модуля* каждый полученный модуль представить в форме образца процедуры 7.

Процедура 10. Полученное таким образом множество модулей распределить графически на гипотетической траектории (рис. 6).

Примечание:

– В этой траектории следует сохранить устоявшуюся логику хорошо проявившей себя методической системы профессиональной подготовки.

– Траектория с распределенными на ней компетентностно-ориентированными модулями и **есть логическая структура и содержательная составляющая ООП**.

Процедура 11. Только окончательно построив и отредактировав все модули и расположив их на траектории профессионального становления выпускника, можно переходить к построению основной образовательной программы ООП.

Библиографический список

1. *Нечаев, В.Д.* Опыт МГГУ имени М.А.Шолохова по созданию основных образовательных программ на базе стандартов третьего поколения [Текст] / В.Д. Нечаев // Материалы международной научно-практической конференции "Технологии построения систем образования с заданными свойствами". – Москва, 2010.
2. *Монахов, В.М.* Введение в теорию педагогических технологий [Текст]: монография / В.М. Монахов. – Волгоград: Перемена, 2006.
3. *Вербицкий, А.А.* Компетентностно-контекстный подход к модернизации гуманитарного образования [Текст] / А.А. Вербицкий // Материалы международной научно-практической конференции "Технологии построения систем образования с заданными свойствами". – Москва, 2010.
4. *Монахов, В.М.* Технология проектирования методических систем преподавания в в высшей школе с наперед заданными свойствами [Текст] / В.М. Монахов // Материалы международной научно-практической конференции "Технологии построения систем образования с заданными свойствами". – Москва, 2010.
5. *Бахусова, Е.В.* Мониторинг динамики формирования ключевых компетенций и профессионального становления специалистов как функции компьютерной системы аналитической обработки оценочных параметров учебного процесса [Текст] / Е.В. Бахусова // Материалы международной научно-практической конференции "Технологии построения систем образования с заданными свойствами". – Москва, 2010.
6. *Монахов, В.М.* О возможностях методологии нечеткого моделирования как нового инструментария информатизации педагогических объектов [Текст] / В.М. Монахов // Материалы международной научно-практической конференции "Современные информационные технологии и ИТ-образование". – Москва, 2008.
7. *Боровских, А.В.* "Деятельностные принципы в педагогике и педагогическая логика" [Текст] /: пособие для системы профессионального педагогического образования, переподготовки и повышения квалификации научно-педагогических кадров / А.В. Боровских, Н.Х. Розов. – М.: МАКС пресс, 2010. – 80 с.

Надпредметное содержание школьного курса математики

А.В. Боровских, Н.Х. Розов

1. Цели образования и деятельностные принципы. Одним из фундаментальных факторов, влияющих на состояние отечественного образования, является изменение целей образования, прежде всего – общего. Подготовка к научной и инженерной деятельности как цель массового образования ушла в прошлое. Получить конъюктурную специальность (экономиста, юриста, потом – психолога или PR-щика) – оказалось бессмысленным: конъюктура меняется быстрее, чем мы успеваем закончить вуз, не говоря уже о школе. Получение профессии (цель, которая была достаточно адекватной на протяжении нескольких веков) тоже оказалось несколько утратившей актуальность: уже поколение нынешних 40-50-летних людей меняло профессию несколько раз в жизни, а для молодежи это просто стало нормой (причем первая смена профессии происходит зачастую сразу после окончания вуза). Наконец, источником любых знаний в неограниченном количестве стал вездесущий Интернет, а учитель вынужден отходить на скромную роль комментатора и надсмотрщика за детьми.

Все это не отражается позитивным образом ни на общественном восприятии значимости образования, педагогической деятельности, школы, ни на результатах образования, которые год от года показывают все более упрочняющуюся тенденцию к ухудшению.

Следует ли признать эту тенденцию объективной, смириться с ней и принять как должное или нужно все-таки усомниться в том, что все так и должно быть, попытаться проанализировать, все ли мы понимаем, все ли ресурсы используем, не являемся ли мы не жертвой неведомого тренда, а всего лишь жертвой собственной глупости и неповоротливости, не позволяющей нам увидеть и принять новые, возможно даже очень прогрессивные тенденции, на которые мы просто не обращаем внимания в силу своей зашоренности, зацикленности в круге привычных действий?

Думаем, что дело обстоит именно так. Одновременно с явно просматривающейся тенденцией к утрате значимости чисто предметного знания в средней школе, происходит и другой процесс: на первый план все более выходит *развитие* человека. Оно описывается в разных терминах, анализируется разными теориями, но все они отправляются от одного центрального пункта – это развитие должно помогать человеку жить, работать, найти свое место в обществе, достигнуть успеха, роста, оправдать смысл своего существования.

Понятно, что ни физика, ни история не могут повлиять на это непосредственно, и именно этим обусловлено падение интереса к обучению в школе. Но у этой медали есть и другая сторона. Она состоит в том, что развитие как таковое осуществляется только в результате собственной деятельности человека (в данном случае – ребенка), а деятельность беспредметной не бывает. Деятельность обязательно должна быть отнесена к чему-то, она должна иметь свой предмет, с которым работает.

Одним из главных следствий этого факта оказывается необходимость смотреть на учебные предметы школьной программы не как на содержание материала для изучения, а именно как на *предметы*, то есть как на средства, орудия обучения, воспитания и развития. Предмет – то, на чем человек учится. А вот чему учится – это уже другой вопрос.

Выделение в качестве цели образования подготовки к деятельности в человеческом обществе, а значит, в качестве цели обучения – освоения общих форм и способов деятельности требует от учителя уметь увидеть эти общие формы и способы деятельности в том учебном материале, на котором он проводит обучение. Деятельностные принципы обязывают нас при формировании программы образования, разработке методики преподавания, организации учебной деятельности акцентировать внимание в первую очередь не столько на предметном, сколько на *надпредметном* содержании – на тех обобщенных деятельностных функциях, которые должно развивать.

Хотя разные надпредметные, метапредметные, допредметные и особенно беспредметные соображения сейчас позиционируются как "авангардные", такой подход на самом деле не является, пользуясь новомодной терминологией, инновацией. Еще в "Комментариях" Прокла к "Началам" Евклида мы находим прямые указания на то, *зачем* Автор (так Прокл называет автора "Начал") приводит ту или иную теорему или доказательство. Прокл явно демонстрирует, что сочинение Евклида – не изложение научной геометрической системы, а, выражаясь современным языком, методическое пособие, позволяющее на наиболее ярких и выразительных примерах освоить фундаментальные приемы логических рассуждений, основные конструктивные элементы теории и те методы, которые в ней используются. Может, именно поэтому математика вообще и геометрия в частности были и остаются важнейшим элементом общего образования – в них "зашиты" не столько предметные знания, сколько общие формы и способы мышления.

Как только мы говорим, что алгебру мы изучаем не для того, чтобы запомнить формулу для корней квадратного трехчлена, а для того, чтобы научиться пользоваться символьными объектами, как только мы говорим, что геометрия изучается не для того, чтобы запомнить доказательство теоремы Пифагора, а для того, чтобы развивать пространственное воображение, как только мы говорим, что изучаем русский язык не для того, чтобы уметь применять грамматические правила, а для того, чтобы научиться выражать свои мысли таким образом, чтобы они понимались именно так, как мы хотим, как только мы говорим, что изучаем физику не для того, чтобы помнить закон Ома, а для того, чтобы понимать сущность законов природы и уметь видеть эту сущность за теми явлениями, которые нас окружают, – немедленно мы переходим от предметного содержания к содержанию надпредметному, к содержанию деятельностному, к тому, ради чего мы и учим детей.

2. Структура процесса развития. Надпредметное содержание образования на самом деле весьма объемно и нетривиально по структуре. Мы здесь приведем без детального разбора некую каркасную схему развития школьника – для того, чтобы разделить целый ряд относительно независимых процессов.

Нижний, так сказать, базовый процесс представляет собой *освоение предметного содержания.* Это – как раз то, чему мы учим на физике, математике, физкультуре, литературе, биологии и так далее.

Второй слой развития, который мы далее называем *надпредметным*, имеет несколько составляющих – *интеллектуальное*, *коммуникативное* и *физическое* развитие ученика. Совершенно понятно, что приемы логического рассуждения, формирование образного мышления, навыки систематизации, умение изъясняться, навыки поведения, быстрота реакции, выносливость и т.д. формируются на том или ином предметном материале, но не привязаны к нему неразрывно, они, при соответствующей постановке обучения, становятся общими способами выполнения действий, переносимых с одного предмета на другой.

Третий слой – это *психическое развитие.* Понимаемое в точном соответствии с концепцией развивающего обучения – как формирование новых психических функций. Примеры психических функций (использование знаковых средств в механизмах внимания, памяти, выбора; самоконтроль; планирование деятельности; обращение к целостности в ситуациях конфликта; абстрагирование и конкретизация, идеализация и реализация и др.) позволяют без особых научных определений отличить их от интеллектуальных или коммуникативных. Для формирования каждой такой функции нужна *проблемная ситуация,* нужен конфликт того или иного сорта, в котором потребность в такой функции возникает. И ситуация должна быть специальным педагогическим образом сконструирована – так, чтобы наряду с конфликтом оказались доступными и средства его разрешения.

Четвертый слой тоже имеет несколько составляющих – это *культурное, личностное и трудовое развитие.* Этот слой отличается от надпредметного слоя тем, что характеризует не способы осуществления действий, а *универсальные формы деятельности*, то есть выполнения (конечно же, путем исполнения тех или иных действий) некоторой социальной функции. Именно наличие определенной социальной составляющей является наиболее существенным их признаком. Социальность легко идентифицируется по тому, предполагается ли определенная произвольность в условиях деятельности, которая принадлежит партнеру, оппоненту, коллеге по команде, или конкурирующей социальной структуре. Как только в схеме управления действиями появляется учет этой произвольности – мы попадаем именно в четвертый слой развития. Существенным оказывается то, что элементарные механизмы реакции на эту "социальную" произвольность условий осуществления деятельности – это и есть те самые психические функции, которые мы отнесли к третьему уровню.

Наконец, пятый слой – это *социально-деятельностное развитие*, состоящее в смене форм деятельности, типов ведущей деятельности, социальной структуры в сообществе учащихся. Здесь на самом деле мы имеем дело с областью, гораздо лучше понимаемой практиками-учителями, чем теоретиками. Отметим в связи с этим хотя бы один такой факт: считается общепризнанным, что *учебная деятельность* является ведущей на всем протяжении обучения – с первого по одиннадцатый класс. В то время как уже в третьем-четвертом классе происходит очередной шаг социализации, и ведущей становится не учение, а *общение*, затем *дружба*, потом *освоение новой деятельности*, и так далее. На определенном этапе возникает *конфликтная социальная структура* – когда деятельности, в которых учащийся участвует, начинают конфликтовать друг с другом (например, за ресурсы – время, силы, интеллект и пр.), и этот конфликт выражается в конфликт ребенка с теми или иными социальными группами, в которые он входит. Формируются навыки поведения в конфликте, воздействия на группу, осуществляющего – если посмотреть объективно – уже взаимодействие деятельностей между собой через человека, их сопрягающего, "стягивающего", объединяющего.

Таблица 1

Надпредметное и предметное содержание учебников по математике 1-4 класса

	Моторика (ТРДСК)	Графика (+ ± ч –)	Логич. м. (РПОЛКСБАМИ)	Алгор. м. (ДЗЦВП)	Простр.м. (ФЭЗДОРПК)	Образн.м. (МОИД)	Динамич.м. (МОИД)	Симв.м. (ШОДУНПМ)	Счет (ПКОГТСРД)	Измер. величин (*+ ± ч –)	Доли и дроби (ОДП)
Дорофеев Г.В., Миракова Т.Н	Тг рд (РД)	±	вОП ксЛа	з	ФЭД	МО (иД)	МО ид	М	КГОТ сРД	ч	О
Башмаков М.А., Нефедова М.Г.	Трг	+	ПО рак	дзп	фэЗо	МОИ Д	мОИ	шоДу	ПКОГ ТРД	±	О
Гейдман Б.П., Ивакина Т.В., Мишарина И.Э.	Трг	±	ПО лк	–	Фэ	МОи д	ОИ	шУ	КОТР Д	ч	О
Истомина Н.Б.	–	ч	ПО (К)А	–	фэздо рп	Ои	О	У	КОТр Д	ч	–
Петерсон Л.Г.	т(ТР дг)	±	РПО (Л) кбас	д (З) ВЦ	ФЭЗ Дорк	М	О	(ш)ОД УнП М	КОГТ РД	+	ОП
Давыдов В.В., Горбов С.Ф., Микулина Г.Г., Савельева О.В.	Р	ч	ОС	–	ФЭд	М	М	ОдУП	ПКГО РД	+	(о)
Аргинская И.И., Ивановская Е.И.	Г	ч	ПОС кл АБМ	–	ФЭЗ ДОр П	м	О	оДУн	ОГТР Д	±	О
Александ-рова Э.И.	Трг	+	ПОЛ АС	–	ФЭО Р	Мо	О	шОУ П	опД	±	Д
Чекин А.Л.	т(г)	ч	ПО(л) кБАС Ми	–	ФЭор д	мОи	Ои	одун М	(п)КО ГТРД	+	О
Демидова Т.Е., Козлова С.Е., Тонких А.П.	Г	+	ПО ЛКа Си	дВ Ц	ФЭзд Опк	МОИ Д	МО	ОУДп м	КОДТ ГР	+*	О
Рудницкая В.Н., Юдачева Т.В.	Тг	±	ПОЛа сК	п	ФЭЗд ОРпк	Мо	О	оду	пКОТ ДР	±	–
Моро М.И., Волкова С.И., Степанова С.В.	рдГ (РД К)	±	РПО (л)	Д	фэДз (ЗОР П)	Мо (д)	Ои	ОУ	ПКОГ ТРД	+	О

3. Надпредметное содержание образования. Оставляя пока за рамками этой работы полномасштабный анализ всей системы, остановимся только на втором слое – надпредметном содержании. Дело в том, что именно в отношении этого содержания мы можем фиксировать достаточно объективную картину, обращаясь только к материальным средствам обучения. Если развитие четвертого и пятого уровня существует только в конкретном социуме, каковым является школа, и, находясь вне школы, его ни наблюдать, ни анализировать невозможно, то развитие второго уровня легко фиксируется, например, по материалам учебников.

Приведем, для примера, результаты анализа надпредметного содержания учебников по математике для 1-4 классов. Кстати, обратим внимание, что именно с надпредметной точки зрения никакие два из них не учат одному и тому же! Это наглядно видно из таблицы 1, в которой описано надпредметное содержание всех тех комплектов учебников для начальной школы, которые рекомендованы Минобрнауки на 2010/11 учебный год. Сами надпредметные линии, их состав и условные обозначения, используемые в табл. 1 (они выделены жирными буквами), представлены в табл. 2. Для полноты в табл. 3 мы приводим и три основные предметные линии – счет, измерение величин, дроби. Кстати, предметное содержание во всех учебниках – примерно одинаковое.

Кстати, даже поверхностный взгляд на таблицы делает очевидным объяснение сущности конфликта, возникающего у школьников при переходе из 4-го класса в 5-ый. Ведь авторы комплекта, по которому занимались в 4-ом классе, научили детей совсем не той деятельности, которую требуют от них авторы комплекта для 5-6 классов! Учителя в 5-ом классе ругают образование в начальной школе, учителя начальной школы считают, что учителя в 5-ом классе не способны учить, поскольку в 1-4 классах практически все учебники учат с изрядным "избытком" относительно существующих стандартов. А на самом деле виноваты не учителя, а разнобой в надпредметном представлении о начальном образовании.

Конечно, есть авторы, которые пишут комплекты учебников не только для младшей, но и для всех классов средней школы. Но ни один авторский коллектив не создал полной линии – от 1 до 11 класса, так что если некоторая проблема с пониманием и не возникает в 5-ом классе – она проявится потом, в 7-ом или в 10-ом. Но все равно она приводит к такому конфликту в деятельности учащихся, который напрочь отбивает у них какое бы то ни было желание учиться. В итоге основной функцией нашего образования оказывается... привитие школьникам отвращения к образованию.

Уже по этим таблицам видно, что для того, чтобы увидеть в конкретном предметном содержании надпредметное, достаточно простого умения раскладывать предметную деятельность на отдельные действия, выделяя те из них, которые не являются предметно-определенными.

4. Надпредметное содержание и произвольность. Умение видеть надпредметное содержание позволяет, как это ни странно, решать целый ряд проблем методического характера, содержание которых, на первый взгляд, является чисто предметным.

Вот одна из методических проблем школьного курса математики – проблема "произвольного треугольника"? Да, дети более или менее успешно воспроизводят доказательство, с которым их знакомят учитель и учебник, на примере некоторого конкретного треугольника. Но как только речь заходит о том, чтобы самостоятельно провести для произвольного треугольника построение или доказательство, то дети все это осуществляют либо на прямоугольном, либо на равнобедренном треугольнике – кому какой понравится. И напрасно учитель будет стараться сыпать тавтологиями, объясняя, что произвольный треугольник

В графах таблицы *маленькая* буква означает эпизодическое вхождение материала, *большая* – систематическое. *В скобках* указано то, что присутствует только в дополнительных материалах. Расшифровку обозначения линий и их составляющих см. в табл. 2, 3.

Таблица 2

Основные надпредметные линии и их структура

Моторика мысленных действий	**Т**рассировка, **Р**азрезания, **Д**вижения, **Г**оловоломки из спичек, **К**онструирование;
Графические навыки	(рисование элементарных фрагментов, цифр, знаков, узоров, линий, и пр.) "+" – вплоть до произвольной графики, "±" – на уровне базовых элементов, "**ч**" – минимальная (только цифры), "–" – отсутствует
Логическое мышление	концентрация **В**нимания, поиск **Р**азличий, **П**ризнаки, **О**тношения, **Л**огические задачи, **К**омбинаторные задачи, **С**оставление задач, о**Б**ращение задачи, **А**нализ условий задачи, выбор **М**етода решения, **И**стинность высказываний
Алгоритмическое мышление	последовательности **Д**ействий, их **З**адание, **Ц**иклическое повторение, **В**етвление, **П**ланирование решения
Пространственное мышление	идентификация плоских **Ф**игур и их **Э**лементов, **З**еркальное отражение, **Д**ействия с фигурами, **О**бъемные фигуры, их **Р**азвертки и **П**роекции, **К**оординаты
Образное мышление – текстовые задачи, требующие:	только **М**атематического выражения без использования образа, создания **О**браза и математического выражения, но без интерпретации результата, создания образа, его математического выражения и **И**нтерпертации, **Д**ействий с образом, их математического выражения и интерпретации
Динамическое мышление – задачи на движение, требующие:	только **М**атематического выражения без использования динамического образа, создания динамического **О**браза и математического выражения, но без интерпретации результата, создания динамического образа, его математического выражения и **И**нтерпертации, **Д**ействий с динамическим образом, их математического выражения и интерпретации
Символическое мышление	**Ш**ифры, введение буквенных **О**бозначений для неизвестных или известных величин, **Д**ействия с буквенными объектами, использование их для составления и решения **У**равнений и **Н**еравенств, обозначение для **П**еременных величин, **М**ножества

Таблица 3

Основные предметные линии и их структура

Счет	счет **П**еребором, определение **К**оличества предметов, арифметические **О**перации с количествами, **Г**руппировка, **Т**аблица, **С**четы, **Р**азрядная система, **Д**ействия в столбик
Измерение величин	"–" – отсутствует, "**ч**" – эпизодическое использовании величин в качестве иллюстрации, "±" – основные величины (масса, время, температура, деньги, длина, площадь, угол, объем, емкость), "+" – исчисление производных величин, * – вероятность и мат. статистика
Действия с **долями, дробями**	**О**быкновенные, **Д**есятичные, **П**роценты

Это не конкретный треугольник, это какой угодно треугольник, всякий, любой, какой захотите. . .

Проблема в том, что дети оказываются не способны самостоятельно осознать полноценную "общность" построения или доказательства. Почему? Потому, что понимание "общности" доказательства требует прежде всего представить себе "общую" ситуацию образно, а затем уже вербализовать свое видение. А образно "произвольный треугольник" совершенно невообразим. Можно представить себе какой-то *конкретный* треугольник, даже два или три. Но непонятно, почему доказательство, проведенное для этих двух треугольников, пригодно *для произвольного* треугольника. Что же делать?

Ответ, как оказывается, не имеет никакого отношения ни к геометрии, ни даже к математике. Проблема – в *природе теоретической произвольности*, которая на самом деле не является предметной. Для того, чтобы убедиться в этом, рекомендуем попытаться представить себе произвольный стол, и сформулировать относительно него некоторое утверждение. Ощущаемая совершенно ясно абсурдность постановки вопроса вскрывает как раз то самое ощущение, которое испытывают школьники, когда им говорят о "произвольном треугольнике".

Внимательное рассмотрение показывает, что предметная природа, при всем ее великом многообразии, все-таки конечна. Количество видов и подвидов любого природного объекта может быть очень большим, но не бесконечным. А человеку в его деятельности, как правило, все это природное разнообразие дано в достаточно ограниченном количестве, и оно не требует перехода к понятийному аппарату. Для работы с предметами натуральной природы человеку достаточно эмпирического, чисто алгоритмического мышления (основное содержание которого составляют заключения, формулируемые "в действиях": если сделать так-то, то получится такой-то результат, или: если условия такие-то, то надо сделать то-то).

Другое дело – человек. Даже один-единственный партнер может создавать тебе такое многообразие условий, которое никакими алгоритмами не схватишь и никакими условными конструкциями не опишешь. Именно другой человек вносит в твою деятельность такой широчайший произвол, который требует кардинальной перестройки мышления, выделения инвариантных относительно этого произвола свойств, фиксации их в виде понятий, *перехода от эмпирической логики "условие – действие – результат" к теоретической логике отношений между понятиями.*

Психический механизм перехода от "действий по алгоритму" к "действиям по правилам" формируется еще в дошкольном детстве в процессе игры, и это как раз и зафиксировано Д.Б. Элькониным в виде иерархии уровней детской игры. Твой приятель в догонялках может побежать *в любую* сторону, а ты все равно должен его догнать. Вот тут ты и перестраиваешь свое мышление на новый лад. Здесь ты и формируешь тот росток, который потом превратится в теоретическое мышление. Но для этого такой росток в школе, в процессе обучения нужно постоянно "кормить", "воспитывать", давая ему все более сложные задачи и включая его в работу во все более сложных и разнообразных видах деятельности.

Возвращаясь к вопросу о "произвольном треугольнике", отметим важный факт: чисто психологически дети произвол "социальной природы" воспринимают легко, в то время как произвол якобы "предметной природы" оказывается для них непосильным для восприятия.

Проблема решается в один ход, если подойти к ней с позиций деятельностных принципов. Постараемся увидеть в проблеме *социальное отношение* и реализовать его в виде *социальной ситуации*. Есть произвольность – так пусть она исходит от человека. Скажем, что треугольник произвольный, если есть человек (например, ученик Петя), который может сделать с ним все, что захочет. А доказательство или построение для произвольного треугольника – это значит, что Васе нужно сделать его так, чтобы оно от этого произвола (который полностью в Петиных руках) не зависеть. Любой желающий легко проверит, что *такое* понимание "произвольности" воспринимается детской психикой мгновенно. И немедленно вписывается в систему представлений образного мышления: если я хочу доказать что-то для любого треугольника, то я сначала должен провести доказательство для некоторого конкретного треугольника, а потом убедиться, что никакие изменения этого треугольника, которые только пожелает сделать учитель или одноклассник, не влияют на справедливость представленного доказательства!

Приведенный пример показывает со всей ясностью, что многие методические проблемы, которые кажутся практически непреодолимыми с точки зрения предметной, достаточно легко решаются при переходе к *надпредметной* точке зрения. Для их решения, как правило, оказывается достаточным просто *социализировать* ситуацию, персонифицировав произвольность, передав ее учителю или другому ученику. Важно заметить одну интересную параллель: как освоение предметных действий классическая педагогическая психология рекомендует начинать с выполнения этих действий в *материальной* или *материализованной* форме, так и освоение надпредметных деятельностных функций, связанных с тем или иным деятельностным произволом в условиях, имеет смысл начинать в *социальной* или хотя бы в *социализированной* форме, вводя туда явным образом человека, генерирующего произвол.

Конечно, такой рецепт нужно использовать не для всех и не всегда в явном виде. Совершенно понятно, что в овладении предметными действиями человек, который уже освоил операции *опредмечивания* и *распредмечивания* теоретических понятий, отношений, концепций, идей, не нуждается в таких подпорках, как постоянное отталкивание от материальных действий. Профессиональный математик, к примеру, столкнувшись с новым абстрактным определением, немедленно спускается на уровень более конкретных представлений и образов, разбирается в том, что означает определение на таком опредмеченном уровне, уточняет какие-то детали и тут же возвращается к распредмеченному, абстрактному определению. Все это осуществляется практически автоматически, почти всегда в уме, подчас содержит целые каскады опредмечивания и последующего распредмечивания, хотя внешне выглядит как непрерывные "абстрактные" рассуждения. И только лишь по небольшим странным паузам в рассуждениях можно зафиксировать интенсивные "подводные" течения математической мысли.

Совершенно аналогично, человек, который овладел функциями *создания орудия* (то есть воплощения в орудии социального отношения, социальной функции) и *социализации* (то есть восстановления по орудию социальной ситуации) в отношении произвольных действий, уже не нуждается в постоянном привлечении специальных педагогических приемов. Но для детей, которые эти операции еще не освоили, социальная или социализированная формы представления деятельности являются абсолютно необходимым условием.

5. Анализ надпредметного содержания. Для того чтобы наглядно продемонстрировать, как работает анализ надпредметного содержания, приведем еще один конкретный пример, выполненный аспирантом факультета педагогического образования МГУ В.Е.Веревкиной.

Тема "Многочлены" (7 класс) присутствует во всех школьных учебниках математики и ее изложение примерно одинаково, отличаясь лишь мелкими деталями. Вначале вводятся алгебраические операции с одночленами, потом - с многочленами, затем разбираются правила эквивалентных преобразований и приведение многочлена к каноническому виду и, наконец, в самом конце темы, предлагаются упражнения на вычисление значений многочленов при различных значениях переменной. Внешне все вроде бы последовательно и логично, да и с точки зрения содержания все разумно – данная тема является пропедевтической к последующему изучению квадратного трехчлена, и, в соответствии с принципом научности, вводит сразу общее понятие, не утомляя учеников рассмотрением частных случаев.

Мы не будем здесь обсуждать, когда разумнее двигаться от частного к общему и когда - наоборот, а проанализируем характер осуществляемых действий с надпредметной точки зрения.

Понятно, что алгебраические операции над одночленами и многочленами с точки зрения надпредметной никаких трудностей детям не доставляют: арифметические действия со значками они освоили еще в начальной школе, а то, что эти значки – не 2, или 5, или 25, а какие-то x или y, принципиального значения не имеет. Приведение многочлена к каноническому виду с надпредметной точки зрения есть просто операция группировки по признаку (признаком является показатель степени), с этим действием дети знакомы с 1-го класса, здесь тоже нет ничего нового. А подстановка вместо x какого-то определенного числового значения и вычисление соответствующего значения многочлена – на первый взгляд, самоочевидное, второстепенное и даже не слишком необходимое действие (кстати, некоторые авторы учебников вообще уделяют ему лишь несколько упражнений).

Однако рассмотрение именно этой последней процедуры с надпредметной точки зрения вызывает весьма серьезные вопросы. Действительно, давайте внимательно разберемся, что в точности означают слова "вместо x подставить 2". Что такое x и как он воспринимается детьми? В теме "Многочлены" x фигурирует наравне с другими числами, и потому надо ожидать, что x – это число. Но что это за число?

Вспомним, что в предыдущих темах школьного курса математики x уже встречался детям – он использовался при задании и решении уравнений. Но ведь при решении уравнений x являлся *вполне конкретным числом*, которое просто было сначала неизвестно и которое следовало найти. Социализируя ситуацию, можно сказать, что x в уравнении означает: "Вася задумал число, но скрывает его, а мы должны его отгадать". Теперь же, в многочлене, x – совсем не задуманное конкретное число! И именно на этом переходе школьники "спотыкаются", не в силах без объяснения (а такого объяснения как раз и нет ни в одном школьном учебнике!) понять, что ситуация кардинально изменилась: в многочлене x – *переменная величина*, которая может быть *произвольной*, то есть принимать *любые* значения, быть *любым* числом.

Вот мы и "поймали" надпредметную проблему. Изучением многочленов начинается новая деятельность, связанная с использованием важнейшего в математике представления о переменных величинах (что чрезвычайно актуально и для иных школьных предметов - переменные величины появляются, например, и в физике). Но при этом в традиционном процессе обучения школьной математике самого главного – освоения фундаментальной идеи переменной величины – не происходит, дети вынуждены – кто удачно, а кто и нет – самостоятельно переживать эту смену представлений, приводящую подчас к путанице и абсурдным рассуждениям.

Таким образом, очевидно, что представление о переменной величине надо школьникам обязательно специально вводить, а принцип социализации подсказывает, как это сделать лучше и доступнее. Начать такое введение целесообразно с социализированного произвола в задании x, предоставив его выбор, скажем, учителю, а уже потом, опираясь на сформированное представление о переменной, осваивать операции с многочленами.

Это может выглядеть, например, так. Сначала учитель предлагает ученикам решить ряд арифметических примеров – вычислить

$4{\cdot}2^5 + 3{\cdot}2^2 - 2^5$ - $2{\cdot}2^3 - 3{\cdot}2^5 + 4{\cdot}2^3 - 3{\cdot}2^2 = \ldots;$
$4{\cdot}3^5 + 3{\cdot}3^2 - 3^5 - 2{\cdot}3^3 - 3{\cdot}3^5 + 4{\cdot}3^3 - 3{\cdot}3^2 = \ldots;$
$4{\cdot}5^5 + 3{\cdot}5^2 - 5^5 - 2{\cdot}5^3 - 3{\cdot}5^5 + 4{\cdot}5^3 - 3{\cdot}5^2 = \ldots;$
$4{\cdot}6^5 + 3{\cdot}6^2 - 6^5 - 2{\cdot}6^3 - 3{\cdot}6^5 + 4{\cdot}6^3 - 3{\cdot}6^2 = \ldots$

Естественная утомительность вычислений (даже если использовать калькулятор), с одной стороны, и естественное желание упростить свою работу, с другой, приведут к тому, что найдется такой “умник”, который увидит и сообщит всем, что вторые степени друг друга просто “убивают”, то есть их считать попросту не надо, что с пятыми степенями происходит то же самое, а третьи, хоть и остаются, но для нахождения значений написанных выражений достаточно один раз вычислить куб каждого указанного числа и умножить его на 2.

Следующее задание учителя: как записать обнаруженное правило, чтобы его все могли использовать, *какое бы число вместо* 2, 3, 5 или 6 *я не поставил*? Социализированная таким образом ситуация позволяет искать прием, который бы не зависел от учительского произвола, и этот прием (не важно, придуман он кем-то из учеников или подсказан учителем) состоит в *обозначении того произвольного числа, которое учитель может задать, как хочет, через* x. Вот мы и достигли момента истины. Ученики теперь понимают суть произвольности x – это то число, которое учитель может задать как угодно, а заодно они уловили и смысл проделанных ими действий - независимо от произвола учителя они получат всегда нужный результат, вычисляя $2x^3$.

А далее тема “Многочлены” разворачивается уже легко: все правила оперирования с одночленами и многочленами ученики могут сформулировать сами – как перенос правил действий с числами на ими же сконструированный объект, предназначенный для того, чтобы обойти произвол, задаваемый учителем. При этом построении изучения темы у детей не появляется непонимания – они легко и без напряжения осваивают такое нетривиальное понятие, как переменная величина.

Аналогичная методика рассмотрения других тем дает не менее неожиданные результаты. Так, в теме “Неравенства” вдруг оказывается, что с надпредметной точки зрения “Решить неравенство” не имеет никакого отношения к “Решить уравнение”. Второе, как мы уже указывали, означает: “отгадать *число*, которое задумал Вася”. А первое связано не с задуманным числом, а с *условием*, с требованием, которое Вася установил (например, связав его с получением приза), и это условие не надо отгадывать – речь идет о преобразовании его к наиболее простой форме. (При этом нужно еще понять, почему именно такая-то форма – самая простая и зачем именно к ней приводить.)

В теме “Функции” совершенно явно также просматривается новая деятельность, в которой фигурирует *связь между переменными величинами*, – некий механизм, который *на человеческий произвол отвечает результатом* и в устройстве которого необходимо разобраться. Примеры можно продолжать, но они уже ничего не добавят по существу к пониманию тех принципов (рассмотрение надпредметного содержания, принцип произвольности и принцип социализации), которые мы хотели проиллюстрировать.

6. Заключение. Как мы видим, анализ надпредметного содержания позволяет и обеспечить более адекватное современным требованиям представление о целях и функциях школьного образования, и ясное понимание того, чему и как учит тот или иной учебник, и позволяет решать целый ряд методических проблем, на первый взгляд, чисто предметных, но на самом деле связанных с более высокими слоями развития. Надеемся, что описанный взгляд окажется полезным и разработчикам учебников, и методистам, и авторам стандартов и программ.

Библиографический список

1. *Божович, Л.И.* Личность и ее формирование в детском возрасте [Текст] / Л.И. Божович. – СПб.: ПИТЕР, 2009. – 400 с.
2. *Боровских, А.В.* Психологическая пентаграмма [Текст] / А.В. Боровских // Труды конференции “Ломоносовские чтения”, ФПО МГУ. – М.: МАКС Пресс, 2007. – Вып. 5. – С. 11-14.
3. *Боровских, А.В.* Прагматизм как методологический принцип в педагогике [Текст] / А.В. Боровских, Н.Х. Розов // Педагогика. – 2008. –№ 8. – С. 3-8.
4. *Боровских, А.В.* Деятельностные принципы в педагогике и педагогическая логика [Текст] / А.В. Боровских, Н.Х. Розов. – М.: МАКС Пресс, 2010. – 80 с.
5. *Выготский, Л.С.* Собрание сочинений [Текст]. В 6 т. Т. 3. История развития высших психических функций / Л.С. Выготский. – М.: Педагогика, 1983. – 368 с.
6. *Вертгеймер, М.* Продуктивное мышление [Текст] / М. Вертгеймер; перевод с англ. – М.: Прогресс, 1987. – 336 с.
7. *Гальперин, П.Я.* Опыт изучения формирования умственных действий [Текст] / П.Я. Гальперин // Доклады на совещании по вопросам психологии 3-8 июля 1953 г. / под ред. А.Н. Леонтьева [и др.]. – М.: Изд-во АПН РСФСР, 1954. – С. 188-201.
8. *Давыдов, В.В.* Теория развивающего обучения [Текст] / В.В. Давыдов. – М.: ИНТОР, 1996. – 544 с.
9. *Леонтьев, А.Н.* Деятельность. Сознание. Личность [Текст] / А.Н. Леонтьев. – М.: Академия, 2004. – 352 с.
10. *Леонтьев, А.Н.* Методологические тетради (1940) [Текст] / А.Н. Леонтьев // Вестник МГУ. – 1988. – Сер. 14. Психология. – № 3. – С. 6-25.

11. *Петровский, А.В.* Личность, деятельность, коллектив [Текст] / А.В. Петровский. – М.: Политиздат, 1982. – 255 с.
12. *Спенсер, Л.-М.-мл.* Компетенции на работе [Текст] / Л.-М.-мл. Спенсер, С.М. Спенсер; перевод с англ. – М.: HIPPO, 2005. – 384 с.
13. *Талызина, Н.Ф.* Управление процессом усвоения знаний. (Психологические основы) [Текст] / Н.Ф. Талызина. – М.: Изд-во МГУ, 1984. – 344 с.
14. *Эльконин, Д.Б.* О структуре учебной деятельности [Текст] / Д.Б. Эльконин // Избранные психологические труды. – М.: Педагогика, 1989. – С. 212-220.
15. *Эльконин, Д.Б.* Психология игры [Текст] / Д.Б. Эльконин. – М.: Педагогика, 1978. – 304 с.

Вероятность на вариациях одной задачи с монетами

В.В. Афанасьев

В работах автора [1, 2] предлагаются вариации вероятностной задачи о совпадении конфигураций при повторных подбрасываниях нескольких монет или игральных кубиков. Продолжая и развивая эту идею, рассмотрим здесь иллюстрацию построения классического курса теории вероятностей.

В основу будет положена задача о совпадении конфигураций монет, под которыми понимается одинаковый набор “гербов” (Г) и “решек” (Р).

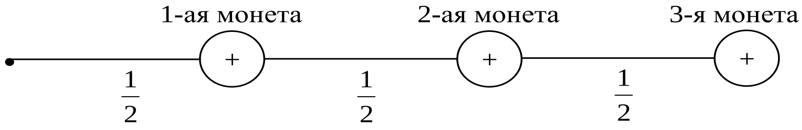
Основная задача. Какова вероятность выпадения одной конфигурации при двух подбрасываниях трех монет?

Обратим внимание, что предложенная задача уже допускает три естественные интерпретации по количеству монет разного достоинства, а другие варианты будут смоделированы для иллюстрации основных результатов классической теории вероятностей.

Вариация 1 (на правило произведения вероятностей). Какова вероятность выпадения одной конфигурации при двух подбрасываниях трех монет разного достоинства?

Решение. Поскольку в конфигурации монеты различимы, то могут быть упорядочены по их номиналу.

Пусть при первом подбрасывании трех монет получилась упорядоченная конфигурация, например, ГРР, тогда вероятность совпадения второго подбрасывания с первым, которое будем обозначать “+”, находим по правилу произведения вероятностей и вероятностному графу:

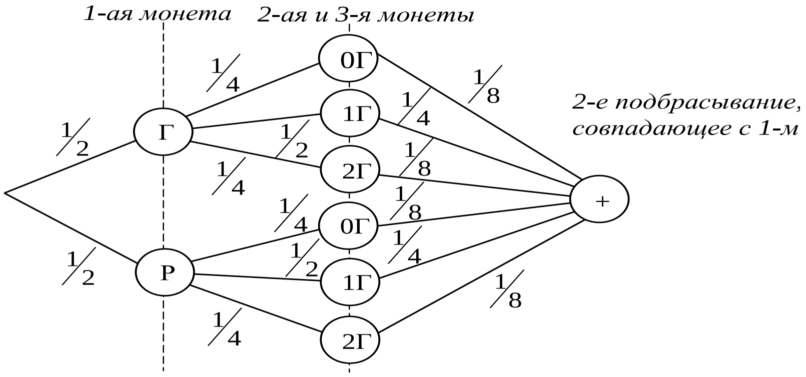


$$P = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}.$$

Вариация 2 (на правила сложения и умножения вероятностей). Какова вероятность выпадения одной конфигурации при двух подбрасываниях трех монет, среди которых одна, отличная от двух других одинаковых монет?

Решение. Одна монета может выпасть “гербом” или “решкой”, а две другие, одинаковые, могут дать нуль “гербов” (0Г), один “герб” (1Г) или два “герба” (2Г).

Таким образом, при первом подбрасывании возможны шесть вариантов исходов, каждый из которых должен совпасть с результатом второго подбрасывания.

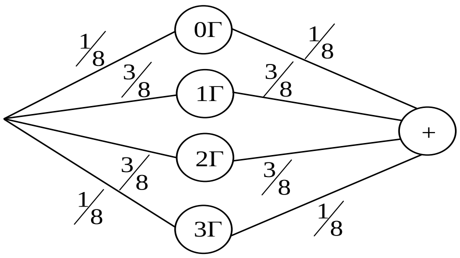


Используя интерпретацию правил сложения и умножения вероятностей на графе [3, с. 43], получаем: $P(+) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{3}{16}$.

Вариация 3 (на схему Бернулли). Какова вероятность выпадения одной конфигурации при двукратном подбрасывании трех монет одного достоинства?

Решение. Поскольку монеты неразличимы, то при первом испытании возможны четыре варианта выпадения числа “гербов”, для вычисления вероятностей которых используем формулу Бернулли для $n = 3$ и $p = \frac{1}{2}$.

Исход второго испытания должен совпадать с первым, поэтому искомую вероятность находим по следующему графу:



$$P_3(0) = C_3^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{3-0} = \frac{1}{8}$$

$$P_3(1) = C_3^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{3-1} = \frac{3}{8}$$

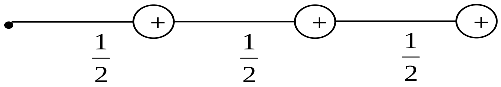
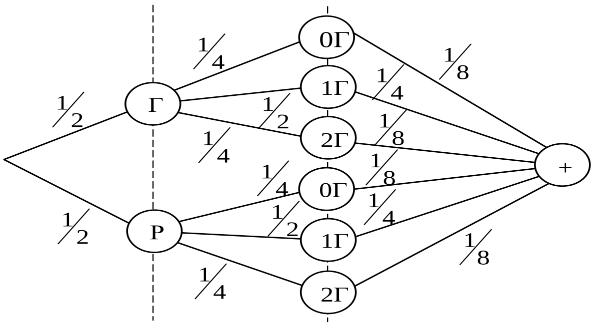
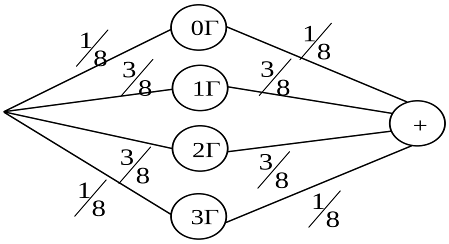
$$P_3(2) = C_3^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{3-2} = \frac{3}{8}$$

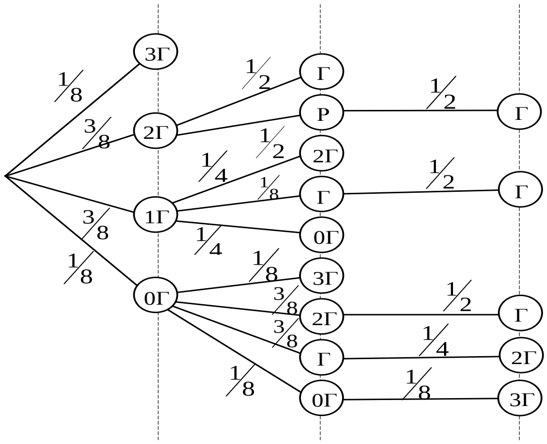
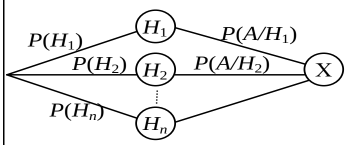
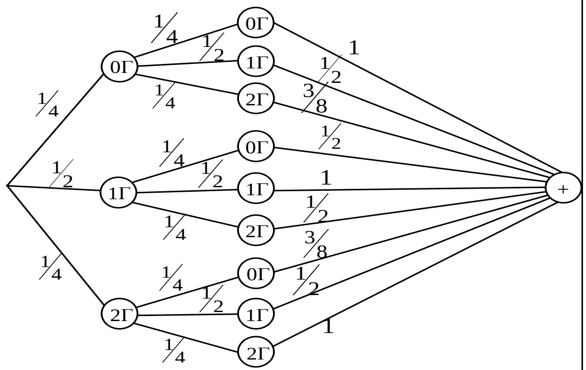
$$P_3(3) = C_3^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{3-3} = \frac{1}{8}$$

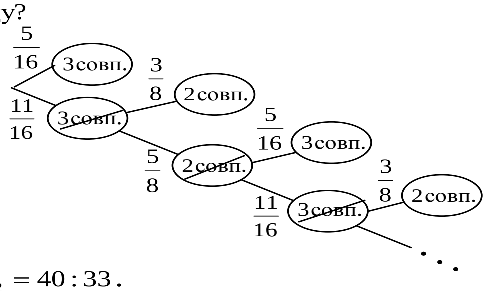
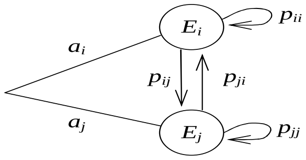
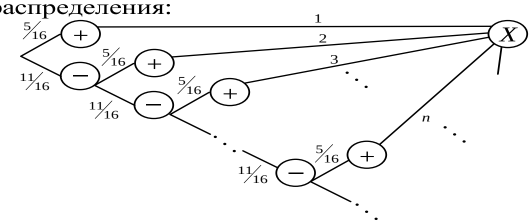
Полная вероятность совпадения конфигураций равна весу всего вероятностного графа: $P(+) = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} + \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{8} + \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{8} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} = \frac{20}{64} = \frac{5}{16}$.

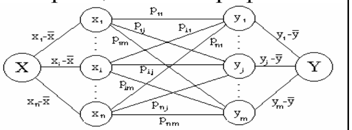
Рассмотренный вариант может также служить иллюстрацией и формулы полной вероятности [3, с. 48-49].

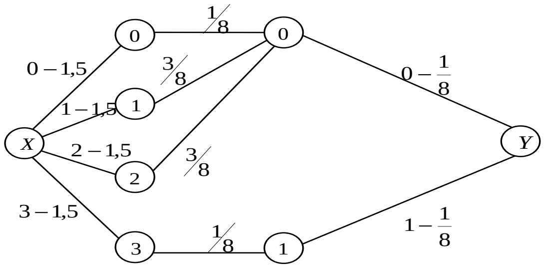
Рассмотренные варианты и еще 12 различных вариаций основной задачи представим в следующей таблице формируемых вероятностных знаний, умений и навыков.

ОСНОВНЫЕ		
Знания		**Умения Навыки**
Понятия	**Теоремы**	**Вариативные модели основной задачи**
Независимые события	$P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) =$ $= P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3)$	Вариация 1.  $P(+) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$.
Совместные и несовместные события. Зависимые события	$P(A+B) = P(A) + P(B) -$ $- P(A \cdot B)$ $P(A \cdot B + C \cdot D) =$ $P(A) \cdot P(B/A) + P(C) \cdot P(D/C)$	Вариация 2.  $P(+) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{3}{16}$.
Схема Бернулли	Теорема Бернулли $P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}$ $m \le n$	Вариация 3.  $P(+) = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} + \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{8} + \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{8} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} = \frac{20}{64} = \frac{5}{16}$.

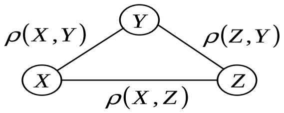
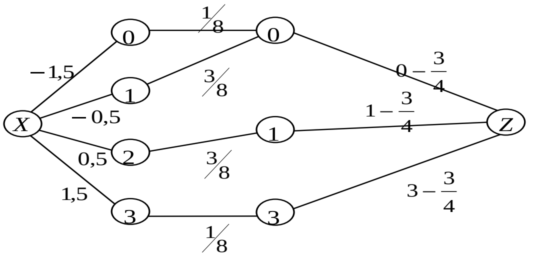
Условные вероятности	$P(A/B)=\dfrac{P(A\cdot B)}{P(B)}$ $P((A_1+A_2)/B)=$ $=P(A_1/B)+P(A_2/B)-$ $-P(A_1\cdot A_2/B)$ $P(A_1\cdot A_2\cdots A_n\cdot A_{n+1})=$ $=P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)\cdots$ $\cdots P(A_{n+1}/A_1\cdot A_2\cdots A_n)$	Вариация 4. Подбрасываем три монеты и «гербы» оставляем на поверхности, а оставшиеся «решки» очередной раз подбрасываем. Сколько надо произвести испытаний, чтобы с вероятностью больше 0,5 можно было бы утверждать, что на столе остались только «гербы»?  $P_1=\dfrac{1}{8}<\dfrac{1}{2}$, $P_2=\dfrac{27}{64}<\dfrac{1}{2}$, $P_3\approx 0{,}58>\dfrac{1}{2}$.
Полная группа событий	Формула полной вероятности $P(A)=\sum_i P(H_i)\cdot P(A/H_i)$, где $\sum_i P(H_i)=1$  	Вариация 5. Подбрасываем две пары монет одного достоинства и совпадающие монеты из разных пар оставляем на месте, а оставшиеся вновь подбрасываем. Какова вероятность полного совпадения двух конфигураций при таких испытаниях?  $P(+)=\left(\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{4}\cdot 1\right)\cdot 2+\left(\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\right)\cdot 2+\left(\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{3}{8}\right)\cdot 2+$ $+\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{2}\right)\cdot 2+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot 1=\dfrac{43}{64}\approx\dfrac{2}{3}$
Пересмотр вероятностей гипотез	Формула Байеса $P(H_k/A)=\dfrac{P(H_k)\cdot P(A/H_k)}{\sum_i P(H_i)\cdot P(A/H_i)}$	Вариация 6. Найти вероятность выпадения одних «гербов» при предположении, что конфигурации совпали в предыдущей вариации. $P(\Gamma/+)=\dfrac{P(2\Gamma)\cdot P(2\Gamma)\cdot 1}{P(+)}=\dfrac{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot 1}{\frac{43}{64}}=\dfrac{16}{43}\approx 0{,}4$.

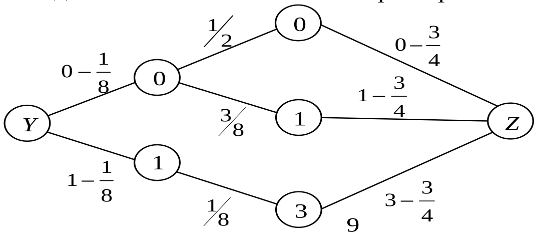
Обобщение схемы Бернулли	В схеме Бернулли отказываемся от конечности испытаний и от их независимости	Вариация 7. Двое поочередно бросают из двух рук по три и по две монеты до совпадения конфигураций. В каком соотношении находятся их шансы на победу?  $P_1 : P_2 = 40 : 33$.
Цепи Маркова. Матрица и граф перехода. Вектор начальных вероятностей	$\mathbf{P} = (p_{ij})$, $\mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{P}^n$  $\vec{a} \cdot \mathbf{P}^{(n)} = \vec{a} \cdot \mathbf{P}^n$	Вариация 8. Определим состояние цепи Маркова $E_i (i = 1,2,3,4)$ по числу $(i+1)$ «гербов» в конфигурации трех монет. Переход из одного состояния в другое определяем, суммируя их общее число «гербов» по модулю четыре, а вектор начальных вероятностей зададим через вероятности появления числа «гербов» при первом подбрасывании трех монет. Найдем вероятности нахождения состояний цепи Маркова через один шаг: $\vec{a} \cdot \mathbf{P} = \left(\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{8}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1/8 & 3/8 & 3/8 & 1/8 \\ 1/8 & 1/8 & 3/8 & 3/8 \\ 3/8 & 1/8 & 1/8 & 3/8 \\ 3/8 & 3/8 & 1/8 & 1/8 \end{pmatrix} =$ $= \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{16}, \frac{1}{4}, \frac{5}{16}\right)$
Случайные величины и их характеристики. Граф распределения	$\begin{array}{c\|c\|c\|c\|c\|c} X & x_1 & x_2 & \dots & x_n & \dots \\ \hline P & p_1 & p_2 & \dots & p_n & \sum p_i = 1 \end{array}$ $M[X] = \sum_i x_i \cdot p_i$ $M[C \cdot X] = C \cdot M[X]$ $M[X \pm Y] = M[X] \pm M[Y]$ $M[X \cdot Y] = M[X] \cdot M[Y]$ для независимых случайных величин $D[X] = M[X^2] - M^2[X]$	Вариация 9. Найти закон распределения и характеристики положения для общего числа «гербов» при двукратном подбрасывании трех монет. $\begin{array}{c\|c\|c\|c\|c\|c\|c\|c} X & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline P & \frac{1}{64} & \frac{6}{64} & \frac{15}{64} & \frac{20}{64} & \frac{15}{64} & \frac{6}{64} & \frac{1}{64} \end{array}$ $M[X] = M_o = M_e = 3$
Геометрическое распределение	$P\{X = m\} = q^{m-1} \cdot p$ $M[X] = \frac{1}{p}$ $D[X] = \frac{q}{p^2}$	Вариация 10. Сколько в среднем потребуется подбрасываний двух троек монет до появления в них одинакового числа «гербов»? Математическое ожидание случайной величины $X = \{$число подбрасываний до появления одинакового числа «гербов» в тройках$\}$, найдем как вес всего графа распределения:  $M[X] = 3{,}2 \approx 3$. В среднем потребуется примерно три попытки.

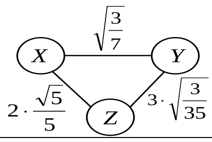
<table>
<tr>
<td>Корреляция.
Ковариация.
Ковариациионый граф</td>
<td>Коэффициент корреляции
$\rho(X,Y)=\dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D[X]\cdot D[Y]}}$, где
$Cov(X,Y)$ – ковариация случайных величин X и Y
$Cov(X,Y)=M[(X-x_i)\cdot$
$\cdot(Y-y_j)]=$
$=\sum\limits_{i,j}(\overline{x}-x_i)\cdot p_{ij}\cdot(\overline{y}-y_j)$
находится как вес всего ковариационного графа


$-1\le\rho(X,Y)\le 1$
$|\rho(X,Y)|=1$, если $Y=AX+B$
$Cov(X,Y)=0$, если X, Y независимы</td>
<td>Вариация 11.
Найдем коэффициент корреляции между числом «гербов» (X) и числом троек «гербов» (Y) при подбрасываниях трех монет.
Ковариацию и дисперсии случайных величин X и Y найдем по ковариационному графу:


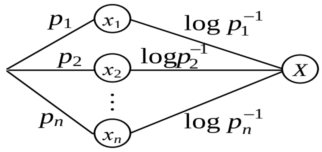
$Cov(X,Y)=\dfrac{3}{16}$; $D(X)=\dfrac{3}{4}$; $D(Y)=\dfrac{7}{64}$.
$\rho(X,Y)=\dfrac{\frac{3}{16}}{\sqrt{\frac{3}{4}\cdot\frac{7}{64}}}=\sqrt{\dfrac{3}{7}}\approx 0{,}65$.</td>
</tr>
</table>

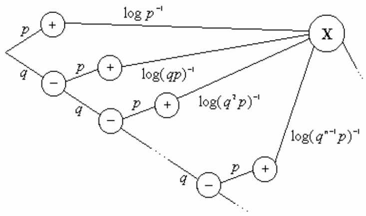
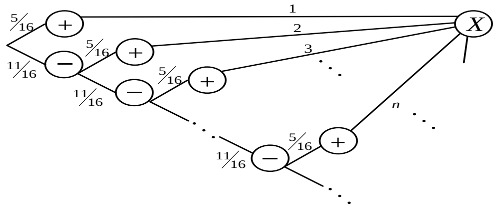
<table>
<tr>
<td>Многомерные случайные величины.
Корреляционный граф</td>
<td>
</td>
<td>Вариация 12.
Найти корреляционный граф для числа «гербов» (X), числа пар «гербов» (Z) и числа троек «гербов» (Y) при подбрасывании трех монет.
Построим ковариационный граф для случайных величин X и Z:


По ковариационному графу найдем ковариацию $Cov(X,Z)$ и дисперсию $D(Z)$:
$Cov(X,Z)=\dfrac{3}{4}$; $D(Z)=\dfrac{15}{16}$, а $D(X)=\dfrac{3}{4}$.
$\rho(X,Z)=\dfrac{Cov(X,Z)}{\sqrt{D(X)\cdot D(Z)}}=\dfrac{\frac{3}{4}}{\sqrt{\frac{3}{4}\cdot\frac{15}{16}}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}=2\cdot\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ По ковариационному графу случайных величин Y и Z находим их искомые числовые характеристики.


$Cov(Y,Z)=\dfrac{9}{32}$ и $\rho(Y,Z)=\dfrac{\frac{9}{32}}{\sqrt{\frac{7}{64}\cdot\frac{15}{16}}}=3\cdot\sqrt{\dfrac{3}{35}}$.
Тогда искомый корреляционный граф:

</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>Энтропия опыта. Формулы Хартли и Шеннона</td>
<td>$H(\alpha)=\log n$ для опыта с n равновероятностными исходами
$H(\alpha)=\sum p_i \log p_i^{-1}$
энтропию находим как вес всего графа неопределенности
$H(\alpha)\geq 0$
$H(\alpha)-\max$, если
$\forall A_i : P(A_i)=\frac{1}{n},\ i=1,\ldots,n$</td>
<td>Вариация 13.
В каком случае из трех возможных вариантов выбора трех монет будет наибольшая степень неопределенности совпадения конфигураций при двукратном их подбрасывании?

а) все монеты различны:
$H_1=\frac{1}{8}\log 8+\frac{7}{8}\log\frac{8}{7}\approx 0{,}55$ (бит);
б) одна монета отлична от двух других:
$H_2=\frac{3}{16}\log\frac{16}{3}+\frac{13}{16}\log\frac{16}{13}\approx 0{,}7$ (бит);
в) все монеты одинаковые:
$H_3=\frac{5}{16}\log\frac{16}{5}+\frac{11}{16}\log\frac{16}{11}\approx 0{,}9$ (бит).</td>
</tr>
<tr>
<td>Энтропия дискретной случайной величины</td>
<td>

$H(X)=\sum P\{X=x_i\}\cdot$
$\cdot\log\left[P\{X=x_i\}\right]^{-1}$</td>
<td>Вариация 14.
Найти энтропию для числа X «гербов» в двух конфигурациях по три монеты в каждой.
<table><tr><td>X</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>P</td><td>$\frac{1}{64}$</td><td>$\frac{6}{64}$</td><td>$\frac{15}{64}$</td><td>$\frac{20}{64}$</td><td>$\frac{15}{64}$</td><td>$\frac{6}{64}$</td><td>$\frac{1}{64}$</td></tr></table>
$H(X)=\left(\frac{1}{64}\cdot\log 64+\frac{6}{64}\cdot\log\frac{64}{6}+\right.$
$\left.+\frac{15}{64}\cdot\log\frac{64}{15}\right)\cdot 2+\frac{20}{64}\cdot\log\frac{64}{20}\approx 3(\textit{бит}).$</td>
</tr>
<tr>
<td>Энтропия геометричес-кого распределения</td>
<td>$H(X)=-\log p-\frac{q}{p}\log q$

</td>
<td>Вариация 15.
Найти энтропию для числа подбрасываний двух троек неразличимых монет до совпадения конфигураций.
По графу распределения для случайной величины $X=\{$число подбрасываний до совпадения конфигураций на двух тройках монет$\}$ найдем и искомую энтропию:


$H(X)=\frac{5}{16}\log\frac{16}{5}+\frac{11}{16}\cdot\frac{5}{16}\log\frac{16}{11}\cdot\frac{16}{5}+$
$+\ldots+\left(\frac{11}{16}\right)^{n-1}\cdot\frac{5}{16}\cdot\log\left(\frac{16}{11}\cdot\frac{16}{5}\right)^{n-1}+\ldots\approx$
$\approx 1{,}9$ (бит).</td>
</tr>
</table>

Библиографический список

1. *Афанасьев, В.В.* Десять вариаций одной вероятностной задачи [Текст] / В.В. Афанасьев, М.А. Сивов // Образование, наука и экономика в вузах. Интеграция в международное образовательное пространство: материалы международной конференции. – Плоцк, Польша, 2010. – С. 21-28.
2. *Афанасьев, В.В.* Вероятность на трехцветном кубике [Текст] / В.В. Афанасьев // Математика и физика, астрономия, экономика и технология и совершенствование их преподавания: материалы международной конференции “Чтения Ушинского” физико-матического факультета. – Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2011. – Ч. 1. – С. 3-9.
3. *Афанасьев, В.В.* Теория вероятностей [Текст]: учеб. пособие для студ. вузов / В.В. Афанасьев. – М.: ГИЦ ВЛАДОС, 2007. – 350 с.

Математическое образование в информационном обществе

С.Н. Бычков

В 60-х гг. прошлого столетия А.Н. Колмогоров инициировал проведение реформы школьного математического образования в СССР. Реформа эта не была завершена, и в настоящее время преобладающим является мнение, что она не привела к успеху. Сегодня, как и полстолетия назад, вопрос о реформе математического образования вновь встал в повестку дня, но повестка эта совершенно иная: если раньше обсуждалась идея о приведении школьного предмета в соответствие с тенденциями развития современной науки, то сейчас под вопрос поставлена сама целесообразность преподавания математики в средних и старших классах: в первоначальном проекте разработанного образовательного стандарта математика выпала из числа так называемых "обязательных предметов".

Причины столь сложной ситуации с математическим образованием называются разные. В п. 3 резолюции Московского математического общества по проекту стандарта старшей школы в качестве таковой указывается, например, непрестижность "точного знания... в условиях сырьевой экономики", с чем, разумеется, нельзя не согласиться. Однако в странах с инновационной экономикой дело с математикой и ее преподаванием также обстоит не лучшим образом. Так, С.П. Новиков считает, что кризис физико-математического сообщества характерен не только для России, но и для Запада. Вот что он писал в недавно вышедшей статье: "В 50-х гг. XX в.... это сообщество стояло очень высоко. Позади было уже четыре–пять веков неуклонного развития наших наук. Думалось, что так и будет продолжаться всегда" [1, с. 327]. Причину кризиса, охватившего физико-математические науки, Новиков видит в упадке традиционного математического образования: "Уже в 60-х гг. в СССР и на Западе стала нарастать резкая общественная критика трудности школьных математических программ, стали сокращать число экзаменов. Вероятно, это было связано с тем, что все 10–11 лет обучения стали общеобязательными... Так или иначе, общество потребовало сокращения и упорядочения... Начался процесс постепенного падения уровня" [1, с. 354]. Конец статьи полон пессимизма: "...Мы встречаем XXI в. в состоянии очень глубокого кризиса. Нет полной ясности, как из него можно выйти: естественные меры, которые напрашиваются, практически очень трудно или почти невозможно реализовать в современном демократическом мире" [1, с. 356]. Таким образом, не отсталость экономики, а "демократическая эволюция образования, где люди свободно выбирают курсы", является, с точки зрения Новикова, причиной кризиса. "Физико-математическое образование, заключает он, – это не демократическая структура по своему характеру, она не подобна свободной экономике" [1, с. 356]. Мысль о возможных негативных последствиях "демократизации" образования высказывалась и в ходе обсуждения стандарта в Московском и Санкт-Петербургском математических обществах. Действительно, если предоставить право выбора предметов самим учащимся, то многие из них, в частности, те, кто имеет выраженные гуманитарные наклонности, могут математику и не выбрать.

Рискнем, однако, утверждать, что ни сырьевой характер российской экономики, ни "демократизация образования" не являются основными причинами, повлиявшими на падение престижа математики, в том числе и в школе. С нашей точки зрения, более важным обстоятельством является то, что мы живем сейчас в условиях всеобщей компьютеризации. В докомпьютерную эпоху обучение математике и в школе, и в вузе имело основной практической целью овладение навыками численных расчетов, которые были необходимы в различных сферах науки и производства. Первая брешь в ценности традиционного математическом образовании была "пробита" уже калькуляторами, появление которых привело к снижению потребности в изучении, например, правил деления чисел или извлечения корней (усвоение которых отнимало немало времени и сил в первой половине XX в.). Когда же появились пакеты прикладных компьютерных программ, ориентированных на решение стандартных математических задач, под сомнение была поставлена задача обучения прочным навыкам алгебраических преобразований. Сегодня компьютер "берет" интегралы лучше любого профессора (и даже обгоняет на олимпиадах наиболее способных к математике школьников [2].

Развитие информационных технологий не способствует повышению мотивации в выработке технических навыков символьных преобразований у той части школьников, кто не связывает свою будущую профессию с техническими или точными науками. Означает ли это, что для учащихся с "гуманитарной ориентацией" математика действительно теряет статус обязательной дисциплины?

Стандартный аргумент, приводимый в пользу сохранения математики в качестве обязательного школьного предмета, опирается на авторитетное высказывание М.В. Ломоносова: "Математику уже затем учить надобно, что она ум в порядок приводит". При всем уважении к мнению великого энциклопедиста и организатора образования нельзя, однако, забывать, что оно было высказано в середине XVIII в., когда большинства нынешних школьных предметов как самостоятельных разделов научного знания еще не существовало. Для того чтобы оно оставалось справедливым и сегодня, пришлось бы считать, что остальные школьные дисциплины не могут справиться в полной мере с задачей "приведения ума в порядок" и, следовательно, им необходимо "взять урок" у математики, перестроив свое изложение в соответствии со строгими канонами геометрического доказательства.

И действительно, ни одна дисциплина школьного курса не достигает в своем изложении той логической стройности и строгости, какую имеют планиметрия и стереометрия, построенные на базе определений и аксиом при помощи дедуктивного вывода. Великий немецкий математик Д. Гильберт писал в 1917 г.: "Я уверен:

все, что может быть объектом научного исследования в целом, и постольку, поскольку оно созревает для оформления в теорию, прибегает к аксиоматическому методу и через него косвенно к математике. Обращаясь вперед, по направлению к более глубокому пласту аксиом, в дополнительном понимании мы достигаем более глубокого проникновения в сущность научного мышления и еще более ясно осознаем единство нашего знания. В свидетельствах аксиоматического метода, как представляется, математика призвана играть лидирующую роль в науке в целом" [3, с. 104].

Если бы прогноз Гильберта оправдался и физика, биология или история стали бы на уровне своих высших достижений использовать аксиоматический метод, то изучение в школе строгих канонов дедуктивной геометрии действительно имело бы смысл, ибо оно подготавливало бы учащихся к последующему использованию аксиоматики и дедукции в областях их будущей профессиональной деятельности. Однако этого не случилось: реального прогресса в преобразовании разделов современной науки на принципах аксиоматико-дедуктивного метода в XX в. не произошло.

Можно показать, что отсутствие такового не случайно. Аксиоматический метод с необходимостью возникает только в одной области научного знания, а именно, в той, в которой он исторически и был создан: в древнегреческой геометрии сер. IV в. до н.э. [4]. В других науках (в качестве наиболее известных примеров укажем на "Этику" Спинозы или аксиоматическое изложение механики Г. Гамелем) аксиоматический метод оказался искусственным образом перенесенным на чуждую ему почву и потому остался для них, по существу, маргинальным.

Причина данного обстоятельства, в общем-то, проста. Дедуктивное построение некоторой научной дисциплины необходимо только в том случае, когда единственным способом проверки истинности ее утверждений является скрупулезное воспроизведение их вывода из начальных основных положений. Существование же независимого способа проверки, выходящего за пределы простого удостоверения в отсутствии ошибок в выводе утверждений, привносит в научную теорию содержательные моменты, что делает аксиоматическую форму построения теории необязательной. По этой причине те науки, которые ориентированы на изучение внешней реальности, используют (хотя и далеко не всегда) гипотетико-дедуктивный, а не аксиоматико-дедуктивный метод (например, аксиоматизация Гамеля никоим образом не поколебала ньютоновского гипотетико-дедуктивного изложения механики, которое и по сей день остается парадигмальным).

Чем же в таком случае может быть полезно изучение геометрии в школе? Какие мыслительные навыки может развивать дисциплина, непосредственное практическое значение которой, особенно, в век алгоритмизации и компьютерных технологий, не слишком велико? В самых общих чертах ответ такой: геометрия способна развить навыки, которые могут быть использованы не только в сфере пространственных представлений, но и в других предметных областях, но при этом именно геометрия может стимулировать их развитие в наибольшей степени. В чем же состоят эти навыки?

Развитое теоретическое мышление характеризуется умением обнаруживать такие связи между явлениями, которые недоступны обыденному взгляду (в противном случае наука как особая область человеческой деятельности была бы попросту излишня). Обнаружение указанных связей обычно достигается путем нахождения "промежуточных ситуаций" (одной или нескольких), которые совмещают в себе характеристики двух различных, т.е. выглядящих, на первый взгляд, совершенно не связанными между собой, явлений. Такие новые "ситуации" или "явления" находятся как бы "посередине" между исходными наличными явлениями, и потому их нахождение называется *опосредованием.* Искусству нахождения подобного рода "опосредующих звеньев" геометрия способна учить как никакой другой предмет, и в этом качестве она в школьной программе вне конкуренции.

Следует подчеркнуть, что эта польза связана не с дедуктивной формой изложения геометрии, но исключительно с ее наглядным содержанием (аксиоматико-дедуктивный метод антинагляден по своей сути: при доказательстве теорем из аксиом нельзя в качестве аргумента ссылаться на свойства нарисованного на доске или в тетради чертежа). Развитие способности к опосредованию при помощи построений в пространстве и на плоскости происходит у учащегося не в рамках постоянного набора исходных положений (аксиом), а наоборот в условиях, требующих от него действий сообразно изменяющейся ситуации.

Поясним "пользу" идеи опосредования на нескольких примерах. В качестве первого рассмотрим нахождение площади треугольника. В запоминаемой учащимися и затем многократно используемой ими формуле $S = \frac{1}{2}ah$ от производимого при ее выводе опосредования не остается и следа. Суть же дела передает следующий геометрический чертеж:

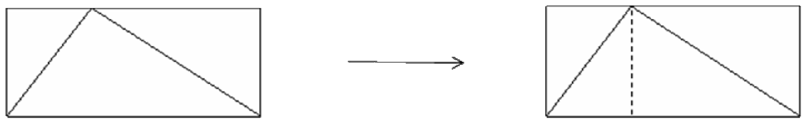


Рис. 1. Геометрическое нахождение площади треугольника

Как, однако, догадаться, что вокруг треугольника следует описать прямоугольник, а затем еще и опустить высоту?

Стандартное аксиоматическое изложение едва ли поможет ответить на этот вопрос. Здесь лучше пойти в “метапредметном направлении”, став на точку зрения другой школьной дисциплины – истории.

Какая фигура – с исторической точки зрения, а не с точки зрения теоретической науки геометрии – является основной при измерении площади? Конечно же, не треугольник, а прямоугольник (или даже квадрат). Именно площадь прямоугольника определяется первой в школьном курсе геометрии. Поэтому нахождение площади треугольника – т.е. ее соотнесение с площадью единичного квадрата – следует связать (опосредовать) с некоторым подходящим образом построенным прямоугольником. “Наиболее тесно связан” с треугольником описанный вокруг него прямоугольник, самостоятельное нахождение которого не должно представлять для учащегося больших трудностей.

Несколько сложнее обстоит дело с поиском “опосредующей линии” – высоты, но и здесь может помочь осознанно проводимая идея опосредования. Какие фигуры опосредуют произвольные треугольники с прямоугольниками, т.е. четырехугольниками специального вида, у которых все углы прямые? Ясно, что таковыми должны быть треугольники, у которых имеется прямой угол. Для таких треугольников задача нахождения площади сразу решается описанным выше приемом. После этого школьнику остается догадаться, как свести случай произвольного треугольника к случаю треугольника прямоугольного.

В качестве следующего примера рассмотрим доказательство третьего признака равенства треугольников. Стандартная идея этого доказательства заключается в приложении второго треугольника снизу к первому по общей стороне с последующим применением теоремы об углах равнобедренного треугольника. Хотя таким способом теорема доказывается практически везде, от подобного рассуждения остается ощущение искусственности: пусть учащийся и в состоянии его понять, но сам до него едва ли бы догадался (действительно, какое отношение к произвольным треугольникам имеет теорема о треугольниках, у которых две стороны равны?). И если школьников, не удовлетворенных подобным доказательством, спросить, не лучше ли воспользоваться другим доказательством, не опирающимся на теорему об углах равнобедренного треугольника, многие не отказались бы ознакомиться с более “естественным” доказательством.

В прояснении ситуации относительно естественности или искусственности рассматриваемого доказательства весьма полезным оказывается осознанное использование идеи опосредования. Два треугольника считаются в геометрии равными, если у них равны соответственные стороны и углы (всего шесть элементов). В условии рассматриваемой теоремы дано только равенство сторон, исходя из которого надо попытаться каким-то образом перейти к равенству углов. К моменту изучения третьего признака школьнику известно только одно предложение, позволяющее заключать от равенства сторон к равенству углов: это – теорема о равенстве углов при основании равнобедренного треугольника. Следовательно, для доказательства данного признака необходимо осуществить построение, при котором появился бы равнобедренный треугольник. Наиболее естественным способом конструирования новой фигуры при помощи двух данных треугольников является приложение одного треугольника снизу к другому по общей стороне. Очевидно, что из двух возможных способов такого приложения только один приводит к построению равнобедренного треугольника. Точнее, двух равнобедренных треугольников, возникающих в результате соединения симметричных вершин при помощи вертикального отрезка (проведение такого отрезка не является при этом новой дополнительной идеей, поскольку оно подразумевается уже в процессе первоначального преобразования чертежа). Завершение доказательства после указанного построения уже не требует особых усилий, поскольку опирается на обнаруженную в начале доказательства опосредствующую теорему.

Как и в случае нахождения площади треугольника, использование идеи (или “метаидеи”) опосредования делает поиск доказательства третьего признака равенства треугольников *целенаправленным*, а потому “естественным” и одновременно развивающим мышление учащегося.

Последний пример еще более элементарен: доказательство самой теоремы о равенстве углов при основании равнобедренного треугольника. В отличие от третьего признака равенства треугольников, при доказательстве которого в качестве опосредующего звена можно было использовать ранее доказанные теоремы, здесь в силу того, что теорема о равенстве углов при основании равнобедренного треугольника является одной из первых теорем геометрии Евклида, вариативность выбора совсем невелика: либо 1) воспользоваться непосредственным определением равенства сторон, как совпадающих при наложении, и совместить равные стороны путем перегибания, либо 2) воспользоваться при доказательстве теоремой, в которой из равенства части элементов треугольника (в число которых входят две его стороны) заключается о равенстве остальных элементов (куда входят два интересующих нас угла). Второму способу отвечает как раз первый признак равенства треугольников по двум сторонам и углу между ними.

Итак, имеется два возможных способа доказательства данной теоремы: непосредственный (исходя из определения) и опосредованный (опирающийся на первый признак). Какой из них лучше с точки зрения взгляда на геометрию как идеальный полигон для обучения универсальному искусству опосредования явлений и фактов действительности?

С точки зрения доминирующих на сегодняшний день представлений о математической строгости недостатком первого способа является использование *предметного действия*, не имеющего силы для идеальных треугольников, стороны которых не имеют ширины (такие треугольники нельзя перегибать!). Второй способ, казалось бы, свободен от этого упрека, ибо пригоден и для идеальных, и для реальных треугольников. Только вот беда: первый признак для идеальных треугольников требует дополнительного предположения о том, что две прямые не могут заключать пространства, не выполняющегося, вообще говоря, для реальных треугольников (две прямые, проведенные в разных частях поверхности, после переноса одной из них в сторону другой вполне могут и "заключать пространство" из-за неоднородности реальной поверхности, на которой они нарисованы). Но тогда получается, что теорема об углах равнобедренного треугольника, справедливая и для реальных треугольников, опирается в доказательстве на первый признак, для реальных треугольников, вообще говоря, не выполняющийся.

Напрашивается вывод: восходящее в Евклиду доказательство теоремы о равнобедренном треугольнике через первый признак таковым для реальных (начерченных) треугольников не является, хотя сама теорема справедлива и для реальных, и для идеальных треугольников. А, следовательно, лучшим является все же первый способ, поскольку непосредственно демонстрирует *причину* справедливости рассматриваемой теоремы (смириться с тем, что причиной равенства углов при основании треугольника является невозможность двум прямым заключать пространство, довольно сложно, поскольку в условии теоремы имеется только одна прямая – основание равнобедренного треугольника; вторая прямая не дана в условии и строится лишь в процессе рассуждения).

Если же исходить из сближения геометрии с науками о реальных вещах, располагающихся в реальном пространстве, и не противопоставлять ее другим наукам из-за особой "идеальности" ее объектов, то тогда доказательство через перегибание тем более покажется предпочтительным. Цепочка опосредований на теореме об углах равнобедренного треугольника, таким образом, обрывается, и она, как далее неопосредуемый теоретический факт, оказывается подлинным фундаментом всей геометрии как теоретической дисциплины.

* * *

Слово "польза" применительно к идее опосредования в геометрии было не случайно поставлено в кавычки: подобно Журдену у Мольера, не подозревавшему, что он излагает свои мысли прозой, в геометрии идея опосредования используется систематически[1]. Осознание нового для литературного персонажа факта само по себе не обогащает выразительных средств его языка, как не расширяет осознанное применение опосредования списка теорем геометрии. Однако для *преподавания* геометрии в качестве школьного предмета, для творческого усвоения ее содержания идея опосредования является весьма плодотворной.

С точки зрения современного представления о математической строгости, навеянного стандартами аксиоматико-дедуктивной геометрии, недостатком приведенных выше рассуждений является использование "предметных интуиций", внешних по отношению к идеальным математическим объектам. Так, в аксиоматической геометрии ни квадрат, ни прямоугольник не являются "особыми фигурами", с которыми следует соотносить другие фигуры при измерении площадей (в "Энциклопедии элементарной математики" единичный квадрат появляется в четвертой аксиоме теории площадей только в целях нормировки: его площадь должна равняться 1 [5, с. 8]. Но данное обстоятельство (как и ситуация с теоремой о равнобедренном треугольнике) лишь иллюстрирует высказанное ранее общее положение, что обучение искусству опосредования при помощи геометрии никак не связано с ее дедуктивно-аксиоматическим изложением и опирается исключительно на "наглядную компоненту" геометрической науки.

В информационном обществе учащийся избавлен от необходимости как выполнения "вручную" сложных символьных преобразований, так и от запоминания больших объемов информации, которую, при нужде, всегда можно оперативно разыскать в Интернете. Это позволяет сделать акцент в школьном обучении не на приобретении рутинных вычислительных навыков и не на запоминании больших объемов сведений, а на развитии умения творчески мыслить. И роль геометрии в этом важнейшем деле невозможно переоценить.

Выдающийся ученик Колмогорова В.И. Арнольд продемонстрировал значение идей геометрии для такой, казалось бы, сугубо аналитической дисциплины, как теория дифференциальных уравнений. Он же ратовал за наглядность изложения и в школьной математике. Если вспомним, что и сам Андрей Николаевич опирался в своих математических изысканиях всегда на геометрические образы, то едва ли возникнет сомнение по поводу того, какая из школьных математических дисциплин была бы, с их точки зрения, наиболее востребована в информационном обществе. Только для выполнения своего предназначения этой математической дисциплине необходима "инвентаризация", которая позволила бы использовать ее потенциал наиболее эффективным – для общества – образом.

Библиографический список

1. *Новиков, С.П.* Вторая половина XX века и ее итог: кризис физико-математического сообщества в России и на Западе [Текст] / С.П. Новиков // Историко-математические исследования. – М., 2002. – Сер. 2. – Вып. 7 (42).
2. http://www.mathschool.ru/show.html?id=634
3. *Гильберт, Д.* Математическое мышление [Текст] / Д. Гильберт // Методологический анализ оснований математики. – М., 1988.

[1]То, что этой постоянно используемой идее не придается особого значения, объясняется тем, что основной акцент в дедуктивной геометрии делается на непреложность геометрических теорем, а не на процесс их получения.

4. *Бычков, С.Н.* Математика в мировой культуре. [Текст] / С.Н. Бычков, Е.А. Зайцев. – М., 2006. – Гл. 1. – § 4.
5. Энциклопедия элементарной математики [Текст]. – М., 1966. – Кн. 5.

Создание Л. Эйлером теоретических основ блочно-схемного аппарата комбинаторного анализа

А.Е. Малых

Из многогранного научного наследия Леонарда Эйлера (1707-1783) представляют интерес комбинаторные исследования, не получившие пока исчерпывающего освещения в историко-математической литературе. Он либо решил, либо сформулировал и значительно продвинул решение большинства комбинаторных проблем. Несмотря на простоту некоторых формулировок, они не поддавались решению и явились впоследствии исходными при формировании различных математических теорий, не утратив актуальности и в наши дни. Ниже дан анализ комбинаторных исследований Эйлера по формированию теории латинских квадратов, разработке перечислительных приемов и методов, установлен приоритет в получении новых результатов. 8 марта 1779 г. он представил Петербургской Академии наук большой мемуар, начинавшийся словами: "Весьма любопытный вопрос, который привлекал в течение некоторого времени внимание лучших умов мира, заставил меня выполнить исследования, которые, кажется, открыли новое направление в анализе и, в частности, комбинаторике [1, с. 291]. Спустя три года ученый опубликовал его.

Мемуар начинался с формулировки проблемы: "…среди 36 офицеров имеется поровну уланов, драгунов, гусаров, кирасиров, кавалергардов, гренадеров и, кроме того, поровну генералов, полковников, майоров, капитанов, поручиков и подпоручиков, причем каждый род войск представлен офицерами шести рангов. Можно ли выстроить их в каре 6х6 так, чтобы в любой колонне и любой шеренге встречались офицеры всех рангов?... После всех трудов, затраченных на решение этой задачи, был вынужден признать, что такое размещение абсолютно невозможно, хотя и не удалось дать строгого доказательства этому" [1, с. 291]. Впоследствии она стала известна как *задача Эйлера о 36 офицерах.* Внимание к ней было обусловлено тем, что аналогичная, но сформулированная в терминах карточных игр задача была решена на 85 лет раньше Ж. Озанамом – французским математиком и физиком: расположить в виде квадрата тузов, королей, дам и валетов четырех различных мастей так, чтобы ни в одной строке, ни в одном столбце и ни на одной из двух диагоналей не встретилось двух и более карт одинаковой масти и одного достоинства [2] (рис. 1):

Т	К	Д	В
Д	В	Т	К
В	Д	К	Т
К	Т	В	Д

♠	♦	♥	♣
♣	♥	♦	♠
♦	♠	♣	♥
♥	♣	♠	♦

Т♠	К♦	Д♥	В♣
Д♣	В♥	Т♦	К♠
В♦	Д♠	К♣	Т♥
К♥	Т♣	В♠	Д♦

Рис. 1

В середине XVIII в. была решена также задача расположения в каре 25 офицеров пяти разных званий из пяти разных полков, взятых в соответствии с указанными выше правилами (рис. 2). На очереди исследования стояла задача о 36 офицерах.

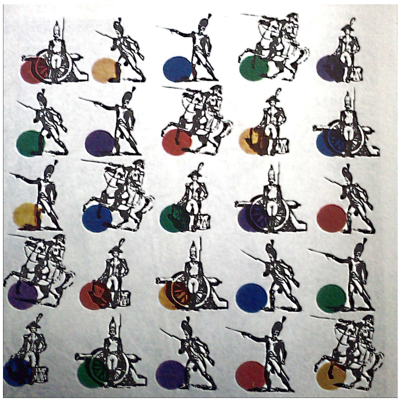


Рис. 2

Мемуар [1] состоит из введения, четырех глав, заключения и содержит 153 параграфа. Для упрощения дальнейших выкладок дадим определения. *Латинским квадратом* называется таблица $n \times n$, заполненная n различными элементами так, что в каждой строке и каждом столбце все n элементов встречаются один и только один раз. Т.к. элементами были буквы латинского алфавита, то такую конструкцию Эйлер назвал *латинским квадратом* (л.к.). Число клеток в основании л.к. называется его *порядком.* Л.к. отличаются не только порядком, но и структурой: диагональные, крестообразные, составные, нормализованные, полные и др.

Теоретическую и практическую значимость имеют множества специальным образом составленных л.к. порядка n. Два л.к. называются *ортогональными*, если при их наложении каждая из n^2 упорядоченных пар элементов встречается один и только один раз. Рис. 1 иллюстрирует ортогональную пару таких квадратов (о.п.). Т.к. элементы квадрата Эйлер представлял буквами греческого алфавита, то его стали называть *греческим* (г.к.). Саму же о.п. ученый называл греко-латинским квадратом (г.-л.к.).

Структура каждой из четырех глав [1] однотипна: исследуется общий случай (*проблема n^2 офицеров*), доказываются теоремы, формулируются правила, иллюстрируемые большим числом примеров. Часть вычислений, а в некоторых случаях и расчеты, не даны, приведен либо результат, либо общее число решений. В конце каждой главы Эйлер обращается к задаче о 36 офицерах, доказывая невозможность ее решения.

Для облегчения исследований ученый заменил n латинских и греческих букв первыми n числами натурального ряда; причем числа, соответствующие латинским буквам, записывал в виде оснований. Они образуют л.к., который Эйлер назвал *фундаментальным* или *основным.* Числа же, соответствующие греческим буквам, он приписывал в виде экспонент, образующих г.к. Кроме того, числа, стоящие в первых строке и столбце, расположены в естественном порядке. Для n=3; 5 г.-л.к. имели вид:

$$\begin{matrix} 1^1 & 2^2 & 3^2 \\ 2^2 & 3^1 & 1^3 \\ 3^3 & 1^2 & 2^1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1^1 & 2^5 & 3^4 & 4^3 & 5^2 \\ 2^2 & 3^1 & 4^5 & 5^4 & 1^3 \\ 3^3 & 4^2 & 5^1 & 1^5 & 2^4 \\ 4^4 & 5^3 & 1^2 & 2^1 & 3^5 \\ 5^5 & 1^4 & 2^3 & 3^2 & 4^1 \end{matrix}$$

Ученый отметил, что л.к. составляется произвольным образом, тогда как г.к. зависит от основного. Для его построения он разработал метод: для каждого элемента г.к. составляются последовательности из n “греческих букв” – *formules directrices* (трансверсали). Он указал, что их нахождение является главным этапом построения г.-л.к. и отметил: “Мне не известен какой-либо надежный способ их построения”. Вначале ученый пользовался систематическим и исчерпывающим перебором: расставлялась экспонента 1, встречающаяся только один раз в каждой строке и каждом столбце. Аналогичная работа проводилась для остальных экспонент. Кроме того, в первой строке элементы записывались в естественном порядке.

Впоследствии Эйлер разработал эффективные *приемы* и *правила* получения из заданной трансверсали новых. Для каждой экспоненты следовало найти полный их список. Затем найденные трансверсами согласовывались друг с другом, т.е. при записи их одна под другой в каждой вертикали все числа должны быть различными, т.к. в противном случае одно и то же число в основании получило бы две различные экспоненты. В конечном счете составлялся г.-л.к. Заметим, что такая процедура построения была единственной вплоть до 1936 г. [3].

Для построения г.-л.к. прежде всего следовало разработать правила составления л.к. Эйлер обнаружил, что строение последних разнообразно, исследование каждого вида носит специальный характер, а само число их огромно. Поэтому ученый ограничился рассмотрением лишь квадратов *q-шагового типа*, т.е. повторяющегося состава ($q = \overline{1;4}$). Он подсчитал также количество л.к. для n=2, 3, 4, 5, однако не имел успеха в перечислении их для порядка 6. Такие квадраты нашел и изучил Г. Терри в 1900 году.

В [1] исчерпывающим образом доказано, что для n нечетных и четно-четных можно построить г.-л.к. Для n=2(2k+1) такого сделать не удалось. Поэтому в заключительной части мемуара Эйлер сформулировал последнее положение как гипотезу: “...и я не колеблюсь в том, чтобы сделать заключение” о невозможности составления никакого г.-л.к. из 36 клеток, и что такая невозможность распространяется на случаи, когда n=10, 14 и вообще на все нечетно-четные числа [1, с. 490]. Впоследствии она стала известна как *гипотеза Эйлера об n^2 офицерах.*

При q =1 строки и столбцы л.к. являются циклическими подстановками элементов 1, 2..., n. Поэтому такие квадраты называют *циклическими.* Эйлер изучал их в первой главе [1], выполнив построения для n=2, 3, 4, 5, 7 и частично n=9. Для последнего значения он ограничился случаем, когда элементы л.к. составляют арифметические прогрессии с $d \neq 3$;6, т.к. 3 и 6 не взаимно просты с 9. Построение о.п. для n составного и не кратного 3 обсуждалось Эйлером для л.к. порядка 35. Он получил 12 о.п., указав, однако, на нецелесообразность построения. В этой же главе Эйлер впервые установил взаимосвязь между г.-л.к. и магическими. В каждой из следующих глав он иллюстрировал ее для квадратов разной структуры. В первой применил процедуру для получения г.-л.к. порядка 5 из панмагического того же порядка: все его элементы уменьшают на 1 (что не влияет на его магические свойства), записывают их в системе счисления с основанием n (n=5) и представляют получившийся квадрат в виде

$$
\begin{array}{ccccc}
17 & 24 & 1 & 8 & 15\\
23 & 5 & 7 & 14 & 16\\
4 & 6 & 13 & 20 & 22\\
10 & 12 & 19 & 21 & 3\\
11 & 18 & 25 & 2 & 9
\end{array}
\xrightarrow{-1}
\begin{array}{ccccc}
16 & 23 & 0 & 7 & 14\\
22 & 4 & 6 & 13 & 15\\
3 & 5 & 12 & 19 & 21\\
9 & 11 & 18 & 20 & 2\\
10 & 17 & 24 & 1 & 8
\end{array}
\xrightarrow{\text{mod } 5}
\begin{array}{ccccc}
31 & 43 & 00 & 12 & 24\\
42 & 04 & 11 & 23 & 30\\
03 & 10 & 22 & 34 & 41\\
14 & 21 & 33 & 40 & 02\\
20 & 32 & 44 & 01 & 13
\end{array}
$$

$$
\swarrow \qquad \searrow
$$

$$
\begin{array}{ccccc}
3 & 4 & 0 & 1 & 2\\
4 & 0 & 1 & 2 & 3\\
0 & 1 & 2 & 3 & 4\\
1 & 2 & 3 & 4 & 0\\
2 & 3 & 4 & 0 & 1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccc}
1 & 3 & 0 & 2 & 4\\
2 & 4 & 1 & 3 & 0\\
3 & 0 & 2 & 4 & 1\\
4 & 1 & 3 & 0 & 2\\
0 & 2 & 4 & 1 & 3
\end{array}
$$

В заключительной главе мемуара [1] Эйлер выполнил обратное преобразование: пусть дан г.-л.к. В клетке нового квадрата того же порядка ставятся числа $n(a{-}1){+}b$, где n – порядок квадрата, а и b – числа, стоящие в соответствующих клетках исходного г.-л.к. Правило он иллюстрировал примером для случая $n{=}4$:

$$
\begin{array}{cccc}
1 & 2 & 3 & 4\\
2 & 1 & 4 & 3\\
3 & 4 & 1 & 2\\
4 & 3 & 2 & 1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccc}
1 & 2 & 3 & 4\\
3 & 4 & 1 & 2\\
4 & 3 & 2 & 1\\
2 & 1 & 4 & 3
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccc}
1 & 6 & 11 & 16\\
7 & 4 & 13 & 16\\
12 & 15 & 2 & 5\\
14 & 9 & 7 & 3
\end{array}
$$

В полученном квадрате суммы чисел, стоящих в строках и столбцах, одинаковы, но для диагоналей свойства магичности не выполняется. Однако такое случается не всегда.

Для л.к. 2-шагового типа Эйлер доказал важную теорему о том, что такие квадраты никогда не имеют о.п., за исключением n, кратного 4. Поэтому он рассматривал случаи $n{=}4$, 8, ограничившись построением для них трансверсалей и оценкой числа полученных г.-л.к.

В третьей и четвертой главах мемуара ученый исследовал л.к. 3- и 4- шагового типов, изучал возможность получения для них полного множества трансверсалей, составления г.-л.к., опираясь на правила и теоремы, доказанные ранее. Однако он отметил, что их применение приводит к весьма громоздким вычислениям.

После долгих раздумий ученый предложил другой подход, основанный на получении полного множества л.к. порядка n путем составления его из латинских прямоугольников (л.п.). По этому поводу он писал: “Я отметил выше, что полное исследование всех возможных вариаций будет вопросом весьма важным. Однако он показался мне довольно трудным и почти невозможным, когда число n превышает 5. Чтобы облегчить это перечисление, нужно начинать со следующего вопроса: *скольким различными способами при заданной первой строке можно варьировать вторую при конкретном значении n?* Для л.п. размера $2{\times}n$ он нашел их число (табл. I):

Таблица I

n	Число вариаций
1	0
2	1
3	1=1·1+0·0
4	3=2·1+1·1
5	11=3·3+2·1
6	53=4·11+3·3
7	309=5·53+4·11
8	2119=6·309+5·53
9	16687=7·2119+6·309

Из таблицы видно, что числа составляют последовательность, в которой каждый последующий член определяется двумя предыдущими. Если обозначить число вариаций для значений $n, n{+}1, n{+}2, n{+}3$ через P, Q, R, S соответственно, то $R{=}nQ{+}(n{-}1)p$ и $S{=}(n{+}1)R{+}nQ$. Из этих соотношений Эйлер нашел зависимость, при которой каждый член S определяется тремя предыдущими $S = 2R + Q + \frac{(P+Q)(P-Q)}{R+Q}$. В другой формуле каждый член определяется при помощи одного предыдущего: $S = P\,(n-1)\,(n-2) \pm 1$, где верхний знак берется при нечетном n, а нижний – при четном. По существу, Эйлер дал рекуррентные решения широко известной на протяжении более двух столетий задачи “о встрече”. Заметим, что такой подход к построению л.к. использовал А. Кэли в 1890 г. [4]. Иную процедуру осуществили Р. Фишер и Дж. Йетс в 1936 г. [3].

Исследования заключительной главы Эйлер считал весьма важными, о чем писал: “…такое перечисление всех возможных вариаций будет объектом, достойным внимания геометров [так в те времена называли математиков], тем более, что все принципы, известные в комбинаторике, не окажут ни малейшей помощи”. Он отметил также, что задача о 36 офицерах "...будучи сама по себе не слишком полезной, оказала большое влияние на развитие общей теории чисел и комбинаторики, в частности" [1, с. 492].

При решении гипотезы Эйлера ученый вплотную подошел к понятию *группы подстановок л.к.* Заметим, что такую работу математики стали осуществлять лишь с начала XX в. Эйлер ввел понятие *общего преобразования*, с помощью которого каждый л.к. может быть преобразован в другие, обладающие теми же свойствами относительно трансверсалей, что и исходный. Поэтому достаточно рассмотреть любой из них.

Эйлер исследовал частный случай общего преобразования – транспозицию греческого и латинского квадратов. Он ввел для них *комбинаторные инварианты.* По сути дела, ученый предвосхитил возможность разбиения множества г.-л.к. порядка n на *классы сетевого изоморфизма.* Таким образом, в мемуаре [1], по-существу, созданы основы комбинаторной теории л.к., содержащие доказательство целого ряда теорем, формулировку и решение задач, введение новых понятий и терминов. На протяжении полувека, прошедшего со времени появления мемуара, идеи и исследования Эйлера не получили сколько-нибудь заметного продвижения. По-видимому, этот факт можно объяснить как чрезвычайно высоким авторитетом ученого, так и пессимистическим высказыванием о "полезности" задачи о 36 офицерах.

Со второй половины XIX в. теория л.к., основы которой заложил Эйлер, стала бурно развиваться, устанавливались связи с другими математическими дисциплинами. Прежде всего, было замечено, что каждый конечный группоид можно задать *таблицей Кэли.* Внутренняя ее часть служит таблицей операции некоторой *квазигруппы.* Одной и той же конечной квазигруппе, вообще говоря, соответствует множество л.к., т.к. ее могут определять таблицы Кэли с различными внутренними частями. Справедливо и обратное [5]. Тогда же стали изучать и конечные *лупы.*

В конце XIX в. П.А. МакМагон применил л.к. в *статистике* для уменьшения числа экспериментов, необходимых в дисперсионном анализе [6]. 30-е гг. XX в. ознаменовались работами Р. Фишера по использованию л.к. при создании теории планирования экспериментов, показывавшими эффективность их приложения в сельскохозяйственных, биологических и медицинских исследованиях [3]. В дальнейшем л.к. нашли широкое и разностороннее применение в промышленности, педагогике, экономике, торговле, социологии, экономике, а также других областях науки и техники.

Задача Эйлера о 36 офицерах была решена спустя 119 лет французским математиком Г. Тэрри: он подтвердил ее справедливость для n=6 путем построения и последующего перебора всех 9408 л.к., объединив их в 22 класса обычного и 12 классов обобщенного изоморфизма. К представителю каждого из них он пытался построить о.п., однако результат был отрицательным [7].

Дальнейшая проверка гипотезы Эйлера затянулась. Лишь в 1960 г. американские ученые Р.Ч. Боуз, С.С. Шрикхенд и Е.Т. Паркер, используя быстродействующие ЭВМ, а также теоретико-числовой аппарат, доказали, что *ортогональные пары л.к. существуют для любого порядка n, за исключением 2 и 6* [8]. Таким образом, гипотеза Эйлера оказалась ошибочной.

Концепция ортогональности л.к. нашла приложение и к *конечными геометрическим структурам.* В 1938 г. неожиданная связь между ними была установлена Р.Ч. Боузом: конечная проективная (аффинная) плоскость порядка n описывается системой из $n-1$ попарно ортогональных л.к. того же порядка [9]. Особую актуальность концепция приобрела при создании помехоустойчивых кодов в связи с появлением космических ракет и спутников Земли [10].

Библиографический список

1. *Euler, L.* Recherches sur une nouvelle espèce de quarres magiques // Verh. Zeeuwsch. Genootsch. Wetensch. Vlissengen., 1782. V. 9. P. 85-239.
2. *Ozanam, J.* Recreations mathematiques et physiques / Paris, 1694.
3. *Fisher, R.A., Yates, G.* Statistical tables for biological, adricultural and medical research / Edinburgh, 1936.
4. *Cayley, A.* On latin squares // Mess. Math., 1890. V. 19. P. 135-137.
5. *Белоусов, В.Д.* Латинские квадраты, квазигруппы и их приложения [Текст] / В.Д. Белоусов, Г.Б. Белявская. – Кишинев: Штиинца, 1980.
6. *MacMahon, P.A.* A new method in combinatory analysis with application to latin squares and associated guestions // Trans. Amer. Phil. Soc. 1898. V. 16. P. 262-290.
7. *Tarry, G.* Le probléme des 36 officiers //Compte r. Assoc. Franc. Av. Sci., 1990. V. 1; 1901. V. 2. P. 189-200.
8. *Bose, R.C., Shrikhande, S.S., Parker, E.T.* Further results on the construction of mutually orthogonal Latin squares and the falsity of Euler's conjecture // Canad. J. Math., 1960. V. 12. P. 189-203.
9. *Bose, R.C.* On the applications of the properties of Galois fields to the problem of construction of Hyper -Graeco-Latin squares // Indian J. Stat., 1938. V. 3. № 4. P. 223-238.
10. *Denes, G., Keedwell, A.D.* Latin Squares and their Applications. Akademiai Kiado: Budapest, 1974; Ed. 2. 1995.

О некоторых проблемах развития средневековой алгебры

М.М. Рожанская

Начало истории средневековой алгебры, как и алгебры вообще как самостоятельной математической дисциплины, традиционно связывается с появлением алгебраического трактата ал-Хорезми (ок.780 – ок. 850). В отличие от его арифметического трактата, который дошел до нас только в латинском переводе, да собственно, скорее не в переводе, а в изложении исходного арабского текста или, возможно, даже в первоначальной, неизвестной латинской версии, "Алгебра" сохранилась и в арабской версии XIV-го в., и в латинских рукописях, восходящих к переводам Роберта Честерского и Герардо Кремонского, выполненных в XII-ом веке. Арабский текст носит заглавие "Краткая книга об исчислении алгебры и алмукабалы (Ал-китаб ал-мухтасар фи хисаб ал-джабр вал-мукабала") и состоит из трех частей, из которых только одна представляет собой алгебраический раздел. Содержание этого раздела и есть первое в истории математики изложение начал алгебры – науки о решении числовых квадратных и линейных уравнений. В отличие от арифметики, в которой, согласно ал-Хорезми, рассматриваются числа вообще, в алгебре вводятся числа трех определенных родов, соответствующих понятиям неизвестного, его квадрата и свободного члена. Вводится и само понятие уравнения, как некоего выражения, состоящего из двух частей, члены которого можно перемещать из одной части в другую.

Прежде всего ал-Хорезми приводит классификацию рассматриваемых им шести типов линейных и квадратных уравнений, к которым сводит всю совокупность решаемых задач и предлагает единый метод, то есть, алгоритм для их решения. В классификации ал -Хорезми пользуется и единой терминологией: неизвестное – "вещь" (шай) или "корень" (джизр), квадрат неизвестного- "квадрат" или "имущество"(мал), свободный член – просто число или "дирхем" (денежная или весовая единица). К каноническому виду уравнения приводятся одним и тем же способом, с помощью операций, именуемых "ал-джабр" (восполнение) и "ал-мукабала" (противопоставление"). "Восполнение" состоит в операции переноса вычитаемых членов уравнения в другую его сторону в виде прибавляемых членов. Его название "ал-джабр", стоящее в заглавии трактата ал-Хорезми, вскоре было распространено на всю науку об уравнениях. Операция "ал-мукабала" (противопоставление) представляет собой сокращение равных членов в обеих частях уравнения. В приведение к каноническому виду входит еще приведение с помощью арифметических операций старшего коэффициента уравнения к единице. Любое другое уравнение, линейное или квадратное, для решения должно быть приведено к одному из указанных шести типов.

И ал-Хорезми, и авторы более поздних алгебраических трактатов делят указанные шесть типов уравнений на две группы: первая группа – три так называемых простых и вторая группа – три так называемых составных уравнения, в современной терминологии – соответственно двух- и трехчленных или неполных и полных. Первое уравнение первой группы – линейное, второе и третье трактуются как линейные: в обоих случаях в качестве искомого неизвестного рассматривается не только корень уравнения, но и его квадрат, а во втором уравнении не учитывается нулевое решение, в конкретных задачах неинтересное. Но вот что характерно: если в качестве неизвестного рассматривается корень уравнения, в решении обязательно приводится значение его квадрата и наоборот, определив значение квадрата неизвестного, автор трактата почти всегда приводит и значение его корня. И это можно проследить практически во всех алгебраических сочинениях математиков Востока и Запада средневекового мира ислама. Таким образом, вся первая группа может рассматриваться как состоящая из линейных уравнений. Решение же полных квадратных уравнений приводится обычно в виде словесных правил выражения их корней в радикалах (арифметический прием) и геометрического доказательства с помощью специальных геометрических построений, приемами геометрической алгебры. Вопрос об источниках алгебраического трактата ал-Хорезми, в отличие от арифметического, в котором он явно следует индийским образцам, до сих пор не решен. В индийской математике отсутствует геометрическое обоснование правил решения квадратных уравнений и действий над алгебраическими величинами, столь характерных как для трактата ал-Хорезми, так и вообще для всей последующей средневековой алгебраической литературы, отсутствует и понятие отрицательного числа. О греческом влиянии свидетельствует геометрическое построение корней квадратных уравнений, в особенности, полных. Но в целом его трактовка существенно отличается от геометрической алгебры "Начал" Евклида. И если античная геометрическая алгебра и оказала влияние на ал-Хорезми, то безусловно в сильно преобразованном виде, в форме, приспособленной к нуждам числовой алгебры. Но алгебра такого вида в известных источниках не упоминается.

Есть основание видеть у ал-Хорезми нечто общее с Диофантом. Это общее – приведение квадратного уравнения к трем каноническим формам. Но прямое влияние на него Диофанта маловероятно, так как первые арабские переводы сочинений Диофанта были сделаны после появления трактата ал-Хорезми, хотя и вскоре после него.

Скорее всего, "Алгебра" ал-Хорезми восходит к традиции, сложившейся на Ближнем и Среднем Востоке в регионе бывшего эллинистического мира, которая включала прочно усвоенные элементы как древневавилонской, так и греческой научной традиции, в том числе и математической. Мы не знаем, принадлежат ли ал-Хорезми самостоятельные алгебраические результаты, тем более, что сам он лично себе новых открытий не приписывает. Но, вероятно, он был первым или одним из первых, кто донес до средних веков эту своеобразную традицию, бытовавшую в позднеэллинистическом мире и утвердившуюся на средневековом Востоке в эпоху раннего средневековья, и стоял у истоков алгебраического исчисления и алгебры как самостоятельной научной дисциплины.

Что же это за традиция и можем ли мы, кроме общих соображений, судить об ее конкретных составляющих? Некоторые данные в пользу такого предположения существуют. Обратимся к ним.

В практической арифметике средневекового Востока широкое распространение получил цикл задач на "тройное правило", сводящихся к простым пропорциям с одним неизвестным. Оно часто применялось в задачах о сделках и в юридической практике, в задачах " на наследство", т.е. о делении наследства в соответствии с нормами мусульманского права. Возможно, что уже во времена ал-Хорезми на Ближнем Востоке был известен частный случай тройного правила – "правило двух ложных положений", которое носило название "правила двух ошибок". Этот метод решения большого цикла арифметических задач в простейшем случае интерпретируется как решение линейного уравнения.

"Правило двух ошибок" по сути дела представляет собой алгоритм автоматического решения типовых задач, сводящихся к линейным уравнениям. Впоследствии оно широко применялось в математических сочинениях как в восточном, так и и в западном ареалах средневекового мира ислама и стало одной из основных тем в европейской средневековой арифметике.

В XII веке, мы встречаемся с этим методом в форме, под названием "правила чаш весов". Первая известная нам его формулировка встречается у крупнейшего западноарабского математика XII-го века ал-Хассара. Согласно ал-Хассару, решение задачи по этому правилу, предлагается в форме взвешивания некоторого груза, вес которого и есть искомое неизвестное, на равноплечих весах с двумя чашами, подвешенными в концах его плеч. Путем подбора грузов с соответственно "ложными" значениями искомого веса взвешиваемого объекта и двух "ошибок" достигается равновесие весов, и это позволяет судить об искомом весе взвешиваемого груза. Ал-Хассар не приводит схемы весов. Можно предположить, что задача решается путем непосредственного взвешивания на них.

В XIII в. крупнейший западноарабский математик Ибн ал-Банна уже дает подробное описание этого правила, сопровождая его геометрической схемой таких весов. Вероятно, он знает, хотя и не приводит, геометрическое доказательство "правила чаш весов", замечая, что оно основывается на геометрии. А не приводит его в силу присущей ему чрезвычайной лаконичности изложения. Начиная с Ибн ал-Банны, этот метод уже считался общепринятым арифметическим приемом в западноарабской математике и входил с состав почти каждого арифметического сочинения авторов XIII-XV веков. Но схема весов остается непременным атрибутом этого правила при любых вычислениях с его помощью. Оно быстро становится универсальным. Уже Ибн ал-Банна формулирует его не на числовом примере, а сразу в общих выражениях.

Таким образом, правило чаш весов, хотя и было как будто всего лишь частным случаем тройного правила, играло важную роль в укреплении и развитии той самой местной математической традиции, сложившейся и продолжавшей развиваться далее на основе усвоения элементов древней и эллинистической науки на всей огромной территории средневекового мира ислама.

Еще одной существенной особенностью так называемой арабской арифметики было применение теории взвешивания, точнее, практики взвешивания как способа решения достаточно большого класса арифметических задач.

Мы показали, что и само "правило чаш весов" восходит в известной степени к практике взвешивания грузов на равноплечих весах. С помощью весов и взвешивания решались и задачи определения состава сплавов и смесей, и "задачи монетного двора" и многие другие.

Все вышеизложенное можно рассматривать как некоторое введение к тому, что предлагается автором настоящей работы в качестве источника и составных частей той самой научной традиции, в недрах которой началось формирование средневековой алгебры.

Во-первых, это понятие о рычаге и его равновесии применительно к его наиболее распространенной модификации – весам, восходящее еще к античной традиции: "науке о взвешивании" и учению о пяти "простых машинах". Ведь операция "ал-джабр ва-л-мукабала"(восполнение и противопоставление) представляет собой не что иное, как процедуру взвешивания. В простейшем случае при взвешивании на равноплечих весах с двумя чашами операция сводится к тому, что в одну из чаш помещают груз, вес которого подлежит определению, в другую – систему разновесов, с помощью которых весы приводятся в равновесие. Совокупный вес разновесов есть искомый результат В более сложном случае для получения равновесия весов приходится перемещать разновесы из одной чаши в другую. Очевидно, что операция "восполнения" вполне соответствует процессу перемещения грузов, а операция "противопоставления" – установлению равновесия равноплечих весов.

Если не первым, то безусловно самым важным моментом в зарождении и истории средневековой алгебры было, конечно, введение в математику понятия равновесия, к которому восходит сам термин "уравнение" – "уравнивание" через "противопоставление", в котором весы перестают быть вещественным атрибутом и переходят в разряд абстрактных схем, а эта схема приводит к понятию линейного уравнения. Вероятно, первоначально в арабской математике рассматривались только линейные уравнения, и слово "имущество" означало неизвестное, но по мере того, как в оборот входили и квадратные уравнения, этот термин закрепился за квадратом неизвестного. Ал-Хорезми применяет его как в квадратных, так и в линейных уравнениях. Правила решения полных квадратных уравнений доказываются при помощи геометрических построений. И восходит они как будто к греческой геометрической алгебре. Но в целом его трактовка, хотя и близка к евклидовой, но существенно от нее отличается. Кроме того, стиль рассуждений и изложения у обоих авторов совершенно различен. Поэтому можно утверждать, что греческая геометрия конечно и оказала влияние на ал-Хорезми, но в сильно преобразованной форме, приспособленной для нужд формирующейся числовой алгебры. В этом и состоит сущность процесса освоения средневековой арабоязычной математикой античного научного наследия.

Если же говорить о самой сути местной традиции, на основе которой стоит “Алгебра” ал-Хорезми, то это, во-первых, введение понятия уравнения, восходящее к понятию равновесия, теории весов и взвешивания в сочетании с теорией “простых машин” тройного правила в трансформированном виде в форме “правила чаш весов” и, конечно, греческой геометрической алгебры также в трансформированном виде.

Глава 2

Математика в ее многообразии

Максимальные ветвящиеся процессы с двумя типами частиц[1]

А.В. Лебедев

1. Введение. Максимальные ветвящиеся процессы (МВП) представляют собой “экстремальные” аналоги ветвящихся процессов Гальтона-Ватсона. А именно, рассматриваются цепи Маркова со значениями в $\mathbf{Z}_+$, заданные стохастически рекуррентными формулами вида

$$Z_{n+1} = \bigvee_{m=1}^{Z_n} \xi_{m,n}, \tag{1}$$

где через $\bigvee$ обозначена операция взятия максимума, и $\xi_{m,n}$, $m \geq 1$, $n \geq 0$ – независимые случайные величины с общим распределением F на $\mathbf{Z}_+$. Полагаем (как и в случае суммирования), что результат взятия максимума “ноль раз (при $Z_n = 0$) равен нулю.

МВП были введены в [1] (в связи с моделями дальнодействующей перколяции), и там же был получен критерий их возвратности. А именно (в предположении $F(0) = 0$), при выполнении условия

$$\limsup_{x\to+\infty} x(1 - F(x)) < e^{-\gamma}, \tag{2}$$

где $\gamma = 0,577...$ – константа Эйлера, цепь $\{Z_n\}$ положительно возвратна, и напротив, при

$$\liminf_{x\to+\infty} x(1 - F(x)) > e^{-\gamma}$$

имеет место $Z_n \to +\infty$, $n \to \infty$ почти наверное (п.н.).

Автором в [2] было проведено обобщение МВП с $\mathbf{Z}_+$ на произвольные измеримые множества $T \subset \mathbf{R}_+$. А именно, рассматривалась цепь Маркова на T с переходными вероятностями

$$\mathbf{P}(Z_{n+1} \leq y | Z_n = x) = F(y)^x, \quad x, y \in T, \tag{3}$$

где распределение F сосредоточено на T.

Различным свойствам МВП был посвящен цикл работ автора [3-6]. Итоговый обзор представлен в [7]. Отмечены приложения в теории массового обслуживания (для вентильных бесконечнолинейных систем).

До сих пор речь шла об МВП с однотипными частицами. Далее мы введем понятие МВП с $d \geq 2$ типами частиц.

Пусть заданы случайные векторы $\xi^{(k)} = (\xi_1^{(k)}, \dots, \xi_d^{(k)})$, $1 \leq k \leq d$, в $\mathbf{Z}_+^d$. Определим МПВ с d типами частиц как многомерную цепь Маркова $Z(n) = (Z_1(n), \dots, Z_d(n))$, $n \geq 0$, со значениями в $\mathbf{Z}_+^d$, заданную следующей рекуррентной формулой:

$$Z_k(n) = \bigvee_{j=1}^{d} \bigvee_{i=1}^{Z_j(n-1)} \xi_{i,k}^{(j)}(n), \tag{4}$$

где случайные вектора $\xi_i^{(j)}(n) = (\xi_{i,1}^{(j)}(n), \dots, \xi_{i,d}^{(j)}(n))$, $n \geq 1$, независимы и $\xi_i^{(j)}(n) \stackrel{d}{=} \xi^{(j)}$, $1 \leq j \leq d$.

Обозначим функции многомерного распределения векторов $\xi^{(k)}$ через F_k, $1 \leq k \leq d$, тогда из (4) следует формула для переходных вероятностей:

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}(Z_1(n) \leq j_1, \dots, Z_d(n) \leq j_d | Z_1(n-1) = i_1, \dots, Z_d(n-1) = i_d) = \\ &= F_1^{i_1}(j_1, \dots, j_d) \dots F_d^{i_d}(j_1, \dots, j_d), \quad i_k, j_k \in \mathbf{Z}_+. \end{aligned} \tag{5}$$

Вводя произвольные распределения F_k векторов $\xi^{(k)}$ уже не в $\mathbf{Z}_+^d$, а в $\mathbf{R}_+^d$, обобщаем формулу (5) до следующей:

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}(Z_1(n) \leq y_1, \dots, Z_d(n) \leq y_d | Z_1(n-1) = x_1, \dots, Z_d(n-1) = x_d) = \\ &= F_1^{x_1}(y_1, \dots, y_d) \dots F_d^{x_d}(y_1, \dots, y_d), \quad x_k, y_k \in \mathbf{R}_+. \end{aligned} \tag{6}$$

Естественным представляется определить МВП с d типами частиц и значениями в $\mathbf{R}_+^d$ как многомерную цепь Маркова с помощью (6).

---

[1]Работа выполнена при поддержке по гранту РФФИ N 11-01-00050.

Однако здесь возникает одна проблема, связанная с многомерностью. В одномерном случае, если $F(y)$ – функция распределения, то $F^x(y)$ – тоже функция распределения, при любом $x > 0$. В многомерном случае, если $F(y_1, \dots y_d)$ – функция распределения, то $F^x(y_1, \dots y_d)$ совсем не обязательно является таковой.

Пусть распределения векторов $\xi^{(k)}$ имеют носители $T_k \subset \mathbf{R}_+^d$. Обозначим через $T_{k,l}$ проекции T_k на ось Ox_l. Тогда множеством возможных значений компоненты $Z_k(n)$ будет $T_k^* = \bigcup_{j=1}^d T_{j,k} \subset \mathbf{R}_+$.

Сделаем дополнительно следующее предположение:

$$F_k^x(y_1, \dots, y_d) \text{ – функция распределения}, \quad \forall x \in T_k^*, 1 \le k \le d. \tag{7}$$

С учетом (7), формула (6) действительно определяет случайный процесс, который можно назвать МВП с d типами частиц и значениями в $\mathbf{R}_+^d$.

2. Примеры явного построения. Как показано в [2], МВП с одним типом частиц и значениями в $\mathbf{R}_+$ всегда допускает явное построение. Для МВП с несколькими типами частиц это верно не всегда. Тем не менее, можно указать некоторые примеры.

Пример 1. Пусть компоненты векторов $\xi^{(k)}$ независимы, тогда их функции распределения допускают представление

$$F_k(y_1, \dots, y_d) = F_{k1}(y_1) \dots F_{kd}(y_d), \quad 1 \le k \le d,$$

и МВП может быть задан стохастически рекуррентной формулой

$$Z_k(n) = \bigvee_{j=1}^d F_{jk}^{-1}\left(U_{j,k,n}^{1/Z_j(n-1)}\right),$$

где случайные величины $U_{j,k,n}$ независимы и равномерно распределены на $[0, 1]$.

Если же, кроме того, существуют такие функции $G_k(y)$, $1 \le k \le d$, что $F_{kl}(y) = G_l^{a_{kl}}(y)$ для некоторых чисел $a_{kl} > 0$, то МВП может быть задан и другой формулой:

$$Z_k(n) = G_k^{-1}\left(U_{k,n}^{1/\sum_{j=1}^d a_{jk} Z_j(n-1)}\right),$$

где случайные величины $U_{k,n}$ независимы и равномерно распределены на $[0, 1]$.

В обоих случаях (7) заведомо выполняется, а (6) проверяется непосредственно.

Пример 2. Пусть компоненты векторов $\xi^{(k)}$ комонотонны, т.е. они могут быть представлены как возрастающие функции от одной случайной величины. Тогда МВП может быть задан стохастически рекуррентной формулой

$$Z_k(n) = \bigvee_{j=1}^d F_{jk}^{-1}\left(U_{j,n}^{1/Z_j(n-1)}\right),$$

где случайные величины $U_{j,n}$ независимы и равномерно распределены на $[0, 1]$.

Пример 3. Пусть F_k, $1 \le k \le d$, представляют собой многомерные максимум-устойчивые распределения (распределения экстремальных значений) [8, § 5.2; 10, § 7.5]. Поскольку все происходит в $\mathbf{R}_+^d$, то из трех экстремальных типов это могут быть только многомерные распределения Фреше. Используем представление Скляра:

$$F_k(y_1, \dots, y_d) = C_k(F_{k1}(y_1), \dots, F_{kd}(y_d)), \quad 1 \le k \le d,$$

где одномерные функции распределения F_{kl} имеют вид

$$F_{kl}(y) = \begin{cases} \exp\{-c_{kl}(y - b_{kl})^{-\alpha_k}\}, & y > b_{kl} \\ 0, & y \le b_{kl} \end{cases}, \quad \alpha_k, b_{kl}, c_{kl} > 0,$$

а копулы C_k являются максимум-устойчивыми (копулами экстремальных значений) [10, § 7.5; 11, § 3.3.4] так что удовлетворяют общему условию:

$$C^s(u_1, \dots, u_d) = C(u_1^s, \dots u_d^s), \quad \forall s > 0.$$

Для многомерных распределений Фреше получаем следующие соотношения:

$$F_k^x(y_1, \dots, y_d) = F_k(x^{-1/\alpha_k}(y_1 - b_{k1}) + b_{k1}, \dots, x^{-1/\alpha_k}(y_d - b_{kd}) + b_{kd}), \forall x > 0.$$

Отсюда следует, что МВП может быть задан рекуррентной формулой:

$$Z_k(n) = \bigvee_{j=1}^d (Z_j^{1/\alpha_j}(n)(\xi_k^{(j)}(n) - b_{jk}) + b_{jk}),$$

где случайные вектора $\xi^{(j)}(n) = (\xi_1^{(j)}(n), \dots, \xi_d^{(j)}(n))$, $n \ge 1$, независимы и $\xi^{(j)}(n) \stackrel{d}{=} \xi^{(j)}$, $1 \le j \le d$.

3. Эргодическая теорема в случае $d = 2$. Прежде чем перейти к эргодической теореме для МВП с двумя типами частиц, сделаем дополнительное предположение:

$$\min\{\inf T_1^*, \inf T_2^*\} \geq x_0 > 0. \tag{8}$$

Тем самым мы автоматически исключаем возможность вырождения процесса (его обращения в нуль или сходимости к нулю), а также чередование типов (когда в одном поколении присутствуют частицы только одного типа, в следующем – другого и т.д.) и другие особенности поведения. Вместо (7) тогда достаточно предположить, что

$$F_1^{x_0}(y_1, y_2), F_2^{x_0}(y_1, y_2) \text{ – функции распределения.} \tag{9}$$

Для обоснования этого факта используем следующую лемму.

Лемма 1. *Пусть $F(x, y)$ – функция распределения, тогда $F^r(x, y)$ – функция распределения при всех $r \geq 1$.*

Заметим, что в случае $d > 2$ лемма 1 уже не будет верна.

Теперь, если $F^{x_0}(y_1, y_2)$ является функцией распределения, то по лемме 1 таковой является и $F^x(y_1, y_2) = (F^{x_0}(y_1, y_2))^{x/x_0}$ при всех $x \geq x_0$, а значит, выполняется предположение (7).

За множество состояний цепи Маркова $Z(n)$ можно принять

$$S = \{(\max\{x_{11}, x_{21}\}, \max\{x_{12}, x_{22}\}) : (x_{11}, x_{12}) \in T_1, (x_{21}, x_{22}) \in T_2\},$$

поскольку при любом $Z(0) \in \mathbf{R}_+ \backslash \{0\}$ получаем $Z(n) \in S$ для всех $n \geq 2$ п.н. Будем предполагать, что S состоит более чем из одной точки (в противном случае стационарное распределение сосредоточено в этой точке и эргодичность тривиальна).

Тогда, в силу (8) цепь Маркова, заданная переходными вероятностями (6), оказывается неприводимой и апериодичной (из любого состояния можно попасть в любое другое за один шаг).

Введем норму в $\mathbf{R}^d$: $\|(x_1, \ldots, x_d)\| = \max\{|x_1|, \ldots, |x_d|\}$. Определим величины

$$\rho_k = \limsup_{u \to \infty} u\mathbf{P}(\|\xi^{(k)}\| > u), \quad 1 \leq k \leq d.$$

Теорема 1. *Если выполнены условия (8), (9) и $\rho_1 + \rho_2 < e^{-\gamma}$, то процесс $Z(n)$ эргодический.*

Следствие 1. *Если выполнены условия (8), (9) и $\mathbf{M}\|\xi^{(1)}\| < \infty$, $\mathbf{M}\|\xi^{(2)}\| < \infty$, то процесс $Z(n)$ эргодический.*

Утверждение следует из асимптотики $\mathbf{P}(\|\xi^{(k)}\| > u) = o(1/u)$, $u \to \infty$, $k = 1, 2$.

4. Случай растущих прямоугольников. Рассмотрим семейство процессов $\{Z^{(\lambda)}(n)\}$ с $F_k^{(\lambda)}$ и $T_k^{(\lambda)} \subset [1, \lambda_1] \times [1, \lambda_2]$, $\lambda_k = p_k\lambda$, $p_k > 0$, $\lambda_k \geq 1$, $k = 1, 2$. По теореме 1 для каждого процесса $\{Z^{(\lambda)}(n)\}$ существует и единственно стационарное распределение $\Psi^{(\lambda)}$ на $[1, \lambda_1] \times [1, \lambda_2]$. Обозначим случайный вектор с таким распределением через $\tilde{Z}^{(\lambda)} = (\tilde{Z}_1^{(\lambda)}, \tilde{Z}_2^{(\lambda)})$. Нас будет интересовать асимптотическое поведение $\Psi^{(\lambda)}$ при $\lambda \to \infty$. Этот вопрос для процессов с одним типом частиц изучался автором в [4].

Теорема 2. *Если для любого вектора $q = (q_1, q_2) \in (0, 1]^2$, $q \neq (1, 1)$, верно*

$$\limsup_{\lambda \to \infty} F_k^{(\lambda)}(q_1\lambda_1, q_2\lambda_2) < 1, \quad k = 1, 2 \tag{10}$$

и для некоторой векторной функции $u(\lambda) = (u_1(\lambda), u_2(\lambda))$ существуют пределы

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda(1 - F_k^{(\lambda)}(u(\lambda))) = \tau_k \in [0, +\infty], \quad k = 1, 2,$$

то

$$\lim_{\lambda \to \infty} \Psi^{(\lambda)}(u(\lambda)) = e^{-(p_1\tau_1 + p_2\tau_2)}.$$

Рассмотрим функции распределения F_1^0, F_2^0 на $[0, 1]^2$, принадлежащие областям притяжения некоторых невырожденных (по обеим компонентам) максимум-устойчивых законов H_1 и H_2 с одинаковой нормировкой максимумов, т.е. существуют такие функции $a_1(s), a_2(s) > 0$, $b_1(s), b_2(s)$, $s > 0$, что для векторной функции $v(s, x) = (a_1(s)x_1 + b_1(s), a_2(s)x_2 + b_2(s))$, $x = (x_1, x_2)$, верно

$$\lim_{s \to \infty} F_1^0(v(s, x))^s = H_1(x), \quad \lim_{s \to \infty} F_2^0(v(s, x))^s = H_2(x), \quad k = 1, 2. \tag{11}$$

Следствие 2. *Пусть выполнено (10) и существует векторная функция $f(s, q) = (f_1(s, q), f_2(s, q))$ такая, что*

$$\frac{1 - F_k^{(\lambda)}(f(\lambda, v(\lambda, x))}{1 - F_k^0(v(\lambda, x))} \to 1, \quad \lambda \to \infty. \tag{12}$$

Тогда

$$\lim_{s\to\infty}\Psi^{(\lambda)}(f(\lambda, v(\lambda, x)) = H_1^{p_1}(x)H_2^{p_2}(x).$$

Наиболее простые примеры, когда применимо следствие 2, возникают при выполнении условий

$$F_k(x_1, x_2) = F_k^0\left(\frac{x_1-1}{\lambda_1-1}, \frac{x_2-1}{\lambda_2-1}\right), \quad k = 1, 2,$$

тогда $f(s, q) = ((p_1 s - 1)q_1 + 1, (p_2 s - 1)q_2 + 1)$.

Далее в примерах будем предполагать для простоты, что $p_1 = p_2 = 1$, т.е. рассматриваются стационарные распределения на растущих квадратах.

Пример 4. Пусть $F_1^0(x_1, x_2) = x_1^2 x_2$, $F_2^0(x_1, x_2) = x_1 x_2^2$ (численности потомков каждого типа от частицы каждого типа независимы). Тогда

$$\lim_{s\to\infty} F_1^0(y_1/s + 1, y_2/s + 1)^s = e^{2y_1+y_2}, \ \lim_{s\to\infty} F_2^0(y_1/s + 1, y_2/s + 1)^s = e^{y_1+2y_2},$$

откуда получаем

$$\lim_{\lambda\to\infty}\Psi^{(\lambda)}(\lambda + y_1, \lambda + y_2) = e^{3(y_1+y_2)}, \quad y_1, y_2 \le 0.$$

Таким образом, случайный вектор $\hat{Z}^{(\lambda)} = (\lambda - \tilde{Z}_1^{(\lambda)}, \lambda - \tilde{Z}_2^{(\lambda)})$ имеет асимптотически двумерное показательное распределение с независимыми компонентами.

Пример 5. Пусть $F_1^0(x_1, x_2) = \min\{x_1^2, x_2\}$, $F_2^0(x_1, x_2) = \min\{x_1, x_2^2\}$ (частные распределения численностей потомков каждого типа от частицы каждого типа те же, что и в примере 4, однако здесь эти численности комонотонны). Тогда

$$\lim_{s\to\infty} F_1^0(y_1/s + 1, y_2/s + 1)^s = e^{\min\{2y_1, y_2\}},$$

$$\lim_{s\to\infty} F_2^0(y_1/s + 1, y_2/s + 1)^s = e^{\min\{y_1, 2y_2\}},$$

откуда получаем

$$\lim_{\lambda\to\infty}\Psi^{(\lambda)}(\lambda + y_1, \lambda + y_2) = e^{\min\{2y_1, y_2\}+\min\{y_1, 2y_2\}}, \quad y_1, y_2 \le 0.$$

Таким образом, случайный вектор $\hat{Z}^{(\lambda)}$ имеет асимптотически двумерное показательное распределение, но уже с зависимыми компонентами. Легко показать, что он распределен в угле $\{(y_1, y_2)\in\mathbf{R}_+^2 : 1/2 \le y_2/y_1 \le 2\}$.

В общем случае, в качестве предельных распределений компонент вектора $\tilde{Z}^{(\lambda)}$ могут выступать распределения экстремальных типов Вейбулла $H(x) = \exp\{-(-x)^\alpha\}$, $x \le 0$, $\alpha > 0$, и Гумбеля $H(x) = \exp\{-e^{-x}\}$ [8, 9].

Заметим, что следствие 2 дает только непрерывные предельные распределения (не обязательно абсолютно непрерывные). Однако предельные распределения могут быть и дискретными.

Следствие 3. *Пусть* $F_1^{(N)}$ *и* $F_2^{(N)}$ *– дискретные распределения на множествах* $\{1, \ldots, N\}^2$, $N \ge 1$, *и* $F_k^{(N)}(m) = F_k^0(m/N)$, $m = (m_1, m_2) \in \{1, \ldots, N\}^2$, *а распределения* F_1^0 *и* F_2^0 *удовлетворяют (11) с* $a_k(s) = 1/s$, $b_k(s) = 1$. *Тогда*

$$\lim_{N\to\infty}\Psi^{(N)}(N - m_1, N - m_2) = H_1(-m)H_2(-m).$$

Пример 6. Пусть $F_1^0(x_1, x_2) = x_1^2 x_2$, $F_2^0(x_1, x_2) = x_1 x_2^2$, тогда

$$\lim_{N\to\infty}\Psi^{(N)}(N - m_1, N - m_2) = e^{-3(m_1+m_2)}.$$

Таким образом, вектор $\hat{Z}^{(N)}$ имеет асимптотически двумерное геометрическое распределение с независимыми компонентами.

Аналогично примеру 5, можно построить дискретные предельные распределения и с зависимыми компонентами.

Библиографический список

1. *Lamperti, J.* Maximal branching processes and long-range percolation // J. Appl. Probab. 1970. **7**, № 1. 89-96.
2. *Лебедев, А.В.* Максимальные ветвящиеся процессы с неотрицательными значениями [Текст] / А.В. Лебедев // Теория вероятностей и ее применения. – 2005. – **50**. – № 3. – С. 564-570.
3. *Лебедев, А.В.* Двойной показательный закон для максимальных ветвящихся процессов [Текст] / А.В. Лебедев // Дискретная математика. – 2002. – **14**. – № 3. – С. 143-148.
4. *Лебедев, А.В.* Обобщенные максимальные ветвящиеся процессы на ограниченных множествах [Текст] / А.В. Лебедев // Вестник МГУ. – 2002. – Сер. 1. – № 6. – С. 55-57.
5. *Лебедев, А.В.* Обобщенные максимальные ветвящиеся процессы в случае степенных хвостов [Текст] / А.В. Лебедев // Вестник МГУ. – 2005. – Сер. 1. – № 2. – С. 47-49.

6. *Лебедев, А.В.* Асимптотика хвостов стационарных распределений максимальных ветвящихся процессов [Текст] / А.В. Лебедев // Теория вероятностей и ее применения. – 2009. – **54**. – № 4. – С. 515-520.
7. *Лебедев, А.В.* Максимальные ветвящиеся процессы [Текст] / А.В. Лебедев // Современные проблемы математики и механики. – М.: МГУ, 2009. – **4**. – № 1. – С. 93-106. http://www.math.msu.su/probab/svodny2.pdf
8. *Галамбош, Я.И.* Асимптотическая теория экстремальных порядковых статистик [Текст] / Я.И. Галамбош. – М.: Наука, 1984.
9. *Лидбеттер, М.* Экстремумы случайных последовательностей и процессов [Текст] / М. Лидбеттер, Г. Линдгрен, Х. Ротсен. – М.: Мир, 1989.
10. *McNeil, A.J, Frey, R., Embrechts, P.* Quantitative risk management. Princeton University Press, 2005.
11. *Nelsen, R.* An introduction to copulas / Lecture Notes in Statistics. Springer. 1999. **139**.

Уравнение Эйлера для гиббсовских случайных полей

М.Б. Аверинцев

Рассматриваются взаимодействующие марковские случайные процессы с переходными вероятностями гиббсовского типа. Для некоторых классов таких процессов получены дифференциальные уравнения для средней плотности числа частиц. Эти уравнения аналогичны гидродинамическим уравнениям Эйлера.

В работе [1] рассмотрены случайные процессы аналогичного вида, в работе [2] уравнения Эйлера получены для процесса контактов. Более подробно переход к гидродинамическим уравнениям рассмотрен в работах [3, 4].

Мы будем рассматривать систему случайных процессов, зависящих от положительного параметра $\varepsilon, 0 < \varepsilon \leq 1$. Пусть $Z_\varepsilon = \{0, \pm\varepsilon, \pm 2\varepsilon, ...\}$, $T_\varepsilon = \{0, \varepsilon, 2\varepsilon, ...\}$, $f(x)$ – функция на Z_ε, принимающая значения 0 и 1. Обозначим множество таких функций через F_ε. Семейство случайных процессов $\xi_{\varepsilon,t}(x)$ принимает значения в F_ε В дальнейшем индекс ε будет по возможности опускаться. Переходные вероятности случайного процесса задаются следующим образом. Пусть $\subset AZ, A$ – конечное множество, $g(x) = f(x)$ при $x \in ZA$, тогда

$$P\{\xi_{t+1}(x) = g(x), x \in Z | \xi_t(y) = f(y), y \in Z\} = \prod_{x \in A} P(g(x)|f(\cdot)). \tag{1}$$

Таким образом при заданном значении процесса при данном t значения процесса в следующий момент времени в различных точках независимы. Вероятности определяющие состояния процесса в следующий момент времени имеют гиббсовский вид, т.е.

$$P(g(x)|f(\cdot)) = \frac{exp\{H_x(f(\cdot), g(x))\}}{\Xi}, \tag{2}$$

$$H_x(f(\cdot), g(x)) = \sum_{B, x \in B} U_B(g(x)|f(y), y \in B), \tag{3}$$

Ξ – нормирующий множитель. Потенцталы $U_B(\cdot)$ определены для некоторого класса конечных подмножеств Z. Для Z_ε берутся множества $\varepsilon B = \{\varepsilon x; x \in B\}$. В дальнейшем будем рассматривать множества B вида $\{x-1, x, x+1\}$ $x \in Z$. Кроме того предположим трансляционную инвариантность потенциала, т.е.

$$U_{\{x-1,x,x+1\}}(g(x)|f(x-1), f(x), f(x+1)) = U_{\{-1,0,1\}}(i|j,k,l) \tag{4}$$

при $g(x) = if(x-1) = jf(x) = kf(x+1) = l$, таким образом, потенциал можно записывать в виде $U(i|j,k,l)$, где все индексы принимают значения 0 или 1. Положим

$$U(0|1,1,1) = U(0|1,0,1) = U(1|0,0,0) = U(1|0,1,0) = -\infty,$$

$$U(1|1,1,0) = U(1|1,0,0) = A, U(1|0,1,1) = U(1|0,0,1) = B$$

все остальные значения потенциалов положим равными нулю.

При сделанных предположениях переходные вероятности для значения процесса в точке x определяются только значениями процесса в предыдущий момент времени в соседних точках. Так как случайный процесс принимает только два значения 0 и 1, то достаточно задать вероятности

$$P(\xi_{t+1}(x) = 1 | \xi_t(x-1) = f(x-1), \xi_t(x) = f(x), \xi_t(x+1) = f(x+1)) =$$

$$= P(1|f(x-1), f(x), f(x+1)).$$

Будем считать, что $e^{-\infty} = 0$, тогда $P(1|1,1,1) = P(1|1,0,1) = 1$, $P(1|0,0,0) = P(1|0,1,0) = 0$, в дальнейшем положим $a = e^A$, $b = e^B$, тогда $P(1|1,1,0) = P(1|1,0,0) = \frac{a}{1+a}$, $P(1|0,1,1) = P(1|0,0,1) = \frac{b}{1+b}$.

Зададим начальные условия процесса $P(\xi_0(x) = 1) = \varepsilon p(x)$, где $p(x)$ непрерывно дифференцируемая функция, $0 \leq p(x) \leq 1$. При этом значения процесса в различных точках независимы. В этом случае, используя формулы (1), (2), (3), (4), мы можем найти безусловные вероятности $P(\xi_{\varepsilon,t}(x) = 1)$. Пусть $\rho_\varepsilon(t,x) = M\xi_{\varepsilon,t}(x) -$

среднее число частиц в точке x. Так как значения случайного процесса в точке принимают только два значения 0 и 1, то

$$M\xi_{\varepsilon,t}(x) = P(\xi_{\varepsilon,t}(x) = 1).$$

Как следует из формул (1), (2), (3), при заданных начальных условиях значения $\xi_{\varepsilon,t}(x)$ независимы для различных x, поэтому вероятности каких-то значений случайного процесса на конечном множестве в фиксированный момент времени t получаются умножением величин $\rho_\varepsilon(tx)$ для тех точек множества, в которых значение равно 1 и, соответственно, величин $1 - \rho_\varepsilon(t, x)$ для тех точек, в которых значение процесса равно 0. Используя формулу полной вероятности выразим значение $\rho_\varepsilon(t+\varepsilon, x)$ через величины $\rho_\varepsilon(t, x)$. Записывая эту формулу и приводя подобные члены, получим: $\rho_\varepsilon(t+\varepsilon, x) = \rho_\varepsilon(t, x-\varepsilon)\rho_\varepsilon(t, x+\varepsilon) + +\frac{a}{1+a}\rho_\varepsilon(t, x-\varepsilon)(1-\rho_\varepsilon(t, x+\varepsilon)) + \frac{b}{1+b}\rho_\varepsilon(t, x+\varepsilon)(1-\rho_\varepsilon(t, x-\varepsilon))$.

После преобразований получим:

$$\rho_\varepsilon(t+\varepsilon, x) = K\rho_\varepsilon(t, x-\varepsilon)\rho_\varepsilon(t, x+\varepsilon) + L\rho_\varepsilon(t, x-\varepsilon) + M\rho_\varepsilon(t, x+\varepsilon),$$

где $K = 1 - \frac{a}{1+a} - \frac{b}{1+b}, L = \frac{a}{1+a}, M = \frac{b}{1+b}$. Предположим, что существует средняя плотность числа частиц на единицу длины, которая равна $\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{\varepsilon}\rho_\varepsilon(tx) = \rho(t, x)$ и является непрерывно дифференцируемой функцией по обеим переменным. Более того, предположим, что имеет место равенство $\rho_\varepsilon(t, x) = \varepsilon\rho(t, x) + o(\varepsilon^2)$. Предположим далее, что $L + M = 1$, тогда K=0. Отнимем от обеих частей получившегося уравнения $\rho_\varepsilon(tx)$ и поделим его на ε^2, тогда получим с точностью до бесконечно малых относительно ε:

$$\frac{\rho(t+\varepsilon, x) - \rho(t, x)}{\varepsilon} = L\frac{\rho(t, x-\varepsilon) - \rho(t, x)}{\varepsilon} + M\frac{\rho(t, x+\varepsilon) - \rho(t, x)}{\varepsilon}$$

Переходя в последнем равенстве к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим уравнение Эйлера

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = (M - L)\frac{\partial\rho}{\partial x}.$$

Если изменить масштаб по пространственной координате, то можно получить аналог уравнения Навье-Стокса, как это сделано в работе [2]. Заметим, что здесь рассмотрена простейшая модель гиббсовского взаимодействующего марковского процесса. Возможно получение подобных уравнений и в моделях с другими потенциалами. Также возможно обобщение на случаи, когда пространственная переменная x принимает значения не на целочисленной прямой, а на многомерной решетке.

Библиографический список

1. *Аверинцев М.Б.* Взаимодействующие марковские процессы и гиббсовские случайные поля [Текст] / М.Б. Аверинцев // Труды третьих колмогоровских чтений. – Ярославль, 2005. – С. 182-184.
2. *Аверинцев, М.Б.* Гидродинамическое описание процесса контактов [Текст] / М.Б. Аверинцев // Труды VII международных колмогоровских чтений. – Ярославль, 2009. – С. 110-114.
3. *Boldrighini, C., Dobrushin R.L., Sukhov Yu.M.* One-Dimensional Hard Rod Caricature of Hydrodynamics // J. Stat. Phis. 1983. V. 31. № 3.
4. *Dobrushin, R.L.* Caricatures of hydrodynamics // Proc. 9th. Int. Congress on Math. Phys. Bristol: Adam Higler, 1989.

Модифицированный американский опцион колл в биномиальной модели

А.В. Горбунова, С.В. Жуленев

Введение. В данной заметке завершается рассмотрение ситуации, связанной с модифицированным американским опционом колл, которое было начато в теореме 1 [1, с. 764] и продолжено в [3] и [4]. Ее появление оказалось связанным с желанием выяснить стоимость опциона в более сложной, триномиальной модели. При анализе этой модели выяснилось, что для его упрощения желательно не только обосновать пару новых свойств произвольной степени оператора Q, но и старые доказывать несколько иначе. Эти результаты и составили первую часть работы. В ней также рассмотрен конкретный пример, для которого найдены не только стоимость опциона при разных начальных данных, но и оптимальный момент остановки. Причем на основании его результатов сделаны выводы о форме этого момента в произвольном случае.

1. Цели работы. Наш опцион колл определяется платежной последовательностью $\beta^n g(S_n)$, $0 \le n \le N < \infty$, в которой β, $0 < \beta < 1$, – некоторое число, $g(y) = (y-1)^+$, а S_n – цена базового актива в момент n. И в настоящей работе нас интересует стоимость покупки этого опциона в дискретном случае на конечном горизонте N, а также момент τ^* (оптимальной остановки) его предъявления к исполнению. Причем ответ ищем в биномиальной модели и риск-нейтральном подходе.

Точнее говоря, предполагается, что $(0 \le n \le N,\ u = 1 + r)$

$$1.\ S_n = S_0\lambda^{\varepsilon_1+\dots+\varepsilon_n}, \qquad 2.\ B_n = B_0 u^n, \qquad 3.\ u = E\lambda^{\varepsilon_1}, \tag{1}$$

н.о.р.с.в. ε_n распределены по Бернулли, $P(\varepsilon_n = 1) = p$, $P(\varepsilon_n = -1) = q$, $p + q = 1$. Иными словами, в биномиальной модели (1.1) цены акций принимают значения из множества $E = (\lambda^s : \ |s| < \infty, \ \lambda > 1)$, если $S_0 \in E$, деньги разных моментов времени сравниваются в (1.2) с помощью безрисковой ставки r периода Δt, $N\Delta t = T$ (срок жизни опциона T разбит на N таких периодов), а в риск-нейтральном подходе ожидаемая доходность рискового актива $E\lambda^{\varepsilon_1} - 1$ равна безрисковой ставке r.

2. Используемая ранее терминология и факты. В указанных выше прежних работах было доказано, что стоимость C покупки нашего опциона и оптимальный момент остановки τ^* записываются в виде

$$C = Q^N g(\lambda^s) = \max\{g(\lambda^s), \beta v g_1(\lambda^s), (\beta v)^2 g_2(\lambda^s), \cdots, (\beta v)^N g_N(\lambda^s)\}, \tag{2}$$

$$\tau^* = \min\{0 \le n \le N : \ Q^{N-n} g(S_n) = g(S_n)\}, \tag{3}$$

где $\lambda^s = S_0$, $g_k(x) = T^k g(x)$, $Tg(x) = E(g(S_1)|S_0 = x) = Eg(x\lambda^{\varepsilon_1})$, а $v = u^{-1}$. Кроме того, в риск-нейтральном подходе (1.3) вероятности p и q удовлетворяют равенству $u = p\lambda + q\mu$, $\mu = \lambda^{-1}$ и потому

$$p = \frac{u - \mu}{\lambda - \mu}, \qquad q = \frac{\lambda - u}{\lambda - \mu}.$$

3. Свойства степеней оператора T. Оператор Q и его степени, определенные в (2), зависят от степеней оператора T. Уточним поэтому сначала известные их свойства, а затем сформулируем и докажем новые.

В точках множества E мы используем следующее представление

$$T^k g(\lambda^s) = \begin{cases} \lambda^s u^k - 1, \quad s \ge k, \\ \lambda^s u^k - 1 + \sum_{l=0}^{m-1} C_k^l p^l q^{k-l}(1 - \mu^{k-s-2l}), -k < s < k, \\ 0, \quad s \le -k, \end{cases} \tag{4}$$

если $k - s = 2m$ или $2m - 1$ при $-k < s < k$ ($m-$ некоторое целое). Его можно записать и в более простой форме

$$T^k g(\lambda^s) = \lambda^s u^k \textstyle\sum_{l=m}^k C_k^l \overline{p}^l \overline{q}^{k-l} - \sum_{l=m}^k C_k^l p^l q^{k-l}, \qquad -\infty < s < \infty,$$

если положить $\overline{p} = \frac{p\lambda}{u}$, $\overline{q} = \frac{q\mu}{u}$ и считать, что суммы $\sum_{l=m}^k C_k^l \overline{p}^l \overline{q}^{k-l} = 1$ и $\sum_{l=m}^k C_k^l p^l q^{k-l} = 1$ не только при $m = 0$, но и при любом $m < 0$, а, с другой стороны, обе равны 0 при $m > k$.

Помимо этих уточненных представлений укажем соотношение

$$g_k(x) = p g_{k-1}(x\lambda) + q g_{k-1}(x\mu), \qquad k \ge 1, \tag{5}$$

и следующие три простых свойства функций $g_k(x)$. Так, при $p > 0$

$$1) \ g_k(\lambda^s) = 0, \ \ s \le -k; \qquad 2) \ g_k(\lambda^{-k+1}) = p^k(\lambda - 1) > 0, \ \ k \ge 0,$$
$$3) \ \forall k \ge 0 : \quad g_k(\lambda^s) < g_k(\lambda^{s+1}), \quad s \ge -k.$$

Для дальнейшего будет полезным напомнить, что число $m = m(k, s)$ при данных k, s определяется из равенств $k - s = 2m$ или $2m - 1$, и уточнить, как оно убывает при увеличении s и фиксированном k :

$$\begin{array}{c|c||ccccccccc||c} s & -k & -k+1 & -k+2 & -k+3 & \cdots & 0 & \cdots & k-3 & k-2 & k-1 & k & k+1 \\ m & k & k & k-1 & k-1 & & \frac{k}{2}(\frac{k+1}{2}) & & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

Сформулируем теперь и докажем два новых свойства функций $g_k(x)$.

Теорема 1. $g_{k+1}(\lambda^s) > g_k(\lambda^s), \qquad s \ge -k, \ k \ge 0.$

Доказательство. В силу (5) можно доказывать неравенство

$$p g_k(\lambda^{s+1}) + q g_k(\lambda^{s-1}) > g_k(\lambda^s). \tag{6}$$

Причем в силу (4) при $s > k$ или $s = k$ оно очевидно, т.к. $\quad p(\lambda^{s+1}u^k - 1) + q(\lambda^{s-1}u^k - 1) = \lambda^s u^{k+1} - 1 > \lambda^s u^k - 1.$
$p(\lambda^{s+1}u^k - 1) + q[\lambda^{s-1}u^k - 1 + q^k(1 - \mu)] = \lambda^s u^{k+1} - 1 + q^{k+1}(1 - \mu)$. Поэтому остается рассмотреть случаи $s = k - 2m + 1$ и $s = k - 2m$.

1. $s = k - 2m + 1$. Неравенство (6) можно записать в виде

$$p\{\lambda^{s+1}u^k - 1 + \sum_0^{m-2} C_k^l p^l q^{k-l}(1 - \mu^{2(m-1)-2l})\} + q\{\lambda^{s-1}u^k - 1 +$$

$$+ \sum_0^{m-1} C_k^l p^l q^{k-l}(1 - \mu^{2m-2l})\} > \lambda^s u^k - 1 + \sum_0^{m-1} C_k^l p^l q^{k-l}(1 - \mu^{2m-1-2l}),$$

где при $m = 1$ первая сумма пустая, и потому оно упрощается до

$$\lambda^s u^k(u-1) + q^{k+1}(1-\mu^2) > q^k(1-\mu).$$

Но $q^k(1-\mu) - q^{k+1}(1-\mu^2) = q^k(1-\mu)[1-q(1+\mu)] = q^k(u-1)\lambda^{-1}$ и потому все сводится к неравенству $\lambda^{s+1}u^k > q^k$. А оно очевидно при $s \geq -1$ (мы рассматриваем случай $s = k-1 \geq -1$ при $k \geq 0$).

При $m \geq 2$ верхний предел $m-2$ можно заменить на $m-1$, а все суммы с 1 сокращаются и потому приходим к очевидному неравенству

$$\lambda^s u^k(u-1) > \lambda^s(u-1)\sum_0^{m-1} C_k^l \bar{p}^l \bar{q}^{k-l} \quad (\bar{p} = p\lambda,\ \bar{q} = q\mu),$$

поскольку в данном случае $s = k-2m+1 \leq k-3$, поэтому $k \geq 2$ и, кроме того, $m \leq k,\ u = p\lambda + q\mu$ и потому $u^k > \sum_0^{m-1} C_k^l \bar{p}^l \bar{q}^{k-l}$.

2. $s = k-2m$. На этот раз неравенство (6) записывается в виде

$$p\{\lambda^{s+1}u^k - 1 + \sum_0^{m-1} C_k^l p^l q^{k-l}(1-\mu^{2m-1-2l})\} + q\{\lambda^{s-1}u^k - 1 +$$

$$+\sum_0^{m} C_k^l p^l q^{k-l}(1-\mu^{2m+1-2l})\} > \lambda^s u^k - 1 + \sum_0^{m-1} C_k^l p^l q^{k-l}(1-\mu^{2m-2l}),$$

который затем по аналогии упрощается до очевидного неравенства

$$\lambda^s u^k(u-1) + qC_k^m p^m q^{k-m}(1-\mu) > \lambda^s(u-1)\sum_0^{m-1} C_k^l \bar{p}^l \bar{q}^{k-l},$$

поскольку $s = k-2m \leq k-2$ ($m \geq 1$!) и потому $k \geq 1$.

Но более интересным фактом представляется то, что монотонно возрастающей последовательностью по k является $v^k g_k(x)$.

Теорема 2. $v^{k+1}g_{k+1}(\lambda^s) > v^k g_k(\lambda^s), \qquad s \geq -k, \quad k \geq 0.$

Доказательство. В силу (4) при $s \geq k+1$ это очевидно, поскольку

$$v^{k+1}g_{k+1}(\lambda^s) = \lambda^s - v^{k+1} > \lambda^s - v^k = v^k g_k(\lambda^s).$$

Если $-k \leq s \leq k,\ k-s = 2m$, то в силу (6) достаточно показать, что

$$p\left(\lambda^{s+1}\sum_{l=m}^{k} C_k^l \overline{p}^l \overline{q}^{k-l} - \sum_{l=m}^{k} C_k^l p^l q^{k-l}\right) + q\left(\lambda^{s-1}\sum_{l=m+1}^{k} C_k^l \overline{p}^l \overline{q}^{k-l} - \sum_{l=m+1}^{k} C_k^l p^l q^{k-l}\right)$$

$$> \left[\lambda^s \sum_{l=m}^{k} C_k^l \overline{p}^l \overline{q}^{k-l} - \sum_{l=m}^{k} C_k^l p^l q^{k-l}\right] u;$$

здесь индекс суммирования $m+1$ появился потому, что $k-(s-1) = 2m+1 = 2(m+1)-1$. Но в этом нетрудно убедиться, если воспользоваться равенством $\sum_{m+1}^k a_l = \sum_m^k a_l - a_m$, поскольку тогда суммы с $\overline{p},\ \overline{q}$ взаимно сократятся и это неравенство можно будет переписать в виде

$$(u-1)\sum_{l=m}^{k} C_k^l p^l q^{k-l} > q\,C_k^m p^m q^{k-m}[\lambda^{2m-k+s-1} - 1] = q(\lambda^{-1}-1)C_k^m p^m q^{k-m}.$$

Пусть далее $-k \leq s \leq k,\ k-s = 2m-1$. Тогда нужно показать, что

$$p\left(\lambda^{s+1}\sum_{l=m-1}^{k} C_k^l \overline{p}^l \overline{q}^{k-l} - \sum_{l=m-1}^{k} C_k^l p^l q^{k-l}\right) + q\left(\lambda^{s-1}\sum_{l=m}^{k} C_k^l \overline{p}^l \overline{q}^{k-l} - \sum_{l=m}^{k} C_k^l p^l q^{k-l}\right)$$

$$> \left[\lambda^s \sum_{l=m}^{k} C_k^l \overline{p}^l \overline{q}^{k-l} - \sum_{l=m}^{k} C_k^l p^l q^{k-l}\right] u;$$

индекс $m-1$ объясняется равенством $k-(s+1) = 2m-2 = 2(m-1)$. И справедливость его объясняется теми же соображениями. Только на этот раз оно эквивалентно неравенству

$$(u-1)\sum_{l=m}^{k} C_k^l p^l q^{k-l} > p\,C_k^{m-1} p^{m-1} q^{k-m+1}[1 - \lambda^{s+1+2(m-1)-k}] = 0,$$

поскольку $s+1+2(m-1)-k=0$, а $m \le k$ при $-k \le s \le k$.

4. Вспомогательный результат. Для анализа проблемы оптимальной остановки нам потребуется трехпараметрическая система чисел

$$\rho_{lk}(s) = \frac{\lambda^s - v^l}{\lambda^s - v^k}, \qquad 0 \le l < k < \infty, \quad s \ge 0. \tag{7}$$

Лемма 1. *При любых фиксированных $m = k - l \ge 1$ и $s \ge 0$ последовательность $\rho_{lk}(s)$ монотонно возрастает по k при $k \ge m$.*

Доказательство. Поскольку $v < 1 < u$, то $(u^m - 1)(1-v) > 0$. Но

$$\frac{\lambda^s - v^{k-m}}{\lambda^s - v^k} < \frac{\lambda^s - v^{k+1-m}}{\lambda^s - v^{k+1}} \ \Leftrightarrow \ (u^m-1)(1-v) > 0.$$

Ясно, что $\rho_{0k}(0) = 0$, а для всех остальных допустимых значений индексов $0 < \rho_{lk}(s) < 1$. Кроме того, $\forall s \ge 0: \ \lim_{k\to\infty} \rho_{(k-m)k}(s) = 1$. Поэтому из леммы 1 вытекает, что любой такой последовательностью отрезок $(0,1)$ разбивается на непересекающиеся части и потому любое $\beta,\ 0 < \beta < 1$, при $s \ge 0$ обязательно попадает в одну из них,

$$\rho_{(k-m)k}(s) = \frac{\lambda^s - v^{k-m}}{\lambda^s - v^k} < \beta \le \frac{\lambda^s - v^{k+1-m}}{\lambda^s - v^{k+1}}, \qquad k \ge m, \tag{8}$$

а при $s \ge 1$, возможно, еще и во вспомогательный отрезок

$$0 < \beta \le \rho_{0m}(s).$$

5. Оптимальный момент остановки определяет равенство (3). Из него вытекают определенные соображения. Уточним их сначала в предположении, что $N = 7,\ \tau^* = n,\ S_n = \lambda^k,\ s < k < N$, где $\lambda^s = S_0$. Используем для этого последовательность $(\beta_k)_{0\le s\le k\le N}$, где $\beta_k = \frac{\lambda^k - 1}{\lambda^k - v}$, монотонно возрастающую по k. И отметим также, что в силу (2) и (3)

$$\lambda^k - 1 = g(\lambda^k) = g(S_n) \ge (\beta v)^l T^l g(S_n),\ 1 \le l \le N-n. \tag{9}$$

Пусть далее $s = 1$, а $k = 3$. Покажем, что тогда
1) на предыдущем шаге $S_{n-1} \ne \lambda^4$. В самом деле, в противном случае $g(\lambda^4) < \beta v T g(\lambda^4) = \beta(\lambda^4 - v)$, т.к. $\tau^* > n-1$, т.е. $\beta > \beta_4$. А в силу (9) $\beta \le \beta_3 < \beta_4$. Иными словами, если $\tau^* = n,\ S_n = \lambda^3$, то $S_{n-1} = \lambda^2$, а

$$\beta_2 < \beta \le \beta_3, \tag{10}$$

поскольку $g(\lambda^2) < \beta v T g(\lambda^2) = \beta(\lambda^2 - v)$. С другой стороны,
2) из левого неравенства в (10) вытекает, что $\beta > \beta_1 > \beta_0 = 0$. А потому если цена находится на любом уровне $\lambda^l,\ 0 \le l \le 2$, то «сделать следующий шаг выгодно», поскольку $g(\lambda^l) < \beta v T g(\lambda^l) = \beta(\lambda^l - v)$.

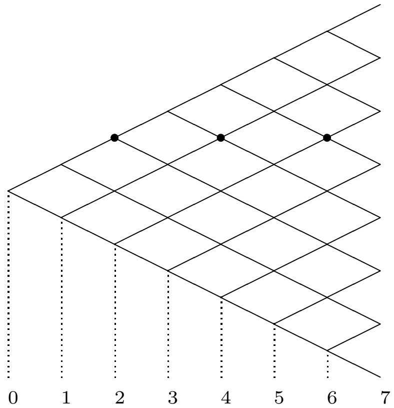
Используем далее вышесказанное для определения момента остановки в рассмотренной ниже более конкретной ситуации.

6. Пример оптимального момента τ^*. Предположим, что $N = 7,\ \lambda^s = \lambda,\ S_n = \lambda^3,\ \lambda = 1.2,\ u = 1.1$. Тогда $\mu = 0.833,\ v = 0.909$,

$$p = \frac{u-\mu}{\lambda-\mu} = \frac{0.267}{0.367} = 0.728, \qquad q = \frac{\lambda-u}{\lambda-\mu} = \frac{0.1}{0.367} = 0.272.$$

$$\text{а при } \frac{\lambda^2-1}{\lambda^2-v} = \frac{0.440}{0.531} = 0.829 < \beta < 0.889 = \frac{0.728}{0.819} = \frac{\lambda^3-1}{\lambda^3-v} \tag{11}$$

досрочное предъявление возможно, если $S_{\tau^*} = \lambda^3$, а $\tau^* = 2,\ 4$ или 6.



На биномиальном дереве цен акций жирными точками отмечены узлы, в которых цена равна λ^3. Как видим, это возможно для S_2, S_4 и S_6. Но чтобы убедиться в том, что значениями τ^* являются числа 2, 4 или 6, нужно для каждого проверить справедливость правых неравенств в (9), поскольку левое неравенство в (10) для всех этих чисел установлено.

Для 6 это сделано выше, а для 4 нужно еще проверить неравенства

$$g(\lambda^3) = \lambda^3 - 1 \geq (\beta v)^2 T^2 g(\lambda^3) = (\beta v)^2 (u^2 \lambda^3 - 1) = \beta^2 (\lambda^3 - v^2),$$

$$\lambda^3 - 1 \geq (\beta v)^3 T^3 g(\lambda^3) = (\beta v)^3 (u^3 \lambda^3 - 1) = \beta^3 (\lambda^3 - v^3).$$

Но они вытекают из правого неравенства в (10), поскольку имеют место следующие эквивалентные соотношения

$$\beta^l \leq \frac{\lambda^3 - 1}{\lambda^3 - v^l} \ \Leftrightarrow\ \frac{1 - (\beta v)^l}{1 - \beta^l} \leq \lambda^3, \qquad l = 1, 2, 3,$$

и ясно, что, скажем, $\frac{1-(\beta v)^l}{1-\beta^l} \leq \frac{1-\beta v}{1-\beta}$ при $l = 2, 3$. Что же касается значения 2, то придется проверить еще два неравенства

$$\lambda^3 - 1 \geq (\beta v)^4 T^4 g(\lambda^3) = (\beta v)^4 [u^4 \lambda^3 - 1 + q^4 (1 - \mu)] = \beta^4 [\lambda^3 - v^4 + (qv)^4 (1 - \mu)].$$

$$\lambda^3 - 1 \geq (\beta v)^5 T^5 g(\lambda^3) = \beta^5 [\lambda^3 - v^5 + (qv)^5 (1 - \mu^2)].$$

Но они были проверены для β из (11) в следующей форме

$$\beta^l \leq \frac{\lambda^3 - 1}{\lambda^3 - v^l + (qv)^l (1 - \mu^{l-3})}, \qquad l = 4, 5.$$

7. Заключение. Рассмотренные в примере соображения легко обобщить сначала для самого примера. А именно, при β из неравенства

$$\beta_{k-1} < \beta \leq \beta_k, \qquad 2 \leq k \leq 7,$$

будем иметь $S_{\tau^*} = \lambda^k$. Причем τ^* при $k = 2, 3$ будет принимать 3 досрочных значения, при $k = 4, 5$ два и при $k = 6, 7$ одно. Наконец, при $\beta > \beta_7 = 0.966$ наш американский опцион совпадет с европейским, поскольку моментов досрочного исполнения не будет.

Библиографический список

1. *Ширяев, А.Н.* Основы стохастической финансовой математики [Текст]: в 2 т. / А.Н. Ширяев. – М.: Фазис, 2004. – 1024 с.
2. *Лю, Ю.Д.* Методы и алгоритмы финансовой математики [Текст] / Ю.Д. Лю. – М.: Бином – Лаборатория знаний, 2007. – 752 с.
3. *Жуленев, С.В.* Стохастическая финансовая математика. Финансовые рынки в дискретном случае [Текст] / С.В. Жуленев. – М.: МГУ, 2007. – 104 с.
4. *Жуленев, С.В.* Хеджирование американского опциона [Текст] / С.В. Жуленев // Труды VII Колмогоровских чтений. – Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2009. – С. 90-97.

О критерии очень обильности дивизоров на проективных расслоениях над эллиптическими кривыми

Н.П. Гушель

Пусть π: P(E)→C – проективное расслоение, где E – векторное расслоение над неособой неприводимой кривой C рода g над алгебраически замкнутым полем характеристики ноль. Обозначим через M $= O_{P(E)}(1)$ тавтологический пучок Гротендика (по определению π_*M= E) и L$_P$ $= \pi^*$O$_C$ (P), P∈C. Теми же буквами будем обозначать классы дивизоров, соответствующих этим пучкам. Дивизор D на неособом алгебраическом многообразии X называется нормально порожденным, если H^0(iD) ⊗ H^0(D)→ H^0((i+1)D) – сюръекция для всех i ≥1. Если дивизор D обилен и нормально порожден, то линейная система | D | определяет вложение X в проективное пространство, т.е. D очень обилен [2].

В работе Бутлера [9] содержится достаточное условие нормальной порожденности дивизора D≡aM+bL на X = P(E), где E – векторное расслоение на неособой кривой C рода g. Из условия нормальной порожденности Бутлера вместе с критерием обильности Мияока (см. [6]) следуют *достаточные* условия очень обильности дивизора D (о.о.д.) на X

$$b + a\mu^-(E) > 2g. \qquad (*)$$

(см. [10]).

Необходимые и достаточные условия о.о.д. D (критерии) получены только для частных случаев.

Для расслоения E ранга r=rk(E)≥2 над неособой *рациональной* кривой C неравенство (*) дает критерий о.о.д. (см. [10] и [11]).

Для расслоений E, *разложимых на одномерные*, при $r \geq 2$, g=1, $a \geq 2$ неравенство (*) является критерием (см. [10] и [11]).

Для *неразложимого* векторного расслоения E при g=1, a =1 получен критерий в работе [7]. В случае r=2, g=1, a $\geq$1 критерии найдены ранее (см.[4] и [5]). При r$\geq$2, g=1, a$\geq$2 критерий о.о.д. D получен только при deg(E)$\equiv$0(mod r) в работе [8]. Доказательство, на основе работ [6] и [9] содержится в [10].

В работе [10], 4.5 (b) при r$\geq$2, g=1, a$\geq$2 получен критерий о.о.д. D на X = P(E) с *разложимым* расслоением E ранга 3, кроме случая когда E $\cong O_C \oplus$E, где deg(E) нечетно, deg(E)<0 и E – неразложимое векторное расслоение ранга 2. В данной работе приводится *набросок доказательства критерия* о.о.д. D для этого случая.

1. **Основные определения и результаты**

Пусть C – гладкая проективная кривая рода g и E – векторное расслоение над C ранга r=rk(E) и степени d=deg E=c_1(E).

(1.1) Векторное расслоение E на неособой кривой C рода g называется нормализованным, если $h^0(E) \neq 0$ и $h^0(E \otimes L) = 0$, $\forall L \in \mathrm{Pic}\, C$, $\deg L < 0$.

(1.2) Векторное расслоение E над неособой кривой C называется стабильным (полустабильным), если для всякого его собственного подрасслоения F имеем

$$\mu(F) < \mu(E) \quad (\mu(F) \leq \mu(E)),$$

где $\mu(E) = \frac{d}{r}$ – наклон.

Лемма 1.3 (см. [7, 1.8]). *Если E – полустабильное векторное расслоение над неособой кривой C и* $E = \bigoplus_{i=1}^{k} E_i$, *где* E_i *неразложимы, то* $\mu_i(E_i) = \mu(E)$, $i = 1, \ldots, k$ *и расслоения* E_i *полустабильны.*

(1.4) Фильтрация Хардера-Нарасимхана – это единственная фильтрация

$$0 = E_0 \subset E_1 \subset \ldots \subset E_{s-1} \subset E_s = E$$

такая, что E_i/E_{i-1} полустабильны для всех i и

$$\mu_i(E) = \mu(E_i/E_{i-1})$$

– строго убывающая функция от i

$$\mu^-(E) = \mu_s(E) = \mu(E_s/E_{s-1}),$$
$$\mu^+(E) = \mu_1(E) = \mu(E_1).$$

Лемма 1.5 (см. [10, 2.8]). *Если* $E = \bigoplus_{i=1}^{k} E_i$ *– разложимое векторное расслоение над неособой эллиптической кривой C и расслоения* E_i *неразложимы, то* $\mu^-(E) = \min \mu_i(E)$, $i = 1, \ldots, k$.

(1.5) Пусть E $\cong O_C \oplus$E – векторное расслоение ранга 3, где deg(E)=g<0, g нечетно и E – неразложимое векторное расслоение ранга 2, тогда из 1.4 получим

$$\mu^-(O_C \oplus E) = g/2.$$

2. **Когомологии дивизоров на проективных расслоениях над эллиптической кривой**

Лемма 2.1 (см. [1]). *Если E – неразложимое векторное расслоение над эллиптической кривой C и d=*deg *E, тогда*

(i) если $d > 0$, *то* $h^0(E) = d$, $h^1(E) = 0$;

(ii) если $d < 0$, *то* $h^0(E) = 0$, $h^1(E) = -d$;

(iii) если E(r, d) – множество неразложимых расслоений ранга степени d, то можно так выбрать $E(r, d) \in E(r, d)$, *что* $\forall E \in E(r, d)$ *найдется расслоение* $L \in E(1, 0)$ *такое, что* $E \cong E(r, d) \otimes L$;

(iv) если $d = 0$, *то* $h^0(E) = h^1(E) = 0$ *или* $h^0(E) = h^1(E) = 1$. *Причем, если* $h^1(E) = 1$, *то существует единственное (с точностью до изоморфизма) расслоение* F_r *такое, что если* $E \in E(r, 0)$, *то* $E \cong F_r \otimes L$, *где* $L = \det E$.

Лемма 2.2 (обобщенная лемма Кастельнуово, см. [2]). *Пусть L – обильный обратимый пучок на X и L порождается глобальными сечениями (п.г.с.). Пусть F – когерентный пучок на X такой, что* $H^0(F \otimes (-iL)) = 0$, $i \geq 1$, *тогда* $H^0(F \otimes (i-1)L) \otimes H^0(L) \to H^0(F \otimes iL)$ *– сюръекция при* $i \geq 1$.

Лемма 2.3. *Пусть* $D \sim aM + \pi^*B$, $a \geq 1$ *и* b+ag/2>1 *на* $X = P(E)$, *где* $E \cong O_C \oplus E$ *– нормализованное векторное расслоение над эллиптической кривой. Тогда:*

$$H^0(kD) \otimes H^0(D) \to H^0((k+1)D)$$

– сюръекция при к $\geq$3.

Доказательство. При b+ag/2>1 дивизор D п.г.с. (см. [10, 2.9]). Положим в лемме 2.2 X = P($O_C \oplus$E), F = kD, L = D. Докажем, что при k$\geq$3 $h^i((k-i)D) = 0$ при i$\geq$1.

Если i=rk E=3, то по двойственности Серра

$$h^{\mathrm{rk}\, E}((k-3)D) = h^0(K_X - (k-3)D) = h^0((3-k)a-3)M + \pi^*(\det E\text{-}(k-3)B)) = 0.$$

Пусть i =1 или 2, тогда k–i>0 и

$$\pi_*(\text{k–i})\ \text{D} = \text{S}^{a(k-i)}\ (\text{O}_C\oplus\text{E})\ \otimes\text{O}_C((\text{k- i})\text{B}) = \bigoplus_{j=0}^{a(k-i)} S^j E\otimes O_C((k-i)B).$$

Расслоение E неразложимо и поэтому полустабильно, следовательно, $\text{S}^j E$ также полустабильно (см. [3]). По лемме 1.3 всякое неразложимое прямое слагаемое E_p расслоения $\text{S}^j E$ имеет степень $\text{rk}\,\text{E}_p\cdot\mu(\text{S}^j E)$=$\text{rk}\,\text{E}_p\cdot j\cdot\mu(E)$=$\text{rk}\,\text{E}_p\cdot j\cdot g/2$. Следовательно, $\deg(E_p\otimes O_C((k-i)B) = \text{rk}\,E_p\cdot(j\cdot g/2+deg((k-i)B)>0$ при b+ag/2>1. Применяя лемму 2.1, получим, что h^i((k–i)D)=$\text{h}^i(\pi_*$(k–i)D)=0 при i=1 или 2.

3. Очень обильные дивизоры на $\mathbf{X = P(O_C\oplus E)}$, где rk(E) = 2 и расслоение E неразложимо

Критерий о.о. не получен, когда E неразложимо и имеет нечетную отрицательную степень (см. [10, 4.5(b)]).

Теорема 3.1. *Дивизор $D\equiv aM+bL$ на $X = P(O_C\oplus E)$ при $a\geq 2$ очень обилен тогда и только тогда, когда $b+ag/2=b+a\mu^-(O_C\oplus E)>1$.*

Доказательство. 1) Необходимость (см. [10, 4.5(b)]).

Если D дивизор очень обилен, то $\text{D}|_S$ – о.о.д. на гладком неприводимом подмногообразии S. Пусть S=P(E). Тогда дивизор $\text{D}|_S\equiv \text{aC}_0$+bf при $\text{a}\geq 2$ о.о.д. ⇔ b+ag/2>1 (см. [4, с. 17], а также [5]).

2) Достаточность.

Если b+ag/2>1, то D обилен и порождается глобальными сечениями (см. [10, 2.9]). Произведем вычисления размерностей групп когомологий h^i(D) аналогично [7, (2.3)] и применим к D обобщенную лемму Кастельнуово 2.4 (аналогично [7, 4.2]). получим, что

$$\text{H}^0(\text{kD})\otimes\text{H}^0(\text{D})\to\text{H}^0((\text{k+1})\text{D}) \tag{**}$$

– сюръекция при к≥3 (см. лемма 2.3).

Сюръективность

$$\text{H}^0(\text{D})\otimes\text{H}^0(\text{D})\to\text{H}^0(2\text{D})$$

докажем, применяя следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0\to & \text{H}^0(\text{D-M})\otimes\text{H}^0(\text{D}) & \to & \text{H}^0(\text{D})\otimes\text{H}^0(\text{D}) & \to & \text{H}^0(\text{D}|_M)\otimes\text{H}^0(\text{D}) & \to 0 \\ & \alpha\downarrow & & \beta\downarrow & & \gamma\downarrow & \\ 0\to & \text{H}^0(2\text{D-M}) & \to & \text{H}^0(2\text{D}) & \to & \text{H}^0(2\text{D}|_M) & \to 0 \end{array} \tag{1}$$

Сюръективность γ следует из нормальной порожденности $\text{D}|_M$ на M (см. [4, 3.4]).

В следующей коммутативной диаграммы сюръективность α при a≥2 доказывается индукцией по a, сюръективность γ' доказана (см. [4, с. 24]), сюръективность β' получим по индуктивному предположению:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0\to & \text{H}^0(\text{D-2M})\otimes\text{H}^0(\text{D}) & \to & \text{H}^0(\text{D-M})\otimes\text{H}^0(\text{D}) & \to & \text{H}^0(\text{D–M}|_M)\otimes\text{H}^0(\text{D}) & \to 0 \\ & \beta'\downarrow & & \alpha\downarrow & & \gamma'\downarrow & \\ 0\to & \text{H}^0(2\text{D-2M}) & \to & \text{H}^0(2\text{D-M}) & \to & \text{H}^0(2\text{D-M}|_M) & \to 0 \end{array} \tag{2}$$

Из диаграммы (2) по лемме о пяти гомоморфизмах следует сюръективность α, следовательно, по этой же лемме из диаграммы (1) получим сюръективность β. Аналогично доказывается сюръективность (**) при k=2. Итак, D нормально порожден. Из обильности и нормальной порожденности D следует очень обильность. Теорема доказана.

Замечание. Достаточность в теореме 3.1 следует также из очень обильности π_*D (см. [10, 2.11]). Докажем очень обильность:

$$\pi_*\text{D} = \text{S}^a\ (\text{O}_C\oplus\text{E})\ \otimes\text{O}_C(\text{B}) = \bigoplus_{k=0}^{a} S^k E\otimes O_C(B)$$

при b+ag/2>1.

Расслоение E неразложимо и поэтому полустабильно, следовательно, $\text{S}^k E$ также полустабильно (см. [3]). По лемме 1.3 всякое неразложимое прямое слагаемое E_i расслоения $\text{S}^k E$ имеет степень $\text{rk}\,\text{E}_i\cdot\mu(\text{S}^k E)$=$\text{rk}\,\text{E}_i\cdot k\cdot\mu(E)$=$\text{rk}\,\text{E}_i\cdot k\cdot g/2$. Следовательно, $\deg(\text{E}_i\otimes O_C(B))$ =$\text{rk}\,\text{E}_i\cdot(k\cdot g/2+deg(B))$. Учитывая, что a≥2, g<0 и g нечетно, из b+ag/2>1 получим b≥3. Поэтому из [7, 4.4] получаем очень обильность π_*D.

Библиографический список

1. *Atiyah, M.F.* Vector bundles over an elliptic curve // Proc. London Math. Soc. 1957. V. 7. P. 414-452.
2. *Mumford, D.* Varieties defined by quadratic equations. CIME. Varenna. 1969. P. 31-100.
3. *Giesekeг, D.* On a theorem of Bogomolov on Chern classes of stable bundles // Amer. J. Math. 1979. V. 101. P. 77-85.
4. *Homma, Y.* Projective normality and the defining equations of ample invertible sheaves on elliptic ruled surfaces with negative invariant // Natural science Report Ochanomizu Univ. 1982. V. 33. № 1-2. P. 17-26.

5. *Biancofiore, A., Livorni, E.L.* On the Genus of a Hyperplane Section of a Geometrically Ruled Surface Annali di Matematica pura ed appl., (147):173-185, 1987.
6. *Miyaoka, Y.* The Chern class and Kodaira dimension of a minimal variety. In Algebraic Geometry, Sendai 1985, number 10 in Advance Studies in Pure Mathematics, pp. 449-476. AMS, 1987.
7. *Гушель, Н.П.* Очень обильные дивизоры на проективных расслоениях над эллиптической кривой [Текст] / Н.П. Гушель // Мат. заметки. – 1990. – № 47. – Вып. 6. – С. 15-22.
8. *Гушель, Н.П.* Очень обильные дивизоры на проективных расслоениях над кривыми [Текст] / Н.П. Гушель // Алгебра и анализ. – 1992. – № 4. – Вып. 2. – С. 116-128.
9. *Butler, D.C.* Normal generation of vector bundles over a curve. Journal of Differential Geometry, 39(1): 1-34, 1994.
10. *Alzati, A., Bertolini, M., Besana, G. M.* Numerical criteria for very ampleness of divisors on projective bundles over an elliptic curve. Can. J. Math., Vol. 48:6 1996, 1121-1137.
11. *Гушель, Н.П.* Очень обильные дивизоры на разложимых проективных расслоениях над кривыми [Текст] / Н.П. Гушель // Материалы межрегиональной научно-практической конференции. – Ярославль, 2009. – С. 167-172.

Об одной математической модели переноса с конечной скоростью и методе решения

А.В. Бородин

Настоящая статья посвящена обобщению предложенной автором в работе [1] одномерной математической модели процесса переноса тепла (диффузии, транспорта частиц и т.д.) при конечной скорости передачи информации в пространстве (среде) на многомерный случай; методу решения полученного модельного и других уравнений.

Пусть $u = u(x,t)$ – числовая характеристика некоторой материальной системы в точке $x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3$ в момент времени $t \in R_+$. Например, $u = T$ – температура тела или $u = c$ – концентрация вещества или $u = \rho$ – плотность потока частиц и т.д. Как известно [2, 3], при определенных условиях функция $u(x,t)$ описывается однородным линейным дифференциальным уравнением (ЛДУ) в частных производных второго порядка параболического типа

$$\partial_t u(x,t) = a^2 \sum\nolimits_{j=1}^{3} \partial_j^2 u(x,t) \quad (a = const \in R;\ \ \partial_j = \partial/\partial x_j). \tag{1}$$

Главным условием, при котором имеет место ДУ (1), является предположение о том, что плотность $q(x,t) = (q_1(x,t), q_2(x,t), q_3(x,t))$ $u-$потока (теплового потока или потока вещества и т.д.) в изотропной среде определяется по закону (Фурье, Нернста и т.д.)

$$q_j(x,t) = -k\left(u(x + e_j dx_j,\ t) - u(x,\ t)\right)/dx_j = -k\,\partial_j u(x,t)$$

$$(e_1 = (1,0,0),\ \ e_2 = (0,1,0),\ \ e_3 = (0,0,1)). \tag{2}$$

Закон (2) изначально предполагает, что “точка x знает, притом, мгновенно, какое значение имеет характеристика u в соседней точке $x + e_j dx_j$”. Но между точками x и $x + e_j dx_j$ существует расстояние $|dx_j| \neq 0$. А поскольку скорость v передачи информации между точками x и $x + e_j dx_j$ конечная (а именно, $|v| \leq c$, где c – скорость света в пустоте), то формула (2) ‘приближенная’, в том смысле, что она предполагает $v = \infty$. С учетом конечной скорости v передачи информации между точками x и $x + e_j dx_j$ формула (2) допускает следующее уточнение

$$q_j = -k\ \left(\partial_j u(x,t) - \frac{1}{v}\partial_t u(x,t)\right) \quad (j = 1,\ 2,\ 3), \tag{3}$$

учитывающее при $v > 0$ ($v < 0$) запаздывание (опережение) информации об изменении характеристики u [1]. В соответствии с законом (3) уравнение (1) принимает вид

$$\partial_t u(x,t) = a^2 \sum\nolimits_{j=1}^{3} \left(\partial_j^2 u(x,t) - v^{-1}\partial_j \partial_t u(x,t)\right), \tag{4}$$

и уже является не параболическим, а гиперболическим ДУ. В то же время, полученное нами ДУ (4) заметно отличается от известного гиперболического уравнения теплопереноса “телеграфного” типа

$$\partial_t^2 T(x,t) + \frac{1}{\tau}\partial_t T(x,t) = \frac{a^2}{\tau}\nabla^2 T(x,t), \tag{5}$$

полученного на основе закона Максвелла-Каттанео-Лыкова

$$q(x,t) + \tau\ \partial_t q(x,t) = -k\ \nabla T(x,t),$$

учитывающего время релаксации τ (см., например, работы [3-6] и библ. к ним).

Для решения ДУ (4) воспользуемся теоремой 1 из работы [1] (или теоремой 11.1 из работы [7]) обобщенной на случай ДУ в частных производных по четырем (и более) переменным $\bar{x} = (x_0, x) = (x_0, x_1, x_2, x_3)$. А именно, пусть

$$\Lambda_j : \ u(\bar{x}) \ \to \ \Lambda_j\left(u(\bar{x})\right) \quad (j = 0,\, 1,\, 2,\, 3) \tag{6}$$

– линейные дифференциальные операторы (ЛДО) в частных производных по переменным x_j. Произвольному полиному n-ой степени от четырех переменных $\bar{\xi} = (\xi_0, \xi) = (\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$

$$P_n\left(\bar{\xi}\right) = \sum_{|\bar{k}| \le n} a_{\bar{k}} \bar{\xi}^{\bar{k}}, \tag{7}$$

где $a_{\bar{k}} \in C$, $\bar{k} = (k_0, k_1, k_2, k_3)$, $|\bar{k}| = \sum_{j=0}^{3} k_j$, $\bar{\xi}^{\bar{k}} = \prod_{j=0}^{3} \xi_j^{k_j}$, поставим в соответствие ДО в частных производных N-го порядка

$$L_N = \sum\nolimits_{|\bar{k}\ | \le\ n} a_{\bar{k}} \bar{\Lambda}^{\,\bar{k}}, \tag{8}$$

где $\bar{\Lambda}^{\,\bar{k}} = \Lambda_3^{k_3} \circ \Lambda_2^{k_2} \circ \Lambda_1^{k_1} \circ \Lambda_0^{k_0}$, $\Lambda_j^{k_j} = \Lambda_j \circ \Lambda_j \circ \ \cdots \ \circ \Lambda_j$, а порядок N зависит от n и порядков ДО $\Lambda_j \quad (j = 0,\, 1,\, 2,\, 3)$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть $\Gamma \subset C^4$ – множество точек $\bar{\xi} \in C^4$, удовлетворяющих АУ*

$$P_n\left(\bar{\xi}\right) = \sum\nolimits_{|\bar{k}\ | \le n} a_{\bar{k}} \bar{\xi}^{\bar{k}} = 0, \tag{9}$$

и пусть для элементов $\bar{\lambda} = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \gamma \subseteq$ ГЛДОΛ_j $(j = 0,\, 1,\, 2,\, 3)$ имеют общие собственные функции $u = \varphi\,(\bar{x}; \bar{\lambda})$, т.е.

$$\Lambda_j(\varphi) = \lambda_j\, \varphi, \quad (j = 0,\, 1,\, 2,\, 3). \tag{10}$$

Тогда функция

$$u(\bar{x}) = \ \sum\nolimits_{\bar{\lambda}\, \in\, \gamma} C\left(\bar{\lambda}\right)\ \varphi\,(\bar{x}; \bar{\lambda}), \tag{11}$$

где $C(\bar{\lambda})$ – произвольная допустимая функция на множестве γ, является решением ДУ в частных производных

$$L_N(u) = \sum_{|\bar{k}|\ \le n} a_{\bar{k}} \bar{\Lambda}^{\,\bar{k}} u(\bar{x}) = 0. \tag{12}$$

Замечание 1. Знак суммирования “Σ” в формуле (11) понимается в широком смысле (включающем интегрирование по мере в случае, когда множество γ допускает эту операцию).

Замечание 2. Очевидным образом, теорема 1 обобщается на случай любого числа переменных $\bar{x} = (x_0, x) = (x_0, x_1, \ldots, x_m) \in R^{m+1}$.

Замечание 3. Операторы (6), где $(j = 0,\, 1,\, 2, \ldots, m)$, могут быть любыми удовлетворяющими условию (10) линейными (относительно выбранной линейной структуры [7, 8]) отображениями. В частности, они могут быть ЛДО с переменными коэффициентами, линейными интегральными или интегро-дифференциальными операторами. Более того, они могут быть и нелинейными (удовлетворяющими условию (10)) операторами, но тогда в (11) γ – одноточечное множество.

Замечание 4. В работе [7], где рассматривался одномерный случай, доказано, что (11) общее решение соответствующего линейного операторного (в частности, дифференциального) уравнения. Точнее, доказано следующее утверждение.

Теорема 1$'$. *Пусть E – банахово пространство (над R или C), $\Lambda = \Lambda_0$ – замкнутый из E в E линейный оператор, $\sigma_p(\Lambda)$ – его точечный спектр, $P_n\left(\xi\right) = \sum_{k=0}^{n} a_k \xi^k$ – полином n-й степени от одной переменной $\xi = \xi_0, L_n = P_n\left(\Lambda\right) = \sum_{k=0}^{n} a_k \Lambda^k$ – соответствующий линейный Λ-оператор n-й степени. Пусть выполнены условия*:

1) *λ_k – нуль многочлена P_n кратности n_k $(k = 1,\, 2,\, \ldots\,,\, s;\ n_1 + n_2 + \cdots + n_s = n)$;*

2) *для каждого λ_k существует окрестность $U(\lambda_k) \subset C$ такая, что $U(\lambda_k) \subset \sigma_p\left(\Lambda\right)$ и для каждого $\lambda \in U(\lambda_k)$ собственное подпространство $E_k\left(\lambda\right) \subset E$ оператора Λ имеет конечную размерность m_k, (не зависящую от $\lambda \in U(\lambda_k)$), и голоморфно зависящий от $\lambda \in U(\lambda_k)$ базис*

$$e_{kj}(\lambda) \in E_k\left(\lambda\right) \quad (\,j = 1,\, 2,\, \ldots\,, m_k). \tag{10$'$}$$

Тогда система элементов

$$e_{kj}^i = \left.\frac{d^i}{d\lambda^i} e_{kj}(\lambda)\right|_{\lambda = \lambda_k} (i = 0, 1, \ldots, n_k - 1;\ j = 1, 2, \ldots, m_k;\ k = 1, 2, \ldots, s) \tag{10$''$}$$

является линейно независимой, каждый элемент этой системы, а значит, и элемент

$$u = \sum\nolimits_{k=1}^{s} \sum\nolimits_{j=1}^{m_k} \sum\nolimits_{i=0}^{n_k - 1} c_{kj}^i e_{kj}^i \quad \left(\forall\, c_{kj}^i \in C\right), \tag{11$'$}$$

являются решениями уравнения

$$L_n(u) = \sum\nolimits_{k=0}^{n} a_k \Lambda^k(u) = 0; \tag{12'}$$

любое решение $u \in E$ уравнения (12′) является линейной комбинацией (11′) элементов (10′′), т.е. (10′′) – фундаментальная система решений линейного Λ-уравнения n-й степени (12′).

Например, дифференциальный оператор 1-го порядка

$$\Lambda = b_0(t)\frac{d}{dt} + b_1(t) \quad \bigl(b_0,\ b_1 \in C^1([a,b]);\ b_0(t) \neq 0,\ t \in [a,b]\bigr)$$

на банаховом пространстве $C([a,b])$ непрерывных на компакте $[a,b]$ комплекснозначных функций вещественного аргумента t удовлетворяет всем условиям теоремы (его замкнутость есть следствие теоремы о дифференцировании под пределом), причем для каждого $\lambda \in C$ собственная функция, определяющая базис (10′), имеет вид

$$e(t;\lambda) = \exp(\lambda A_0(t) + A_1(t))$$

$$\left(A_0(t) = \int_{t_0}^{t} a_0^{-1}(\tau)\,d\tau,\quad A_1(t) = -\int_{t_0}^{t} a_0^{-1}(\tau)\,a_1(\tau)\,d\tau\right).$$

Поэтому общее решение ДУ 2-го порядка

$$L_2(u) = \left(a_0\Lambda^2 + a_1\Lambda + a_2 I\right)(u) = \left(a_0 b_0^2\frac{d^2}{dt^2} + \left(a_0 b_0 b_0' + 2a_0 b_0 b_1 + a_1 b_0\right)\frac{d}{dt} + \right.$$

$$\left. + a_0 b_0 b_1' + a_0 b_1^2 + a_1 b_1 + a_2\right)(u) = 0,$$

согласно (11′), дается: в случае простых нулей $\lambda_1,\ \lambda_2 \in C$ квадратного уравнения

$$a_0\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0 \quad (a_0,\ a_1,\ a_2 \in C)$$

формулой

$$u(t) = (C_1\exp(\lambda_1 A_0(t)) + C_2\exp(\lambda_2 A_0(t)))\ \exp A_1(t) \quad (C_1,\ C_2 \in C),$$

в случае кратных нулей $\lambda_1 = \lambda_2 \in C$ – формулой

$$u(t) = (C_1\exp(\lambda_1 A_0(t)) + C_2 A_0(t)\ \exp(\lambda_1 A_0(t)))\ \exp A_1(t)\ (C_1, C_2 \in C).$$

По аналогии с обыкновенными ЛДУ N-го порядка с постоянными коэффициентами, алгебраическое уравнение (АУ) (11) будем называть характеристическим уравнением, множество $\Gamma \subset C^4$ его решений – характеристическим множеством, элементы $\bar{\xi}$ этого множества – характеристическими элементами, собственные функции $\varphi(\bar{x};\bar{\lambda})$ из (9) – простыми фундаментальными решениями (ПФР) ДУ в частных производных (12).

Применим теорему 1 к ДУ (4). В качестве ДО (6) возьмем простейшие ЛДО в частных производных 1-го порядка:

$$\Lambda_j = \partial_j \ \ (j = 0,\,1,\,2,\,3\,;\ \partial_0 = \partial_t,\ x_0 = t). \tag{13}$$

Несложно показать, что ДО (13) удовлетворяют условию (10), причем, общими собственными функциями этих операторов являются

$$u = \varphi(\bar{x};\bar{\lambda}) = \exp(\bar{\lambda}\cdot\bar{x}) = \exp\left(\lambda_0 x_0 + \sum\nolimits_{j=1}^{3}\lambda_j x_j\right), \tag{14}$$

где $\bar{\lambda} = (\lambda_0,\,\lambda) = (\lambda_0,\,\lambda_1,\,\lambda_2,\,\lambda_3) \in C^4$, а $\bar{\varsigma}\cdot\bar{z} = \sum_{j=0}^{3}\varsigma_j z_j^*$ – скалярное произведение векторов $\bar{\varsigma},\ \bar{z} \in C^4$. С помощью операторов (13) ДУ (4) можно переписать так:

$$\left(\Lambda_0 - a^2\sum\nolimits_{j=1}^{3}\left(\Lambda_j^2 - v^{-1}\Lambda_j\Lambda_0\right)\right)\ u = 0.$$

Следовательно, соответствующее характеристическое уравнение (9) имеет вид

$$\lambda_0 - a^2\sum\nolimits_{j=1}^{3}\left(\lambda_j^2 - v^{-1}\lambda_j\lambda_0\right) = 0, \tag{15}$$

Уравнение (15) определяет характеристическое множество $\Gamma \subset C^4$ ДУ (4), любая фиксированная четверка комплексных чисел $\bar{\lambda} = (\lambda_0,\,\lambda_1,\,\lambda_2,\,\lambda_3) \in \Gamma$ – характеристический элемент ДУ (4), а соответствующая функция (14) – ПФР этого ДУ. Решая АУ (15) относительно λ_0, получим явное представление характеристического множества Γ ДУ (4) посредством формулы

$$\lambda_0 = \lambda_0(\lambda) = \left(a^2\sum\nolimits_{j=1}^{3}\lambda_j^2\right)\Big/\left(1 + a^2 v^{-1}\sum\nolimits_{j=1}^{3}\lambda_j\right), \tag{16}$$

где $\lambda = (\,\lambda_1,\,\lambda_2,\,\lambda_3) \in C^3$:

$$a^2 v^{-1}\sum\nolimits_{j=1}^{3}\lambda_j \neq -1. \tag{17}$$

Множество точек $\lambda \in C^3$, удовлетворяющих условию (17), обозначим через G. Таким образом, любой тройке $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in G$ соответствует ПФР (14), (16) ДУ (4). Поэтому, если $g \subseteq G$ такое, что корректно определена линейная комбинация ПФР (14), (16):

$$u(\bar{x}) = \sum_{\lambda \in g} C(\lambda) \exp\left(\lambda_0(\lambda)\, x_0 + \sum\nolimits_{j=1}^{3} \lambda_j x_j\right), \tag{18}$$

то (18) – решение ДУ (4).

Дальше рассмотрим случай ограниченных ПФР (14), т. е. случай когда

$$\bar{\lambda} = i\,\bar{\xi}\,,\;\; \bar{\xi} = (\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3) = (\xi_0, \xi) \in R^4 \;\; (\,i = \sqrt{-1}\,), \tag{19}$$

и, следовательно, ввиду (14), (16), (17)

$$u = \varphi\,(x, t; \xi, v) = A(t; \xi, v)\; w(x, t; \xi, v) \quad , \tag{20}$$

где

$$A(t; \xi, v) = \exp\left(\frac{-a^2\, v^2\, |\xi|^2}{v^2 +\; a^4 \left(\sum_{j=1}^{3} \xi_j\right)^2}\; t\right),$$

$$w(x, t; \xi, v) = \;\exp\left(i\;\left(\sum\nolimits_{j=1}^{3} \xi_j x_j + \frac{a^4 v\, |\xi|^2 \sum_{j=1}^{3} \xi_j}{v^2 + a^4\;\left(\sum_{j=1}^{3} \xi_j\right)^2}\; t\right)\right).$$

Из (20) следует, что за счет 1-го множителя справа (амплитуды $A(t; \xi, v)$) ФР (20) стремятся к нулю при $t \to +\infty$ экспоненциально по t и равномерно по $\xi \in R^3$ (и $a \in R$, $v \in R$). В этом проявляется диффузионная составляющая ДУ (4). Одновременно за счет 2-го множителя справа ("бегущей волны" $w(x, t; \xi, v)$) имеет место *волновой* перенос тепла (вещества и т.д.) с конечной скоростью

$$V(\xi, v) = (V_1,\, V_2,\, V_3)(\xi, v) = -\frac{a^4\, v\; |\xi|^2 \sum_{j=1}^{3} \varepsilon_j}{v^2 +\; a^4 |\xi|^2 \left(\sum_{j=1}^{3} \varepsilon_j\right)^2} \cdot \bar{\varepsilon} \tag{21}$$

$$(\;\bar{\varepsilon} = (\varepsilon_1,\; \varepsilon_2,\; \varepsilon_3) :\;\; |\bar{\varepsilon}| = 1\,)\,,$$

ортогональной плоскости постоянной фазы

$$\sum\nolimits_{j=1}^{3} \varepsilon_j x_j = \left(-a^4 v\, |\xi|^2 \sum\nolimits_{j=1}^{3} \varepsilon_j \Big/ \left(v^2 + a^4\, |\xi|^2\;\left(\sum\nolimits_{j=1}^{3} \varepsilon_j\right)^2\right)\right)\;\; t.$$

Здесь уже проявляется волновая составляющая ДУ (4). Поэтому ДУ (4) естественно называть *диффузионно-волновым уравнением переноса* (ДВУП). Дополнительными фактами в пользу такого названия служат следующие предельные свойства ПФР (20):

$$\lim_{v \to \infty} \varphi(x, t; \xi, v) = \exp\left(-a^2\, |\xi|^2 t\right) \exp\left(i \left(\sum_{j=1}^{3} \xi_j x_j\right)\right) \;= \varphi(x, t; \xi, \infty) \tag{22}$$

– ПФР ДУ теплопроводности (1);

$$\lim_{v \to 0}\; \varphi(x, t; \xi, v) = \;\exp\left(\,i\;\left(\sum\nolimits_{j=1}^{3} \xi_j x_j\right)\right) \;= \varphi(x; \xi) \tag{23}$$

– ПФР стационарного волнового ДУ (Гельмгольца)

$$\Delta u + |\xi|^2 u = 0.$$

Из (20), (21) вытекают следующие волновые особенности решений ДВУП (4):

1) скорость переноса тепла, вещества и т.д.

$$|V| = v\;\left(1 - \left(v^2 \Big/ \left(v^2 +\; a^4 |\xi|^2 \left(\sum\nolimits_{j=1}^{3} \varepsilon_j\right)^2\right)\right)\right) \tag{21_1}$$

меньше скорости передачи информации v, и тем больше и тем ближе к v, чем больше волновое число $|\xi|$ (или коэффициент a);

2) волна (20) при условии $v > 0$ ($v < 0$) движется противоположно (по) направлению переноса тепла, вещества и т.д..

В связи с 2) важно отметить, что скорость v передачи информации между точками может быть отрицательной, что фактически будет означать передачу информации между точками с опережением (“реакцию на складывающуюся ситуацию с опережением”, например, как для транспортных потоков). В этом случае волна тепла (вещества и т.д.) (20) будет двигаться с конечной скоростью (21_1) по направлению переноса тепла (вещества и т.д.).

Бесконечное (континуальное) множество ПФР ДВУП (4):

$$\left\{ u = \varphi\,(x,t;\xi,v) = A(x,t;\xi,v)\, w(x,t;\xi,v), \quad \xi \in R^3 \right\}, \tag{20'}$$

где функции A и w определены в (20), обладает тем свойством, что каждый элемент этого множества удовлетворяет начальному условию

$$u = \varphi\,(x,t;\xi,v)|_{t=0} = \exp\left(i \sum\nolimits_{j=1}^{3} \xi_j x_j \right) = \varphi\,(x;\xi) \quad (\xi \in R^3), \tag{24}$$

где правая часть – ядро преобразования Фурье. Поэтому, если

$$\widehat{u}_0(\xi) = \int_{R^3} u_0(x) \exp\left(-i \sum\nolimits_{j=1}^{3} \xi_j x_j \right)\, dx \tag{25}$$

– преобразование Фурье функции $u_0(x)$, удовлетворяющей условиям существования этого преобразования, то функция

$$u(x,t;v) = (2\pi)^{-3} \int_{R^3} \widehat{u}_0(\xi)\, \varphi(x,t;\xi,v)\, d\xi, \tag{26}$$

будучи линейной комбинацией вида (18), является решением ДВУ (4), удовлетворяющим ввиду (24), (25) начальному условию (точнее, условию Гурса)

$$u(x,t;v)|_{t=0} = u_0(x) = (2\pi)^{-3} \int_{R^3} \widehat{u}_0(\xi)\, \varphi(x;\xi)\, d\xi, \tag{27}$$

где скорость передачи информации в среде v играет роль параметра.

Таким образом, теорема 1 при условии (13), будучи примененная к ДУ в частных производных вида (4) с начальным условием (27), индуцирует метод Фурье для решения соответствующей задачи Коши. В частности, в силу (22), (26), (27)

$$u(x,t;\infty) = (2\pi)^{-3} \int_{R^3} \widehat{u}_0(\xi)\, \varphi(x,t;\xi,\infty)\, d\xi$$

– решение задачи Коши для ДУ теплопроводности (1).

Аналогично в силу (23), (18) поверхностный интеграл 1-го рода

$$u(x;\mu) = \int_{|\xi|=\mu} C(\xi)\, \varphi(x;\xi)\, d\sigma = \int_{|\xi|=\mu} C(\xi)\, \exp\left(i \sum\nolimits_{j=1}^{3} \xi_j x_j \right)\, d\sigma,$$

где $C(\xi)$ – любая допустимая функция, определенная на сфере $|\xi| = \mu$, является решением однородного ДУ Гельмгольца (или “задачи на собственные значения”):

$$\Delta u + \mu^2 u = 0.$$

Теперь применим описанный метод к ДУ (5) (для краткости в одномерном случае, опуская подробности). Сначала получим его ограниченные ПФР:

$$\varphi_\pm(x,t;\lambda,\tau) = \exp\left(-(2\tau)^{-1} t\right) \exp\left(i\left(\lambda x \pm (2\tau)^{-1}\sqrt{4a^2\tau\lambda^2 - 1}\,t\right)\right) \; (\lambda \in R). \tag{28}$$

Эти решения обладают теми особенностями, что при $|\lambda| > 1/2a\sqrt{\tau}$ образуют два семейства затухающих волн, двигающихся навстречу друг другу со скоростью

$$V = (2\tau\lambda)^{-1}\sqrt{4\,a^2\tau\,\lambda^2 - 1};$$

а при $|\lambda| \le 1/2a\sqrt{\tau}$ – два семейства затухающих неподвижных волн с амплитудами

$$A_\pm(t;\lambda,\tau) = \exp\left(-(2\tau)^{-1} t \left(1 \pm \sqrt{1 - 4\,a^2\tau\,\lambda^2} \right) \right) \overset{t\to+\infty}{\downarrow} 0 \quad (\lambda \ne 0),$$

причем, $A_+(t;0,\tau) \downarrow 0$ при $t \to \infty$, а $A_-(t;0,\tau) \equiv 1$. Линейные композиции ПФР (28) (см. (11)):

$$u_\pm(x,t;\tau) = \int_{\lambda \in G_\pm} C_\pm(\lambda) \varphi_\pm(x,\,t\,;\,\lambda,\,\tau)\, d\lambda, \tag{29}$$

где $C_{\pm}(\lambda)$ – произвольные допустимые функции, определенные на допустимых множествах $G_{\pm} \subseteq R$, дают два семейства решений ДУ (5). Полагая в (29) $t = 0$, получим начальную функцию

$$u_{\pm}(x, 0;\, \tau) = \int_{\lambda \in G} C_{\pm}(\lambda) \exp(i\,\lambda\, x)\, d\lambda = u_0(x). \tag{30}$$

Отсюда, в случае $G_{\pm} = R$,

$$C_{\pm}(\lambda) = (2\pi)^{-1} \int_R u_0(x) \exp(-i\,\lambda\, x)\, dx \;= \hat{u}_0(\lambda),$$

и, следовательно,

$$u_{\pm}(x, t;\, \tau) = \int_R \hat{u}_0(\lambda) \varphi_{\pm}(x,\, t\,;\, \lambda,\, \tau)\, d\lambda$$

два разных решения ДУ (5), удовлетворяющих одному и тому же начальному условию (30), что вполне естественно для волнового уравнения 2-го порядка (по t). Но в этом (и не только) проявляется существенное отличие ДВУП (4) от ДУ (5).

Библиографический список

1. *Бородин, А.В.* Математическая модель переноса с конечной скоростью передачи информации. I [Текст] / А.В. Бородин // Математика и математическое образование. Теория и практика. Межвуз. сб. науч. тр. – Ярославль: Изд-во ЯГТУ. – 2010. – Вып. 7. – С. 15-22.
2. *Тихонов, А.Н.* Уравнения математической физики [Текст] / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Наука. – 1977. – 736 с.
3. *Лыков, А.В.* Теория теплопроводности [Текст] / А.В. Лыков. – М.: Высшая школа. – 1967. – 600 с.
4. *Соболев, С.Л.* Процессы переноса и бегущие волны в локально-неравновесных системах [Текст] / С.Л. Соболев // УФН. – 1991. – Т. 161. – № 3. – С. 5-29.
5. *Соболев, С.Л.* Локально-неравновесные модели процессов переноса [Текст] / С.Л. Соболев // УФН. – 1997. – Т. 167. – № 10. – С. 1095-1106.
6. *Алексашенко, А.А.* Тепломассоперенос с учетом конечной скорости переноса [Текст] / А.А. Алексашенко // Сб. тр. МНК ММТТ-22. – Псков: Изд-во ПГПИ, 2009. – Т. 1. – С. 39-41.
7. *Бородин, А.В.* Одномерный барилинейный анализ и изоспектральные уравнения Шредингера [Текст] / А.В. Бородин. – Ярославль: Изд-во ЯГТУ. – 1997. – 177 с.
8. *Бородин, А.В.* Многомерный барианализ и иго приложения [Текст] / А.В. Бородин. – Ярославль: Изд-во ЯГТУ. – 2005. – Ч. I. – 432 с.
9. *Бородин, А.В.* Нелинейные алгебраические операции и их приложения к решению дифференциальных уравнений [Текст] / А.В. Бородин // Математика и математическое образование. Теория и практика. Межвуз. сб. науч. тр. – Ярославль: Изд-во ЯГТУ. – 2002. – Вып. 3. – С. 5-19.

Существование H-полярного разложения и его геометрическая интерпретация

Ю.И. Большаков

Постановка задачи. Рассматривается множества $\mathbb{R}^{n\times n}$ всех $n \times n$-матриц над $\mathbb{R}$. Ищется критерий представления произвольной матрицы $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ в виде:

$$X = US, \tag{1}$$

где $U^H U = I,\ S^H = S$. Операция H–сопряженности матрицы $Y \in \mathbb{R}^{n\times n}$ определяется из равенства:

$$Y^H := H^{-1} Y^t H, \tag{2}$$

здесь заданная матрица $H \in \mathbb{R}^{n\times n}$ обладает двумя свойствами: $H^t = H$, $det\ H \neq 0$. Представление (1) носит название H-полярного разложения. В частности, оно совпадает с классическим полярным, если $H = I$, а S – неотрицательно определенная матрица; при этом, представление матрицы в форме (1) существует всегда. Если же H не является положительно определенной матрицей, то разложение (1), вообще говоря, не существует, что иллюстрирует следующий тривиальный пример.

Пример 1. $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Очевидно, не существует матрицы S такой, что $S^2 = X^H X = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Существует несколько работ, в которых сформулирован (и доказан) критерий существования разложения (1) в терминах канонической формы пары матриц $({X'}^{H'} X',\ H')$. Здесь ${X'}^{H'} X' = T^{-1} X^H X T,\ H' = T^t H T$, T – матрица перехода от стандартного базиса к каноническому. Приведем один из таких критериев.

Теорема 1. *Матрица $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ допускает H-полярное разложение (1) тогда и только тогда, когда в каноническом виде пары $({X'}^{H'}X',\ H')$ наряду с каждой парой*

$$\left(\begin{bmatrix} \lambda & 1 & \dots & 0 \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \dots & \varepsilon \\ & \ddots & \\ \varepsilon & \dots & 0 \end{bmatrix} \right) \in \mathbb{R}^{k\times k} \times \mathbb{R}^{k\times k},$$

$$\lambda < 0, \varepsilon = 1 \quad \text{или} \quad \varepsilon = -1,$$

присутствует и пара

$$\left(\begin{bmatrix} \lambda & 1 & \dots & & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \dots & & \lambda \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \dots & -\varepsilon \\ & \ddots & \\ -\varepsilon & \dots & 0 \end{bmatrix} \right) \in \mathbb{R}^{k\times k} \times \mathbb{R}^{k\times k}.$$

Та же часть прямой суммы $({X'}^{H'}X",\ H')$, первая компонента пары которой нильпотентна, допускает разбиение в прямую сумму пар вида:

$$\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & \end{bmatrix} \right) \oplus \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} & & -1 \\ & \ddots & \\ -1 & & \end{bmatrix} \right)$$

$$\in (\mathbb{R}^{k\times k} \times \mathbb{R}^{k\times k}) \times (\mathbb{R}^{k\times k} \times \mathbb{R}^{k\times k})$$

и $Ker\tilde{X}' = span[1, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0]^t$ (вторая единица находится на $k+1$-ом месте), или пар матриц вида:

$$\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} & & \varepsilon \\ & \ddots & \\ \varepsilon & & \end{bmatrix} \right) \oplus \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} & & \varepsilon \\ & \ddots & \\ \varepsilon & & \end{bmatrix} \right)$$

$$\in (\mathbb{R}^{k\times k} \times \mathbb{R}^{k\times k}) \times (\mathbb{R}^{(k-1)\times(k-1)} \times \mathbb{R}^{(k-1)\times(k-1)})$$

и $Ker\tilde{X}' = span[1, 0, \dots, 0]^t$. Здесь $Ker\tilde{X}'$ – пересечение $KerX'$ с соответствующим подпространством, отвечающим данному прямому слагаемому.

Теорема 1 в несколько иной терминологии содержится в работе [1]; существуют такие работы, уточняющие результат теоремы 1 в той ее части, которая гарантирует существование подобного разложения $({X'}^{H'}X',\ H')$.

Вся оставшаяся часть настоящей работы посвящена решению задачи (1) в случае $n = 2$. Предполагается, что здесь заданы матрицы X и H вида

$$X = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Выясним, при каких условиях, налагаемых на параметры x, y, z и t существует разложение (1) и построим его в случае существования. Заметим тут же, что решение задачи в такой постановке при $n \geq 3$ нам представляется необозримым.

Переходя к реализации намеченного плана, заметим прежде всего, что пара $({X'}^{H'}X', H')$ может иметь один из трех следующих видов:

$$a) {X'}^{H'}X' = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, H' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},\ \lambda_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \tag{4}$$

$$b) {X'}^{H'}X' = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, H' = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 \end{bmatrix},\ \lambda \in \mathbb{R}, \varepsilon = 1 \text{ или } \varepsilon = -1, \tag{5}$$

$$c) {X'}^{H'}X' = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}, H' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0. \tag{6}$$

Согласно теореме 1, разложение (1) имеет место тогда и только тогда, когда для параметров в пунктах a) и b) дополнительно выполняется одно из следующих условий:

$a_1) \lambda_1 > 0,\ \lambda_2 > 0;$
$a_2) \lambda_1 > 0,\ \lambda_2 = 0;$
$a_3) \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 > 0;$
$a_4) \lambda_1 = \lambda_2 = 0,\ X'k = 0,\ k^t H' k = 0; k \in \mathbb{R}^2;$
$a_5) \lambda_1 = \lambda_2 < 0.$
$b) \lambda > 0.$

Случай 1. $detX = 0$, или что равносильно $detX^H X = 0 \Leftrightarrow detX' = detX'^{H'} X' = 0$. Иначе говоря, имеет место одно из условий a_2), a_3) или a_4). Поскольку $X^H X = \begin{bmatrix} x^2 - z^2 & xy - zt \\ -(xy - zt) & t^2 - y^2 \end{bmatrix}$, то $det(X^H X - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow$

$$\lambda^2 - (x^2 - z^2 + t^2 - y^2)\lambda = 0. \tag{7}$$

1.1. Условия a_2) или a_3) выполняется тогда и только тогда, когда

$$\lambda = x^2 - z^2 + t^2 - y^2 > 0. \tag{8}$$

1.1.1. $x \neq 0$. Поскольку $xt = yz$, то (8) равносильно неравенству

$$\lambda = \frac{1}{x^2}(x^2 - z^2)(x^2 - y^2) > 0, \tag{9}$$

или совокупности двух систем неравенств

$$\begin{cases} |x| > |z| \\ |x| > |y|, \quad \text{или} \end{cases} \tag{10}$$

$$\begin{cases} |x| < |z| \\ |x| < |y|. \end{cases} \tag{11}$$

Если имеет место (10), то рассмотрим матрицу перехода $T = \frac{1}{\sqrt{x^2 - y^2}} \begin{bmatrix} x & y \\ -y & -x \end{bmatrix}$, тогда $X'^{H'} X' = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$; $H' = H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, где λ из (9). Полагая $S' = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ с учетом (11), найдем $S = \frac{1}{|x|}\sqrt{\frac{x^2 - z^2}{x^2 - y^2}} \begin{bmatrix} x^2 & xy \\ -xy & -y^2 \end{bmatrix}$. Требование $X = US$ приводит к равенству

$$U = \begin{bmatrix} \xi ch\alpha & sh\alpha \\ \xi sh\alpha & ch\alpha \end{bmatrix}, \quad \text{где} \tag{15}$$

$$\xi = sgn\, x,\ ch\alpha = \frac{x(x+t)}{\sqrt{(x^2 - z^2)(x^2 - y^2)}};\ sh\alpha = \frac{xz + |x|y}{\sqrt{(x^2 - z^2)(x^2 - y^2)}}. \tag{16}$$

Если же имеет место (11), то полагая $T = \frac{1}{\sqrt{y^2 - x^2}} \begin{bmatrix} y & x \\ -x & -y \end{bmatrix}$, найдем S, которое знаком отличается от S в (14). Поэтому в качестве U можно взять матрицу $(-U)$ из (15).

1.1.2. $x = 0$. Поскольку $xt = yz$, то $yz = 0$. Если $y = 0$, то из (8) следует неравенство $|t| > |z|$. Положим $T = \frac{1}{\sqrt{t^2 - z^2}} \begin{bmatrix} t & z \\ -z & -t \end{bmatrix}$, тогда для матрицы $X = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ z & t \end{bmatrix}$ найдем $X'^{H'} X' = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$, $\lambda = t^2 - z^2 > 0,\ H' = H$. Поэтому

$$S = \frac{1}{\sqrt{t^2 - z^2}} \begin{bmatrix} -z^2 & -tz \\ tz & t^2 \end{bmatrix}, \tag{17}$$

$$U = \begin{bmatrix} \operatorname{ch}\alpha & \eta \operatorname{sh}\alpha \\ \operatorname{sh}\alpha & \eta \operatorname{ch}\alpha \end{bmatrix}, \quad \text{где} \tag{18}$$

$$\eta = sgn\, t,\ ch\alpha = \frac{|t|}{\sqrt{t^2 - z^2}},\ sh\alpha = \frac{z}{\sqrt{t^2 - z^2}}. \tag{19}$$

Если же $z = 0$, то $|t| > |y|$ и матрица $X = \begin{bmatrix} 0 & y \\ 0 & t \end{bmatrix} = US$, где $U = \frac{1}{\sqrt{t^2 - y^2}} \begin{bmatrix} t & y \\ y & t \end{bmatrix}$, $S = \sqrt{t^2 - y^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

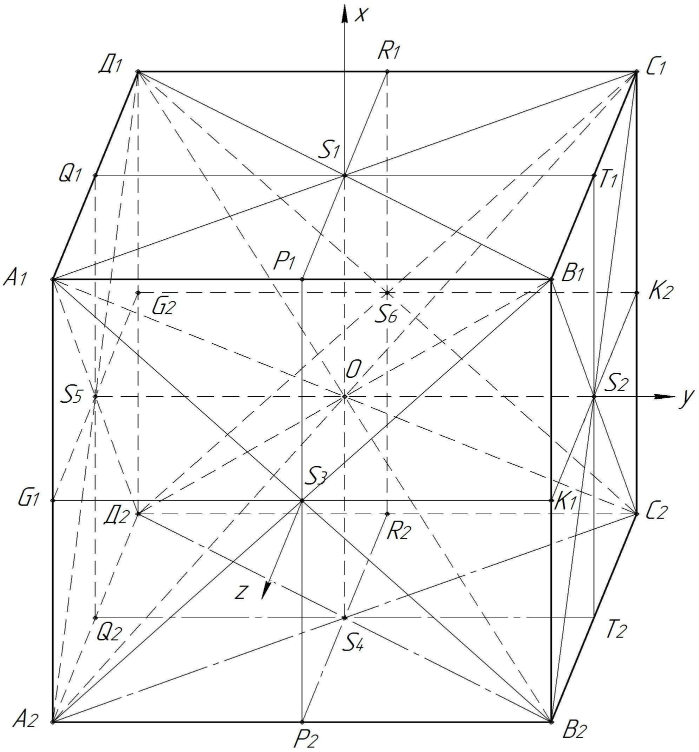
1.2. $\lambda = 0$. Разложение (1) существует согласно a_4) тогда и только тогда, когда $Xk = 0$ и $k^t H k = 0$, т.е. $k = \begin{bmatrix} 1 \\ \varepsilon \end{bmatrix}$, где $\varepsilon = 1$ или $\varepsilon = -1$, что приводит к системе $\begin{cases} y = -\varepsilon x \\ t = -z, \end{cases}$, а соотношение $X^H X = 0$ дает: $y = -\varepsilon x,\ z = \eta x,\ t = -\varepsilon\eta x$. Поэтому $X = x \begin{bmatrix} 1 & -\varepsilon \\ \eta & -\varepsilon\eta \end{bmatrix}$, а матрицы S и U могут быть такими: $U = \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \eta \end{bmatrix}$, $S = x \begin{bmatrix} \varepsilon & -1 \\ 1 & -\varepsilon \end{bmatrix}$. Заметим, что в случаях $|z| = |x| < |y|,\ (x \neq 0),\ |y| = |x| < |z|\ (x \neq 0),\ |z| < |x| = |y|$ и $|y| < |x| = |z|$ $H-$полярного разложения не существует. Рассмотрим, например, случай $|z| = |x| < |y|,\ xt = yz$, тогда $X = \begin{bmatrix} x & y \\ \varepsilon x & \varepsilon y \end{bmatrix}$, $Ker\ X = span\left\{\begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix}\right\}$, но $y^2 - x^2 \neq 0$.

Если $|z| < |x| \neq |y|$, то $X^H X = (x^2 - z^2) \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon \\ -\varepsilon & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow X'^{H'} X' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$ не существует S' такой, что $(S')^2 = X'^{H'} X'$.

Случай $|y| = |x| < |z|$ совершенно аналогичен случаю $|z| < |x| = |y|$, а случай $|y| < |x| = |z|$ аналогичен $|x| < |x| = |y|$, а случай $|y| < |x| = |z|$ аналогичен случаю $|z| = |x| < |y|$.

Случай $\lambda \geq 0,\ x \neq 0$ имеет следующую геометрическую интерпретацию. Рассмотрим отображение φ : $\mathbb{R}^3 \backslash \{x = 0\} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ по формуле: $\varphi(x, y, z) = \begin{bmatrix} x & y \\ z & \frac{yz}{x} \end{bmatrix}$, которое, очевидно, является гомеоморфизмом $M = \mathbb{R}^{\backslash}\{x = 0\}$ на $Im\varphi \subset \mathbb{R}^{2\times 2}$. Стянем топологические M вдоль лучей, проходящих через точку O, в куб M' (открытый) с ребром 1. Тогда существование (1) в M равносильно его существованию в точках M', ибо $X = US \ \Leftrightarrow\ \mu X = U \cdot (\mu S)$ для $\forall \mu \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

На нижеследующем рисунке изображен куб M'. Если из него удалить 8 треугольных пирамид: $OS_2C_1B_1$, $OS_2C_2B_2$, $OS_3A_1B_1$, $OS_3A_2B_2$, $OS_5A_1D_1$, $OS_5A_2D_2$, $OS_6C_1D_1$ и $OS_6C_2D_2$ вместе гранями без границ граней, а также квадрат $K_1K_2G_2G_1$, то оставшаяся часть M' обладает тем свойством, что для любой его точки $(x,\ y,\ z) \in M'$ матрица $\varphi(x,\ y,\ z)$ допускает разложение (1), которое осуществлено выше.



Случай 2. $detX = xt - yz \neq 0$.

Уравнение (1) равносильно $X^HX = S^2$. В этом случае, если матрица S найдена, то $U = XS^{-1}$.

Прежде всего рассмотрим случай $xy = zt$. Тогда $X^HX = \begin{bmatrix} x^2 - z^2 & 0 \\ 0 & t^2 - y^2 \end{bmatrix}$. В случае a_1) $S = \begin{bmatrix} \sqrt{x^2 - z^2} & 0 \\ 0 & \sqrt{t^2 - y^2} \end{bmatrix}$, а в случае a_5) $S = \sqrt{z^2 - x^2}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. Поэтому будем считать, что $\Delta := xy - zt \neq 0$.

Характеристическое уравнение матрицы X^HX имеет вид: $\lambda^2 - (x^2 - z^2 + t^2 - y^2)\lambda + (xt - zt)^2 = 0$, дискриминант которого равен $D = (x^2 - z^2 + t^2 - y^2) - 4(xt - yz)^2 \equiv (x^2 - z^2 - t^2 + y^2) - 4(xy - zt)^2$.

Случай $D = 0$. Двукратное собственное число равно $\lambda = \frac{1}{2}(x^2 - z^2 + t^2 - y^2)$. Пусть $\lambda > 0$, матрица

$$X^{H'}X - \lambda I = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(x^2 - z^2 - t^2 + y^2) & xy - zt \\ -(xy - zt) & \frac{1}{2}(x^2 - z^2 - t^2 + y^2) \end{bmatrix}$$

имеет ранг 1, ее квадрат равен нулю. Поэтому существует $T : T^{-1}X^HXT = \begin{bmatrix} 0 & \sigma \\ \sigma & 0 \end{bmatrix}$. Поскольку $D = 0$, то $x^2 - z^2 - t^2 + y^2 = 2\varepsilon(xy - zt)$. Пусть $T = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\varepsilon}{2\Delta} \\ -\varepsilon & \frac{1}{2\Delta} \end{bmatrix}$, тогда $S = T\begin{bmatrix} \sqrt{\lambda} & \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \\ 0 & \sqrt{\lambda} \end{bmatrix}T^{-1}$ и, поэтому $S = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda} + \frac{\varepsilon\Delta}{2\sqrt{\lambda}} & \frac{\Delta}{2\sqrt{\lambda}} \\ -\frac{\Delta}{2\sqrt{\lambda}} & \sqrt{\lambda} - \frac{\varepsilon\Delta}{\sqrt{\lambda}} \end{bmatrix}$, где $\Delta = xy - zt$. Легко проверить, что $S^2 = X^HX$.

Пусть $D > 0$, тогда $\lambda_1 = \frac{1}{2}(x^2 - z^2 + t^2 - y^2 - \sqrt{D})$ $\lambda_2 = \frac{1}{2}(x^2 - z^2 + t^2 - y^2 + \sqrt{D})$. Пусть $x^2 - z^2 + t^2 - y^2 > \sqrt{D}$; положим $S = \frac{1}{h_2^2 - h_1^2}\begin{bmatrix} h_2^2\sqrt{\lambda_2} - h_1^2\sqrt{\lambda_1} & h_1h_2(\sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2}) \\ -h_1h_2(\sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2}) & h_2^2\sqrt{\lambda_1} - h_1^2\sqrt{\lambda_2} \end{bmatrix}$, где $h_1 = -\Delta,\ h_2 = x^2 - z^2 - \lambda_1 = t^2 - y^2 - \lambda_2$.

Пусть $D < 0$, положим $S = \begin{bmatrix} (u + vh^2 - \frac{v}{4h^2}) & \xi v(h^2 + \frac{1}{4h^2}) \\ -\xi v(h^2 + \frac{1}{4h^2}) & (u + vh^2 - \frac{v}{4h^2}) \end{bmatrix}$, где $u = \sqrt{\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}}$ $v = \frac{\beta}{\sqrt{2(\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2})}}$; $\alpha = \frac{1}{2}(x^2 - z^2 + t^2 - y^2)$, $\beta = \frac{1}{2}\sqrt{-(x^2 - z^2 + t^2 - y^2)^2 + 4(xt - yz)^2}$, $h = \sqrt{\frac{x^2-z^2+t^2-y^2+2|xy-zt|}{2}}$, $\xi = sgn(xy - zt)$.

Библиографический список

1. *Bolshakov, Y.* Unitary equivalence in an indefinite scalar product: an analogue of singular – value decomposition // Linear alg. appl. / Y. Bolshakov, B. Reichstein. – 222; pp. 155-226, 1995.

К вопросу о проблеме Беренса-Фишера: применение подхода Неймана-Пирсона

О.М. Дюсуше

В отличие от тестирования на значимость гипотезы равенства двух средних приближенными методами и построения доверительных границ (подход Беренса-Фишера-Уэлча) применяется метод тестирования простых альтернативных гипотез (подход Неймана-Пирсона) на основе построения и предварительного анализа точных распределений статистик. Примеры рассчитаны с использованием данных Леманна.

Введение

Беренс (1929) рассматривал задачу о равенстве генеральных средних по малым выборкам из двух независимых нормальных совокупностей $N\{\mu_1,\ \sigma_1\}$, $N\{\mu_2,\ \sigma_2\}$. Вопрос построения доверительных границ оказался более сложным, чем в случае Госсета (Стьюдента), что привлекло внимание Фишера и многих других ведущих статистиков к решению этой достаточно актуальной задачи. Введение в проблематику можно найти в Википедии – общедоступных мультиязычных универсальных интернет-энциклопедиях, например, на русском, немецком, английском языках. Обзор и обсуждение основных исследований задачи "о двух средних" периода до середины 60-х есть втором томе монографии Кендалла и Стьюарта (1973, гл. 21). Критерий сравнения средних с соответствующими таблицами можно найти в таблицах Большева и Смирнова (1983). Ким и Кохен (1998) в обзоре более 80-ти публикаций (включая анализ 10-таблиц) по проблеме Беренса-Фишера отмечали, что она стала одной из фокальных точек противоречия трех теоретических подходов: частотного (Нейман-Пирсон (1928, 1933) против фидуциального (Фишер (1935, 1939) и байесовского (Джеффри (1940), заключив, что не существует никаких конечных решений в рамках рассмотренных работ. Основанием подобного заключения стала серия работ Линника (1963, 1964 и др., англ. 1968/1966) и других авторов, в которых было показано, в том числе, на примере теста Вальда (1955), что однородный наиболее мощный критерий не существует в контексте задачи Беренса-Фишера.

Фишер (1935), будучи сторонником (и создателем) *теста на значимость*, отмечал, что в статистических задачах нулевая гипотеза никогда не может быть доказана или установлена, но может быть опровергнута[1]. Также Фишер (1934) утверждал, что, если существует такая достаточная статистика, что функция максимального правдоподобия выборки включает только эту статистику, и ее распределение выражается в терминах функции правдоподобия, то только эти случаи позволяют получать тесты на значимость типа равномерно наиболее мощных тестов Неймана-Пирсона относительно класса альтернатив. Если такой статистики не существует, Фишер рекомендовал искать подходящую статистику, обеспечивающую использование всей необходимой информации, содержащейся в выборке.

Настоящий анализ здесь мотивируется целью построения и сравнения *точных распределений* известных статистик Беренса-Фишера-Уэлча и Вальда в конечном виде, и применения подхода Неймана-Пирсона (1933) для *тестирования простых альтернативных гипотез.* Рей и Питмен [9] получили точное (центральное) распределение статистики Беренса-Фишера для нечетных объемов двумерной выборки в виде взвешенной суммы распределений Стьюдента. Здесь распределения в конечном виде были построены методами Вентцель и Овчарова (1969, гл. 8) путем эквивалентных преобразований монотонных функций от одной или двух независимых случайных величин – к функциям от случайных величин с известными распределениями. Это позволило определить зависимость функции мощности от параметров распределений, в том числе от, так называемого, "мешающего" параметра λ и показать неоднородность ошибки второго рода по паре параметров U и λ. Три рассматриваемые статистики преобразованы одним способом, поэтому вывод функции плотности дан только для первой статистики.

1. Распределение статистики u Уэлча

Распределения статистики u, рассмотренной в статье Уэлча (1938, с. 350), и составляющих компонент V и S после ее преобразования проводятся ниже:

$$u = (\overline{x_1} - \overline{x_2})/\sqrt{s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2}, \tag{1}$$

[1]Цитируется по "Earliest Uses of Symbols in Probability and Statistics" со ссылкой на работу Фишера "The Design of Experiments" (1935, с. 19). Используемые термины и символы - там же, http://jeff560.tripod.com/h.html см. раздел H – "Hypothesis testing", "Test of significance" и др.

где $\overline{x_1}=\frac{\sum_{i=1}^{n_1} x_1^i}{n_1}$; $\overline{x_2}=\frac{\sum_{i=1}^{n_2} x_2^i}{n_2}$; $s_1^2=\frac{\sum_{i=1}^{n_1}(x_1^i-\overline{x_1})^2}{n_1-1}$; $s_2^2=\frac{\sum_{i=1}^{n_2}(x_2^i-\overline{x_2})^2}{n_2-1}$ – оценки, состоятельные и несмещенные, неизвестных параметров μ_1, μ_2, D_1, D_2 двух нормальных распределений.

Распределение числителя V $=(z+U)\sqrt{D_V}$:

$$u=,\quad u=\frac{\overline{x_1}-\overline{x_2}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{D_1/n_1+D_2/n_2}}+\frac{(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{D_1/n_1+D_2/n_2}}=\frac{(z+U)\sqrt{D_V}}{\sqrt{\lambda c w_1+w_2}}=\frac{V}{Z},$$

$$\lambda=\frac{D_1}{D_2},\quad c=\frac{n_2(n_2-1)}{n_1(n_1-1)},\quad D_V(\lambda)=\frac{D_1/n_1+D_2/n_2}{D_2/((n_2-1)n_2)}=\lambda c(n_1-1)+(n_2-1),$$

$$z\in N(0,1), U=const, V\in N(U\sqrt{D_V},D_V), f_V(V)=\frac{\exp\left(-\frac{1}{2}(V-U\sqrt{D_V})^2\right)}{\sqrt{2\pi D_V}}. \tag{2}$$

Плотности распределений подкоренного выражения S^2 и знаменателя S:

$w_i=\frac{s_i^2(n_i-1)}{D_i}\in\chi^2_{\nu i}$, $f_{wi}(w_i)=\frac{w_i^{\frac{\nu i-2}{2}}}{2^{\frac{\nu i}{2}}\Gamma(\nu_i/2)}, \nu_i=n_i-1, i=1,2,$ $f_{\lambda cw1}(y)=\frac{\chi^2_{\nu 1}(y/\lambda c)}{\lambda c}$, где $w>0$, $\Gamma(.)$ – гамма-функция; Плотность распределения функции $y=\phi(x)$ с распределением случайной величины x:$f(x)$,равна: $f_y(y)=f(\psi(y))|\psi\prime(y)|$, где $\psi(y)$ – функция обратная к функции $y(x)$; $|\psi\prime(y)|$ – модуль производной от функции $\psi(y)$. Плотности распределения случайных, независимых величин под корнем S^2 в (1) и величины $Z=\sqrt{S^2}$ равны:

$$f_{S^2}(S^2)=\int_0^{S^2} f_{\lambda cw1}(y)f_{w2}(S^2-y)dy=\int_0^{S^2}\frac{(y/\lambda c)^{\frac{(n_1-3)}{2}}\exp\left(-\frac{y}{2\lambda c}\right)}{\lambda c\cdot 2^{\frac{(n_1-1)}{2}}\Gamma\left(\frac{n_1-1}{2}\right)}\frac{(S^2-y)^{\frac{(n_2-3)}{2}}\exp\left(-\frac{S^2-y}{2}\right)}{2^{\frac{(n_2-3)}{2}}\Gamma\left(\frac{n_2-1}{2}\right)}dy,$$

$$f_Z(Z)=Z'f_Z(Z)=2Zf_{S^2}(Z^2)=2Z\frac{\int_0^{Z^2} y^{\frac{n_1-3}{2}}(Z^2-y)^{\frac{n_2-3}{2}}\exp\left(-\frac{y}{2\lambda c}-\frac{Z^2-y}{2}\right)dy}{(\lambda c)^{\frac{n_1-1}{2}}2^{\frac{n_1+n_2-2}{2}}\Gamma\left(\frac{n_1-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2-1}{2}\right)}. \tag{3}$$

***Плотность распределения статистики u* (1):**

$$f_u(u)=\int_0^{+\infty} Z\cdot f_V(uZ)f_Z(Z)dZ=$$

$$=\frac{\int_0^{\infty}\int_0^{Z^2} Z^2y^{\frac{n_1-3}{2}}(Z^2-y)^{\frac{n_2-3}{2}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{u\cdot Z}{\sqrt{\lambda c(n_1-1)+n_2-1}}-U\right)^2-\frac{y}{2\lambda c}-\frac{Z^2-y}{2}\right)dydZ}{\sqrt{\pi(\lambda c(n_1-1)+n_2-1)}(\lambda c)^{\frac{n_1-1}{2}}2^{\frac{n_1+n_2-3}{2}}\Gamma\left(\frac{n_1-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2-1}{2}\right)}. \tag{4}$$

Утверждение. *Плотность распределения статистики* (1) *имеет особенность в окрестности* $\delta=\mu_1-\mu_2=0$, *или* $U=0$, *где плотность распределения определена как функция от одного параметра – отношения дисперсий* $\lambda: f_u(u,\lambda\backslash n_1,\ n_2)$; *а при* $\delta\neq 0$ *плотность распределения статистики* (1) *может быть определена как параметрическая функция от генеральной квантили для выборочных средних*U *и отношения дисперсий* $\lambda: f_u(u,U,\lambda\backslash n_1,\ n_2)$, *и в общем случае имеет вид:*

$$f_u(u)=\frac{\int_0^{\infty}\int_0^{S^2} K(\lambda)Sx^{\frac{n_1-3}{2}}(S^2-x)^{\frac{n_2-3}{2}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(u\frac{S}{\sqrt{D_V(\lambda)}}-U(\delta,\lambda,\sigma_2)\right)^2-\frac{x}{2\lambda c}-\frac{(S^2-x)}{2}\right)dxdS}{\sqrt{\pi(\lambda c(n_1-1)+n_2-1)}(\lambda c)^{\frac{n_1-1}{2}}2^{\frac{n_1+n_2-3}{2}}\Gamma\left(\frac{n_1-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2-1}{2}\right)}. \tag{5}$$

Параметрическое представление функции плотности позволяет анализировать альтернативы U=0 и $U\neq$0, которые определяют δ=0 и $\delta\neq$0.

$$\int_0^{100}\int_0^{S^2} S^2\cdot\frac{1}{y^{\frac{(n1-1)}{2}}\sqrt{y\cdot cc2+n2-1}\cdot AK}\cdot\exp\left[\frac{-ss}{2cc1y}-\frac{S^2-ss}{2}-\left[\left(U1-\frac{U1S}{\sqrt{y\cdot cc2+n2-1}}\right)^2\right]\cdot 0.5\right]\cdot ss^{\frac{n1-3}{2}}\cdot(S^2-ss)^{\frac{n2-3}{2}}\,dss\,dS$$

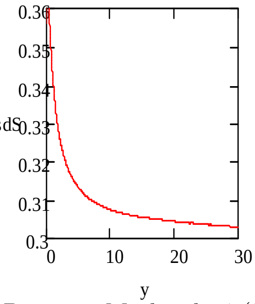


Рис. 1. Зависимость плотности u (λ) в точке $u=U1$ ($\mu_1-\mu_2$, D$_1$, D$_2$). Расчеты Mathcad-14 (λ=y)

2. Распределение статистики v Беренса-Фишера

Статистика v Беренса-Фишера, рассмотренная в таблицах [4, с. 204]имеет вид:

$$v = ((\overline{x_1} - \overline{x_2}) - (\mu_1 - \mu_2))/\sqrt{s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2}. \tag{6}$$

Эквивалентными преобразованиями статистика v (6) приводится к виду, зависящему только от параметра отношения дисперсий λ:

$v = \frac{z\sqrt{D_V}}{\sqrt{\lambda c w_1 + w_2}}$, $z \in N(0,1)$, $w_i \in \chi^2_{n_i - 1}$, $i = 1, 2$, Аналогично порядку, показанному в п. 1 получена плотность распределения $f(\nu)$, которая имеет вид:

$$f_\nu(\nu, \lambda \backslash n_1, n_2) = \int\limits_0^\infty \int\limits_0^{S^2} K(\lambda) S x^{\frac{n_1-3}{2}} (S^2 - x)^{\frac{n_2-3}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(u\frac{S}{\sqrt{D_V(\lambda)}}\right)^2 - \frac{x}{2\lambda c} - \frac{(S^2 - x)}{2}\right) dx\, dS. \tag{7}$$

Сравнение распределения статистик u и ν: (5) и (7) показывает, что в выражении (7) параметр U =0, δ=0, и плотность распределения зависит только от отношения дисперсий, но не их размера.

3. Тест Вальда

Вальд [11] исследовал проблему равенства средних и критический регион для статистики, удовлетворяющей требованиям достаточности и инвариантности, в виде неравенства:

$$(\overline{x_1} - \overline{x_2})/\sqrt{s_1^2 + s_2^2} \geq \varphi\left(s_2^2/s_1^2\right). \tag{8}$$

Эквивалентные преобразования статистики W (11) и распределения ее компонент показывают, что $D_v > D_w$, c = c_w n_2/n_1. Соотношение рассеивания статистик (1) и (11) зависит от соотношения объемов выборки. В примере Леманна рассеивание статистики (11) меньше чем у (1), т.е. статистика (11) более эффективна.

$$u_w = \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{\sqrt{s_1^2 + s_2^2}} = \left(\frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{D_1/n_1 + D_2/n_2}} + \frac{(\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{D_1/n_1 + D_2/n_2}}\right) \cdot \frac{\sqrt{D_1/n_1 + D_2/n_2}}{\sqrt{D_2/(n_2 - 1)}\sqrt{C_w w_{\nu 1} + w_{\nu 2}}} = \frac{(z+U)\sqrt{D_w}}{\sqrt{c_w w_1 + w_2}},$$

$$\lambda = \frac{D_1}{D_2},\; u = \frac{(z+U)\sqrt{D_w}}{\sqrt{c_w w_1 + w_2}} = \frac{W}{S},\; c_w(\lambda) = \lambda\frac{(n_2-1)}{(n_1-1)} = \lambda c_w,\; D_w(\lambda) = \lambda c_w \frac{(n_1-1)}{n_1} + \frac{(n_2-1)}{n_2}.$$

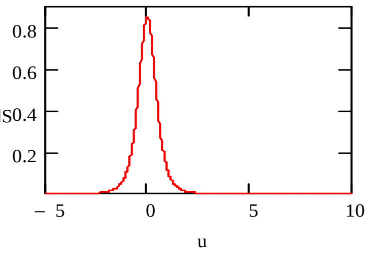
Аналогичные выкладки позволяют получить плотность распределения статистики Вальда

$$f_W(W, U, \lambda) = \frac{\int\limits_0^\infty \int\limits_0^{S^2} S^2 y^{\frac{n_1-3}{2}} (S^2 - y)^{\frac{n_2-3}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{uS}{\sqrt{\left(\lambda c_w \frac{n_1-1}{n_1} + \frac{n_2-1}{n_2}\right)}} - U\right)^2 - \frac{y}{2\lambda c_w} - \frac{S^2-y}{2}\right) dy dS}{\sqrt{\pi\left(\lambda c_w \frac{n_1-1}{n_1} + \frac{n_2-1}{n_2}\right)} (\lambda c_w)^{\frac{n_1-1}{2}} 2^{\frac{n_1+n_2-3}{2}} \Gamma\left(\frac{n_1-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2-1}{2}\right)}.$$

Распределение статистики ϕ в правой части неравенства (11) зависит только от величины, имеющей распределение Фишера и от параметра отношения дисперсий λ, то есть, принадлежит к однопараметрическому семейству. Статистика Вальда в левой части критерия (11) аналогично статистике Уэлча может рассматриваться в двухмерном $\{U,\, \lambda\}$ параметрическом пространстве. Фактически, в неопубликованной задаче Вальд должен был прийти к ограничению функции мощности, определенной в двухмерном пространстве, посредством критерия, определенного в одномерном пространстве. В исследованиях Линника и Шалаевских было показано, что в задаче Беренса-Фишера критериев подобных по размеру критерия и параметрам ($\sigma_1,\, \sigma_2$) не существует, что соответствует заключению Линника о невозможности существования теста Вальда подобного относительно счетного ограниченного множества значений λ=σ_1^2/σ_2^2.

Функция плотности статистики Вальда позволяет определить математическое ожидание и дисперсию. Графически можно показать, что при прочих равных распределение f_w более компактно, и поэтому статистика Вальда предпочтительнее статистики Уэлча. На рис. 2. приведены распределения плотности Вальда и Уэлча, соответствующие гипотезам: $H_0 : U_0 = 0$, $\lambda = 30.644$, и $H_1 : U_1 = 2.143$, $\lambda = 30.644$.

$$\int_0^{200}\int_0^{S^2} S^2 \cdot KKw \cdot \exp\left[\frac{-x}{2\cdot cc} - \frac{S^2 - x}{2} - \left[\left(-U + u\cdot\frac{S}{SVw}\right)^2\right]\cdot 0.5\right]\cdot x^{\frac{n1-3}{2}}\cdot\left(S^2 - x\right)^{\frac{n2-3}{2}}\, dx\, dS$$



$$\int_0^{200}\int_0^{S^2} S^2\cdot KKw\cdot\exp\left[\frac{-x}{2\cdot cc}-\frac{S^2-x}{2}-\left[\left(-U1+u\cdot\frac{S}{SVw}\right)^2\right]\cdot 0.5\right]\cdot x^{\frac{n1-3}{2}}\cdot\left(S^2-x\right)^{\frac{n2-3}{2}}\,dx\,dS$$

$$\int_0^{200}\int_0^{S^2} S^2\cdot KK\cdot\exp\left[\frac{-x}{2\cdot cc}-\frac{S^2-x}{2}-\left[\left(-U+u\cdot\frac{S}{SV}\right)^2\right]\cdot 0.5\right]\cdot x^{\frac{n1-3}{2}}\cdot\left(S^2-x\right)^{\frac{n2-3}{2}}\,dx\,dS$$

$$\int_0^{200}\int_0^{S^2} S^2\cdot KK\cdot\exp\left[\frac{-x}{2\cdot cc}-\frac{S^2-x}{2}-\left[\left(-U1+u\cdot\frac{S}{SV}\right)^2\right]\cdot 0.5\right]\cdot x^{\frac{n1-3}{2}}\cdot\left(S^2-x\right)^{\frac{n2-3}{2}}\,dx\,dS$$

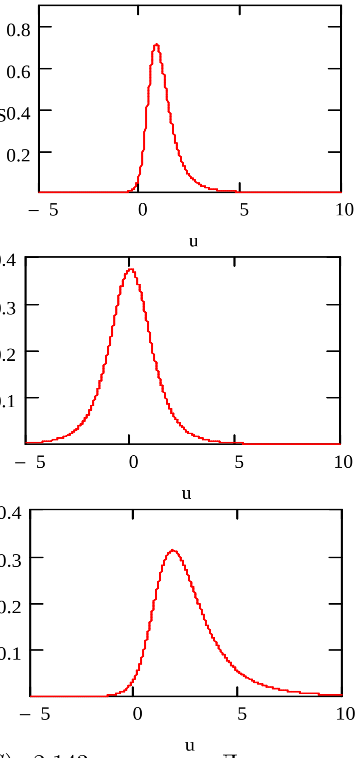


Рис. 2. Распределения плотности статистик (1) и (11) при U=0, и $U1=(d/S)$=2.143 в примере Леманна

4. Проверка простых альтернативных гипотез в задаче Беренса-Фишера на основе подхода Неймана-Пирсона

Простой гипотезой относительно распределения случайных величин согласно Крамеру [6, с. 574] называется *точка* в пространстве параметров распределения этих величин. Простые альтернативные гипотезы как точки в 2-х мерном пространстве параметров, позволяют определить гипотезы и *критерий тестирования* двух распределений с параметрами, соответствующими гипотезам H_0 и H_1. Константа k ограничивает область интегрирования по u, и определяет уровень ошибок первого и второго рода. Если выборочная квантиль u не попадает в область вокруг нуля, это означает, что альтернативная гипотеза более вероятна, чем нулевая. Достаточно малые ошибки должны обеспечиваться соответствием объемов выборки и параметров адекватной и приемлемой альтернативы (*):

$$\begin{cases} H_0 : \delta = 0,\ \lambda = \lambda_0 \Rightarrow \text{ если } |u| < k, \text{ принимают } H_0; \\ H_1 : \delta = \delta_1,\ \lambda = \lambda_1, \sigma_2 = \sigma_{21} \Rightarrow \text{ если } |u| \geq k, \text{ принимают } H_1. \end{cases}$$

Система уравнений рисков при *размере* (α) и *мощности* (1- β) *критерия* имеет вид:

$$\begin{cases} \int\limits_{-k}^{k} f_W(u, n_1, n_2, \lambda \backslash H_0) du = 1 - \alpha; \\ \int\limits_{-k}^{k} f_W(u, n_1, n_2, \lambda, \sigma_2 \backslash H_1) du = \beta. \end{cases}$$

Решение уравнения при выполнении условия (*) в общем случае целесообразно объединить с целочисленным решением задачи планирования оптимальных объемов испытаний, т.к. задание уровня ошибок первого и второго рода, обоснование альтернативной гипотезы и выбор объемов испытаний взаимосвязаны.

Интервал [-k, k] определяет дополнение к критической области. Нейман и Пирсон [11] при заданном объеме испытаний советуют задать ошибку первого рода, и проверять приемлемость ошибки второго рода. В этой задаче мы вынуждены поступить наоборот – определить k=2.87 из условия β=0.05 (при $H_1: U1$= 2,5):

$$\int_{-k}^{k}\int_0^{200}\int_0^{S^2} S^2\cdot KKw\cdot\exp\left[\frac{-x}{2\cdot cc}-\frac{S^2-x}{2}-\left[\left(-U1+u\cdot\frac{S}{SVw}\right)^2\right]\cdot 0.5\right]\cdot x^{\frac{n1-3}{2}}\cdot\left(S^2-x\right)^{\frac{n2-3}{2}}\,dx\,dS\,du = 0.9505976,$$

$$\int_{-k}^{k}\int_{0}^{200}\int_{0}^{S^2} S^2\cdot KKw\cdot \exp\left[\frac{-x}{2\cdot cc}-\frac{S^2-x}{2}-\left[\left(u\cdot\frac{S}{SVw}\right)^2\right]\cdot 0.5\right]\cdot x^{\frac{n1-3}{2}}\cdot \left(S^2-x\right)^{\frac{n2-3}{2}}\,dx\,dS\,du = 0.9976267.$$

В этом случае k=2.87 и Вер$(u>k/H_1) = 1-\beta = 0.95$ и Вер$(u>k/H_0) = \alpha = 0.002$. Принимается нулевая гипотеза если выборочная квантиль ограничена значением k.

Почему не существует однородного наиболее мощного критерия для проверки абсолютной разности средних? Во-первых, из функции правдоподобия двумерной выборки при четырех неизвестных параметрах не удается выделить зависимость от разности средних, $\delta=\mu_1-\mu_2$. Согласно рекомендациям Фишера рассматриваются критерии, основанные не на функции правдоподобия, а на функции от достаточных статистик выборки. В качестве "хорошей" статистики выбрана статистика Вальда (1955)[1].

$$\int_{0}^{200}\int_{0}^{S^2} S^2\cdot KK\cdot \exp\left[\frac{-x}{2\cdot cc}-\frac{S^2-x}{2}-\left[\left(-U1+u\cdot\frac{S}{SV}\right)^2\right]\cdot 0.5\right]\cdot x^{\frac{n1-3}{2}}\cdot\left(S^2-x\right)^{\frac{n2-3}{2}}\,dx\,dS$$

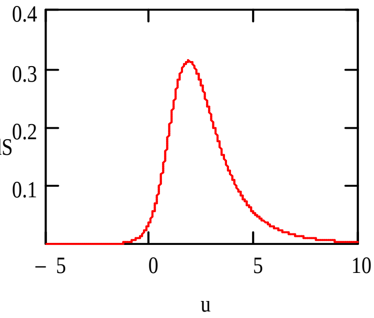


Рис. 3. Функции мощности критерия в зависимости от квантили U по для 4-х значений λ

Во-вторых, если из некоторых прагматических соображений исследователь выбирает альтернативную гипотезу H_1, то не для всех параметров λ равномерно обеспечивается размер критерия α. Невозможно построить равномерно мощный критерий для какой-либо области λ (например, по горизонтали уровня 0,05).

Библиографический список

1. *Большев, Л.Н.* Таблицы математической статистики [Текст] / Л.Н. Большев, Н.В. Смирнов. – М.: Наука, 1983.
2. *Вентцель, Е.С.* Теория вероятностей [Текст] / Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров. – М.: Наука, 1969. – Гл. 8.
3. *Кендалл, М.Дж.* Статистические выводы и связи [Текст] / М.Дж. Кендалл, А. Стьюарт. – М.: Наука, 1973.
4. *Крамер, Г.* Математические методы статистики [Текст] / Г. Крамер. – М.: Мир, 1975.
5. *Линник, Ю.В.* К аналитической теории тестов для проблемы Беренса-Фишера Доклады Академии наук СССР [Текст] / Ю.В. Линник, О.В. Шалаевский. – 1963. – Т. 150. – № 1.
6. *Линник, Ю.В.* О тесте А. Вальда для сравнения двух нормальных выборок Теория вероятностей и ее применение [Текст] / Ю.В. Линник. – 1964. – № 9. – С. 16-30.
7. *Behrens, W.V.* Ein Beitrag zur Fehlerberechnung bei wenigen Beobachtungen // *Landwirtsch. Jahrbücher* 68, 1929. – pp. 807-837.
8. *Fisher, R.* Two new properties of mathematical likelihood // Proceedings of the Royal Society, 1934. – A, 144: 285-307.
9. *Fisher, R.* Fiducial argument in statictical inference // Annals of Eugenics, 1935, 6: 391-398. http://digital.library.adelaide.edu.au/dspace/handle/2440/15222
10. *Kim, S-H, Cohen, A.S.* On the Behrens-Fisher Problem: A Review // Journal of Educational and Behavioral Statistics, Winter. – 1998. – Vol. 23. – № 4. – pp. 356-377.
11. *Neyman, J., Pearson, E.S.* On the Problem of the Most Efficient Test of Statistical Hypotheses // Philosophical Transactions of the Royal Society, Series A. (1934) 1933. – Vol. 231. – pp. 289-337.
12. *Ray, W.D., Pitman, E.N.T.* An Exact Distribution of the Fisher-Behrens-Welch Statistic // Journal of the Royal Statistical Society, 23 (1961).
13. *Wald, A.* Testing the difference between the means of two normal populations with unknown standard deviations // Selected papers in statistics and probability by Abraham Wald. – pp. 669-695. McGraw-Hill Book, Co., Inc.New York-Toronto-London, 1955. Цит. по Mathematical Reviews on the Web (MathSciNet, MR0070918).
14. *Welch, B.L.* The Significance of the Difference Between Two Means when the Population Variances are Unequal // Biometrika, 1938. – Vol. 29. – pp. 350-362.

[1]Статистика Уэлча описывает вероятность непревышения средних значений Вер$(\overline{x_2} < \overline{x_1})$, а статистика Вальда вероятность непревышения единичных реализаций Вер$(x_2 < x_1)$. Оба распределения зависят от параметра разности генеральных средних $\mu_1 - \mu_2$.

О двухфазной системе массового обслуживания с общими функциями распределения характеристик

И.П. Ильина

1. Постановка задачи и метод исследования

На двухфазную однолинейную систему массового обслуживания поступает пуассоновский поток требований с интенсивностью a. После обслуживания на I-ой фазе требование поступает на 2-ую фазу. Времена обслуживания на обеих фазах имеют функции распределения $B_1(t)$ и $B_2(t)$ соответственно. Одновременно обе фазы работать не могут, первая обладает абсолютным приоритетом по отношению ко второй. Вызов, во время обслуживания которого на 2-й фазе, приходят вызовы на I-ую фазу, не "теряется", а ждет пока обслужится этот вызов, и если больше нет вызовов на I-ой фазе, прерванный вызов дообслуживается оставшееся время обслуживания. Надо найти распределение длин очередей перед первой и второй фазой и распределение времени пребывания в системе обслуживания. Для нахождения характеристик рассматриваемой системы применим метод введения дополнительного события, см. [1].

При решении задач массового обслуживания приходится пользоваться преобразованиями Лапласа-Стильтеса

$$\int_0^\infty e^{-st}dA(t),$$

где $A(t)$ – некоторая функция распределения неотрицательной случайной величины, а также производящими функциями вида $\sum\limits_{k\geq 0} p_k z^k$. Вводя некоторое дополнительное событие ("катастрофу", или событие, заключающееся в том, что вызов оказался "красным"), можно придать вероятностный смысл преобразованию Лапласа-Стильтеса и производящей функции.

Рассмотрим поток вызовов, поступающихв некоторую систему обслуживания. Раскрасим поступающие вызовы следующим образом. Каждый вызов объявляется либо "красным", либо "синим", причем произвольный вызов объявляется "красным" с вероятностью z, $0 \leq z \leq 1$, независимо от того, какого цвета остальные вызовы, и пусть p_k – вероятность поступления k вызовов в некотором интервале времени, тогда $\sum\limits_{k\,\geq\,0} p_k z^k$ есть вероятность поступления разве лишь "красных" вызовов (в рассматриваемом интервале времени).

Далее, предположим, что длительность "жизни" некоторого элемента имеет ф.р. $A(t)$. Предположим, что происходят некоторые "катастрофы", моменты наступления которых образуют пуассоновский поток с параметром S. Тогда число $\int\limits_0^\infty e^{-st}dA(t)$ есть вероятность того, что за время "жизни" элемента не произойдет никакая "катастрофа".

Вероятность интересующего нас события подсчитывается с дух точек зрения, использующих введенное событие – "катастрофу", и получается соотношение, справедливое для всех z, $0 \leq z \leq 1$, или $S > 0$ (так как введенное событие произвольно).

2. Характеристики системы обслуживания

Время пребывания в системе складывается из времени ожидания обслуживания на I-ой и 2-ой фазах. Рассмотрим вызов, поступивший в момент времени t, и заставший очередь (i, j) (i – число вызовов, ожидающих начала обслуживания на I-ой фазе, j – число вызовов на 2-ой фазе; в длину очереди включается и обслуживающееся требование).

$W_{i,j}(t, y)$ – время ожидания обслуживания вызовом, поступившим в момент времени t и заставшего очередь (i, j); $\omega_{i,j}(t, s) = \int\limits_0^\infty e^{-sy}dW(t, y)$ – вероятность, что за время ожидания не произойдет "катастрофа". Для того, чтобы за время ожидания не произошла "катастрофа" (вероятность чего есть $\omega_{i,j}(t, s)$), необходимо и достаточно, чтобы, во-первых, не произошла "катастрофа" во время ожидания работы I-ой фазы (при условии, что была очередь i), вероятность чего есть $\pi_1^i(s)$ и, во-вторых, не произошла "катастрофа" во время ожидания перед 2-ой фазой обслуживания. Время ожидания перед 2-ой фазой обслуживания равно времени обслуживания $(i + j)$ вызовов, стоящих перед ним в очереди на 2-ом приборе. Время ожидания на 2-ой фазе складывается из собственного времени обслуживания и суммарного времени задержки, связанной с приходом требований на I-ю фазу во время обслуживания этого вызова.

С приходом вызова на I-ую фазу, обслуживание на 2-ой фазе прерывается, и вызов ждет, когда прибор "восстановится", причем время "восстановления" распределено как период занятости I-ой фазы. Пусть x - собственное время обслуживания прибора на 2-ой фазе (оно не зависит от того, сколько раз прерывалось его обслуживание вызовами, приходящими на I-ую фазу).

Для того, чтобы во время обслуживания вызова на 2-ой фазе не произошли "катастрофы", необходимо и достаточно, чтобы за время x не происходили "катастрофы", вероятность чего e^{-sx}, и во-вторых, "катастрофы" не происходили за время восстановления прибора, вероятность чего есть $\sum\limits_{k\,\geq\,0} \frac{(ax)^k}{k!}e^{-ax}\pi_1^k(s)$, а вероятность совместного осуществления этих двух событий есть $\int\limits_0^\infty e^{-sx}\sum\limits_{k\geq 0}\frac{(ax)^k}{k!}e^{-ax}\pi_1^k(s)dB_2(x)=\int\limits_0^\infty e^{-sx}e^{-ax}e^{ax\pi_1(s)}dB_2(x)=\beta_2(s+a-a\pi_1(s))$.

Следовательно, $\omega_{ij}(s)=\pi_1^i(s)\beta_2^{i+1}(a+s-a\pi_1(s))$. $\beta_1(s)\pi_1^i(s)\beta_2^{i+j+1}(s+a-a\pi_1(s))$ – вероятность того, что за полное время пребывания в системе не происходят "катастрофы". Эти характеристики не зависят от того, в какой момент времени поступает вызов.

Введем понятие 0-моментов. 0-моментом нулевого типа будем называть момент освобождения системы от вызовов, 0-момент первого типа – начало обслуживания произвольного вызова на I-ой фазе. 0-момент второго типа – начало обслуживания произвольного вызова на второй фазе.

Введем $p_k(i,j)$ – вероятность того, что в 0-момент k-ого типа ($k=0,1,2$) в системе очередь (i,j) (i – вызовов, ожидающих обслуживание на I-ой фазе; i – вызовов, ожидающих обслуживания перед 2-ой фазой), причем вызов, с которого начался соответствующий 0-момент, не учитывается. Рассмотрим $P_1(z_1,z_2)=\sum\limits_{i,j\geq 0}p_1(i,j)z_1^iz_2^j$, $P_2(z_2)=\sum\limits_{j\geq 0}p_2(0,j)z_2^j$. Это производящие функции. Для 0-момента нулевого типа $P_0(z_2)=\sum\limits_{i,j\geq 0}p_0(i,j)z_1^iz_2^j=p_0(0,0)$. Эти производящие функции можно интерпретировать как вероятность того, что в системе в соответствующие 0-моменты были разве лишь "красные" вызовы ($0\leq z_1\leq 1$, $0\leq z_2\leq 1$). Справедливо следующее соотношение:

$$P_2(z_2)=P_2(z_2)\beta_2(a)+A_2\beta_2(a)+\sum_{j\geq 0}p_1(0,j)z_2^i\beta_1(a)-p_2(0,0)\beta_2(a).$$

Событие 0-момент 2 типа в системе разве лишь "красные" вызовы (вероятность чего $P_2(z_2)$) складывается из следующих событий: в системе в предыдущий 0-момент второго типа были разве лишь "красные" вызовы и во время обслуживания на 2-ой фазе вызовы не поступали (вероятность чего есть $P_2(z_2)\beta_2(a)$); в предыдущий 0-момент второго типа обслуживался "синий" вызов, все остальные "красные", а вызовы основного потока во время обслуживания не поступали (вероятность чего есть $A_2\beta_2(a)$); предыдущий 0-момент был 0-моментом первого типа, очереди на I-ой фазе не было, а на второй фале в очереди все вызовы были "красные" и вызовы во время обслуживания на I-ой фазе не поступали (вероятность чего есть $\sum\limits_{j\geq 0}p_1(0,j)z_2^j\beta_1(a)$); исключается вероятность того, что в предыдущий 0-момент 2-ого типа был всего лишь один вызов, который начал обслуживаться, и вызовы основного потока не поступали.

$$A_2=\sum_{j\geq 1}p_2(0,j)z_2^{j-1}(1-z_2)=\sum_{j\geq 1}p_2(0,j)z_2^{j-1}-\sum_{j\geq 1}p_2(0,j)z_2^j=$$

$$=\frac{1}{z_2}P_2(z_2)-\frac{1}{z_2}p_2(0,0)-(P_2(z_2)-p_2(0,0))=$$
$$=(\frac{1}{z_2}-1)(P_2(z_2)-p_2(0,0)).$$

Отсюда:

$$P_2(z_2)=\frac{1}{z_2}(P_2(z_2)-p_2(0,0))\beta_2(a)+\beta_1(a)P_1(0,z_2),$$
$$P_2(z_2)(z_2-\beta_2(a))=z_2\beta_1(a)P_1(0,z_2)-\beta_2(a)p_2(0,0).$$

Это соотношение можно получить и другим способом. Очевидно, справедливо равенство:

$$p_2(0,j)=p_2(0,j+1)\beta_2(a)+p_1(0,j)\beta_1(a).$$

Умножим обе его части на z_2^j, просуммируем по j от $j=0$ до $j=\infty$. Получим то же самое соотношение для $P_2(z_2)$. Так как $P_2(1)=1$, $P_1(0,1)=1$, то $p_2(0,0)=\frac{\beta_1(a)+\beta_2(a)-1}{\beta_2(a)}$. Этим же способом можно получить некоторые соотношения для $P_1(z_1,z_2)$.

$$p_1(0,j)=p_1(1,j-1)\beta_1(a)+p_1(0,j-1)A_1+\ldots+p_2(0,j-1)(1-\beta_2(a)).$$

$$p_1(1,j)=p_1(2,j-1)\beta_1(a)+p_1(1,j-1)A_1+p_1(0,j-1)A_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$p_1(i,j)=p_1(i+1,j-1)\beta_1(a)+p_1(i,j-1)A_1+p_1(1,j-1)A_2+\ldots,$$
$$\ldots+p_1(1,j-1)A_i+p_1(0,j-1)A_{i+1},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

A_k – вероятность, что за время обслуживания на 1-ой фазе произвольного вызова поступило k вызовов основного потока. Умножим i-ую строку ($i=0,1,\ldots$) на $z_1^iz_2^j$:

$$z_2^jp_1(0,j)=\beta_1(a)p_1(1,j-1)z_2^j+p_1(0,j-1)A_1z_2^j+\ldots+p_2(0,j-1)z_2^j(1-\beta_2(a)),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$z_1^i z_2^j p_1(i,j) = \beta_1(a)p_1(i+1,j-1)z_1^i z_2^j + p_1(i,j-1)A_1 z_1^i z_2^j +$$
$$+p_1(1,j-1)A_2 + \ldots + p_1(1,j-1)A_i z_1^i z_2^j + p_1(0,j-1)A_{i+1} z_1^i z_2^j,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Просуммируем их от 0 по ∞ (по i).

$$\sum_{i\geq 0} p_1(i,j)z_1^i z_2^j = z_2\beta_1(a)\sum_{i\geq 0} p_1(i,j-1)z_1^{i-1}z_2^j +$$
$$+\sum_{i\geq 0} p_1(i,j-1)(A_1 z_2 + A_2 z_1 z_2 + A_3 z_1^2 z_2 + \ldots + A_k z_1^{k-1} z_2 + \ldots) +$$
$$+p_2(0,j-1)z_2^j(1-\beta_2(a)).$$

Обозначим

$$\sum = A_1 z_2 + A_2 z_1 z_2 + A_3 z_1^2 z_2 + \ldots + A_k z_1^{k-1} z_2 + \ldots,$$
$$S = z_1 \sum = A_1 z_1 z_2 + \ldots + A_k z_1^k z_2 + \ldots,$$
$$S = z_2 \sum_{k\geq 1} A_k z_1^k,$$
$$A_k z_1^k = \int_0^\infty \frac{(ax)^k}{k!} e^{-ax} z_1^k dB_1(x),$$
$$\sum_{k\geq 1} A_k z_1^k = \sum_{k\geq 1} \int_0^\infty \frac{(ax)^k}{k!} e^{-ax} z_1^k dB_1(x) =$$
$$= -\int_0^\infty e^{-ax} z_1^k dB_1(x) + \int_0^\infty e^{-ax} e^{exz_1} dB_1(x) = \beta_1(a - az_1) - \beta_1(a),$$
$$\therefore S = z_2[\beta_1(a-az_1) - \beta_1(a)],$$
$$\therefore \sum = \frac{z_2}{z_1}[\beta_1(a-az_1) - \beta_1(a)].$$

Просуммируем теперь наши равенства по j, $j = 1\ldots\infty$

$$\sum_{i\geq 0}\sum_{j\geq 0} p_1(i,j)z_1^i z_2^j = z_2\beta_1(a)\sum_{i\geq 0}\sum_{j\geq 0} p_1(i,j-1)z_1^{i-1}z_2^j +$$
$$+\sum_{i\geq 0}\sum_{j\geq 0} p_1(i,j-1)z_1^i z_2^{j-1}[\frac{z_2}{z_1}(\beta_1(a-az_1)-\beta_1(a))] + \sum_{j\geq 0} p_2(0,j-1)z_2^j(1-\beta_2(a)),$$
$$P_1(z_1,z_2) - p_1(0,0) = z_2\beta_1(a)\sum_{i\geq 0}\sum_{j\geq 0} p_1(i,j-1)z_1^{i-1}z_2^{j-1} +$$
$$+P_1(z_1,z_2)\frac{z_2}{z_1}(\beta_1(a-az_1) - \beta_1(a)) + z_2(1-\beta_2(a))P_2(z_2),$$
$$z_1P_1(z_1,z_2) = z_1p_1(0,0) - z_2\beta_1(a)[P_1(z_1,z_2) - P_1(0,z_2)] +$$
$$+z_2(\beta_1(a-az_1) - \beta_1(a))P_1(z_1,z_2) + z_1z_2(1-\beta_2(a))P_2(z_2)$$

(замечание: $p_1(k,0) = 0$ при $k \geq 1$).

Окончательно:

(1) $P_1(z_1,z_2)[z_1 - z_2\beta_1(a-az_1)] = z_1p_1(0,0) - z_2\beta_1(a)P_1(0,z_2) + z_1z_2(1-\beta_1(a))P_2(z_2)$,

(2) $P_2(z_2)(z_2 - \beta_2(a)) = z_2\beta_1(a)P_1(0,z_2) - p_2(0,0)\beta_2(a)$.

Очевидно,

$$p_0(0,0) = p_2(0,0)\beta_2(a) = \beta_1(a) + \beta_2(a) - 1,$$
$$p_1(0,0) = p_0(0,0)\cdot 1 = \beta_1(a) + \beta_2(a) - 1.$$

Обозначения: $p_2(0,0)\beta_2(a) = b$; $\beta_1(a) = b_1$; $\beta_2(a) = b_2$; $b_1\cdot b_2 = c$; $b_1\cdot b = c_1$; $b_2\cdot b = c_2$; $P_2(z_2) = \frac{z_2b_1}{z_2 = b_1}P_1(0,z_2) - \frac{b}{z_2-b_2}$.

Подставим b в первое уравнение:

$$P_1(z_1,z_2)[z_1 - z_2\beta_1(a-az_1)] = z_1b - z_2b_1P_1(0,z_2) +$$

$$+\frac{z_1 z_2^2 b_1(1-b)P_1(0,z_2)}{z_2-b_2} - \frac{z_1 z_2(1-b_2)b}{z_2-b_2},$$

$$P_1(z_1,z_2)(z_2-b_2)(z_1-z_2\beta_1(a-az_1)) = z_1 b(z_2-b_2)-$$

$$-z_2 b_1(z_2-b_2)P_1(0,z_2)+z_1 z_2^2(1-b_2)b_1 P_1(0,z_2)-z_1 z_2(1-b_2)b.$$

Обозначим:

$$F_1 = (z_2-b_2)(z_1-z_2\beta_2(a-az_1)) = z_1 z_2 - z_1 b_2 - z_2^2\beta_1(a-az_1)+z_2 b_2\beta_1(a-az_1),$$

$$F_2 = -z_2 b_1(z_2-b_2)+z_1 b_1 z_2^2(1-b_2) = -z_2^2 b_1 + z_2 b_1 b_2 + z_1 z_2^2 b_1 + z_1 z_2^2 b_1 b_2 =$$

$$= cz_2 - z_2^2 b_1 + z_1 z_2^2(b_1-c),$$

пусть $b_1 - c = d$;

$$F_3 = z_1 b(z_2-b_2) - z_1 z_2 b(1-b_2) = z_1 z_2 b - z_1 b b_2 - z_1 z_2 b + z_1 z_2 b b_2 = -z_1 c + z_1 z_2 c_2.$$

Получаем:

$$P_1(z_1,z_2)F_1(z_1,z_2) = P_1(0,z_2)F_2(z_1,z_2)+F_3(z_1,z_2)$$

Пусть:

$$F_1 = F_4 + F_5 + F_6,$$

где

$$F_4 = z_1 z_2 - z_1 b_2,$$

$$F_5 = z_2 b_2 \beta_1(a-az_1) = z_2 b_2 \sum_{k\geq 0} A_k z_1^k,$$

$$F_6 = -z_2^2\beta_1(a-az_1) = -z_2^2 \sum_{k\geq 0} A_k z_1^k.$$

У функций, входящих в уравнение, коэффициенты разложения по старшим степеням $z_1 z_2$ удобно расположить в виде бесконечных таблиц:

F_2	0	1	2	...	z_1^k
0					
1	c				
2	$-b_1$	d			
...					
z_2^j					

F_3	0	1	2	...	z_1^k
0		$-c_2$			
1		c_2			
2					
...					
z_2^j					

$P_1(0,z_2)$	0	1	2	...	z_1^k
0	$p_{0,0}$				
1	$p_{0,1}$				
2	$p_{0,2}$				
...					
z_2^j	$p_{0,j}$				

F_4	0	1	2	...	z_1^k
0		$-b_2$			
1		1			
2					
...					
z_2^j					

F_5	0	1	2	...	z_1^k
0					
1					
2	$A_0 b_2$	$A_1 b_2$	$A_2 b_2$		$A_k b_2$
...					
z_2^j					

F_6	0	1	...	z_1^k
0				
1				
2	$-A_0$	$-A_1$		$-A_k$
...				
z_2^j				

В таблицах $p_{i,j} = p_1(i,j)$ (индекс “1” опускается для простоты записи). Таблицы, соответствующие произведению функций, имеют следующий вид:

	0	1	...	z_1^k
0		$-c_2$		0
1	cp_{00}	c_2		0
2	$cp_{0,1} - b_1 p_{0,0}$	$-dp_{0,0}$		0
...				
z_2^j	$cp_{0,j-1} - b_1 p_{0,j-2}$	$dp_{0,j-2}$		0

$$P_1(0,z_2)\times F_2 + F_3.$$

Общий член при $z_1^k z_2^j$ в таблице, соответствующей $P_1(z_1,z_2)\times F_5 - \sum\limits_{i=0}^{k} A_{k-i} b_2 p_{i,j-1}$; $P_1(z_1,z_2)\times F_6(k,j) = \sum\limits_{i=0}^{k} -A_{k-j} p_{i,j-2}$; $j \geq 2$; $P_1(z_1,z_2)\times F_4(k,j) = p_{k-1,j-1} - b_2 p_{k-1,j}$.

А так как функции $P_1(z_1,z_2)\times F_1$ и $P_1(z_1,z_2)\times F_3$ равны и разложение их по степеням z_1,z_2 единственно, то коэффициенты при соответствующих степенях z_1,z_2 равны, и соответствующие таблицы совпадают тождественно. Получаем для искомых вероятностей следующие соотношения:

(1) $k\geq 2; j\geq 2; P_1(z_1,z_2)\times F_1(k,j)=p_{k-1,j-1}-b_2p_{k-1,j}+\sum\limits_{i=1}^{k}A_{k-j}(b_2p_{i,j-1}-p_{i,j-2})=0,$

$$(2)\, j=0,\ k\geq 2;\ -b_2p_{k-1,0}=0,$$

$$(3)\, j=1,\ k\geq 2;\ p_{k-1,0}-b_2p_{k-1,1}+\sum_{j=0}^{k}A_{k-i}b_2p_{i,0}=0,$$

$$\therefore\ -b_2p_{k-1,1}+A_kb_2p_{0,0}=0,$$

$$\therefore\ p_{k-1,1}=A_kp_{0,0}=A_kb,$$

$$(4)\, k=0,\ j\geq 2;\ b_2A_0p_{0,j-1}-A_0p_{o,j-2}=cp_{0,j-1}-b_1p_{0,j-2},$$

$$(5)\, k=1,\ j\geq 2;\ p_{0,j-1}-b_2p_{0,j}+A_1(b_2p_{0,j-1}-p_{0,j-2})+A_0(b_2p_{1,j-1}-p_{1,j-2})=$$

$$=-dp_{0,j-2},$$

$$(6)\, k=0,\ j=0;\ 0=0,$$

$$(7)\, k=0,\ j=1;\ A_0b_2p_{0,0}=cp_{0,0}$$

– тождество, так как $A_0=b_1$, $c=b_1b_2$

$$(8)\, k=1,\ j=0;\ p_{0,0}-b_2p_{0,1}+A_1b_2p_{0,0}+A_0b_2p_{1,0}=c_2,$$

$$b-b_2p_{0,1}+A_1b_2p_{0,0}=c_2,$$

$$b_2p_{0,1}=b+A_1b_2b-bb_2,$$

$$p_{0,1}=\frac{b}{b_2}(1+A_1b_2-b_2).$$

Рассмотрим уравнение (5). Оно приводится к виду:

$$p_{0,j-1}(1+A_1b_2)+p_{0,j-2}(-A_1+d)-b_2p_{0,j}+p_{1,j-1}A_0b_2-A_0p_{1,j-2}=0,$$

$$p_{0,j-1}d_1+p_{0,j-2}d_2-b_2p_{0,j}+p_{1,j-1}A_0b_2-A_0p_{1,j-2}=0$$

при $j=2$:

$$p_{0,1}d_1+p_{0,0}d_2-b_2p_{0,2}+A_0b_2p_{1,1}=0,$$

$$p_{0,2}=\frac{1}{b_2}(p_{0,1}d_1+bd_2+A_0b_2A_2b).$$

В таблице коэффициентов функции $P_1(z_1,z_2)$ будут заполнены строки, соответствующие значениям $j=0$, $j=1$.

$P_1(z_1,z_2)$	0	1	2	...	z_1^k
0	b	0	0		0
1	$p_{0,1}$	A_0b	A_1b		$A_{k-1}b$
2					
...					
z_2^j					

(1)-ое уравнение:

$$p_{k-1,j-1}(1+A_1b_2)-b_2p_{k-1,j}+\sum_{i=0}^{k-2}A_{k-i}(b_2p_{i,j-1}-p_{i,j-2})-$$

$$-A_1p_{k-1,j-2}+A_0(b_2p_{k,j-1}-p_{k,j-2})=0,\ k\geq 2,\ j\geq 2.$$

$$c_{k-1,j}=\sum_{i=o}^{k-2}A_{k-i}(b_2p_{i,j-1}-p_{i,j-2}).$$

Пусть в таблице заполнена $(j-1)$ строка. Опишем процедуру вычисления элементов, расположенных в j-ой строке. Из уравнения (5) можно получить элемент с индексом $(0,j)$. (Это можно видеть на примере элемента с индексом $(0,2)$ при рассмотрении фигуры "Д", выделенной на рисунке). Элемент j-той строки с индексом $(k-1,j)$ вычисляется из соотношения (1), использующего элементы с индексами $(k-1,j-1)$; $(k-1,j-2)$; $(k,j-1)$; $(k,j-2)$; а также элементы, входящие в $c_{k-1,j}$ (мы снова используем фигуру типа "Д", дополненную "хвостом", состоящим из элементов строк с номерами $(j-1)$, $(j-2)$ и расположенных левее фигуры "Д").

Аналогично можно найти коэффициенты в разложении по степеням функции $P_2(z_2)$.

$$P_2(z_2)(z_2 - b_2) = z_2 b_1 P_1(0, z_2) - b.$$

Обозначим $p_2(o, j) = p_j$; для $p_1(0, j)$ было раньше $p_1(0, j) = p_{o,j}$. Тогда можно выписать таблицы, соответствующие левой и правой частям уравнения.

	$P_2(z_2)$	$z_2 - b_2$	$z_2 b_1 P_1(0, z_2) - b$	$P_2(z_2)(z_2 - b_2)$
0	p_0	$-b_2$	$-b$	$-b_2 p_0$
1	p_1	1	$b_1 p_{0,0}$	$-b_2 p_1 + p_0$
2	p_2		$b_2 p_{0,1}$	$-b_2 p_2 + p_1$
$\ldots$				
z_2^j	p_j		$b_1 p_{0,j-1}$	$-b_2 p_j + p_{j-1}$

$$-b_2 p_0 = -b \Longrightarrow p_0 = \frac{b}{b_2},$$
$$-b_2 p_j = p_{j-1} - b_1 p_{0,j-1},$$
$$j = 1;\ b_2 p_1 = p_0 - b_1 p_{0,0},$$
$$p_1 = \frac{b}{b_2} - \frac{b_1}{b_2} p_{0,0},$$
$$j = 2;\ b_2 p_2 = p_1 - b_1 p_{0,1} = \frac{b}{b_2^2} - \frac{b_1}{b_2} p_{0,0} - b_1 p_{0,1},$$
$$p_2 = \frac{b}{b_2^3} - \frac{b_1}{b_2^2} p_{0,0} - \frac{b_1}{b_2} p_{0,1},$$
$$\therefore\ p_j = \frac{b}{b_2^{j+1}} - \frac{b_1}{b_2^j} p_{0,0} - \ldots - \frac{b_1}{b_2} p_{0,j-1} = \frac{b}{b_2^{j+1}} - \sum_{i=0}^{j-1} \frac{b_1}{b_2^{j-i}} p_{0,i}.$$

Таким образом, можно найти алгоритмически распределение 0-моментов. Зная эти распределения, можно вычислить интересующие нас характеристики рассматриваемой системы массового обслуживания.

Библиографический список

1. *Климов, Г.П.* Стохастические системы обслуживания [Текст] / Г.П. Климов. – М.: Наука, 1966.
2. *Риордан, Дж.* Вероятностные системы обслуживания [Текст] / Дж. Риордан. – М.: Связь, 1966.
3. *Клейнрок, Л.* Теория массового обслуживания [Текст] / Л. Клейнрок. – М., 1979.
4. *Бочаров, П.П.* Теория массового обслуживания [Текст] / П.П. Бочаров, А.В. Печинкин. – М., 1995.

Векторные поля второй степени негрубости на двумерной сфере

В.Ш. Ройтенберг

Будем пользоваться терминологией книг [1, 2], а также введем ряд дополнительных понятий и обозначений. Пусть $\mathrm{X}^r = \mathrm{X}^r(M)$ – пространство векторных полей класса C^r с C^r-топологией ($r \geq 1$), заданных на двумерном замкнутом ориентируемом многообразии M.

Сложным фокусом кратности k называется особая точка z_0 векторного поля $X_0 \in \mathrm{X}^r$, ($r \geq 2k+1$) с мнимыми корнями $\pm\omega i$ характеристического уравнения, функция последования для которой имеет вид $f(\rho) = \rho + l_k \rho^{2k+1} + o(\rho^{2k+1})$, $l_k \neq 0$. Пусть z_0 – особая точка векторного поля $X_0 \in \mathrm{X}^r (r \geq 3)$, характеристическое уравнение которой имеет один нулевой и один ненулевой ($= \lambda$) корни. Если ограничение векторного поля на локальное центральное многообразие $W^c(z_0)$ имеет для некоторой координаты x вид $(ax^k + o(x^k))\partial/\partial x$, $a \neq 0$, то при $k = 2$ будем называть особую точку *седло-узлом*, при $k = 3$, $\lambda a > 0$ ($\lambda a < 0$) *слабым узлом* (*слабым седлом*). Пусть векторное поле $X_0 \in \mathrm{X}^r (r \geq 3)$ имеет в особой точке z_0 ненулевую линейную часть и два нулевых корня характеристического уравнения. Тогда в некоторых локальных координатах (x, y) в окрестности особой точки векторное поле имеет вид $y\,\partial/\partial x + (ax^2 + bxy + cy^2 + o(x^2 + y^2))\,\partial/\partial y$. Если $ab \neq 0$, то особую точку z_0 будем называть *клювом.* Она имеет ровно два сектора, оба гиперболические.

Входящими (выходящими) сепаратрисами особой точки z_0 векторного поля $X_0 \in \mathrm{X}^r$ будем называть граничные траектории ее гиперболических секторов, $\omega(\alpha)$-предельные z_0.

Двойной сепаратрисой называется траектория, являющаяся и входящей и выходящей сепаратрисой каких-либо особых точек. Будем говорить, что она *соединяет* эти точки. Пусть L – двойная сепаратриса, идущая из седла z_0 в него же, вложение $\eta : (-1, 1) \to M$ трансверсально траекториям векторного поля, $\eta(0) \in L$ и при достаточно малом $\delta > 0$ определена функция последования $\eta(u) \to \eta(f(u))$, $u \in (0, \delta)$. Если седловая величина седла z_0 равна нулю, то существует конечный положительный предел $f'(+0)$. Он не зависит от выбора трансверсали η. Число $l = f'(+0) - 1$ называется *сепаратрисной величиной* сепаратрисы.

Пусть Γ_0 – двойной цикл векторного поля X_0, которому ω-предельны сепаратрисы L_i^- $(i = 1, ..., m)$ и $\alpha-$предельны сепаратрисы L_j^+ $(j = 1, ..., n)$, причем $m \geq 2$, $n \geq 2$. Мы можем выбрать трансверсаль к Γ_0 так, чтобы функция последования на ней $\varphi \in C^r$ и имела вид $\varphi(u) = u + u^2 + o(u^2)$. Пусть сепаратрисы L_i^- (L_j^+) пронумерованы так, что они пересекают трансверсаль в точках с координатами u_i (v_j), где $u_1 < u_2 < ... < u_m < u_{m+1} = \varphi(u_1)$, $v_1 < v_2 < ... < v_n < v_{n+1} = \varphi(v_1)$. Согласно [9] однозначно определен $C^{r-3}-$поток φ^t на R такой, что для точек u из некоторой окрестности нуля $\varphi^1(u) = \varphi(u)$ (в работе [10], где это утверждение доказано впервые, $\varphi^r \in C^{r-5}$). Определим числа t_k и τ_k условиями:

$\varphi^{t_k}(u_1) = u_k$ при $k = 1, ..., m;$ $\forall k \ t_{k+m} = t_k$, $\varphi^{\tau_k}(v_1) = v_k$ при $k = 1, ..., n;$ $\forall k \ \tau_{k+n} = \tau_k$.

Разности $t_{ij} = t_i - t_j$ и $\tau_{ij} = \tau_i - \tau_j$ являются инвариантами векторного поля -они не зависят от выбора трансверсали и точек пересечения с ней сепаратрис.

Особыми траекториями векторного поля $X_0 \in \mathrm{X}^r$ назовем либо негиперболические особые точки и замкнутые траектории, либо двойные сепаратрисы.

Векторное поле $X_0 \in \Lambda \subset \mathrm{X}^r$ называется *грубым относительно* Λ, если существует такая окрестность $U(X_0)$ поля X_0 в X^r, что для любого векторного поля$X \in U(X_0) \cap \Lambda$ найдется гомеоморфизм $h_X : M \to M$, переводящий траектории X в траектории X_0, такой, что $h_{X_0} = id$, а отображение $X \mapsto h_X \in C(M, M)$ непрерывно в точке X_0. Векторное поле $X_0 \in \mathrm{X}^r$ называется *грубым,* если оно грубо относительно X^r. Множество всех грубых векторных полей из X^r обозначим Σ_0^r. По индукции определяются множества $\tilde{\Sigma}_k^r$ векторных полей *k-ой степени негрубости* $(k \in N)$: $X_0 \in \tilde{\Sigma}_k^r$, если X_0 грубо относительно $\mathrm{X}^r \backslash (\Sigma_0^r \cup \tilde{\Sigma}_1^r \cup ... \cup \tilde{\Sigma}_{k-1}^r)$.

Грубые векторные поля на сфере описаны А.А. Андроновым и Л.С. Понтрягиным [3], а на произвольных замкнутых двумерных многообразиях М.М. Пейксото [4]. Векторное поле $X_0 \in \Sigma_0^r$ $(r \geq 1)$, если и только если его неблуждающее множество состоит из конечного числа гиперболических особых точек и замкнутых траекторий и у поля нет двойных сепаратрис.

Описание множества $\tilde{\Sigma}_1^r$ $(r \geq 3)$ векторных полей первой степени негрубости на сфере получено А.А. Андроновым и Е.А. Леонтович [5], а на произвольных ориентируемых двумерных замкнутых многообразиях С.Х. Аронсоном [6]. Дж. Сотомайор [7] доказал, что $\tilde{\Sigma}_1^r$ – вложенное C^{r-1} – подмногообразие X^r коразмерности один. Векторное поле $X_0 \in \tilde{\Sigma}_1^r$ тогда и только тогда, когда 1) его неблуждающее множество состоит из конечного числа траекторий; 2) имеет единственную особую траекторию – особую точку, являющуюся либо сложным фокусом кратности 1, либо седло-узлом или замкнутую траекторию – двойной цикл или двойную сепаратрису двух (возможно совпадающих) седел; 3) если двойная сепаратриса идет из седла в то же седло, образуя петлю, то седловая величина $\sigma \neq 0$; 4) сепаратриса седла не может быть предельна к петле сепаратрисы седла или к двойному циклу, к которому с другой стороны также предельна сепаратриса седла; 5) не существует траектории, ω- и α-предельной к двойному циклу.

Для многообразия рода $g \geq 1$ неизвестно является ли Σ_0^r плотным в X^r при $r \geq 2$, а множество $\tilde{\Sigma}_1^r$ не плотно в $\mathrm{X}^r \backslash \Sigma_0^r$ при любом $r \geq 3$ [8]. Этот факт обесценивает идею классификации векторных полей по степеням негрубости для произвольных двумерных многообразий. Однако для сферы S^2 множество Σ_0^r открыто и всюду плотно в X^r, а $\tilde{\Sigma}_1^r$ открыто и всюду плотно в $\mathrm{X}^r \backslash \Sigma_0^r$, и описание множества $\tilde{\Sigma}_2^r$ векторных полей второй степени негрубости имеет смысл.

Теорема 1. *Векторное поле $X_0 \in \mathrm{X}^r(S^2)(r \geq 7)$ имеет вторую степень негрубости тогда и только тогда, когда имеет место один из следующих двух случаев.*

1. Векторное поле имеет ровно две особые траектории, являющиеся или сложным фокусом кратности 1 или седло-узлом или двойным циклом или двойной сепаратрисой. При этом выполняются следующие условия.

Если двойная сепаратриса идет из седла в то же седло, образуя петлю, то седловая величина $\sigma \neq 0$ и не существует сепаратрисы предельной к петле.

Если двойная сепаратриса идет из седло-узла в него же, образуя петлю, то седловая величина и не существует сепаратрисы предельной к петле.

Если седло z_0 имеет сепаратрисы L_1иL_2, соответственно, α- и ω-предельные к седло-узлу z_1, то у седла z_0 седловая величина $\sigma \neq 0$, а связная компонента множества $S^2 \backslash (\bar{L}_1 \cup \bar{L}_2)$, не содержащая сепаратрис седла z_0, не содержит сепаратрис седел, предельных к седло-узлу.

Если векторное поле имеет две петли сепаратрисы, то не существует траектории, ω-предельной к одной из них и α-предельной к другой.

Если есть сепаратриса, $\alpha(\omega)$- предельная к двойному циклу, то нет сепаратрисы, $\omega(\alpha)$-предельной к нему.

Если две двойные сепаратрисы соединяют седла z_i, $i = 1, 2$ (не обязательно разные) с собственными значениями $\lambda_{i1}, \lambda_{i2}$, образуя контур Γ, то Γ является предельным множеством для траекторий, но не существует сепаратрис, предельных к Γ; седловые величины седел $\sigma_i = \lambda_{i1} + \lambda_{i2} \neq 0$, а величина $\lambda_{11}\lambda_{22} - \lambda_{12}\lambda_{21} \neq 0$.

Если есть сепаратриса, α-предельная к двойному циклу Γ_1 и сепаратриса, ω-предельная к другому двойному циклу Γ_2, то нет траектории, ω-предельной к Γ_1иα-предельной кΓ_2.

Если есть сепаратриса, $\alpha(\omega)$-предельная к двойному циклу, то нет траектории, $\omega(\alpha)$-предельной к двойному циклу и $\alpha(\omega)$-предельной к петле сепаратрисы седла.

2. Векторное поле имеет только одну из следующих особых траекторий: (2.1) сложный фокус кратности 2; (2.2) слабое седло; (2.3) слабый узел; (2.4) клюв; (2.5) двойной цикл; (2.6) тройной цикл; (2.7) сепаратрису седла с ненулевой седловой величиной, образующую петлю; (2.8) сепаратрису седла с нулевой седловой величиной, образующую петлю. При этом выполняются следующие условия.

В случае 2.2 все сепаратрисы, предельные к слабому узлу, касаются центрального многообразия.

В случае 2.5 к двойному циклу ω-предельны сепаратрисы L_i^- $(i = 1, ..., m)$иα-предельны сепаратрисы L_j^+ $(j = 1, ..., n)$. Если при этом $m \geq 2,\ n \geq 2$, то $t_{ij} \neq \tau_{kl}$ для $t_{ij}, \tau_{kl} \in (0, 1)$.

В случае 2.7 существует сепаратриса, предельная к петле.

В случае 2.8 сепаратрисная величина $l \neq 0$ и нет сепаратрис, предельных к петле.

Теорема 2. *1. Множество $\tilde{\Sigma}_2^r$ $(r \geq 7)$ векторных полей второй степени негрубости на сфере S^2открыто и всюду плотно в $\mathrm{X}^r \backslash (\Sigma_0^r \cup \tilde{\Sigma}_1^r)$.*

2. Множество $\tilde{\Sigma}_2^r$ является объединением вложенных C^1-подмногообразий X^r коразмерности один и два. А именно, для любого векторного поля $X_0 \in \tilde{\Sigma}_2^r$ существует его окрестность UвX^r, окрестность нуля EвR^2, окрестность нуля D в некотором линейном подпространстве X^r коразмерности k, где $k = 1$ в случаях 2.5 и 2.7 и $k = 2$ в остальных случаях, и такой C^1-диффеоморфизм $g : D \times E \to U$, что $g(0,0) = X_0, \tilde{\Sigma}_2^r \cap U = g(D \times \{0\})$.

3. Существует локальный гомеоморфизм $D \times E$ в точке $(0,0)$ вида $(y, \varepsilon) \mapsto (y, h(y, \varepsilon))$ такой, что для любого (y, ε) из некоторой окрестности точки $(0,0)$ векторное поле $g(y, h(y, \varepsilon))$ топологически эквивалентно векторному полю $g(0, \varepsilon)$.

Из пункта 3 теоремы 2 следует, что описание бифуркаций в окрестности векторного поля $X_0 \in \tilde{\Sigma}_2^r$ сводится к описанию бифуркаций в k-параметрическом ($k = 1$ или $k = 2$) семействе векторных полей $X_\varepsilon = g(0, \varepsilon)$, трансверсальном $\tilde{\Sigma}_2^r$ при $\varepsilon = 0$. Такие бифуркации изучены в работах [11-19].

Библиографический список

1. *Андронов, А.А.* Теория бифуркаций динамических систем на плоскости [Текст] / А.А. Андронов, Е.А. Леонтович, И.И. Гордон, А.Г. Майер. – М.: Наука, 1967.
2. *Арнольд, В.И.* Теория бифуркаций [Текст] / В.И. Арнольд, В.С. Афраймович, Ю.С. Ильяшенко, Л.П. Шильников // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. – М.: ВИНИТИ АН СССР. – 1986. – Т. 5. – С. 1-218.
3. *Андронов, А.А.* Грубые системы [Текст] / А.А. Андронов, Л.С. Понтрягин // ДАН СССР. – 1937. – Т. 14. – С. 247-250.
4. *Peixoto, M.M.* Structural stability on 2-dimensional manifolds / M.M. Peixoto // Topology. – 1962. – V. 1. – P. 101-120.
5. *Андронов, А.А.* К теории изменения качественной структуры разбиения плоскости на траектории [Текст] / А.А. Андронов, Е.А. Леонтович // ДАН СССР. – 1938. – Т. 21. – С. 427-430.
6. *Арансон, С.Х.* Об отсутствии устойчивых по Пуассону траекторий и траекторий, двоякоасимптотических к двойному циклу, у динамических систем первой степени негрубости на ориентируемых двумерных многообразиях [Текст] / С.Х. Арансон // Математический сборник. – 1968. – Т. 76. – С. 214-230.
7. *Sotomayor, J.* Generic one-parameter families of vector fields on two-dimensional manifolds / J. Sotomayor // Publ. Math. IHES.-1974. – V. 43. – P. 5-46.
8. *Арансон, С.Х.* О топологической структуре потоков Черри на торе [Текст] / С.Х. Арансон // Функциональный анализ и его приложения. – 1986. – Т. 20. – № 1. – С. 214-230.
9. *Бородин, А.В.* О вложении диффеоморфизма класса C^3 в векторное поле [Текст] / А.В. Бородин // Математика и математическое образование. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. – Ярославль, 2001. – Вып. 2. – С. 14-37.
10. *Newhaus, S.* F. Bifurcations and stability of families of diffeomorfisms / S. Newhaus, J. Palis, F. Takens // Publ. Math. IHES. – 1983. – V. 57. – P. 5-71.
11. *Takens, F.* Unfolding of certain singularities of vector fields: generalized Hopf bifurcations / F. Takens // J. of Differential Equations. – 1973. – V. 14. – P. 476-493.
12. *Malta, I.R., Palis, J.* Families of vector fields with finite modulus of stability / I.R. Malta, J. Palis // Lect. Notes Math. – 1981. – V. 898. – P. 212-226.
13. *Ноздрачева, В.П.* Двухпараметрические бифуркации особого цикла [Текст] / В.П. Ноздрачева; Пензенский политехн. ин-т. – Пенза. – 1981. – 24 с. – Деп. в ВИНИТИ, № 1389-81.
14. *Ноздрачева, В.П.* Бифуркации особого цикла с двумя сепаратрисами [Текст] / В.П. Ноздрачева // Интегральные и дифференциальные уравнения и приближенные решения: Сб. науч. тр. – Элиста, 1985. – С. 107-124.
15. *Ноздрачева, В.П.* Бифуркации негрубой петли сепаратрисы [Текст] / В.П. Ноздрачева // Дифференциальные уравнения. – 1982. – Т. 18. – № 9. – С. 1551-1558.
16. *Ройтенберг, В.Ш.* О бифуркациях контура из сепаратрис седла и седло-узла [Текст] / В.Ш. Ройтенберг; Ярославский политехн. ин-т. – Ярославль. – 1988. – 39 с. – Деп. в ВИНИТИ, № 2555-88.

17. *Ройтенберг, В.Ш.* О разбиении пространства векторных полей в окрестности негрубого векторного поля коразмерности два [Текст] / В.Ш. Ройтенберг // Математика и математическое образование. Теория и практика: Межвуз. сб. науч. тр. – Ярославль, 2001. – Вып. 2. – С. 40-44.
18. *Богданов, Р.И.* Версальная деформация особой точки векторного поля на плоскости в случае нулевых собственных чисел [Текст] / Р.И. Богданов // Труды семинара им. И.Г. Петровского. – 1976. – Вып. 2. – С. 37-65.
19. *Лукьянов, В.И.* О бифуркациях динамических систем с петлей сепаратрисы седло-узла [Текст] / В.И. Лукьянов // Дифференциальные уравнения. – 1982. – Т. 18. – № 9. – С. 1493-1506.

Применение аппарата математической статистики при оценке надежности механических узлов на примере двигателей внутреннего сгорания

В.Ф. Безъязычный, В.М. Федулов

Введение. Задачи обеспечения надежности сложных технических систем, такие как: выбор оптимальной конструкции, планирование объемов испытаний на этапах экспериментальной отработки опытных образцов и серийного производства, моделирование процесса экспериментальной отработки, назначение рационального срока технического обслуживания в процессе эксплуатации, определение оптимального числа запасных частей и другие проблемы тесно связаны с теорией вероятности и математической статистикой. Эта взаимосвязь обусловлена необходимостью правильно анализировать полученные при исследованиях данные о надежности технических систем на всех этапах их жизненного цикла и сделать объективные выводы на базе научных методов.

1.1. Показатели надежности элементов систем. Надежность определяют как вероятность безотказной работы [1, с. 161]:

$$P = e^{-\lambda \cdot t}, \tag{1}$$

где t – время работы, $\lambda = 1/t_0$ – интенсивность отказов, t_0 – средняя продолжительность безотказной работы (средний промежуток времени между двумя отказами).

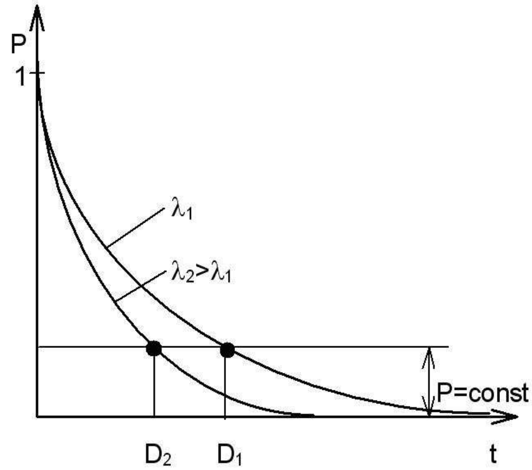


Рис. 1. Кривые надежности

Из рис. 1 видно, что чем выше интенсивность отказов, тем меньше долговечность при заданном уровне надежности ($D_2 < D_1$). Надежность сложных систем, состоящих из множества элементов (узлов), к которым, например, относятся автотранспортные средства, определяется по интегральной величине износа. Так, например, средний интегральный износ равен [1, с. 326]:

$$\Delta h_{1,2} = (j_1 + j_2) \cdot t, \tag{2}$$

где $j_{1,2}$ – скорости изнашивания соответственно первого и второго элементов пары трения.

Соотношение (2) справедливо для изнашивания с постоянной скоростью контактируемых деталей. В период приработки скорость изнашивания меняется с течением времени и после приработки стабилизируется [2].

В качестве критерия долговечности используется ресурс – время, в течение которого достигается предельное состояние узла, либо машины в целом с заданной вероятностью W=γ (гамма-процентный ресурс). В технике, в частности, для автомобилей принимают γ=0,9 (90%). Поскольку испытания являются важнейшим инструментом в руках конструктора, статистические методы имеют важнейшее значение для обеспечения корректности и достоверности оценки параметров надежности узлов трения.

1.2. Элементы математической статистики, используемые в теории надежности. Надежность узлов трения определяется как сумма надежности ее составляющих P_Σ:

$$P_\Sigma = \sum_{1}^{n} p_i, \tag{3}$$

где p_i – надежность i-того узла, n – число узлов.

Чем сложнее система, тем ниже ее надежность. Основным путем повышения надежности узлов трения является повышение износостойкости. Ограничением является стоимость мероприятий по повышению износостойкости.

Вероятность безотказной работы узла трения (и любого другого механизма) означает, что в пределах заданного промежутка времени эксплуатации отказ невозможен. Он наступает в результате достижения предельного износа и проявляется, например, в поломке зубьев шестерен; заклинивании деталей газораспределительного механизма; проскакивании цепи в цепной передаче в результате износа втулок, роликов и зубьев звездочек; заклинивании подшипников качения и скольжения и т.д. Обычно для каждого механизма из сведений по эксплуатации известна предельно допустимая величина линейного износа $\Delta h_{\text{пр}}$. Например, для пары вал-втулка подшипника скольжения:

$$\Delta h_{\text{пр}} = h - h_0, \tag{4}$$

где h_0, h – соответственно значения начального и текущего зазоров в сопряжении.

Однако за расчетную предельную величину износа принимают:

$$\Delta h_{\text{пр}^*} = h_{\text{пр}}/n, \tag{5}$$

где n – коэффициент запаса.

Условие безотказной работы:

$$Y = \Delta h_{\text{пр}^*} - \Delta h > 0, \tag{6}$$

где Δh – текущее значение износа.

Входящие в это неравенство величины являются случайными. Обычно считают, что все они распределены по нормальному закону:

$$f = \frac{dN}{Ndx} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\cdot\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}. \tag{7}$$

Здесь под x понимают величину износа, равную $\Delta h - \Delta\overline{h}$, где $\Delta\overline{h}$ – среднее арифметическое значение Δh_0. Для достаточно большого числа испытаний (N>50).

$$\Delta\overline{h} \cong \frac{\sum\limits_{1}^{N} \Delta h_i}{N}. \tag{8}$$

Среднее квадратичное отклонение составит:

$$\Delta h \cong \sqrt{\frac{\sum\limits_{1}^{N} (\Delta h_i - \Delta\overline{h})^2}{N(N-1)}}. \tag{9}$$

Для системы случайных величин:

$$\sigma_Y = \sqrt{\sigma^2_{\Delta h_{\text{пр}*}} + \sigma^2_{\Delta h}}. \tag{10}$$

На рис. 2 представлен вид кривых нормального распределения.

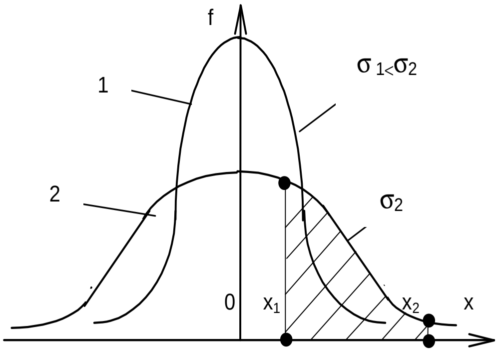


Рис. 2. Кривые нормального распределения

Площадь, ограниченная кривой и осью абсцисс, равна 1:

$$\int\limits_{+\infty}^{-\infty} f dx = 1. \tag{11}$$

Чем больше среднее квадратичное отклонение, тем более полого идет кривая. Заштрихованная площадь равна вероятности того, что $x_1 \leq x \leq x_2$. Для нормального закона, если $-\sigma \leq x \leq \sigma$, $-2\sigma \leq x \leq 2\sigma$, $-3\sigma \leq x \leq 3\sigma$, вероятности соответственно составляют 0,68; 0,95; 0,99.

Таким образом, вероятность реализации соотношения (11), т.е. вероятность безотказной работы составляет:

$$W = 1 - \int\limits_{\Delta h_{\text{пр}^*} - \Delta \bar{h}}^{\infty} f dx = 1 - \Phi\left(-\frac{\Delta h_{\text{пр}^*} - \Delta \bar{h}}{\sigma_Y}\right). \tag{12}$$

2. Расчет вероятности безотказной работы механических узлов по заданным критериям. Работоспособность механических узлов и металлоконструкций характеризуется рядом критериев, в качестве которых могут быть: прочность, износостойкость, усталость, точность и т.п. Расчет надежности основывается на сравнении заданных критериев расчетных параметров с их предельными значениями, которые выбираются по нормативным или справочным данным.

Работоспособность детали или узла считается обеспеченной по заданному критерию, если расчетный параметр yменьше его предельного значения $y_{\text{пр}}$, то есть $y \leq y_{\text{пр}}$. Таким образом, для обеспечения работоспособности задаются коэффициентом безопасности [4]:

$$n = \frac{y_{\text{пр}}}{y}. \tag{13}$$

Расчетные параметры рассматриваются как детерминированные величины, хотя в действительности они имеют рассеяние. Поэтому расчет производится по наиболее неблагоприятным значениям параметров, при этом истинное значение коэффициента безопасности остается неизвестным.

С переходом на вероятностные методы расчета параметры yи$y_{\text{пр}}$ рассматриваются как случайные величины и тогда вероятность безотказной работы определяется по квантилю нормального закона распределения от заданного критерия:

$$u_p = \frac{\bar{y}_{\text{пр}} - \bar{y}}{\sqrt{\sigma_{\text{пр}}^2 + \sigma_y^2}}, \tag{14}$$

где $\bar{y}_{\text{пр}}$ и $\bar{y}$ – средние значения величин y и $y_{\text{пр}}$, $\sigma_{\text{пр}}$ и σ_y – средние квадратические отклонения этих величин.

Соотношение (14) можно выразить через коэффициенты безопасности и вариации, тогда:

$$u_p = \frac{n-1}{\sqrt{(n \cdot \nu_{y_{\text{пр}}})^2 + \nu_y^2}}, \tag{15}$$

где $n = \frac{\bar{y}_{\text{пр}}}{\bar{y}}$, $\nu_{y_{\text{пр}}} = \frac{\sigma_{y_{\text{пр}}}}{\bar{y}_{\text{пр}}}$, $\nu_y = \frac{\sigma_y}{y}$.

2.1. Расчет вероятности безотказной работы шатуна по критерию теплостойкости. Оценим вероятность безотказной работы шатуна по критерию теплостойкости при внесении конструкторских изменений, а именно, при смене материала детали. Сравнение будем осуществлять для сталей 40ХН2МА и 30ХН2МА по следующим расчетным зависимостям [4]:

$$u_p = \frac{n-1}{\nu}; \tag{16}$$

$$n = \frac{t_{\text{пр}}}{t + t_0}; \tag{17}$$

$$\nu = \frac{\sigma}{t}, \tag{18}$$

где n – коэффициент запаса теплостойкости, $t_{\text{пр}}$ – предельно допускаемая температура конструкции, t – средняя температура конструкции, t_0 – температура окружающей среды; ν – коэффициент вариации температуры, σ – среднее квадратическое отклонение избыточной температуры.

Согласно справочным данным [5] по материалу детали и температурным показателям параметров работы рассматриваемого двигателя внутреннего сгорания имеем следующие исходные данные:

Предельно допускаемая рабочая температура стали 40ХН2МА: $t_{\text{пр}} = 550^\circ$С;

Предельно допускаемая рабочая температура стали 30ХН2МА: $t_{\text{пр}} = 705^\circ$С;

Средняя температура конструкции: $t = 120^\circ$С;

Температура окружающей среды: $t_0 = 40^\circ$С;

Коэффициент вариации температуры: $\nu = 0,92$.

Рассчитаем коэффициент запаса по теплостойкости для стали 40ХН2МА по формуле (17):

$$n = \frac{550}{120 + 40} = 3,44.$$

Величина квантиля нормального распределения по формуле (16):

$$u_p = \frac{3,44 - 1}{0,92} = 2,65.$$

По табл. 1 [4, с. 460] находим вероятность безотказной работы шатуна по критерию теплостойкости:

$$P = \Phi(2,65) = 0,994.$$

Рассчитаем коэффициент запаса по теплостойкости для стали 30ХН2МА по формуле (17):

$$n = \frac{705}{120 + 40} = 4,4.$$

Величина квантиля нормального распределения по формуле (16):

$$u_p = \frac{4,4 - 1}{0,92} = 3,69.$$

По табл. 1 [4, с. 460] находим вероятность безотказной работы шатуна по критерию теплостойкости:

$$P = \Phi(3,69) = 0,999.$$

Вероятность безотказной работы детали шатун изготовленной из стали 30ХН2МА выше, чем из стали 40ХН2МА за счет более высокой предельно допускаемой рабочей температуры при прочих равных условиях.

2.2. Расчет вероятности безотказной работы шатуна по критерию прочности. Оценим вероятность безотказной работы шатуна по критерию прочности при внесении конструкторских изменений. Сравнение будем осуществлять также для сталей 40ХН2МА и 30ХН2МА по следующим расчетным зависимостям [4]:

$$u_p = \frac{n - 1}{\sqrt{n^2 \cdot \nu_t^2 + \nu_p^2}}; \tag{19}$$

$$n = \frac{\sigma_t}{\sigma_{\text{экв}}}, \tag{20}$$

где n – коэффициент запаса прочности, σ_t – предел текучести материала детали, $\sigma_{\text{экв}}$ – действующие эквивалентные напряжения, ν_t – коэффициент вариации предела текучести, ν_p – коэффициент вариации давления.

Исходя из прочностных показателей материала детали и нагрузок, которым подвержены детали кривошипно-шатунного механизма рассматриваемого двигателя внутреннего сгорания, имеем следующие исходные данные [5]:

Предел текучести стали 40ХН2МА: $\sigma_t = 1080$ МПа;

Предел текучести стали 30ХН2МА: $\sigma_t = 785$ МПа;

Действующие эквивалентные напряжения: $\sigma_{\text{экв}} = 350$ МПа;

Коэффициент вариации предела текучести: $\nu_t = 0,05$;

Коэффициент вариации давления: $\nu_p = 0,2$.

Рассчитаем коэффициент запаса по прочности для стали 40ХН2МА по формуле (20):

$$n = \frac{1080}{350} = 3,1.$$

Величина квантиля нормального распределения по формуле (19):

$$u_p = \frac{3,1 - 1}{\sqrt{3,1^2 \cdot 0,05^2 + 0,2^2}} = 8,3.$$

Вероятность безотказной работы шатуна по критерию прочности равна P(Ф)=1, так как величина квантиля нормального распределения превышает число 4.

Коэффициент запаса по прочности для стали 30ХН2МА по формуле (20):

$$n = \frac{785}{350} = 2,24.$$

Величина квантиля нормального распределения по формуле (19):

$$u_p = \frac{2,24 - 1}{\sqrt{2,24^2 \cdot 0,05^2 + 0,2^2}} = 5,4.$$

Вероятность безотказной работы шатуна по критерию прочности равна P(Ф)=1, так как величина квантиля нормального распределения превышает число 4.

На основании сделанных расчетов можно судить о том, что при замене материала 40ХН2МА на 30ХН2МА детали шатун сохраняется работоспособность конструкции как по теплостойкости, так и по прочности. Проверка по заданным критериям является наиболее целесообразной, так как условия работы детали шатун лежат в критических интервалах температур, начиная от прогрева в холодное время года и заканчивая высокими рабочими температурами в летний период. Сжимающие нагрузки при воспламенении горючей смеси в камере сгорания, и растягивающие инерционные силы являются базовыми показателя при расчете шатуна на прочность.

Библиографический список

1. *Проников, А.С.* Параметрическая надежность машин [Текст] / А.С. Проников. – М.: Изд-во МГТУ, 2002. – 560 с.
2. *Григорьев, М.А.* Износ и долговечность автомобильных двигателей [Текст] / М.А. Григорьев, Н.Н. Пономарев. – М.: Машиностроение, 1976. – 248 с.
3. *Лукинский, В.С.* Прогнозирование надежности автомобилей [Текст] / В.С. Лукинский, Е.И. Зайцев. – Л.: Политехник, 1991. – 224 с.
4. *Труханов, В.М.* Надежность и испытания систем вооружения [Текст]: учебник для студентов вузов / В.М. Труханов. – М.: Машиностроение, 2009. – 520 с.
5. *Анурьев, В.И.* Справочник конструктора-машиностроителя [Текст]. В 3 т. Т 2 / В.И. Анурьев / под ред. И.Н. Жестковой. – 8-е изд. – М.: Машиностроение, 2001. – 920 с.

Исследование тепловых процессов при дорновании

В.Ф. Безъязычный, Д.С. Голованов

Практика эксплуатации машин показывает, что для обеспечения надежности изделий наиболее эффективными методами повышения качества поверхностей широкого круга деталей в машиностроении являются упрочняюще-чистовые и формообразующие методы, основанные на деформационном механизме формирования поверхностного слоя.

Калиброванный металл, получаемый холодным пластическим деформированием, широко используется практически во всех отраслях машиностроения. Основными показателями качества такого металла являются точность и стабильность размеров поперечного сечения, и весьма качественный упрочненный поверхностный слой. Формирование качества поверхностного слоя в основном осуществляется на финишных операциях. Одним из высокоэкономичных и производительных методов обработки является поверхностное пластическое деформирование (ППД). Применение ППД позволяет уменьшить шероховатость, получить требуемый микропрофиль поверхности, упрочнить поверхностный слой с заданной степенью, получить благоприятные остаточные напряжения, и. т. п. Достигнутый в результате обработки уровень сформированных в поверхностном слое показателей качества в свою очередь вызывает повышение усталостной прочности, контактной выносливости, износостойкости трущихся поверхностей, увеличение контактной жесткости, повышение коррозионной устойчивости. По этой причине ППД нашло широкое применение во многих отраслях машиностроительного производства при изготовлении деталей различного назначения.

Дорнование является одним из способов поверхностного пластического деформирования, обеспечивающего существенное повышение качества поверхностного слоя отверстия. Дорнование упрочняет поверхность отверстия вследствии улучшения физико-механических свойств металла и формирования в поверхностном слое требуемых остаточных напряжений. Дорнование отверстий в трубчатых заготовках позволяет существенно экономить материал за счет частичного или полного замещения растачивания. Дорнование является достаточно распространенным методом формообразования заготовки из труб при изготовлении корпусов гидравлических и пневматических цилиндров, гильз, колец, втулок для машин и механизмов различного назначения.

В процессе дорнования отверстия в контактной зоне между инструментом и деталью возникают температуры, приводящие к появлению тепловых деформаций инструмента и заготовки, к изменению физико-механических свойств материала заготовки.

На основе исследования температурных полей в зоне обработки представляется возможным решение такой проблемы, как теоретический расчет температурных деформаций изделия, термических напряжений в нем, точности обработки и, как следствие этого, назначение требуемых режимов обработки. Наибольшее распространение при теоретических расчетах тепловых явлений различных технологических процессов получил метод источников тепла, разработанный академиком Н. Н. Рыкалиным и широко использованный в работах А. Н. Резникова, А. В. Подзея, С. С. Силина, Н. В. Талантова и других. Поэтому в настоящей работе была поставлена задача определения температуры в поверхностном слое изделия от действия объемного кольцевого источника тепла $ABKNN_1A_1A_2Д_1ДA$ в соответствии с принятой расчетной схемой (рис. 1).

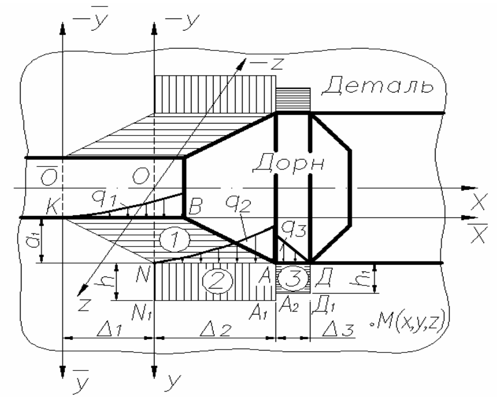


Рис. 1. Расчетная схема к определению температурного поля в изделии при дорновании от действия объемного источника тепла

Задача формулируется следующим образом: “в бесконечном теле быстро со скоростью Vв направлении отрицательного X движется объемный кольцевой источник тепла $ABKNN_1A_1A_2$ Д$_1$ДA сложной конфигурации. Скорость движения источника тепла превышает скорость распространения тепла в твердом теле, т.е. источник является быстродвижущимся. Считаем известными законы распределения интенсивностей тепловыделения на участках *KB, NA, АД*, полагая их постоянными по глубине в направлении оси Y. В начальный момент времени температура тела равна нулю. Требуется определить температурное поле на участке NX и ниже в направлении оси Y в движущейся вместе с источником системе координат NXY. Протяженность источника вдоль оси Z, т.е. вдоль ширины подминаемого слоя, безгранична”.

Результирующая температура в изделии определяется суммой температур от источников $ABKNA$, ANN_1A_1A, АДД$_1$А$_2$А:

$$\theta_\Sigma = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3, \tag{1}$$

где θ_1 – температура от источника $ABKNA$, возникающего в зоне основных пластических деформаций подминаемого припуска и является следствием процессов сдвига подминаемого слоя; θ_2 – температура от источника ANN_1A_1A, возникающего в зоне опережающих пластических деформаций; θ_3 – температура от источника АА$_2$ Д$_1$ДА, возникает в зоне контакта цилиндрической ленточки инструмента с обрабатываемой поверхностью и является следствием процесса трения и пластических деформаций на цилиндрической поверхности инструмента.

Уравнение температурного поля от действия быстродвижущегося кольцевого источника тепла на поверхности детали будет описываться следующим уравнением:

$$\theta = \frac{q}{4c\rho\left(\pi \cdot a\right)^{\frac{3}{2}}\left(\tau - \tau_1\right)^{\frac{3}{2}}} \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{\left[x - x_0 - V\left(\tau - \tau_1\right)\right]^2 + R^2 + r^2 - 2r \cdot \cos\left(\varphi - \varphi_0\right)}{4a\left(\tau - \tau_1\right)}\right\}, \tag{2}$$

где θ – температура в заданной точке поверхностного слоя; q – интенсивность теплового источника; $c\rho$– удельная объемная теплоемкость обрабатываемого материала; V – скорость дорнования; x_0, ϕ_0 – координата по оси X и угол теплового источника, x, ϕ – координата по оси X и угол расположения рассматриваемой точки; R – радиус отверстия детали; r – текущий радиус рассматриваемой точки, в которой определяется температура; a – температуропроводность материала детали; τ и τ_1– время нагревания и охлаждения детали в процессе обработки.

Таким образом, уравнение температурного поля от действия объемного кольцевого источника тепла связано с интегрированием следующего выражения:

$$\begin{gathered}\theta_1 = \frac{Rq_{AB}}{4c\rho(\pi\cdot a)^{\frac{3}{2}}\cdot e^3}\int\limits_0^{\tau_0}\exp\left\{-\frac{R^2+r^2}{4a(\tau-\tau_1)} - b\left(\tau-\tau_1\right)\right\}\frac{d\tau_1}{(\tau-\tau_1)^{\frac{3}{2}}}\times \\ \times\int\limits_{\Delta_1}^{\Delta_1+\Delta_2}\exp\left\{\frac{3x_0}{\Delta_2} - \frac{[x-x_0-V(\tau-\tau_1)]^2}{4a(\tau-\tau_1)}\right\}dx_0\times\int\limits_0^{2\pi}\exp\left\{\frac{Rr\cos\varphi}{2a(\tau-\tau_1)} - \frac{r\sin\varphi\cdot ctg\beta_1}{\Delta_2}\right\}d\varphi\end{gathered}, \tag{3}$$

где $q_{\rm AB}$ – интенсивность тепловыделения в плоскости сдвига AB; β_1 – угол наклона плоскости сдвига; Δ_2 – протяженность наклонного источника вдоль оси X.

Решение задачи определения температурного поля в поверхностном слое изделия от действия быстродвижущегося объемного кольцевого источника тепла ANN_1A_1A предполагается интегрированием следующего выражения:

$$\begin{array}{c}\theta_2 = \frac{Rq'_{AB}}{4c\rho(\pi\cdot a)^{\frac{3}{2}}\cdot e^3}\int\limits_0^{\tau_0}\exp\left\{-\frac{R^2+r^2}{4a(\tau-\tau_1)}-b\left(\tau-\tau_1\right)\right\}\frac{d\tau_1}{(\tau-\tau_1)^{\frac{3}{2}}}\times \\ \times\int\limits_0^{\Delta_2}\exp\left\{\frac{3x_0}{\Delta_2}-\frac{[x-x_0-V(\tau-\tau_1)]^2}{4a(\tau-\tau_1)}\right\}dx_0\times\int\limits_0^{2\pi}\exp\left\{\frac{Rr\cos\varphi}{2a(\tau-\tau_1)}\right\}d\varphi\end{array}, \tag{4}$$

где $q'_{\text{АВ}}$ – интенсивность тепловыделения второго объемного источника тепла.

Для уравнения температурного поля от действия источника $AA_2Д_1ДA$ необходимо интегрирование следующего выражения:

$$\begin{array}{c}\theta_3 = \frac{Rq''_{AB}}{4c\rho(\pi\cdot a)^{\frac{3}{2}}\cdot e^3}\int\limits_0^{\tau_0}\exp\left\{-\frac{R^2+r^2}{4a(\tau-\tau_1)}-b\left(\tau-\tau_1\right)\right\}\frac{d\tau_1}{(\tau-\tau_1)^{\frac{3}{2}}}\times \\ \times\int\limits_{\Delta_2}^{\Delta_2+\Delta_3}\left(1+\frac{\Delta_2-x_0}{\Delta_3}\right)\exp\left\{-\frac{[x-x_0-V(\tau-\tau_1)]^2}{4a(\tau-\tau_1)}\right\}dx_0\times\int\limits_0^{2\pi}\exp\left\{\frac{Rr\cos\varphi}{2a(\tau-\tau_1)}\right\}d\varphi\end{array}, \tag{5}$$

где $q"_{\text{АВ}}$ – интенсивность тепловыделения третьего объемного источника тепла; Δ_3 – протяженность третьего объемного источника тепла вдоль оси X.

Интегралы (3), (4) и (5) относится к числу неберущихся. Поэтому расчеты температурных полей производилось на компьютере в программе Mathcad Professional для конкретных значений безразмерных комплексов. На основании проведенных расчетов было изучено влияние на температуру в поверхностном слое детали при различной глубине подминаемого припуска, радиуса обрабатываемого отверстия, скорости дорнования, свойств обрабатываемого материала и получена следующая зависимость:

$$\theta_\Sigma = C\cdot\left(\frac{\tau_P}{c\rho\cdot B}\right)^X\cdot \text{Б}^{X_1}\cdot\left(\frac{a_1}{R}\right)^{X_2}\cdot\left(\frac{r}{R}\right)^{X_3}, \tag{6}$$

где $\tau_{\text{Р}}$ – сопротивление обрабатываемого материала пластическому сдвигу; $B = tg\beta_1$ – критерий, характеризующий условия пластического деформирования подминаемого припуска; $\text{Б} = \frac{V\cdot R}{a}$ – критерий, характеризующий степень влияния режимных условий процесса по сравнению с влиянием теплофизических свойств обрабатываемого материала; $\frac{a_1}{R}$ – величина относительного натяга при дорновании; r – текущий радиус расположения рассматриваемого слоя; R – радиус отверстия детали; a_1 – толщина подминаемого слоя; $\text{C}, \text{X}, \text{X}_1, \text{X}_2, \text{X}_3$ – величины, зависящие от свойств обрабатываемого и инструментального материалов, геометрии инструмента, режимов обработки.

Результаты данного исследования могут быть использованы для теоретических расчетов температурных остаточных напряжений.

Библиографический список

1. *Силин, С.С.* Метод подобия при резании материалов [Текст] / С.С. Силин. – М.: Машиностроение, 1979. – 152 с.
2. *Проскуряков, Ю.Г.* Дорнование отверстий [Текст] / Ю.Г. Проскуряков. – М.: Машгиз, 1965. – 191 с.

Применение методов нейроуправления в задачах повышения ресурса и надежности охлаждаемых лопаток газовых турбин

О.В. Виноградова

Лопатки турбин авиационных ГТД, особенно первых ступеней, работают в тяжелых термодинамических условиях. Для обеспечения их ресурса и надежности одновременно необходимо контролировать и корректировать множество факторов различной физической природы: конструктивных (форма профильной части пера и охлаждающего канала, наряжено-деформированное и тепловое состояние лопатки), свойств материала (химический состав, микроструктура), режимных факторов (заброс топлива), технологических (состав стержневой массы и способ ее приготовления). Кроме того, на ресурс и надежность функционирования лопатки существенное влияние оказывает компрессор (снижение его КПД повышает температуру газа перед турбиной, то или иное распределение положения лопаток статора “формирует” неравномерность температурного поля перед турбиной).

Выполнение допусков на размеры, химический состав, соответствие конструкции лопатки нормам прочности, казалось бы, предопределяет отсутствие проблем, связанных с ресурсопригодностью лопаток. Однако подобного рода проблемы возникают постоянно. Снижение усталостной прочности лопаток, локальный их перегрев в эксплуатации, нежелательные изменения микроструктуры материала (деградация вещества) часто легче устранить, чем объяснить с теоретико-физических позиций. Высокий уровень неопределенности, свойственный процессу создания и совершенствованию лопаток может быть преодолен на основе идей искусственного интеллекта, разрабатываемых в настоящее время методов нечеткой логики и нейроуправления [1]. Из теории автоматического управления известно, что для эффективной реализации корректирующих воздействий объект должен быть наблюдаемым и, одновременно, управляемым, то есть он однозначно должен реагировать на корректирующие воздействия, а лицо, принимающее решение могло бы контролировать последствия этих воздействий. ЭВМ должна служить усилителем мыслительной деятельности человека, решающего задачу оптимального проектирования.

На рис. 1 представлена обобщенная схема алгоритмов прогнозирующего управления, которая содержит систему программ одновременно прогнозирования, оптимизации, распознания и имитационного моделирования (эмулятор), построенных на основе идей самообучения и самоорганизации и приспособленных к работе в обстановке существенной нелинейности функциональных связей для объектов различной физической природы.

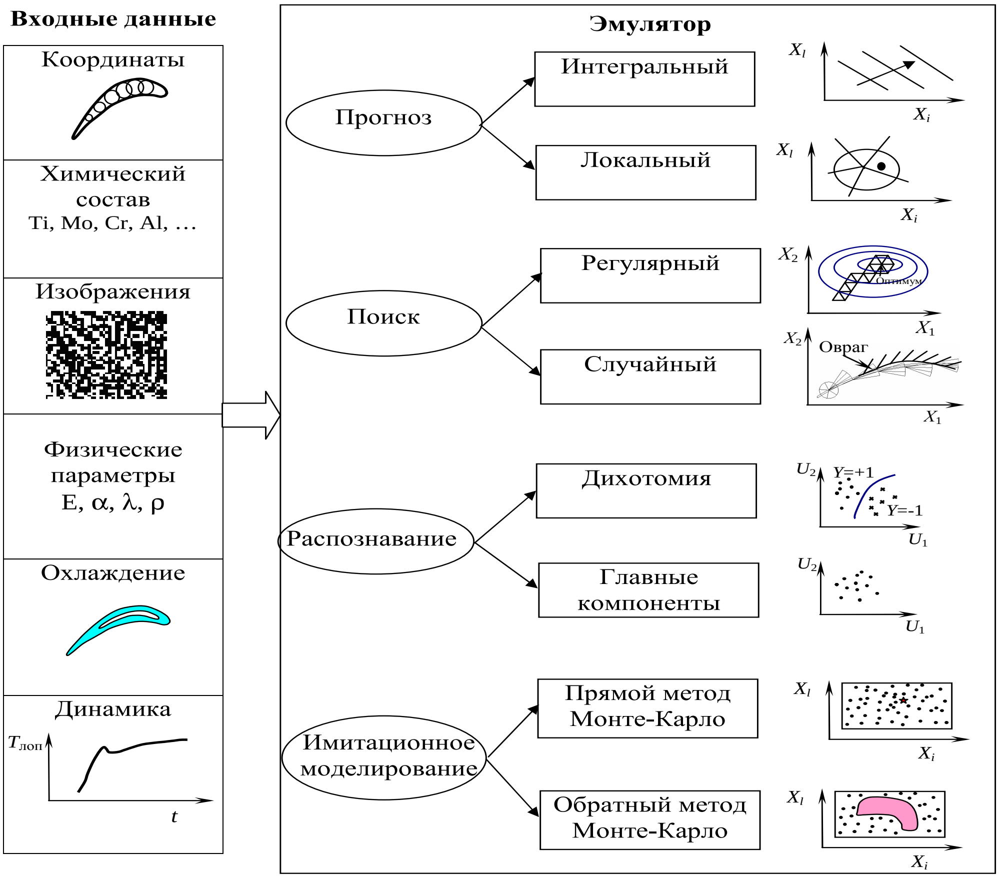


Рис. 1. Схема методов нейроуправления для решения задач повышения ресурса и надежности охлаждаемых лопаток газовых турбин

На вход в эмулятор поступает информация о геометрии лопаток, химическом составе и физических свойствах сплава, режимных параметрах и др. Выходной информацией является область достижимых решений и формальные рекомендации по улучшению характеристик качества лопатки.

На рис. 2 обозначены основные источники неопределенности, снижающие надежность, ресурс и газодинамическую эффективность лопаток первых ступеней газовой турбины.

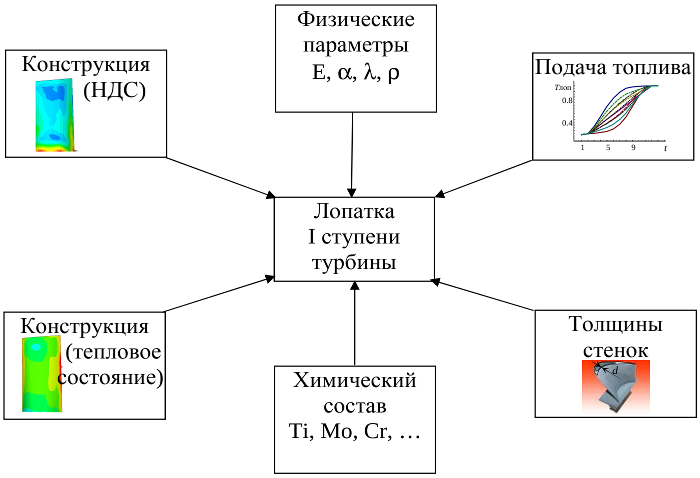


Рис. 2. Проблемы совершенствования охлаждаемой лопатки ГТД

Рассмотрим эти проблемы более подробно.

1. *Проблемы конструкции охлаждаемой лопатки турбины.*

Современные методы объемного моделирования элементов авиационного ГТД позволяют расчетным путем приближенно оценивать эксплуатационные характеристики лопаток, их температурное и напряженно-деформированное состояние. В этих расчетах исходными данными являются, кроме геометрии лопаток, физические свойства жаропрочного сплава – модуль упругости (E), термический коэффициент линейного расширения (α), коэффициент теплопроводности (λ), заданные в определенном диапазоне рабочих температур. Известно, что эти параметры связаны с химическим составом материала лопатки некоторыми неизвестными функциональными соотношениями.

На рис. 3 приведена общая схема преобразования информации с целью получения сплава лопатки турбины с требуемыми эксплуатационными характеристиками.

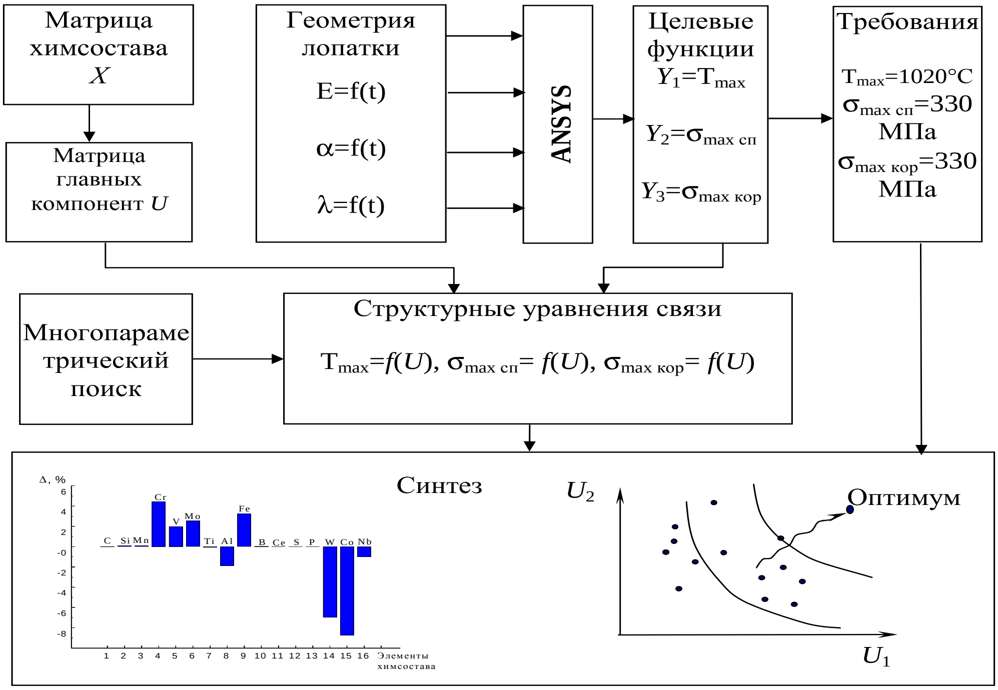


Рис. 3. Схема преобразования информации

Произведем расчеты характеристик прочности – максимального напряжения на спинке ($\sigma_{max\,\text{сп.}}$) и корытце ($\sigma_{max\,\text{кор.}}$), а также температурного состояния лопатки – максимального значения температуры (T_{max}) для каждого из выбранных сплавов сохраняя геометрию лопатки и изменяя только соответствующие физические свойства материала. Далее, после установления функциональных соотношений “химический состав материалов – их прочностное и температурное состояние” (анализ), построим соответствующие квалиметрические шкалы качества. Затем могут рассматриваться задачи синтеза химического состава. Для этого задаются требуемые значения целевых функций (T_{max}, σ_{max}) и решаются экстремальные задачи многопараметрического поиска (синтез).

2. *Проблемы контроля толщин стенок охлаждаемой лопатки.*

Перегрев и разрушение лопаток газовых турбин в эксплуатации, особенно первых ступеней, может являться следствием недостаточной жаростойкости материала лопатки, ее конструкционных особенностей, отклонений в программе подачи топлива в камеру сгорания, а также смещением керамического стержня при заливке сплава. Этот клубок проблем можно решать в рамках идей нейроуправления, на основе методов статистической оптимизации. На рис. 4 приведено изображение охлаждаемой лопатки газовой турбины.

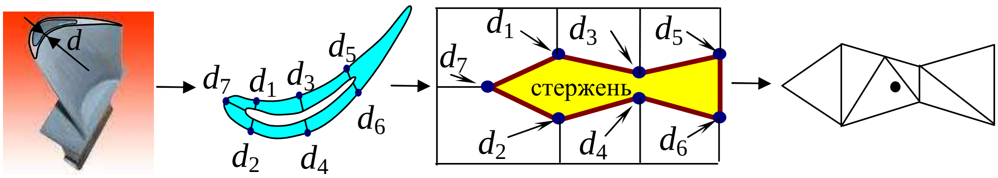


Рис. 4. Стилизованное представление измеренных толщин стенок охлаждаемой лопатки для превентивного контроля отклонений от чертежа и смещений центров тяжести полости канала

Величина d (мм) – результат точечного измерения толщины стенки в заданной точке поверхности спинки или корытца профильной части пера лопатки. По результатам этих точечных независимых измерений толщин стенок, путем сопоставления их с допусками принимается решение о качестве изготовления всей лопатки.

Процесс точечного контроля толщин стенок практически не наблюдаем и связан с существенными рисками забраковать “хорошую” лопатку и принять “плохую”. Эти ошибки первого и второго рода предопределяют высокий уровень ложного брака в литейном производстве лопаток. Для обеспечения объективности и наблюдаемости процесса контроля толщин стенок охлаждаемых лопаток газовых турбин необходимо разработать некоторую информационную технологию, обеспечивающую:

– определение особенностей геометрии охлаждающего канала изготовленной лопатки;

– определение ошибочных измерений;

– сопоставление с допусками толщин стенок одновременно во всех контрольных точках.

Найдем координаты центров тяжести некоторой стилизованной полости. Разобьем модельную полость, представленную на рис. 4, на треугольники. Площадь i-го треугольника, заданного координатами X_1, Y_1, X_2, Y_2, X_3, Y_3 рассчитывается по формуле [1]:

$$F_i = \left| X_1 \cdot (Y_2 - Y_3) - X_2 \cdot (Y_1 - Y_3) - X_3 \cdot (Y_2 - Y_1) \right| /2.$$

Площадь плоской фигуры: $F_0 = \sum\limits_{i=1}^{N} F_i$, где N – количество треугольников. Центр тяжести плоской фигуры:

$$X_0 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} F_i \cdot X_{0i}}{F_0}; \quad Y_0 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} F_i \cdot Y_{0i}}{F_0}.$$

На рис. 5 приведены координаты центров тяжести полостей в пяти сечениях для лопаток № 2, 6, 29, 61, наиболее отличающихся по толщинам стенок и приведенных в чертеже

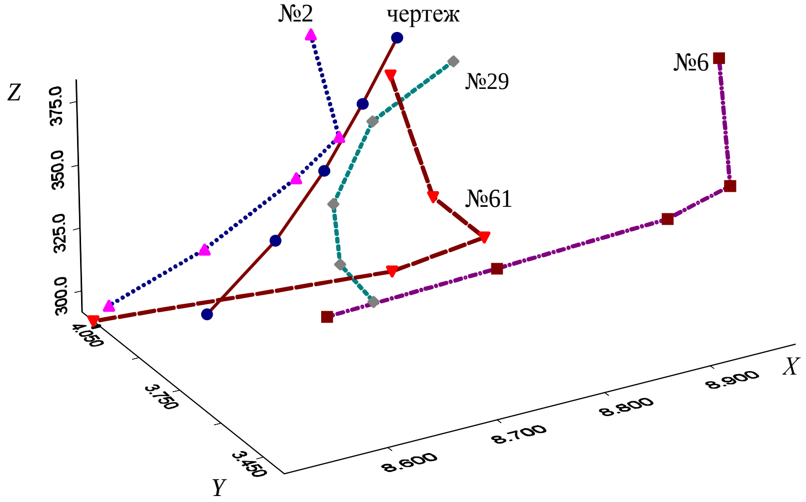


Рис. 5. Координаты центров тяжести полостей в пяти сечениях для лопаток № 2, 6, 29, 61 и полости лопатки, заданной по чертежу

Заметим, что координаты центров тяжести полости лопатки, заданной по чертежу, по высоте лопатки является плавной линией, что свидетельствует о том, что предлагаемый подход к объемному контролю толщин стенок является состоятельным (имеет смысл). Резкие колебания линий, соответствующих реальным лопаткам, свидетельствуют об отклонениях положения стержней лопаток.

Таким образом, в качестве количественного критерия совершенства керамического стержня, не разрушившегося при заливке и полностью удаленного из внутреннего охлаждающего канала лопатки, может служить величина несоответствия координат центров тяжести стилизованных сечений канала.

Рассмотрим еще один альтернативный подход к контролю толщин стенок лопаток. Представим результаты их измерений в следующем виде.

Обозначим в качестве входных переменных X_1 и X_2 для получения уравнения регрессии $d = f(X_1, X_2)$ номера сечений (1, 2, 3, 4, 5) и номера контролируемых точек на спинке 1-4 (№ 7, 1, 3, 5; рис. 6) и корытце 1-4 (№ 7, 2, 4, 6; рис. 6), где точка № 7 соответствует измерению толщин стенок на носике лопатки. Таким образом, мы имеем сетку вариантов толщин 5×4 с достаточным объемом статистических наблюдений (N=20). Из условия: $(N - m)^2 > N + m$ при N=20 наблюдениях можно использовать m=10 регрессионных констант.

Методом случайного поиска с адаптацией получены уравнения связи толщин стенок на корытце $\hat{d}_К$ и на спинке $\hat{d}_С$ с номерами сечений X_1 и номерами контролируемых точек X_2:

$$\hat{d}_К = 4,967463 - 0,2573369 \cdot X_1 - 7,168593 \cdot X_2 + 0,529714 \cdot X_1 \cdot X_2 -$$
$$-0,04419119 \cdot X_1^2 + 3,339969 \cdot X_2^2 - 0,07499909 \cdot X_1^2 \cdot X_2 - 0,01428644 \cdot X_1 \cdot X_2^2 +$$
$$+0,003124635 \cdot X_1^3 - 0,4583296 \cdot X_2^3,$$

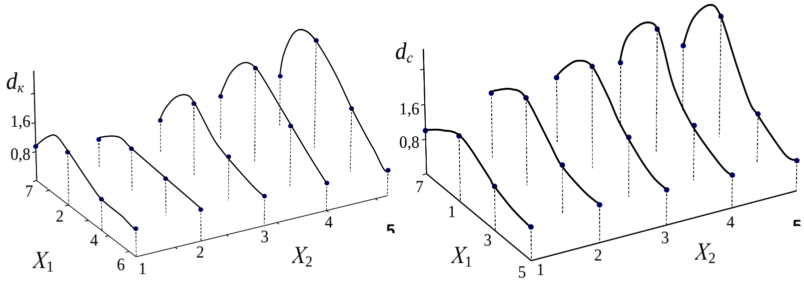
где $\hat{d}_К$ – предсказанное значение толщин стенок на корытце по уравнению регрессии. Стандартное отклонение относительно уравнения регрессии S_R=0,195, коэффициент множественной корреляции R=0,976.

$$\hat{d}_С = 4,916214 - 1,404193 \cdot X_1 - 5,613668 \cdot X_2 + 0,5951688 \cdot X_1 \cdot X_2 +$$
$$+0,3343881 \cdot X_1^2 + 2,533721 \cdot X_2^2 - 0,146248 \cdot X_1^2 \cdot X_2 +$$
$$+0,03392849 \cdot X_1 \cdot X_2^2 - 0,04270972 \cdot X_1^3 - 0,329997 \cdot X_2^3,$$

где $\hat{d}_С$ – предсказанное значение толщин стенок на спинке по уравнению регрессии. Стандартное отклонение относительно уравнения регрессии S_R=0,169, коэффициент множественной корреляции R=0,981.

На рис. 6 приведено рассеяние толщин стенок лопаток по сечениям на спинке и корытце одной из лопаток.

Полученный геометрический образ канала в данном сечении лопатки оказывается достаточно информативным. На нем можно изучать особенности рассеяния толщин стенок в каждом сечении, и, рассчитав координаты центров тяжести стилизованных полостей по высоте лопатки, можно оценивать действительное поведение стержня при заливке металла.



а б

Рис. 6. Рассеяние толщин стенок лопаток d по сечениям на корытце (а) и спинке (б)

Таким образом, созданная информационная технология контроля толщин стенок лопаток охлаждаемых турбин позволяет:

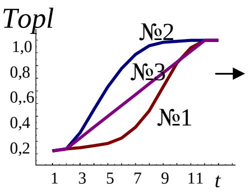
– получить объективную информацию о качестве изготовления лопаток сложной конструкции в действующем производстве;

– находить пути сокращения ложного брака при точечном измерении толщин стенок лопатки с помощью ультразвуковых толщиномеров;

– резко снизить ложный брак, связанный с существующим не эффективным способом контроля толщин стенок охлаждаемых лопаток.

3. *Проблема перегрева лопатки на переходных режимах.*

Повышение газодинамического качества, надежности, ресурса турбинной лопатки обеспечивается за счет совершенствования методов проектирования элементов проточной части, оптимизации литейного производства, использования упрочняющих и теплозащитных технологий и др. Однако весь этот сложнейший и дорогостоящий комплекс мероприятий может оказаться мало эффективным, если при эксплуатации двигателя будут использоваться режимы работы, снижающие его надежность и ресурс. Наиболее неблагоприятными в этом смысле являются так называемые переходные режимы, например взлетный, когда компрессор высокого давления может попасть в помпаж из-за потери запасов газодинамической устойчивости, а лопатка первой ступени турбины сгореть из-за заброса топлива. В связи с этим представляет существенный интерес разработка метода оптимального синтеза программы подачи топлива в камеру сгорания, отвечающей одновременно нескольким критериям качества, надежности и ресурса ГТД. Эти критерии могут быть определены расчетным путем, например с помощью программного комплекса “Динамика авиационных ГТД” [1]. Данная модель, предназначенная для управления, построена на описании процессов в узлах (элементах) двигателя. Управляющим воздействием, изменяющим тепловой режим его работы, в данном случае является изменение расхода топлива по времени. Компрессоры и турбины заданы их газодинамическими характеристиками. Целевыми функциями являются запасы устойчивости компрессора высокого давления, температура лопатки первой ступени, температура газа за турбиной низкого давления, время выхода на заданный режим (приемистость). Предлагается следующая информационная технология поиска оптимальной программы подачи топлива в камеру сгорания (рис. 7).



№	U_1	U_2
1	-2,604	-0,584
2	3,107	-0,341
3	-0,503	0,925

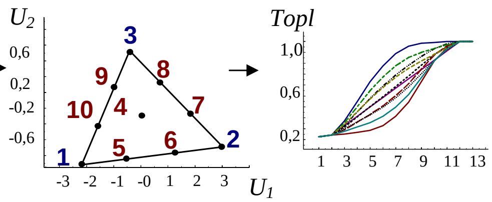


Рис. 7. Вариация программы подачи топлива в камеру сгорания в пространстве главных компонент

Для выбранных критериев оптимальности (в нашем случае минимум температуры лопатки на переходном режиме, минимум времени переходного процесса t):

– задаются три альтернативных варианта подачи топлива. По этим данным находятся их главные компоненты (координаты U_{11}, U_{12}; U_{21}, U_{22}; U_{31}, U_{32});

– в рамках геометрии полученного треугольника задаются промежуточные варианты главных компонент U_{j1},U_{j2};

– путем обратного восстановления $X = F^T U$ в этих и исходных точках находятся промежуточные варианты программы подачи топлива;

– для этих вариантов на модели динамических характеристиках ГТД проводится расчет переходных процессов изменения температуры лопатки;

– кроме эвристического, профессионального анализа полученных вариантов оценивается степень согласованности величины $\text{Т}_{\text{лоп.}}$ для всех имитационных экспериментов. Для этого на плоскости U_1,U_2 наносятся значения $\text{Т}_{\text{лоп.}}$ в моменты времени этих параметров;

– степень согласованности определяется путем построения регрессионной зависимости: $\text{Т}_{\text{лоп.}} = f\ (U_1,U_2)$ и оценки коэффициента множественной корреляции R;

– по этим зависимостям или визуально выбирается приемлемый вариант программы подачи топлива, удовлетворяющий формальным критериям.

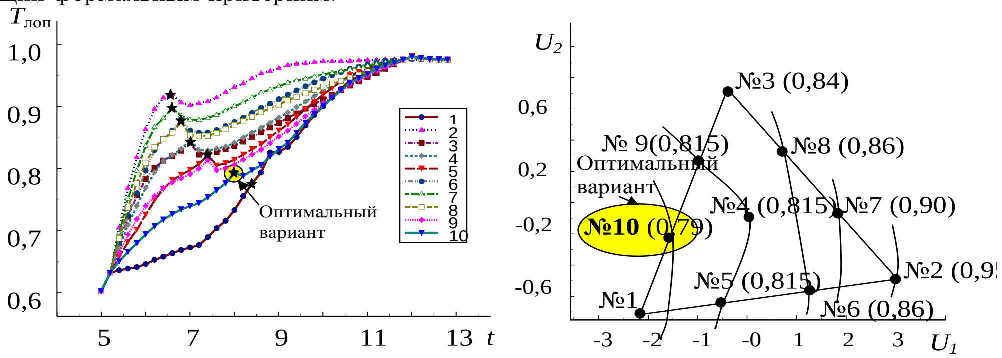


Рис. 8. Построение области достижимых решений по результатам имитационного моделирования программы подачи топлива в камеру сгорания

Методом регрессионного анализа получим уравнение регрессии – зависимости $T_{\text{лоп}}$ от главных компонент $U_1 U_2$:

$$T_{\text{лоп}} = 0,8423849 + 0,03140075 \cdot U_1 + 0,02588048 \cdot U_2 - 0,03556588 \cdot U_1 \cdot U_2 -$$

$$-0,00183266 \cdot U_1^2 - 0,03298106 \cdot U_2^2, S_R = 0,027 R = 0,973,$$

где S_R – стандартное отклонение относительно уравнения регрессии, а R – коэффициент множественной корреляции. Уравнение имеет очень высокую точность.

На рис. 8 приближенно приведены уровни равных значений $T_{\text{лоп}}$. Наиболее приемлемым оказывается вариант № 10: $T_{\text{лоп}}$=0,79.

Данный подход оптимизации эксплуатационных характеристик ГТД на переходных режимах обеспечивает наблюдаемость и управляемость процедуры совершенствования режимных параметров изделия, обеспечения требуемых параметров его ресурса и надежности.

Таким образом, предложенные методы нейроуправления качеством охлаждаемых лопаток газовых турбин позволяют обеспечить одновременное повышение ресурса, надежности и контролепригодности.

Библиографический список

1. *Добрянский, Г.В.* Динамика авиационных ГТД [Текст] / Г.В. Добрянский, Т.С. Мартьянова. – М.: Машиностроение, 1989, – 240 с.
2. *Безъязычный, В.Ф.* Квалиметрия в авиадвигателестроении [Текст] / В.Ф. Безъязычный, В.Н. Шишкин, О.В. Виноградова. – М.: Спектр, 2010. – 218 с.

Применение символических вычислений в небесной механике: исследование кривых Хилла

А.Е. Розаев

Кривые Хилла или кривые нулевой скорости широко используются в небесной механике, чтобы определить область возможного движения. В работе использованы методы компьютерной алгебры, чтобы изучать эту проблему и показать некоторые преимущества такого метода. Рассматриваем плоскую ограниченную проблему трех тел (RTBP) – частица бесконечно малой массы в поле двух массивных тел, первичного (m1) и второстепенного (m2). Показано, что спутниковая орбита вокруг второстепенной массы, стабильная в круговой RTBP, теряет свою устойчивость в эллиптическом случае.

Первичная масса установлена в начале координат. Второстепенная масса проходит круговую орбиту единичного радиуса. Во вращающейся системе, второстепенная масса неподвижна.

Возможно использовать безразмерные обозначения для правой стороны уравнений движения (плоский случай):

$$2\Omega = C,\ 2\Omega = r^2 + \frac{2}{r} + 2\mu\left(\frac{1}{2} - r\cos f - \frac{1}{r} + \frac{1}{\Delta}\right),\ \mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2},$$

здесь C – константа, r – центральное расстояние возмущаемого тела, и Δ – расстояние от возмущающего тела (второстепенного) – может быть разложено с использованием полиномов Лежандра:

$$1/\Delta = (r^2 + 1 - 2r\cos f)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n P_n(\cos f).$$

Приближение кубическим уравнением возможно:

$$C = r^2 + \frac{2}{r} + \mu(3 - \frac{2}{r} + 3r^2\cos^2 f - r^2).$$

Такая аппроксимация правильно описывает основные топологические особенности области движения.

Уравнение выше может решаться использованием символического вычисления. В результате, у нас есть зависимость r(f) для любого фиксированного C. Есть три корня в общем случае. Можно выписать сложное выражение для каждого из них. Например, для действительного корня:

	Моторика (ТРДСК)	Графика (+ ± ч –)	Логич. м. (РПОЛКСБАМИ)	Алгор. м. (ДЗЦВП)	Простр.м. (ФЭЗДОРПК)	Образн.м. (МОИД)	Динамич.м. (МОИД)	Симв.м. (ШОДУНПМ)	Счет (ПКОГТСРД)	Измер. величин (*+ ± ч –)	Доли и дроби (ОДП)
Дорофеев Г.В., Миракова Т.Н	Тг рд (РД)	±	вОП ксЛа	з	ФЭД	МО (иД)	МО ид	М	КГОТ сРД	ч	О
Башмаков М.А., Нефедова М.Г.	Трг	+	ПО рак	дзп	фэЗо	МОИ Д	мОИ	шоДу	ПКОГ ТРД	±	О
Гейдман Б.П., Ивакина Т.В., Мишарина И.Э.	Трг	±	ПО лк	–	Фэ	МОи д	ОИ	шУ	КОТР Д	ч	О
Истомина Н.Б.	–	ч	ПО (К)А	–	фэздо рп	Ои	О	У	КОТр Д	ч	–
Петерсон Л.Г.	т(ТР дг)	±	РПО (Л) кбас	д (З) ВЦ	ФЭЗ Дорк	М	О	(ш)ОД УнП М	КОГТ РД	+	ОП
Давыдов В.В., Горбов С.Ф., Микулина Г.Г., Савельева О.В.	Р	ч	ОС	–	ФЭд	М	М	ОдУП	ПКГО РД	+	(о)
Аргинская И.И., Ивановская Е.И.	Г	ч	ПОС кл АБМ	–	ФЭЗ ДОр П	м	О	оДУн	ОГТР Д	±	О
Александрова Э.И.	Трг	+	ПОЛ АС	–	ФЭО Р	Мо	О	шОУ П	опД	±	Д
Чекин А.Л.	т(г)	ч	ПО(л) кБАС Ми	–	ФЭор д	мОи	Ои	одун М	(п)КО ГТРД	+	О
Демидова Т.Е., Козлова С.Е., Тонких А.П.	Г	+	ПО ЛКа Си	дВ Ц	ФЭзд Опк	МОИ Д	МО	ОУДп м	КОДТ ГР	+*	О
Рудницкая В.Н., Юдачева Т.В.	Тг	±	ПОЛа сК	п	ФЭЗд ОРпк	Мо	О	оду	пКОТ ДР	±	–
Моро М.И., Волкова С.И., Степанова С.В.	рдГ (РД К)	±	РПО (л)	Д	фэДз (ЗОР П)	Мо (д)	Ои	ОУ	ПКОГ ТРД	+	О

$$0.19683000\ 10^8 \cos(f)^4 + 0.25189200\ 10^8 \cos(f)^3 - 0.87572107\ 10^8 \cos(f)^2$$
$$\left. - 0.96584400\ 10^8 \cos(f) + 0.45699379\ 10^8\right)^{(1/2)} \cos(f)^2\Big)^{(1/3)} \Big/ (-11. + 3. \cos(f)^2)$$
$$- 0.3333333333\ (-8943. + 2279. \cos(f)^2) \Big/ ((-11. + 3. \cos(f)^2)\ ($$
$$-0.5365800\ 10^7 \cos(f) + 0.1399400\ 10^7 \cos(f)^3 + 0.29403000\ 10^8$$
$$- 0.16038000\ 10^8 \cos(f)^2 + 0.2187000\ 10^7 \cos(f)^4 - 1807.484440\ ($$
$$0.19683000\ 10^8 \cos(f)^4 + 0.25189200\ 10^8 \cos(f)^3 - 0.87572107\ 10^8 \cos(f)^2$$
$$- 0.96584400\ 10^8 \cos(f) + 0.45699379\ 10^8)^{(1/2)} + 492.9503018\ ($$
$$0.19683000\ 10^8 \cos(f)^4 + 0.25189200\ 10^8 \cos(f)^3 - 0.87572107\ 10^8 \cos(f)^2$$
$$\left. - 0.96584400\ 10^8 \cos(f) + 0.45699379\ 10^8\right)^{(1/2)} \cos(f)^2\Big)^{(1/3)}\ )$$
$$- \frac{1.333333333\ \cos(f)}{-11. + 3. \cos(f)^2}$$

Далее, мы можем немедленно вычерчивать график в полярных координатах (рис. 1) и видеть возможную область движения. Если кривая r(f) содержит как массу m1 так и m2, то соответствующая орбита имеет аналогичный вид. При этом как в случай спутника, так и планетный тип движения, возможен для бесконечно малой частицы. Когда она разделяется на две отдельные части вокруг каждой массы, только спутниковое движение возможно.

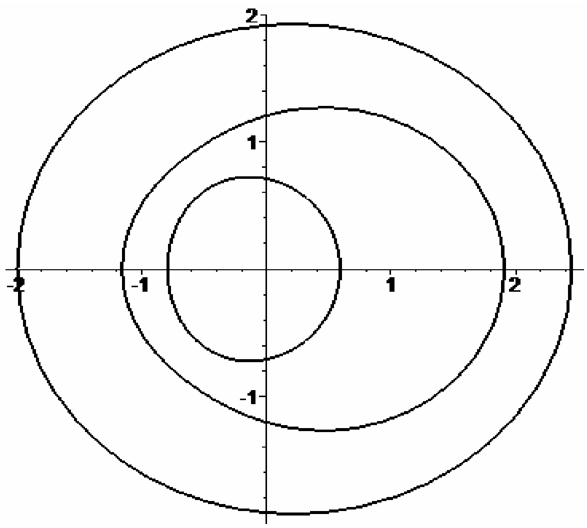


Рис. 1. μ=0.1, C=2.99, e=0

Энергия тест-частицы в системе, с центром во второстепенной массе есть критерий обмена между типами движения:

$$h_2' = \frac{V^2}{2} - \frac{1}{r_2} < 0, \quad t > 0;$$
$$h_2' = \frac{V^2}{2} - \frac{1}{r_2} > 0, \quad t < 0.$$

Функция h (a, e, w, C) может эффективно выражаться в символической форме.

Кроме того, мы можем изучать зависимость области движения от некоторых параметров проблемы и исследовать некоторые, связаннее с этим бифуркации в системе. Например, мы можем изучать отношение между r(S) и энергией для бесконечно малой частицы для фиксированного C. Аналогично, мы можем создать зависимость r(S) от углового момента тест-частицы. Несложно получить производные отношения с символическим вычислительным пакетом.

Затем, мы можем рассматривать эллиптическую ограниченную проблему трех тел, и изучать зависимость области движения от эксцентричности второстепенной массы. Центральное расстояние R второстепенной массы более не константа и может выражаться через орбитальные элементы a – большая полуось и e – эксцентричность, ω- аргумент перицентра:

$$R = \frac{a(1-e^2)}{1 + e\cos(S-\omega)}.$$

При малых эксцентриситетах справедливо [2]:

$$C = C_0(1 + e\cos(f)).$$

И соответствующее решение, полученное с использованием символьных вычислений (рис. 2, 3):

$$
\begin{aligned}
&0.03333333333\ (-0.6118200\ 10^{7} \cos(f) + 0.1604600\ 10^{7} \cos(f)^{3} \\
&\quad - 0.18998100\ 10^{8} \cos(f)^{2} + 0.2994300\ 10^{7} \cos(f)^{4} + 0.29403000\ 10^{8} - \\
&\quad 639.0422521\ (0.80192697\ 10^{8} \cos(f)^{5} + 0.763811482\ 10^{9} \cos(f)^{4} \\
&\quad + 0.935214875\ 10^{9} \cos(f)^{3} - 0.2726701218\ 10^{10} \cos(f)^{2} \\
&- 0.4649464908\ 10^{10} \cos(f) - 0.479303352\ 10^{9})^{(1/2)} + 174.2842506\ (\\
&0.80192697\ 10^{8} \cos(f)^{5} + 0.763811482\ 10^{9} \cos(f)^{4} + 0.935214875\ 10^{9} \cos(f)^{3} \\
&- 0.2726701218\ 10^{10} \cos(f)^{2} - 0.4649464908\ 10^{10} \cos(f) - 0.479303352\ 10^{9})^{(1/2)} \\
&\cos(f)^{2})^{(1/3)} \big/ (-11. + 3. \cos(f)^{2}) - 0.1666666667 \\
&(-20394. + 5242. \cos(f)^{2} - 9867. \cos(f) + 2691. \cos(f)^{3}) \big/ ((-11. + 3. \cos(f)^{2})\ (\\
&-0.6118200\ 10^{7} \cos(f) + 0.1604600\ 10^{7} \cos(f)^{3} - 0.18998100\ 10^{8} \cos(f)^{2} \\
&+ 0.2994300\ 10^{7} \cos(f)^{4} + 0.29403000\ 10^{8} - 639.0422521\ (\\
&0.80192697\ 10^{8} \cos(f)^{5} + 0.763811482\ 10^{9} \cos(f)^{4} + 0.935214875\ 10^{9} \cos(f)^{3} \\
&- 0.2726701218\ 10^{10} \cos(f)^{2} - 0.4649464908\ 10^{10} \cos(f) - 0.479303352\ 10^{9})^{(1/2)} \\
&+ 174.2842506\ (0.80192697\ 10^{8} \cos(f)^{5} + 0.763811482\ 10^{9} \cos(f)^{4} \\
&+ 0.935214875\ 10^{9} \cos(f)^{3} - 0.2726701218\ 10^{10} \cos(f)^{2} \\
&- 0.4649464908\ 10^{10} \cos(f) - 0.479303352\ 10^{9})^{(1/2)} \cos(f)^{2})^{(1/3)}\ ) \\
&- \frac{1.333333333\ \cos(f)}{-11. + 3. \cos(f)^{2}}
\end{aligned}
$$

Мы можем видеть что спутниковая орбита вокруг второстепенной массы, стабильная в круговой RTBP, теряет свою устойчивость. Этот результат - в соответствии с исследованиями [3], где показано, что этот эффект уменьшает вероятность захвата по сравнению с круговой моделью.

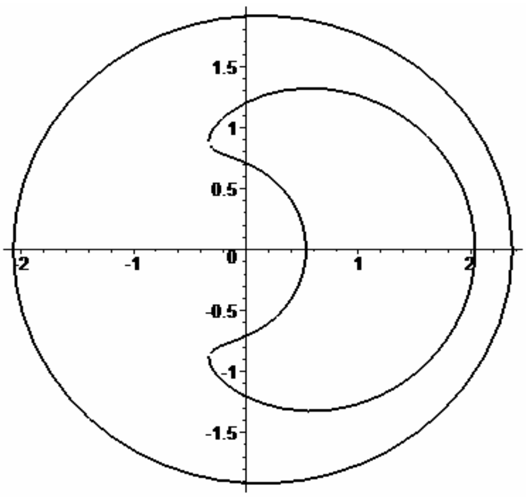


Рис. 2. μ=0.1, C=2.91, e=0

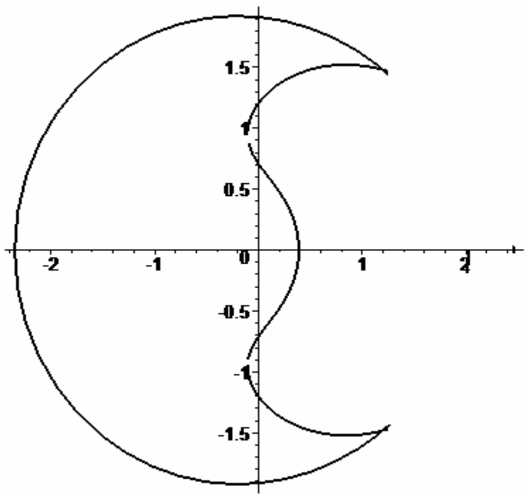


Рис. 3. μ=0.1, C=2.91, e=0.5

Наконец, мы можем сделать вывод, что символические вычисления могут успешно применяться к проблеме и показывать новые пути исследования динамики небесных тел.

Библиографический список

1. *Szebehely, V.* Theory of Orbits. The Restricted Problem of Three Bodies. Acad. press New York & London, 1967.
2. *Mako Z. And Szenkovits F.* Capture In The Circular And Elliptic Restricted Three-Body Problem. Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, v. 90, Issue 1, p. 51-58 (2004).
3. *Astakhov S.A., Farrelly D.* Capture and escape in the elliptic restricted three-body problem. arXiv:astro-ph/0408271 v. 1, 14 Aug., 2004.

Математическое моделирование мотивационной функции заработной платы или: Что побуждает нас работать интенсивнее?

Е.А. Чекмарева

Высокий научный интерес к проблемам заработной платы обусловлен многообразием функций, которые она выполняет в социально-экономическом развитии территорий: воспроизводственная (обеспечение воспроизводства рабочей силы), регулирующая (способствует установлению пропорций между спросом и предложением), социальная (дает возможность пользоваться социальными благами), стимулирующая (используется работодателем для стимулирования трудовой активности работника), мотивационная (создает мотивацию к трудовой деятельности), статусная (отражает трудовой статус работника) и др.

Представляемая работа относится к приложениям математических методов в социально-экономических исследованиях и посвящена проблеме выявления эмпирических взаимосвязей между заработной платой и уровнем реализации трудового потенциала работников, т.е. исследованию мотивационной функции заработной платы в современных условиях. Основная гипотеза: мотивационное воздействие заработной платы может быть представлено в виде математической и структурной модели, отражающей влияние заработной платы на трудовые усилия работников.

Информационной базой исследования послужили данные мониторинга качественного состояния трудового потенциала населения Вологодской области, проводимого Институтом социально-экономического развития территорий РАН (объем выборки составляет 1500 чел.).

Для оценки заработной платы в рамках мониторинга трудового потенциала использовался прямой вопрос: “Укажите, пожалуйста, Вашу среднемесячную заработную плату”.

Измерение интенсивности труда проводилось на основе использования показателей уровня реализации трудового потенциала. При этом под трудовым потенциалом подразумевались качественные характеристики работников трудоспособного возраста: физическое и психическое здоровье, когнитивный и творческий потенциалы, коммуникабельность, культурный и нравственный уровни, потребность в достижении [2, 3]. Для оценки уровня реализации трудового потенциала, в рамках мониторинга, проводившегося ИСЭРТ РАН в 2009 г., была разработана специальная методика, основанная на блоке вопросов вида: “Насколько сильно Вы “выкладываетесь” на работе? В какой мере используете свои качества и умения?” Предложена следующая четырехбалльная шкала: “использую в полной мере” (на пределе своих возможностей) – 4 балла; “более-менее полно” (могу использовать больше) – 3; “частично” (мало) – 2; “очень мало” (по минимуму) – 1. В дальнейшем путем деления фактического числа баллов на максимально возможное и умножения на 100%, мы получили показатель, отражающий, в какой степени (в %) реализуется качество трудового потенциала. Рассчитанный показатель был условно назван *уровнем реализации качества трудового потенциала*. В результате применения разработанной методики для каждого респондента были рассчитаны: уровень реализации физических возможностей, уровень реализации когнитивного потенциала, уровень реализации коммуникабельности и т.д. (всего восемь показателей). Уровень реализации качества трудового потенциала некоторой группы, будь то население в целом или какая-то его часть, вычислялся как средний уровень реализации трудового потенциала членов этой группы [4].

Для выявления взаимосвязей между зарплатой и уровнем реализации трудового потенциала, отражающим интенсивность труда, использовались статистические методы, корреляционно-регрессионный анализ, а также оценка информативности по К. Шеннону.

Как показали измерения, уровень реализации качества трудового потенциала существенно различается в зависимости от размера заработной платы: в группах с большим размером заработной платы он более высокий (табл. 1). Так, для работников, имеющих заработную плату ниже величины минимального размера оплаты труда (МРОТ), по сравнению с теми, чья заработная плата достигает пяти МРОТ и больше, характерен более низкий уровень реализации всех качеств трудового потенциала: например, уровень реализации физического здоровья составляет 72% против 84%, когнитивного потенциала – 63% против 84%. Следовательно, можно считать, что по мере увеличения размера заработной платы мотивация работника к реализации трудового потенциала становится выше.

Таблица 1

Уровень реализации трудового потенциала (в %) в группах с различной заработной платой

Качество трудового потенциала	Заработная плата					
	ниже МРОТ (до 4430 руб.)	от 1 до 2 МРОТ (от 4430 до 8660 руб.)	от 2 до 3 МРОТ (от 8660 до 12990 руб.)	от 3 до 4 МРОТ (от 12990 до 17320 руб.)	от 4 до 5 МРОТ (от 17320 до 21600 руб.)	5 МРОТ и выше (от 21600 руб.)
Физическое здоровье	71,9	78,8	80,0	80,4	85,8	84,1
Психическое здоровье	65,8	76,5	78,2	78,5	80,5	81,9
Когнитивный потенциал	63,4	75,9	78,1	80,7	81,1	83,5
Творческий потенциал	62,0	67,8	68,2	69,5	73,2	71,3
Коммуникабельность	69,1	78,6	79,3	82,5	85,0	83,0
Культурный уровень	68,1	77,6	78,4	78,1	81,1	78,1
Нравственный уровень	67,7	77,4	79,1	77,8	81,3	78,8
Потребность в достижении	61,1	67,7	69,5	72,9	73,2	79,1
Среднее	*66,1*	*75,1*	*76,4*	*77,5*	*80,1*	*80,0*

Источник: Здесь и далее – данные мониторинга качественного состояния трудового потенциала населения Вологодской области, проведенного ИСЭРТ РАН в 2009 году.

Интересно, что представители группы, в которой размер заработной платы превышает пять МРОТ, уступают представителям смежной группы по уровню реализации большинства своих качеств, в частности способностей в творческом, культурном, нравственном и коммуникативном плане. Однако у них значительно более высокий уровень реализации социальных притязаний (потребности в достижении), т.е. это амбициозные и целеустремленные люди, которые имеют большие планы и стремятся их выполнять. Кроме того, вероятно, существует определенный порог, после достижения которого побуждающая роль заработной платы снижается (по аналогии с положениями теории предельной производительности).

По результатам мониторинга только 30% работников считают, что установленный размер заработной платы побуждает их эффективно работать (или скорее да, чем нет). В то же время они показывают более высокий уровень реализации трудового потенциала. Средний размер заработной платы, побуждающий население эффективно работать, равен 16 тыс. руб. Причем следует учитывать, что этот вывод сделан на основании данных за 2009 г.

Соотнесение объема полученных денежных средств с уровнем притязаний зачастую порождает у работника неудовлетворенность размером заработка, которая отрицательно сказывается на реализации трудового потенциала. Неудовлетворенность подрывает мотивационную роль заработной платы, подавляет желание "выкладываться на работе", более активно использовать свои способности. Так, работники, удовлетворенные размером заработной платы, которую они получают, по сравнению лицами, неудовлетворенными оплатой своего труда, показывают более высокие значения уровня реализации трудового потенциала по большинству качеств (табл. 2). Средний размер заработка, устраивающий население области, составляет 18 тыс. руб. Интересно, что в группе лиц, наиболее удовлетворенных размером своей заработной платы, зафиксированы самые низкие значения уровня использования культурно-нравственных качеств, что ставит вопрос о способах достижения высоких заработков и соблюдении при этом культурно-нравственных норм.

Таблица 2

Уровень реализации трудового потенциала (в %) в зависимости от уровня удовлетворенности заработной платой

Качество	Устраивает ли Вас размер заработка, который Вы получаете?				
	Да, устраивает	Скорее да, чем нет	Не могу сказать	Скорее нет, чем да	Совершенно не устраивает
Физическое здоровье	81,5	83,5	79,1	79,6	78,5
Психическое здоровье	80,1	78,4	79,5	76,1	75,5
Когнитивный потенциал	82,5	81,7	78,0	75,5	74,5
Творческий потенциал	71,3	71,9	69,7	68,6	64,9
Коммуникабельность	79,3	82,0	78,4	79,3	78,5
Культурный уровень	75,3	79,2	77,9	76,8	77,2
Нравственный уровень	75,3	78,6	77,7	77,0	78,1
Потребность в достижении	69,9	74,9	72,3	68,4	66,7
Среднее	*76,9*	*78,8*	*76,6*	*75,2*	*74,2*
Средний размер заработной платы, руб.	18354	13953	10952	10964	8793

Таблица 3

Уровень реализации трудового потенциала (в %)в зависимости от справедливости в оплате труда

Качество	Считаете ли Вы, что оплата Вашего труда справедлива по отношению к трудовому вкладу?				
	Абсолютно справедлив а	Скорее да, чем нет	Не знаю	Скорее нет, чем да	Совершенн о Нет
Физическое здоровье	86,0	83,0	80,7	78,1	78,4
Психическое здоровье	78,8	79,4	77,4	76,4	76,0
Когнитивный потенциал	81,7	81,2	77,0	76,9	74,1
Творческий потенциал	72,0	73,1	69,0	68,2	64,6
Коммуникабельность	79,5	82,9	78,1	79,0	79,0
Культурный уровень	75,7	80,3	76,3	76,6	78,3
Нравственный уровень	76,1	79,6	77,1	76,8	77,9
Потребность в достижении	68,6	75,7	71,3	68,3	66,9
Среднее	*77,3*	*79,4*	*75,9*	*75,0*	*74,4*
Средний размер заработной платы, руб.	18321	14156	11178	10803	8520

Формирование у работника мотивации к повышению уровня реализации трудового потенциала тесно связано с восприятием оплаты труда как справедливой или несправедливой. Те, кто считает оплату своего труда соответствующей трудовому вкладу, отличаются по сравнению с придерживающимися противоположного мнения более высоким уровнем реализации большинства качеств трудового потенциала (табл. 3). Несоответствие заработной платы трудовому вкладу и вызываемое этим чувство несправедливости снижает уровень реализации трудового потенциала.

Наряду с дополнительными мерами материального стимулирования важнейшую роль в повышении уровня реализации трудового потенциала играет возможность увеличения заработной платы при улучшении качества трудовой деятельности. Работники, уверенные в том, что их заработок увеличится с улучшением результатов работы, отличаются более высоким уровнем реализации трудового потенциала по сравнению с теми, кто уверен в обратном (табл. 4).

Таблица 4

Уровень реализации трудового потенциала (в %) в зависимости от возможности увеличения заработной платы

Качество	Если Вы будете работать лучше, увеличится ли Ваш заработок?				
	Да, увеличится	Скорее да, чем нет	Затрудняюсь ответить	Скорее нет, чем да	Нет
Физическое здоровье	87,9	79,8	78,9	78,6	80,2
Психическое здоровье	81,9	76,9	78,0	74,6	77,3
Когнитивный потенциал	83,0	78,9	78,1	76,0	75,4
Творческий потенциал	73,2	72,6	68,6	66,9	67,2
Коммуникабельность	82,0	77,6	80,1	78,5	79,8
Культурный уровень	79,2	74,3	77,4	76,4	79,4
Нравственный уровень	78,8	73,7	77,9	77,5	78,9
Потребность в достижении	72,1	73,4	72,7	67,3	67,8
Среднее	*79,8*	*75,9*	*76,5*	*74,5*	*75,8*
Средний размер заработной платы, руб.	18042	12194	11768	10637	9451

Осознание того, что вне зависимости от трудовых усилий заработок останется прежним, отрицательно сказывается на мотивационной функции заработной платы, снижает у работников мотивацию к более интенсивному труду, провоцирует пассивное трудовое поведение, сопровождающееся минимальной трудоотдачей.

С целью эмпирической оценки силы и вида взаимосвязей между заработной платой и уровнем реализации трудового потенциала был проведен корреляционно-регрессионный анализ. В ходе анализа рассматривались две переменные: y – средний уровень реализации качества трудового потенциала (в процентах), x – заработная плата (в рублях). Он подтвердил наличие статистически значимых взаимосвязей между заработной платой и средним уровнем реализации трудового потенциала (r=0,161; корреляция значима на уровне 0,01; связь слабая). В результате анализа была получена следующая зависимость:

$$y = 0,0003065x + 72,5 + \varepsilon,$$

где y – средний уровень реализации трудового потенциала (в процентах), x – заработная плата (в рублях), ε – случайная составляющая.

Полученное уравнение регрессии говорит о том, что в современных социально-экономических условиях при увеличении заработной платы работника на одну тысячу рублей уровень реализации качества трудового потенциала в среднем увеличивается на 0,3%.

Для улучшения качества построенной модели был учтен логарифмически нормальный вид распределения заработной платы, в результате чего степень тесноты статистической связи увеличилась (r=0,202; корреляция значима на уровне 0,01; связь слабая), а уравнение регрессии приняло вид:

$$y = 5,1 \cdot Ln(x) + 29,1 + \varepsilon.$$

Интерпретировать полученное уравнение можно так: при увеличении заработной платы в e раз (примерно 2,7 раза) средний уровень реализации качества трудового потенциала в регионе увеличивается на 5%. При этом можно считать, что реализация трудового потенциала на лишь 20% обусловлена размером заработной платы. Условно говоря, в настоящее время КПД заработной платы как инструмента повышения уровня реализации трудового потенциала весьма и весьма невысок.

Сложившаяся практика оплаты труда и ее институциональные особенности таковы, что размер заработной платы слабо мотивирует работников к увеличению интенсивности своего труда, т.е. размер заработной платы сам по себе не побуждает людей работать напряженнее, а мотивационное воздействие заработной платы не сводится к тривиальному: “платят больше – сильнее выкладываюсь на работе”.

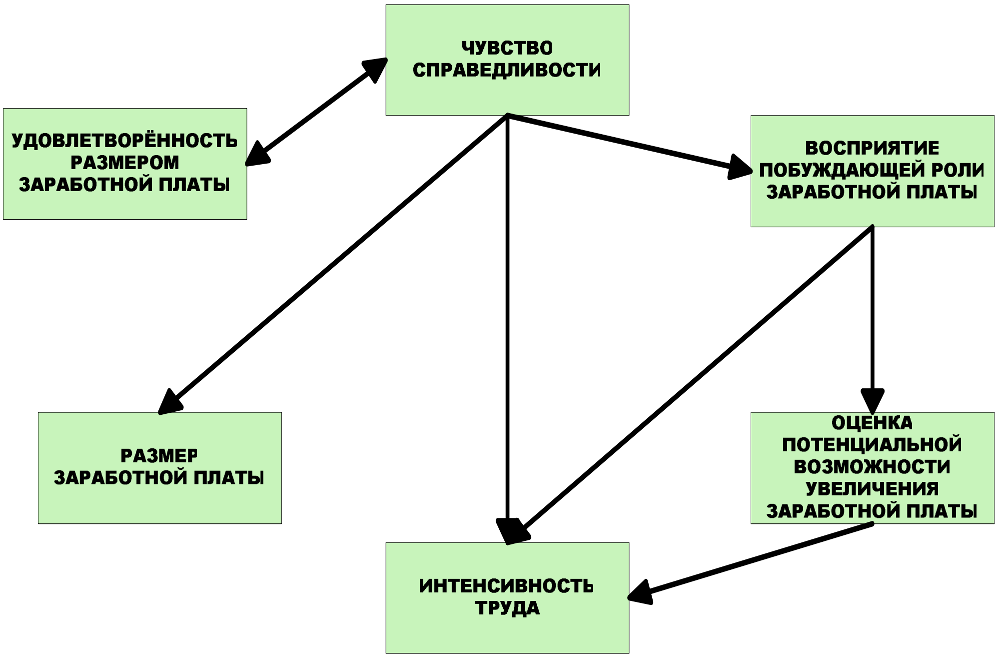


Рис. 1. Структурная модель информативных взаимосвязей между различными характеристиками заработной платы и интенсивностью труда

Примечание: Схема построена на основе расчета информативностей по К. Шеннону в программе “Компьютерный анализ системы социально-экономических показателей” (КАССЭП; Разработка лаборатории математической социологии ЦЭМИ РАН, 2005 г.)

Как показывают расчеты, максимальную информацию об интенсивности труда несут переменные, характеризующие ее восприятие работником, т.е. в оплате труда наиболее важен психологический аспект (рис. 1). При этом “ядром” мотивационного воздействия заработной платы является восприятие ее как справедливой или несправедливой, а ее мотивационная функция выполняется наиболее эффективно в том случае, если работник осознает справедливость оплаты своего труда и возможность потенциального роста получаемого вознаграждения за труд.

Библиографический список

1. *Гулин, К.А.* Трудовой потенциал региона [Текст] / К.А. Гулин, А.А. Шабунова, Е.А. Чекмарева; под рук. В.А. Ильина. – Вологда: ИСЭРТ РАН, 2009. – 84 с.
2. Качество населения [Текст] / под ред. Н.М. Римашевской, В.Г. Копниной. – М.: ИСЭПН, 1993. – 185 с.
3. *Римашевская, Н.М.* О методологии определения качественного состояния населения [Текст] / Н.М. Римашевская // Демография и социология. – 1993. – Вып. 6. – С. 7-21.
4. *Чекмарева, Е.А.* Математическое моделирование реализации трудового потенциала региона [Текст] / Е.А. Чекмарева // Труды VIII Международных Колмогоровских чтений: сборник статей. – Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2010. – С. 365-373.
5. *Чекмарева, Е.А.* Повышение уровня реализации трудового потенциала: роль заработной платы [Текст] / Е.А. Чекмарева // Экономические и социальные перемены: факты, тенденции, прогноз. – 2011. – № 2(14). – С. 165-172.

Математические модели реализации стратегии

Ю.Б. Мельников

Под ***стратегией*** мы понимаем механизм построения плана деятельности. Остальные трактовки стратегии допускают интерпретацию в рамках схемы, представленной в табл. 1.

Таблица 1

Стратегия	**Реализация стратегии**	**План**	**Выполнение плана**
Механизм создания планов	Использование механизма создания планов	Модель деятельности, результат применения стратегии	Деятельность, для которой план является эталонной моделью

Для описания сложных стратегий мы предлагаем применить алгебраический подход [2], состоящий в выделении а) системы базовых стратегий, обучение применению которых не вызывает чрезмерных сложностей; б) типовых преобразований стратегий, их комбинирования; в) механизма аппроксимирования для получения необходимых планов деятельности с помощью комбинирования базовых стратегий.

Задание реализации стратегии цветными графами. Реализации стратегии может быть неоднозначной и приводить к созданию разных планов. Задание реализаций стратегии цветными орграфами Γ_1, Γ_2 рассмотрим на примере, изображенном на на рис. 1.

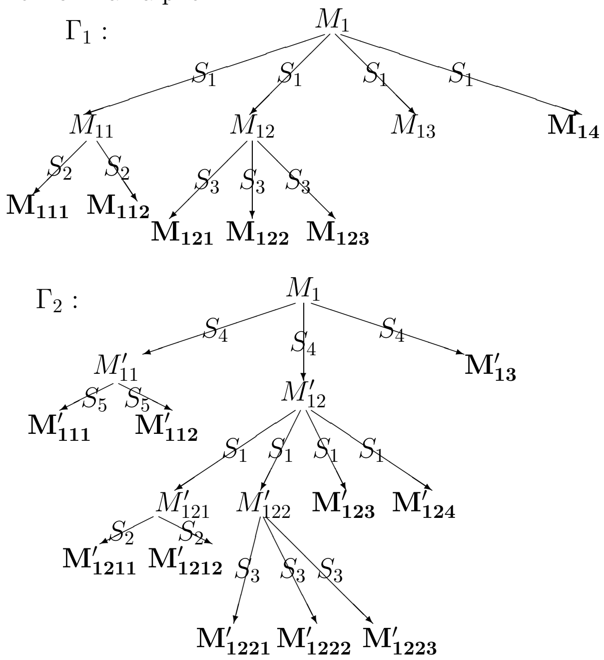


Рис. 1. Примеры представления реализации стратегии цветными графами. Стратегии применены для построения плана достижения цели M_1. Бесцветные дуги не изображены

Каждую базовую стратегию будем интерпретировать как цвет ребра. Из вершины A (т.е. цели A) в вершину B идет ребро цвета S_k, если B является пунктом плана достижения цели A, являющегося результатом применения стратегии S_k. Кроме того, введем бесцветные ребра: из вершины A (т.е. цели A) идет бесцветное ребро в вершину B (цель B), если в плане, являющемся результатом применения данной стратегии, пункт A предшествует пункту B. Например, в графе Γ_1 отражено, что применение стратегии S_1 привело к плану $(M_{11},\ M_{12},\ M_{13},\ M_{14})$ достижения цели.

Оптимальная реализация стратегии. В теории игр термину “стратегия” соответствует наша трактовка термина “реализация стратегии”. Одним из ключевых в теории игр является понятие “оптимальная стратегия”. В рассматриваемой нами системе понятий следует говорить об “оптимальной реализации стратегии”.

Пусть функция θ каждой дуге $(M_i;\ M_{ij})$ цвета S_i ставит в соответствие, например, объем ресурсов $\theta\,(M_i;\ M_{ij};\ S_i)$, необходимых для достижения цели M_i в условиях, когда цель M_{ij} достигнута.

Допустим, имеется маршрут

$$M_1, (M_1;\ M_2;\ S_{i_1})\,, M_2, (M_2;\ M_3;\ S_{i_2})\,, M_3, \ldots, M_k, (M_k;\ M_0;\ S_{i_k})\,, M_0.$$

Если интерпретировать $\theta\left(M_p;\ M_{p+1};\ S_{i_p}\right)$ как объем ресурсов, затраченных на сведение достижения цели M_p к достижению вторичной цели M_{p+1} с помощью стратегии S_{i_p}, то

$$\theta\,(M_1;\ M_2;\ S_{i_1}) + \theta\,(M_2;\ M_3;\ S_{i_2}) + \ldots + \theta\,(M_k;\ M_0;\ S_{i_k})$$

можно трактовать как “суммарную затрату ресурсов” на сведение достижения цели M_1 к цели M_0 с помощью комбинации стратегий и вторичных целей, представленных данным маршрутом.

Теорема 1. *Пусть M_1 – некоторая цель, $\mathcal{C} = \{S_1, \ldots, S_m\}$ – набор базовых стратегий, и $\mathcal{G}$ – совокупность цветных орграфов, у которых все цвета ребер содержатся в $\mathcal{C}$ и являющихся моделями успешных реализаций стратегий достижения цели M_1. Допустим, что для любого графа*[1] $\Gamma = \langle V(\Gamma),\ E(\Gamma)\rangle \in \mathcal{G}$ *определена функция α_Γ, область значений которой включается в $\mathbb{R}$, определенная на множестве $V(\Gamma)$, причем*

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \Gamma \in \mathcal{G} \quad \forall M \in V(\Gamma) \quad \alpha_\Gamma\,(M) \geq \varepsilon. \tag{1}$$

[1]Здесь $V(\Gamma)$ – множество вершин графа Γ, $E(\Gamma)$ – множество его дуг (ориентированных ребер) графа Γ.

Положим

$$\alpha\left(\Gamma\right)=\sum_{M\in V(\Gamma)}\alpha_{\Gamma}\left(M\right). \tag{2}$$

Тогда существует такой граф $\Gamma'\in\mathcal{G}$, на котором функция α достигает минимального значения, т.е.

$$\forall\Gamma\in\mathcal{G}\quad\alpha\left(\Gamma'\right)\leq\alpha\left(\Gamma\right).$$

Доказательство. Возьмем произвольный граф $\Gamma''\in\mathcal{G}$. Пусть для графа Γ из $\mathcal{G}$ выполняется неравенство $|V(\Gamma)|\geq\dfrac{\alpha(\Gamma'')}{\varepsilon}$. Тогда в силу (1) и (2)

$$\alpha(\Gamma)=\sum_{M\in\Gamma}\alpha_{\Gamma}\left(M\right)\geq\sum_{M\in\Gamma}\varepsilon=|V(\Gamma)|\varepsilon\geq\alpha(\Gamma'').$$

Следовательно,

$$|V(\Gamma)|\geq\frac{\alpha(\Gamma'')}{\varepsilon}\;\Rightarrow\;\alpha(\Gamma'')\leq\alpha(\Gamma).$$

Осталось заметить, что существует только конечное число цветных графов с дугами конечного числа цветов, количество вершин у которых меньше $\dfrac{\alpha(\Gamma'')}{\varepsilon}$. Поэтому среди них существует граф Γ' с минимальным значением $\alpha\left(\Gamma'\right)$. Теорема доказана.

Теоретико-логическое задание реализации стратегии. Рассмотрим реализацию стратегии как компонент исчисления [1].

В качестве алфавита $A(I)$ рассматриваемого исчисления будем использовать пункты планов и известные модели (например, представленные в условии задачи). Совокупность грамматически правильных слов $E(I)$ состоит из конечных последовательностей элементов из $A(I)$. Совокупность аксиом $Ax(I)$ образуют известные модели. Совокупность правил вывода состоит из функций, типовым целям сопоставляющих типовые планы достижения этих целей.

Теорема 2. *Пусть $I=\langle A(I);\,E(I);\,Ax(I);\,\mathcal{F}(I)\rangle$ – исчисление, моделирующее стратегию, где $\mathcal{F}(I)=\{S_1;\ldots;S_m\}$ – множество правил вывода, причем все правила вывода (базовые стратегии) S_i имеют конечное число аргументов. Пусть $\mathbb{T}$ множество доказательств в I, моделирующих успешные реализации стратегии достижения фиксированной цели M_1, и для любого $T\in\mathbb{T}$ определена функция β_T, определенная на множестве формул из доказательства T, с областью значений, включающейся в $\mathbb{R}$, причем*

$$\exists\varepsilon>0\quad\forall T\in\mathbb{T}\quad\forall M_I\in T\quad\beta_T\left(M_I\right)\geq\varepsilon. \tag{3}$$

Положим для любого $T\in\mathbb{T}$

$$\beta(T)=\sum_{M_I\in T}\beta_T\left(M_I\right). \tag{4}$$

Тогда существует такое доказательство $T'\in\mathbb{T}$, для которого $\beta(T')$ принимает минимальное значение, т.е. $\forall T\in\mathbb{T}\quad\beta(T')\leq\beta(T)$.

Доказательство. Для любого $T\in\mathbb{T}$ обозначим через $|T|$ количество формул (целей) в дереве T. Пусть $T_0\in\mathbb{T}$. Если $T\in\mathbb{T}$ и $|T|\geq\dfrac{\beta(T_0)}{\varepsilon}$, то в силу (3) и (4) $\beta(T)=\sum\limits_{M_I\in T}\beta_T\left(M_I\right)\geq\sum\limits_{M_I\in T}\varepsilon\geq\varepsilon|T|\geq\beta(T_0)$. Следовательно,

$$\forall T\in\mathbb{T}\quad|T|\geq\frac{\beta(T_0)}{\varepsilon}\;\Rightarrow\;\beta(T_0)\leq\beta(T). \tag{5}$$

С другой стороны, существует лишь конечное число деревьев из $\mathbb{T}$, у которых $|T|<\dfrac{\beta(T_0)}{\varepsilon}$. Значит, среди деревьев из $\mathbb{T}$, у которых $|T|<\dfrac{\beta(T_0)}{\varepsilon}$, найдется дерево T' с минимальным значением функции β:

$$\forall T\in\mathbb{T}\quad|T|<\frac{\beta(T_0)}{\varepsilon}\;\Rightarrow\;\beta(T')\leq\beta(T). \tag{6}$$

Отметим, что в силу (3) и (4) $\beta(T_0)=\sum\limits_{M_I\in T_0}\beta_{T_0}\left(M_I\right)\geq\sum\limits_{M_I\in T_0}\varepsilon\geq\varepsilon|T_0|$, откуда, используя (6), получаем $|T_0|<\dfrac{\beta(T_0)}{\varepsilon}\;\Rightarrow\;\beta(T')\leq\beta(T_0)$. Следовательно, $\forall T\in\mathbb{T}\quad|T|<\dfrac{\beta(T_0)}{\varepsilon}\;\Rightarrow\;\beta(T')\leq\beta(T)$ и, согласно (5) и доказанному неравенству $\beta(T')\leq\beta(T_0)$, $\quad|T|\geq\dfrac{\beta(T_0)}{\varepsilon}\;\Rightarrow\;\beta(T')\leq\beta(T_0)\leq\beta(T)$. Поэтому значение функции β на элементе T' является минимальным. Теорема доказана.

Функциональная модель костратегии. Под костратегией aS на множестве планов Π будем понимать отображение, любому плану $(p_1;\, p_2; \ldots ; p_k) \in \Pi$, сопоставляющее исходную цель c. Пусть каждой костратегии aS соответствует функция $\gamma_{aS} : \Pi \to \mathbb{R}$. В качестве $\gamma_{aS}(M_1; M_2; \ldots;\, M_p)$ может выступать объем определенного вида ресурсов, расходуемых на создание этого плана и др.

Будем считать, что для функции γ выполняются следующие аксиомы.

Аксиома свернутости:

$$\left\{ \begin{array}{l} M_{0i} = aS_1\left(M_{0i1}; M_{0i2}; \ldots ; M_{0ip}\right), \\ M_0 = aS_2\left(M_{01}; \ldots ; M_{0i}; \ldots ; M_{0q}\right) \end{array} \right. \Rightarrow \gamma_{aS_2}\left(M_{01}; \ldots ; M_{0i}; \ldots ; M_{0q}\right) =$$

$$= \gamma_{aS_2}\left(M_{01}; \ldots ; aS_1\left(M_{0i1}; M_{0i2}; \ldots ; M_{0ip}\right); \ldots ; M_{0q}\right).$$

Аксиома аддитивности: если

$$aS_0\left(M_{01}; M_{02}; \ldots ; M_{0i1}; M_{0i2}; \ldots ; M_{0ip}; \ldots ; M_{0q}\right) =$$

$$= aS_2\left(M_{01}; M_{02}; \ldots ; aS_1\left(M_{0i1}; M_{0i2}; \ldots ; M_{0ip}\right); \ldots ; M_{0q}\right), \text{ то}$$

$$\gamma_{aS_0}\left(M_{01}; M_{02}; \ldots ; M_{0i1}; M_{0i2}; \ldots ; M_{0ip}; \ldots ; M_{0q}\right) =$$

$$= \gamma_{aS_2}\left(M_{01}; \ldots ; aS_1\left(M_{0i1}; \ldots ; M_{0ip}\right); \ldots ; M_{0q}\right) + \gamma_{aS_1}\left(M_{0i1}; \ldots ; M_{0ip}\right) =$$

$$= \gamma_{aS_2}\left(M_{01}; \ldots ; M_{0i}; \ldots ; M_{0q}\right) + \gamma_{aS_1}\left(M_{0i1}; \ldots ; M_{0ip}\right).$$

Теорема 3. *Пусть $\mathcal{AS}$ – множество костратегий, соответствующих успешным реализациям стратегий достижения цели M_1, причем все эти стратегии являются комбинациями базовых стратегий $S_1, \ldots, S_m$, реализации которых соответствуют костратегии $aS_1, \ldots,\, aS_m$, и все функции γ_{aS} удовлетворяют, во-первых, аксиомам свернутости и аддитивности, и, во-вторых, условию*

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall aS_i \quad \forall M_1; M_2; \ldots ; M_p \quad \gamma_{aS_i}\left(M_1; M_2; \ldots ; M_p\right) > \varepsilon. \tag{7}$$

Тогда существует костратегия $aS' \in \mathcal{AS}$ и план $(M_1'; M_2'; \ldots ; M_n')$ достижения цели M_0 такие, что значение функции $\alpha_{aS'}$ минимально, т.е.

$$\forall aS \in \mathcal{AS} \quad aS\left(M_1; M_2; \ldots ; M_m\right) = M_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \gamma_{aS}\left(M_1; M_2; \ldots ; M_m\right) \geq \gamma_{aS'}\left(M_1'; M_2'; \ldots ; M_n'\right).$$

Доказательство. Для костратегии aS из $\mathcal{AS}$ обозначим через $\pi(aS)$ количество применений базовых стратегий S_i в процессе реализации стратегии S. Пусть aS_0 – некоторая костратегия из $\mathcal{AS}$ и

$$aS_0\left(M_1^0; M_2^0; \ldots ; M_k^0\right) = M_0.$$

Из аксиомы аддитивности и (7) следует, что

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi(aS) \geq \dfrac{\gamma(aS_0)}{\varepsilon}, \\ aS\left(M_1; \ldots ; M_q\right) = aS_{i_1}\left(\ldots ; aS_{i_j}\left(\ldots\right); \ldots\right) = M_0 \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \gamma_{aS}\left(M_1; \ldots ; M_q\right) = \gamma_{aS_1}\left(\ldots\right) + \gamma_{aS_2}\left(\ldots\right) + \ldots \geq$$

$$\geq \underbrace{\varepsilon + \ldots + \varepsilon}_{\pi(aS)\ \text{слагаемых}} = \pi(aS)\varepsilon \geq \gamma_{aS_0}\left(M_1^0; M_2^0; \ldots ; M_k^0\right).$$

Таким образом, при $\pi(aS) \geq \dfrac{\gamma(aS_0)}{\varepsilon}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi(aS) \geq \dfrac{\gamma(aS_0)}{\varepsilon}, \\ aS\left(M_1; \ldots ; M_q\right) = M_0 \end{array} \right. \Rightarrow \gamma_{aS_0}\left(M_1^0; M_2^0; \ldots ; M_k^0\right) \leq \gamma_{aS}\left(M_1; \ldots ; M_q\right).$$

С другой стороны, существует конечное число таких костратегий из $\mathcal{AS}$, что

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi(aS) < \dfrac{\gamma(aS_0)}{\varepsilon}, \\ aS\left(M_1; \ldots ; M_q\right) = aS_{i_1}\left(\ldots ; aS_{i_j}\left(\ldots\right); \ldots\right) = M_0. \end{array} \right.$$

Поэтому среди таких костратегий существует костратегия aS' с минимальным значением $\gamma_{aS'}$, т.е.

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi(aS) < \dfrac{\gamma(aS_0)}{\varepsilon}, \\ aS\left(M_1; \ldots ; M_q\right) = M_0, \\ aS'\left(M_1'; M_2'; \ldots ; M_n'\right) = M_0 \end{array} \right. \Rightarrow \gamma_{aS'}\left(M_1'; M_2'; \ldots ; M_n'\right) \leq \gamma_{aS}\left(M_1; \ldots ; M_q\right).$$

Учитывая, что, очевидно, $\gamma_{aS'}\left(M_1'; M_2'; \ldots; M_n'\right) \leq \gamma_{aS_0}\left(M_1^0; M_2^0; \ldots; M_k^0\right)$, получаем, что aS' – искомая кострагегия. Теорема доказана.

Библиографический список

1. *Ершов, Ю.Л.* Математическая логика [Текст] / Ю.Л. Ершов, Е.А. Палютин. – М.: Наука, 1987. – 336 с.
2. *Мельников, Ю.Б.* Алгебраический подход к математическому моделированию и обучению математической и "предматематической" деятельности [Текст] / Ю.Б. Мельников, К.С. Поторочина // Ярославский педагогический вестник. – 2010. – № 3. – С. 19-24.

Перспективы использования искусственного интеллекта в приложении САПР ТП

А.В. Кордюков

Попытки создания искусственного интеллекта имеют более чем пятидесятилетнюю историю развития со своими взлетами и падениями, поисками и разочарованиями. Развитие компьютерной техники, методологии написания программ, разработка языков программирования и различных прикладных теорий повлекло и новый виток применения разработанных методов искусственного интеллекта.

Повышение интеллектуальности компьютерных приложений, устройств и различной техники уже настоящее или совсем недалекое будущее. В настоящее время активно развиваются следующие направления исследований в области искусственного интеллекта:

– Разработка интеллектуальных систем, основанных на знаниях.
– Нейросетевые и нейрокомпьютерные технологии.
– Распознавание образов.
– Игры и творчество.
– Компьютерное творчество
– Компьютерная лингвистика.
– Интеллектуальные роботы.
– Компьютерные вирусы.
– Интеллектуальное математическое моделирование.

Естественно предположить, что использование данных методов актуально и для подготовки производства продукции.

Производство на современном этапе вследствие увеличения номенклатуры выпускаемых деталей требует ускоренных по сравнению с недавним прошлым методов разработки и внедрения технологических процессов изготовления деталей и сборки изделий. При этом перед предприятием стоит задача сокращения расходов на технологическую подготовку производства с сохранением качества проектирования, а возможно и его улучшением.

Известно, что при подготовке производства практически на всех этапах существуют задачи, которые невозможно решать в автоматическом (пакетном) режиме. Данная ситуация возникла вследствие недостаточной разработанности процедур принятия технических решений и их недостаточной формализации. Например, отработку конструкции на технологичность больше можно отнести к акту творчества, который практически невозможно свести к последовательности выполняемой компьютерной программой. Трудно формализуема задача синтеза структуры маршрутного технологического процесса. Математически такую задачу можно свести к поиску вариантов структур в счетных множествах с весьма значительным, хоть и ограниченным числом элементов. Известно, что задача поиска решения является одной из самых сложных и трудоемких задач в прикладной информатике. К трудно формализуемым этапам относятся такие как выбор способа получения заготовки и формирования ее чертежа, выбор схемы базирования детали в приспособлении, определение последовательности переходов и создание операционного эскиза, оптимизация технологического процесса по различным критериям, подбор оборудования и оснастки, к этому так же относятся задачи синтеза схем приспособлений и их чертежей.

В общем можно сказать, что разработка эффективных технологических процессов относиться к творческим задачам, она основывается на опыте, знаниях и интуиции инженера технолога. Существующие системы автоматизированной подготовки производства основываются на концепции активного взаимодействия с технологом, то есть проектирования технологического процесса в режиме диалога. Практически технологический процесс создает сам технолог, система лишь помогает ему справочными данными, оперативной информацией о производстве, позволяет работать с базами данных предприятия. Такие системы хоть и облегчают труд технолога и позволяют повысить его эффективность, но не отвечают своему названию, фактически это просто электронное рабочее место. Повысить степень интеллектуальности таких систем можно путем встраивания интеллектуальных программ, модулей или агентов в разработанные системы автоматизированного проектирования технологических процессов. Это позволит заменить технолога при решении многих задач технологического проектирования.

При создании САПР ТП в настоящее время такие этапы как синтез структуры ТП, выбор схемы базирования, синтез переходов на операцию, выбор оборудования и многие другие решаются в режиме диалога с проектировщиком. Сложность формализации данных этапов связана с особенностями мыслительной деятельности человека (зрительное распознавание и восприятие геометрических образов, ассоциативное мышление, умение мыслить по аналогии, интуитивный выбор и т.д.). До недавнего времени не было возможности их реализации. Развитие искусственного интеллекта дает новые инструменты для решения данных задач. Ими являются искусственные нейронные сети, генетические алгоритмы, интеллектуальные агенты и многоагентные системы позволяющие реализацию на компьютере возможности выполнять ассоциативный поиск, распознавать образы, принимать решения по аналогии, то есть заменять человека при проектировании ТП.

Рассмотрим их более подробно и определим области их применения при проектировании ТП.

Нейронные сети.

Нейронные сети можно рассматривать как современные вычислительные системы, которые преобразуют информацию по образу процессов, происходящих в мозгу человека. Типовые приложения нейронных сетей охватывают задачи распознавания, классификации, анализа и сжатия образов, математического моделирования и многие другие.

В основе нейронной сети лежит нейрон, работающий по образу нейрона человеческого мозга. Он может воспринимать сигналы от множества других нейронов. Часть сигналов оказывает на нейрон возбуждающее действие, часть тормозящее. В итоге суммирования импульсов получаемых на входе и превышении пороговой алгебраической суммы сигнал с выхода нейрона посылается другим нейронам.

Нейронные сети имеют широкое применение для решения разнообразных задач. В основном их применяют для распознавания образов, математического моделирования, решения задач поиска и классификации, управления и т.д. При проектировании ТП также имеется ряд задач решение которых возможно на основе построения нейронных сетей, например, распознавание класса детали, ее контура, элементов деталей, выбор схемы базирования на основе технологической модели детали, поиск информации в базах данных при неполных или недостаточных исходных данных, построение математических моделей обработки и тому подобное.

Интеллектуальные агенты.

Разработка технологии искусственных агентов, создание многоагентных систем представляет собой одну из наиболее важных и многообещающих областей развития новых информационных и коммуникационных технологий, где сегодня происходит интеграция современных сетевых WWW-технологий, методов и средств искусственного интеллекта, включая большие базы данных, многокомпонентные решатели, и систем объектно-ориентированного проектирования. В настоящее время сформировалось и вошло в широкий научный обиход представление об искусственных агентах как активных, автономных, коммуникабельных, а главное, мотивированных, объектах, “живущих” и “действующих” в сложных, динамических и, чаще всего виртуальных, средах.

Уже сегодня агентно-ориентированный подход находит широкое применение в таких областях как распределенное решение сложных задач (и эффективное решение распределенных задач), совмещенное проектирование изделий, реинжиниринг бизнеса и построение виртуальных предприятий, имитационное моделирование интегрированных производственных систем и электронная торговля, организация работы коллективов роботов и распределенная (совмещенная) разработка компьютерных программ.

Анализируя работы посвященные интеллектуальным агентам можно говорить о возможности создания и обучения интеллектуальных агентов для проектирования технологических процессов. Перспективна разработка многоагентной системы нацеленной на комплексное проектирование технологических процессов.

Генетические алгоритмы.

Генетические алгоритмы возникли в результате наблюдения и попыток копирования естественных процессов, происходящих в мире живых организмов, в частности, эволюции и связанной с ней селекции (естественного отбора) популяций живых существ. В генетических алгоритмах применяется ряд терминов, заимствованных из генетики, прежде всего гены и хромосомы, а также популяция, особь, аллель, генотип, фенотип.

Идею генетических алгоритмов высказал Дж. Холланд в конце шестидесятых – начале семидесятых годов XX века.

Генетические алгоритмы применяются при разработке программного обеспечения, в системах искусственного интеллекта, оптимизации, искусственных нейронных сетях и в других отраслях знаний. Генетические алгоритмы могут выступать в роли независимого альтернативного метода, предназначенного для решения задач. Примером может служить задача коммивояжера, изначально решавшаяся при помощи сети Хопфилда. Так же генетические алгоритмы часто используются совместно с нейронными сетями. Они могут поддерживать нейронные сети или наоборот, либо оба метода взаимодействуют в рамках гибридной системы, предназначенной для решения конкретной задачи. Генетические алгоритмы также применяются совместно с нечеткими системами.

Генетический алгоритм представляет собой метод, отражающий естественную эволюцию методов решения проблем, и в первую очередь задач оптимизации. Генетические алгоритмы – это процедуры поиска, основанные на механизмах естественного отбора и наследования. В них используется эволюционный принцип выживания наиболее приспособленных особей. Они отличаются от традиционных методов оптимизации несколькими базовыми элементами. В частности, генетические алгоритмы:

– обрабатывают не значения параметров самой задачи, а их закодированную форму;
– осуществляют поиск решения исходя не из единственной точки, а из их некоторой популяции;
– используют только целевую функцию, а не ее производные либо иную дополнительную информацию,
– применяют вероятностные, а не детерминированные правила выбора.

Перечисленные четыре свойства, которые можно сформулировать также как кодирование параметров, операции на популяциях, использование минимума информации о задаче и рандомизация операций приводят в результате к устойчивости генетических алгоритмов и к их превосходству над другими широко применяемыми технологиями.

С точки зрения применения генетических алгоритмов для проектирования технологических процессов стоит отметить возможность реализации оптимизационного поиска осуществляемого при выборе инструмента, оснастки, оборудования, режимов резания и др. Так же возможность использования генетических алгоритмов совместно с другими методами искусственного интеллекта, например, нейронными сетями, нечеткой логикой, экспертными системами, то есть возможность дополнительно усилить применение перечисленных инструментов и сделать проектирование более гибким и эффективным.

Нечеткая логика и нечеткие множества.

Наиболее поразительным свойством человеческого интеллекта является способность принимать правильные решения в обстановке неполной и нечеткой информации. Построение моделей приближенных рассуждений человека и использование их в компьютерных системах будущих поколений представляет сегодня одну из важнейших проблем науки.

Значительное продвижение в этом направлении сделано профессором Калифорнийского университета (Беркли) Лотфи А. Заде (Lotfi A. Zadeh). Его работа [1], заложила основы моделирования интеллектуальной деятельности человека и явилась начальным толчком к развитию новой математической теории нечетких множеств. Л. Заде расширил классическое понятие множества, допустив, что характеристическая функция (функция принадлежности элемента множеству) может принимать любые значения в интервале $[0;1]$, а не только значения 0 или 1. Такие множества были названы им нечеткими (fuzzy).

В настоящее время данная теория широко используется в промышленности, бытовых приборах и военном деле. Спектр приложений нечетких множеств достаточно широк: от управления процессом отправления и остановки поезда метрополитена, управления грузовыми лифтами и доменной печью до стиральных машин, пылесосов и СВЧ-печей. При этом нечеткие системы позволяют повысить качество продукции при уменьшении ресурсо- и энергозатрат и обеспечивают более высокую устойчивость к воздействию мешающих факторов по сравнению с традиционными системами автоматического управления. Другими словами, новые подходы позволяют расширить сферу приложения систем автоматизации за пределы применимости классической теории. Нечеткая логика, в основном, обеспечивает эффективные средства отображения неопределенностей и неточностей реального мира. Наличие математических средств отражения нечеткости исходной информации позволяет построить модель, адекватную реальности.

В качестве недостатка нечетких множеств можно указать неспособность автоматически приобретать знания для использования их в механизмах выводов. Данный недостаток устраняется применением, так называемых гибридных сетей, которые являются логически прозрачными и имеют способность приобретать знания основываясь на математическом аппарате нейронный сетей.

Применения гибридных сетей для проектирования ТП возможно и предпочтительно при поиске вариантов построения маршрута, выбора оборудования, инструмента, оптимизационных процедур.

Экспертные системы.

Экспертные системы – это сложные программные комплексы, аккумулирующие знания специалистов в конкретных предметных областях и тиражирующие этот эмпирический опыт для консультаций менее квалифицированных пользователей.

В целом процесс функционирования экспертной системы можно представить следующим образом: пользователь, желающий получить необходимую информацию, через пользовательский интерфейс посылает запрос к экспертной системе, система логического вывода, пользуясь базой знаний, генерирует и выдает пользователю подходящую рекомендацию, объясняя ход своих рассуждений при помощи подсистемы объяснений.

В общем случае все системы, основанные на знаниях, можно подразделить на системы, решающие задачи анализа, и на системы, решающие задачи синтеза. Основное отличие задач анализа от задач синтеза заключается в том, что если в задачах анализа множество решений может быть перечислено и включено в систему, то в задачах синтеза множество решений потенциально не ограничено и строится из решений компонент или подпроблем. Задачами анализа являются: интерпретация данных, диагностика, поддержка принятия решения; к задачам синтеза относятся проектирование, планирование, управление. Комбинированные: обучение, мониторинг, прогнозирование.

При проектировании ТП экспертные системы могут позволить выполнять интеллектуальные запросы к базам данных, помогать в выборе вариантов операций, переходов, классификации элементов деталей.

Подводя итог обзора можно сказать, что современные инструменты искусственного интеллекта позволяют имитировать рассуждения человека, выполнять интуитивный выбор и распознавать информацию. Использование каждого из них по отдельности уже позволяет эффективно решать многие задачи проектирования. Однако возможность их совместного, комплексного использования может дать еще больший толчок в продвижении к полной автоматизации технологического проектирования и реализовать давнюю мечту технологов об автоматизированной подготовке производства.

Библиографический список

1. *Lotfi A. Zadeh* Fuzzy Set / Information and Control. – 1965. – № 8.

Моделирование циклов деловой активности

Е.В. Круглов

Циклы деловой активности, или бизнес-циклы – один из феноменов экономической динамики рыночной экономики. К текущему моменту наличие циклов в экономике подтверждается большим количеством статистических данных (хороший обзор содержится, в частности, в первой главе монографии [8]), на эту тему написано множество работ (библиографию см. в [8] и [4]). В настоящем кратком обзоре рассматриваются некоторые первые модели циклов деловой активности, относящиеся к 30-50 годам двадцатого века, и их более современные модификации.

Первые математические модели бизнес-циклов датируются 30-40 годами. Обратимся к тому комплексу моделей, которые условно называют "модели мультипликатора-акселератора". Толчком к созданию таких моделей послужила деятельность Кейнса. Именно Кейнс в работе [12] дал первое полное описание модели экономики в терминах макроэкономических переменных, таких как доход, потребление, сбережения и инвестиции, подготовив тем самым почву для модели делового цикла Самуэльсона. Модель Самуэльсона, о которой пойдет речь ниже, учитывает только выполнение условий мультипликатора в сочетании с принципом акселерации, определяющим инвестиции. Идея мультипликатора в кейнсианской экономике реализуется следующим образом. Предположим, что мы имеем начальное увеличение в инвестициях ΔI_0. Это вызовет изменение в начальном доходе $\Delta Y_0 = \Delta I_0$, который порождает дополнительное потребление: сначала $c \cdot \Delta I_0$, далее $c^2 \cdot \Delta I_0$ и т.д. (c – склонность к потреблению). Таким образом, полное увеличение дохода для бесконечного времени составит $\sum\limits_{i=0}^{\infty} c^i \cdot \Delta I_0$. Этот геометрический ряд, который сходится к конечной сумме – некоему полному приросту дохода ΔY. Таким образом, $\Delta Y = \sum\limits_{i=0}^{\infty} c^i \cdot \Delta I_0 = \frac{\Delta I}{1-c} = \frac{\Delta I}{s}$, где s – склонность к накоплению, а $\frac{1}{1-c} = \frac{1}{s} = \alpha$ есть инвестиционный мультипликатор. Идеи, связанные с мультипликатором, в тридцатых годах и ранее высказывались многими авторами, соответствующие ссылки имеются в [16].

Принцип акселерации, высказанный в начале двадцатого века (см. библиографию в [16]), формализует тот экономический феномен, когда в ответ на незначительное увеличение потребления (или спроса, или выпуска продукции) величина инвестиций в следующем периоде растет гораздо более значительно. Самуэльсон [17] предположил, что величина инвестиций пропорциональна изменению потребления, т.е. $I = \beta \Delta C$, где β – коэффициент "акселерации", или акселератор. Время в модели Самуэльсона дискретно, доход делится на потребление (C), накопление (S) и правительственные расходы g: $Y_t = g_t + I_t + C_t$. Здесь $C_t = \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) Y_{t-1} = cY_{t-1}$, $I_t = \beta \left(C_t - C_{t-1}\right) = c\beta Y_{t-1} - c\beta Y_{t-2}$, правительственные расходы принимаются за постоянную величину, $g_t = \iota$ (индекс у переменных – временной период). Таким образом, национальный доход переписывается в виде: $Y_t = \iota + c\left(\beta + 1\right) Y_{t-1} - c\beta Y_{t-2}$.

Развивая идею Самуэльсона, Хикс показал [7], что акселерацию не обязательно привязывать только к изменению потребления, например, ее можно связать с общественными издержками и др. Рассмотрев условие $I_t = \beta \cdot \left(Y_{t-1} - Y_{t-2}\right)$, Хикс получил линейное разностное уравнение второго порядка, очень похожее на уравнение Самуэльсона (подробный анализ уравнения Хикса можно найти, например, в книге [8, с. 49-53]).

Аналог модели Самуэльсона-Хикса для непрерывного времени представил Филлипс (см. [13], математическая часть проделана Алленом в [3]), анализ которой можно найти, например, в книгах [2, с. 77-79] и [8, с. 69]. Пусть функция потребления имеет вид: $C\left(t\right) = cY\left(t\right)$. В модели Филлипса предполагается, что сохраняется неизменным отношение между желательным запасом капитала $K^d\left(t\right)$ и чистым доходом Y: $K^d\left(t\right) = vY\left(t\right)$, $\nu > 0$. Предполагается, что фирма изменяет запас капитала, как только он начинает отличаться от желаемого: $I\left(t\right) = \xi\left(K^d\left(t\right) - K\left(t\right)\right) = \xi\left(\nu Y\left(t\right) - K\left(t\right)\right)$, $\xi > 0$. Коэффициент ξ – коррекционный параметр, выражающий скорость реакции инвестирования в ответ на разницу между актуальными и желаемыми запасами капитала. Для дальнейшего нам понадобится производная от инвестиций: $\frac{dI(t)}{dt} = \dot{I}\left(t\right) = \xi\left(\nu\dot{Y}\left(t\right) - I\left(t\right)\right)$. Пусть $A\left(t\right)$ есть экзогенно определенный автономный спрос. Тогда полный спрос есть сумма $C\left(t\right) + I\left(t\right) + A\left(t\right)$, а общее предложение есть $Y\left(t\right)$, и избыточный спрос в каждый период времени будет задан выражением $C\left(t\right) + I\left(t\right) + A\left(t\right) - Y\left(t\right)$. Предположим, что общее предложение меняется линейно относительно избыточного спроса: $\frac{dY(t)}{dt} = \dot{Y}\left(t\right) = \zeta\left(C\left(t\right) + I\left(t\right) + A\left(t\right) - Y\left(t\right)\right)$, $\zeta > 0$, где ζ – коррекционный параметр. Дифференцируя последнее соотношение, с учетом вида функции потребления получим: $\ddot{Y}\left(t\right) = \zeta\left(-\left(1-c\right)\dot{Y}\left(t\right) + \dot{I}\left(t\right) + \dot{A}\left(t\right)\right)$, или, с учетом выражения для $\dot{I}\left(t\right)$,

$$\ddot{Y}(t) = \zeta\left(-(1-c)\,\dot{Y}\left(t\right) + \xi\left(\nu\dot{Y}(t) - \left(\frac{\dot{Y}\left(t\right)}{\zeta} + (1-c)Y\left(t\right) - A\left(t\right)\right)\right) + \dot{A}\left(t\right)\right),$$

или $\ddot{Y}\left(t\right) + \left(\zeta\left(1-c\right) + \xi - \zeta\xi\nu\right)\dot{Y}\left(t\right) + \zeta\xi\left(1-c\right)Y\left(t\right) = \zeta\xi A\left(t\right) + \zeta\dot{A}\left(t\right)$. Полагая для простоты $\dot{A}\left(t\right) = 0$, $A\left(t\right) \equiv A$, получим линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами второго порядка: $\ddot{Y}\left(t\right) + \left(\zeta\left(1-c\right) + \xi - \zeta\xi\nu\right)\dot{Y}\left(t\right) + \zeta\xi\left(1-c\right)Y\left(t\right) = \zeta\xi A$. Как и в дискретном случае, решением этого уравнения будет непрерывная функция, представляющая собой в общем случае либо сумму двух экспоненциальных функций, означающую либо рост, либо спад; либо сумму двух периодических функций, умноженную на экспоненциальную функцию, означающую либо затухающие, либо “разрастающиеся” колебания. Периодические движения возможны только в случае, когда коэффициент при $\dot{Y}(t)$ равен нулю, что является структурно неустойчивым случаем и в реальности никогда не достигается.

Очевидно, что и модель Самуэльсона-Хикса, и модель Филлипса, как и некоторые другие (например модель Калецки [11]) являются линейными, в общем случае не допускают периодического движения.

К первым попыткам создания нелинейных моделей бизнес-циклов относятся исследования Хикса. Поскольку в исходной модели Хикса инвестиции пропорциональны изменению дохода в прошлом периоде, то в случае уменьшения дохода инвестиции становятся отрицательным (происходит деинвестирование, или изъятие капиталовложений), при этом капитал не может уменьшаться больше, чем на максимальную величину его амортизации при отсутствии замены изношенного оборудования. Это дает нижнюю границу деинвестирования, которую Хикс назвал полом. Хикс также ввел верхнюю границу – потолок I^c (тогда $I_t = \max\left\{ I^c,\ \beta\cdot(Y_{t-1}-Y_{t-2}),\ -I^f \right\}$). Потолок Хикса у функции инвестиций можно объяснить различными ограничениями, которые накладываются по тем или иным причинам на факторы производственных функций, используемых в модели. Отметим, что модель Хикса – одна из первых в истории нелинейная модель циклов деловой активности с дискретным временем. Однако особенности инвестиционной функции (кусочно-линейная) и неразвитость математического аппарата в пятидесятых годах двадцатого столетия не позволили провести качественный анализ модели. Только в последнем десятилетии этот анализ проведен Пу, Сушко и Гардини (см., например, [14]).

Первыми нелинейными моделями, исследованными полностью методами качественной теории дифференциальных уравнений, были несколько моделей, предложенных Гудвиным (Goodwin, см. [9]). Также весьма известной нелинейной моделью бизнес-циклов является модель Калдора [10, 5]. Отметим, что создание двумерных нелинейных моделей циклов деловой активности с непрерывным временем (помимо пионерских моделей Гудвина и Калдора этой деятельностью занимались достаточно большое количество исследователей, см., например, список литературы в [8]) явилось безусловным прорывом в моделировании данного процесса. Однако все эти модели являются абсолютно детерминированными и не объясняют тех явлений, отражаемых в статистических временных рядах, которые говорят о том, что реальная динамика экономики подчиняется вероятностным законам. В современной литературе по моделированию экономической динамики наличие таких явлений часто объясняют присутствием признаков хаоса. Сложные режимы, обнаруженные в шестидесятых годах в достаточно простых трехмерных нелинейных динамических системах с непрерывным временем, моделирующих реальные процессы, оказались способны объяснить весьма нетривиальные явления, происходящие в атмосфере. Внезапность, с которой в экономической динамике происходят различные непредсказуемые изменения – от скачков курсов валют до краха экономики США 1929 года – признак именно таких процессов со сложными режимами.

Известно, что в случае непрерывного времени сложные режимы могут присутствовать в не менее, чем трехмерных, динамических системах. Начиная с конца семидесятых годов, различные исследователи, и часто небезуспешно, строили модели бизнес-циклов с непрерывным временем размерности 3. Такие модели можно увидеть, например, в [8, с. 168], а также в переведенной на русский язык книге [1]; там же можно найти ссылки на другие источники. Однако гораздо более богатые возможности в плане изучения хаотических свойств циклов деловой активности дают модели с дискретным временем – эти системы сложную динамику могут иметь, уже начиная с размерности один. Особенно популярным у исследователей, занимающихся моделированием экономической динамики в дискретном времени, является логистическое отображение $x_{n+1} = \mu x_n (1 - x_n)$ и подобные ему отображения (см., например, работы восьмидесятых годов Ричарда Дея [18]). К сожалению, это отображение плохо подходит для моделирования циклов деловой активности – зависимость инвестиций от изменения дохода в виде параболы, направленной ветвями вниз, в реальности встретить трудно. Однако упомянутую зависимость возможно представить в виде соответствующим образом подобранной кубической параболы. Идея рассмотрения функции инвестиций в таком виде принадлежит Пу [2, с. 142; 16], и на его модели мы остановимся подробнее. Подобно Хиксу, заменившему впоследствии линейную зависимость инвестиций от изменений дохода на зависимость с “полом” и “потолком”, Пу заменяет ее на кубическую: $I_t = v(Y_{t-1} - Y_{t-2}) - v(Y_{t-1} - Y_{t-2})^3$; здесь v – постоянная. Этот шаг разумен, так как полученная в результате функция в некоторой достаточно большой окрестности начала координат слабо отличается от функции, используемой в модели с полом и потолком Хикса, но при этом не является кусочно-линейной, то есть существенно более удобна для исследования. Равенство коэффициентов при обоих слагаемых Пу объясняет установлением соответствующего курса валюты. Далее предполагается, что сбережения хранятся только в течение одного временного периода и в следующем периоде полностью тратятся, то есть потребление в текущем периоде равно сумме потребленной части дохода предыдущего периода и накопленным сбережениям, отложенным два периода назад. Таким образом, $C_t = (1-s)Y_{t-1} + sY_{t-2}$. Пусть, как обычно, $Y_t = C_t + I_t$, тогда, подставляя в это соотношение выражения для I_t и C_t, получим разностное уравнение: $Y_t - Y_{t-1} = (v-s)(Y_{t-1} - Y_{t-2}) - v(Y_{t-1} - Y_{t-2})^3$. Прирост дохода обозначим $Z_t = Y_t - Y_{t-1}$, тогда получим $Z_t = (v-s)Z_{t-1} - vZ_{t-1}^3$. Далее автор модели утверждает, что можно так перемасштабировать переменные, входящие в последнее уравнение (это показано в [15]), что в новом масштабе оно будет выглядеть следующим образом: $Z_t = \lambda Z_{t-1} - (\lambda+1) Z_{t-1}^3$; последнее уравнение содержит только один параметр, и является удобным для исследования. Динамика полученной системы подробно исследована в [2] и

[15]. При $\lambda < 2$ отображение имеет две неподвижные точки и не имеет периодических орбит. Орбита периода два рождается при переходе через значение $\lambda = 2$. При увеличении значения параметра λ происходит хорошо известный каскад бифуркаций удвоения периода, то есть при увеличении значения λ данная динамическая система последовательно приобретает устойчивые периодические орбиты периодов, равных степеням числа два, а затем, в некотором вполне определенном порядке, орбиты всех остальных периодов ("приобретенная" на предыдущем шаге орбита теряет устойчивость с рождением новой). Так, при значении $\lambda \approx 2,25$ рождается устойчивая периодическая орбита периода 4 (орбита периода 2 теряет устойчивость), а при $\lambda \approx 2,295$ – периодическая орбита периода 8. Можно представить себе степень усложнения динамики данного отображения при возрастании параметра. При $\lambda \approx 2,4$ у отображения уже имеется бесконечное число периодических орбит различных периодов и имеет место ситуация, определяемая словом "хаос". Таким образом, представленная динамическая система с дискретным временем описывает циклы деловой активности при наличии хаотических режимов.

Модель, рассмотренная выше, не является единственной дискретной моделью циклов деловой активности со сложной динамикой. Более подробная информация о моделях экономической динамики, допускающих хаотические режимы, содержится, например, в [4, 8].

Библиографический список

1. *Занг, В.-Б.* Синергетическая экономика. Время и перемены в нелинейной экономической теории [Текст] / В.-Б Занг; перевод с англ. – М.: Мир, 1999.
2. *Пу, Т.* Нелинейная экономическая динамика [Текст] / Т. Пу; перевод с англ. – М.-Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2000.
3. *Allen, R.G.D.* Mathematical Economics. – London: Macmillan, 1956.
4. Business Cycle Dynamics: Models and Tools / Puu T., Sushko I. (Editors) – Springer-Verlag, 2006.
5. *Chang, W.W., Smyth, D.J.* The Existence and Persistence of Cycles in a Non-Linear Model: Kaldor's 1940 Model Re-examined // Review of Economic Studies. 1971. Vol. 38. № 1, p. 37-44.
6. *Dominguez, K.M., Fair, R.C., Shapiro, M.D.* Forecasting the Depression: Harvard Versus Yale // American Economic Review. 1988. Vol. 78. № 4, p. 595-612.
7. *Hicks, J.R.* A Contribution to the Theory of the Trade Cycle. – Oxford University Press, 1950.
8. *Gabisch, G., Lorenz, H.-W.* Business Cycle Theory: A Survey of Methods and Concepts. – Springer-Verlag, 1989.
9. *Goodwin, R.M.* The Nonlinear Accelerator and Persistence of Business Cycle // Econometrica. 1951. Vol. 19. № 1, p. 1-17.
10. *Kaldor, N.* A Model of the Trade Cycle // Economic Journal. 1940. Vol. 50. № 1, p. 78-92.
11. *Kalecki, M.* A Theory of the Business Cycle // Review of Economic Studies. 1937. Vol. 38. № 1, pp. 77-97.
12. *Keynes, J.M.* The General Theory of Employment Interest, and Money. – London: Macmillan, 1936.
13. *Phillips, A.W.* Stabilization Policy in a Closed Economy // Economic Journal. 1954. Vol. 64. № 254, p. 290-323.
14. *Puu, T., Gardini L., Sushko, I.* On the change of periodicities in the Hicksian multiplier-accelerator model with a consumption floor // Chaos, Solitons and Fractals. 2006. Vol. 29. № 3, p. 681-696.
15. *Puu, T., Sushko, I.* A business cycle model with cubic nonlinearity // Chaos, Solitons and Fractals. 2004. Vol. 19. № 3, p. 597-612.
16. *Puu, T.* Short History of the Multiplier-Accelerator Model // Business Cycle Dynamics: Models and Tools. – Springer-Verlag, 2006, p. 79-112.
17. *Samuelson, P.A.* Interactions between the Multiplier Analysis and the Principle of Acceleration // The Review of Economics and Statistics. 1939. Vol. 21. № 2, p. 75-78.
18. *Day, R.H.* Irregular Growth Cycles // The American Economic Review. 1982. Vol. 19. № 3, p. 406-414.

Возможная модель Вселенной (геометрия Минковского и ее приложение)[1]

А.М. Дроздов, А.Л. Жохов, Е.А. Дроздов

Ничто так не способствует общему развитию и формированию сознания, как знакомство с историей творческих усилий человечества в области науки, оживающих в жизнеописаниях великих ученых прошлого и в истории эволюции идей.
Поль Ланжевен[2] (1872-1946)

Начало нашей работы по созданию предлагаемого варианта модели Вселенной, основывающейся на геометрии Минковского, было положено четверть века тому назад. В данной статье мы продолжим тему в плане уточнения и детализации некоторых положений предыдущей публикации [10]. Вместе с тем сразу же отметим то общее, что связывает эти две публикации, и, одновременно, некоторое изменение нашей первоначальной позиции, произошедшее в связи с различными обстоятельствами и временем. Основываясь на классификации важнейших

[1]Работа выполнена в рамках договора о сотрудничестве ЯГПУ с Криворожским государственным университетом (Украина).

[2]*Ланжевен, П.* Избранные произведения. М.: Изд-во иностранной литературы, 1949. С. 311. – Взято из [12, с. 242].

составляющих, представленной в работе Ю.С. Владимирова [12], общим является идея геометризации физики, в рамках которой были написаны обе статьи. Их отличительные особенности в том, что в 80-х годах мы, хотя бы официально, должны были находиться в рамках диалектико-материалистического подхода к осмыслению мира, господствующего в то время в советской науке, тем более развиваемой в рамках провинциального вуза.

Пространство Минковского обладает структурой в 4-х мерной системе координат, определяемой двумя фигурами, подобными однополостному гиперболоиду вращения, описываемому уравнением $x^2+y^2+z^2-c^2t^2=1$, и двуполостному гиперболоиду вращения с уравнением $x^2+y^2+z^2-c^2t^2=-1$. Геометрия Минковского представляет собой аффинное пространство, в котором введена некоторая метрика, позволяющая определять расстояние между точками и рассматривать конгруэнтность фигур, движение и т.д.

Теория относительности в первом приближении была обоснована геометрическим преобразованием Галилея, во втором приближении – 4-х мерной геометрией Г. Минковского, который показал связь между преобразованиями классической механики и специальной теории относительности (СТО) на основе принципа соответствия за несколько лет до того, как Н.Бор ввел этот принцип в научный обиход. Смысл этого соответствия, по Минковскому, заключается в том, что механика Галилея строится на группе пространственных преобразований, определяемой бесконечной величиной скорости света, а механика СТО – на группе, определяемой конечной скоростью света. При этом в группе преобразований Минковского, в отличие от галилеевой, не только координаты времени, но и координаты пути в движущейся системе отличны от координат в покоящейся системе. Минковский формально ввел в свою геометрию переменную величину $\boldsymbol{c}$ скорости света следующей фразой: “Пусть $\boldsymbol{c}$ стремится к бесконечности”. И далее он показал, что его геометрия при этом предположении превращается в геометрию Галилея, благодаря чему достигается инвариантность этих групп пространственных преобразований [1, с. 169-170].

И классическая механика, и СТО, и их геометрические формы справедливы лишь для условий равномерного прямолинейного движения, т.е. для случая отсутствия или постоянства гравитации. Для ускоренного движения или условия переменного гравитационного поля А. Эйнштейн воспользовался системой нелинейных дифференциальных уравнений, каким отвечает геометрия Римана: “То обстоятельство, что в неускоренных системах отсчета тела ведут себя при наличии поля тяжести так же, как если бы система отсчета была ускоренной, принуждает нас к попытке распространить принцип относительности на случай ускоренных систем отсчета. С математической точки зрения это сводится к тому, что к уравнениям, выражающим законы природы, мы прибавляем требования не только относительно линейных ортогональных преобразований, но и относительно более общих, в особенности нелинейных ортогональных преобразований, поскольку лишь нелинейные преобразования соответствуют переходу к относительно ускоренным системам” [3].

Поскольку постоянству гравитационного потенциала, описываемого линейными дифференциальными уравнениями, отвечает постоянство скорости света, то для переменного гравитационного поля условием пространственных преобразований должна быть переменная скорость света, что и было положено А. Эйнштейном в основу общей теории относительности [4].

Сегодня в физике нет теоретических ограничений для интервала переменных величин скорости света в реальных условиях Вселенной, что позволяет допустить возможность ее изменений в максимальных пределах от бесконечности в отсутствии вещества до нуля в чисто вещественном состоянии в отсутствии электромагнитного поля.

В геометрии Минковского любая произвольная точка “O” может быть сделана нулевой точкой пространства и времени. Подобная относительность позволяет рассматривать время как в положительной, так и в отрицательной части временной оси координат [1, с. 173] подобно температуре в шкале Цельсия. Для геометрического описания многообразия точек, названных миром в условиях переменного гравитационного поля, более правомерна аналогия с абсолютной шкалой температур. Подобную потенциальную возможность 4-х мерной геометрии Г. Минковский назвал “постулатом абсолютного мира” [1, с. 173].

Построив свою геометрию на симметричных пространственных фигурах, подобных гиперболоидам вращения, Г. Минковский в целях простоты пренебрег всеми видами симметрии и ограничился рассмотрением лишь верхней половины системы координат (см. рис. 1).

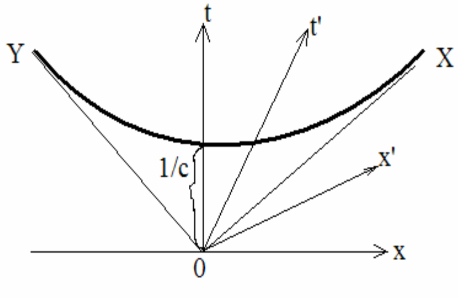


Рис. 1. Упрощенный вариант геометрии Минковского в отвлечении от всех видов симметрии

Тем самым он построил довольно грубую модель, справедливую для применения лишь в первом приближении.

С учетом симметрии относительно осей “x” и “t” плоскостная проекция геометрии Минковского будет выглядеть так, как на рис. 2.

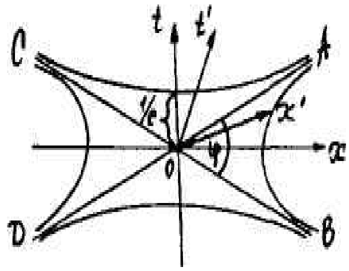


Рис. 2. Плоскостная проекция геометрии Минковского в симметричном варианте. (CB и AD являются не осями координат, а линиями угла “светового конуса”)

В ней уже намечаются некоторые расширения первой модели, хотя и все еще построенной для стационарного случая. Вариант же геометрии Минковского для условия переменного гравитационного поля выступает уже в качестве полноправной реальной модели, обладающей и осью симметрии (“x”), и плоскостью симметрии (ct), и симметрией вещества (система двух тел). Ниже будет показано, что при эволюции этой геометрической модели возможно достижение промежуточного изотропного состояния шарообразной формы, обладающей точкой симметрии. Таким образом, n-мерный вариант геометрии Минковского обладает всеми основными видами симметрии.

В N-мерной геометрии координаты времени для покоящейся системы отсчета не принимают отрицательных значений, а преобразования пространства-времени рассматриваются в абсолютной системе координат, в которой бесконечное число групп пространственно-временных преобразований приобретают универсальную инвариантность.

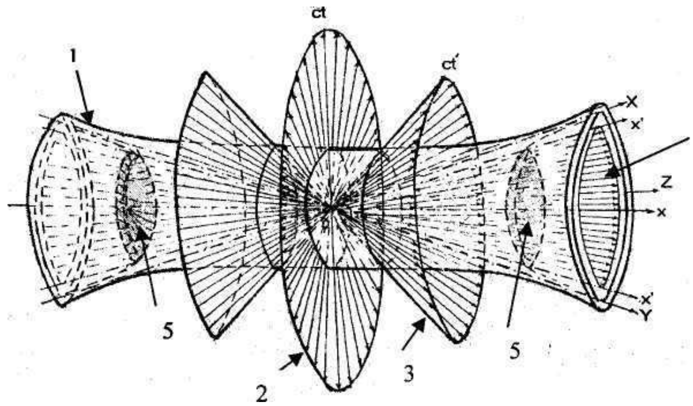


Рис. 3. Вариант геометрии Минковского для условия переменного гравитационного поля. 1 – фигура, подобная однополостному гиперболоиду, 2 – плоскость осей координат времени, покоящейся системы отсчета, 3 – поверхность конуса координат времени движущейся системы отсчета, 4 – конус координат пути движущейся системы отсчета, 5 – система двух тел с поверхностью, описываемой инвариантом СТО

Космологическая проблема, сформулированная более полувека тому назад, гласит: необходимо определить состояние Вселенной в любой наперед заданный момент времени. Проблема поставлена, но до сих пор не получила приемлемого для научного сообщества решения, хотя общепринятым является отправной пункт поисков: специальный и общий принципы относительности. Принцип СТО: законы, управляющие явлениями природы, *не зависят* от состояния движения системы координат, по отношению к которой эти явления наблюдаются, если эта система движется без ускорения [10].

Принцип ОТО: законы, управляющие явлениями природы, *зависят* от состояния движения системы координат, по отношению к которой эти явления наблюдаются, если эта система движется с ускорением. С помощью такой системой координат проявилась, зафиксированная в ОТО эквивалентность инертной и тяготеющей масс.

Искомая модель Вселенной должна описать материальный мир целиком в границах физического релятивизма. Такие границы определяются предельным интервалом ускоренного движения системы координат наблюдателя. Отсюда в качестве гипотезы при построении модели эволюционирующей Вселенной нами положен максимально возможный интервал последовательной реализации переменных значений скорости света, определяемых ускоренным движением системы координат, или изменением гравитации:

$$\infty \geq c \geq 0.$$

Принцип и известные теории относительности положены в основу современного естествознания. Они описывают материальный мир в его пространственно-временном бытии как динамичный по своей природе. С позиций релятивизма условны и относительны не только скорость, энергия тел, но также и их пространственно-временные параметры и связанные с ними фундаментальные мировые константы. Такой далеко идущий релятивизм оценивает относительность самого принципа относительности. Ярким выражением такого релятивизма является синергетика и картина мира, построенная на непредсказуемых бифуркациях. Предчувствуя это состояние науки, А. Эйнштейн высказывал сомнение в тоталитарном господстве принципа относительности: "Бог в кости не играет". Но если есть научное основание допустить *нечто*, неподвластное принципу относительности, то – как иначе его можно назвать, как не абсолют?

Описание абсолюта в естествознании возможно через определение граничных условий физической относительности. Естественно, что такие границы возможны не для каких-то локальных систем, а для всего релятивистского мира в целом. Развивая специальный принцип относительности, Г. Минковский, пожалуй, первым увидел границы физической относительности, назвав такую область "абсолютным миром". Поскольку за столетие, прошедшее с момента опубликования работы Минковского, никто не обратил внимание на этот термин, необходимо привести его формулировку дословно. Отметив, что ни Эйнштейн, ни Лоренц не касались преобразований пространства, ограничиваясь лишь преобразованиями времени, он пишет: "Но после такого все-таки неизбежного шага для понимания группы G_{C} термин "постулат относительности" для требования инвариантности по отношению к группе G_{C} кажется мне слишком бледным. Тем самым постулат сводится к тому, что в явлениях нам дается только четырехмерный в пространстве и времени мир, но что проекции этого мира на пространство и время могут быть взяты с некоторым произволом, мне бы хотелось этому утверждению дать скорее название "постулат абсолютного мира..." [1].

Минковский сам отдавал отчет в недостаточной аргументации для введения в науку такого понятия, поскольку здесь же дает ему другое название "мировой постулат". Понятие "абсолютный мир" не вписывалось в парадигму естествознания столетней давности. В то время скорость света была только определена и закреплена СТО в качестве конечной и постоянной величины, для обоснования именно этой теории Минковский и выдвинул свой четырехмерный мир. Но он тут же заметил, что его геометрия может иметь значительно большую область применения, где скорость света – величина переменная. Взять проекции четырехмерного мира на пространство и время с некоторым произволом означает взять их для случая переменной "c". Иными словами, требование инвариантности по отношению к группе G_{C} имеет смысл только при переменной скорости света. К таким же выводам пришел и Эйнштейн: скорость света зависит от гравитации, т.е. является функцией системы координат [2]. Но и до сих пор многие физические теории строят на основе постоянства скорости света в вакууме, хотя известна зависимость скорости света от величины гравитационного потенциала, а последний является величиной переменной для данной точки пространства в эволюционирующей Вселенной.

Однако измерения пока свидетельствуют об обратном: о постоянстве гравитационного потенциала несмотря на эволюцию Вселенной. Это противоречие можно решить, допустив, что реально протекающий процесс изменения во времени гравитационного потенциала и связанной с ним скорости света настолько малы, что постоянная в инструментальных измерениях величина должна быть названа не истинной, а кажущейся величиной. Тогда единственным способом убедиться сегодня в справедливости допущения переменной величины скорости света в физические теории является создание соответствующей теории с последующей экспериментальной проверкой вытекающих из нее следствий. Предпосылкой для создания теории "абсолютного мира" является наложение максимально возможного интервала переменных значений скорости света на геометрию Минковского, в рамках которой была выдвинута группа пространственных преобразований G_{C}. Тем самым представляется возможным установить предельные значения параметров этой группы, а через них и искомые пределы физической относительности в целом.

В отличие от этого геометрия Римана, положенная в основу ОТО, не дала возможности определить пределы физической относительности. Благодаря этому большое множество космологических моделей, включающие в себя даже прямо противоположные (статическую и эволюционирующую), оказались вполне приемлемыми с точки зрения ОТО. Трудности, которые возникают при применении ОТО к решению космологической проблемы, А.А. Логунов назвал "непроходимыми дебрями". Сам же он для преодоления этих трудностей расчет пространства систем стал осуществлять методом, подобным тому, какой используется для расчета рельефа Земли. С этой целью он вводит в свою релятивистскую теорию гравитации понятие "эталонного" пространства, роль которого выполняет у него "плоское" пространство Минковского. Однако плоским это пространство назвать можно лишь условно. На самом деле метрически плоским с нулевой кривизной геометрия Минковского оказывается при скорости света равной нулю. Теория Логунова построена на принятой сегодня в физике гипотезе о постоянной и конечной величине скорости света. Своим выбором геометрии Минковского, А.А. Логунов сделал шаг вперед в сравнении с ОТО, но, ограничившись постоянной величиной скорости света, он не вышел на границы физической относительности. Его метод не позволил преодолеть неопределенность описания физического мира в большом масштабе. В результате он получил модель Вселенной с крайне ограниченными возможностями – плоскую, статическую и бесконечную [5].

ОТО определяет гравитационное поле через вещество путем ограничения в выборе системы отсчета [6]. Пределом такого ограничения может быть одна, а может быть и две взаимодействующие между собой системы отсчета. Поскольку в геометрии Минковского тела можно описать, лишь получая их проекции на пространство в области пространственно-подобных квадрантов, метрика которых задана уравнением двуполостного гиперболоида, то в общем плане для описания тел в переменном гравитационном поле необходимо решить задачу движения двух тел, имеющих форму двояковыпуклых линз, поверхность которых описывается инвариантом СТО. Иными словами, задача описания движения тел в переменном гравитационном поле сводится к нахождению инварианта объема тел в рамках модифицированной геометрии Минковского. Симметрия полученной системы двух тел определится также неголономностью пространства, обусловливающей "спиновое" вращение тел Вселенной [7] и обращение во времени при переходе от одного тела к другому, что с точки зрения фейнмановской теории античастиц [8] определит их как антимиры.

Полная энергия полученной системы описывается законом Дирака [9]:

$$\mathrm{E} = 2mc^2 + \mathrm{T}.$$

Этот закон, имея в качестве слагаемых компоненты гравитационной и кинетической энергии, дает основу для построения механики изолированной системы в виде цикла, состоящего из двух фаз – расширения и сжатия – двух сингулярных состояний материи в виде, с одной стороны, чисто электромагнитного, а с другой, – чисто вещественного. При таком их движении угол светового конуса AOB (смотри рис. 4) изменяется от 0^o до 180^o. Форма силового взаимодействия двух миров определится конфигурацией их поверхности и даст вместе с конфигурацией тел единую сферу Вселенной, претерпевающей эволюцию от вытянутого эллипсоида вращения через шар к сплюснутому эллипсоиду вращения (рис. 3). На шарообразной стадии (смотри рис. 5) наблюдается выравнивание продольной и поперечной деформации тел, что приводит к временной изотропии пространства. С точки зрения изложенной гипотезы отпадает необходимость исследования знака кривизны пространства материального мира на данной стадии эволюции Вселенной, выдвигаемое А. Эйнштейном [10]. Положительная кривизна присуща сфере двух тел, отрицательная кривизна – псевдосфере, описываемой процессом эволюции каждого из миров. Таким образом, получен инвариант объема в рамках модифицированной геометрии Минковского. Для завершения теории абсолютного мира необходимо получить аналитическое выражение этого инварианта.

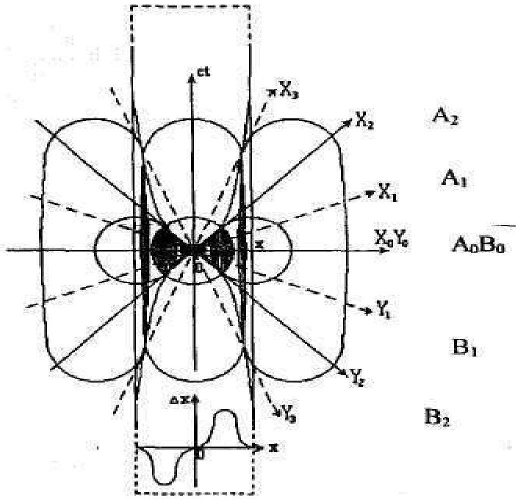


Рис. 4. Геометрия движения абсолютного мира. (В нижней части рисунка график колебательного движения Вселенной)

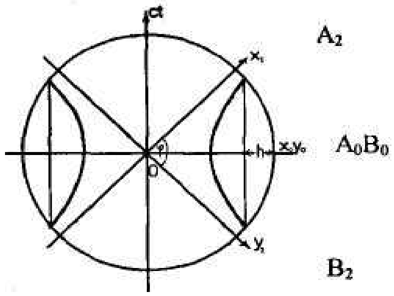


Рис. 5. Изотропная стадия движения Вселенной, угол светового конуса $\varphi = 90°$

Выводы. 1. Пространство N-мерного варианта геометрии Минковского применительно к модели эволюционирующей Вселенной ограничено двумя пределами: одномерным пространством первого сингулярного состояния и двумерным пространством второго сингулярного состояния.

2. При построении своей геометрии Минковский воспользовался инвариантом СТО А. Эйнштейна, в котором он увидел уравнения, описывающие фигуры, подобные одно- и двуполостным гиперболоидам вращения. Можно предположить, что из бесконечного количества плоскостей сечения этих симметричных объемных фигур, проходящих через ось симметрии, Г. Минковский произвольно выбрал только одну, на которой и представил свой плоскостной вариант, удобный для сопоставления с геометрией Галилея. Тем самым изначально структура его геометрии несла в себе возможности N-мерного варианта, ограничив его 4-х мерным вариантом.

3. N-мерный вариант геометрии Минковского выявляет определенное соответствие с теорией "струн", заключающееся в том, что, как и струны, оси координат не являются физическими образованиями, а представляют собой математические средства для описания физического мира. Построенная модель абсолютного мира дает основу для решения космологической проблемы, поскольку в какой-то мере отвечает принципам лапласовсого детерминизма.

На наш взгляд, в заключение статьи имеет смысл привести следующие выводы современного физика-теоретика Ю.С. Владимирова [12, с. 240-241], касающиеся развития идей геометрического миропонимания.

"...характерной чертой развития фундаментальной теоретической физики в минувшем столетии явился переход от трех ключевых категорий классической физики к двум... основные физические теории минувшего столетия – квантовая теория поля и общая теория относительности – развивались в рамках дуалистических парадигм... теоретико-полевой и геометрической.

Огромные интеллектуальные усилия были затрачены на решение проблемы квантования гравитации, т.е. на совмещение принципов квантовой теории и общей теории относительности, принадлежащих разным парадигмам.

У Норберта Винера (1894-1964) можно найти такое высказывание: "Нынешняя физика представляет собой ряд отдельных теорий, которые еще ни одному человеку не удалось убедительно согласовать между собой"... Постигшие физиков неудачи в решении этой задачи обусловлены причинами метафизического характера".

Библиографический список

1. *Минковский, Г.* Пространство и время [Текст] / Г. Минковский // Принцип относительности. – М.: Атомиздат, 1973. – С. 173.
2. *Эйнштейн, А.* Относительность и гравитатция. Собрание научных трудов [Текст]. В 4 т. Т. 1 / А. Эйнштейн. – М.: Наука, 1965. – С. 219.
3. *Эйнштейн, А.* К современному состоянию проблемы тяготения. Собрание научных трудов [Текст]. В 4 т. Т. 1 / А. Эйнштейн. – М.: Наука, 1965. – С. 284.
4. *Эйнштейн, А.* Собрание научных трудов [Текст]. В 4 т. Т. 1 / А. Эйнштейн. – М.: Наука. – 1965. – С. 189, 201, 219, 228, 287, 318, 383, 392.
5. *Логунов, А.А.* Основы релятивистской теории гравитации [Текст] / А.А. Логунов, М.А. Мествиришвили // Физика элементарных частиц и атомного ядра. – 1988. – Т. 17. – С. 1.
6. *Эйнштейн, А.* Обобщенная теория относительности и теория гравитации. Собрание научных трудов [Текст]. В 4 т. Т. 1 / А. Эйнштейн. – М.: Наука, 1965. – С. 323.
7. *Dirac, P.A.* M. Proc. Soc. A. 117, 610 (1928), 118, 356.
8. *Эйнштейн, А.* О космологической проблеме. Собрание научных трудов [Текст]. В 4 т. Т. 1 / А. Эйнштейн. – М.: Наука, 1965. – С. 229.
9. *Дроздов, А.М.* Статистическая обработка данных периодической системы химических элементов – метапериод [Текст] / А.М. Дроздов, Г.И. Елизаров, А.А. Макареня. – Кривой Рог: КГПИ. – Деп. в Укр. НИИНТИ 20.05.87. – 13 с.
10. *Дроздов, А.М.* Новые возможности геометрии Минковского [Текст] / А.М. Дроздов, А.Л. Жохов, Е.А. Дроздов. – Кривой Рог, 1988. – Деп. в УкрНИИ НТИ 02.06.88г., №517-Ук88. – 24 с.
11. *Дроздов, А.М.* Исследование верхней границы периодической системы химических элементов [Текст] / А.М. Дроздов // Вiсник Мiжнародного дослiдного центру. – К., 2005. – Т. 5. – С. 168-175.
12. *Владимиров, Ю.С.* Между физикой и метафизикой [Текст] / Ю.С. Владимиров. – М.: Книжный дом "ЛИБРОКОМ", 2011. – Кн. 2. – 248 с.

Линейные подпространства на симплектических грассманианах

С.М. Ермакова

В статье рассматривается вопрос о том, существуют ли на симплектических грассманианах подпространства, и какова их максимальная размерность.

Для начала напомним некоторые факты алгебраической геометрии, используемые в дальнейшем.

Определение 1. Многообразием Грассмана $Gr(k;V^n)$ называется множество всех k-мерных линейных подпространств векторного пространства V^n.

$Gr(k;V^n)$ можно рассматривать как множество $(k-1)$-мерных подпространств проективного пространства $\mathbb{P}^{n-1}$. В этом случае пишут $G(k-1;n-1)$ или $G(k-1;\mathbb{P}(V))$ [1, с. 88]. Размерность грассманиана $G(k;n)$ вычисляется по формуле

$$\dim G(k,n) = (k+1)(n-k).$$

При плюккеровом вложении грассманиан представляет собой многообразие. Отображение $\psi : G(k;n) \longrightarrow \mathbb{P}^N$, $N = C_{n+1}^{k+1} - 1$ каждой k-мерной плоскости из $\mathbb{P}^n$ ставит в соответствие точку из $\mathbb{P}^N$.

Утверждение 1. *Для любых двух точек $A, B \in G(k;n)$ прямая, проходящая через них, лежит на $Gr(k;n)$ тогда и только тогда, когда в проективном пространстве $\mathbb{P}^n$ k-мерные подпространства, соответствующие точкам A и B, пересекаются по $(k-1)$-мерному подпространству (или что равносильно лежат в $(k+1)$-мерном пространстве)* [1, с. 93].

Следствие. *Любая прямая $L \subset G(k;n) \subset \mathbb{P}^N$ в проективном пространстве $\mathbb{P}^n$ представляет собой множество k-мерных подпространств, содержащих фиксированное $(k-1)$-мерное подпространство и содержащихся в фиксированном $(k+1)$-мерном подпространстве.*

Если рассматривать грассманиан как множество линейных пространств в проективном пространстве $\mathbb{P}^n$, то подграссманианы являются множествами пространств, содержащихся в данном подпространстве и/или содержащих данное подпространство.

Утверждение 2. *Всякое максимальное линейное подпространство на $Gr(k;n)$ является либо множеством k-мерных подпространств, содержащих фиксированное подпространство из $\mathbb{P}^n$, либо множеством k-мерных подпространств, содержащихся в фиксированном подпространстве в $\mathbb{P}^n$.*

Определение 2. Симплектической формой на V называется невырожденное линейное отображение $\phi : V \longrightarrow V^\vee$, такое, что транспонированное отображение ${}^t\phi : V \xrightarrow{can} V^{\vee\vee} \xrightarrow{\phi^\vee} V^\vee$ удовлетворяет условию ${}^t\phi = -\phi$ [2, с. 24-25, 51-53]. (Матрица отображения ϕ является кососимметрической ${}^t\mathrm{A}_\phi = -\mathrm{A}_\phi$.)

Определение 3. Билинейная форма $\Phi : V \times V \longrightarrow K$, связанная с линейным отображением $\phi : V \longrightarrow V^\vee$ формулой $\Phi(\vec{u}, \vec{v}) = <\phi(\vec{u}), \vec{v}>$ называется **ассоциированной с** ϕ [2, с. 97].

Для симплектической формы ϕ билинейная форма Φ является кососимметрической, то есть для $\forall u, v \in V$ выполнено $\Phi(u, v) = -\Phi(v, u)$.

Определение 4. Симплектическим пространством называется конечномерное линейное пространство над полем K характеристики не равной 2, снабженное невырожденной симплектической формой $\phi : V \longrightarrow V^\vee$ (в котором определено невырожденное скалярное произведение $\Phi : V \times V \longrightarrow K$).

Свойства симплектического пространства [2, с. 103, 107, 181]:

1. Любое симплектическое пространство V разложимо в прямую сумму попарно ортогональных одномерных вырожденных или двумерных невырожденных подпространств: $V = V_1 \oplus V_2 \oplus : \oplus V_m$.
2. В симплектическом пространстве существует симплектический базис $(\mathrm{e}_1, :, \mathrm{e}_n, e_{n+1}, :, e_{2n})$, который характеризуется тем, что
$$\Phi(\mathrm{e}_i, \mathrm{e}_{n+i}) = -\Phi(\mathrm{e}_{n+i}, \mathrm{e}_i) = 1, i = \overline{1, n},$$
а все остальные скалярные произведения равны нулю. Матрица Грамма симплектического базиса имеет вид
$$\begin{pmatrix} 0 & -E_n \\ E_n & 0 \end{pmatrix}.$$
3. Размерность невырожденного симплектического пространства всегда четна: $\dim V = 2n$.
4. Все симплектические пространства одинаковой размерности над общим полем K изоморфны.

В статье рассматриваются симплектические пространства только четной размерности, будем обозначать их символом V^{2n}.

Определение 5. Подпространство $U \subset V^{2n}$ называется **изотропным** относительно билинейной формы $\Phi : V \times V \longrightarrow K$, если для $\forall \vec{u}, \vec{v} \in U$ выполняется условие $\Phi(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ [2, с. 181].

Утверждение 3. *Все одномерные подпространства V^1 симплектического пространства V^{2n} изотропны.*

Доказательство данного утверждения следует из того, что для $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V^1$, выполняется равенство $\Phi(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.

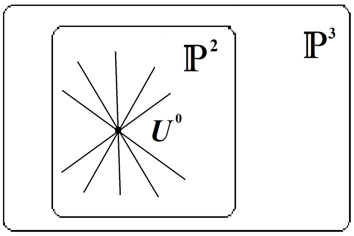
Утверждение 4. *В симплектическом пространстве V^{2n} не существует изотропных подпространств U размерности $n_1 > n$. Если $n_1 < n$, то U содержится в изотропном пространстве максимально возможной размерности n* [2, с. 181].

Определение 6. Симплектическим грассманианом $2n$-мерного симплектического пространства V^{2n} называется множество $SGr(n, V^{2n})$, точками которого являются n-мерные подпространства $V^n \subset V^{2n}$, являющиеся изотропными относительно билинейной формы $\Phi : V \times V \longrightarrow K$.

Симплектический грассманиан $SGr(n, V^{2n})$ является подмножеством грассманиана $Gr(n, V^{2n})$. Размерность симплектического грассманиана находится по формуле:
$$\dim SGr(n, V^{2n}) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Для того чтобы понять, что представляет собой прямая симплектического грассманиана в проективном пространстве рассмотрим несколько случаев:

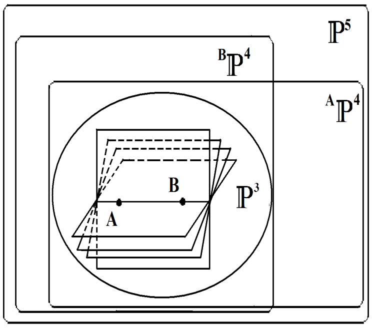
1. Симплектический грассманиан $SGr(1, V^2) = SG(0; \mathbb{P}^1) \subset G(0; \mathbb{P}^1)$ в проективной интерпретации представляет собой проективную прямую $\mathbb{P}^1$. В пространстве $\mathbb{P}^1$ существуют только подпространства размерности 0, которые являются точками проективной прямой $\mathbb{P}^1$, эти же точки соответсвуют точкам симплектического грассманиана.
2. Симплектический грассманиан $SG(1; \mathbb{P}^3) \subset G(1; \mathbb{P}^3) \subset \mathbb{P}^5$ это множество прямых линейного комплекса прямых проективного пространства $\mathbb{P}^3$. В пространстве $\mathbb{P}^3$ любой точке U^0 соответствует плоскость $\mathbb{P}(U^\vee) = \mathbb{P}^2$, где $U^0 \in^0 \mathbb{P}^2$, в проективной геометрии это соответствие названо нуль-корреляцией [7, с. 388]. Причем через точку U^0 проходят все изотропные прямые, лежащие в плоскости ${}^0\mathbb{P}^2$. То есть в $\mathbb{P}^2$ имеем пучок изотропных прямых, которому на симплектическом грассманиане соответствует прямая.



3. Симплектический грассманиан $SG(2;\mathbb{P}^5) \subset G(2;\mathbb{P}^5) \subset \mathbb{P}^{19}$ – это линейный комплекс 2-плоскостей $\mathbb{P}^2$ проективного пространства $\mathbb{P}^5$. В пространстве $\mathbb{P}^5$, с этим грассманианом связана нуль-полярная корреляция, которая точке U^0 ставит в соответствие гиперплоскость ${}^0\mathbb{P}^4$, $U^0 \in^0 \mathbb{P}^4$. Возьмем в этой же гиперплоскости еще одну точку U^1. Поскольку $U^1 \in \mathbb{P}^5$, то ей соответствует своя гиперплоскость ${}^1\mathbb{P}^4$. Две гиперплоскости ${}^0\mathbb{P}^4$ и ${}^1\mathbb{P}^4$ в пространстве $\mathbb{P}^5$ пересекаются по 3-плоскости $\mathbb{P}^3$, причем прямая, соединяющая точки U^0 и U^1, принадлежит этой плоскости. Таким образом, прямой U^0U^1 соответствует 3-плоскость $\mathbb{P}^3$, $U^0U^1 \in \mathbb{P}^3$.

   Рассматривая полученную 3-плоскость $\mathbb{P}^3$, заметим, что каждой точке $A \in \mathbb{P}^3$ в полярной корреляции соответствует 2-плоскость $\mathbb{P}^2 \subset \mathbb{P}^3$. Поскольку точка $A \in \mathbb{P}^3$ лежит в полярных гиперпоскостях точек U^0 и U^1, то гиперплоскость, соответствующая точке A проходит через точки U^0 и U^1, то есть через прямую U^0U^1. Плоскость, определенная точками U^0, U^1 и A, является изотропной. Заметим, что данный результат имеет место для любой точки 3-плоскости $\mathbb{P}^3$.

   Таким образом, в 3-плоскости $\mathbb{P}^3$ имеем пучок изотропных 2-плоскостей с осью U^0U^1, которому на симплектическом грассманиане соответствует прямая.



При рассмотрении симплектических грассманианов пространств большей размерности и проводя аналогичные рассуждения, была доказана следующая теорема.

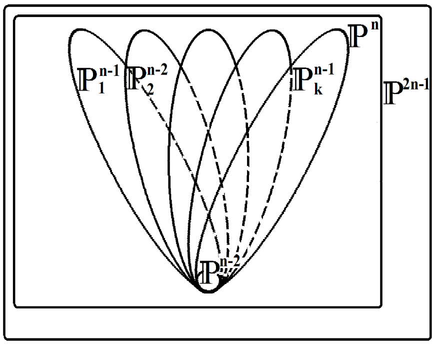
Теорема 1. *Для данного симплектического грассманиана* $SG(n-1;\mathbb{P}^{2n-1}) \subset G(n-1;\mathbb{P}^{2n-1}) \subset \mathbb{P}^N$, $N = C_{2n}^n - 1$ *изотропные плоскости* $\mathbb{P}^{n-1}$*, проходящие через плоскость* $\mathbb{P}^{n-2} \subset \mathbb{P}^{2n-1}$*, образуют в пространстве* $\mathbb{P}^n$ *пучок, которому соответствует прямая симплектического грассманиана* $SG(n-1;\mathbb{P}^{2n-1}) = SGr(n, V^{2n})$.

Доказательство. Билинейная форма, определяющая симплектический грассманиан $SG(n-1;\mathbb{P}^{2n-1})$, задает в пространстве $\mathbb{P}^{2n-1}$ нуль-полярную корреляцию, при которой точке $U^0 \in \mathbb{P}^{2n-1}$ соответствует гиперплоскость ${}^0\mathbb{P}^{2n-2}$, возьмем в данной гиперплоскости точку U^1. Поскольку $U^1 \in \mathbb{P}^{2n-1}$, то ей соответствует своя гиперплоскость ${}^1\mathbb{P}^{2n-2}$. В пространстве $\mathbb{P}^{2n-1}$ две гиперплоскости ${}^0\mathbb{P}^{2n-2}$ и ${}^1\mathbb{P}^{2n-2}$ пересекаются по $(2n-3)$ - плоскости: ${}^0\mathbb{P}^{2n-2} \bigcap^1 \mathbb{P}^{2n-2} =^{0,1} \mathbb{P}^{2n-3}$, прямая U^0U^1 принадлежит $(2n-3)$-плоскости ${}^{0,1}\mathbb{P}^{2n-3}$. Выберем точку U^2 в полярной гиперплоскости прямой U^0U^1, $U^2 \in^{0,1} \mathbb{P}^{2n-3}$. Так как точка $U^2 \in \mathbb{P}^{2n-1}$, то ей соответствует гиперплоскость ${}^2\mathbb{P}^{2n-2}$. Полярная гиперплоскость прямой U^0U^1 и полярная гиперплоскость точки U^2 пересекаются по $(2n-4)$-плоскости: ${}^{0,1}\mathbb{P}^{2n-3} \bigcap^2 \mathbb{P}^{2n-2} =^{0,1,2} \mathbb{P}^{2n-4}$, 2-плоскость $< U^0, U^1, U^2 >$ принадлежит $(2n-4)$-плоскости ${}^{0,1,2}\mathbb{P}^{2n-4}$. Далее, будем выбирать точку $U^k (k = \overline{3, n-2})$ таким образом, чтобы она лежала в полярной гиперплоскости $(k-1)$-плоскости $< U^0, U^1, U^2, :, U^{k-1} >$, то есть $U^k \in^{0,1,:,k-1} \mathbb{P}^{2n-k-1}$. Полярная гиперплоскость точки $U^k \in \mathbb{P}^{2n-1}$ и полярная гиперплоскость $(k-1)$-плоскости $< U^0, U^1, U^2, :, U^{k-1} >$ пересекаются в пространстве $\mathbb{P}^{2n-1}$ по $(2n-k-2)$-плоскости: ${}^{0,1,:,k-1}\mathbb{P}^{2n-k-1} \bigcap^k \mathbb{P}^{2n-2} =^{0,1,2,:,k} \mathbb{P}^{2n-k-2}$. k-плоскость $< U^0, U^1, U^2, :, U^k >$ принадлежит $(2n-k-2)$-плоскости ${}^{0,1,2,:,k}\mathbb{P}^{2n-k-2}$.

Для точек $U^0, U^1, U^2, U^3, :, U^{n-2} \in \mathbb{P}^{2n-1}$, выбранных выше описанным способом, получим $(n-2)$-плоскость $< U^0, U^1, U^2, U^3, :, U^{n-2} >$, лежащую в своей полярной гиперплоскости ${}^{0,1,2,:,n-2}\mathbb{P}^n$.

Рассмотрим теперь пространство $\mathbb{P}^n =^{0,1,:,n-2} \mathbb{P}^n$, каждой точке $A \in \mathbb{P}^n$ которого в соответствии с нуль-полярной корреляцией поставлена гиперплоскость $\mathbb{P}^{n-1}$. Так как точки $U^0, U^1, U^2, U^3, :, U^{n-2}$ и A лежат в пространстве $\mathbb{P}^n$, то $< U^0, U^1, U^2, U^3, :, U^{n-2}, A >$ - $(n-1)$-плоскость, которая является гиперплоскостью точки A и проходит через $(n-2)$-плоскость $< U^0, U^1, U^2, U^3, :, U^{n-2} > \subset \mathbb{P}^n$, а, следовательно, является изотропной. Данный факт справедлив для любой точки пространства $\mathbb{P}^n =^{0,1,:,n-2} \mathbb{P}^n$.

Таким образом, в каждой точке пространства ${}^{0,1,:,n-2}\mathbb{P}^n$ возникает $(n-1)$-плоскость, проходящая через $(n-2)$-плоскость. Следовательно, в пространстве $\mathbb{P}^n$ имеем пучок изотропных плоскостей $\mathbb{P}^{n-1}$, проходящих через плоскость $\mathbb{P}^{n-2}$, которому соответствует прямая симплектического грассманиана.



Теорема 2. *Любые две прямые симплектического грассманиана $SG(n-1;\mathbb{P}^{2n-1}) = SGr(n,V^{2n})$, где $n>2$, не пересекаются.*

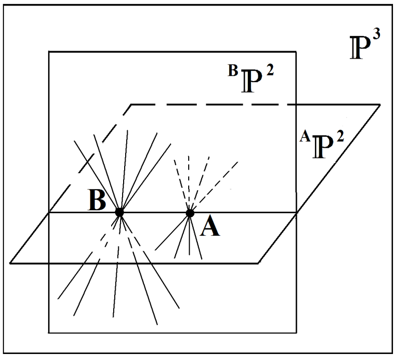
Доказательство. Как было показано в теореме 1, прямой симплектического грассманиана $SG(n-1;\mathbb{P}^{2n-1})$ является пучок изотропных плоскостей $\mathbb{P}^{n-1}$, проходящих через плоскость $\mathbb{P}^{n-2}$, в пространстве $\mathbb{P}^n$.

Предположим, что существует две прямые симплектического грассманиана, пересекающиеся в точке. Тогда в пространстве $\mathbb{P}^{2n-1}$ мы будем иметь изотропное пространство $\mathbb{P}^{n-1}$, которое будет принадлежать двум пучкам одновременно. Пусть $\mathbb{P}^{n-1}$ является изотропным пространством относительно установленной нуль-полярной корреляции для одного из пучков изотропных пространств. Это означает, что $\mathbb{P}^{n-1}$ лежит в пространстве $\mathbb{P}^n$ и проходит через соответствующее ему пространство $\mathbb{P}^{n-2}$. Для того чтобы данная изотропная плоскость являлась так же изотропной для другого пучка, должно существовать еще одно пространство $'\mathbb{P}^n$ и соответствующее ему пространство $'\mathbb{P}^{n-2}$ через которое пройдет данное изотропное пространство $\mathbb{P}^{n-1}$.
Таким образом, пространство $\mathbb{P}^{n-1}$ должно принадлежать пространствам $\mathbb{P}^n$ и $'\mathbb{P}^n$ одновременно, то есть $\mathbb{P}^{n-1} \subset \mathbb{P}^n \bigcap {}'\mathbb{P}^n$. Но пространства $\mathbb{P}^n$ и $'\mathbb{P}^n$ в пространстве $\mathbb{P}^{2n-1}$ пересекаются по прямой: $\mathbb{P}^n \bigcap {}'\mathbb{P}^n = \mathbb{P}^1$. Имеем $\mathbb{P}^{n-1} \subset \mathbb{P}^1$. Но данное включение не возможно для $n>2$.

Таким образом, на симплектическом грассманиане $SG(n-1;\mathbb{P}^{2n-1}) = SGr(n,V^{2n})$, где $n>2$, любые две прямые не пересекаются.

Следствие. *На симплектическом грассманиане $SG(n-1;\mathbb{P}^{2n-1}) = SGr(n,V^{2n})$, где $n>2$, не существует линейных подпространств размерности, больших* 1.

Замечание. Исключением из теоремы 2 является симплектический грассманиан $SG(1;\mathbb{P}^3)$. Так как $n=2$, то для двух произвольно точек A и B пространства $\mathbb{P}^3$ соответствующие им гиперплоскости ${}^A\mathbb{P}^2$ и ${}^B\mathbb{P}^2$ пересекаются по прямой. Если одна из точек лежит в полярной гиперплоскости другой, то прямая AB изображает точку $SG(1;\mathbb{P}^3)$, так как она будет являться изотропной для каждой из гиперплоскостей. Таким образом, существуют две прямые симплектического грассманиана $SG(1;\mathbb{P}^3)$, которые пересекаются в точке.



Библиографический список

1. *Харрис, Д.* Алгебраическая геометрия. Начальный курс [Текст] / Д. Харрис / перевод с англ. под ред. Ф.Л. Зака. - М.: МЦНМО, 2005. – 400 с.
2. *Кострикин, А.И.* Линейная алгебра и геометрия [Текст] / А.И. Кострикин, Ю.А. Манин. - М.: Изд-во МГУ, 1980. – 320 с.
3. *Шафаревич, И.Р.* Основы алгебраической геометрии [Текст] / И.Р. Шафаревич. – 2-е изд., перераб. и доп. - М.: Наука, 1988. – Т. 1. – 352 с.

4. *Буземан, Г.* Проективная геометрия и проективные метрики [Текст] / Г. Буземан, П. Келли; перевод с англ. Л.И. Головиной; под ред. И.М. Яглома. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1957. – 409 с.
5. *Кострикин, А.И.* Введение в алгебру [Текст]: учебник для вузов / А.И. Кострикин. – М.: Физико-математическая литература, 2000. – Ч. 2. – 368 с.
6. *Гриффитс, Ф.* Принципы алгебраической геометрии [Текст] / Ф. Гриффитс, Дж. Харрис; пер. с англ. – М.: Мир, 1982. – Т. 1. – 496 с.
7. *Ходж, В.* Методы алгебраической геометрии [Текст] / В. Ходж, Д. Пидо; перевод с англ. Л.И. Головиной, О.Н. Головина; под ред. А.И. Узкова. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1957. – Т. 1. – 462 с.

Оптимизация жесткости рельсовых путей с целью предотвращения крушений на железнодорожном транспорте

Л.П. Размолодин

За прошедшее время, начиная с 1990 г. до 2000 г. в связи с сокращением в России уровня промышленного и сельскохозяйственного производства, а также торгового оборота объем перевозок железнодорожным транспортом снизился в среднем на 40%. Однако, начиная с 2001 г. валовый национальный продукт начал расти в среднем на 3%-5% в год, что повлекло увеличения грузооборота на железнодорожном транспорте. В настоящее время железной дорогой перевозится в среднем 1,3 млрд. т. грузов и 1,4 млрд. пассажиров в год.

Железнодорожный путь для России, протяженность которого равна 86 тыс. км., является важнейшей частью ее транспортной инфраструктуры. От состояния путей зависит непрерывность и безопасность движения поездов, объемы перевозок, эффективность использования подвижного состава, поэтому вопросы его надежности и долговечности являются важнейшими и играют роль стратегического характера не только для железнодорожных служб, но и для всех хозяйствующих субъектов страны.

В “Белой книге” ОАО “РЖД” отмечается, что железнодорожные рельсы, изготовленные в России в 2 и более раз по качеству уступают лучшим зарубежным образцам и не могут быть использованы для высокоскоростного движения. В ориентирах инновационных направлениях ОАО “РЖД” указаны вектора развития, к которым следует отнести: внедрение инновационных технологий в области эксплуатации железнодорожного транспорта, увеличение на 6,6% среднего веса поездов, увеличение на 10% средней участковой скорости грузового движения, на 4% снижения удельного расхода электроэнергии на тягу поездов, снижение на 20% количества отказов технических средств, применение малообслуживаемой техники и снижение трудозатрат.

Большую роль в решении этих задач играет состояние и надежность железнодорожных путей. Практика их эксплуатации показала, что основные причины изломов и прочих дефектов рельс возникают вследствие динамических нагрузок во время прохождения состава. Избежать этого можно путем повышения жесткости пути с обеспечением его равноупругости, когда эти параметры будут находиться в оптимальном соотношении.

Упругость пути необходима, чтобы гасить динамические воздействия колес на рельсы, нерегулярные высокочастотные вибрации от подвижного состава, подавлять автоколебательные процессы, возникающие в диссипативной системе вагон-рессора-упругое основание, а также динамическое воздействие при взаимодействии колесо-стык. Что касается повышения жесткости, которая для путей России по ГОСТ ЦП 2-86 должна составлять 5-6 т/мм, то для путей за границей эта величина лежит в пределах 15-25 т/мм.

Жесткость по отношению к инженерному сооружению ассоциируется с его прочностью и понимается чем выше жесткость тем более прочным является это сооружение. Прочность-жесткость железнодорожного пути характеризуется жесткостью его отдельных конструктивных элементов в том числе жесткостью связи элементов между собой, и будет определяться величиной зазоров между элементами, величиной натягов, изгибной жесткостью шпал, рельсов и т.д. В [1] автор оперирует понятиями “жесткость”, упругость материала отнеся понятие жесткости к его твердости, а упругость к способности материала восстанавливать свой первоначальную форму после снятия нагрузки. В механике [2] под упругостью понимают свойство материала сопротивляться при его растяжении, сжатии, изгибе и зависящее не только от рода материала, но и от геометрических размеров образца. Жесткостью материала называют произведение площади поперечного сечения образца на его модуль упругости. При этом упругость включает в себя понятие жесткость материала и дополнительно к величинам, которые входят в жесткость отвечает за силу действующую на образец и его геометрические размеры. Следует отметить не вполне корректное применение термина “жесткость” (податливость), упругость к железнодорожным путям. Это связано с тем, что жесткость характеризует физические свойства образца материала той или иной формы. Если к механической конструкции, состоящей из отдельных элементов, изготовленных из разных материалов и соединенных между собой тем или иным способом применить понятие жесткости в его классическом представлении [2], то это будет не вполне корректно. В этом случае целесообразно характеризовать эту конструкцию ее упругостью, а жесткость использовать только для характеристики ее элементов. В этом случае упругость будет являться интегральной характеристикой пути и оптимизировать ее целесообразно подбирая жесткость составляющих элементов и конструктивных узлов их соединения. При определении оптимального варианта динамического взаимодействия системы дорога-экипаж, важную роль играет подкладочное устройство между рельсом и шпалой. Замена его на сплошную подкладку по [3], позволит улучшить динамическое взаимодействие вагон-колесо-рельс-подкладка-шпала-земляное полотно. При проведении статических и динамических расчетов, оценивая практическую работу рельса принимается, что рельс лежит на однородном, равноупругом основании. В реальных условиях рельс лежит на точечных опорах-шпалах, и при качении колеса оно испытывает импульсное воздействие сил реакции связи со всеми вытекающими отсюда отрицательными последствиями. Устранить это недостаток или свести к минимуму можно заменив существующие подкладки под рельсами на сплошную подкладка по [3], что позволит:

– повысить однородность упругих свойств основания по длине пути и плавность хода колеса, что важно для скоростного движения;

– увеличить погонное сопротивление подъему рельса;

– можно применить более высокий уровень "жесткости" торможения;

– уменьшить изношенность пары колесо-рельс, так как подуклонка рельса под колесом более стабильное;

– уменьшить прогиб шпал;

– вследствие уменьшения прогиба рельса его потенциальную энергию, определяющую его напряженное состояние, позволит существенно снизить;

– повысить несущую способность пути, что позволит сократить количество шпал на 1 км. пути;

– повысить устойчивость пути к выбросам, так как подкладка близка к аналогу пути с бесшпальным основанием;

– повысить безопасность движения за счет исключения изломов рельс;

– ввиду изменения динамики вагон-путь снизить количество дефектов;

– снизить уровень шума;

– снизить затраты на текущее содержание пути;

– снизить трения качения, что позволит экономить энергию на перевозку грузов;

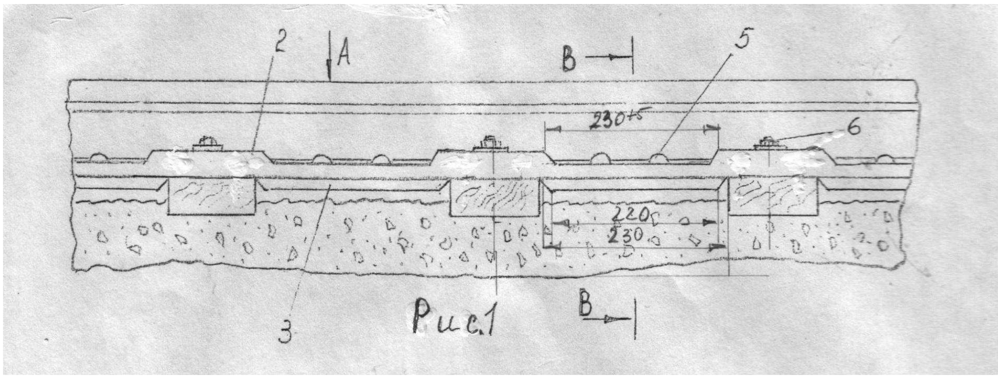
– пропускать поезда с более высокими осевыми нагрузками до 30 тонн-ось;

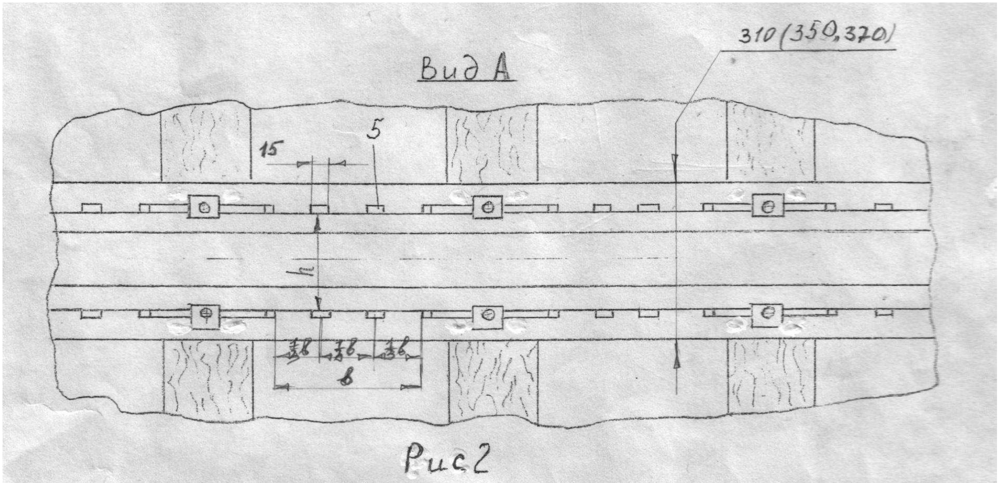
– увеличить наработку пути на 30-40 процентов;

– подкладка не препятствует подбивке шпал, как показывают расчеты перекрытие шпального ящика увеличивается всего на 5,6%;

– подкладка позволяет использовать ее на криволинейных участках пути.

На рис. 1, 2, 3, изображена подкладка.





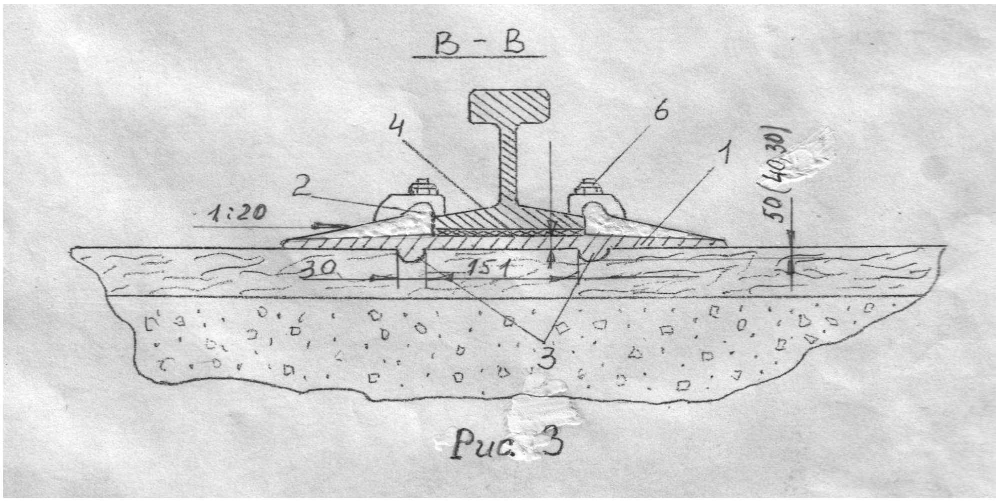


Рис. 3

Она состоит из тела 1, в сечении имеющего форму трапеции с перемежающими ребордами 2 и ребрами жесткости 3, которые с целью придания в вертикальной плоскости большей жесткости подкладки перекрывают друг друга. На подкладку с целью придания конструкции необходимых упругих свойств и гашения высокочастотных колебаний кладется резиновая прокладка 4. С целью предотвращения перемещения прокладки в горизонтальной плоскости на пластине предусматриваются выступы 5. Рельс к шпале и пластине может крепиться с помощью крепления 6 типа КБ, БП или другим способом.

Размеры ребер жесткости 3 найдены исходя из следующей расчетной схемы рис. 4.

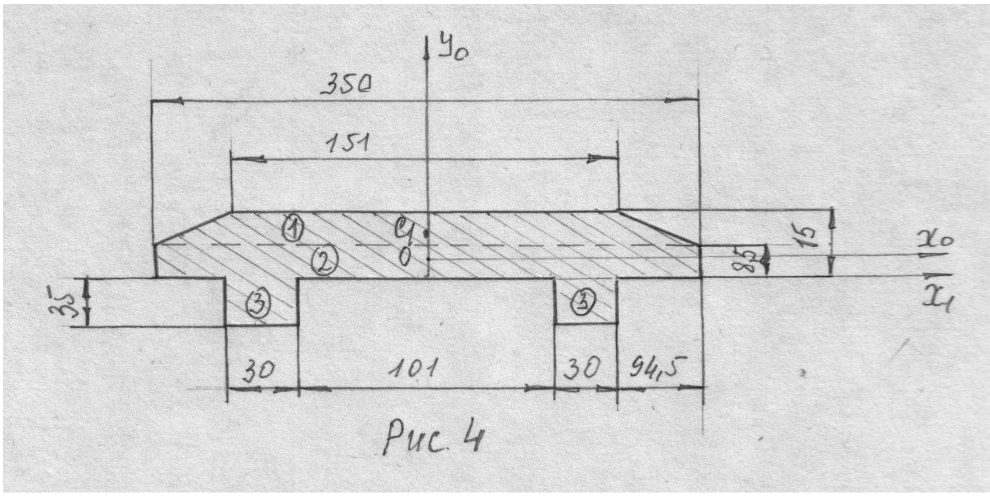


Рис. 4

Дано: сечение с заданными размерами, материал: Ст3.

Определить: момент сопротивления W- по низу и верху подкладки.

1. Находим положения центра тяжести в осях X_1, Y. Метод разбиения, три тела 1, 2, 3
Центр тяжести находится на оси симметрии Y_0.

$$Y_{0C} = \frac{\Sigma YiFi}{\Sigma Fi};\ i = 1, 2, 3.$$

Тело 1 трапеция: $Y_{01C} = \frac{H}{3}\frac{a+2b}{a+b}$, где H=6,5 мм, a=350 мм, b=151 мм.
Тогда $Y_{01C} = \frac{6{,}5}{3}\frac{350+2\cdot 151}{350+151} = 2{,}81$ мм.

Тело 2 $Y_{02C} = 4{,}25$ мм.

Тело 3 $Y_{03C} = -25$ мм.
Находим площади тел.

$$F_1 = H\frac{a+b}{2} = 6{,}5\frac{350+151}{2} = 1628{,}2 \text{ мм}^2.$$

$$F_2 = 8{,}5 \cdot 350 = 2975 \text{ мм}^2,$$

$$F_3 = 50 \cdot 30 = 1500 \text{ мм}^2.$$

Находим положение центра тяжести сечения

$$Y_{0C} = (F_1 \cdot Y_{01c} + F_2 \cdot Y_{02c} - 2F_3 \cdot Y_{03c})/(F_1 + F_2 + F_3) =$$

$$= (18415,5 + 12643,7 - 2 \cdot 1500 \cdot 25)/(1628,2 + 2975 + 2 \cdot 1500) = -5,79 \text{ мм}.$$

Центр тяжести находится ниже нижней плоскости подкладки на 5,79 мм.

2. Вычисляем осевой момент инерции относительно нейтральной оси, проходящей через центр тяжести.

Для тела 1 $\mathrm{J}_{x1c} = 5,4 \cdot 10^3$ мм^4.

Для тела 2 $\mathrm{J}_{x2c} = 1/12(F_2 \cdot b^2) = 1/12(2975 \cdot 8,5^2) = 17911,9$ мм^4.

Для тела 3 $\mathrm{J}_{x3c} = 2 \cdot (1/12)(F_3 \cdot 50^2) = 2 \cdot (1/12) \cdot (1500 \cdot 50^{2)} = 6,25 \cdot 10^5$ мм^4.

Находим d для каждого тела:

$$d_1 = 2,81 + 8,5 + 5,79 = 17,1 \text{ мм},$$

$$d_2 = 8,5/2 + 5,79 = 10,0 \text{ мм},$$

$$d_3 = 25 - 5,79 = 19,2 \text{ мм}.$$

Момент инерции относительно нейтральной оси по теореме Штейнера:

$$J_{xx} = (J_{xic} + Md^{2)}, \quad \text{где } i = 1,2,3.$$

$$J_{xx} = J_{x1c} + J_{x2c} + J_{x3c} + (F_1 d^2 + F_2 d^2 + F_3 d^2) = 5,4 \cdot 10^3 + 1,79 \cdot 10^3 + 6,25 \cdot 10^5 +$$
$$+(1628,2 \cdot 17,1^2 + 2975 \cdot 10^2 + 2 \cdot 150 \cdot 19,2^2) = 25,2 \cdot 10^5 \text{ мм}^4.$$

Таким образом: $\mathrm{J}_{xx} = 252$ см^4.

3. Осевой момент сопротивления:

по низу $W = J_{xx}/z_{max} = 252/2,079 = 121,2$ см^3, по верху $W = J_{xx}/z_{max} = 252/4,42 = 57$ см^3.

Рельс R75 по низу W=509 см^3, по верху W=432 см^3.

Суммарный момент сопротивления подкладки $\Sigma W = 178,2$ см^3.

Таким образом, момент сопротивления подкладки составляет 19% от суммарного момента сопротивления рельса R75 и 22.4% от R65. Результаты расчетов, выполненные для других высот ребер приведены на рис. 5.

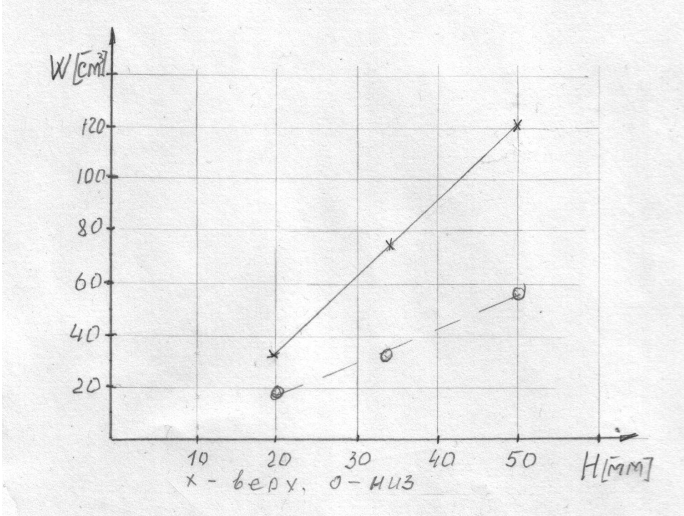


Рис.5

Откуда видно, что зависимость осевого момента сопротивления от высоты ребра подкладки линейна и можно подобрать высоту ребра, соответсвующую заданной жесткости подкладки.

Практика показала, прогиб рельса при прокатывании по нему колеса с осевой нагрузкой до 11 т обусловлена как прогибом самого рельса, опирающегося через подкладку на шпалы, прогибом шпал, так и потерей жесткости подшпального основания. Из-за несоответствия подрельсовых конструкций заданным параметрам, влиянием сезонных температур, погодных условий на железнодорожное полотно интегральный прогиб рельс как показано в [1] может достигать до 4 мм и более. Так как в реальных условиях путь является существенно неравноупругим, то можно утверждать, что на колесо вагонной тележки при его движении действует трение качения, характеризуемое моментом сопротивления движению. Оценим затраты энергии на работу трения качения при перемещении грузов по дорогам России. На рис. 6 приведена расчетная схема при диаметре колеса 950 мм и прогибе рельса 1 мм.

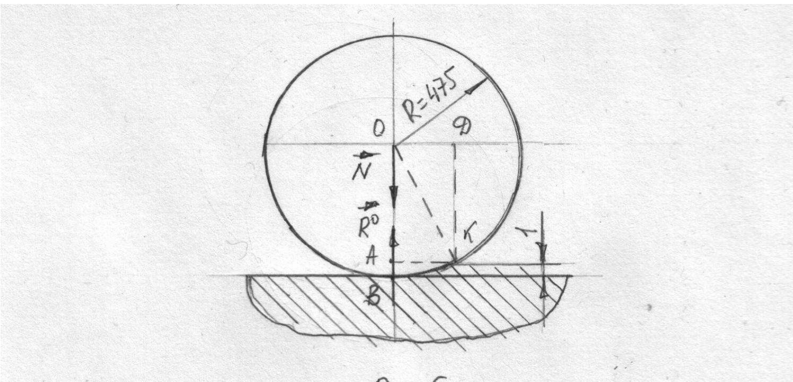


Рис. 6

Коэффициент трения качения

$$f_{\text{тк}} = (\text{OK}^2 - \text{OA}^2)^{0,5} = 3,08 \text{ см}.$$

Момент трения качения при нагрузке на колесо 11 т

$$M_{\text{тк}} = f_{\text{тк}} \cdot N = 3320,2 \ \text{ н/м}.$$

При средней скорости перевозки 48,0 км/час, мгновенная угловая скорость качения колеса равна

$$\omega = (v/R) = 28,07 \text{ с}^{-1}.$$

В 2010 г. грузооборот ОАО "РЖД" составлял $2010,6 \cdot 10^9$ т·км, погружено было $1205,8 \cdot 10^6$ т. Эти грузы были перевезены на расстояние

$$2010,6 \cdot 10^9 : 1205,8 \cdot 10^6 = 1,6 \cdot 10^3 \text{ км}.$$

Работа одного колеса на этой протяженности

$$\text{A} = M_{\text{тк}} \cdot s/R = 1,1 \cdot 10^{10} \text{ н} \cdot \text{м}.$$

Число колес, необходимых для перевозки этого груза,

$$N = 1205,8 \cdot 10^6/11 = 109,6 \cdot 10^6 \text{ шт}.$$

Работа всех колес

$$\Sigma\text{A} = \text{A} \cdot N = 12,05 \cdot 10^{17} \text{ н} \cdot \text{м}.$$

Годовая мощность

$$N = \Sigma\text{A}/\text{год} = 3,8 \cdot 10^{10} \text{ Вт или } 13,7 \cdot 10^{10} \text{ кWт} \cdot \text{ч}.$$

При стоимости одного кWт·ч эл. энергии 1,9 руб. затраты на преодоление силы трения качения составляют 263 млрд. руб. При прогибе 2 мм составят 381,9 млрд. руб., при прогибе 4 мм. 539 млрд. руб. На рис. 7 показаны затраты на трение качения от прогиба

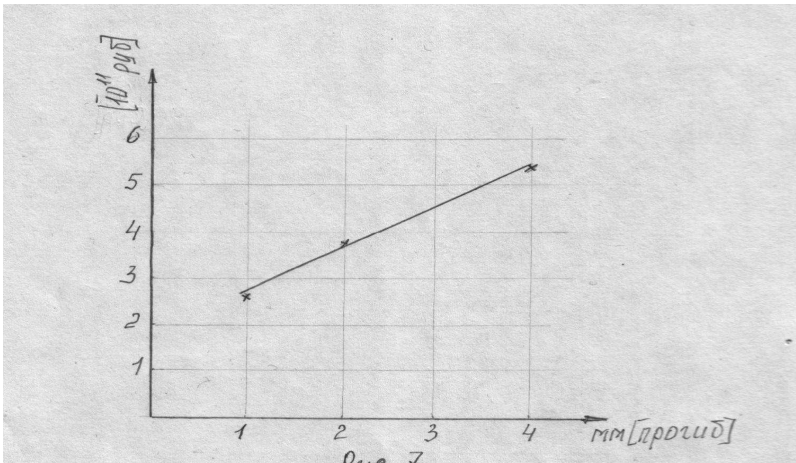


Рис. 7

Проведем оценку стоимости предлагаемой сплошной подкладки отталкиваясь от стоимости широко применяемой в настоящее время подкладки КБ. Ее средняя площадь поперечного сечения составляет $\sim$55,5 см^2, вес $\sim$6,79 кг, стоимость 4,75 руб. Площадь поперечного сечения предлагаемой подкладки 67 см^2. Погонная стоимость 1 м подкладки КБ 48,5 руб. Сплошная подкладка изготовляется из того же материала, что и КБ. Ее погонная стоимость будет составлять $\sim$58,5 руб./м. На всей протяженности железнодорожных путей 86000 км. стоимость будет соответствовать 50,3$\cdot 10^8$ руб., что сопоставимо с экономией по снижению затрат на работу по преодолению трения качения при прогибе рельсового основания на 1 мм. При расчете затрат на новую подкладку надо еще учесть расходы на ее изготовление, которые будут больше чем на изготовление подкладки КБ, транспортировку и монтаж Большую часть увеличения возьмут на себя расходы на изготовление, так как ее технология будет иной. Предлагается изготовлять подкладку методом горячей штамповки из непрерывной заготовки по следующей технологии

а) прокатка горячее заготовки, прямоугольного профиля;
б) дополнительный подогрев до требуемой температуры;
в) непрерывная штамповка на штампе $\sim$2000 т;
г) передача подкладки на обрезку;
д) операция дополнительной обработки;
е) передача образца на правку;
ж) контроль качества изделия и передача на склад.

Библиографический список

1. Управление надежностью бесстыкового пути [Текст] / под ред. В.С. Лысюка. – М.: Транспорт, 1999. – С. 375.
2. *Беляев, Н.М.* Сопротивление материалов [Текст] / Н.М. Беляев. – М: ГИТТЛ, 1954. – С. 856.
3. Пат. 2301860, ЯГТУ [Текст] / Л.П. Размолодин, С.М. Погостовский. – 2006; опубл. 27.06.2007, Бюл. № 18.
4. Железнодоржный путь [Текст] / под ред. Т.Г. Яковлевой. – М.: Транспорт, 1999. – С. 405.

Белая логика

Н.А. Трубников, Ж.Н. Трубникова, Д.И. Степанова

Упорядочивающее проникновение логики в гуманистику снижает присущие последней путаницу и неопределенность так затрудняющие взаимопонимание. Логические ресурсы интеллекта (Бх), готовые обеспечить это, те же самые, что в и случае математики и естествознания. Это прежде всего логический вывод и феномен понятия. Последний представляет интерес для исследования природы столбовых гуманитарных категорий оценочного харакатера, таких, например, как истина, наиразработанным средством познания которой как раз и является логика.

Исследовательский процесс я-познавателю представляется семантическим эффектором

$$\text{б(объект)+Бх=Бб=}\sigma\text{(сигнатура)=}<\Phi\text{ (факты), Т (теория)}>, \quad (1)$$

экстенсионал которого – пара $<$б,$\sigma >$, а интенсионал – λхБх ($\equiv$Бх, как функция х [1]).

На вопрос Пилата “Что такое истина?” спустя 2000 лет ответ дал Альфред Тарский своей экспликацией классического взгляда на истину, обозначенного еще Аристотелем: “...говорить, что сущее существует, и не-сущее не существует, это – правда” [2, с. 136]. Трактовка истины как существования в действительном (из логически возможных миров Лейбница) мире со-бытия S составляет смысл всех найденных их критериев, отражая как бы сомнение я-познавателя в подлинности и полноте Ф-восприятия и Т-понимания объектов $б_1$, $б_2$,... мира со-бытия, сотворяемого уносящее-привносящим взаимодействием перцептивных, поведенческих и изобретающих Бх-“очков” субъекта с рельефом трансобъектной толерантности внещней и собственной природы: “...за вещами есть что-то, глубоко скрытое” [3, с. 179]. Пространство S стратифицировано от Ф (перцепт-факты, протокол) к Т (теория в объект-языке) и МТ ((мета)теория в метаязыке, метаязык исследователя), то есть как бы от объекта к я-субъекту. Кстати, (акт-)объект мерцает в сознании тремя аспектами: “реализменным” (бытийным: “то, что действуя на... органы чувств вызывает ощущения”) и онтическими (со-бытийными) из S-перцептивным и мысленным. Логика оперирует с последним, могущим стать и ее объектом.

Дискурсивное подмножество Σ со-бытия как “одна из значительных общих концепций современной лингвистики: ...модель «смысл $\leftrightarrow$ текст»” [4, с. 8] содержит, помимо прочего, всевозможные субсигнатуры: предикаты Р, функции f, суждения П, теории Т и метатеории МТ и др., представимые как своего рода версии

$$\text{V} = \text{P} \oplus \text{f} \oplus \Pi \oplus \text{T} \oplus \text{MT}, \quad (2)$$
$$\text{V} \subseteq \text{T} \oplus \text{MT и V} \subset \text{S } (\oplus \text{ – дизъюнкция}).$$

Истина субъективно – объективна, но представляет метапонятие и ее предикат принадлежит МТ.

Здесь требуется уточнение. Референтами знака (слова) то есть десигнатора (денотата) можно считать не только предметы и признаки (десигнат), но и участвующие в номинации мысли о них (номинат), однако обычно эти референты не различаются и десигнат с номинатом выступают как синонимы. Правда здесь тоже нужно соглашение. Если десигнаты называть предметами и признаками, то десигнаторами будут индивиды и предикаты, а если последние считать за первых, то десигнаторами будут индивидуаторы и предикаторы. Здесь принят первый вариант.

Архитектоника понятия (категории) C созревает на базе изобретаемых (биогнозис) версий V понимания (осмысливания, (ис)толкования) фактографируемых актов-объектов $б\subseteq Ф\oplus б\subseteq Т$. Эта процедура реализуется имплицитно на основе этих версий как функциональная абстракция

$$C \equiv \lambda x V x. \tag{3}$$

Здесь дизъюнкты смыслопредставлены тем, что в них в качестве родовой переменной понятия x выбирается как зародыш понятия переменная, терм или формула (в P и f это всегда переменная, в П и Т может быть и индивидная или предикатная константы, рассматривамые как значения переменной), по отнощению к которым их контекст, конъюнктивно сочлененный при несингулярности, являет смысл (интенсионал) выбранной формулы. Семантический метод Р. Карнапа [5] в логике и семиотике рассматривает формулы "…не как имя чего-либо, а как имеющее интенсионал и экстенсионал" [5, с. 23]. Описанная представленность дизъюнктов в C, позволяет интерпретировать их как функции, а представление понятия функциональным абстрактом, применяемым к релевентным функциям как к функциям действительно зависящим от своего аргумента, относит сущность понятия к интенсионалам этих функций как раз и обеспечивающим *понимание* [6]. Это имеет прецеденты в польской логике (К. Айдукевич, Т. Котарбиньский, см. [7, с. 102-106]), не видящей "необходимости рассматривать понятие как самостоятельный объект" [7, с. 105]. Но релевентны ли дизъюнкты C, представленные функциями от x?

Если это предметно-истинностные функции, а это они и есть, то в силу автономности логического формализма по отношению к избираемым для его интерпретации полумоделям областью интерпретации этих функций может быть выбрано любое подмножество S^+ универсума S, а областью значений – логическая валентность "истина" в бивалентной (истина, ложь) или поливалентной (истинность от 0 до 1) шкале.

Каковы же теперь значение (экстенсионал) и смысл (интенсионал) метапредиката "истина" и, соответственно, самого понятия истины, представляемого в символике языка этим метапредикатом?

Кажется истина в мировосприятии выступает и как убеждение в "действительном" существовании объекта и как оценка подлинности суждений об объекте и его существовании. Но в сущности это одно и то же: фактографирующая и версифицирующая природу картина мира содержит меняющиеся по величине случайность и неопределенность, создающие риск и неуверенность и решения, переполняющие жизнь Homo sapiens, требуют оценки надежности отображенной в языке картины природы. Процедуры, создающие возможность этого, кристаллизовались в разных областях науки и обобщаются в виде критериев истины. Например, в качестве критериев истинности существования абстрактных акт-объектов типа чисел, функций и др., предлагаются непротиворечивость дескрибирующей их теории или их построяемость. Истинность же существования "вещных" объектов, обнаруживаемых перцептивно и в ходе эмпирических процедур, демонстрирует классический критерий истины, выявляемой подтверждаемостью следствий Т и ее предсказаний П и проработанный А. Тарским.

Однако "дефиниция истины сама по себе не обеспечивает нас критерием истинности" [2, с. 138]. Это заслуживает расшифровки. Дело в том, что вышеперечисленные критериальные процедуры осуществляются частными науками вне логики, а логика (внутри себя) использует их заключение следующим образом: V истинно, если это следует по семантическим правилам (относящимся к логике), ссылающимся на критериально (вне логики) установленные факты. Тем самым логика и дефинирует истину, предъявляя ее как V: Истина (V) или V* Тем не менее сформирована дефиниция истины функционирующая и как критерий ее диагностики, точнее, биогностики. Таковым способом утверждения и получения истин оказалось доказательство, наиболее убедительно выстраиваемое в формально-аксиоматизированной Т (то есть в исчислении), для которой справедлива

$$\text{метатеорема корректности: } \forall x((x{=}П\bullet П\in Т\bullet\vdash П)\Rightarrow\models П), \tag{4}$$

$\vdash$ П – теорема, $\models$ П – истина, $\bullet$ - метаконъюнкция, $\Rightarrow$ - метаимпликация.

Логика – правила мышления, кристаллизованные в ходе адаптации структур биогностического аппарата к рельефу природы. Логика – присущий биогносту человека способ мысленной организации (то есть понимания в Т), заданного в Ф рельефа природы с целью сотворить из своих био(мысле)средств структуру, наиадэкватно отображающую структуру рельефа природы. Логика отвечает на вопрос **как** выстраивается структура знания (биогноса V) и вообще картины мира S (бионтоса). Логическая инфраструктура теории представляет человеческий (биогностический) способ понимания природы, (био)теоретический компонент "великого обмана чувств" (Локк, цит. по [8, с. 180]), добавляемый к перцепт-фактуальному (био)компоненту "обмана" природы с ее я-наблюдателем. Вырисовывающаяся в сознании картина (S) бытия – результат взаимодействия биоорганизации когнитивной системы человека (Бх) с природой; результат, представляющий ее биомодифицированной познанием. При перцептивной констатации (М. Шлик) в силу того, что "…эмпирически фиксируемые объекты находятся в состоянии постоянных изменений…", "…мы оперируем не непосредственно… индивидуальными объектами, но некоторыми… идеализированными объектами" [9, с. 40]; "…теоремы математики… точны до тех пор, пока они не ссылаются на действительность" [3, с. 83], где даже после ее Бх-причесывания фактографией "…мы… встречаемся с …не дифференцируемыми функциями…, а "гладкие"… представляют не более чем идеализированное описание негладких" [10, с. 418].

Если логика высвечивает **как** строится инфраструктура со-знания (совместного с я знания), то истина отвечает на вопрос **куда**, в каком направлении оно должно выстраиваться, функционируя как метаориентир, как закадровый, зазеркальный указатель, вектор построения. Ситуация напоминает проход болота: выставляем вперед ногу (логика), ищем (наи)твердую опору, пробуя полуподатливость на наинеподатливость (критерий истины) и, найдя (объявление истины), переносим туда тело (предъявление, экспозиция истины – ФТ). Избранный как зародыш понятия истины и будущий его экстенсионал б (предмет, свойство, явление), номинированный в языке как r имплицируется Ф,Т-контекстами (интенсионал) доступного локуса S^+ со-бытия S природы наиболее естественно эксплицирующими понятие

$$\text{истина} \equiv \lambda x V^*x \mid r \equiv V^*r \ (\lambda\text{-конверсия [5, 11]}). \qquad (5)$$

Видно, что понятие истины и как понятие и как истина тоже не "самостоятельный" объект, гипостазированный куда-то. В (5) истина V*r есть акт-объект б действительного мира картины природы S в его свойствах и отношениях, проявляющихся в контекстах S^+, представленных в языковых системах Σ^+. Но r, представляющий идентифицируемый "сгустком признаков" (свойств) б, может быть элиминирован из Z^+ и заменен дескрипцией $\eta x\ \Sigma^+ x$ и при расширении S^+ в направлении S истина в полном естестве предстает как чистый смысл.

Приоритет Vx в лице Px выявляется и в экзистенциальных обобщении и конкретизации [12] eg: $\models$ Px $\Rightarrow$ $\exists$xPx es: $\exists$xPx $\Rightarrow$ Px, первое из которых выводится как тавтология [14, с. 115], а второе – слабое правило, представляющее незавершенный вывод [7, 12-15].

Следует далее заметить, что как показывает опыт познания, различные зоны Σ, отображающие S*, будучи истинными, истинны в разной мере и эта разномерность не укладывается в бивалентную шкалу, но точнее измеряется величинами от 0 до 1, как и предлагали некоторые из идеологов градированной трактовки истинности как индуктивной вероятности (Рейхенбах и др.). Это позволяет зафиксировать уровни истинности и ее недостаточность. Аналитическая L-истинность [5] равна 1 лишь потому, что описывает очень бедную "несинтетическую" часть "всевозможных" миров (state description) [5]. Синтетическая F-истинность [5] меньше 1, ибо V выполняется "по крайней мере" в одном мире и в одном не выполняется.

В онтическом пространстве биогноста Бх, где встреча объективных и субъективных структур природы фабрикует S, его объекты б содержат и (био)субъективность Б. Для обсуждения любой системы (об) средствами другой (мета)системы необходимо, чтобы card мета > card об [9], где card – уровень сложноорганизованности системы. Поскольку для попавшего в объектив x "субобъекта" $б'''$ (конферент) его card Б равен card Б, неопределенность познания истины о б окажется $h \geqq b$ (неопределенность принципиума биоорганизации). Это уровень знания биоантроповключающих (Б-включающих) акт-объектов $б'''$. Знание прочего, особенно триумфальных истин физики, имеет $l<h<b$. Причина – десубъективация, то есть элиминации из субобъекта $б'''$ фрагментов биосубъективности Б, в силу чего он становится объектом $б''$ (инферент) с card $б''$ <card Б и с $h<b$: "…умеренно удовлетворительная картина мира получена дорогой ценой изъятия из этой картины нас самих и отступления назад, в позицию ненаблюдаемых наблюдателей" [16, с. 33].

Однако полная десубъективация оставляет от $б'''$ не представляющий природные факты деферент $б'$, аналитический скелет возможных миров. Поэтому инференты физики и синтетической математики минибиопрезентативны с $h \geqq l$ (логон – рекапитулянт b). Истина природы доступная человеку не содержит истину жизни, обеспечивающую эту доступность. И потому истинность человеческого знания обреченно неполна. Это очень неуютно, особенно там, где выбор, пересекающий жизнь, судьбоносен.

К счастью оказалось, что существует включающий истину и повенчаный с нею минимум универсальных ориентиров организации жизнеустройства и экзистенциальной подлинности человека, правда с также недостижимыми вершинами и с секретами, уходящими как концы в воду в загадочность жизни.

В 70-х годах XX в. на сцене театра Волкова балетмейстер И.А. Каренин и дирижер Ярославского филармонического оркестра Ю. Аранович поставили балетный спектакль "Щелкунчик" на музыку П.И. Чайковского, где сольную партию феи Весны танцевала Ирина Трубникова. Среди принадлежащих ей эссе и новелл, два заинтересовавших М.М. Хуциева киносценария и идея интуитивной конструкции, излагаемая далее в расширенной форме.

1. Поиск универсальных, независимых и неделимых (ни к чему более простому не сводимых) критериев ("атомов") ценности и качества останавливается на следующих: W (добро, совесть, справедливость); Ψ (воля, решительность, принципиальность); ∇ (свобода, независимость, непринужденность); Θ (истина, разум, рациональность, взвешенность); Ξ (красота, художественность, артистизм, вкус). В геральдике эти координаты "измерения человека" окрашивались в цвета радуги w – красный, ψ – желтый, δ – зеленый, θ – синий, ξ – сиреневый. Они определяются имплицитно, не улавливаясь дискурсивно дефинициями, лишь опосредованно намекающими на них. Их антиподами выступают зло, покорность, зависимость, ложь, безобразие.

2. Эти критерии являются интенсивностными переменными, область значений которых можно установить как отрезок 0 – (1–b), где b (бион) – непреодоляемый уровень биологической неопределенности (толерантности) [2]. Значение 0 соответствует антиподам. Переменные в качестве координат образуют в пространственно-временном континууме со-бытия S жизненных актов (y) 5-мерное аксиологическое пространство, где каждый акт занимающий определенное место и происходящий в определенное время в физическом пространстве, например 4-мерном, имеет проекцию и в 5-координатное аксиологическое пространство.

3. Человеческий опыт указывает на интерференцию координат: вначале роста они взаимоподтягиваются, но по мере приближения к максимумам каждая начинает тормозить первоначально вызванное ее повышением повышение других, а дальнейшее повышение любой вызывает уже понижение остальных вплоть до степеней, ломающих жизнь. Это означает замечавшуюся как откровение синерго ($\rightrightarrows$)-антагонистичную ($\rightleftarrows$) связь (И.А. Трубникова) между координатами, иллюстрируемую, например, нижеприводимыми максимами из богатой коллекции автора.

W & Ψ:

$\rightrightarrows$: "Люди лгут из страха: у рабов одно оружие – измена" (А. Мицкевич).

$\rightleftarrows$: "Вы слышали, что сказано: «око за око, и зуб за зуб». А я говорю вам: не противься злому..." (Матф. 5.38).

W & ∇:

$\rightrightarrows$: "Свобода может быть завоевана... если власть преодолевается правом" (К. Ясперс).

$\rightleftarrows$: 1Свобода – бунт против морали" (Ф. Ницше).

W & Θ:

$\rightrightarrows$: "Сон разума рождает чудовищ" (Ф. Гойя).

$\rightleftarrows$: "Ум – подлец, только глупость пряма и честна" (Ф. Достоевский).

W & Ξ:

$\rightrightarrows$: "Искусства без нравственной основы не существует" (А. Миллер).

$\rightleftarrows$: "Так пошлиною нравственности в нас обложено ты чувство красоты" (Б. Пастернак).

Ψ & ∇:

$\rightrightarrows$: "Выбор рождает волю".

$\rightleftarrows$: "В который раз мечтая о свободе, мы делаем тюрьму" (М. Волошин).

Ψ & Θ:

$\rightrightarrows$: "Мы не обладаем истиной, мы завоевываем ее путем активного действия" (Де Фриз).

$\rightleftarrows$: "Кто..разглядывает..все обстоятельства и следствия, тот затрудняет себе выбор" (?).

Ψ & Ξ:

$\rightrightarrows$: "Fortis imaginatio generat casum" (сильное воображение порождает событие – лат.).

$\rightleftarrows$: "Самые прекрасные движения нашей души – это наименее напряженные и естественные ее движения" (М. Монтень).

∇ & Θ:

$\rightrightarrows$: "Истина сделает вас свободными" (Иоанн, 8.32). "Чтобы отыскивать истину надо быть независимым. . . " (А. Пуанкаре).

$\rightleftarrows$: "Знать – значит господствовать" (А. Глюксман); ". . . для гения существуют границы, для глупости – нет" (А. Дюма-сын).

∇ & Ξ:

$\rightrightarrows$: "Поэзия после Освенцима невозможна" (Теодор Адорно).

$\rightleftarrows$: 'Вид. . . морально чистого существа. . . вызывает в инквизиторах исступленную ярость,. . . они не в состоянии выносить совершенство и поэтому. . . самыми различными способами подвергают истязаниям, порочат и истребляют лучших людей. . . у кого меньше способностей – уцелеет" (Б. Данем).

Θ & Ξ:

$\rightrightarrows$: "Кто разберется в тонкостях колоратурного сопрано, тот поймет и диалектику Гегеля" (А.Ф. Лосев).

$\rightleftarrows$: "Когда говорит красота – мудрость молчит" (др. греч.). "Искусство нужно, чтобы не умереть от правды"(?).

4. Так проявляющаяся связка воспринимаемая и как самостоятельная цельность, названа белоцветностью sv автором, считавшей ее индикатором и мерой того аристократизма, который совпадает с человечностью: "Я уверена, что не только граф де ла Фер, но и исполнитель роли Атоса в фильме Бордери не могли быть только порядочными и справедливыми, не будучи при этом сильными, независимыми, умными, и с тонким вкусом людьми, достойными любви. Аристократ – это тот, кто обладает всеми этими качествами" [17, с. 48].

5. Вышеприведенные отношения указывают на белоцветность как на координатную функцию

$$\mathrm{sv} = \mathrm{f}(\mathrm{w},\ \psi,\ \delta,\ \theta,\ \xi) \tag{6}$$

или, с учетом 3: $\mathrm{sv} = \mathrm{f}(\mathrm{w} \bullet \psi \bullet \delta \bullet \theta \bullet \xi)$, где • – конъюнкция "одновременности". Таким образом $\mathrm{sv} = \lambda \mathrm{xsvx}$ может использоваться при оценке акт-объекта б

$$\mathrm{sv} = \lambda\mathrm{xsvx} \mid \text{б} = \mathrm{sv}\ (\text{б}). \tag{7}$$

Распределения координат образуют 5-мерное облако, в границах которого идентифицируется человек.

Ego moralis: "Моральный акт. . . конституирует личность" (П. Тиллих).

Ego faber: "Volo ergo sum" (А. Шопенгауэр).

Ego liber: "Свобода есть внутренняя сущность человека" (Г.В.Ф. Гегель).

Ego ludens "Esse est percipi" (Д. Беркли).

Ego sapiens: "Cogito ergo sum" (Р. Декарт).

6. Как и ее координаты белоцветность неполна и ее уровень также регистрируем на шкале 0 – (1–b) Существует распределение координат, соответствующие sv_{max}=1-b, названное светлостью. Последовательные размежевания с ее антиподом sv_0=0 (грязь) уточняя возвращают простую шкалу уровней sv для всех актов со-бытия жизни: предметов, событий, обществ, людей, поступков, произведений и слов.

Явление:	*общество:*	*персоны:*	
1. светлость	свет	клермен	
2. темность	сальмонд (болото)	китчмен:	
2.1 мещанство (масскульт):		обыватель:	(8)
2.1а халтура		тартюф	
2.1б обскурантизм		обскурант	
2.2 грязь	"малина"	шельма	

7. Инфратреугольник А. Маслоу является таковым в силу подавляющего перевеса физиологических потребностей над интеллектуальными и тем более белоцветными (sv). Соответственно природные распределения белоцветности среди персон в обществе или среди обществ в мире аппроксимируются кривой Гаусса-Лапласа, а в интегральной форме – s-образной кривой $\mathrm{P}^1(\mathrm{sv})$ для персон и $\mathrm{P}^2(\mathrm{sv})$ для обществ и везде 2.2 и 1 – в меньшинстве, а остальные 2 – в большинстве, уровень sv которого и репрезентирует социум и мир.

Жизнь существует в виде конкурирующих за ресурсы формируемых генами организмов и их сообществ. Те и другие - беспредельные и безжалостные эгоисты, а ресурсы на Земле предельны и бескультурная "война клыков и когтей" под названием естественный отбор – эволюционный процесс животного существования всех обитателей Земли с пугающим исходом. Каково здесь влияние человека зависит от уровня его белоцвета, останавливающего животность как своего оппонента, ибо, если принцип животности – мои гены любой ценой, то (белый) принцип бэль (sv) – живи и не мешай жить другим, относясь к ним так же как ты желал бы, чтоб относились к тебе, не делая их средством достижения целей, тем более своих.

Но это означает поражение светлости и вопрос закономерно ли оно?

На уровне геногенеза белоцветности нет. Из существующей биологии она тоже не дедуцируется и к жизненным ресурсам не относится. Эта благодать дарована тем, кто ее **способен** оценить, освоить и без нее несчастен. Потому что это, повидимому, единственный компас нормализующий жизнь и быт на Земле. И это чемпион человеческих украшений. Вот импликация, с разных сторон замечаемая в физике, но более связанная с термодинамикой: редкое ценно. С белоцветностью наоборот: ценное редко, точнее белоцветность превращает импликацию в эквиваленцию:

редкость ≡ ценность.

Высокоорганизованные эконты редки, но эти красоты – признак цельности и стабильности экосистемы. Неужели этот пример не доступен человеку? В чьи руки он отдает свой страшный научно-технический потенциал?

Несомненно попадаются общества, с достаточно sv-развитым масскультом, предпочитающим, чтобы светлость не умирала, а становилась автором и организатором идей и решений, улучшающих и украшающих жизнь. Однако, антропогенез разочаровывает и белоатрофичному масскульту, свыкшемуся с темнотой она понятней и роднее. Отчуждение масскульта по отношению к светлости отражает неспособность и зависть, замешанные на страхе потерь, а "трусость – мать жестокости" (М. Монтень) и, сомнительно, чтобы белоцветность смогла бы здесь что-либо поменять. Запрограммирована ли природной эволюцией ее белоцветная переориентация человеком и его бэль-империализм может быть установлен хотя бы в порядке казуистической ошибки? Ответ лежит в тени загадочности жизни. Известно только, что способность распознавать цветность пропорциональна степени белоцветности распознающих и так же распределена.

PS: Автор рассмотренного критерия нормальности жизни искала его как опору и спасение от свирепой примитивности, обиженной фактом существования культуры и наглеющей от ее незащищенности.

Библиографический список

1. *Барендрегт, Х.* Ламбда-исчисление. Его синтаксис и семантика [Текст] / Х. Барендрегт; перевод с англ. – М: Мир, 1985. – 606 с.
2. *Тарский, А.* Истина и доказательство [Текст] / А. Тарский // Вопросы философии. – 1972. – № 8. – С. 136-145.
3. *Эйнштейн, А.* Собрание научных трудов [Текст] / А. Эйнштейн. – М: Наука, 1967. – Т. 4. – 599 с.
4. *Манин, Ю.И.* Вычислимое и невычислимое (Кибернетика) [Текст] / Ю.И. Манин. – М.: Сов. Радио, 1980. – 128 с.
5. *Карнап, Р.* Значение и необходимость. Исследования по семантике и модальной логике [Текст] / Р. Карнап; перевод с англ. – М: ИЛ, 1959. – 372 с.
6. *Зайцев, Д.В.* Понятие как релевантная функция. [Электронный ресурс] – http://logic.philos.msu.ru/text/zaitsev.doc
7. *Войшвилло, Е.К.* Понятие [Текст] / Е.К. Войшвилло. – М: Изд-во МГУ, 1962. – 287 с.
8. *Коршунов, А.М.* Теория отражения и эвристическая роль знаков [Текст] / А.М. Коршунов, В.В. Мантантов. – М: Изд-во МГУ, 1974. – 214 с.
9. *Ракитов, А.И.* Курс лекций по логике науки [Текст] / А.И. Ракитов. – М: Высшая школа, 1971. – 176 с.
10. *Клайн, М.* Математика. Утрата определенности [Текст] / М. Клайн; перевод с англ. / под ред. И.М. Яглома – М: Мир, 1984. – 434 с.
11. *Гудстейн, Р.Л.* Математическая логика [Текст] / Р.Л. Гудстейн; перевод с англ. – М.: ИЛ, 1961. – 86 с.
12. *Столл, Р.* Множества. Логика. Аксиоматические теории [Текст] / Р. Столл; перевод с англ. – М: Просвещение, 1968. – 230 с.

13. *Клини, С.К.* Математическая логика [Текст] / С.К. Клини; перевод с англ. – М: Мир, 1973. – 488 с.
14. *Колмогоров, А.Н.* Введение в математическую логику [Текст] / А.Н. Колмогоров, А.Г. Драгалин. – М: Изд-во МГУ, 1982. – 120 с.
15. *Гильберт, Д.* Основания математики. Логические исчисления и формализация арифметики [Текст] / Д. Гильберт, П. Бернайс; перевод с нем. – М: Наука, 1979. – 575 с.
16. *Уоддингтон, К.Х.* Основные биологические концепции [Текст] / К.Х. Уоддингтон // На пути к теоретической биологии 1 Пролегомены; перевод с англ. – М: Мир, 1970. – 182 с.
17. *Трубникова, И.А.* Белогностика [Текст] / И.А. Трубникова, Н.А. Трубников. – Ярославль: Рио Гранд, 1996. – 148 с.

Асимметрия кривой Кетле

Д.И. Степанова, Ж.Н. Трубникова, Н.А. Трубников

“*Для гения существуют границы, для глупости – нет*”.
А. Дюма-сын

Логика поведения (праксеология) – сотворение эффектора (игротрона): *я + ресурсы + условия → (решение-)действие + объект → процесс → эффект*, в целом функционирующего как генератор случайностей (эффектов), ибо *действие* управляемо, а *процесс*, спровоцированный *действием*, – нет. Недосовпадение целеполагаемого и получаемого – драматургия любого предпринимательства и эмпирическая практика асимптотического изображения истины.

Центральная предельная теорема: если случайная величинаU представляет сумму большого числа взаимонезависимых случайных факторов, влияние каждого из которых на всю сумму ничтожно мало, то дифференциальная функция распределения вероятностей значений υ искомой величиныU чаще всего приближается функцией плотности вероятности нормального распределения

$$\mathrm{s}(\upsilon) = (1/\sigma\sqrt{2}\pi)\ \exp[-\ (\upsilon - \bar{\upsilon})^2/2\sigma^2], \tag{1}$$

σ – среднее квадратичное отклонение, $\bar{\upsilon}$ – математическое ожидание.

Среди квазинормальных эмпирических распределений прикладной интерес, в частности в социологии (где с гениальной руки Жака Кетле нормальный закон наделал много шума), представляют асимметрические искажения распределения Гаусса-Лапласа, вплоть до потери “нормальности” (в прямом и переносном значении). Любопытна положительная асимметрия: As>0, где (рис. 1) $\mathrm{As} = \mu_3/\sigma^3$, μ_3 – центральный момент третьего порядка [1, с. 42].

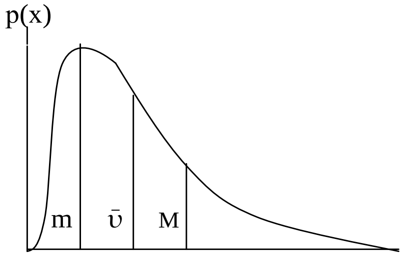


Рис. 1. Положительная асимметрия (m – мода, $\bar{\upsilon}$ – математическое ожидание, M – медиана)

В этом случае, как известно, фиксируется левый сдвиг вершины кривой Гаусса и длинный правый хвост. Мода, математическое ожидание и медиана P υ расходятся. Задание случайной величины посредством распределения вероятностей ее значений, а это последнее функцией распределения методологически представляет общий способ задания не только непрерывных величин [2, 3]. Определим функцию распределения как одноаргументную функцию, “значение которой равно вероятности того, что случайная величина примет значение, меньшее аргумента функции распределения” [2, с. 166].

$$\mathrm{S}(\upsilon) = \mathrm{P}(\mathcal{V} < \upsilon). \tag{2}$$

Если интервал S возможных значений $\mathcal{V}$ равен $0 \geqq \upsilon \leqq 1$, то среди свойств $\mathrm{S}(\upsilon)$ имеется следующее

$$\mathrm{S}(\upsilon) = 0 \text{ при } \upsilon \leqq 0; \quad \mathrm{S}(\upsilon) = 1 \text{ при } \upsilon \geqq 1.$$

Вероятность попадания $\mathcal{V}$ в подинтервал s: $\upsilon_1 < \mathcal{V} < \upsilon_2$ равна

$$S(\upsilon_2) - S(\upsilon_1) = \int_{\upsilon_1}^{\upsilon_2} s(\upsilon)d\upsilon.$$

Для плотности вероятности, распределенной по нормальному закону, интегрирование (1) дает функцию вероятности

$$S(\upsilon) = 1/\sigma\sqrt{2}\pi \int_0^{\upsilon} \exp[-(\upsilon - \bar{\upsilon})^2/2\sigma^2]d\upsilon.$$

График этого интегрального закона распределения представляет огиву s=f(υ). Обратное ей много-однозначное соответствие $\upsilon = \varphi$(s) является функцией, на графике которой абсциссы – это, как бы, пределы разностей S(υ_2)−S(υ_1), а ординаты – значения υ величины $\mathcal{V}$ (рис. 2). Но обратимся к приложениям.

Кризисы современного мира обнажают зияющую неопределенность в логике его социально-экономической структуры. Обозначим

S(социум)=<H,r>, H – человечник, r – способ упорядочивания.

Точное знание состоит из теорий с индуктивной логикой и интерпретантов неодушевленного мира. Объясняющее одушевленный мир "неточное" вынуждено реагировать на неизбежные казуистику и прецеденты, ломающие и классические модусы индукции и закон $\exists_x \rho x \equiv \neg\forall_x \rho x$ [6]. Если "...между науками... человека, и науками... социального... должна существовать... связь" [4, 5] то между биологией и антропологией тем более, ведь "...мы принадлежим к животному миру..." [6, с. 45]. "Но где та рука, которая приподнимет... завесу, наброшенную на тайны... социальной системы. Кто будет вторым Ньютоном...?" [5]. Речь идет о создании индуктивной теории и логика "сложное через простое" требует начинать с биологии, а здесь итог таким попыткам подвел Н. Бор [6, с. 37]: "существование жизни следует рассматривать как основной постулат биологии, не подлежащий дальнейшему анализу".

Дело в том, что даже в небиофизике, где "...умеренно удовлетворительная картина мира получена дорогой ценой изъятия из этой картины нас самих и отступления назад, в позицию ненаблюдаемых наблюдателей" (В. Шредингер; цит. по [7, с. 33]), упомянутое "изъятие" всегда неполно, ибо "...то, что мы наблюдаем-... не сама природа, а природа в том виде, в каком она выявляется благодаря нашему способу постановки вопросов" [8, с. 33]. А в металогике установлено, что построение теории фактификата проводится концептуальными м лингвистическими метаресурсами когнитивного аппарата познавателя, порядок сложноорганизованности которого должен превосходить таковой у фактуры объекта. Совпадение порядков создает ситуацию аутореферентности, засвеченную неразрешимостями, антиномиями и ослаблением транспортации истины в секвенциях био-, антропо- и социо- теорий, модусы обобщения которых, как квазибиологических, закрывают глаза на контрпримеры. Подобным образом используемая логика названа кондуктивной [9].

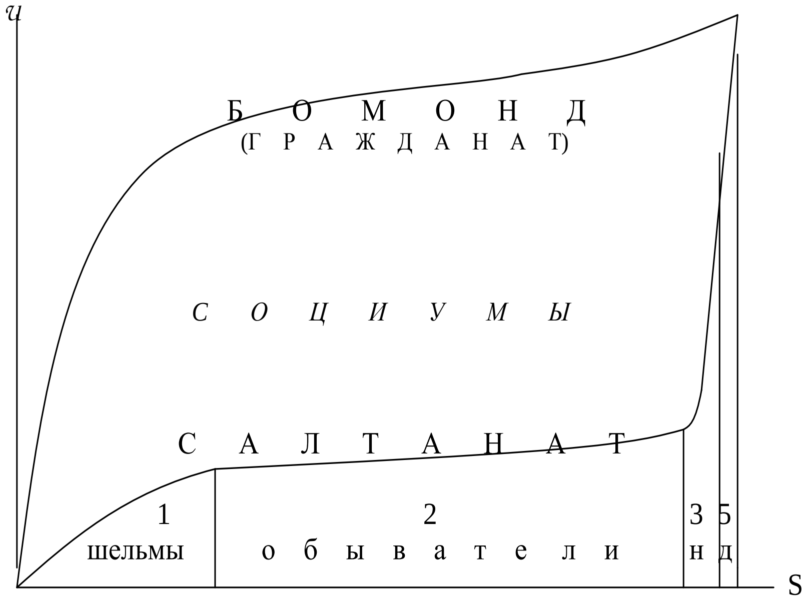


Рис. 2. Социофикат ($\mathcal{V}$ – уровень культуры, S – индивиды по росту $\mathcal{V}$, н – нарцисы, д – джентльмены)

Сочетание всей этой недоудовлетворительности с судьбоносностью решений, ею обосновываемых, составляет драматургию разнообразных аспектов жизнедеятельности, обостряющуюся, к тому же, тем, что, как заметил Ф. Феллини, "витальная сумятица жизни опережает ее догматическую мумификцию". Он же считал, что свойства (характеристики и поведение) индивидов оказывают решающее влияние на свойства их социума, признавая лишь во вторую очередь, несомненно имеющую место, неаддитивность этой равнодействующей, из модальностей которой слишком часто лимитирующее влияние на социумы и их обитателей оказывает организация.

Поиск универсальных свойств, репрезентирующих отдельного человека и социум - общество человеков, так или иначе собранное, с той или иной степенью цельноустойчивости существующее, этот поиск останавливается на названном автором [10] белоцветностью консонансе фундаментальных критериев ценности-качества всех проявлений жизнедеятельности человека, то есть касающихся предметов, людей, поступков, произведений и слов:

белоцветность $\mathcal{V} \equiv$ **<u>д</u>**обро & **<u>в</u>**оля & **<u>с</u>**вобода & **<u>и</u>**стина & **<u>к</u>**расота.

В геральдике этот ряд соответствовал иногда цветам: красному, желтому (бронза), зеленому, синему и сиреневому, почему автор и ассоциировала это с радугой, указывающей естественный и нормальный modus vivendi отдельно или совместно живущих, деящих и творящих людей. Но, внимание: белоцветность – это эффект совместного действия (!). Это был момент соприкосновения с тайной, ибо резюмировался труд по исследованию разнообразных текстов, мнений, , умозаключений, идей, крылатых выражений и т.п., показвающих, что собранные в сепсете критерии в одиночку не ходят. Они находятся во взаимосвязанных и очень своеобразных отношениях и "требуют" присутствия друг друга.. Автор исследовала эти отношения и обнаружила синергоантагонизм: при увеличении от 0 до некоторой, не достигающей 1 величины белообразующие взаимопритягиваются, а при дальнейшем увеличении – отталкиваются, из-за чего одностороннее увеличение одной из них ведет к резкому уменьшению других и белоцветность снижается [10].

Один из примеров: "Сон разума рождает чудовище" (Ф. Гойя), но "Ум – подлец, только глупость пряма и честна" ("Братья Карамазовы") [10].

В качестве экспликанда белоцветности автор называла культуру (ее уровень – культурность). И действительно, из полутысячи существующих дефиниций последней определение на базе белоцвета кажется наиболее удачным и адэкватным фактической роли культуры как почти единственного компаса, указывающего на норму:

$$\text{Культура} \equiv \text{максимум белоцветности.}$$

Белоцветность или культурность градирована и нормируется от 0 до 1 (аргументация в [10]). Соотношения размеров белокоординат для каждого уровня могут быть разные, например, очень высокие одна-две при ничтожных остальных резко понижает U. Естественно диагностировать и уровни культуры, включающие разрешающую способность культуроскопов. В работающей четырехбальной шкале можно эскизно использовать знакомые предикаты:

уровень $\mathcal{V}$	индивид	общество	менеджмент	цивилизация
↓	↓	↓	↓	↓
культура	джентльмен	гражданат	меритократия	искусство
китч	нарцис	склочняк	плутократия	халтура
ширпотреб	обыватель	стадо	диктатура	пошлость
цинизм	шельма	малина	хунта	помойка

(Здесь леди и джентльмены – это достойные, лучшие, у М. Янга это меритмены, но насчет их возвышения, это он ошибся). Три нижних страта объединяются соответственно в

культизм обскурант шалтанат сальмахт понт

(понт – дигрессивная цивилизация, дигрессия – деградация экосистем).

С точки зрения потребностей социум как и

$$\text{Человек}=<\text{Животность},\text{Человекость}(\text{Культурность},\text{Белоцветность})>,$$

где животность – это безусловная перманентная междоусобная борьба генетически предрасположенных к безграничному росту численности и потребностей организмов и их сообществ за ограниченные жизненные ресурсы, необходимые для воспроизводства этих организмов и сообществ. Тем самым утробный дефицит участникам биоэволюции обеспечен и принцип животности таков: ресурсы моим генам любой ценой. Но в этих общеживотно-военных безбелоцветных условиях человеческая популяция не выделялась из других и не нарушала экологического равновесия биосферы в ее траектории в истории космоса. Обстановку меняет человекость, резко усиливающая у человечества его

$$\text{биотический (животный) потенциал} \equiv \text{скорость размножения} \oplus$$
$$\text{созревание молоди} \oplus \text{захват территорий} \oplus \text{адаптация}$$

до размеров такого регистрируемого явления как антропизм ≡ техногенная дигрессия экосистем, останавливаемая лишь сопротивлением среды на последних ее рубежах: рост патологии, нищета, конфликты, культуроцид.

В результате биотопотенциал в исполнении человека превращает

$$\text{биогеоценоз} \equiv<\text{биос, природопользование, ресурсосреда})> \text{ в}$$
$$\text{антропоценоз} \equiv<\text{человек, цивилизация, техносреда}>$$

(т.е. цивилизация ≡ человеческое природопользование).

Ясно, что здесь человекость работает как культизм, а цивилизация как понт. Ибо принцип культуры – живи и не мешай жить другим, относясь к ним так же как ты желал бы, чтоб относились к тебе, не делая их средством достижения целей, тем более своих. Так что влияние человека зависит от уровня его культуры, ограничивающей животность в обличьи культизма как своего оппонента. Приведенные факты развития жизни на Земле указывают на перевес культизма в его противосуществовании с культурой.

Социокультограммы рис. 2, если не аппроксимирующие или моделирующие, то версифицирующие фактически наблюдаемое, рассматривают континуум культуронаполнения социумов.

Усиление биотопотенциала человечества в целом идет за счет культуры как максимума культурности, будучи максимизированым в бомонтах и подавленым в салтанатах, а его свирепость в конкуренции, в том числе во внутривидовой, успешна за счет культизма.

Культура, как правило, проигрывает культизму, ибо для культуры есть границы, а для культизма, тем более для цинизма – нет. В итоге человеческое общество в целом существует как шалтанат (рис. 2).

Это детерминирует и организацию:

организация:	*меритократия*	*сальмахт*
vip-менеджмент:	джентльмены	шельмы
исполнители:	обскуранты	обскуранты
парии:	шельмы	джентльмены

Лимитирующий принцип отбора (свертывания в алгебре множеств) наверх: в шалтанатах – принцип животности, в бомондах – принцип культуры (принцип bel [10]). Оба принципа начинают работать только при наличии некоей критической локальной массы их воплотителей, меняющейся в социокультурном пространстве рис. 2.

Меж- и внутри- социальные отношения в экологической ресурсосодержащей среде – игра с ненулевой суммой, где платежная матрица являет игротрон с банкоматом. Борьба за успех, отраженная в игре "парадокс заключенных", испытана в компьютерных моделях социального поведения (Р. Аксельрод [11]).

Б ↙ человек, социум ↘ / А человек, социум	**компромисс**	**конфронтация**
компромисс ↑	равнопризие: А = n, Б = n	штраф за компромисс: А = 0, Б > n
↓ **конфронтация**	приз за конфронтацию: А > n, Б = 0	равноштрафие: А < n, Б < n

Выигрыш состоит в получении наибольшего числа очков, а не в превышении числа очков соперника, который в этом случае так же может считать себя победителем даже, если его число очков, пусть несколько меньшее чем у оппонента, окажется заведомо большим, чем могло бы быть при других стратегиях игры того и другого [12].

Эволюционно стабильными оказались стратегии цинизма (только конфронтация) и культуры (компромисс за его же и конфронтация за ее же), побеждающие друг друга там, где имеется некоторый стартовый минимум концентрации носителей этих стратегий, в социуме – индивидов, в социофикате биосферы – социумов. И как de facto? А вот так: природное распределение человечества по степеням неживотности обескураживает: структура распределения социумов в социофикате (рис. 2) по-прежнему и все более изоморфна составу шалтаната: 1 – малина, 2 – стадо, 3 – склочняк и 5 – гражданат. Это и есть фактическая дефиниция человечества (?), история которого – цепь поражений культуры в спектакле жития. Подчас даже культурные управленческие решения с их принципом

безопасность ≡ культура / (вероятность & размер потерь)

небезболезненны, а это требует согласованной терпимости. Исход перманентной схватки морального разума с аморальным невежеством зависит от выбора "полуморального полуразумия" масскульта, а ему легче понять и вытерпеть более знакомое животное, стоящее внизу пирамиды потребностей. "Понимание глупым того, что говорит умный никогда не бывает правильным потому, что он переводит то, что слышит в то, что способен понять" (Б. Рассел). Досада лежит в основе experimentum crucis в отношении фундаментальной антиномии должного с сущим: категорический императив Канта: человек –лишь цель, но не средство; неодарвинистский принцип репликации: размножение собственных генов любой ценой.

Формирование генома во многом стохастично, да и вообще в эволюции "явления природы не детерминированы, а носят случайный характер, но сущее ствует некий наиболее вероятный средний режим" [13]. Война как история человечества и деградация условий существования на Земле, согласно естественному распределению человекости, показывают на то, что эволюционный средний режим организации жития, – это, организуемое культурно недоразвитым большинством посредственное житие, при котором животность куршевелится, а культура диссидентствует, поскольку первая в конкуренции за жизненные ресурсы в беспределе своих животных потребностей не связана культурными границами в морали, истине и красоте. Зато на стороне культуры справедливость, ум и вкус. "Мир затаился и ждет", сможет ли культура наконец перевесить. Эта старая и необоснованная надежда скрашивает жизнь. Разве что-то поменялось в истории и культурное развитие уже больше не лимитируется вкусами животности? Да нет же, ген по-прежнему ведет себя как эгоистичный гангстер, делая культуру заложником большинства, приватизировавшего норму как "легкую дебильность" (К. Ясперс).

При преобладании в мире шалтанатов масскульт обывательского большинства в борьбе культуры с цинизмом оказывается союзником последнего, рубя сук, на котором сидит. "Глупцы и умные – безвредны, вредны только полуглупые и полуумные" (И.В. Гете). Обыватели всех стран не размножайтесь, а просвещайтесь, чтобы охрана от преступлений против жизни, т.е против личности, здоровья, собственности и культуры не оставалась бы подобием отчаянной инициативы Green Peace.

Библиографический список

1. *Бирюкова, Л.Г.* Теория вероятностей математическая статистика [Текст]: учеб. пособие / Л.Г. Бирюкова, Г.И. Бобрик, В.И. Ермаков [и др.] / под ред. В.И. Ермакова. – М.: ИНФРА-М, 2004. – 278 с.
2. *Щиголев, Б.М.* Математическая обработка наблюдений [Текст] / Б.М. Щиголев. – М.: Гос. издат. физ.-мат. лит-ры, 1962. – 344 с.
3. *Гмурман, В.Е.* Теория вероятностей и математическая статистика [Текст]: учеб. пособие / В.Е. Гмурман. – М.: Высш. шк., 1998. – 479 с.
4. http://www.iu.ru/biblio/archive/novikova_soc/soc_nov12.aspx
5. http://society.polbu.ru/novikova_sociology/ch07_xi.html
6. *Бор, Н.* Атомная физика и человеческое познание [Текст] / Н. Бор; перевод с англ. – М.: ИЛ, 1961. – 152 с.
7. *Уоддингтон, К.Х.* Основные биологические концепции [Текст] / К.Х. Уоддингтон // На пути к теоре тической биологии 1 Пролегомены; перевод с англ. – М: Мир, 1970. – 182 с.
8. *Гейзенберг, В.* Физика и философия [Текст] / В. Гейзенберг; перевод с нем. – М: ИЛ, 1968. – 202 с.
9. *Трубников, Н.А.* Биогностика в основаниях фармакологии [Текст] / Н.А. Трубников; ЯГМИ. – Ярославль, 1991. – 499 с. – Деп. ВИНИТИ, № 499-В91.
10. *Трубникова, И.А.* Белогностика [Текст] / И.А. Трубникова, Н.А. Трубников. – Ярославль: Рио Гранд, 1996. – 148 с.
11. *Докинз, Р.* Эгоистичный ген [Текст] / Р. Докинз; перевод с англ. – М: Мир, 1993. – 318 с.
12. *Трубникова, Ж.Н.* Клиническая праксеология [Текст] / Ж.Н. Трубникова. – Ярославль: Аверс Плюс, 2010. – 139 с.
13. *Клайн, М.* Математика. Утрата определенности [Текст] / М. Клайн; перевод с англ.; под ред. И.М. Яглома – М: Мир, 1984. – 434 с.

Математическое моделирование в Delphi 7

А.В. Сергиенко

Литература по Delphi насчитывает множество книг. Однако среди них мало таких, которые ориентированы на решение научно-технических задач. Чтобы восполнить этот пробел, автор написал статью, содержащую примеры программ в Delphi.

В зависимости от типа задач бывает удобно использовать либо графические (обычные), либо консольные приложения Delphi. Графические приложения удобны для построения графиков функций. Консольные приложения особенно удобны, когда нам не нужна визуализация, и требуется ввести вручную большое количество данных. Консольные приложения можно отличить от графических наличием в тексте программы строки

{$APPTYPE CONSOLE}

Исходная статья представляет собой сборник задач с решениями в виде программ на Delphi. Статья содержит следующие разделы:

1. Решение систем линейных уравнений.
2. Решение трансцендентных уравнений.
3. Решение дифференциальных уравнений.
4. Вычисление интегралов.
5. Решение краевых задач математической физики.
6. Недостатки Delphi.

Для иллюстрации здесь частично приведён только раздел 4.

4. Вычисление интегралов

В этом разделе мы будем вычислять интегралы методом прямоугольников.

4.1. Вычисление определённых интегралов

В этом подразделе мы будем вычислять интеграл

$$\int\limits_0^{\pi} \frac{\cos^4\varphi}{1+\sin^2\varphi} d\varphi = 2\pi\left(\sqrt{2}-\frac{5}{4}\right),$$

который вычисляется аналитически методами комплексного анализа.

Следующая программа вычисляет определённый интеграл

$$\int\limits_{\mathrm{x0}}^{\mathrm{xfin}} \frac{\cos^4\varphi}{1+\sin^2\varphi} d\varphi.$$

```
program IntDef;
{$APPTYPE CONSOLE}
```

```
uses
  SysUtils;
function rus(mes:string):string;
var
  i:integer;
begin
  for i:=1 to length(mes) do
     case mes[i] of
        'А'..'п':mes[i]:=Chr(Ord(mes[i])–64);
        'р'..'я':mes[i]:=Chr(Ord(mes[i])–16);
     end;
  rus:=mes;
end;
function f(x:real):real;
begin
  f:=cos(x)*cos(x)*cos(x)*cos(x)/(1+sin(x)*sin(x));
end;
var
  STEP:real;
  x0,xfin,x,S:real;
begin
  { TODO –oUser –cConsole Main : Insert code here }
  writeln(rus('Определенный интеграл.'));
  write('x0='); readln(x0);
  write('xfin='); readln(xfin);
  write(rus('Шаг=')); readln(STEP);
  x:=x0; S:=0;
  repeat
     S:=S+f(x);
     x:=x+STEP;
  until (x>=xfin);
  S:=STEP*S;
  write(rus('Интеграл=')); write(S); readln;
end.
```

Выбрав пределы интегрирования x0 $=0$, xfin $=3.14159265359$ и шаг STEP $=1\mathrm{E}-7$, получим значение интеграла $I=1.031784$.

Если нам нужно вычислить другой определённый интеграл, то вместо

```
f:=cos(x)*cos(x)*cos(x)*cos(x)/(1+sin(x)*sin(x));
```

надо написать соответствующую функцию.

4.2. Вычисление контурных интегралов

Следующая программа вычисляет интеграл

$$\oint\limits_{C\left(\sqrt{\frac{1}{e^2}-1}-\frac{1}{e},0\right)} \left(v\left(x,y\right)dx+u\left(x,y\right)dy\right)=\frac{\pi e^2}{2\left(1-e^2\right)^{3/2}}\ \ (0<e<1)\,,$$

где

$$u\left(x,y\right)=\frac{xA\left(x,y\right)+yB\left(x,y\right)}{A^2\left(x,y\right)+B^2\left(x,y\right)},$$

$$v\left(x,y\right)=\frac{yA\left(x,y\right)-xB\left(x,y\right)}{A^2\left(x,y\right)+B^2\left(x,y\right)},$$

$$A\left(x,y\right)=x^4-6x^2y^2+y^4+\frac{4}{e}x^3-\frac{12}{e}xy^2+2\left(\frac{2}{e^2}+1\right)\left(x^2-y^2\right)+\frac{4}{e}x+1,$$

$$B\left(x,y\right)=4\left(x+\frac{1}{e}\right)y\left(x^2-y^2+\frac{2}{e}x+1\right).$$

Этот интеграл вычисляется аналитически методами комплексного анализа:

$$\oint\limits_{C\left(\sqrt{\frac{1}{e^2}-1}-\frac{1}{e},0\right)} \left(v\left(x,y\right)dx+u\left(x,y\right)dy\right)=\mathrm{Re}\left(\frac{1}{i}\oint\limits_{\left|z-\sqrt{\frac{1}{e^2}-1}+\frac{1}{e}\right|=\varepsilon,\ 0<\varepsilon<2\sqrt{\frac{1}{e^2}-1}} \frac{zdz}{\left(z^2+\frac{2}{e}z+1\right)^2}\right)\ \ (0<e<1)\,,$$

$$\frac{1}{i} \oint\limits_{\left|z-\sqrt{\frac{1}{e^2}-1}+\frac{1}{e}\right|=\varepsilon,\ 0<\varepsilon<2\sqrt{\frac{1}{e^2}-1}} \frac{zdz}{\left(z^2+\frac{2}{e}z+1\right)^2} = \frac{\pi e^2}{2\left(1-e^2\right)^{3/2}} \ \ (0<e<1)\,.$$

```
program IntCont;
{$APPTYPE CONSOLE}
uses
   SysUtils;
function rus(mes:string):string;
var
   i:integer;
begin
   for i:=1 to length(mes) do
        case mes[i] of
             'А'..'п':mes[i]:=Chr(Ord(mes[i])–64);
             'р'..'я':mes[i]:=Chr(Ord(mes[i])–16);
        end;
   rus:=mes;
end;
function A(x,y,ec:real):real;
begin
   A:=x*x*x*x–6*x*x*y*y+y*y*y*y+(4/ec)*x*(x*x–3*y*y)+2*(2/(ec*ec)+1)*
        (x*x–y*y)+(4/ec)*x+1;
end;
function B(x,y,ec:real):real;
begin
   B:=4*(x+1/ec)*y*(x*x–y*y+(2/ec)*x+1);
end;
function u(x,y,ec:real):real;
begin
   u:=(x*A(x,y,ec)+y*B(x,y,ec))/(A(x,y,ec)*A(x,y,ec)+B(x,y,ec)*B(x,y,ec));
end;
function v(x,y,ec:real):real;
begin
   v:=(y*A(x,y,ec)–x*B(x,y,ec))/(A(x,y,ec)*A(x,y,ec)+B(x,y,ec)*B(x,y,ec));
end;
label
   bye;
var
   N:real;
   ec,eps,phi,S:real;
begin
   { TODO –oUser –cConsole Main : Insert code here }
   writeln(rus('Контурный интеграл.'));
   write('ec='); readln(ec);
   write(rus('Количество разбиений=')); readln(N);
   if (ec>=1) or (ec<=0) then
        begin
           write(rus('ec должен быть 0<ec<1.'));
           goto bye;
        end;
   eps:=sqrt(1/(ec*ec)–1);
   phi:=0; S:=0;
   repeat
        S:=S+u(sqrt(1/(ec*ec)–1)–1/ec+eps*cos(phi),eps*sin(phi),ec)*
             cos(phi)–v(sqrt(1/(ec*ec)–1)–1/ec+eps*cos(phi),eps*sin(phi),ec)
             *sin(phi);
        phi:=phi+2*PI/N;
   until (phi>=2*PI);
   S:=eps*(2*PI/N)*S;
   write(rus('Интеграл=')); write(S);
   bye: readln;
end.
```

Выбрав значение $e = 0.5$ и количество разбиений контура интегрирования N = 1E7, получим значение интеграла $I = 0.6045998$.

Глава 3

Теория и методика обучения математике в школе и вузе

Построение фракталов на комплексной плоскости с помощью кластера как средство формирования креативности студентов вуза

В.С. Секованов

Фрактальные множества вызывают в настоящий момент большой интерес среди исследователей в разных областях науки. Это связано с тем, что фракталы являются прекрасным материалом для моделирования объектов и процессов.

Большой интерес для исследователей представляют комплексные фракталы. Полезны комплексные фракталы и для реализации дидактических целей, поскольку математические исследования органически переплетаются с разработкой алгоритмов, реализуемых с помощью современных информационных и коммуникационных технологий, включая параллельное программирование, что дает прекрасную возможность для формирования креативности студентов. Важно подчеркнуть, что при построении фракталов на комплексной плоскости целесообразно использовать кластер, поскольку для визуализации этих математических объектов в некоторых случаях одного процессора недостаточно. Поясним сказанное: построение комплексных фракталов требует огромного числа вычислительных операций, связанных с точностью построения фрактальных множеств, с многократным возведением в степень комплексных чисел, с числом итераций в используемом методе.

Среди комплексных фракталов важное место занимают множества Жюлиа и множества Мандельброта для функций $\varphi(\mathrm{z}) = z^p + C$, $p \geq 2$, которые мы рассмотрим в настоящей статье.

Фрактальные множества на комплексной плоскости были описаны в начале прошлого века французскими математиками Жюлиа и Фату. Однако построить данные множества удалось только через 50 лет на компьютере, поскольку для их построения необходимо выполнение множества трудоемких вычислений.

Следует отметить, что множества Жюлиа и множества Мандельброта рассматриваются в различных учебных пособиях и монографиях (см., например, [1-5]) в основном только для квадратичных отображений $\varphi(z) = z^2 + C$.

В работе [6] проведены исследования, которые указывают на преимущества использования кластера при построении множеств Жюлиа и Мандельброта (размер изображения 10000×7500 пикселей):

Таблица 1

Зависимость времени построения множества Жюлиа от различных параметров

Степень n в функции z^n+c	Количество итераций	Число задействованных процессоров	Затраченное время (секунды)
6	40	1	120.6490
6	40	10	23.3614
10	40	1	140.8381
10	40	10	27.9244

Таблица 2

Зависимость времени построения множества Мандельброта от различных параметров

Степень n в функции z^n+c	Количество итераций	Число задействованных процессоров	Затраченное время (секунды)
10	20	1	75.7489
10	20	10	12.9508
10	20	25	6.65550
50	40	1	199.1490
50	40	10	53.2714

В табл. 1 и 2 приведен анализ результатов использования кластера при построении только множеств Жюлиа и множеств Мандельброта для полинома $\varphi(z) = z^p + C$, $p \geq 2$. Нетрудно сообразить, что при построении комплексных фракталов (скажем, для рациональных функций) роль кластера возрастет в связи с усложнением вычислительных процессов.

Для продуктивного изучения рассматриваемого в данной статье материала студент должен уметь применять математические методы при исследовании фракталов и разрабатывать алгоритмы для их визуализации, что положительно влияет на развитие одного из важнейших креативных качеств – гибкости мышления. Более того, при построении комплексных фракталов студенты глубже знакомятся с идеями параллельного программирования, которые начинают проникать в решение сложнейших научных проблем.

Рассмотрим ряд задач, связанных с построением и исследованием комплексных фракталов, направленных на развитие креативности студентов.

Построим с помощью кластера множества Мандельброта (см. рис. 1 и рис. 2) и предложим студентам в качестве первого задания выявить математические свойства данных комплексных фракталов.

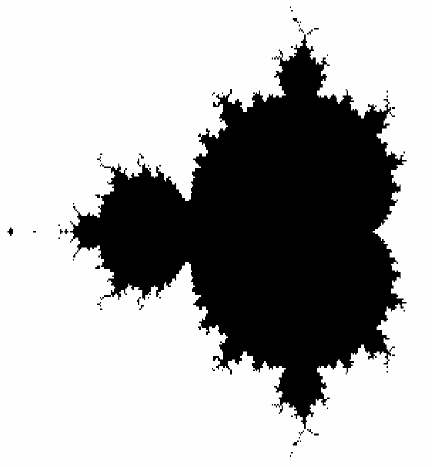


Рис. 1. Множество Мандельброта для $\varphi(z) = z^2+C$

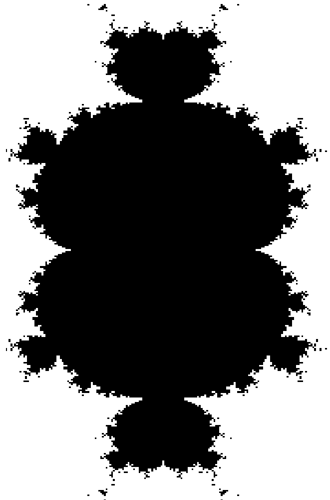


Рис. 2. Множество Мандельброта для $\varphi(z) = z^3+C$

После визуального наблюдениями за данными множествами, студенты выдвинут гипотезы: множество Мандельброта для функции $\varphi(z) = z^2 + C$ симметрично относительно вещественной оси и не симметрично относительно мнимой оси, множество Мандельброта для функции $\varphi(z) = z^3 + C$ симметрично как относительно вещественной, так и относительно мнимой оси (следовательно, центрально симметрично).

В качестве следующего задания целесообразно попросить студентов провести доказательство этих гипотез.

В третьем задании полезно предложить студентам построить с помощью кластера множества Мандельброта для функций $\varphi(z) = z^p + C$, $p \geq 2$ при различных четных и нечетных значениях $p \geq 2$. После визуального наблюдения за данными объектами обучаемые выдвинут более общие гипотезы:

1) при четных $p \geq 2$ множество Мандельброта симметрично относительно вещественной оси, но не симметрично относительно мнимой оси;

2) при нечетных $p \geq 2$ – множество Мандельброта симметрично как относительно вещественной, так и мнимой осей.

В заключительном задании следует попросить студентов доказать или опровергнуть гипотезы 1) и 2).

При решении данного круга задач обучаемые будут вовлечены в вид творческой математической деятельности, связанной с выдвижением гипотез и их проверкой, что нацелено на развитие интуиции – важного креативного качества.

Как уже отмечалось, без интеграции математики и информатики исследование фракталов на комплексной плоскости практически невозможно, что положительно влияет на развитие алгоритмических навыков студентов при написании компьютерных программ и приобщает их к разработке и использованию математических методов.

Важно подчеркнуть, что комплексные фракталы имеют огромный эстетический потенциал, поскольку являются одними из самых красивых математических объектов. Как указывает Мандельброт, красота фракталов двояка. Она может услаждать глаз. Но существует еще абстрактный аспект красоты фрактала, как трудной математической задачи.

Дадим краткое описание создания художественных композиций с помощью заполняющих множеств Жюлиа.

Композиция 1 может быть получена наложением двух множеств: классического фрактала "Снежинка Коха" и заполняющегося множества Жюлиа, полученного при итерировании функции $f(z) = z^3 - 0,15 + 0,827 \cdot i$. Построение композиции происходит с помощью кластера и графического редактора в несколько этапов:

1) с помощью кластера строится каждый из вышеуказанных фракталов;

2) с помощью графического редактора данные фракталы налагаются друг на друга.

Композиция 2 может быть получена также с помощью кластера и графического редактора по следующей схеме:

1) повторяет построение первого пункта в предыдущем примере;

2) заполняющее множество Жюлиа, полученное при итерировании функции $f(z) = z^3 - 0,15 + 0,827 \cdot i$, поворачивается на $180°$;

3) полученные три фрактала с помощью графического редактора налагаются друг на друга.

Композиции 1 и 2 взяты из [7], а композиция 3 – из [6]. Важно отметить, что при создании композиций студент знакомится с различными информационными и коммуникационными технологиями, развивает эстетические качества, что также способствует развитию креативности обучаемых и повышает их мотивацию к математике и информатике.

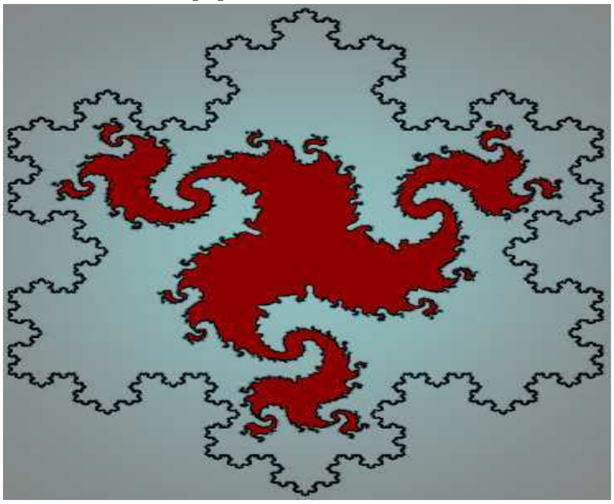


Рис. 3. Композиция 1: дракон

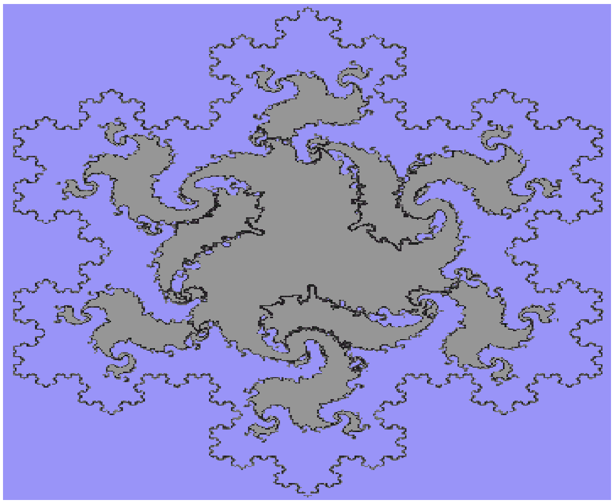


Рис. 4. Композиция 2: спрут

Цветная версия множества Жюлиа для f(z)=z^5+0.7013423+0.3i.

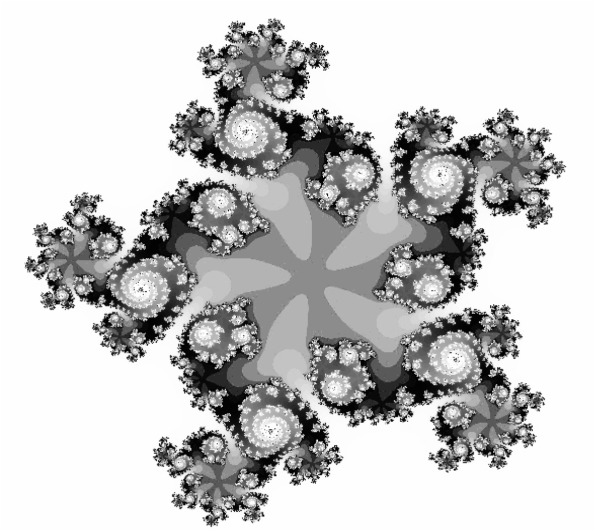


Рис. 5. Композиция 3: узоры

Библиографический список

1. *Морозов, А.Д.* Введение в теорию фракталов [Текст] / А.Д. Морозов. – Москва-Ижевск, 2002.
2. *Кроновер, Р.М.* Фракталы и хаос в динамических системах [Текст] / Р.М. Кроновер; перевод с англ. / под ред. Т.Э. Крэнкеля. – М.: Постмаркет, 2000.
3. *Божокин, С.В.* Фракталы и мультифракталы [Текст] / С.В. Божокин, Д.А. Паршин. – Москва-Ижевск, 2001.
4. *Шредер, М.Р.* Фракталы, хаос, степенные законы [Текст] / М.Р. Шредер. – Ижевск: Регулярная и хаотичная динамика, 2001.
5. *Гринченко, В.Т.* Введение в нелинейную динамику. Хаос и фракталы [Текст] / В.Т. Гринченко, В.Т. Мацыпура, А.А. Снарский. – 2-е изд. – М.: URSS, 2007.
6. *Секованов, В.С.* Использование кластера при исследовании фрактальных множеств на комплексной плоскости [Текст] / В.С. Секованов, А.Л. Салов, Е.А. Самохов // Актуальные проблемы преподавания информационных и естественнонаучных дисциплин. – Кострома, 2011.
7. *Секованов, В.С.* Элементы теории фрактальных множеств [Текст] / В.С. Секованов. – 3-е изд. – Кострома, 2010.

Диалог культур в обучении математике

М.Ф. Гильмуллин, А.Л. Жохов

Стало уже общепризнанным, что мы живем в эпоху смены образовательной парадигмы: традиционная направленность на ЗУНы постепенно вытесняется другими. Все более приоритетным становится личностно ориентированное образование. Объявлено, что современные педагогические технологии должны быть направлены на личность учащегося как главный ориентир и результат образовательного процесса. Для этого требуется перестроить традиционно сложившийся стереотип деятельности учителя. А именно, учителю нужно понять ученика, принять ученика, признать ученика как субъекта процесса обучения

Важным для построения новых методических систем обучения является вопрос о *ведущей направленности* образовательного процесса. Он определяет и профессионально-педагогическую культуру. А главенствующим результатом деятельности этой культуры в современных условиях, в свою очередь, является формирование *культуры профессионала* у обучающихся.

Принятие личностной, деятельностной парадигмы существенно меняет и понимание целей общего и профессионального математического образования. В новых условиях наибольшее значение имеют не столько приобретаемые в период обучения знания и связанные с ними умения и навыки осуществления действий с математическими объектами, сколько опыт их познания, в том числе осуществляемый средствами самой математики, достаточный для самообразования и культуросообразного использования имеющихся знаний. Такую концепцию направленности математического образования отмечают ведущие специалисты в области методики ее обучения (И.И. Баврин, В.А. Гусев, Г.В. Дорофеев, А.Л. Жохов, А.Г. Мордкович, В.Л. Матросов, Г.И. Саранцев, Е.И. Смирнов, А.В. Хуторской и др.). Эти теории разрабатываются в последние двадцать лет в связи с новыми концепциями и парадигмами среднего и высшего образования [5, 6, 7].

Таким образом, в культурологическом подходе к образованию ее важнейшей задачей считается не просто дать обучающемуся набор норм (на уровне знаний и умений), а помочь ему осмыслить информацию, принять основные ценности как собственные жизненные ориентиры и научиться использовать их практически.

Под *профессиональной культурой* мы понимаем взаимопроникновение и взаимное дополнение результатов трех процессов:

1) ознакомления со сведениями из соответствующей области профессиональных знаний. Результат процесса обозначим как "*информированность*", "*образованность*" в смысле осведомленности в чем-либо, представленной в виде суммы единиц информации, по тем или иным основаниям считающихся необходимыми для данного этапа обучения, а также "*владение*" знаниями на уровне средств профессиональной деятельности;

2) совершенствования операционных основ и средств профессиональной деятельности. Результатом процесса целесообразно считать умения выполнять необходимые в профессии виды деятельности, или *профессиональные умения и навыки* (хотя для учащихся она будет выражаться в учебной деятельности: способность учиться является первой необходимостью приобщения к любой профессии). Высшим проявлением умений можно считать "*мастерство*", предполагающее и акты творчества;

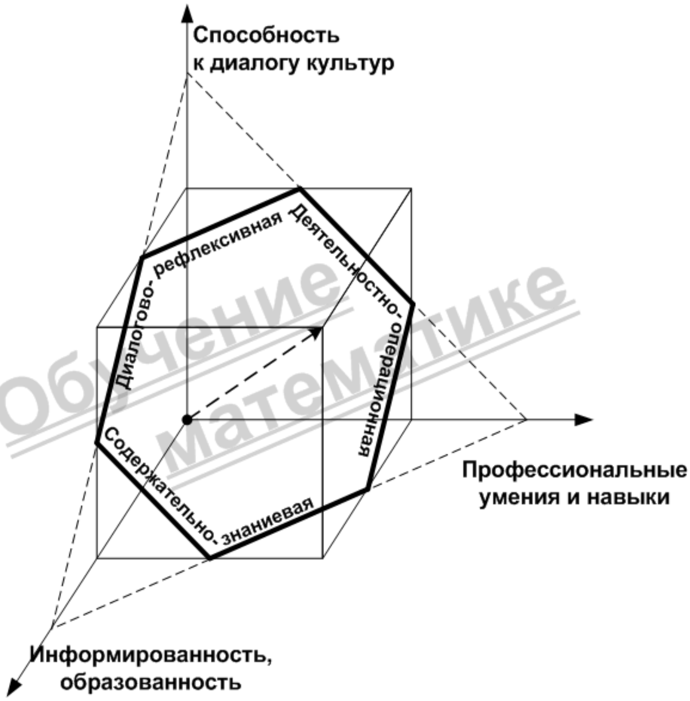
3) третий процесс целесообразно назвать "*диалогизированием*", а точнее "*диалогом культур*" в смысле М.М. Бахтина [1, 5]. Результат процесса обозначим как "*взаимопонимание*", или "*содуховность*", "*способность к диалогу культур*". Они, по сути, и определяют взаимопроникновение смыслов (увиденного, услышанного, прочитанного) и, в конечном итоге, принадлежность разных людей к одному и тому же типу культуры.

Мы считаем, что трехмерная модель образовательного процесса наиболее полно соответствует процессу формирования культуры профессионала. В процессе обучения здесь достигаются два результата: становление профессиональной культуры учителя и формирование культурологических качеств личности ученика. "Образованность" и "мастерство" задают два относительно независимых вектора движения учащегося в "пространстве профессионализма", на основе чего у учащегося формируются *компетенции* – определенный набор социальных навыков, которые и создают базу для его дальнейшего профессионального роста.

Диалогичность же, рассматриваемая нами как доминанта культурологического подхода, является важнейшим из направляющих векторов образовательного пространства, ориентированным на формирование в каждом отдельном человеке личности как носителя и *созидателя культуры*. Именно она придает личности человека такие знаковые качества, как способность к соучастию, ответственному *поступку* (М.М. Бахтин), созиданию себя и порождению новых смыслов и прогрессивных тенденций развития общества.

В этой взаимодействующей тройке подструктур личности диалог культур задает систему ценностей (направленность), профессиональные знания и умения – деятельностную основу личности профессионала. Анализ требований к деятельности учителя математики, направленной на формировании профессиональной культуры ученика, позволяет выделить следующие *структурные компоненты* профессиональной культуры учителя математики: содержательно-знаниевый; деятельностно-операционный; диалогово-рефлексивный. Надо сразу же отметить, что между ними существует множество связей и отношений, и искусственное их разделение как классов было бы неправильным.

Содержательно-знаниевый компонент задается объемом тех математических знаний, опытом познания математики, владение которыми позволит учителю правильно идентифицировать математические объекты, встречающиеся в его профессиональной деятельности. *Деятельностно-операционный* компонент характеризуется опытом познавательной и математико-методической деятельности, включающим профессиональные умения, необходимые учителю для организации обучения учащихся, достижения целей их воспитания средствами математики. *Диалогово-рефлексивный* компонент характеризуется опытом понимания и способностями учителя организовывать обучение учащихся математике как культуросообразную познавательную деятельность.



Таким образом, говоря о культуре образования и профессиональной культуре учителя, мы исходим из ее глубинного смысла, вскрытого для нас в прошлом веке такими мыслителями, как М.М. Бахтин, В.С. Библер, Ю.М. Лотман, В.В. Налимов, А. Швейцер и другие. С этих позиций культура – это, прежде всего, взаимная дополнительность, взаимопроникновение и обогащение различных культур, их диалог, гуманное творчество, поступок, не разрушающий природу, личность и общество. По М.М. Бахтину, в личностном плане культура имеет свою структуру: "Я" – "Другой" – "Я-для-Другого". Аналогично библеровское понимание произведения культуры: "Соприкосновение с любым предметом культуры становится спрашиванием и беседой, то есть диалогом" [4, с. 64]. Но с содержательной стороны наше понимание применения диалога культур в обучении отличается от концепции "Школы диалога культур" В.С. Библера [3].

"Содуховность" является направленностью процесса образования на культуру, на приобщение каждого учащегося к устоявшимся культурным ценностям и на "выращивание" в каждом из них культуры деятеля. Формирование в образовательном процессе общекультурной основы столь же значимо, как и приобретение профессионально значимых знаний и умений. Культура придает личности человека способность созидания себя и порождения новых тенденций развития общества, ответственность за результаты своей деятельности.

Культурную модель своей деятельности каждый должен взращивать сам, хотя и при непременной помощи наставника. Диалог культур, который должен стать основным условием и, одновременно, педагогическим средством такого воспитания, подразумевает взаимодействие и взаимовлияние культур учителя и ученика. Материализованным носителем и своеобразным "запускающим механизмом" диалога культур (как процесса) является *произведение культуры*, специально для этого подобранное и преподнесенное обучающимся в соответствующей форме.

С принятой здесь точкой зрения на культуру профессионала в той или иной мере согласуются данные исследований других ученых (О.С. Анисимов, В.П. Беспалько, В.С. Библер, В.М. Монахов, Г.В. Суходольский, И.С. Якиманская и др.) [2, 8, 9].

Культурологический подход к образованию изменяет представление об основополагающих ценностях образования как исключительно информационно-знаниевых и познавательных, вводит критерии продуктивности и творчества в деятельность учителя и ученика.

При продуктивном обучении ученик учится в процессе производства своего собственного продукта – *произведения культуры* (и воспроизводства созданного другими), а образовательный процесс доходит до стадии конечного, целостного, завершенного, индивидуального результата, по которому можно судить о степени овладения определенным образовательным уровнем. Принципиально иной становится роль педагога: из традиционного учителя он превращается в мастера, наставника.

Диалог культур в аспекте личности рассматривается нами как интеллектуально-эмоционально-действенное общение конкретных носителей культуры, организованное в парах "учитель-ученик", "ученик-ученик" и др. на базе некоторого произведения культуры. Диалог организуется таким образом, что приводит его участников к созданию нового для них произведения культуры. К ним могут и должны быть отнесены появившиеся рисунки, мысли, утверждения, версии, и даже те версии, которые впоследствии будут отвергнуты.

Учитывая такое понимание проблемы формирования культуры профессионала в процессе обучения, выделяются следующие *формы диалога культур* двух или более личностей, образующих взаимодействующие пары:

– математическая культура по отдельным ее содержательным линиям в разные исторические периоды ее развития;

– диалог образовательных продуктов (математических текстов), создаваемых учителем и учеником;

– исследовательский диалог как форма общения ученика и автора каких-либо образовательных материалов (автора учебника, какого-либо текста, произведения культуры);

– разговорный диалог как форма общения учителя и ученика;

– диалог "ученик-ученик".

Целью конкретного этапа обучения математике в режиме диалога культур является формирование взаимосвязанных друг с другом личностных (профессиональных и, более общо, культурологических) качеств.

Методическими средствами реализации различных форм диалога культур являются:

– учебные, профессионально-значимые ситуации, т.е. (а) требующие для своего разрешения включения формируемого мировоззренческого (культуросообразного) механизма и всех опорных для него механизмов познания, ранее уже сформированных у учащихся; (б) создающие у учеников состояние неравнодушия и интеллектуально-эмоционального напряжения. Это побуждает к деятельности все основные блоки личности школьника и содержит в себе в завуалированной форме идею разрешения ситуации;

– учебные задачи, рассматриваемые как единство двух компонентов: некоторого массива данных из какой-то предметной области, доступного обработке средствами школьной математики, и некоторой совокупности заданий для школьников, согласованных с предметными данными и целями обучения на данном этапе;

– школьная математика, рассматриваемая как отражение соответствующей грани культуры, и предоставляющая ученикам наработанные в этой культуре средства ориентировки в окружающем мире. Таковыми являются: идеальные объекты и их свойства, способы их преобразования и действия с ними, алгоритмы и эвристики, способы фиксации своих мыслей и действий, некоторые процедуры математического творчества, а именно: обращение операций, отношений, задач; процедура моделирования; конструирование новых математических объектов из известных; поиск эстетического и др.

Диалоговая составляющая профессиональной культуры учителя характеризуется его опытом понимания и способностями организовывать обучение как культуросообразную познавательную деятельность учащихся. Определяющими характеристиками такой деятельности являются: ее направленность на порождение новых для человека смыслов и ценностей, создание произведений культуры, новых средств и способов деятельности, не предполагающих разрушения личности.

Библиографический список

1. *Бахтин, М.М.* К философии поступка [Текст] / М.М. Бахтин // Философия и социология науки и техники. – М., 1986. – С. 82-138.
2. *Беспалько, В.П.* Педагогика и прогрессивные технологии обучения [Текст] / В.П. Беспалько. – М.: Изд-во ИРПО, 1995. – 336 с.
3. *Библер, В.С.* Школа "диалога культур" [Текст] / В.С. Библер // Советская педагогика. – 1988. – № 11. – С. 29-34.
4. Владимир Соломонович Библер [Текст] / под ред. А.В. Ахутина, И.Е. Берлянд. – М.: Российская политическая энциклопедия, 2009. – 375 с.
5. *Жохов, А.Л.* Мировоззрение: становление, развитие, воспитание через образование и культуру [Текст]: монография / А.Л. Жохов. – Архангельск: ННОУ. – Ярославль: Ярославский филиал ИУ, 2007. – 348 с.
6. *Зинченко, В.П.* Аффект и интеллект в образовании [Текст] / В.П. Зинченко – М.: Тривола, 1995. – 64 с.
7. *Крылова, Н.Б.* Исходные понятия культурной парадигмы образования [Текст] / Н.Б. Крылова // Новые ценности образования. – М.: Институт педагогических инноваций РАО. – 2000. – № 10. – С. 34-97.
8. *Монахов, В.М.* Технологические основы проектирования и конструирования учебного процесса [Текст] / В.М. Монахов. – Волгоград, 1995. – 152 с.
9. *Суходольский, Г.В.* Основы психологической теории деятельности [Текст] / Г.В. Суходольский – Л.: Изд-во Ленинградского ун-та, 1988. – 168 с.

Формирование в процессе обучения современной математической картины мира

В.А. Тестов

Современные условия выдвигают перед образованием новые задачи. В последнее время человечеству все более явственно угрожают цивилизационные кризисы и катастрофы, главной причиной которых является сам человек, низкий уровень образованности и культуры общества. Возможность предотвращения таких кризисов напрямую связана с выводом образования на новые рубежи в соответствии с достижениями современной науки, с формированием у молодежи современного научного мировоззрения. Одним из основополагающих принципов формирования содержания обучения математике, как в школе, так и в вузе, является принцип целостности. У учащихся должна сформироваться не просто совокупность знаний об объективном мире, а некоторая целостная система представлений об общих свойствах, сферах, уровнях и закономерностях реальной действительности. Такой целостной системой представлений об общих свойствах и закономерностях объективного мира, особой формой систематизации знаний является научная картина мира, представляющая собой качественное обобщение и мировоззренческий синтез различных научных теорий. Поэтому ее формирование, в частности математической картины мира, является важнейшей задачей обучения.

Научная картина мира особая форма теоретического знания, репрезентирующая предмет исследования науки соответственно определенному этапу ее исторического развития, посредством которой интегрируются и систематизируются конкретные знания, полученные в различных областях научного поиска [5].

Понятие “научная картина мира” расщепляется на ряд взаимосвязанных понятий, каждое из которых обозначает особый тип научной картины мира как особый уровень систематизации научных знаний - “общенаучную”, “естественнонаучную” и “социально-научную”, “специальную научную” картины мира. В последнем случае термин “мир” применяется в особом, узком смысле как мир отдельной науки.

Термин “математический мир” редко используется (например, [1]), однако он объективно существует аналогично “миру физики”, “биологическому миру” и т.п. Тем не менее, этот мир весьма специфичен, он тысячами нитей связан с другими мирами настолько тесно, что исследователи предпочитают говорить о математической составляющей естественнонаучной картины мира [2]. В последние годы значительно усилились связи математики с социально-экономическими науками. Поэтому, на наш взгляд, правильнее говорить о математической составляющей общенаучной картины мира.

Становление первой научной картины мира (классической или механической) произошло в эпоху зарождения машинной цивилизации. Механическая модель, восходящая к Р. Декарту, трактует Вселенную, человека, общество как некоторые машины. Ньютоновская механика стала “эталоном науки на все времена” – научной четкости, точности, строгого расчета, которые должны были обеспечить достоверную, исчерпывающую истину. Вошло в обиход понятие “лапласов детерминизм”: П. Лаплас утверждал, что, зная необходимый набор параметров, можно с абсолютной точностью рассчитать, что в данной точке происходило миллион лет назад или произойдет миллион лет спустя. “Наука – враг случайностей” – утверждал французский мыслитель А. Гольбах, и что понятием случайность мы прикрываем наше незнание.

Классическая научная картина мира господствовала долгие годы (17-19 вв.). В эту эпоху математические понятия и выводы сделались фундаментом замечательных научных теорий. На основе математических теорий в механике, оптике и гидродинамике делались предсказания, которые необычайно точно совпадали с данными наблюдений и экспериментов. Математика давала ключ к глубокому постижению явлений природы, к пониманию, заменявшему тайну и хаос законом и порядком. Успехи, достигнутые математикой с помощью дедуктивного метода, привлекли к ней внимание величайших мыслителей. Методология математики и даже некоторые математические понятия и теоремы были применены и к другим областям человеческой деятельности.

В XX веке научная картина мира меняется. В связи с разработкой релятивистской и квантовой теории возникает сначала неклассическая, а затем, во многом благодаря созданию синергетики, возникает постнеклассическая картина мира, характеризующаяся отказом от детерминизма и абсолютизации, признанием идей самоорганизации, конструктивной роли хаоса, повышением удельного веса междисциплинарных исследований и резким усилением синтеза знаний.

Наука осознала свою немалую долю ответственности за остроту переживаемого кризиса, оказавшись не в состоянии ни предсказать, ни разрешить назревшие проблемы. Классическая наука, претендуя на однозначную определенность, безусловную объективность, предельную полноту описания, отрывалась от жизни с ее гибкостью, открытостью, свободой воли. Лишь по мере разочарований стало приходить понимание, что для изучения жизнеспособных, органических, развивающихся объектов нужна иная методология, новая парадигма науки.

При работе со сложными системами были выявлены принципиальные ограничения возможностей описания их актуального состояния, реконструкции их прошлого и предсказания будущего. Было осознано, что существует горизонт прогноза. Это такое же серьезное препятствие в исполнении наших желаний, как скорость передачи сигналов или невозможность создания вечного двигателя. В поведении и развитии сложной динамической системы всегда есть доля неопределенности и непредсказуемости. Иначе говоря, сложная динамическая система – это такой “черный ящик”, который в принципе нельзя сделать достаточно прозрачным для его однозначного описания; она требует множества разнообразных описаний, отличающихся друг от друга и дополняющих друг друга.

Долгое время основным требованием к понятиям считалась точность, а все расплывчатое рассматривалось как недостойное серьезного интереса. Однако в постнеклассической науке ситуация изменилась: было осознано, что одним из средств сделать понятия более соответствующими сложной, динамичной, неопределенной реальности является переход от четких, определенных понятий к менее четким. Необходимость рассмотрения таких нечетких понятий с “размытым” набором признаков, коренится не столько в недостаточной проницательности человеческого ума, сколько в сложности самого мира, в отсутствии в нем жестких границ и ясно очерченных классов, во всеобщей изменчивости, “текучести” вещей. Нестрогие и нечеткие понятия, построенные на основе эмпирических, а не теоретических обобщений, не в меньшей степени, чем строгие, являются эффективным орудием познания сложных динамичных систем.

Такое изменение общенаучной картины мира должно отразиться и на содержании образования, в том числе математического. Математика долгие годы служила образцом использования точных понятий и рассуждений для других наук. Но изменение общенаучной картины мира отражается и на этой науке. Современный этап характеризуется уменьшением уровня автономности специальных научных картин мира и восстановлением общенаучной картины мира как единого системного образа Универсума. Можно наблюдать усиление взаимовлияния математической и общенаучной картин мира.

В своей знаменитой теореме, имеющей фундаментальное философское и общенаучное значение, Курт Гедель доказал, что внутри любой абстрактной системы выводного знания сколь угодно высокого уровня, начиная с определенного уровня сложности (с арифметики и выше), всегда имеются истинные утверждения, которые не могут быть доказаны средствами этой системы, и ложные утверждения, которые не могут быть опровергнуты. После работы К. Геделя, стало ясно, что метод дедуктивных выводов недостаточно мощен. Его не хватает даже на то, чтобы вывести из конечного числа принципов все истинные утверждения о целых числах, формулируемые на языке алгебры.

Из теоремы Геделя о неполноте следует, что невозможно теоретическим выводным путем доказать универсальность найденных законов или принципов и установить степень их истинности, ценности, существенности. Эта теорема после своего опубликования в 1931 г. не только торпедировала глобальную программу полной формализации математики, осуществляемую Д. Гильбертом, доказав невозможность ее реализации, но оказала и продолжает оказывать мощное влияние на развитие современной науки.

Важно подчеркнуть, что теорема Геделя относится к теоретическим системам не ниже определенного уровня сложности. Пока теоретическая деятельность не развилась до определенного уровня сложности, у исследователей имелось достаточно оснований считать, что построение универсальной полной теоретической системы возможно, и что именно к этому надо стремиться. Аналоги теоремы Геделя должны существовать для сложных систем и других типов. Так А.Н. Паршин писал: “Должна существовать теорема Геделя и в биологии, показывающая невозможность полного описания живых организмов в чисто генетических терминах” [4, с. 109].

Кроме теоремы Геделя большое значение для науки имеет открытое в XX веке чрезвычайно важное явление алгоритмической неразрешимости. Существуют классы корректно поставленных массовых проблем, допускающих применение алгоритмов, для которых, тем не менее, доказано отсутствие каких-либо алгоритмов их решения. Явление алгоритмической неразрешимости имеет принципиальное значение и для других наук, в частности для психологии и педагогики. Из него следует невозможность обобщенной системы точных предписаний по решению задач одного и того же типа Она означает наложение ряда принципиальных ограничений на основные компоненты деятельности человека или деятельности любой другой системы, обладающей психикой. Это ограничения на планирование деятельности, на ее осуществление, на контроль результатов, коррекцию.

Как отмечает М. Клайн, математика утратила определенность, критерии абсолютной истинности и неизменности. По его мнению, осознание того, что в обосновании математических истин главную роль играет интуиция, а доказательству отводится лишь вспомогательная роль, означает, что математика в своем развитии описала полный круг и ее надо рассматривать как одну из естественных наук. За время, прошедшее после выхода книги М. Клайна, указанные им тенденции в развитии математики только усилились. С его мыслями перекликаются и идеи, высказанные крупнейшим российским математиком В.И. Арнольдом.

В современной математике признаки становления новой научной картины мира все более различимы. В ней в последнее время появились новые разделы и построены логические теории на основе неточных, размытых понятий, многозначной логики, нечетких отношений и нечетких множеств.

На практике такие неопределенные объекты и понятия встречаются повсюду: высокий, низкий, красивый, синий, имеющий длину 1 м, имеющий вес 70 кг и т.д. – все эти понятия при внимательном рассмотрении являются размытыми. Координаты, скорость, сила, масса и другие физические характеристики не могут быть точно измерены.

Кроме создания таких разнообразных мягких математических моделей к новой научной картине мира в математике можно отнести разработку фрактальной геометрии и многозначной логики. Идеи мягкой математики порождены потребностью в очеловечивании науки.

Как показали исследования психологов, многие трудности в изучении классической геометрии вызваны использованием большого количества искусственных точных понятий. Поэтому является неоправданным формирование одних только строгих, жестких понятий, в которых нет никакой приблизительности, размытости. Такие понятия требуют, чтобы при любом, даже малом отклонении от эталона предъявленный объект квалифицировался как “не то”. Объектами изучения учащихся должны становиться не только строгие абстракты, но также прототипы.

Изучение нечетких множеств в настоящее время предусмотрено в программах по математике ряда финансовых и экономических специальностей вузов. Однако этот материал обладает гораздо большим методологическим, развивающим и прикладным потенциалом. Очень выпукло значение нестрогой математики отражено в позиции известного математика и философа Барта Коско, по мнению которого два тысячелетия назад человечество сделало роковую ошибку, заложив в фундамент науки не “зыбкую поэтику ранних восточных философий", а "выхолощенную двоичную логику Аристотеля". И с тех пор классическая "черно-белая" бинарная логика все более отдаляется от реального многоцветного мира, где нет ничего абсолютного, а все самое интересное "происходит в туманной области между «да» и «нет»".

Все эти новые теории должны со временем найти отражение, не только в вузовской, но и в школьной программе по математике. Однако отношение к этим новым теориям со стороны многих математиков совсем не однозначное, поскольку трудно сломать стереотипы, складывавшиеся веками. Ознакомление с "нечеткой" или "мягкой" математикой и некоторыми другими математическими теориями не только обогатит сам курс математики, сделает его современным, но и поможет формированию научных мировоззренческих представлений у школьников, проникнуть в новый "нелинейный мир", постичь красоту хаоса, продемонстрировать им непредсказуемые особенности диалектики науки. А понимание процесса научного познания мира, интеллектуальная толерантность – одна из важных характеристик образованного и культурного человека.

Библиографический список

1. *Горбачев, В.И.* Углубленное изучение математики и математическая картина мира [Текст] / В.И. Горбачев // "Актуальные проблемы углубленного математического образования: материалы XXVII Пленума учебно-методического совета по математике и механике и Всероссийской научно-методической конференции / под ред. В.Н. Чубарикова. – Майкоп: Изд-во АГУ, 2010. – С. 69-71.
2. *Ермак, Е.А.* Геометрическая составляющая естественнонаучной картины мира старшеклассников [Текст]: монография/ Е.А. Ермак. – СПб.: Изд-во РПГУ, 2004.
3. *Клайн, М.* Математика. Утрата определенности [Текст] / М. Клайн. – М.: Мир, 1984.
4. *Паршин А.Н.* Размышления над теоремой Геделя [Текст] / А.Н. Паршин // Вопросы философии. – 2000. – № 6. – С. 92-109.
5. *Степин, В.С.* Научная картина мира в культуре техногенной цивилизации [Текст] / В.С. Степин, Л.Ф. Кузнецова. – М., 1994.

О метафизических основаниях математики, математической культуры и образования...

А.Л. Жохов

1. Введение в тему. В начале несколько поясняющих, а, может быть, и интригующих высказываний, в какой-то степени актуализирующих основную проблему, задаваемую альтернативой: Бог есть и нужен Вселенной, людям, науке и образованию – Бога нет.

Известный британский астрофизик и теоретик науки Стивен Хокинг пришел к выводу, что существующая Вселенная "сама создала себя из ничего, используя физические законы" и Бог ей для этого был не нужен. Этот новый для самого Хокинга и во многом неожиданный для современников взгляд ученого на появление мира содержится в его книге "Большой Проект", недавно вышедшей в Великобритании. Эта одна сторона, согласно которой Создатель не был нужен Вселенной ни раньше, ни тем более сейчас в пору расцвета современной науки и современного человека [3].

Вторая, противоположная первой, сторона, целиком и полностью поддерживаемая религией и – частично – некоторыми представителями науки, хорошо известна. В частности, Рене Декарт, "отец науки Нового времени", утверждал, что "Бог, сохраняя меня, поддерживает свое существование... Воссоздавая нас в каждый момент и непрерывно, Он и себя поддерживает. И существование Его именно таково, а не в качестве отдельного предмета" [12, с. 74]. Несколько позднее Декарта выдающийся предшественник Хокинга Исаак Ньютон не менее определенно утверждал, что мир не мог самостоятельно возникнуть из первичного хаоса лишь в силу одних физических законов, заданных на языке математики. Для этого, по мнению Ньютона, была необходима высшая сила — Создатель. А с точки зрения Декарта "мир природы превращается в бесконечно простирающееся *математическое тело.* Сила, активность, деятельность вынесены за пределы природного мира; их источник – трансцендентный Бог" [14, с. 228].

Эти обе стороны, определяющие противоречие, можно было бы не учитывать, если бы оно не имело прямого отношения к жизни, образованию, в том числе математическому, и, в целом, к будущему как человечества, так и отдельного человека. Однако и в этом отношении имеются противоположные точки зрения, и среди них заслуживает внимания позиция Эриха Фромма, известного немецкого философа и психолога XX века. В своих работах он показал, что "религия... предоставляла нам объяснение естественного мира и моральных принципов – этики". И обе эти функции она почти утратила, лишившись к настоящему времени своих опор. Так, он пишет: "...мы смогли расстаться с идеей о Боге и объяснить <естественный мир> эволюционными законами. ... И для науки после Дарвина сотворение перестало быть тайной. В свете эволюционной теории "Бог" был опущен до состояния рабочей теории, а история сотворения мира и человека – до мифа, поэмы, символа, очевидно выражающего нечто, но более не воспринимаемого как научная истина. Дарвиновское объяснение естественного мира выглядит достаточно логичным и приятным, но, несмотря на это, остается чужеродным для нашего сознания".

Вторая функция – моральные принципы, утверждаемые религией, оказались противоречащими общей установке современного общества на успех. Можно ли хорошо жить, а тем более достичь успеха в нашем мире если руководствоваться принципами: "Возлюби ближнего своего", "Возлюби незнакомца" (Ветхий Завет); "Возлюби врага своего" и "Иди и продай все, что имеешь, и раздай бедным" (Новый Завет)? Исследуя жизнь современного общества, Э. Фромм заключает: "Альтруизм превозносится; предполагается, что мы любим ближнего своего. Но в то же время необходимость преуспеть удерживает нас от следования этим достоинствам в жизни" [3].

Таким образом, и по отношению к человеку и принципам его существования вырисовывается альтернатива: верить или не верить в Бога.

И все-таки: причем здесь математика и ее метафизические основания?

2. Побудительные мотивы. Один из них лежит, прежде всего, в плоскости проблем, которые характерны для современного математического образования не только отечественного, но и во многих других странах, включая Великобританию, Францию, США. Второй побудительный мотив – наметившиеся в последние десятилетия тенденции "гармонизации различных сторон культуры в современном обществе, существенно перекошенных" [14, с. 3]. Этот перекос осуществлялся подчас насильственно в сторону отрицания метафизики, усиления влияния примитивно понятого материализма и отрицания роли религии, начиная примерно с середины XIX века, но особенно проявивший и все еще проявляющий себя в нашей стране в прошлом веке и в настоящее время. Это не могло не повлиять отрицательно и на состоянии математического образования. Сказанное в основном и побудило меня к дальнейшему исследованию вопроса, а мотивы укрепились новыми сведениями о метафизических корнях как высокой науки в лице, прежде всего, квантовой физики и математики, так и новыми веяниями в философии и религии, открывшимися в последнее время.

3. Терминология. Говоря о метафизических основаниях, в дальнейшем будем придерживаться трактовки метафизики, отличающейся от той, которая шла от Аристотеля (метафизика – "Meta ta physika" – "идущая после физики" [1, с. 482]) и которая укоренилась в отечественной философской литературе как единственно "научная" с позиций материализма. "Возвращенная" же трактовка такова: *МЕТАФИЗИКА* – 1) философское учение о наиболее общих основаниях бытия ..., выраженных в отвлеченных, непосредственно не выводимых из опыта понятиях [1, с. 482]). Метафизика является "теоретической частью или сердцевиной философии – учением о первоосновах сущего" [14, с. 4]. По Р. Декарту: метафизический – *трансцендентальный* [4], то есть лежащий в основе познаваемого и познанного, хотя и выходящий за его пределы, "в основе всех областей рационального знания от физики и математики до философии и богословия" [14, с. 3]; в отличие от "*трансцендентный*" – выходящий за границы возможного опыта, недоступный познанию, принимаемый на веру [1, с. 797].

4. О математике и состоянии математического образования.

Характеризуя математику, уместно воспользоваться метафорическим образом кентавра, который применил Мераб Мамардашвили для характеристики человечества в определенных его состояниях (у него речь шла о Вене начала 20-го века – "Как я понимаю философию", с. 393). Можно сказать, что математика – это кентавр, "который живет одновременно в мире свободы (творчества, *из*-обретений человека, то есть *обретения из чего-то* – А.Ж.) и природы". При этом природа понимается в самом широком смысле – от атомов и элементарных частиц, песка, камней, воды и т.п. до планет, солнечных систем, галактик, Космоса в целом. Главная характеристика природы в целом – отсутствие свободы, *пред*определенность. Свобода же – это способность и усилие человека *быть*, то есть, опять-таки: способность мышления-познания, *из*-обретения и ответственности *за* их результаты (М. Бахтин). Сошлюсь далее на данные из статьи [8], касающиеся результатов оценки математической грамотности российских учащихся:

"В 2006 г. по результатам оценки математической грамотности российские учащиеся заняли 33-38 места из 57 стран-участниц. ...По всем направлениям, которые эксперты признали главными для формирования функциональной грамотности, российские учащиеся значительно отстают от своих сверстников из большинства развитых стран мира. ...Причины, – говорится в статье, – нужно искать в особенностях учебного процесса в российской школе, в значительной его ориентации на *передачу* знаний, а не на освоение способов деятельности". И далее: "одна из причин этого явления – крайности в реализации академической направленности российской школы".

Можно соглашаться или не соглашаться с высказыванием о причинах, но одно верно: с результатами указанного в статье положения дел мы сталкиваемся в нашей преподавательской деятельности. Косвенно или прямо это подтвердили еще участники *заседания "круглого стола" "Математическое образование в XXI веке", состоявшемся в канун XXI века в редакции "НГ".* Так, вице-президент Российской ассоциации учителей математики, заслуженный учитель РФ, депутат Московской городской Думы Е.А. Бунимович говорит: "Но одновременно у многих детей воспитывается, - так же, как на уроках музыки, – ненависть к математике. У тех детей, для которых было бы достаточно развивать просто любовь к музыке или к математике. У тех, кто не мог преодолеть той самой высокой планки, воспитывается или ужас, или оторопь на всю жизнь перед математикой..." **Иван Ященко:** "Человек должен от настоящей математики получить заряд математической культуры, какой-то философский заряд, получить знание ключевых моментов, которые имеют не технический характер, а именно философский. Учитель должен, особенно в массовой школе, сеять не вот эти технические знания, а нести культуру. На худой конец преподаватель должен понимать, что он чего-то не понимает. В противном случае чем опасна математика? Тем, что математике формально в школе учить очень легко. Вот квадратное уравнение, вот формула корней, и вот 20 задач на ее решение. Американский принцип" [20].

Наблюдения показывают, что у студентов – будущих педагогов – особенно первых курсов, значит, и у выпускников школы, наблюдается наличие различного рода *психолого-педагогических барьеров* как устойчивых затруднений, закрепившихся в психике и препятствующих их полноценному участию в учебной деятельности и их дальнейшему развитию. Наиболее часто встречаются следующие барьеры, действующие как *тормоз* развития [5]:

1) неумение (и даже нежелание) работать с учебной литературой (ставить вопросы и находить ответы; структурировать учебный материал: ставить цели изучения, сравнивать, анализировать, обобщать, отделять главное от второстепенного, составлять собственные задачи, находить приложения ...);

2) склонность к механическому запоминанию отдельных, часто разрозненных фактов, неумение содержательно и логически их связывать между собой, неспособность различать логические конструкции и пользоваться ими (И, ИЛИ, НЕ, необходимо, достаточно, их взаимосвязи и др.);

3) настойчивое требование образца вместо попыток найти объяснение в рекомендуемой учебной литературе, самостоятельно его построить или дать начальное понимание, упорное ожидание от преподавателя подробных разъяснений без попыток самостоятельно понять (построить хотя бы умственные образы, по выражению *Б.М. Величковского,* “как инициированные, но затем задержанные движения – *“действия про себя”* [2, с. 291]) и т.п.;

4) нежелание и неумение в достаточной мере долго и настойчиво заниматься умственным трудом в поисках истины и доказательного результата, неоднократно возвращаться к одной и той же задаче, переформулировать ее и доводить решение до разумного результата; заниматься исследованием в его исконном смысле: почему, как и зачем *это*?

5) несформированность необходимых механизмов мышления: умений переходить от чувственных представлений к понятиям, обобщать, конкретизировать, видеть сходство и различие, аналогию между математическими объектами или их прообразами и пользоваться ею, неумение строить приемлемые гипотезы и др.; отслеживать, рефлектировать свои действия, по необходимости их корректировать и перестраивать их последовательность, осуществлять перенос изученного в незнакомые, но сходные ситуации и др.

Причины. Полагаю, что в основе названных и многих других барьеров умственного труда и познавательной культуры растущего человека лежат неверные установки о смысле образования в целом, закладываемые, прежде всего, современной министерской командой “на подготовку потребителей” (из выступления Фурсенко). Как следствие, недостаточное внимание уделяется системе образования в целом: его смыслу, обеспечению; труду учителя и его “штучной” подготовке; организации самостоятельной, индивидуальной и групповой учебной работы; воспитанию нравственных основ детей и др. Из такой установки и сложившегося неблагополучного материального положения многих взрослых вытекают недоработки семьи, школы и вуза по формированию соответствующих, в целом мировоззренческих ориентиров и личностных качеств учащихся и студентов. Отсюда чрезмерно преувеличенная нацеленность отечественного обучения в современной школе лишь на усвоение дидактических единиц *содержания* предметных программ, которые в основном закрепляются рамками ЕГЭ и в число которых не включаются исследовательские умения и навыки. Наконец, в целевых установках обучения математике да и другим школьным дисциплинам (языку, литературе, истории) отсутствует установка на воспитание и развитие необходимых личностных качеств обучаемых как обязательных учебных и воспитательных целей.

Наконец, **еще одна** причина, являющаяся, на мой взгляд, *следствием* выше названных, состоит в недостаточной распространенности и воплощении известных и разработанных методик обучения, основанных на зарекомендовавших себя идеях и технологиях формирования и воспитания мировоззренческих ориентиров и качеств, онтогенетического подхода, наглядного моделирования и других [6, 10, 13, 15]. У учителя отсутствуют стимул и время для их осмысления и внедрения. За счет, на мой взгляд, неверных целевых установок и неверного понимания природы математики, распространенной *политики внедрения* диагностик ЕГЭ, в сознание и учителя, и учеников внедряются антиличностные, антигуманные и потому их развращающие мировоззренческие установки. Вот некоторые из них: можно не прилагать усилий, но благополучно “сдать” ЕГЭ; сдать – это главное, а уметь делать, исследовать и воображать, придумывать и знать – не обязательно; учитель обязан все досконально разъяснить, показать – форма иждивенчества; барьер эклектизма и беспринципности и др. [5].

О сложности и трудности понимания. На мой взгляд, главные проблемы математического образования **отчасти** остаются прежними и определяются вопросами тоже метафизического характера: Считается как бы само собой разумеющимся, **зачем и чему** обучать математике. Однако акцент должен быть на другом: надо не математике обучать, а ***себя и других*** воспитывать, обучая способам и средствам познания с помощью математики. Тогда – **следуя какой логике, какими средствами, как**? **Отчасти: “**Учить – обучать – обучаться?” **Если учить, то – чему? Традиционный ответ: знаниям.** Но здесь вырисовываются **две позиции: 1) знаниям-сведениям** (о чем-то, что уже принято и требует кто-то – стандарты, ЕГЭ, учитель и т.п.), компетенциям **и 2) процессу познания и знаниям-средствам.** Если обучать, то – что это значит? На первый план выдвигаются вопрос: **как? –** Как обычно: от простого к сложному, от элементов – к целому или наоборот? Тренируя прежде всего память, например, через периодическое повторение пройденного или как-то по-другому? Это – проблемы смысла, мотивации, методики и технологий обучения, то есть. Но все эти вопросы и есть вопросы метафизические.

Противовес распространенному подходу видится в следующем.

Школа должна показывать прежде всего ученику не утилитарную “полезность” математики (типа: топор нужен, чтобы рубить дрова, а телефон – чтобы с другом “пообщаться”), а такую, которая, прежде всего, пробуждает у него хотя бы удовлетворение от того, что он делает – познает новое, преодолевает какие-то трудности, учится думать в процессе исследования, учится *вместе* с другими. Но главное – приобщение к процессам мышления, познания, овладение их средствами и механизмами. А высшая степень удовлетворения от всего этого – **радость** открытия через математику элементов гармонии, красоты (свобода воображения, творчества, успешность, воля), гордость за то, что “ты можешь!”, в том числе преодолеть себя. Это, пожалуй, единственное, чем может гордиться в этой жизни человек. На мой взгляд, подтвержденный значительным опытом обучения математике в школе и вузе, “полезность” математики “здесь и теперь” для конкретного ученика как раз и заключается в пробуждении у него ощущения радости от того, что ему что-то удается, что он что-то постигает – и в математике, и, прежде всего, в себе. Или (по Декарту): **если чем и можно гордиться** в этой жизни, так это осуществлением свободы “свободно” мыслить, воображать, воплощать свои мысли в рисунках, формулах, символах, действовать в русле созидания, но неразрушения себя и Другого (это уже **культура**). Помогает этому обучение в духе *метафизического* подхода: поиск во всем сакрального, не проявленного пока, до встречи со мной, *до моей мысли и до моих действий* по его проявлению, до использования нужных, кем-то ранее открытых или мною же придуманных средств и до создания благоприятных условий. И к этому можно и нужно приобщать детей с раннего возраста.

Моя позиция: об-учать-ся, т.е. совместно учиться тому, чему можно и целесообразно научиться **из математики и посредством нее**, и, одновременно, **воспитывать** себя, **развивать** в себе лучшие человеческие качества**.** При этом *почти сразу* отпадает вопрос “ЗАЧЕМ?”, если принять следующий **тезис**, хорошо воспринимаемый и особенно востребованный в наше время и в наших условиях: “Учить себя – родовая потребность и постоянная забота человека о себе”. В [5, 6] сформулировано более сильное утверждение: “Учить себя – первая и постоянная *профессия* человека, сквозная – на всю жизнь”: человек, утрата способности учить себя (из себя и через других) – признак движения к смерти. **Чему учиться?** – Поддерживать и развивать в себе **эту родовую потребность и соответствующие умения. Зачем учиться?** – Чтобы иметь основание гордиться собой (!). Р. Декарт в прочтении М. Мамардашвили: “…единственное, что законно в качестве основания для гордости, – это способность и готовность человека к реализации свободы” [11, с. 112]. А свобода для Декарта реализуется, прежде всего, в “Я –– мыслю, познаю, следовательно, существую”: *cogito ergo sum.* Иными словами: Зачем учиться? – Чтобы быть свободным, ощущать радость и гордость от того, что ты – можешь и можешь именно так, и, в то же время, ты ответственен за то, что ты сделал (последнее – уже дополнение М.М. Бахтина: свобода и способность на ответственный поступок). Сказанное созвучно тому, что в свое время говорил известнейший математик *И.Ф. Шарыгин*, так определяя цели математического образования в ходе ранее уже упомянутого *круглого стола в редакции “Независимой газеты”*: “Целью предмета математики является не получение знания, а сам процесс обучения. Он необходим, для того чтобы создать нормального человека. Обществу сильно не хватает сейчас математической исследовательской культуры в галилеевском смысле: надо измерять то, что можно измерить, и пытаться измерить то, что измерению не подлежит”.

Почему все-таки – **из математики и посредством нее**? Здесь-то как раз и место обращения к метафизическому **смыслу** математики и **источникам** математических знаний *и* культуры человека. На практике пока получается, что вроде бы математика-наука и математическая культура – разные вещи… Для дальнейшего обратимся к факторам их развития.

Все ниже перечисленные факторы развития математики задают в совокупности прямой выход на понимание **метафизических основ** образования как на связь и взаимную поддержку образования, науки и религии.

ФАКТОРЫ (ИСТОЧНИКИ)	РЕЗУЛЬТАТЫ
Математика – источник саморазвития, поскольку: а) “существует объективно”, являясь “идеальной материей”, не зависящей от сознания людей, суть которой всегда остается неизменной; б) она – “предустановленная” гармония, “матрица мира”, язык построения и развития Вселенной и в) в любой, развитой уже человеком математической теории найдутся утверждения, истинность которых недоказуема ее средствами (К. Гедель), и потому необходимы усилия человека по созданию новых теорий и их приложений.	Фрагменты “матрицы мира”, воплощенные в творениях Природы, Человек с его способностью постигать их и воплощать в другом материале, разум людей как живой инструмент и деятельное начало воплощения Космического Разума, необходимые Живой Вселенной для самопознания и саморазвития через конструирование, реализацию, апробацию, принятие или отвержение конкретных “искусственно-естественных” (Г.П. Щедровицкий) возможных “ноосферных” миров.
Стремление человека к удовлетворению жизненных нужд, к бытовым удобствам, благам, к подчинению среды обитания. Возникшие на этой основе и направленные на преобразование среды виды деятельности людей (общение, мыслительная – овеществленная и практико-преобразующая, индив. и коллект. деятельность).	Круг практико-ориентированных задач, “разрывов” между желаемым и возможным. Способность к созданию естественно-искусственных языков, конструированию предметных моделей. Типы теоретических и технических моделей, др. средств и способов практической деятельности.

Стремление человека к открытию для себя фрагментов “матрицы мира”, к духовной жизни и культуре: к системному восприятию и осмыслению мира и познанию его красоты, гармонии, ценностей, к использованию системных средств и способов математического познания, к мысленному эксперименту, моделированию – построению идеальных средств, замещающих природные и идеальные.	Способность к теоретической (знаково-символической, геометрической и доказательной) деятельности моделирования и идеального преобразования мира, к созданию “превращенных” форм системного характера. Наработанные и оправдавшие себя типы: кодов записи и переработки информации, различных средств, методов, моделей...
Математическое образование людей (от детей до взрослых) как формирование у них необходимых основ математической культуры, правильных мировоззренческих ориентиров в жизни и профессиональной деятельности, как культивирование Будущего в форме освоенных методов и логики математического познания, исследования, грамотного моделирования.	Способности к математическому познанию и идеальному преобразованию мира с опорой на образцы знаний-средств: математические языки, типы ситуаций, прямые и обратные задачи, понятия и утверждения, методы построения “маленьких теорий” и разрешения парадоксов, функциональные зависимости, аналогии и пр.
Внутренние для математической науки противоречия, языковые проблемы, стремление математиков к их разрешению, к упорядочению отдельных фактов, их связыванию в более крупные блоки, к систематизации, обобщениям, к открытию еще непознанных фрагментов “матрицы мира”.	“Снятые”, частично разрешенные, противоречия, аксиоматические теории и сконструированные модели, связанные друг с другом, очерченные области и границы их применимости, способы и средства прогнозирования с предсказуемой степенью точности.

– ОБРАЗОВАНИЕ: **образуй себя и Другого** настолько, чтобы через математику воспринимать, чувствовать гармонию мира и не разрушать, а по мере возможностей поддерживать ее, лучше – продолжать ее постигать и созидать, опять же – “по образу и подобию”, но теперь уже – следуя математическим образцам создания этой гармонии. Но для этого необходимо обучать-***ся***: а) математическому познанию как процессу и деятельности, как “трансцендентальному способу получения/передачи информации” о математических основах гармонии мира и б) творению/ открытию новых математических моделей, новых – вначале для ученика, а затем – по возможности – и для других людей.

– НАУКА: **по-мысли,** т.е. доверься мысли, ***поверь в себя, наберись смелости и воли***, будь ***свободен***: наука не терпит авторитетов, кроме “неба над головой и нравственного закона во мне” [7], а потому: **сотвори** “умственный образ” – воспроизведи в “материализациях” – синтезируй в понятие и теорию, *усомнись, примени, откорректируй, докажи и продемонстрируй другим.* “В фундаментальной науке доверять логическим устройствам процессы создания модели или теории бесполезно: ничего нового создано не будет. ...новое знание – прерогатива мышления, в котором сочетаются и логические, и нелогические компоненты” [14, с. 127].

– РЕЛИГИЯ: верь, не сомневаясь; верь, хотя бы вначале, “потому что абсурдно” (Фома Аквинский), и действуй, следуя открытым до тебя канонам и согласованностям математики, но и, при необходимости, отступай от них вслед за внутренними устремлениями: не демонизируй и не “создавай себе кумиров”. Сила – в гармонии мира и в тебе, в том, что ты создан “по образу и подобию Создателя”, то есть – прежде всего – ты тоже исследователь и создатель, но не разрушитель других миров и личностей.

Таковы, на мой взгляд, метафизические основания совершенствования и дальнейшего развития как математического образования на различных уровнях его реализации, так и математики как науки и – шире – культуры в современном обществе.

6. Некоторые следствия метафизических оснований: что такое **математика и зачем она современному человеку**?

Если стать на точку зрения метафизики и, к тому же, принять во внимание рассмотренные выше источники появления и развития математики, то при ответе на этот вопрос мы уже не можем исходить из понимания ее только как науки, созданной человеком. Это понимали и принимали для себя (хотя в разные времена поразному) многие выдающиеся мыслители и творцы математики – достаточно внимательно и непредвзято, не с позиций какой-либо идеологии, вчитаться, например, в текст книги Мориса Клайна [9]. Следующие тезисы можно положить в основу ответа на этот вопрос:

1. “... ***математика***, возможно, существует объективно, являясь своего рода “идеальной материей”, не зависящей от сознания людей... суть математических соотношений всегда остается неизменной”. И поскольку содержание математической “идеальной материи” абсолютно инвариантно, (в чем автор безусловно убежден),... <математические> соотношения могут быть только открыты... людьми с “правильно настроенной антенной”, и эти соотношения являются истинными (А.П. Ефремов – [14, с. 128].

2. ***Математика*** – первоначально являющаяся человеку как своеобразный язык, на котором “написана матрица мира”, в соприкосновении с человеческим разумом и познавательной деятельностью и через них становится идеальным инструментом познания и идеального преобразования человеком окружающей действительности и себя в ней [5, 6]. Именно в этой ипостаси она становится особенной гранью человеческой культуры,

сферой научной деятельности – наукой и, обретенная человеком, задает его отношение к себе и миру, определяет его мировоззрение. В этом случае только и имеет смыл ставить и решать вопрос о предмете математики.

3. *Предметом математики* как науки и специфической грани культуры являются *математические модели,* представляющие собой системные средства познания и идеального преобразования человеком окружающего мира, *способы* получения таких моделей и оперирования ими, а также *результаты*, полученные при их использовании в различных сферах профессиональной деятельности.

Отсюда: математика *как учебный предмет* необходима ради постижения и усвоения обучаемыми ее мировоззренческого ядра:

1) *понимания математики как особой грани культуры* с характерным для нее отношением к миру: познаваемость, эстетичность, стремление к истине, доказательность, креативность;

2) *научного математического языка*, используемого, в том числе и в рамках *любой профессии;*

3) *математических способов познания и идеального преобразования окружающей действительности*;

4) результатов такого познания – *математических моделей реальных – мыслимых и действительных – явлений и объектов вместе со способами их получения и применения* (величина, число, пространство и геометрические фигуры в нем, векторы и матрицы, отношения и операции, функция, дифференциал и интеграл, вероятность, информация, способы ее кодирования и преобразования и многое другое).

Характерное для математики отношение к миру кратко можно охарактеризовать следующими утверждениями: мир “устроен разумно” и потому познаваем; математическое познание мира начинается с ответа на вопрос: “Что познается, как это охарактеризовать, определить?”. Следующие шаги познания – построение гипотез и моделей, выбор известных науке средств и методов. В познании мира и в профессиональной деятельности человек должен доверять математике и полученным в ней результатам в границах их применимости, поскольку эти результаты доказуемы и вычислимы, следовательно, истинны. В границах применимости они отражают объекты целостно, в гармонии их частей, во взаимосвязи с другими объектами и с опорой на потребности человека и запросы практики.

Математика, как грань культуры, накопила в себе и предоставляет современному человеку ***системные средства познания и идеального преобразования себя и воспринимаемого мира, комплексы таких средств – математические модели,*** отвлеченные от природы моделируемых объектов, ***способы оперирования ими и результаты такой деятельности, отнесенные к различным видам человеческой практики.*** В силу этого вся система таких средств и способов составляет ***совокупный предмет математики как науки и грани культуры*** [6, с. 341]. Именно в развитии способности человека, в т.ч. учащегося, раскрывать “для себя” этот предмет хотя бы в некоторых его фрагментах, *овладевать им как средством разумного* природо- и культуросообразного *(социокультурного) преобразования* действительности и себя в ней видятся основания совершенствования математического образования в направлении становления и развития математического познания человеком окружающего мира.

Человеку дана великая способность и радость познавать. Дело образования – развивать эту способность. Но – зачем, что и, главное, как? Почти исчерпывающие ответы на эти вопросы дал еще в 17-м веке известный французский философ и математик Рене Декарт. Кратко и на современном языке эти ответы можно сформулировать следующим образом. Без познания – нет жизни человека. Познание, мысль и творчество – нерасторжимы: не познаю – значит, не существую. Для справки: декартовское *cogito* переводится и как “мыслю”, и как “познаю”.

На второй вопрос у Декарта нет прямого ответа. “Отец науки Нового времени” говорит лишь, что “Бог, сохраняя меня, поддерживает свое существование. . . Воссоздавая нас <в т.ч., через процесс познания – А.Ж.> в каждый момент и непрерывно, Он и себя поддерживает. И существование Его именно таково, а не в качестве отдельного предмета” [12, с. 74]. И если внимательно вчитаться в Декартовы “Рассуждения о методе” [4], то можно сделать вывод: “Познавай все то, что для тебя *интересно* и *полезно*”. В том числе, если не в первую очередь, – познавать надо процесс и математические методы познания мира и себя в нем и, конечно, модели как инструменты познания.

А почему математические, – на этот вопрос можно найти ответ в выше приведенном, мировоззренческом описании *предмета математики и процесса математизации*, приведенном ниже: “Математизация – один из самых древних путей синтеза научных знаний, поскольку она обеспечивала и обеспечивает на основе общности математических понятий общность научных принципов, законов, воззрений” [18, 11]. Ответ на третий вопрос сводится к такой *стратегии* познания: “Зародившийся у тебя умственный образ познаваемого объекта материализуй с помощью каких-либо подручных средств (слов, рисунков, схем действий и т.п.), а затем образуй понятие как синтез всего” [5, 6, 19].

Известнейший физик 20-го века Альберт Эйнштейн в одном из писем к своему другу несколько детализировал эту стратегию применительно к познанию материального мира примерно следующим образом: “Познавая мир, я познаю результаты моего опыта общения с ним, моего “переживания” (Erlebnisse) этого мира. Осознавая эти результаты, для их описания я создаю систему первичных понятий и утверждений, затем все это раскрываю в других понятиях, в теоремах и их следствиях. В результате получаю модель познаваемого объекта, которую затем применяю к преобразованию его и мира. Если это проходит удачно, то получаю хорошую модель, которую и называю знанием об объекте” [19, с. 570].

Заметим, что А. Эйнштейн говорил о познании в духе научной традиции 19-20 веков – не столько себя, сколько объектов окружающего мира. В связи с этим он обращает внимание на *средства* и некоторые *тактики* познания. Тактики: "переживание" познаваемого объекта и устойчивое желание его познать; действия с объектом, анализ и алгоритмизация этих действий, воображение, накопление опыта и т.д. Средства: понятия, гипотезы, утверждения и пр. О них же говорил Р. Декарт и другие ученые и мыслители. Некоторые средства и тактики описаны в [5, 10, 13, 15].

Русский мыслитель и художник первой половины XX века Николай Константинович Рерих так дополнил представления Декарта и Эйнштейна о процессе познания. Во-первых: человек познает *себя* и *Вселенную* – внутри и вне себя. Второе: "... первое условие познания – не стеснять (себя и другого – А.Ж.) методом изучения. Не настаивать на условных методах. Познание складывается дерзанием, внутренними особыми накоплениями... Счастливы те, кто, осознав беспредельность, полюбил труды каждого дня" [16, с. 171].

В конце данной статьи, как результат осмысления всего сказанного и предыдущих работ [5, 6], приводится "Обобщенная модель познания". Она помогает осознать процесс познания и, главное, рационализировать и сам этот процесс в условиях обучения ему, и работу по усвоению основных понятий, правил, алгоритмов и действий (опыт показывает, что не только математических). Для этого в модели зафиксированы основные *этапы*, *шаги* (тактики) и *средства познания*, особенно хорошо помогающие при постижении математических понятий, формул, алгоритмов и т.п. Поясним их в форме обращения к читателю (преподавателю или студенту).

1. Когда Вы что-либо воспринимаете (читаете, видите, слышите, воспринимаете каким-то другим способом), в Вашем подсознании создается и навсегда запечатлевается целостный *умственный образ* (на рисунке – **УО**) воспринятого Вами. При этом довольно часто он лишь *касается* сознания и проходит мимо, не фиксируется им, но сохраняется в глубинах человека.

2. Задача познания какого-либо объекта или явления состоит в том, чтобы УО перешел из подсознания в первую сигнальную систему, т.е. оказался осознанным Вами и подготовил Вас к действиям с этим объектом. Для этого необходимо Ваше желание, воля и специальная деятельность по *материализации* УО. Суть такой деятельности – как бы "вытащить" УО "из себя" и осознать его хотя бы на уровне той или иной информационной, чувственно воспринимаемой модели. Для этого во взаимосвязи необходимо использовать различные *коды записи и переработки информации*, постепенно переходя от одного из них, наиболее Вами понимаемого, к другим. В приведенной обобщенной модели познания этим кодам записи и переработки информации дана краткая характеристика. В результате на первых порах Вы начинаете осознавать различные модели познаваемого объекта на уровне этих кодов и методов. Р. Декарт называл этот этап познания *материализацией*, на современном языке – *воспроизводством, воплощением* образа *в культурных знаках*. Но вспомним рекомендацию Н.К. Рериха [16]: не стесняйте себя каким-нибудь одним средством, одним методом, ищите и используйте другие. В приведенной модели – это "колесо познания", подсказывающее полезность перехода к другим средствам.

3. Далее, Вам необходимо "стянуть" все полученные модели в единый результат познания – *знания о познаваемом объекте*, уже не "привязанные" к какому-либо одному средству, одному коду. Происходит *снятие* предыдущих "материализаций", *интеграция* средств познания и превращение их в *знаки-средства* [17]. Тогда постепенно возникает целостное знание об объекте – ***понятие*** как еще *один тип средств*, которые создает человек и пользуется им. А вместе с ним, что важно, *умение пользоваться им*, правда, пока на уровне ранее освоенных средств и при решении некоторых видов конкретных заданий. Р. Декарт назвал этот этап *символизацией* и обозначил метафорическим требованием: "образ должен умереть"!

4. Но никакое понятие не "живет" в одиночку. Исторически первыми этот факт явным образом зафиксировали математики Древней Греции, в частности – в форме известной геометрии Евклида. Именно там "первичные" понятия были заданы с помощью известных постулатов и теорем в "связке" друг с другом и с конкретными действиями с ними. Происходит умственное и действенное "погружение" в систему $S, S', S''\ldots$ известных или вновь созданных, "производных" понятий, утверждений, формул, алгоритмов, действий с моделями всех этих понятий. В связи с этим целесообразно говорить *о четвертом этапе познания – этапе восхождения к системе понятий, о воплощении* в конкретном материале *и погружении в деятельность*. Знания и умения в этом случае уже осознаются на уровне не только переходов от одной модели единичного понятия к другой его модели, но и на уровне теории как обобщенной модели познаваемого явления и помогают в этом случае действовать осознанно. Умение раскрывать смысл системы понятий, строить для нее необходимые интерпретации, в том числе с использованием различных кодов записи и переработки информации, других моделей и культурных знаков, применять все это при решении различных, еще лучше – созданных Вами задач, принесет Вам радость познания себя, своих возможностей и придаст творческие силы.

Закончим обсуждение основной темы доклада словами доктора философских наук В.Н. Катасонова [14, с. 241]: "... наука, которая, вообще говоря, призвана искать *истину*, т.е. как минимум, объективную суть вещей, оказывается в высшей степени *непредпосылочным* предприятием, связана с необходимым выбором множества нетривиальных положений и представлений, принятием оснований, которые *должны быть* справедливы еще до того, как выяснено, что же, собственно, *есть*... Чтобы лишь начать о чем-то рассуждать, наука должна уже *пред-положить* массу нетривиальных вещей: язык, нормы рассуждения, общее представление о характере реальности, гносеологию и т.д. Эти общие сверхопытные утверждения о началах бытия и познания традиционно называются в философии *метафизикой*. С самого возникновения этой науки обсуждение валидности тех или иных метафизических предпосылок и, вообще, роли метафизики в развитии науки было всегда в той или иной степени составной частью самого научного знания". Почти очевидно, что нужда в таком осмыслении была и есть по отношению к математике и как науке, и как своеобразной грани культуры и образования, тем более в наше переломное время.

Обобщенная модель научного (математического) познания (А. Жохов)

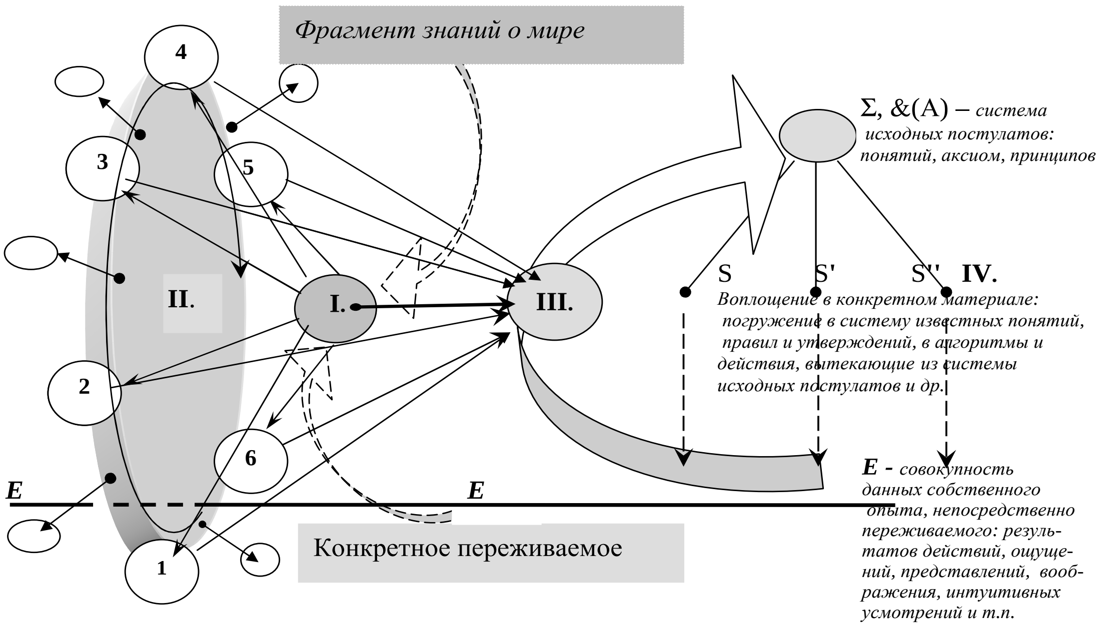


Рис. 1

Этапы познания: **I – возникает умственный образ (УО): "есть идея! эврика!"; II – материализация и перекодирование; III – зарождение понятия как результат символизации: интеграция всевозможных кодов и устранение привязки к конкретному образу; IV – воплощение в конкретном материале** (погружение в систему S, S′, S′′ – известных или новых понятий, формул, действвийи др.).

1-6 – коды записи и переработки информации (средства, инструменты, механизмы познания):

1 – код конкретных переживаний, в т.ч. – ощущений, восприятий, представлений, "движений" чувств, интуиции, результатов действий;

2 – словесный (описание на общепринятом языке, словесное творчество);

3 – изобразительный (рисунки, схемы, картины, графы и т.п.);

4 – символический (словесно-символический: символы, их пояснения и т.п.);

5 – предметно-практический (природные объекты, овеществленные модели, алгоритмы, технологии и др.);

6 – язык движений, в т.ч. – жестов, манипуляций, наложений, отображений, преобразований; *другие* коды.

•→○ – возможные **моменты "примысливания"** (Р. Декарт): зарождения новых **умственных образов в процессе перекодирования** – при переходах от одного кода к другому, при сравнении результатов познания разными средствами, при использовании разных методов…

Библиографический список

1. Большой иллюстрированный словарь иностранных слов (БИСИС) [Текст]. – М.: ООО: Русские словари -АСТРЕЛЬ-АСТ, 2004. – 957 с.
2. *Величковский, Б.М.* Когнитивная наука: Основы психологии познания [Текст]: В 2 т. Т. 1 / Б.М. Величковский. – М.: Смысл: Академия, 2006. – 448 с.
3. *Гудинг, Д.* Мировоззрение: человек в поисках истины и реальности [Текст] / Д. Гудинг, Дж. Леннокс; перевод с англ. Т.В. Барчуновой. – Ярославль: Норд, 2004. – Т. 2. – Кн. 1. – 384 с.
4. *Декарт, Р.* Рассуждение о методе с приложениями: Диоптрика, Метеоры, Геометрия [Текст] / Р. Декарт. – М., 1953; Избранные произведения. – М., 1950.
5. *Жохов, А.Л.* Научное мировоззрение в контексте духовного развития личности (образовательный аспект) [Текст] / А.Л. Жохов. – М.: ИСОМ, 2004. – 329 с.

6. *Жохов, А.Л.* Мировоззрение: становление, развитие, воспитание через образование и культуру [Текст]: монография / А.Л. Жохов. – Архангельск: ННОУ "Институт управления"; Ярославль: Ярославский филиал ИУ, 2007. – 348 с.
7. *Кант, И.* Метафизические начала естествознания [Текст]: В 6 т. Т. 6 / И. Кант. – М., 1966.
8. *Ковалева, Г.С.* Результаты международного исследования PISA-2006: (оценка естественно-научной грамотности в междунар. исследованиях образовательных достижений учащихся) [Текст] / Г. Ковалева // Школьные технологии. – 2008. – № 3. – С. 153-160.
9. *Клайн, М.* Математика. Утрата определенности [Текст] / М. Клайн; перевод с англ. / под ред. И.М. Яглома. – М.: Мир, 1984. – 434 с.
10. *Когаловский, С.Р.* Поиски метода и методы поиска (онтогенетический подход к обучению математике) [Текст]: монография / С.Р. Когаловский. – Шуя: ШПГУ, 2006.
11. *Лосев, А.Ф.* Миф-Число-Сущность [Текст] / А.Ф. Лосев; составитель А.А. Тахо Годи; общ. ред. А.А. Тахо Годи, И.И. Маханькова. – М.: Мысль, 1994. – 919 с.
12. *Мамардашвили, М.К.* Картезианские размышления [Текст] / М.К. Мамардашвили. – М.: Прогресс, 1993. – 352 с.
13. *Мельников, Ю.Б.* Математическое моделирование: структура, алгебра моделей, обучение построению математических моделей [Текст]: монография / Ю.Б. Мельников. – Екатеринбург: Уральское изд-во, 2004. – 384 с.
14. Метафизика. Век XXI. Альманах. Вып. 3: наука, философия, религия [Текст] / под ред. Ю.С. Владимирова. – М.: БИНОМ. Лабор. знаний, 2010. – 440 с.
15. Наглядное моделирование в обучении математике: теория и практика [Текст]: учеб. пособие / под ред. Е.И. Смирнова. – Ярославль: Индиго, 2007. – 454 с.
16. *Рерих, Н.К.* О Вечном… [Текст] / Н.К. Рерих. – М.: Политиздат, 1991. – 462 с.
17. *Розин, В.М.* Методология: становление и современное состояние [Текст]: учеб. пособие / В.М. Розин. – М.: МПСИ, 2005. – 414 с.
18. *Чепиков, М.Г.* Интеграция в науке [Текст] / М.Г. Чепиков. – М., 1981.
19. *Эйнштейн, А.* Собр. науч. трудов [Текст]. В 4 т. Т. 4 / А. Эйнштейн. – М.: Наука, 1967. – С. 547-575.
20. Математическое образование в XXI веке [Текст] // Круглый стол в редакции "НГ", 2000.

Факторы творческой активности будущих инженеров в освоении естественнонаучных дисциплин

Е.А. Зубова, Е.И. Смирнов

Следующие объективные факторы, под действием которых оказалось современное инженерное образование, оказывают нарастающее влияние на становление профессиональной компетентности будущего инженера и "вызовы", ими порождаемые, требуют включения адекватных и обоснованных компенсаторных механизмов и управленческих решений в образовательной практике:

• *доминирующее влияние информационно-коммуникационных технологий и необходимость роста информационной культуры и компетентности будущего инженера.*

Объективные и неизбежно нарастающие тенденции информатизации общественной жизни и личностного пространства индивида определяют в образовании подрастающего поколения современные "вызовы" и проблемы, которые сопровождают и неизбежно будут сопровождать в ближайшем будущем образовательный процесс и формировать его особенности. Уже через несколько лет развитие социальных сетей (Facebook, Twitter и др.) и планшетные ноутбуки с огромным количеством встроенных функций и дидактических возможностей (офисные программы, сетевые ресурсы, компьютерная алгебра, динамическая геометрия и др.), наряду с компактностью. мобильностью и удобным интерфейсом, настоятельно потребуют от будущего инженера тщательного учета эффективности и включенности этих каналов информации в проектировании образовательных воздействий при освоении обучающимся предметных областей. В иных случаях, при отсутствии управления со стороны педагога, студенты на основе использования малых средств информатизации будут сами определять формы, методы и процедуры адекватного освоения учебного материала с неуправляемым становлением приемов мыслительной деятельности и развитием личностных качеств. Это ставит повышенные задачи в становлении информационной культуры и компетентности (как педагога так и студента) на инновационной и инструментальной основах и их эффективной реализации в освоении предметных областей знания и учебной деятельности. И речь идет не только об организации проектной деятельности студента и роста его творческой активности с использованием информационно-коммуникационных технологий, но и об управляемом становлении приемов логического и алгоритмического мышления, формировании исследовательской и рефлексивной деятельности обучаемых в информационно-обогащенной образовательной среде, выявлении опорных точек обоснованного и оперативного включения информационных технологий в дидактическое пространство освоения учебного предмета.

• *информационный "взрыв" на фоне необходимости интеграции науки и образования в контексте формирования приемов научного познания у будущих инженеров.*

Современное общество находится "под прессом" экспоненциального роста объема информации и углубления противоречий между ограниченными возможностями человека по восприятию и переработке информации и интенсивностью массивов потенциально доступных информационных ресурсов. Конкретный индивид не только объективно получает большое количество (в том числе, бесполезной для собственного образования и развития) информации из окружающего мира, но и зачастую не в состоянии осуществить отбор и усвоение полезной информации, в том числе, учебного характера, ввиду отсутствия ее структурированности, неадекватности кодирования, наличия проблем восприятия и т.п. Большой урон наносит эффект "поверхностного" знания, когда происходит освоение индивидом несущественных свойств предмета, процесса или явления, а сущность при этом ускользает, и как правило, "переобучение" дается с трудом, так, что индивид овладевает опытом " псевдознаний", что , в конечном итоге, наносит ущерб его компетентности. А ведь именно такая информация наиболее доступна, а иногда и навязывается средствами массовой информации. В то же время, усилиями коллективного научного поиска человечество уже создало универсальные и оптимальные образцы научной продукции, научных знаний и процедур, которые объективно выстраивают связующие цепочки поэтапного перехода от сущности к ее проявлениям и наоборот, иногда доступные для воспроизведения в образовательных процессах. Так изучение фрактальной геометрии позволит находить интегративные связи и проявлять сущности в информатике, математике, физике, экономике, биологии и медицине, нанотехнологии фундируют сущности микробиологии, физики, химии, достижения генной инженерии наглядно моделируют клеточные процессы, фундаментальные зависимости микробиологических процессов и т.п. Поиск, отбор, анализ и оценка подобных фундирующих цепочек и комплексов на основе интеграции научных результатов, включение их в образовательные процессы остается далеко не решенной проблемой инженерного образования.

Выявление интегративного единства учебного предмета как науки и как педагогической задачи в контексте рефлексивного поведения студентов невозможно без содержательного и процессуального анализа *научного познания* – деятельности, направленной на производство и воспроизводство объективно истинного знания и требующей соответствующего мышления для своего осуществления. Выявление, возникновение и понимание науки в ее целостном виде на основе актуализации базовых интегративных связей становится важным методологическим аспектом анализа генезиса научного мышления и научной деятельности. Именно в научном познании мыслительные действия направлены на исследование глубинной сущности реального мира, связей и отношений его вещей и процессов, законов его существования и развития. Выявление характеристик и приемов научного познания, тенденции и генезис его развития, ассоциации с профессиональной деятельностью ученого проектирует анализ исследовательского поведения в обучении, поисковую и творческую активность будущих инженеров и их механизмы, важность исследовательского поведения в плане когнитивного и социального развития, и, прежде всего, саморазвития и самоактуализации личности.

• *возросшая потребность в самореализации и креативности личности будущего инженера на основе актуализации индивидуального стиля как ответ на изменчивость, вариативность и открытость образовательных ситуаций, необходимость использования "мягких" моделей образования и развития.*

Проблема развития мотивационной сферы будущего инженера представляется особенно актуальной в современный период в связи, с одной стороны, с растущими возможностями интеграции образования с различными сферами функционирования науки, жизни и деятельности общества (фракталы, fuzzy-логика, нечеткие множества, нанотехнологии, геном человека, вейвлеты, линейное и нелинейное программирование и др.), с другой стороны, необходимостью актуализации этих процессов в профессиональной деятельности с целью эффективного решения инженерных задач средствами математического моделирования на основе глубокого проникновения в сущность и разнообразие приложений научных феноменов, творческого их дидактического осмысления, в том числе, на основе конструктивного генезиса и использования информационно – коммуникационных технологий. Это может быть достигнуто только при высоком уровне становления личностных конструктов будущего инженера (познавательной самостоятельности, креативности, индивидуального стиля, самоактуализации и рефлексии и т.п.) как базовых факторов развития профессиональной мотивации на основе выявления и реализации адекватного содержания, условий, методов и средств формирования компетенций и личностно-ориентированного обучения фундаментальным и специальным дисциплинам. Необходимость развития профессиональной мотивации у будущего инженера объективно подкрепляется современными тенденциями в реформировании высшего профессионального образования, связанные с Болонским процессом и процедурами профессионального отбора, в основе которых лежит единый государственный экзамен (ЕГЭ). Опыт последних лет показывает, что уровень профессиональной мотивации студентов первого курса инженерно-технических вузов очень низок. Тем не менее, подвижность и направленность мотивационной сферы будущего инженера определяет возможность и необходимость выявления и реализации факторов развития профессиональной мотивации, актуализация которых может оказаться мощным средством становления профессионального мышления и индивидуального стиля, профессиональных компетентностей и самореализации личности. Сущность профессиональной мотивации, как компонента мотивационной сферы личности, исследовалась с философской, психологической и педагогической точек зрения различными отечественными и зарубежными авторами (В.Г Асеев, Дж. Аткинсон, Г.С. Батищев, Л.И. Божович, И.А. Зимняя, Е.А. Климов, А.Н. Леонтьев, А. Маслоу, А.К. Маркова, Ю.П. Поваренков, А.А. Реан, А.Г. Шмелев, В.Д. Шадриковым, Э.С. Чугунова и др.). Структура мотивации (в том числе, профессиональной) полностью определяется побуждениями личности, включающими потребности и иерархию внутренних и внешних мотивов. В организации образовательного процесса комплекс *внешних профессиональных мотивов* определяется факторами проектирования образовательной среды, нормативными документами, образовательными стандартами, профессионализмом преподавательского корпуса и т.п. (мы относим также в данный блок так называемые “ широкие социальные мотивы” по Л.И. Божович). Эти факторы можно считать объективными, “apriori” определенными, постоянно действующими и обладающие относительной неизменностью (по крайней мере, на период профессиональной подготовки). Они действительно являются важными стимулами и побуждениями к освоению профессии и становлению профессиональной мотивации в ее базовой составляющей. В настоящей статье нас более будет интересовать вариативная составляющая комплекса факторов, оказывающих существенное влияние на *внутренние профессиональные мотивы (ВПМ)*, их устойчивость, динамику и направленность. В соответствии с подходами Л.С. Выготского, Дж. Аткинсона, А. Маслоу и др., к доминирующим мотивам ВПМ отнесем: мотивы достижения, мотивы самоопределения (самоактуализации) и мотивы интеллектуальной напряженности. Линейная комбинация доминирующих мотивов определяет вектор ВПМ (направленность личности) и каждый из базовых факторов ВПМ, направленный на доминирующие мотивы, актуализируется в слагаемых компонентах: гностическом, теоретическом, практическом, процессуально-технологическом и метакогнитивном. Инновационный процесс развития профессиональной мотивации учителя разворачивается в педагогических условиях: информационной насыщенности и обогащенности образовательной среды, актуализации перехода процессов развития в процессы саморазвития, формирования творческой среды на базе освоения новых методов, средств и механизмов профессионально-ориентированного освоения и адаптации предметной и дидактической информации в учебный материал.

- *важность развития исследовательского поведения будущих инженеров на основе “переживания” инсайта и овладения методами и инновационными методиками исследования и решения профессионально-ориентированных и инженерных задач.*

Вступление России в Болонский процесс, сближение и ассимиляция образовательных систем неизбежно приводят к более тщательному анализу и осмыслению передовых западных образовательных теорий и технологий. К таковым относится так называемый “американский конструктивизм” или конструктивистские подходы, ведущие свое начало от прогрессивного образования Дж. Дьюи, когнитивного развития Ж. Пиаже, теории социокультурного развития Л.С. Выготского, теории научения путем открытия Дж. Брунера и др.

Конструктивизм – это общее название для педагогических теорий, центрированных на ученике и предполагающих конструирование информации самими учениками на основе педагогической поддержки учителя и создания педагогических условий для развития личности. Конструктивистские подходы противопоставляются, как правило, объяснительно-информационным (декларативным) методам обучения и основаны на парадигме усвоения новой информации за счет постановки и реализации собственных целей учеников (добывание, конструирование знаний, анализ и рефлексия, элементы исследовательского поведения и т.п.). Так, в американской педагогике в последние десятилетия идет процесс перехода от философии бихевиоризма (Е. Торндайк, Б. Скиннер и др.) к новой философии конструктивизма. При этом особую значимость сложившейся когнитивной структуры мышления обучающегося (прошлый опыт) в конструировании новых когнитивных основ познавательной деятельности подчеркивали Ж. Пиаже, Л.С. Выготский, Дж. Брунер, Н. Хомский и др.

Известный ученый-педагог М.А. Чошанов дает следующий анализ достоинств конструктивизма перед традиционным обучением:

Таблица 1

Традиционное обучение	***Конструктивистские подходы***
Учебная программа построена по принципу “от части к целому” с акцентом на базовых знаниях и умениях	Учебная программа построена по принципу “от общего к частному” с акцентом на обобщенных понятиях и умениях
Основное требование к процессу обучения – строгое выполнение учебной программы	Гибкость процесса обучения с возможностью варьирования учебной программы
Учебная программа и учебный процесс полностью опираются на рекомендованный учебник или учебное пособие	Учебник не является доминирующим источником учебной информации; приоритет переходит к оригинальным источникам, к первичным данным, к объектам и явлениям реальной действительности
Учащийся представляется как объект процесса обучения, который получает готовые знания от учителя	Учащийся – полноправный участник процесса обучения со своими собственными взглядами и представлениями об окружающем мире
Учитель, как правило, преподносит новый учебный материал в дидактической манере, как истину в последней инстанции	Учитель выступает прежде всего как организатор учебно-познавательной и исследовательской деятельности учащихся, не навязывая им свои знания и убеждения
Учитель оценивает эффективность учебно-познавательной деятельности учащихся по количеству правильных ответов	Учитель ценит самостоятельные, пусть не всегда правильные рассуждения учащихся, “умные” вопросы, сознательно исправленные ими ошибки

Результаты тестов и контрольных работ – единственный источник информации об уровне знаний и умений учащихся	Оцениваются все результаты учебно-познавательной деятельности учащихся, показывающие не только итоги обучения, но и усилия, приложенные учащимися к конструированию нового знания, и его прогресс в обучении
Контроль и оценка учебных достижений осуществляются в отрыве от процесса обучения	Контроль и оценка учебных достижений осуществляются в тесной связи с тем, как реально протекал процесс обучения
Учащиеся преимущественно работают в условиях фронтального обучения в классе и индивидуально – дома	Учащиеся большую часть времени как на уроках, так и при выполнении домашних заданий работают в малых группах, командах, парах

Исследовательское поведение учащегося – неотъемлемый атрибут конструктивистского подхода в обучении. Многие ученые и методисты занимались проблемой организации исследовательской деятельности в учебном процессе (М.И. Махмутов, М.Н. Скаткин, И.Я. Лернер, Б.Е. Райков и др.). В последние годы внимание к исследовательской деятельности учащихся значительно возросло за счет требований современного общества к научному потенциалу индивида, роста объема информации, необходимой для адекватной социализации личности, возросшей сложностью и синергией современных производственных и социальных процессов, их изменчивостью и гуманитарной направленностью. Это требует организации процесса обучения, основанного на включении элементов актуализации и эффективного развития личностного потенциала студента, овладения методами научного мышления, научной деятельности и социальной коммуникации. В свою очередь, исследовательское поведение складывается из поисковой и творческой активности ученика, и не могут осуществляться постоянно. Студент должен осваивать выполнение учебных действий, применяя полученные знания, анализировать и оценивать полученные результаты, развивать качества самоконтроля, рефлексии и т.д. Поэтому реально конструктивистский подход можно эффективно реализовывать на специально разработанных формах учебного взаимодействия – ресурсных занятиях, предполагающих информационную интеграцию двух или более учебных дисциплин в одном занятии с управлением на основе самостоятельной деятельности. При этом ресурсное занятие действительно станет особой формой учебного взаимодействия, если будет проектировать системный уровень интеграции учебных предметов на фоне актуализации системно-образующего фактора цели развития личностных качеств студента.

“Исследовательскую деятельность следует рассматривать как особый вид интеллектуально-творческой деятельности, порождаемой в результате функционирования механизмов поисковой активности и строящейся на базе исследовательского поведения. Но если поисковая активность определяется лишь наличием самого факта поиска в условиях неопределенной ситуации, а исследовательское поведение описывает преимущественно внешний контекст функционирования субъекта в этой ситуации, то исследовательская деятельность характеризует саму структуру этого функционирования. Она логически включает в себя мотивирующие факторы (поисковую активность) исследовательского поведения и механизм его осуществления” [2]. При этом психологи традиционно понимают поисковую активность как активность, направленную на изменение ситуации или на изменение самого субъекта, его отношение к ситуации при отсутствии определенного прогноза желательных результатов такой активности.

Таким образом, в современных условиях необходимо проектирование инновационных методов, форм, средств и технологий обучения естественнонаучным дисциплинам в профессиональной подготовке будущего инженера, когда исследовательская деятельность студентов актуализируется на фоне интеграции математических и естественнонаучных знаний. При этом рефлексия и интеллектуальное напряжение, такие неотъемлемые атрибуты научного познания как инсайт и нелинейное мышление, наглядное моделирование, антиципации, обострение и расчленение проблем, умение рассуждать,- должны получить адекватное отражение в поисковой активности и исследовательской деятельности будущих инженеров в контексте продуктивного социального взаимодействия. Необходима надситуационная активность студентов, создание педагогических условий рефлексивного поведения, содержательное взаимодействие математических и естественнонаучных знаний на фоне совместного управления познавательной деятельностью студентов как со стороны педагога так и самого обучающегося. Только тогда возможно повышение учебной и социальной мотивации у будущих инженеров и реальное использование современных информационно-коммуникационных технологий в изучении естественнонаучных дисциплин в высшем профессиональном образовании.

Библиографический список

1. *Хуторской, А.В.* Педагогическая инноватика [Текст]: учеб. пособие / А.В. Хуторской. – М.: Академия, 2008. – 256 с.
2. *Савенков, А.И.* Психологические основы исследовательского подхода к обучению [Текст]: учеб. пособие / А.И. Савенков. – М., Ось-89, 2006. – 480 с.
3. Наглядное моделирование в обучении математике: теория и практика [Текст]: учеб. пособие / под ред. Е.И. Смирнова. – Ярославль: Индиго, 2007. – 454 с.

Понимание как основа формирования профессиональной компетентности инженера

К.Н. Лунгу

Проблема формирования профессиональной компетентности является важной в условиях изменения социально-экономической жизни общества и обострения ситуации на рынке труда. Поэтому особую актуальность приобретает модернизация математического образования будущих инженеров, которая требует поиска новых организационно-методических средств и технологий повышения качества обучения студентов технических вузов. Рассматривая цели и результаты образования человека, исследователи подчеркивают необходимость формирования единства мотивационно-когнитивных и поведенческих компонентов в структуре личности выпускника технического вуза. Наиболее адекватно это единство выражается понятием "профессиональная компетентность", которая становится одним из основных качеств будущих инженеров.

Анализ традиционного процесса математической подготовки будущих инженеров в технических вузах показывает, что их уровень не в полной мере соответствует современным требованиям, не создаются условия для личностно-профессионального развития специалистов, раскрытия их творческого потенциала и формирования предметных компетенций. Традиционные результаты педагогического процесса, выражаемые в терминах знания–умения–навыки недостаточны для подготовки студента к решению всех жизненных и производственных задач.

Необходим перенос акцента на развивающую функцию математического образования, переход от "школы памяти" к "школе понимания", превращение системы инженерного образования в сферу освоения способов познавательной деятельности, математической, коммуникативной и инженерной культуры, организации инженерного образования в комплексных полидисциплинарных практикоориентированных коллективах, органическое включение студентов в активную творческую деятельность, обеспечение их массового участия в научно-исследовательской работе, сопровождаемой математическими моделированием и расчетами.

Развитие страны, как указано в государственной программе "Образование и развитие инновационной экономики: внедрение современной модели образования в 2009-2012 годы", требует, чтобы все учебные программы, учебные материалы были обновлены с использованием компетентностного подхода. Компетентность – радикальное средство изменения формы образования (Д.Б. Эльконин), а по нашему мнению, она невозможна без понимания объекта деятельности.

Компетентность – это совокупность личностных качеств человека (ценностно-смысловых ориентаций, знаний, умений, навыков, способностей), обусловленных опытом его деятельности в определенной социальной и личностно-значимой сфере (А.В. Хуторской, [1, с. 135]). Под компетентностью подразумевают также "готовность к осуществлению практических деятельностей, требующих наличия понятийной системы и, следовательно, понимания, соответствующего типа мышления, позволяющего оперативно решать возникающие проблемы и задачи" [1, с. 134]. Отсюда следует, что компетентность инженера может быть сформирована средствами теоретического мышления.

Ряд исследователей предлагают определение компетенции, опирающееся на понятие "способность": "Компетенция – это способность, основанная на знаниях, опыте, ценностях, склонностях, которые приобретены благодаря обучению" [2, с. 73], это возможность человека применять имеющиеся знания, умения и навыки на практике, в нестандартной ситуации. Компетенция инженера – это социальное требование (норма) к образовательной подготовке студента, необходимой для эффективной продуктивной деятельности в определенной сфере, она является продуктом междисциплинарного, развивающего образования, имеет интегративную природу и формируется как межпредметный синтез и междисциплинарную кооперацию.

Введение компетентностного подхода в учебный процесс предполагает серьезных изменений в целях и содержании образования, методах и формах его организации. Эффективная реализация компетентностно ориентированного математического образования будущего инженера возможна, если содержание математического образования будет иметь интеграционный характер, профессионально-прикладную направленность, стимулировать мотивацию к учению, обеспечивать восприятие и понимание специальных и профильных дисциплин, определяющих уровни профессиональных компетенций.

Обучение математике должно быть личностно ориентированным, организовано на развивающей основе с целью формирования у студентов теоретических понятий о целостных явлениях инженерно-технологической, экономической, социальной и природной реальности. Дидактические средства должны сопровождаться модельной наглядностью и визуализацией для обеспечения восприятия математического материала. Механизмом формирования теоретических понятий должен являться адекватный перевод математической информации на языки других учебных дисциплин и личного опыта студента одновременно через действие, образ и слово, а также взаимопереход знаковых систем – в четырех сферах: вербальной, знаково-символической, графической и деятельностной. Педагогический процесс обучения математике студентов должен осуществляться в форме диалога, направлен на понимание и развитие коммуникативных компетенций.

Структурообразующим фактором проектируемой дидактической системы должна выступать методология фундирования как процесс создания условий (психологических, педагогических, организационно-методических) для актуализации базовых учебных элементов школьной и вузовской математики с последующим теоретическим обобщением структурных единиц, раскрывающих их сущность, целостность и междисциплинарные связи в направлении совершенствования инженерно-математического мышления [3].

Математика должна способствовать формированию:

– ценностно-смысловых компетенций, связанных со способностью видеть и понимать окружающий мир, ориентироваться в нем посредством моделирования реальных процессов и явлений, способствующих их анализу и правильному принятию решений;

– общекультурных компетенций, как способность познать и приобретать опыт деятельности в области общечеловеческой культуры, мировоззренческих и духовно-нравственных основ жизни человека;

– учебно-познавательных компетенций как совокупность компетенций человека в сфере творческой самостоятельной деятельности, включающей элементы логической, алгоритмической, абстрактной, методологической и общеучебной деятельности;

– информационных компетенций как навыки деятельности по сбору и обработке информации в разных учебных предметах и образовательных областях, ее структуризации, систематизации, понимание и применение;

– коммуникативных компетенций, как знание способов взаимодействия с реальными событиями и людьми, понимать людей и быть понятым ими;

– социально-трудовых компетенций как выполнение роли гражданина, наблюдателя, производителя, потребителя, умение разобраться в вопросах экономики и права, знание области профессионального самоопределения.

В настоящее время во всем мире в подготовке инженеров осуществляется достаточно радикальный переход от "школы памяти" к техническому университету, в котором студента учат работать с собственным восприятием, мышлением, пониманием, опытом, творчеством.

Практика показывает, что обучение без понимания лишено всякого смысла, учебный процесс, который ориентирован на накопление сведений без их понимания, приводит к бессмысленному загромождению памяти, рассеиванию внимания, восприятия и мышления, застою в развитии. От понимания или непонимания зависит эмоциональное состояние каждого человека, тем более студента, для которого понимание должно быть целью, средством и основным мотивом учебной деятельности.

Еще Я.А. Коменский рекомендовал обучать только через понимание. Для первичного понимания окружающего мира он предлагал такие, например, упражнения, как беседы на распознавание предметов ("Что это?") и их назначение ("Для какой цели?"). Чтобы усваиваемые знания способствовали успеху в соответствующей деятельности, т. е. чтобы знания были продуктивными, они должны быть, прежде всего, понятны человеку. Непонятная информация просто загромождает ум, ибо человек не может ею пользоваться.

Пониманию посвящено огромное число исследований, в том числе несколько книг (см. например, [4-7]). Понимание в научной литературе имеет много аспектов, оно выступает как феномен, событие, состояние, процесс, механизм, форма, содержание, структура, результат и т.д., и проявляется как создание чувственного образа, как привыкание к новой идее, как объяснение и умение выразить знания на естественном языке, как обнаружение и преодоление парадокса, как ответ на свой или чужой вопрос, как толкование или интерпретация, как постижение поступка или суждения другого человека и т.п. Понимание выступает как некоторая "субстанция", пронизывающая все формы познания и выражает определенное состояние познающего субъекта и обусловлено структурой познающего объекта.

"Понимание" как феномен нашел свое отражение в большом числе философских работ (И. Кант, М.М. Бахтин, А.А. Брудный, Г.Б. Гутнер, С.С. Гусев, Г.Л. Тульчинский, Б.С. Грязнов, Г.И. Рузавин, Б.Г. Юдин и др.), "понимание" как событие, состояние, процесс, деятельность, результат отражено в психологических и педагогических исследованиях (П.П. Блонский, Л.Б. Ительсон, В.В. Давыдов, П.И. Зинченко, А.А. Ивин, А.Н. Леонтьев, Н.А. Менчинская, Л.П. Доблаев, С.Л. Рубинштейн, Ю.А. Самарин, А.М. Сохор, А.А. Смирнов, Ю.В. Сенько, М.Н. Фроловская др.). Проблеме понимания в методике посвящено мало исследований, это работы Н.Е. Кузнецовой, Т.Н. Литвиновой (понимание в химии), Т.Е. Васильевой, А.И. Панченко, Н.И. Степанова, М.Е. Бершадского (в физике), Е.Т. Коробова – в электротехнике, В.А. Гусева, О.Б. Епишевой, Е.И. Смирнова – в математике. В контексте развивающего обучения вопросам теории и практики "понимающего усвоения" математики уделено существенное внимание в исследованиях Е.И. Лященко, В.М. Туркиной, Э.К. Брейтигам, И.Г. Поповой, О.И. Плакатине и др. Термин "понимающее усвоение" ввела Е.И. Лященко в противовес "запоминающему усвоению".

Понимание внесено Б. Блумом в своей таксономии целей (Знание. Понимание. Применение. Анализ. Синтез. Оценка), хотя такая структура таксономии нам не представляется адекватной трактовке соответствующих компонент в отечественной литературе (две предпоследние цели относятся не к учебной деятельности, а к мыслительным операциям). Таксономии учебных достижений учащихся, в которых присутствует "понимание" разработаны И.Я. Конфедератовым, В.Н. Максимовой, В.А. Сластениным, В.П. Симоновым (различение; запоминание; понимание; простейшие умения и навыки; перенос) и др., хотя в педагогической литературе категория "понимание" не определена.

Э.К. Брейтигам [8] определяет понимающее усвоение математики как "совокупность условий: 1) целостность и системность усвоения содержания, включая его знаковое представление; 2) постижение различных аспектов смысла математических понятий (фактов); 3) направленность процесса обучения математике на приобретение личностного опыта применения математики в конкретных ситуациях учебной и практической деятельности".

Анализ философской, педагогической, психологической, методической литературы позволяет формулировать процессуальную характеристику понятия "понимание" как педагогическая категория с возможной эмпирической верификацией.

Понимание – это результат установления признаков и основных свойств воспринимаемого (объекта, явления, процесса, метода), а также связей и отношений между элементами знания, относящихся к нему. Основой понимания является система необходимых актуализированных базовых знаний, интеллектуальных операций, практических умений, навыков и способов деятельности. Понимание является завершением процесса мышления, который осуществляется в виде совокупности мыслительных операций, называемых в методике приемами мыслительной деятельности (анализ, синтез, сравнение, аналогия, абстрагирование, обобщение, конкретизация, структуризация, классификация, систематизация). Понимание проходит четыре фазы: предпонимания, генетического понимания, структурного понимания и системного понимания [7]. Понимание достигается на четырех уровнях: фрагментарный, структурный, системный и коммуникативный [9]. Понимание можно диагностировать системой тестов и ответами на четыре вопроса: Что? Как? Почему? Откуда? Лучшим средством диагностики понимания – это изложение или дискурс.

Приведенное описание не претендует на математическое определение, но оно позволяет выделить признаки, свойства, связи и отношения понимания к другим педагогическим категориям, с которыми оно связано. В частности, традиционные ЗУНы являются собственной частью понимания, они не отменяются и не устраняются, ибо без знаний, умений, навыков нет и понимания математического материала.

В данном описании в той или иной форме и степени проявляются элементы, характеризующие компетенции и компетентности. Поэтому понимание является ближайшим личностным конструктом для формирования компетенций, а компетенции являются непосредственным следствием понимания. Представляется адекватной формула: компетентность = понимание + опыт.

В научной литературе [4] рассматривают также следующие четыре параметра понимания: отчетливость, полноту, глубину и обоснованность.

Отчетливость понимания – это степень осмысления свойств, связей и отношений воспринимаемого объекта. Отчетливость понимания носит субъективный характер и критичный человек сам должен определить ее степень. Недостаточно отчетливое понимание обычно называют смутным, туманным, расплывчатым.

Полнота понимания предполагает максимальное выявление содержания усваиваемого объема информации и характеризуется числом как отношение понятых человеком элементов, связей и отношений между ними ко всем имеющимся в объекте понимания таким элементам и связям.

Глубина понимания характеризуется степенью проникновения в сущность воспринимаемого. Глубину можно связывать с пониманием определений, утверждений, формул, законов, принципов, правил, мыслей, т.е. с тем, что может иметь глубокий смысл. Глубину понимания, можно охарактеризовать числом: чем больше количество понятий и связей между ними понято в рассматриваемой системе, тем глубже понимание. В зависимости от глубины различают глубокое и поверхностное понимание.

Обоснованность понимания – это осознание оснований, которые обусловливают уверенность в правильности понимания. Эти основания уверенности формируются комплексом аргументов, которые человек использует для доказательства выдвинутых гипотез в ходе процесса понимания. Чем выше уровень логичности мышления, тем выше и субъективная и объективная обоснованность понимания. Недостаточная обоснованность, как правило, вызывает чувство сомнения в истинности, правильности понимания.

Полноту, глубину и обоснованность понимания можно диагностировать системой тестов и вопросов.

Роль и важность наглядного моделирования в понимании сущности математических объектов, явлений, процессов и методов исследована Е.И. Смирновым. Им определено наглядно-модельного обучение как "процесс формирования адекватного категории диагностично поставленной цели устойчивого результата внутренних действий обучаемого на основе моделирования существенных свойств, отношений, связей и взаимодействий при непосредственном восприятии приемов знаково-символической деятельности с отдельным математическим знанием или упорядоченным набором действий" [3, с. 103]. Им же дано определение понимания как "психического процесса в мышлении обучаемого, характеризующегося адекватностью сущности исследуемого математического объекта и перцептивного образа, формируемого в процессе обучения посредством устойчивых усвоенных знаний и актуализированной познавательной деятельности" [3, с. 105].

Одним из показателей продвижения студента в системе инженерного образования является реализация концепции фундирования личностного конструкта студента "понимающее усвоение" математического материала.

Фундирование – это процесс использования и поэтапного расширения опыта и достоинств личности, это систематизация знаний, умений, навыков, приемов деятельности, их углубление и обобщение, переход на новый качественный уровень, следующий виток спирали познания и развития мышления и профессиональных качеств будущего инженера. Оно осуществляется на основе создания механизмов и условий (психологических, педагогических, организационных, методических) для актуализации и интеграции базовых учебных математических элементов и вузовских знаний, умений в направлении профессионализации знаний и формирования личностных компетенций будущего инженера, экономиста, прикладника.

В состав фундирования как механизма и метода формирования нового уровня профессиональных компетенций будущего инженера входят:

1) освоение математики как науки на основе выявления генетических основ учебных элементов (в первую очередь связанных со специализацией студентов) и способов деятельности и возможного развития;

2) создание педагогических условий для обеспечения целостности и структурности развертывания математического содержания подготовки инженера с опорой на выделение и освоение базовых учебных элементов и приемов деятельности;

3) преемственность на всех уровнях вузовского математического образования, установление внутри- и межпредметных связей.

Методика компетентностно ориентированного математического образования студентов технического вуза основывается на концепции теоретического мышления и выявленных нами в процессе исследования объективных закономерностях формирования профессиональных компетенций: 1) процесс их формирования имеет интегративый характер; 2) эффективность педагогического процесса математического образования будущих инженеров и формирования личностных компетенций в значительной степени зависит от включенности личности студента в математическую деятельность, активизации познавательных процессов восприятия сложного математического содержания на основе правильно проектируемой учебной деятельности, глубины понимания математического материала; 3) математическая компетенция формируется в процессе адекватного взаимоперехода (перекодирования) знаковых систем в четырех сферах: знаково-символической, вербальной, графической и деятельностной.

Ведущей формой организации понимающего усвоения математики является организация учебно-познавательных ситуаций, в которых центрально место занимает учебная задача на установление связей между элементами математического знания и владение приемами мыслительной деятельности.

Библиографический список

1. *Краевский, В.В.* Основы обучения. Дидактика и методика [Текст] / В.В. Краевский, А.В. Хуторской. – М.: Академия, 2007.
2. *Шишов, С.Е.* Школа: мониторинг качества образования [Текст] / С.Е. Шишов, В.А. Кальней. – М., 2000.
3. Наглядное моделирование в обучении математике: теория и правктика [Текст] / под ред. Е.И. Смирнова. – Ярославль, 2007.
4. *Гусев, С.С.* Проблема понимания в философии [Текст] / С.С. Гусев, Г.Л. Тульчинский. – М., 1985.
5. *Ивин, А.А.* Исскуство правильно мыслить [Текст] / А.А. Ивин. – М.: Просвещение, 1990.
6. *Сенько, Ю.В.* Педагогика понимания [Текст] / Ю.В. Сенько, М.Н. Фроловская. – М.: Дрофа, 2007.
7. *Бершадский, М.Е.* Понимание как педагогическая категория [Текст] / М.Е. Бершадский. – М., 2004.
8. *Брейтигам, Э.К.* Деятельностно-сысловая модель обучения математике [Текст] / Э.К. Брейтигам // Тезисы докладов третьей международной конференции посвященной 85-летию члена-корреспондента РАН, профессора Л.Д. Кудрявцева. – М., 2008. – С. 390-392.
9. *Лунгу, К.Н.* Понимание как системообразующий компонент усвоения знаний [Текст] / К.Н. Лунгу // Образование в техническом вузе в XXI веке. – 2006. – Вып. 6. – С. 23-26.

Научно-методический студенческий кружок “Школа научного руководителя” в системе профессиональной подготовки будущего учителя математики

М.В. Шабанова, Л.В. Форкунова

“Новая школа - это новые учителя, открытые ко всему новому. . . ”
из НОИ “Наша новая школа”

Инновации системы образования сегодня приобрели характер непрерывного и всеобщего процесса. Готовность к ним обеспечивается обогащением профессиональной деятельности учителя двумя новыми составляющими: *научно-исследовательской и инновационной, так как* современный учитель вовлечен в инновационный процесс не только на этапе внедрения педагогических и методических новшеств, но часто и сам выступает инициатором и активным участником их разработки.

При этом поставленные перед системой общего образования цели требуют, чтобы учитель не только сам был готов к научно-исследовательской и инновационной деятельности, но и *обладал знаниями и опытом достаточным для подготовки к этим видам деятельности своих подопечных*, но в качественно иной сфере, отнесенной уже не к системе образования, а к области научно-практической деятельности, соответствующего учебного предмета. Эти знания и опыт необходимы учителю для развития исследовательской и инновационной компетентности учащихся посредством научного руководства научно-исследовательскими и проектными работами школьников, внедрения в практику своей работы технологий исследовательского и проектного обучения.

Возможностью комплексной подготовки студентов педагогических вузов к этим видам профессиональной деятельности обладает научно-методический кружок “Школа научного руководителя”. Занятия в нем позволяют студентам приобрести опыт исследователя, научного руководителя, преподавателя-новатора. Источниками этого опыта выступают те формы работы, в которые вовлечены студенты – члены такого кружка.

Программа работы такого кружка для будущих учителей математики включает следующие формы работы:

- проведение обучающих семинаров для студентов по методике научного руководства научно-исследовательской работы школьников (НИРШ) в области математики и ее приложений (особенности НИРШ в области математики и ее приложений, психолого-педагогические закономерности развития исследовательской компетентности школьников, методика разработки замысла ученического исследования; методика научного руководства НИРШ в области математики и ее приложений, конкурсы исследовательских работ школьников: подготовка, участие, экспертная оценка);
- подготовка и проведение студентами научно-популярных занятий по математике (лекций, лабораторных практикумов) для школьников в рамках лекториев "Приглашаем к исследованию" (для учащихся 7-11 классов) и "Первые шаги в математическую наука" (для учащихся 5-6 классов);
- работа студентов в качестве помощников научных руководителей ученических работ в области математики и ее приложений;
- проведение студентами и аспирантами исследований по проблемам, связанным с организацией НИРШ в области математики и ее приложений и исследовательского обучения математике школьников;
- организация научно-практической конференции для школьников по математике и ее приложением (работа в оргкомитете, в составе конкурсных комиссий);
- участие в работе круглого стола вузовских преподавателей и учителей математики – научных руководителей ученических работ (проведение наблюдений, анкетирование, интервьюирование участников, выступление с сообщениями, подготовка материалов);
- подготовка научных и методических публикаций для сборника материалов научно-практической конференции школьников и круглого стола (публикация конспекта проведенного научно-популярного занятия, совместная со школьником публикация результатов научного исследования в области математики и ее приложений, публикация тезисов доклада на круглом столе, публикация результатов опроса участников круглого стола или репортажа о работе круглого стола).

В рамках этих форм работы студенты получают возможность не только непосредственного общения с вузовскими преподавателями математики, теории и методики обучения предмету, но и учащимися, вовлеченными в НИРШ; учителями, имеющими богатый опыт исследовательского обучения и обучения исследованию школьников; а также более опытными старшими товарищами (студентами более старших курсов, аспирантами). Они становятся равноправными членами профессионального сообщества, объединенного общими целями – совершенствования системы подготовки учащихся к научно-исследовательской деятельности в сфере математики и ее приложений.

Результатами трехлетней работы студенческого кружка на математическом факультете стали: подготовка студентами более десятка научно-популярных занятий для школьников разных возрастов, опубликованных в сборниках [1-3]; защита 10 курсовых, 13 выпускных квалификационных работ и одной кандидатской диссертации по проблемам организации НИРШ школьников в области математики и ее приложений; подготовка методического руководства для учителей математики [4]; подготовка учеников – победителей и призеров международных (3 чел.), всероссийских (1 чел.), областных (3 чел.), городских (4 чел.), вузовский (9 чел.) и школьных (15 чел.) конкурсов научно-исследовательских работ учащихся.

Библиографический список

1. Научно-исследовательская деятельность школьников в области математики и ее приложений [Текст]: материалы первой региональной научно-практической конференции / составитель С.Н. Котова; отв. ред. М.В. Шабанова. – Архангельск: Поморский университет, 2009. – 119 с.
2. Научно-исследовательская деятельность школьников в области математики и ее приложений [Текст]: материалы первой региональной научно-практической конференции / составитель С.Н. Котова; отв. ред. М.В. Шабанова. – Архангельск: Поморский университет, 2010. – 160 с.
3. Научно-исследовательская деятельность школьников в области математики и ее приложений [Текст]: материалы первой региональной научно-практической конференции / составитель С.Н. Котова; отв. ред. М.В. Шабанова. – Архангельск: Кира, 2011. – 129 с.
4. *Форкунова, Л.В.* Ученическое модельное исследование от замысла до воплощения [Текст]: учебно-метод. разработка / Л.В. Форкунова, М.В. Шабанова. – Архангельск: Поморский университет, 2010. – 71 с.

Численные методы в курсе математики в техническом вузе

А.И. Новиков

Перед системой высшего образования в техническом вузе в советский период ставилась задача подготовки специалистов, способных самостоятельно решать сложные научно-технические задачи. Предполагалось, что инженер-исследователь должен уметь формализовать поставленную задачу, найти метод ее решения и получить решение задачи либо в аналитическом виде, либо приближенно с помощью численных методов, но при этом с заданной точностью.

Программа курса высшей математики для инженерно-технических специальностей высших учебных заведений строилась на следующих принципах [1]:

• общий курс математики является фундаментом математического образования инженера;

• специальные курсы математики (ТФКП, уравнения математической физики, методы оптимизации, математическая статистика) содержат современные методы анализа и ориентированы на применение математических методов в прикладных задачах;

• преподавание численных методов подразумевает реализацию соответствующих методов на ЭВМ.

В этой триаде – фундаментальность математического образования, овладение современными математическими решения прикладных задач и изучение численных методов анализа с применением ЭВМ – важная роль отводилась численным методам. Численные методы изучались на лекциях и практических занятиях, выполнялся блок из 6 лабораторных работ. Такой подход к изучению математики в техническом вузе позволял его выпускнику со знанием дела выбирать нужные пакеты прикладных математических программ для решения реальных научно-технических задач.

Актуальность перечисленных выше принципов математического образования для инженерно-технических специальностей вузов не должна бы оспариваться в настоящее время, когда основным направлением развития страны заявлен инновационный путь. Однако, в реальности мы имеем резкое снижение качества подготовки инженеров. Это происходит и из-за существенного сокращения аудиторного времени, отводимого на изучение математики и других точных дисциплин, и из-за падения престижности инженерных профессий. Преобразования последних 20 лет в системе высшего образования привели к размыванию целевых установок дореформенного периода. В этих условиях пострадали в первую очередь так называемые специальные курсы и особенно – численные методы.

В итоге современный выпускник втуза не обладает набором знаний и навыков, необходимых для решения реальных научно-технических задач. Существенно улучшить ситуацию можно лишь при условии коренного изменения отношения государства к подготовке инженерных кадров. Необходимо не декларировать, а реально восстановить, а возможно и усилить, действие основных принципов математической подготовки в технических вузах.

Но даже и в этих – не очень комфортных условиях - преподаватели математики могут частично компенсировать потери в качестве подготовки специалистов. Для этого нужно внести определенные изменения в лекционные курсы. Предлагается объединять изучение классических методов линейной алгебры и математического анализа в определенных разделах с изучением основ численных методов. Приведем несколько примеров такого взаимопроникновения учебных курсов.

Первая тема, в которой студент первого курса сталкивался раньше с численными методами, – решение систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) методом Гаусса. Если метод Гаусса излагать не в общем виде, а объяснить его идею, записать алгоритмы прямого и обратного ходов, и затем рассмотреть три примера соответственно определенной, неопределенной и несовместной СЛАУ, то будет достигнута некоторая экономия лекционного времени. Ее можно использовать для рассказа о проблемах вычислительной устойчивости и неустойчивости численных методов при реализации их на ЭВМ, о способах борьбы с неустойчивостью, о проблеме затрат машинного времени на решение СЛАУ большого размера. Попутно целесообразно рассказать о методе квадратных корней, как об одном из самых эффективных методов решения СЛАУ с симметричной основной матрицей, привести примеры классов задач, которые приводят к нормальным СЛАУ.

Еще одна точка в курсе линейной алгебры, где можно и целесообразно сочетать классические и численные методы – проблема собственных значений и собственных векторов линейного оператора. В учебном пособии [2] приведены основные численные методы решения СЛАУ с исследованием их вычислительной устойчивости, затрат оперативной памяти и машинного времени на их реализацию, а также простейшие методы нахождения собственных значений и собственных векторов квадратной матрицы.

Третий блок примеров из курса математического анализа. Здесь важными разделами, имеющими обширные приложения, являются методы исследования функций одной и многих переменных на локальный и глобальный экстремумы. Изучение численных методов решения экстремальных задач предполагает наличие практических навыков решения численными методами нелинейных уравнений и систем уравнений. На примере этих уравнений уместно рассказать о широких возможностях метода сжимающих отображений.

Изучение курса математики в техническом вузе должно основываться на разумном сочетании строгих доказательств отдельных теорем и утверждений с использованием неформальных способов вывода, опирающихся в частности на геометрические построения. Существенные методические затруднения возникают у лектора-математика технического вуза при изучении безусловных

$$f(\bar{x}) \to \min, \quad \bar{x} \in R^n$$

и условных

$$\begin{cases} f(\bar{x}) \to \min, & \bar{x} \in D, \quad D \subset R^n, \\ D : \varphi_i(\bar{x}) = 0, & i = \overline{1, m}, \end{cases}$$

экстремумов функций многих переменных. Естественное желание обеспечить разумную строгость и полноту изучения данных тем вместе с наглядностью и доступностью изложения приводит к достаточно большим затратам аудиторного времени. Поэтому часто эти темы и особенно условный экстремум в техническом вузе излагаются на уровне алгоритмов, без вывода необходимых и достаточных условий экстремума.

Однако данный раздел играет важную пропедевтическую роль в подготовке студентов многих технических специальностей к изучению курсов “Методы оптимизации” и “Математическое программирование”. В численных методах оптимизации очень важным является понятие возможного направления. В задаче на безусловный экстремум таковым является любое направление, перемещение в котором из данной точки при соответствующем выборе длины шага перемещения, обеспечивает уменьшение значения целевой функции. Таким свойством обладает, в частности, вектор антиградиента.

Исходя из сказанного, представляется целесообразным при изучении безусловных и условных экстремумов в максимальной степени использовать градиентный подход. Это тем более важно, что в инженерной практике для решения реальных оптимизационных задач используются специальные пакеты математических программ. Градиентные методы оптимизации составляют важную часть таких пакетов.

Рассмотрим в качестве примера сочетания классических методов анализа с численными методами решения экстремальных задач фрагмент лекции, в котором выводятся необходимые условия условного экстремума в частном случае – на примере функции двух переменных. Вывод строится на использовании свойств вектора градиента и в значительной мере основывается на геометрических свойствах функции $f\left(x,\, y\right)$ в малой окрестности точки условного локального экстремума [3].

Пусть решается задача

$$\begin{cases} f\left(x,y\right) \to \min, \\ \varphi\left(x,y\right) = 0\,. \end{cases} \qquad (1)$$

Функции f и φ определены и дифференцируемы на открытом множестве $D \subset R^2$, $\bar{x}^* = (x^*;\ y^*)$ – внутренняя точка множества D. Для определенности будем считать, что фрагмент графика функции f вместе с линиями уровня в окрестности точки условного экстремума имеет вид, изображенный на рис. 1.

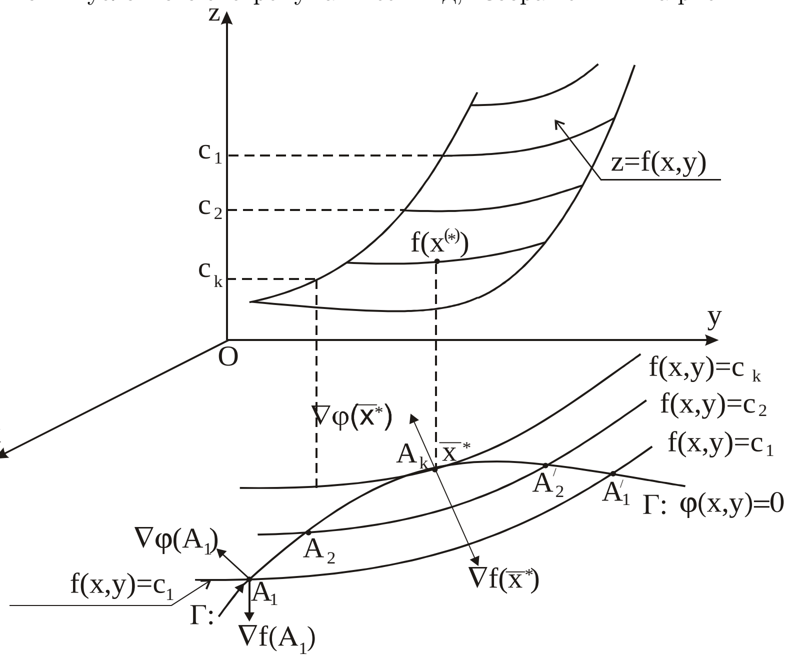


Рис. 1.

Уравнение $\varphi\left(x,y\right) = 0$ определяет на плоскости некоторую кривую Γ. Данная кривая может либо пересекать линии уровня $f\left(x,y\right) = c_k$, $k = 1,2,...$ (точки $A_1, A_2, ...; A_1', A_2', ...$), либо касаться некоторой линии уровня, как, например, на рис. 1 в точке $\bar{x}^*$.

Пусть кривая Γ пересекает линии уровня $f\left(\bar{x}\right) = c_i$, $i = 1,2,...,k-1$, в точках $A_1, A_2, ..., A_{k-1}, A_{k-1}', ..., A_2', A_1'$ и касается линии уровня $f\left(\bar{x} = c_k\right)$ в точке $A_k\ \left(\bar{x}^*\right)$. При движении по кривой по пути $A_1 \to A_2 \to \cdots \to A_k$ мы будем переходить с внешних линий уровня $f\left(\bar{x}\right) = c_i$ на внутренние $f\left(x\right) = c_{i+1}$, $i = 1,2,...,k-1$, и в результате уменьшать значения целевой функции $\left(f\left(A_1\right) > f\left(A_2\right) > ... > f\left(A_k\right)\right)$. Такое уменьшение будет продолжаться только до точки A_k, в которой кривая Γ касается линии уровня $f\left(\bar{x}\right) = c_k$. При дальнейшем движении вдоль Γ по пути $A_k' \to A_{k-1}' \to \cdots \to A_2' \to A_1'$ значения целевой функции будут возрастать $\left(f\left(A_k\right) > f\left(A_{k-1}'\right) > f\left(A_2'\right) > f\left(A_1'\right)\right)$. Отсюда следует, что в точке $\bar{x}^*$ достигается условный локальный минимум функции $f\left(\bar{x}\right)$, поскольку $f\left(\bar{x}^*\right) < f\left(\bar{x}\right) \quad \forall \bar{x} \in U_\delta\left(\bar{x}^*\right) \cap \Gamma$.

Из условия касания кривой Γ и линии уровня $f\left(\bar{x}\right) = c_k$ в точке $A_k\left(\bar{x}^*\right)$, а также из свойства ортогональности градиента $\nabla f\left(\bar{x}\right)$ линии уровня $f\left(\bar{x}\right) = c_k$ следует, что угол α_k между векторами $\nabla f\left(\bar{x}^*\right)$ и $\nabla\varphi\left(\bar{x}^*\right)$

– градиентами функций f и φ соответственно – будет равен 0° или 180°, т.е. $\nabla f(\bar{x}^*) \,||\, \nabla\varphi(\bar{x}^*)$. В точках $A_1, ..., A_{k-1}, A'_{k-1}, ..., A'_1$ пересечения кривой Γ с линиями уровня углы α_i отличны от 0° и 180° $(0 < \alpha_i < \pi)$.

Коллинеарность векторов ∇f и $\nabla\varphi$ в точке $\bar{x}^*$ означает, что существует $\lambda \in R$ такое, что

$$\nabla f(\bar{x}^*) = -\lambda\nabla\varphi(\bar{x}^*)$$

или

$$\nabla\left(f(\bar{x}) + \lambda\varphi(\bar{x})\right)\big|_{\bar{x}=\bar{x}^*} = 0\,. \tag{2}$$

Условие (2) является лишь необходимым условием условного экстремума функции двух переменных. Линия уровня $f(\bar{x}) = c_k$ “разбивает” область определения функции f на два множества: $G_1 = \{\bar{x}\,|\,f(\bar{x}) < c_k\}$ и $G_2 = \{\bar{x}\,|\,f(\bar{x}) > c_k\}$. В точке $\bar{x}^{(0)}$ касания линии уровня $f(\bar{x}) = c_k^*$ с кривой $\Gamma: \quad \varphi(\bar{x}) = 0$ будет условный минимум функции f, если найдется окрестность $U_\delta(\bar{x}^*)$ точки $\bar{x}^*$ такая, что элементарный участок $\Gamma \cap U_\delta(\bar{x}^*)$ кривой Γ лежит полностью в области G_1, либо в области G_2 (рис. 2а и рис. 2б). Если же в любой сколь угодно малой окрестности точки $\bar{x}^*$, удовлетворяющей условию (2), часть кривой Γ принадлежит области G_1, а часть – области G_2 (рис. 2в), то в точке $\bar{x}^*$ не будет условного экстремума. Таким образом, условие (2) является лишь необходимым условием условного экстремума.

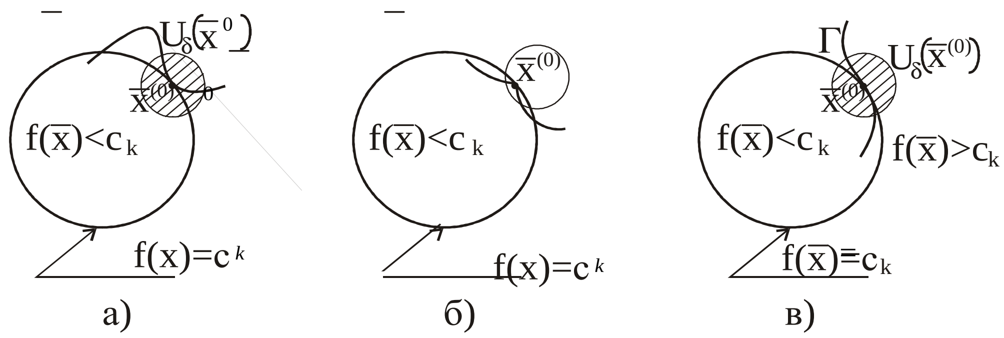


Рис. 2

После этого предлагается без доказательства обобщить полученные результаты на общий случай – целевой функции $f(\bar{x})$ n переменных и m уравнений связи:

$$f(\bar{x}) \to \min,$$

$$\begin{cases} \varphi_1(\bar{x}) = 0, \\ \vdots \\ \varphi_m(\bar{x}) = 0. \end{cases} \tag{3}$$

В задаче (3) необходимое условие (2) принимает вид

$$\nabla f(\bar{x}^*) + \lambda_1\nabla\varphi_1(\bar{x}^*) + ... + \lambda_m\nabla\varphi_m(\bar{x}^*) = \bar{0},$$

или с учетом свойств оператора ∇

$$\nabla\left(f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m}\lambda_i\varphi_i(\bar{x})\right)\Bigg|_{\bar{x}=\bar{x}^*} = \bar{0}. \tag{4}$$

Введем функцию

$$L\left(\bar{x}, \bar{\lambda}\right) = f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m}\lambda_1\varphi_i(\bar{x}), \tag{5}$$

где $\bar{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m)$.

Функцию $L\left(\bar{x}, \bar{\lambda}\right)$ называют **функцией Лагранжа**, вектор $\bar{\lambda}$ – **вектором множителей Лагранжа**.

С помощью функции Лагранжа необходимое условие условного экстремума можно переписать в лаконичной форме

$$\nabla L\left(\bar{x}, \bar{\lambda}\right)\big|_{\bar{x}=\bar{x}^*} = \bar{0}. \tag{6}$$

Здесь $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}; \frac{\partial}{\partial x_2}; ...; \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$.

Для нахождения точки $\bar{x}^*$ возможного условного экстремума функции $f(\bar{x})$ необходимо определить уже не n неизвестных $x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*$, а $n+m$, еще и $\lambda_1^*, \lambda_2^*, ..., \lambda_m^*$. Условия (4) дают n уравнений. Недостающие m уравнений получим, присоединив к (4) m уравнений связи $\varphi_i(\bar{x}) = 0$, $i = \overline{1, m}$.

Если учесть, что равенства $\frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = 0$ равносильны $\varphi_i(\bar{x}) = 0$, $i = \overline{1,m}$ и ввести вектор

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x_1}\bar{\ell}_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}\bar{\ell}_2 + ... + \frac{\partial}{\partial x_n}\bar{\ell}_n + \frac{\partial}{\partial \lambda_1}\bar{\ell}_{n+1} + ... + \frac{\partial}{\partial \lambda_m}\bar{\ell}_{n+m}, \tag{7}$$

то условие $\nabla L\left(\bar{x}, \bar{\lambda}\right) = 0$ будет давать $n+m$ уравнений, из которых можно найти стационарные точки $\left(\bar{x}^*, \bar{\lambda}^*\right)$ функции $\nabla L\left(\bar{x}, \bar{\lambda}\right)$, среди которых содержатся и точки условного экстремума функции f.

Сведем полученные результаты в теорему.

Теорема 1. (необходимые условия безусловного экстремума). *Пусть функции $f(\bar{x})$ и $\varphi_i(\bar{x})$, $i = \overline{1,m}$, определены и дифференцируемы на открытом множестве $D \subset R^n$. Внутренняя точка $\bar{x}^* \in G$ является точкой возможного условного экстремума функции $f(\bar{x})$ в задаче (3), если точка $\left(\bar{x}^*, \bar{\lambda}^*\right)$ является стационарной точкой функции Лагранжа $L\left(\bar{x}, \bar{\lambda}\right)$.*

Логическим завершением блока экстремальных задач в курсе математического анализа должен быть локальный курс в объеме 8-10 аудиторных часов по численным методам поиска экстремума. Вариант такого объединения в лекционном курсе по математическому анализу классических методов поиска безусловного и условного экстремумов, а также численных методов решения экстремальных задач, содержится в локальном пособии [4].

Библиографический список

1. Программа курса высшая математика для инженерно-технических специальностей высших учебных заведений [Текст]. – М.: Высшая школа, 1984. – 40 с.
2. *Новиков, А.И.* Численные методы линейной алгебры [Текст] / А.И. Новиков. – Рязань: РГРТА, 2002. – 52 с.
3. *Кудрявцев, Л.Д.* Курс математического анализа [Текст] / Л.Д. Кудрявцев. – М.: Высшая школа, 1988. – Т. 2. – 576 с.
4. *Новиков, А.И.* Методы решения экстремальных задач [Текст] / А.И. Новиков. – Рязань: РРТИ, 1991. – 43 с.

О фундировании умений студентов на основе межпредметных связей математики с техническими дисциплинами

О.В. Фукалова

В настоящее время учебный процесс требует разработки и внедрения инновационных, эффективных методов обучения, в том числе и высшей математике, являющейся фундаментом многих технических дисциплин, имеющих тенденцию к постоянному развитию и совершенствованию в связи с появлением современных технологий и производств. Кроме того, количество потребителей математических знаний резко возрастает по мере внедрения новейших информационных технологий. Несмотря на разнообразие приложений математика является самостоятельным, важнейшим системообразующим предметом, который необходимо изучать как отдельную дисциплину, поскольку именно она развивает такие важнейшие механизмы мышления, как интуиция и воображение, способствует творческому воспитанию и вооружает логическим методом. А современная профессиональная направленность обучения предполагает практическое применение математических знаний для изучения смежных вузовских дисциплин (физика, электротехника, сопротивление материалов и др.), где требуется строить абстрактные модели для описания нематематических процессов, производить измерения и вычисления с использованием изученных методов при решении практических задач, и в дальнейшей профессиональной деятельности студента после окончания вуза.

В то же время и сама наука развивается благодаря техническому прогрессу. Укажем примеры возникновения новых общих математических теорий на основе непосредственных запросов техники. Создание метода наименьших квадратов связано с геодезическими работами; изучение многих новых типов дифференциальных уравнений с частными производными впервые было начато с решения технических проблем; операторные методы решения дифференциальных уравнений были развиты в связи с электротехникой. Из запросов связи возник новый раздел теории вероятностей - теория информации. Задачи синтеза управляющих систем привели к развитию новых разделов математической логики. Целиком на технической почве были созданы многие методы приближенного решения дифференциальных уравнений с частными производными и интегральных уравнений. Прямые же связи математики с техникой чаще имеют характер применения уже созданных математических теорий к техническим проблемам.

Поскольку математика является важнейшей частью профессиональной подготовки будущего инженера, то преподавателю математики технических вузов полезно иметь представление о содержании общепрофессиональных и специальных дисциплин, чтобы понять, в каких математических знаниях особенно остро нуждаются специалисты данной отрасли высшего технического образования. Это поможет сблизить преподавание математики с требованиями практики, улучшить систему математической и, как следствие, профессиональной подготовки. Так, математика является важнейшим рабочим инструментом при изучении такой достаточно сложной для восприятия технической дисциплины, как сопротивление материалов. Курс "Сопротивление материалов" включает в себя инженерные методы расчета элементов конструкций на прочность, жесткость и устойчивость. При изучении многих вопросов сопромата являются востребованными достаточно глубокие и прочные математические знания и умения. В табл. 1 представлена взаимосвязь между некоторыми темами из дисциплины "Сопротивление материалов" и соответствующими математическими понятиями, умениями, навыками. Из таблицы видно, что при изучении только одной технической дисциплины используются знания сразу нескольких крупных разделов математики: дифференциальное и интегральное исчисление, теория дифференциальных уравнений, линейная алгебра. Приведем пример использования понятия производной функции в точке в курсе "Сопротивление материалов".

Задача: построить эпюру (графическое изображение закона изменения функции в зависимости от изменения аргумента) поперечной силы и определить силы, действующие на балку, по заданной эпюре изгибающих моментов.

Таблица 1

Межпредметные связи курса "Сопротивление материалов" и математики

Основные темы курса "Сопротивление материалов"	Математическая база
Растяжение и сжатие стержней. Определение полной деформации участка бруса фиксированной длины	Понятие определенного интеграла Формула Ньютона – Лейбница Основные свойства определенного интеграла Вычисление определенного интеграла
Геометрические характеристики плоских сечений	Понятие криволинейного интеграла I рода Основные свойства криволинейного интеграла по длине дуги Вычисление криволинейного интеграла I рода Приложение криволинейного интеграла: моменты инерции, центр тяжести плоских фигур
Потенциальная энергия деформации при сгибе	Понятие определенного интеграла Формула Ньютона – Лейбница Основные свойства определенного интеграла Вычисление определенного интеграла
Кручение. Определение угла закручивания вала	Понятие определенного интеграла Формула Ньютона – Лейбница Основные свойства определенного интеграла Вычисление определенного интеграла
Перемещение балки при изгибе. Метод начальных параметров. Вывод основного дифференциального уравнения упругой линии балки	Понятие дифференциального уравнения Общее и частное решения дифференциального уравнения, задача Коши Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка
Расчет статически неопределимых стержневых систем. Метод сил	Понятие системы линейных алгебраических уравнений Методы решения систем линейных уравнений
Расчет статически неопределимых стержневых систем. Определение перемещений	Понятие определенного интеграла Формула Ньютона – Лейбница Основные свойства определенного интеграла Вычисление определенного интеграла
Дифференциальные зависимости между изгибающим моментом, поперечной силой и распределенной нагрузкой	Понятие производной функции в точке Геометрический смысл первой производной Исследование функций на промежутке

Решение: на участке I (рис. 1) функция M_1 возрастает от нуля до $0,5Pl$, значит, ее производная положительна: $\frac{dM_1}{dx} = tg\alpha = Q_1 = \frac{0,5 \cdot Pl}{l} = 0,5P$.

На участке II функция M_2 также возрастает от $-1,5Pl$ до Pl, значит, поперечная сила Q_2 также положительна: $Q_2 = \frac{dM_2}{dx} = \frac{1,5Pl+Pl}{l} = 2,5P$.

На участке III функция M_3 убывает от Pl до $-2Pl$, а значит, ее производная Q_3отрицательна: $Q_3 = \frac{dM_3}{dx} = -\frac{Pl+2Pl}{l} = -3P$.

На участке IV функция M_4 возрастает от $-2Pl$ до нуля, т.е. поперечная сила Q_4положительна: $Q_4 = \frac{dM_4}{dx} = \frac{2Pl}{l} = 2P$.

По найденным значениям строим эпюру поперечных сил. В пределах каждого участка поперечная сила постоянна, и, следовательно, балка нагружена сосредоточенными силами. Они приложены в точках A, B, C, D, E – этим точкам (сечениям) соответствуют скачки на эпюреQ и изломы на эпюре M. Кроме того, балка нагружена сосредоточенным моментом в сечении B (здесь эпюра M имеет скачок на величину $0,5Pl + 1,5Pl = 2Pl$). Данный пример показывает, что даже при решении такой узкоспециальной задачи требуется хорошее владение определенными математическими умениями, а именно, интерпретацией понятия производной в геометрических терминах, исследованием функции на монотонность и др.

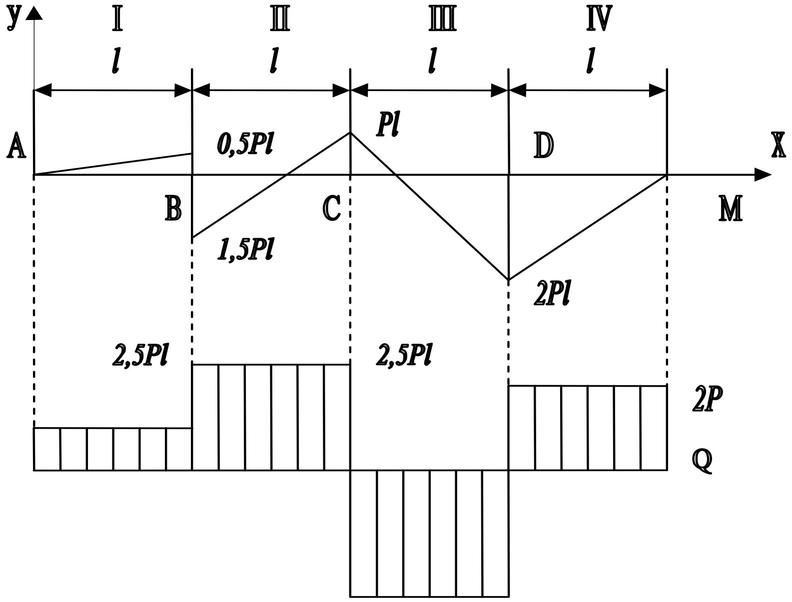


Рис. 1. Построение эпюры поперечных сил

К сожалению, заканчивая высшее техническое учебное заведение, инженеры часто, даже умея формально производить различные математические операции (дифференцирование, интегрирование и т.п.), не имеют необходимого представления о роли математических методов при решении технических задач, о возможности использования математического аппарата. Поэтому мы считаем важным исследование зависимости изучения математики и технических дисциплин в вузе и разработку на этой основе методов обучения, реализующих межпредметные связи курса математики.

Для становления математических умений, составляющих основу межпредметных связей с умениями и навыками, формируемыми при освоении технических дисциплин, необходимы инновационные подходы к обучению. В качестве одного из них предлагается для студентов технических специальностей в курсе высшей математики использовать технологию фундирования знаний и опыта личности обучающихся, обозначенную в работах В.В. Афанасьева, Е.И. Смирнова, В.Д. Шадрикова [1]. При этом создаются благоприятные условия для успешного усвоения знаний, формирования математических умений, совершенствования навыков, практического их применения и переноса в другие предметные области. Так, в учебном процессе используются готовые и разработанные нами спирали фундирования по темам “Предел”, “Производная” и др. Каждая из спиралей фундирования, адаптированная к особенностям программы по курсу высшей математики для студентов инженерных специальностей, способствует уточнению понятий и углублению соответствующих математических умений, которые “закладываются” еще в школе. Специальная компьютерная программа, используемая в сочетании со спиралями фундирования, позволяет на основе контроля выполнения студентами особых теоретических и практических заданий развить у них самостоятельность мышления, внимание, способность понимать математическую информацию, письменно излагать результаты своей деятельности по изучению нового материала и решению задач [2].

В качестве примера укажем на материалы по теме “Производная”, разработанные нами в рамках названной технологии и нацеленные на применение активных форм изложения предмета, фундирование школьных математических знаний, являющихся базой при построении родовых теоретических обобщений. Выделены основные понятия, дан перечень знаний, умений, навыков, методов и алгоритмов, которые формируются у студентов в ходе изучения темы. Фрагменты опорной таблицы по теме “Производная функции в точке” показаны в табл. 2.

Таблица 2

Опорная таблица к теме “Производная функции в точке”

Основные		
Знания		Умения и навыки
Понятия и задачи	Теоремы, формулы, определения	
Задача о мгновенной скорости Задача о тангенсе угла наклона касательной Задача о касательной и нормали	$\nu_{\text{мгн}} = \lim\limits_{\Delta t\to 0} \nu_{\text{ср}} = \lim\limits_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = S'_t$ $K = tg\alpha = y'_x$ $y - y_0 = y'_0\,(x - x_0)$ $y - y_0 = -\frac{1}{y'_0}\,(x - x_0)$ $K_{\text{нор}} = -\frac{1}{K_{\text{кас}}}$	Интерпретировать понятие производной функции точке в физических терминах Интерпретировать понятие производной функции точке в геометрических терминах Записывать уравнение касательной и нормали к кривой Использовать условие перпендикулярности двух прямых, заданными уравнениями с угловым коэффициентом
Определение производной функции в точке Понятие односторонних производных	$y'\,(x_0) = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ $f'_-\,(x_0) = \lim\limits_{\Delta x\to -0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ $f'_+\,(x_0) = \lim\limits_{\Delta x\to +0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$	Представлять производную в виде предельного перехода Пользоваться определением при доказательстве свойств и теорем
Связь между непрерывностью и дифференцируемостью Гладкая функция	Если $y = f\,(x)$- дифференцируема в точке x_0, то $y = f\,(x)$- непрерывна в точке x_0 Функция, имеющая непрерывную производную, называется гладкой	Приводить примеры функций, непрерывных в точке, но не дифференцируемых в ней Пользоваться определением гладкой функции при решении задач
Возрастание и убывание функций	Необходимые условия монотонности функции: Если дифференцируемая на интервале (a, b) функция $y = f\,(x)$ возрастает (убывает), то $f'\,(x) \geq 0 \;\; (f'\,(x) \leq 0)$ для $\forall x \in (a, b)$ Достаточные условия монотонности функции: Если функция $y = f\,(x)$ дифференцируема на интервале (a, b) и $f'\,(x) > 0 \;\; (f'\,(x) < 0)$ для $\forall x \in (a, b)$, то эта функция возрастает (убывает) на интервале (a, b)	Исследовать функцию на монотонность

В целях совершенствования практики обучения данной теме студентов технических специальностей нами используется следующая спираль фундирования понятия производной функции в точке (рис. 2).

Формирование на основе концепции фундирования математических умений, отвечающих запросам межпредметных связей с техническими дисциплинами, обеспечивает усвоение знаний, выработку навыков в определенной системе, способствует активизации мыслительной деятельности, осуществлению переноса теоретических знаний на практическую деятельность обучаемых. Во время проводимых нами в данном направлении исследований было замечено, что в результате использования технологии фундирования с применением опорных таблиц и построения спиралей базовых математических понятий при решении соответствующих задач у студентов возникает потребность воспроизведения тех знаний и овладения именно теми умениями, которые им необходимы при изучении смежных дисциплин. Все это, в целом, повышает эффективность занятий по вузовским математическим и инженерным курсам. Вклад в развитие математических умений, на наш взгляд, станет весомей, если преподавание высшей математики организовать таким образом, чтобы максимально способствовать развитию межпредметных связей и, тем самым, научно-профессиональной подготовке будущих специалистов. С другой стороны, полученные студентами знания при изучении прикладных дисциплин целесообразно использовать и на занятиях по математике.

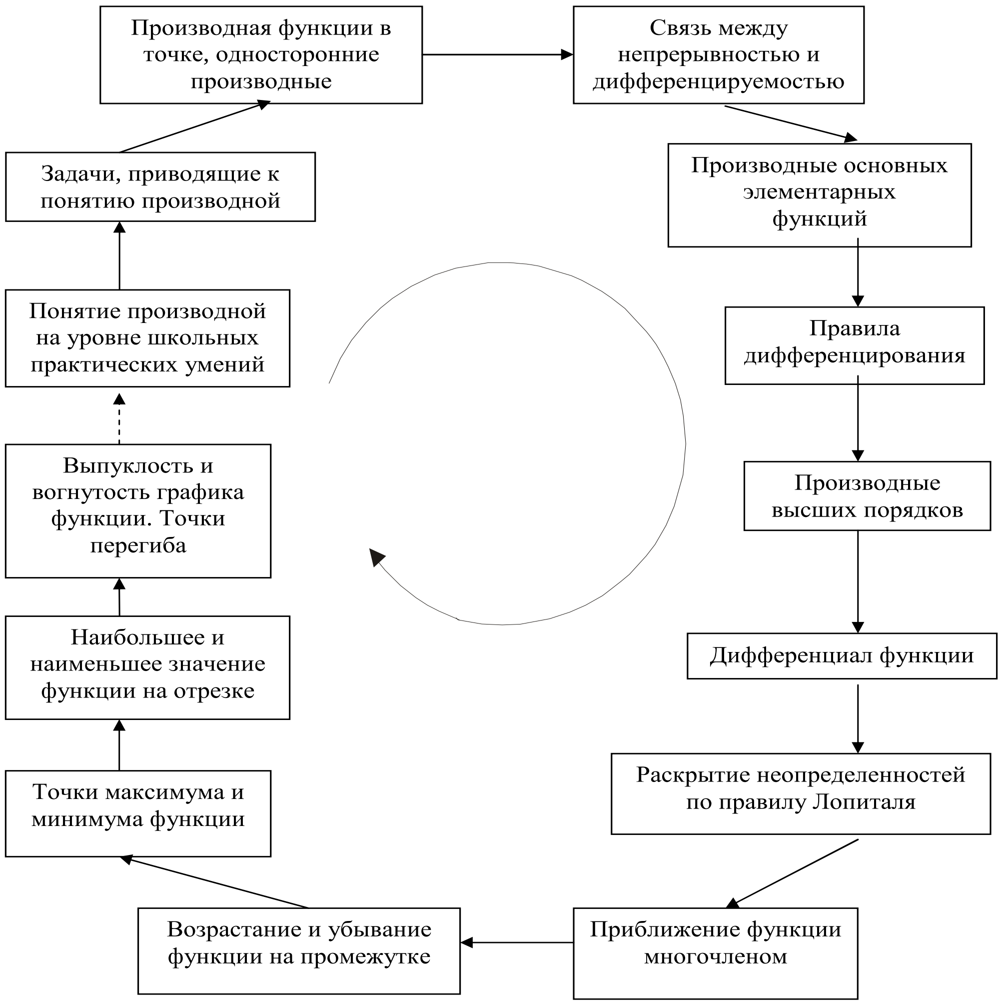


Рис. 2. Схема фундирования школьного знания (понятий и умений, связанных с понятием производной функции в точке)

Библиографический список

1. Подготовка учителя математики: Инновационные подходы [Текст]: учеб. пособие / под. ред. В.Д. Шадрикова. – М.: Гардарики, 2002. – 383 с.
2. *Фукалова, О.В.* О компьютерной диагностике обучаемости математике и инновациях в обучении студентов нематематических специальностей вузов [Текст] / О.В. Фукалова // Образование в техническом вузе в XXI веке: международный межвузовский научно-методический сборник. – Наб. Челны: ИНЭКА, 2010. – Вып. 6. – С. 32-35.

О построении системы задач повышенной сложности для развития творческой математической деятельности учащихся

И.Ф. Ильязов

Наше исследование посвящено изучению влияния задач повышенной сложности по математике на творческую математическую деятельность [2] учащихся и выявлении методических особенностей использования задач указанного типа в процессе обучения.

Известно, что только незначительный процент учащихся выбирает математику как основу своей будущей профессиональной деятельности. Однако надо учитывать следующее:

– элементы творчества и творческой деятельности необходимы всем учащимся, независимо от того, чем они будут в жизни заниматься;

– творческая деятельность дает возможность развития каждого учащегося в рамках обучения математике;

– для тех, кто выберет математику основой своей будущей деятельности, выделенные элементы творчества станут базой, позволяющей глубже вникнуть в творческую математическую деятельность как деятельность профессиональную.

В научной педагогической литературе творческую деятельность характеризуют как:

– видение новой проблемы в знакомой ситуации;

– видение структуры объекта;

– самостоятельный перенос знаний и умений в новую ситуацию;

– самостоятельное комбинирование известных способов деятельности в новой;

– способность усматривать в массе факторов существенное и находить основания для их взаимосвязи;

– комбинирование и преобразование ранее известных способов деятельности при решении новой проблемы и т.д.

Используя задачи повышенной сложности в процессе обучения в течение ряда лет в различных учебных заведениях (лицей-интернат № 7 г. Казань, гимназия-интернат № 664 г. Санкт-Петербург, международный центр образования "Атлантик" г. Москва) мы пришли к выводу, что задачи указанного типа помогают преодолеть трудности, возникающие при формирование творческого подхода в жизни у всех учащихся, а также в организации творческой деятельности на уроках математики.

В нашем исследовании наибольшую трудность вызвала трассификация заданий. Возникла проблема определения уровня сложности любого задания. Как правило, учителя интуитивно ориентируются в сложности учебного материала и учебных заданий. В зависимости от их опыта, педагогического мастерства их оценки сложности могут быть адекватными в большей или меньшей степени.

Сначала мы использовали следующий способ определения сложности задания: по числу познавательных шагов; по числу действий, необходимых для выполнения задания; по степени познавательной самостоятельности учащихся.

Следуя теории определения сложности и трудности учебных задач по И.Д. Пехлецкому [3], нами была создана следующая формула расчета сложности задания:

I уровень сложности	II уровень сложности	III уровень сложности
X мин. количество операций (правил, формул, вычислений и т.д.)	X мин.+1 (количество операций на 1 больше, чем в I уровне)	X мин.+2 (количество операций на 2 больше, чем во II уровне)

Нами построена такая система задач, в которой задания трассифицируются по трем уровням сложности, что помогает учителю ориентироваться в определении сложности задания достаточно обоснованно, а также позволяет подбирать сложность заданий, рассчитанных на повышение творческой деятельности учащихся и предвидеть трудности в выполнении этих заданий.

При выборе заданий мы придерживались следующих критериев отбора:

– доступность для учащихся;

– соответствие программному материалу;

– задачи, в которых заложен мощный аппарат развития мышления.

Под задачами повышенной сложности по математике понимаются задания, которые имеют усложненную логическую структуру и характеризуются наличием латентных связей между данными и искомыми элементами и при их решении в максимальной степени выражаются такие параметры трудности как неочевидность разложения задачи в последовательность шаблонных подзадач, необходимость использования нескольких тем, методов и приемов из разных тематических областей.

Ниже приведены примеры задач повышенной сложности из уже разработанной системы задач:

1. Упростите выражение $\frac{2\sqrt{x}+x-x\sqrt{x}}{x-2\sqrt{x}}$.

Решение. $\frac{2\sqrt{x}+x-x\sqrt{x}}{x-2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}\left(2+\sqrt{x}-x\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\right)} = \frac{2+\sqrt{x}-x}{\sqrt{x}-2} = -\frac{x-\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-2} = -\frac{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}-2} = -\sqrt{x}-1.$

Ответ: $-\sqrt{x}-1$.

2. Между какими соседними целыми числами заключено значение выражения

$$\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{21}+\sqrt{19}}?$$

Решение. $\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{21}+\sqrt{19}} = \frac{\sqrt{3}-1}{3-1}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{5-3}+...+\frac{\sqrt{21}-\sqrt{19}}{21-19} =$

$$= \frac{\sqrt{3}-1+\sqrt{5}-\sqrt{3}+...+\sqrt{21}-\sqrt{19}}{2} = \frac{-1+\sqrt{21}}{2}.$$

Так как $4<\sqrt{21}<5$, то $3<\sqrt{21}-1<4$; $\frac{3}{2}<\frac{\sqrt{21}-1}{2}<\frac{4}{2}$; $1<\frac{\sqrt{21}-1}{2}<2$.

Ответ: между числами 1 и 2.

Разработанная система задач повышенной сложности направлена на систематическое углубление знаний основных разделов школьного курса математики, предусматривающее формирование творческой математической деятельности, а также позволяет ученику любого уровня активно включаться в учебно-познавательный процесс и максимально проявлять себя.

Следует отметить, что созданная нами система задач повышенной сложности создает возможность рассматривать школьную программу по математике с точки зрения выбора учебного материала и применения известных методов к нестандартным школьным задачам.

После основного курса мы предполагаем проводить несколько занятий, посвященных решению задач повышенной сложности и с обязательной диагностикой, фиксирующей освоения этих заданий по этапам.

Для реализации вышесказанного нами используется педагогическая технология В.М. Монахова [1]. Правила построения диагностики по технологии В.М. Монахова[1]: полная диагностика состоит из четырех заданий, которые позволяют дифференцированно оценить усвоение микроцели по трем уровням. Ученик независимо от своих предыдущих успехов выполняет задания в указанной последовательности: 1, 2, 3, 4. Содержание всех заданий диагностики должны однозначно раскрывать содержание микроцели, усвоение которого они и проверяют.

Ниже приведен пример построения фрагмента технологической карты по технологии В.М. Монахова, как проекта учебного процесса, реализующего методику систематического углубления математических знаний учащихся.

Логическая структура учебного процесса	**Технологическая карта № 1** Тема: Квадратные корни В1 $Д_1$ $Д_2$ $Д_3$ 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20	© В.М. Монахов Класс: 8 Предмет: Алгебра Учитель: Ильязов
Целеполагание	Диагностика	Коррекция
$В_1$:	$Д_1$:	$К_1$:
Дозирование домашнего задания		
$ДЗ_1$:		

Целеполагание	Диагностика
$В_1$: уметь применять свойства квадратного корня. $В_2$: уметь раскладывать многочлен на множители с учётом формул сокращённого умножения.	$Д_1$: 1) Вычислить $\left(6\sqrt{45}+3\sqrt{20}\right):\left(3\sqrt{5}\right)$ 2) Извлечь корень $\sqrt{\left(2\sqrt{2}-3\right)^2}$
	$Д_2$: 1) Упростить $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}-\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ 2) Доказать, что: $\sqrt{21-12\sqrt{3}}=2\sqrt{3}-3$
$В_3$: уметь применять различные способы разложения многочленов на множители.	$Д_3$: 1) Найти значение выражения $a^2-6\sqrt{5}a-1$ при $a=\sqrt{5}+4$ 2) Упростить выражение $\dfrac{\sqrt{\sqrt{10}-2}\cdot\sqrt{\sqrt{10}+2}}{\sqrt{24}}$ 3) Упростите выражение $\dfrac{2\sqrt{x}+x-x\sqrt{x}}{x-2\sqrt{x}}$ 4) Между какими соседними целыми числами заключено значение выражения $\dfrac{1}{\sqrt{3}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{21}+\sqrt{19}}$?

Главная цель В1 состоит из В1 – базовое, В2 – сложное, В3 – повышенной сложности.

$$В1=\sum Д_1(\text{базовое}),\ Д_2(\text{сложное}),\ Д_3(\text{повышенной сложности}).$$

Библиографический список

1. *Монахов, В.М.* Введение в теорию педагогических технологий [Текст]: монография / В.М. Монахов. – Волгоград: Перемена, 2006. – 318 с.
2. *Гусев, В.А.* Теоретические основы обучения математике в средней школе: психология математического образования [Текст] / В.А. Гусев. – Москва: Дрофа, 2010. – 473 с.
3. *Пехлецкий, И.Д.* Сложность и трудность учебных текстов и задач [Текст]: книга для учителей и студентов пед. вузов / И.Д. Пехлецкий. – Пермь: ПГПУ, 2008. – 101 с.

[1]С этими правилами можно ознакомиться на сайте “Центра педагогических технологий В.М. Монахова” http://www.ctm-tlt.ru в разделе “Технология проектирования учебного процесса”

Сущность и характеристика инструментальных компетенций будущего учителя математики

Е.И. Смирнов, С.И. Халилова, Т.Л. Трошина

В последнее время, в связи с реализацией компетентностного подхода, актуальным становится вопрос о поиске и научном обосновании средств и условий совершенствования профессиональной подготовки будущих учителей математики, призванной обеспечить развитие компетентностей учащихся. Отметим, что если раньше говорили о формировании у будущих учителей профессиональных умений, то в рамках компетентностного подхода говорят о формировании профессиональной и других компетентностей (совокупности компетенций).

Идеи компетентностного подхода как принципа образования рассматриваются в работах А.М. Аронова, А.В. Баранникова, А.Г. Бермуса, В.А. Болотова, И.А. Зимней, Г.Б. Голуба, В.В. Краевского, О.Е. Лебедева, М.В. Рыжакова, Ю.Г. Татура, И.Д. Фрумина, А.В. Хуторского, О.В. Чураковой, М. А. Чошанова, П.Г. Щедровицкого и др. [1, 3, 5, 11].

Все исследователи, изучавшие природу компетенции, обращают внимание на ее многосторонний, разноплановый и системный характер.

Основные идеи компетентностного подхода сформулированы Л.О. Филатовой следующим образом:

- компетентность объединяет в себе интеллектуальную и навыковую составляющую образования;
- понятие компетентности включает не только когнитивную и операционально-технологическую составляющие, но и мотивационную, этическую, социальную и поведенческую;
- оно включает результаты обучения (знания и умения), систему ценностных ориентации, привычки и др.;
- компетентность означает способность мобилизовать полученные знания, умения, опыт и способы поведения в условиях конкретной ситуации, конкретной деятельности;
- в понятии компетентности заложена идеология интерпретации содержания образования, формируемого "от результата" ("стандарт на выходе");
- компетентностный подход включает в себя идентификацию основных умений;
- компетентности формируются в процессе обучения не только в школе, но и под воздействием окружающей среды, то есть в рамках формального, неформального и внеформального образования.
- понятие "компетенции" является понятием процессуальным, т.е. компетенции как проявляются, так и формируются в деятельности;
- компетентностный подход возник из потребности в адаптации человека к часто меняющимся в производстве технологиям. Компетенция – это способность менять в себе то, что должно измениться как ответ на вызов определенной ситуации с сохранением некоторого ядра образования: целостное мировоззрение, ценности;
- компетенция описывает потенциал, который проявляется ситуативно, следовательно, может лечь в основу оценки лишь отсроченных результатов обучения [8].

Анализ работ по проблеме компетентностного подхода позволяет сделать вывод о том, что в настоящее время отсутствует однозначное понимание понятий "компетенция" и "компетентность", часто используемых в одном контексте.

По мнению А.Г. Бермуса: "Компетентность представляет собой системное единство, интегрирующее личностные, предметные и инструментальные особенности и компоненты".

М.А. Чошанов считает, что компетентность - это "не просто обладание знаниями, а постоянное стремление к их обновлению и использованию в конкретных условиях".

А.М. Ароновым компетентность определяется, как "готовность специалиста включиться в определенную деятельность", П.Г. Щедровицким - как атрибут подготовки к будущей профессиональной деятельности (П.Г. Щедровицкий).

О.Е. Лебедев определяет компетентность как "способность действовать в ситуации неопределенности".

И.А. Зимней "компетентность трактуется "как основывающийся на знаниях, интеллектуально и личностно обусловленный опыт социально-профессиональной жизнедеятельности человека".

А.В. Хуторской, различая понятия "компетенция" и "компетентность", предлагает следующие определения.

Компетенция – включает совокупность взаимосвязанных качеств личности (знаний, умений, навыков, способов деятельности), задаваемых по отношению к определенному кругу предметов и процессов, и необходимых для качественной продуктивной деятельности по отношению к ним.

Компетентность – владение, обладание человеком соответствующей компетенцией, включающей его личностное отношение к ней и предмету деятельности. [1, 3, 4, 5, 9, 11]

Одной из основных проблем обновления содержания образования остается проблема отбора ключевых (базовых, универсальных) компетентностей.

Формулировки ключевых компетенций представляет наибольший разброс мнений; при этом используются и европейская система ключевых компетенций, так и собственно российские классификации.

А.В. Хуторским перечень ключевых образовательных компетенций определен на основе главных целей общего образования, структурного представления социального опыта и опыта личности, а также основных видов деятельности ученика, позволяющих ему овладевать социальным опытом, получать навыки жизни и практической деятельности в современном обществе.

С данных позиций ключевыми образовательными компетенциями являются следующие:

1. ***Ценностно-смысловые компетенции***. Это компетенции в сфере мировоззрения, связанные с ценностными ориентирами ученика, его способностью видеть и понимать окружающий мир, ориентироваться в нем, осознавать свою роль и предназначение, уметь выбирать целевые и смысловые установки для своих действий и поступков, принимать решения.

2. ***Общекультурные компетенции***. Ученик должен быть хорошо осведомлен, обладать познаниями и опытом деятельности в вопросах национальной и общечеловеческой культуры, духовно-нравственных основ жизни человека и человечества, культурологических основ семейных, социальных, общественных явлений и традиций, бытовой и культурно-досуговой сфере. Сюда же относится опыт освоения учеником научной картины мира.

3. ***Учебно-познавательные компетенции***. Это совокупность компетенций ученика в сфере самостоятельной познавательной деятельности, включающей элементы логической, методологической, общеучебной деятельности, соотнесенной с реальными познаваемыми объектами. Сюда входят знания и умения организации целеполагания, планирования, анализа, рефлексии, самооценки учебно-познавательной деятельности.

4. ***Информационные компетенции***. При помощи реальных объектов (телевизор, магнитофон, телефон, факс, компьютер, принтер, модем, копир) и информационных технологий (аудио- видеозапись, электронная почта, СМИ, Интернет) формируются умения самостоятельно искать, анализировать и отбирать необходимую информацию, организовывать, преобразовывать, сохранять и передавать ее.

5. ***Коммуникативные компетенции***. Включают знание необходимых языков, способов взаимодействия с окружающими и удаленными людьми и событиями, навыки работы в группе, владение различными социальными ролями в коллективе.

6. ***Социально-трудовые компетенции*** означают владение знаниями и опытом в сфере гражданско-общественной деятельности (выполнение роли гражданина, наблюдателя, избирателя, представителя), в социально-трудовой сфере (права потребителя, покупателя, клиента, производителя), в сфере семейных отношений и обязанностей, в вопросах экономики и права, в области профессионального самоопределения.

7. ***Компетенции личностного самосовершенствования*** направлены на освоение способов физического, духовного и интеллектуального саморазвития, эмоциональной саморегуляции и самоподдержки. К данным компетенциям относятся правила личной гигиены, забота о собственном здоровье, половая грамотность, внутренняя экологическая культура. Сюда же входит комплекс качеств, связанных с основами безопасной жизнедеятельности личности [11].

И.А. Зимней выделены три группы ключевых компетентностей на основе сформулированных в отечественной психологии положений относительно того, что человек есть субъект общения, познания, труда (Б.Г. Ананьев), что человек проявляется в системе отношений к обществу, другим людям, к себе, к труду (В.Н. Мясищев); что профессионализм включает компетентности (А.К. Маркова):

- компетентности, относящиеся к самому себе как личности, как субъекту жизнедеятельности;
- компетентности, относящиеся к взаимодействию человека с другими людьми;
- компетентности, относящиеся к деятельности человека, проявляющиеся во всех ее типах и формах [3].

В контексте вопроса о ключевых (базовых) компетенциях/компетентностях следует остановиться на модели, разработанной и принятой в рамках программы TUNING ("Настройка образовательных структур"), участниками которой были более 100 университетов из 16 стран, подписавших Болонскую декларацию. Данная модель включает несколько групп компетенций, объединенных в два блока: общие и специальные (профессиональные) компетенции. Группы общих компетенций соотносимы с охарактеризованными выше ключевыми компетенциями и содержат следующие подгруппы:

Инструментальные компетенции: способность к анализу и синтезу; способность к организации и планированию; базовые знания в различных областях; тщательная подготовка по основам профессиональных знаний; письменная и устная коммуникация на родном языке; знание второго языка; элементарные навыки работы с компьютером; навыки управления информацией (умение находить и анализировать информацию из различных источников); решение проблем; принятие решений.

Межличностные компетенции: способность к критике и самокритике; работа в команде; навыки межличностных отношений; способность работать в междисциплинарной команде; способность общаться со специалистами из других областей; принятие различий и мультикультурности; способность работать в международной среде; приверженность этическим ценностям.

Системные компетенции: способность применять знания на практике; исследовательские навыки; способность учиться; способность адаптироваться к новым ситуациям; способность порождать новые идеи (креативность); лидерство; понимание культур и обычаев других стран; способность работать самостоятельно; разработка и управление проектами; инициативность и предпринимательский дух; забота о качестве; стремление к успеху.

Инструментальные компетенции конкретизируются в следующих знаниях, умениях и способностях:

– способность к анализу и синтезу;

– способность к организации и планированию;

– базовые знания в различных областях;

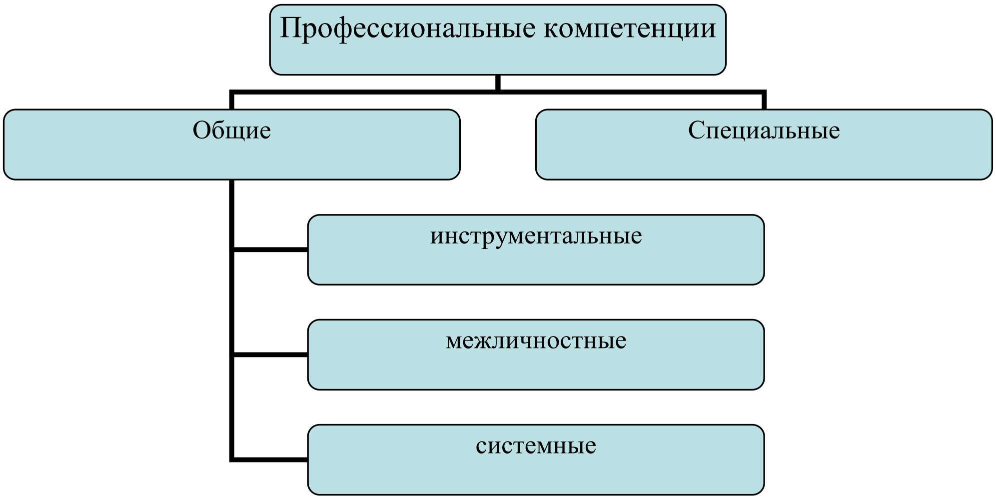
– тщательная подготовка по основам профессиональных знаний;

– письменная и устная коммуникация на родном языке;

– знание второго языка; – элементарные навыки работы с компьютером;

– навыки управления информацией (умение находить и анализировать информацию из различных источников);

– способность к решению проблем и принятию решений.



Инструментальные компетенции (имеют инструментальную функцию) – когнитивные способности (понимание и использование идей и мыслей); методологические способности (организация времени, стратегия учебы, принятие решений или решение проблем; технологические навыки (использование технических средств, навыки управления информацией и работы с компьютером); лингвистические навыки (письменная или устная коммуникация, знание второго языка).

Ориентация образовательных стандартов, программ и учебников по отдельным предметам на формирование общих ключевых компетенций позволит обеспечить не только разрозненное предметное, но и целостное компетентностное образование. Образовательные компетентности ученика будут играть многофункциональную метапредметную роль, проявляющуюся не только в школе, но и в семье, в кругу друзей, в будущих производственных отношениях.

Библиографический список

1. *Бермус, А.Г.* Проблемы и перспективы реализации компетентностного подхода в образовании [Электронный ресурс]. http://www.eidos.ru/journal/2005/0910-12.htm
2. *Василевская, Е.В.* Развитие профессиональной компетентности методистов муниципальной системы образования в процессе профессиональной деятельности [Текст] / Е.В. Василевская, В.В. Пустовалова // Методист. – 2007. – № 6.
3. *Зимняя, И.А.* Ключевые компетенции – новая парадигма результата образования [Электронный ресурс]. http://quality.petrsu.ru/file/74/%EA%EB%FE%F7%E5%E2%FB%E5%20%EA%EE%EC%EF%E5%F2%E5%ED%F6%E8%E8.doc
4. *Киреева, М.В.* Система повышения профессионально-педагогической компетентности педагогических работников [Текст] / М.В. Киреева, Е.В. Ладинская // Методист. – 2006. – № 6. – С. 54-58.
5. *Лебедев, О.Е.* Компетентностный подход в образовании [Электронный ресурс]. http://www.nekrasovspb.ru/publication/cgi-bin/publ.cgi?event=3&id=22
6. *Саитбаева, Э.Р.* Направления работы кафедры управления образованием по повышению уровня профессиональной компетентности руководителей системы образования [Текст] / Э.Р. Саитбаева // Методист. – 2007. – № 6.
7. Социально-психологическая работа с пожилыми людьми: опыт Кузбасса [Текст]. – М.: МПГУ, 2002.
8. *Филатова, Л.О.* Компетентностный подход к построению содержания обучения как фактор развития преемственности школьного и вузовского образования [Текст] / Л.О. Филатова // Дополнительное образование. – 2005. – № 7.

9. *Фишман, И.С.* Подходы к оценке уровня сформированности ключевых компетенций учащихся [Текст] / И.С. Фишман // Методист. – 2007. – № 2.
10. *Холостова, Е.И.* Профессионализм в социальной работе [Текст]: учеб. пособие / Е.И. Холостова. – М.: Дашков и К, 2007.
11. *Хуторской, А.В.* Определение общепредметного содержания и ключевых компетенций как характеристика нового подхода к конструированию образовательных стандартов [Электронный ресурс]. http://www.eidos.ru/journal/2002/0423.htm

Два основных аспекта передачи знаний с использованием программных учебно-методических средств

Е.Н. Трофимец, В.Я. Трофимец, А.С. Тихомиров

Широкое распространение математического моделирования в экономике в значительной степени обусловлено развитием информационных инструментальных сред, которые позволяют переводить экономико-математические модели из классической символьной формы представления в компьютерную и тем самым предоставляют пользователю доступные и эффективные средства всестороннего анализа моделей, что для практической деятельности играет решающую роль. Современные информационные технологии — мощный инструмент прогресса во всех сферах общественной жизни, поэтому в настоящее время к традиционным стратегическим материальным и энергетическим ресурсам общества прибавляется его информационный ресурс. В силу этого прогрессивное развитие общества связывают с его информатизацией и переходом на стадию постиндустриального (открытого информационного) общества.

В свою очередь, современные потребности экономической науки и практики послужили основными предпосылками для широкого распространения технологий компьютерного моделирования в образовательном процессе специалистов финансово-экономического профиля, о чем свидетельствуют многочисленные публикации как в специализированных журналах, посвященных информатизации образования (“Информатика и образование”, “Компьютерные учебные программы и инновации”, “Образовательные технологии и общество” и др.), так и в изданиях различных научных и образовательных учреждений. Анализируя данные публикации, можно отметить, что использование компьютерного моделирования в образовательном процессе имеет два основных аспекта: первый аспект – компьютерное моделирование рассматривается как средство передачи обучаемым артикулируемой части знаний, второй аспект – компьютерное моделирование рассматривается как средство передачи обучаемым неартикулируемой части знаний.

Артикулируемая часть знаний относительно легко поддается структурированию и может быть передана обучаемому с помощью порций информации (текстовой, графической, видео и т.д.). Программно-методические средства, применяемые для поддержки процесса освоения артикулируемой части знаний, получили название декларативных. К ним относятся: автоматизированные учебники; автоматизированные системы информационного обеспечения лекционных занятий; автоматизированные учебные курсы; автоматизированные системы контроля усвоения знаний и другие программно-методические средства, позволяющие хранить, передавать и проверять правильность усвоения обучаемым информации учебного характера. Компьютерные модели, встроенные в программно-методические средства декларативного типа, играют, как правило, поясняющую роль и позволяют обучаемым нагляднее представить суть изучаемого объекта (явления).

Неартикулируемая часть знаний представляет собой компонент знания, основанный на опыте и интуиции. Эта часть знаний охватывает умения, навыки, интуитивные образы и другие формы человеческого опыта, которые не могут быть переданы обучающемуся непосредственно, а “добываются” им в ходе самостоятельной познавательной деятельности при решении практических задач. Программно-методические средства, применяемые для поддержки процесса освоения неартикулируемой части знаний, получили название процедурных. Программно-методические средства процедурного типа не содержат овеществленные знания в виде информации, они строятся на основе моделей, которые позволяют обучаемому в ходе детерминированного или свободного учебного исследования получать знания о свойствах изучаемых объектов или процессов. К процедурным программно-методическим средствам относятся: автоматизированные практикумы; автоматизированные лабораторные работы; прикладные программы, позволяющие конструировать модели; автоматизированные тренажеры и другие программно-методические средства, позволяющие обучаемому “добывать” знания в исследуемой предметной области.

Необходимо отметить, что классификация учебных программно-методических средств на декларативные и процедурные не является строгой. В одном и том же программно-методическом средстве можно выделить и декларативную и процедурную составляющую, поэтому в этом случае следует говорить о доминировании одной составляющей над другой. Например, автоматизированный практикум, в котором явно преобладает процедурная составляющая, может быть снабжен инструкциями о последовательности действий при решении типовых задач. В этом случае обучаемый получает готовую информацию о процессе решения задачи и, соответственно, приобретает декларативные знания.

В информационно-аналитической подготовке специалистов финансово-экономического профиля наиболее эффективными, на наш взгляд, оказались программно-методические средства с доминирующей процедурной частью. Среди них можно выделить прикладные программы, в которых реализованы готовые модели и методы, используемые в профессиональной деятельности, а также прикладные программы, позволяющие конструировать модели и методы профессиональной деятельности (программы-конструкторы). К прикладным программам первого типа относятся такие программы, как STADIA, ТЭО-Инвест, Project Expert, Forecast Expert, Microsoft Project, и др., к прикладным программам второго типа – MS Excel, MathCad, MathLab, UniCalc, MVS, КОГНИТРОН и др.

При всей несомненной полезности прикладных программ первого типа их применение не всегда приводит к повышению качества собственно аналитической подготовки. Обучаемые не получают в полной мере представления о сути реализованных в программе методах, что проявляется в недоверии к получаемым результатам, а отсюда и в неуверенном использовании программы. Плохую услугу аналитической подготовке иногда оказывает и скрытность вычислительных процедур, выполняемых в программе. Многие расчеты, которые, на первый взгляд, кажутся рутинной работой, обладают большим обучающим эффектом, так как позволяют проследить и понять связь анализируемых показателей объекта (процесса) с варьируемыми переменными.

Таким образом, несмотря на высокий дидактический потенциал прикладных программ первого типа, во многих случаях он оказывается в полной мере не реализованным, так как требует предварительного осмысления используемых в прикладных программах экономико-математических методов и моделей на более "осязаемом" уровне. Такой уровень может быть достигнут при построении соответствующих компьютерных моделей в "прозрачной" среде, которую предоставляют программы-конструкторы.

Проводя сравнительный анализ программ-конструкторов, следует отметить, что такие программы, как MVS, КОГНИТРОН, Unicalc не получили широкого распространения в вузах финансово-экономического профиля, что объясняется, по всей видимости, сложностью их освоения без специальной математической подготовки и, как следствие, их недостаточной распространенностью в экономической сфере. Данное предположение подтверждается практикой использования данных программных продуктов в аналитических подразделениях, когда при построении моделей с использованием указанных программных сред экономистам-аналитикам нередко приходится обращаться за помощью к математикам. Также приходится констатировать, что и универсальные математические пакеты, такие как MathCad, MatLab, Mathematica и др., которые в технических вузах получили широкое распространение, в вузах финансово-экономического профиля пользуются значительно меньшей популярностью.

Принимая во внимание приведенные обстоятельства, в качестве универсальной моделирующей среды в информационно-аналитической подготовке специалистов финансово-экономического профиля предлагается использовать табличный процессор MS Excel. Выбор Excel в качестве инструмента программной реализации экономико-математических моделей обусловлен рядом обстоятельств. Во-первых, данный программный продукт достаточно глубоко изучается во всех вузах финансово-экономического профиля; во-вторых, он установлен во всех организациях; в-третьих, MS Excel имеет специальные программные надстройки и развитую библиотеку аналитико-расчетных функций, которые могут использоваться для решения широкого класса задач экономического анализа; в-четвертых, MS Excel обладает открытой архитектурой и при необходимости его функциональные возможности могут быть значительно расширены за счет разработки пользовательских функций и программных надстроек; в-пятых, MS Excel интегрируется с большим числом программных продуктов, что позволяет его рассматривать как связывающее звено при разработке учебных фрагментов распределенной системы поддержки принятия экономических решений.

Практика использования табличного процессора MS Excel в качестве среды моделирования экономических систем и процессов на инженерно-экономическом факультете Ярославского государственного технического университета подтвердила его высокий дидактический потенциал. Кроме того, в процессе обучения на основе компьютерного моделирования следует ожидать и активизации психологических механизмов усвоения знаний обучаемыми.

Наиболее известными психологическими механизмами усвоения знаний являются: бихевиористская теория обучения, ассоциативно-рефлекторная теория усвоения, теория поэтапного формирования умственных действий, теория формирования алгоритмического (системного) мышления, теория формирования латерального (творческого) мышления. При дидактическом проектировании учебных программно-методических средств, поддерживающих неартикулируемую часть знаний, особый интерес представляют теория формирования алгоритмического мышления и теория формирования латерального мышления. В психологических исследованиях творческое мышление сопоставляется с ассоциативным механизмом и интуицией, а системное мышление – с механизмом обобщения. Эти механизмы принципиально различны, однако между ними имеется взаимодействие, усиление которого дает положительный эффект, что проявляется в деятельности экспертов, консультантов, аналитиков с многолетним опытом работы [1, 2]. В работе [2] показано, что усиление взаимодействия между ассоциативным механизмом и механизмом обобщения дает значительный положительный эффект и в процессе обучения. В качестве средства усиления взаимодействия между механизмами мышления рассматривается обучение с помощью моделирования. Экспериментальное обучение на основе моделирования показало, что данная технология позволяет формировать у обучаемых такие способности (характеристики мышления), как: анализировать, систематизировать, обобщать изученное и делать выводы, самостоятельно мыслить и другие.

В процессе моделирования представление знаний связано со знаково-символической деятельностью и характеризуется структурированностью, связностью и активностью представления. Виды знаково-символической деятельности порождают тип моделей представления знаний, принятые в инженерии знаний и решений проблем искусственного интеллекта: логические, реляционные, семантические сети, продукционные, фреймовые.

Модель должна адекватно отражать основные, главные черты исследовательской деятельности экономиста и должна быть описана математически; кроме того, необходимо учесть роль каждого определяющего структуру элемента, его функции и характеристики. Исходя из системного подхода, при исследовании наглядного моделирования в обучении следует выявить структуру этого процесса, так как именно она и должна быть формализована при построении модели познавательной деятельности студентов-экономистов. После изучения ориентировочной основы и структуры наглядного моделирования необходимо проектировать систему организации и управления исследовательской деятельностью студентов в условиях рефлексии и совместной работы в малых группах.

Поэтому актуальной является проблема такой организации процесса обучения математике, когда представления, возникающие в мышлении обучаемых, отражают основные, существенные, ключевые стороны предметов, явлений и процессов, в том числе посредством адекватного моделирования математического знания.

Именно формирование этих узловых, опорных качеств объекта восприятия (перцептивная модель) и представляет собой суть процесса наглядного моделирования. Такой подход apriori, предложенный профессором Е.И. Смирновым [3], предполагает моделирование объекта восприятия с опорой на нейро-физиологические механизмы памяти, закономерности восприятия, ментальные возможности и аффективные состояния личности. При этом особую значимость приобретают модели, фиксирующие процедуру математических действий в процессе исследовательской активности.

Таким образом, наглядность – не только особое свойство психических процессов, но и свойство математического объекта в рамках учебного исследования. Таковым он становится, когда у статистически достоверной выборки обучаемых возникают наглядные перцептивные образы (а значит, и у генеральной совокупности обучаемых). Это, возможно, снимает рассуждения такого свойства: “Поэтому можно говорить (и обычно так всегда и делают), что тот или иной предмет, явление, событие наглядны, имея в виду, что для нас наглядны образы этих объектов”.

Наглядность математического объекта (или перцептивного образа) определяется, как уже отмечалось, факторами восприятия, представления, мнемическими процессами в их единстве на основе диагностируемого целеполагания. Следующие критерии определяют существо наглядности математического объекта:

– диагностируемое целеполагание целостности математического объекта (моделирование, кодирование, схематизация, замещение);

– понимание обучаемым сущности математического объекта (адекватность восприятия);

– устойчивость перцептивного образа и представления;

– познавательная и творческая активность обучаемого на основе комфортности и успешности обучения.

В приказе Министерства образования и науки РФ от 20 мая 2010 г. № 544 “Об утверждении и введении в действие федерального государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования, например, по направлению подготовки 080200 Менеджмент (квалификация (степень) “бакалавр”)” [4] прописана основная образовательная программа (ООП). В результате изучения базовой части математического естественнонаучного цикла обучающийся должен *уметь* решать типовые математические задачи, используемые при принятии управленческих решений; использовать математический язык и математическую символику при построении организационно-управленческих моделей; обрабатывать эмпирические и экспериментальные данные; применять информационные технологии для решения управленческих задач; *владеть* математическими, статистическими методами решения типовых организационно-управленческих задач и программным обеспечением для работы с деловой информацией и основами Интернет-технологий.

Таким образом, условия обучения, создаваемые компьютерными моделирующими средами, не только поддерживают процесс освоения неартикулируемой части знаний, но и способствуют развитию у обучаемых как системного, так и творческого мышления.

Библиографический список

1. *Боно, Э.* Латеральное мышление [Текст] / Э. Боно. – СПб: Питер Паблишинг, 1997.
2. *Кужель, С.С.* Информационные технологии – средство развития системного творческого мышления [Текст] / С.С. Кужель, О.С. Кужель // Образовательные технологии и общество. – 2002. – № 1.
3. Подготовка учителя математики: Инновационные подходы [Текст]: учеб. пособие // под ред. В.Д. Шадрикова. – М.: Гардарики, 2002. – 383 с.
4. Федеральный государственный образовательный стандарт высшего профессионального образования по направлению подготовки 080200 Менеджмент (квалификация (степень) “бакалавр”) [Текст]: офиц. текст: [утв. приказом Министерства образования и науки РФ от 20 мая 2010 г. № 544]. – М., 2010.

О структуре методического обеспечения самостоятельной работы студентов над курсом математического анализа[1].

И.К. Зубова, О.В. Острая

Инновации, внедряемые в современное инженерное образование, предполагают формирование у специалистов не только определенных знаний и умений, но и достаточно широкого общего и профессионального кругозора, а также способности к творческой работе. Поэтому компетентность будущего инженера необходимо создавать в процессе преподавания всех общеобразовательных дисциплин, а не только специальных.

Среди математических курсов, читающихся студентам различных инженерно-технических специальностей, курс математического анализа является одним из важнейших. Анализ федерального государственного образовательного стандарта по различным специальностям показывает, что соответствующий модуль присутствует во всех стандартах.

Именно в этой учебной дисциплине содержатся основные понятия высшей математики. Их усвоение необходимо для того, чтобы затем совершенствовать знания в области целого ряда фундаментальных наук, без которых, в свою очередь, невозможна успешная инженерно-техническая деятельность. Можно сказать, что математический анализ знакомит будущего инженера с универсальным языком высшей математики и поэтому играет большую роль в формировании его мышления.

Цель обучения математическому анализу в вузе на инженерно-технических специальностях состоит в том, чтобы студент, во-первых, получил фундаментальную математическую подготовку в соответствии с вузовской программой и повысил свою математическую культуру, а во-вторых – овладел навыками математического моделирования в области будущей профессиональной деятельности.

Несмотря на то, что математическая подготовка является неотъемлемой и очень важной составной частью компетентности инженера, математика не является профилирующей дисциплиной для большинства инженерно-технических специальностей вуза. Студенты младших курсов еще не располагают в достаточном объеме знаниями профильных предметов, которые позволяют убедительно показать связь высшей математики с их будущей профессией. Поэтому они нередко воспринимают математический анализ лишь как абстрактную дисциплину, которая не влияет на уровень компетентности будущего инженера. Это приводит к утрате личностного смысла изучения этой дисциплины. Кроме того, курс математического анализа традиционно считается одним из наиболее сложных. В первом семестре он бывает особенно труден в связи со своей спецификой, непривычной для большинства выпускников средней школы.

Основной недостаток традиционной системы обучения математическому анализу состоит в том, что преподаватель реализует чаще всего лишь одну функцию знаний – информационную, оставляя в стороне другую, не менее значимую, - развивающую. Реализация развивающей функции обучения требует от преподавателя не просто изложения определенных сведений в определенной системе. Необходимо также учить студентов мыслить, искать и находить ответы на поставленные вопросы, добывать новые знания, опираясь на уже известные. В частности, приступая к изучению курса математического анализа, студент должен как можно скорее понять, что ему предстоит не только овладеть определенным объемом знаний, умений и навыков, но и научиться самостоятельно обрабатывать информацию, полученную на лекции, получать новые знания в процессе работы с литературой, овладевать основами математического мышления, которые можно будет применить в дальнейшем.

Необходимо отметить, что значительная часть студентов-первокурсников учится ниже своих возможностей из-за отсутствия навыков самостоятельной работы. Перед преподавателем математического анализа в вузе ставится задача, максимально используя особенности предмета, помочь студенту наиболее эффективно организовать свою учебно-познавательную деятельность, научить рационально планировать и осуществлять самостоятельную работу, а также обеспечить формирование общих умений и навыков самостоятельной деятельности. Можно с уверенностью утверждать, что, какие бы квалифицированные преподаватели ни обучали студента, основную работу, связанную с овладением знаниями, он должен проделать самостоятельно. Поэтому чрезвычайно важно на первых же занятиях объяснить первокурсникам, что самостоятельная работа, наряду с аудиторной, представляет для студента одну из форм учебного процесса и является существенной его частью.

Соотношение уровня самоорганизации с успеваемостью незначительно в первом семестре, но резко усиливается во втором и последующих семестрах. Это связано с тем, что в первом семестре студенты только адаптируются к особенностям обучения в вузе и продолжают по инерции вести себя как в школе. Впоследствии успеваемость студента уже в значительной степени определяется его умением самостоятельно организовывать собственную учебную деятельность.

На наш взгляд, самостоятельная работа студентов должна быть разделена на две составляющие: организуемая преподавателем и та самостоятельная деятельность, которую студент планирует по своему усмотрению, без непосредственного контроля (подготовка к лекциям, практическим занятиям, коллоквиумам, зачетам, экзаменам и т.д.). Самостоятельная работа студентов, организуемая преподавателем, предполагает, прежде всего,

[1]Исследования выполнены при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (АВЦП “Развитие научного потенциала высшей школы” – № 3.1.1/13256)

выдачу индивидуальных заданий и самостоятельное выполнение их студентами под методическим и организационным руководством. Время на выполнение такой работы определяется с учетом требований государственных стандартов, предъявляемых к подготовке студентов. Следует разрабатывать индивидуальные задания разных уровней и предлагать студентам, наиболее успешно справившимся с их выполнением, докладывать свои результаты перед остальными.

В целях организации самостоятельной работы студентов над курсом математического анализа мы практикуем, кроме обычных контрольных работ и индивидуальных практических домашних заданий, обязательное проведение коллоквиумов, которые позволяют проконтролировать уровень усвоения теоретического материала у каждого нашего слушателя. Нет никаких сомнений в том, что первый такой коллоквиум по математическому анализу должен проводиться в устной форме, в виде индивидуальной беседы. Это позволит вовремя дать каждому студенту необходимые советы по организации его самостоятельной работы впоследствии.

Помощь в организации самостоятельной работы, планируемой по усмотрению студента, должны оказывать учебные и методические пособия по отдельным разделам курса. На первых же лекциях необходимо ознакомить студентов с видами занятий, формами контрольных заданий и сроками их исполнения, а также с существующей учебно-методической литературой, имеющейся в распоряжении факультета. Учебные пособия и методические указания должны выполнять не только информационную, но и организационно-контролирующую и управляющую функции.

Управляющая функция учебного пособия проявляется в текстовом выделении основных положений учебного материала, в наличии структурно-логических схем, выявляющих взаимосвязь учебных материалов, в обобщающих выводах.

Для повышения эффективности самостоятельной работы студентов учебные пособия должны также дополняться методическими пособиями, выполняющими только руководящую и направляющую роль. Содержание таких пособий должно указывать, в какой последовательности следует изучать учебный материал, обращать внимание на особенности изучения отдельных тем и разделов, помогать отбирать наиболее важные и необходимые сведения из содержания учебного пособия, а также давать объяснения по вопросам программы, которые обычно вызывают наибольшие затруднения и приводят к ошибкам.

Организационно-контролирующая функция учебного пособия проявляется при переходе к активным формам обучения, способствующим развитию у студентов навыков самостоятельной работы. В процессе самостоятельной работы студент встречается с необходимостью не просто усваивать информацию, а анализировать ее, исключать несущественное, делать выводы и таким образом подходить к верному ответу на поставленный вопрос. Таким образом, постепенно он включается в активный познавательный процесс, сопровождающийся формированием приемов самостоятельной умственной деятельности.

Все сказанное позволяет заключить, что самостоятельная работа, наряду с аудиторной, представляет для студента одну из форм учебного процесса и является существенной его частью. Следует также заметить, что в условиях перехода к образовательным стандартам нового поколения роль и место самостоятельной работы студента в учебном процессе существенно увеличивается, что требует ее дополнительного методического обеспечения.

Помощь в организации самостоятельной работы студента над курсом математического анализа в первом семестре должны оказать разрабатываемые нами самоучители, т.е. учебно-методические пособия по отдельным модулям курса. В первом семестре мы выделяем два модуля – “Введение в математический анализ” и “Дифференциальное исчисление функций одной переменной”. Лекционный материал по первому модулю занимает обычно около двадцати академических часов. Столько же времени должны занимать и практические занятия, разработки к которым также предлагаются в пособии. В теоретический материал включаются наглядные примеры и рисунки, иллюстрирующие геометрический смысл основных понятий математического анализа, а в материалы к практическим занятиям – различные упражнения, в том числе теоретические. Показываются и разъясняются решения наиболее типичных задач по каждой теме, после чего предлагается комплекс задач для самостоятельного решения и вопросы для самоконтроля. В конце пособия приводится список теоретических вопросов, по которым будет проводиться коллоквиум, и которые впоследствии войдут в программу экзамена за первый семестр.

Второй модуль курса математического анализа – “Дифференциальное исчисление функции одной переменной” – связан с новыми базовыми понятиями: производной, дифференциала, дифференцируемости функции в точке и на промежутке. Лекционный материал к этому модулю занимает приблизительно шестнадцать академических часов. Предполагая, что столько же времени должны занимать практические занятия, мы предлагаем разработки к ним. Некоторые из этих разработок в условиях недостатка времени и учитывая, что некоторые навыки в решении задач по этой тематике у многих сформировались уже в школе, могут прорабатываться студентами самостоятельно.

Очень важно понимание геометрического и механического смысла основных понятий дифференциального исчисления, находящих самое широкое применение в различных математических дисциплинах, в различных областях математики. Некоторые сведения по этой теме также получены студентом еще в средней школе. Но зачастую эти сведения поверхностны, так как в школьном курсе понятия дифференциального исчисления были введены без достаточного обоснования. В этом случае студент пытается, например, выполнить предлагаемое ему задание по исследованию функции, пользуясь выработанным в школе шаблоном, не вникая в содержание упоминающихся понятий. Случается, что, выполнив "исследование" по всем пунктам заученного плана, он не знает, как использовать полученные результаты. Оставив их в стороне, он строит график "по точкам". Такая ситуация свидетельствует о том, что основные понятия дифференциального исчисления не усвоены, и поэтому не удается проиллюстрировать их графически.

Стараясь избежать этого, мы включаем в комплекс методических материалов, во-первых, подробный, снабженный геометрическими иллюстрациями теоретический материал, затем предлагаем ряд теоретических упражнений и демонстрируем решение задач. В заключение каждой темы, как и в первом пособии, приводим список вопросов для самоконтроля и комплекс задач для самостоятельного решения. В ходе изучения этого модуля обычно предлагается самостоятельно выполнить расчетно-графическое задание по теме "Исследование функций и построение графиков". Работа над этим заданием должна способствовать наиболее полному усвоению студентом основных понятий дифференциального исчисления и их геометрического смысла.

В обоих самоучителях приводятся списки литературы, использовавшейся нами при их составлении, и других учебных пособий, рекомендуемых студентам.

Предложенный нами вариант организации самостоятельной работы студентов с материалом, входящим в две первые главы курса математического анализа, отрабатывался в течение пяти лет на факультете информационных технологий и физико-математическом факультете Оренбургского государственного университета. Опыт показывает, что студенты в течение семестра успешно используют наши методические материалы при подготовке к практическим занятиям, коллоквиумам и экзаменам.

Библиографический список

1. Формирование профессиональной культуры специалистов XXI века в техническом университете [Текст] // Труды 3-й и 4-й Международных научно-практических конференций. – СПб.: Изд-во СПб ГТУ, 2003-2004.
2. *Гамова, Н.А.* Организация самостоятельной работы студентов, изучающих математический анализ. Материалы всероссийской конференции "Самостоятельная работа студента: организация, технологии, контроль" [Текст] / Н.А. Гамова, О.В. Острая, И.П. Томина. – Оренбург, ГОУ ОГУ, 2005.
3. *Зубова, И.К.* Исследование функций методами дифференциального исчисления [Текст]: метод. указания / И.К. Зубова, О.В. Острая. – Оренбург: ГОУ ОГУ, 2003.
4. *Зубова, И.К.* Основы математического анализа (модуль "Введение в математический анализ") [Текст]: самоучитель / И.К. Зубова, О.В. Острая, А.Н. Павленко. – Оренбург: ОГУ, 2011. – 149 с.
5. *Зубова, И.К.* Основы математического анализа (модуль "Дифференциальное исчисление функции одной переменной") [Текст]: самоучитель / И.К. Зубова, О.В. Острая, А.Н. Павленко. – Оренбург: ОГУ, 2011. – 170 с.

Использование динамической системы мониторинга дистанционных учебных проектов

В.В. Богун, Г.Е. Козлов, А.С. Тихомиров, Т.Л. Трошина

Основные особенности использования современных систем дистанционного обучения в учебном процессе

В настоящее время интенсивное развитие информационно-коммуникационных технологий (ИКТ) способствует их активному использованию в рамках реализации учебного процесса в высшей школе. Основными критериями применения ИКТ в рамках учебной деятельности являются, во-первых, организация оптимальных схем интеграции ИКТ с различными стандартными методиками реализации предметного обучения и самостоятельной деятельности студентов, а, во-вторых, выявление и использование интеграционных зависимостей между информационными знаниями и различными учебными дисциплинами.

Современный период в развитии ИКТ в учебной деятельности можно охарактеризовать постепенным переходом от использования ИКТ с точки зрения непосредственно локального пользователя на реализацию дистанционного взаимодействия между различными пользователями (учащимися и преподавателями) в рамках локальных или глобальной сетей.

Организация дистанционного учебного процесса в рамках локальных и глобальной сетей осуществляется достаточно широко благодаря активному использованию вузами различных СДО [5, 6], которые позволяют осуществлять взаимодействие между учащимися и преподавателями в различных режимах работы. Наиболее часто используются режим on-line с непосредственным отображением содержимого, как правило, в браузере, с необходимостью наличия постоянного подключения к сети, или режим off-line с возможностью копирования необходимого материала на локальный компьютер с целью дальнейшего изучения без необходимости подключения к сети.

По состоянию на настоящее время при реализации дистанционной формы обучения в вузах на территории Российской Федерации применяются различные системы дистанционного обучения ("Прометей", "WebTutor", "Moodle" и т.д.), однако с точки зрения их использования основными участниками учебного процесса, то есть преподавателями и студентами, можно сформулировать существенные недостатки данных информационных систем.

Во-первых, отсутствие в рамках СДО реализации единой реляционной базы данных по преподавателям и студентам, учитывающей наименования вузов, факультетов, специальностей, групп и учебных дисциплин. Необходимо подчеркнуть, что данная проблема является актуальной в силу возможностей, с одной стороны, преподавателей работать в нескольких вузах одновременно, а, с другой стороны, возможностями обучения студентов в различных вузах, а также на разных специальностях в рамках одного вуза в целом.

Во-вторых, отсутствие единого учебно-методического комплекса по подобным учебным дисциплинам в однородных вузах как с точки зрения структуры, так и содержания методических и дидактических материалов. Отсутствие единой реляционной базы данных по преподавателям, студентам и составляющим учебных дисциплин напрямую отражает отсутствие единого учебно-методического комплекса по стране в целом, что является само по себе отрицательным моментом сложившейся ситуации в высшей школе.

В-третьих, отсутствие в СДО динамических средств для реализации учебных расчетных проектов, включающих в себя взаимосвязанные работы. С данной точки зрения современные СДО являются абсолютно не адоптированными для применения в учебном процессе различных расчетных проектов. К сожалению, имеющиеся на сегодняшний день СДО позволяют реализовывать самостоятельную работу студентов только по четырем составляющим. Первая: ознакомление учащихся с лекционным материалом, представленным в виде электронного учебника. Вторая: тестирование студентов (предполагается использование как непосредственно итоговых заданий, так и генерирование демо-версий) по заранее полностью составленным вручную преподавателем вопросам и соответствующим вариантам ответов к каждому из них (отсутствуют автоматизированные процессы как генерации различных значений исходных данных, так и логических цепочек в заданиях вообще). Третья: общение в рамках форумов или гостевых книг (как правило, в рамках рассматриваемой учебной дисциплины в целом), а также четвертая возможность экспорта-импорта файлов документов пользователя. В настоящее время с точки зрения СДО проектная деятельность сводится к созданию презентаций и подобных документов, то есть полностью отсутствуют вычислительные и логические проекты как таковые, что также является недопустимым.

В-четвертых, в большинстве современных СДО присутствует мониторинг учебной деятельности студентов только в рамках итогового контроля по учебной дисциплине в целом. Очевидно, что получаемая в качестве результата обучения оценка только косвенно отражает истинный уровень знаний, умений и навыков учащихся. Отсутствие промежуточного контроля по каждому из разделов в рамках учебной дисциплины обусловлено, как отмечалось ранее, отсутствием возможности выполнения проектов и промежуточного тестирования по каждому из разделов учебного предмета.

В-пятых, отсутствие интуитивно понятной и вместе с тем полноценной системы навигации в рамках СДО, которая находит свое отрицательное отражение в реализации недружественного пользовательского интерфейса. Данное обстоятельство вызвано необходимостью использования в СДО большого количества программных модулей, отвечающих за различные функциональные возможности, в том числе и выходящих за рамки образовательного процесса с точки зрения реализации непосредственной деятельности учащихся в рамках учебной дисциплины.

Таким образом, при проведении сравнительного анализа вышеуказанных образовательных дистанционных информационных систем, в качестве основного недостатка было отмечено, что по состоянию на настоящее время реализация дистанционных расчетных проектов студентов отсутствует как таковая вообще, не говоря уже о реализации информационной системы мониторинга выполняемых студентами дистанционных учебных проектов.

Данное обстоятельство связано с тем, что все разрабатываемые информационные системы дистанционного обучения в качестве промежуточного и итогового контроля основываются на реализации статических систем тестирования, то есть создается определенный набор конкретный набор заданий (несложных задач) с непосредственно указанными значениями исходных данных и аналогичным образом на основе предварительных ручных расчетов осуществляется ввод в качестве вариантов ответов определенный набор значений результатов, один из которых является истинным.

Применение информационной динамической системы мониторинга дистанционных учебных проектов в процессе обучения

В настоящее время В.В. Богуном осуществлена технологическая разработка информационной динамической системы мониторинга дистанционных учебных проектов студентов вузов [1-4], которая направлена на решение проблемы отсутствия в современных СДО динамических средств для реализации учебных расчетных проектов. В частности, разработано соответствующее прикладное программное обеспечение, базирующееся на использовании Web-сервера Apache для реализации виртуального сервера в сочетании с технологией создания динамических Интернет-сайтов на основе языка программирования PHP и системы управления реляционными базами данных MySQL для реализации необходимых компонентов и запросов. Данную информационную систему можно рассматривать как вариацию системы тестирования, однако в данной системе осуществляется указание непосредственно алгоритма решения задачи на программном уровне, а только затем автоматически на основе генератора случайных чисел при соблюдении определенных условий реализуется формирование индивидуальных значений исходных данных, автоматический расчет согласно программе значений промежуточных и итоговых результатов с целью проведения сравнительного анализа с соответствующими значениями, указываемыми пользователями (студентами), что практически исключает получение идентичных вариантов комбинаций значений исходных данных, промежуточных и итоговых результатов.

Рассматриваемая информационная система, представляющая собой СДО с усилением адаптивных интегративных взаимодействий, характеризуется определенными особенностями.

Во-первых, разработана и реализована, с одной стороны, единая реляционная база данных по преподавателям и студентам в пределах региона или государства на основе автоматизированного учета основных признаков (наименования вузов, факультетов, специальностей, групп и учебных дисциплин). С другой стороны, разработана и реализована единая реляционная база данных по расчетным проектам и входящих в их состав расчетных работ для определенных учебных дисциплин, как правило, естественнонаучного цикла, с целью реализации единого учебно-методического комплекса по учебным дисциплинам в однородных вузах.

Во-вторых, разработана и реализована динамическая система расчетных проектов с точки зрения необходимых дидактических и методических составляющих проектной деятельности учащихся, включающая описание рассматриваемого курса в рамках учебной дисциплины, список наименований и описание соответствующих расчетных проектов в рамках каждого учебного курса, список наименований, описание, теоретический аспект, демо-версии и расчетные задания по соответствующим расчетным работам в рамках каждого расчетного проекта. С точки зрения каждой расчетной работы необходимо реализована автоматизирована генерация независимых вариантов демо-версий (значений исходных данных, промежуточных и итоговых результатов) для преподавателя и студента с возможностью просмотра демо-версий обоими представителями и администрирования только для одной из сторон. Генерация заданий (вариантов значений исходных данных) для студентов производится однократно, преподаватель получает доступ к работе студента только в режиме просмотра, студент получает доступ к своей работе с возможностью просмотра правильно указанных значений, просмотра и редактирования неправильно указанных ранее значений промежуточных и итоговых результатов. Следует отметить, что реализация демо-версий и расчетных заданий для работ осуществляется согласно разрабатываемому на программном уровне алгоритму решения соответствующих задач в рамках расчетной работы.

В-третьих, в рамках информационной системы реализация общения между студентом и преподавателем осуществляется в виде форума в рамках каждой расчетной работы, что существенным образом повышает понятность границ обсуждаемых в форуме проблем. Следует отметить, что данный процесс подразумевает наличие полной автоматизации.

В-четвертых, информационная система обладает дружелюбным пользовательским интерфейсом и логически удобной системой навигации в силу использования различных видов динамических меню, существенно облегчающих доступ к необходимой информации (иерархическое меню с использованием древовидной структуры, меню с использованием вкладок и т.д.).

Следует отметить, что в качестве дидактического материала можно использовать определенные разделы линейной алгебры (матричная алгебра, системы линейных алгебраических уравнений, аналитическая геометрия на плоскости), математического анализа (пределы и непрерывность, дифференциальное исчисление, интегральное исчисление, дифференциальные уравнения), комбинаторики и теории вероятностей и математической статистики.

Организация учебного процесса с использованием информационной динамической системы мониторинга дистанционных учебных проектов студентов осуществляется по определенному алгоритму.

Во-первых, преподавателем формулируются необходимые методические и дидактические составляющие учебного процесса с использованием проектной деятельности. Требования включают: описание рассматриваемого курса в рамках учебной дисциплины, список наименований и описание соответствующих проектов в рамках каждого курса, список наименований, описание и теоретический аспект по соответствующим работам в рамках каждого учебного проекта с последующим отражением указанных составляющих в рамках системы мониторинга дистанционных учебных проектов студентов.

Во-вторых, непосредственно преподавателем или администратором совместно с преподавателем осуществляется разработка необходимых расчетных алгоритмов и соответствующих программных модулей для реализации необходимых арифметических и логических процедур, необходимых при решении каждой расчетной задачи в рамках расчетного проекта с точки зрения определенной учебной дисциплины с последующим отражением указанных составляющих в рамках информационной системы.

После программной реализации расчетных работ в рамках расчетных проектов преподавателем и студентами осуществляется генерирование независимых вариантов демо-версий рассматриваемой расчетной работы для преподавателя и студента с возможностью просмотра демо-версий обоими представителями и администрирования только для одной из сторон. Получение автоматически рассчитанных значений промежуточных и итоговых результатов осуществляется на основе генерирования значений исходных данных с использованием случайных чисел и сформированного исходного кода программного модуля решения задачи в рамках расчетной работы.

На четвертом этапе каждым из студентов реализуется генерирование соответствующего варианта расчетной работы в рамках расчетного проекта с возможностью просмотра преподавателем значений промежуточных и итоговых результатов (но без возможности редактирования) выполняемой студентом работы, возможностью для студента просмотра правильно указанных значений, просмотра и редактирования неправильно указанных ранее значений промежуточных и итоговых результатов на основе генерирования значений исходных данных с использованием случайных чисел и формулируемых условий, а также сформированного исходного кода программного модуля решения задачи.

Затем осуществляется реализация мониторинга проектной деятельности студентов с точки зрения как преподавателя, так и студента, с целью анализа процесса выполнения студентом работы и формированием дальнейшей стратегии реализации текущей проектной деятельности.

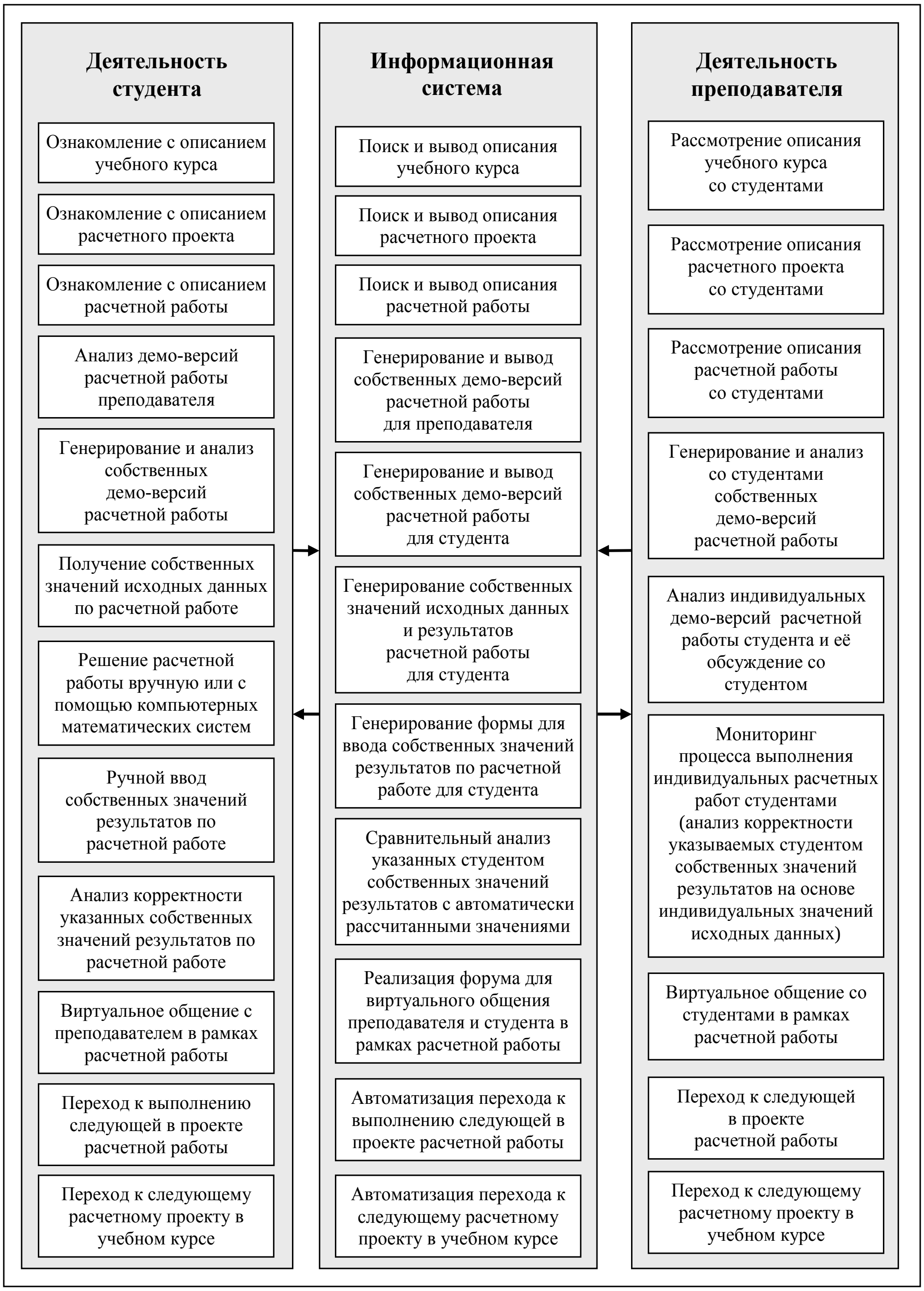


Рис. 1. Основные компоненты учебной деятельности в рамках реализации информационной динамической системы мониторинга дистанционных учебных проектов

На рис. 1 схематично представлены основные компоненты учебной деятельности в рамках реализации расчетных работ в рамках расчетных проектов с точки зрения учебного курса студентами и их мониторинга преподавателем через призму данной системы.

Таким образом, в настоящее время современные СДО не позволяют реализовывать полноценные расчетные проекты в рамках учебной деятельности, что отрицательно сказывается на усвояемости и понимании учебного материала, формировании логического мышления и мотивации к обучению. Разработанная В.В. Богуном информационная динамическая система мониторинга дистанционных учебных проектов позволяет компенсировать данный пробел в организации учебного процесса с удаленным доступом, предоставляя возможность реализации не статических тестовых заданий, а создания полноценных расчетных проектов, основанных на использовании программных алгоритмов формирования решения задач.

Библиографический список

1. *Богун, В.В.* Использование информационной динамической системы мониторинга дистанционных учебных проектов в обучении математике [Текст]: учеб. пособие / В.В. Богун. – Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2010. – 136 с.
2. *Богун, В.В.* Информационные особенности динамической системы мониторинга дистанционных учебных проектов [Текст] / В.В. Богун // Ярославский педагогический вестник. – 2011. – № 1. – 9 с.
3. *Богун, В.В.* Реализация расчетных проектов по математике с использованием дистанционной формы обучения [Текст] / В.В. Богун // Ярославский педагогический вестник. – 2010. – № 4. – 6 с.
4. *Богун, В.В.* Математическая логика программных особенностей реализации системы мониторинга дистанционных учебных проектов [Текст] / В.В. Богун // Ярославский педагогический вестник. – 2010. – № 2. – 11 с.
5. *Богун, В.В.* Проблемы и перспективы реализации единой среды дистанционного обучения студентов педагогических вузов [Текст] / В.В. Богун, Е.И. Смирнов, А.А. Кузнецов // Информатика в образовании. – 2010. – № 7. – 9 с.
6. *Роберт, И.В.* Информационные и коммуникационные технологии в образовании [Текст]: учебно-метод. пособие / И.В. Роберт, С.В. Панюкова, А.А. Кузнецов, А.Ю. Кривцова. – М.: Дрофа, 2008. – 312 с.

Отечественное образование: подготовка кадров инновационной экономики

О.Д. Угольникова

Под инновационной экономикой понимается экономика общества, основанная на знаниях, инновациях, на положительном восприятии новых идей, машин, систем и технологий, на готовности их практической реализации в различных сферах человеческой деятельности. Особая роль отводится научным знаниям. В инновационной экономике под влиянием научных и технологических открытий традиционные сферы материального производства кардинально меняют свою технологическую основу. Информационные технологии и высокие производственные технологии являются базовыми системами инновационной экономики, радикально трансформируют все средства получения, обработки, передачи и производства информации. В условиях развития инновационной деятельности существенно меняется отношение к основной производительной силе общества – человеку высокоинтеллектуального и высокопроизводительного труда: роль высококвалифицированных специалистов неуклонно растет. Подготовка кадров, способных эффективно руководить инновационными процессами, разрабатывать и внедрять инновационные проекты, является приоритетным национальным направлением.

На основании данных министерства экономического развития [1], представлена структура инновационных расходов бюджета (2008, 2010 гг.) в процентах от общих объемов инновационных расходов (табл. 1)[1].

Таблица 1

Структура инновационных расходов бюджета, в процентах от общих объемов инновационных расходов

Инновационные расходы бюджета (%)	**2008**	**2010**
Высокотехнологичные отрасли (кроме инновационных ФЦП)	11,8	17,6
Высшее образование	37,5	30,5
Высокотехнологичная медицинская помощь	3,3	4.3
Деятельность научных фондов (гранты)	1,4	1,4
Прикладные исследования (кроме учтенных в инновационных ФЦП)	24,6	20,7
Фундаментальные исследования	9,3	7,1
ФЦП и госпрограммы инновационной направленности	12.1	15,8
Прочее	0	2,6

Из таблицы следует, что подготовка кадров для современной экономики имеет особую поддержку в условиях реформирования вузовского образования и инновационной деятельности вузов – в 2010 г. на эти цели было выделено 330 млрд. руб., что составило 30,5% от общих объемов инновационных расходов, и меньше

[1]Таблицы 2-4 составлены на основе материалов IRPGROUP для Уральской международной выставки и промышленных инноваций-2010 [2].

всего вкладывается в отечественную грантовую систему и научные фонды. Например, в США, Великобритании, Финляндии инновационное развитие стимулируется непосредственно через государственную грантовую систему. Доля федеральных целевых программ (ФЦП) и госпрограмм увеличена на 3,7%, финансирование высокотехнологичных отраслей возросло на 5,8%, а расходы бюджета на фундаментальные и прикладные исследования сократились на 2,2% и 3,9% соответственно.

Финансовые механизмы стимулирования инновационной деятельности представлены в табл. 2.

Таблица 2

Финансирование инновационной деятельности

№ п/п	Виды финансирования	Объемы, принципы предоставления
1	Гранты правительства РФ	На конкурсной основе в качестве государственной поддержки научных исследований, в размере до 150 млн. руб.
2	Венчурное финансирование	К 2010 г. Министерством экономического развития создано 22 венчурных фонда
3	Федеральные целевые программы (ФЦП)	Пример: направления космос и телекоммуникации предусматривали значительные вложения в рамках двух ФЦП
4	Государственные заказы	Расширение инновационного сегмента
5	Поддержка малого и среднего инновационного бизнеса	Бюджетные ассигнования: 2010 год – 2 млрд. руб. Гранты малым компаниям при вузах: размер – 0,5 млн. руб. Субсидии действующим иннокомпаниям на компенсацию инновационных затрат. Лизинг и развитие специализированной инфраструктуры имущественной поддержки. Кредитование РБР. Увеличение расходов фонда Бортника на 1 млрд. руб. (2010 г.). Стимулирование “посевного” финансирования.
6	Создание национальных исследовательских университетов на основе интеграции науки и образования	Проведение исследований и подготовка кадров для высокотехнологичных секторов экономики.
7	Важнейшие инновационные проекты государственного значения	Принципы частно-государственного партнерста (ГЧП). Внебюджетные источники - 60% и более от общего объема финансирования проекта.

Федеральные целевые программы образуют в 2011 г. бюджет 740,2 млрд. руб. и являются важным инструментом распределения государственного бюджета. Инновационных ФЦП – одиннадцать из 53 ФЦП, и их бюджет составил 171,4 млрд. руб. – 24% объемов всех ФЦП (табл. 3). За период 2006-2009 гг. наблюдалась тенденция увеличения бюджетного финансирования инновационных ФЦП (с 16% до 24%). Из них на развитие космических технологий и телекоммуникаций приходится около 40% и 16% соответственно. Федеральная целевая программа “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” по объему финансирования уступает еще только ФЦП по развитию гражданской авиационной техники.

Таблица 3

Бюджетное финансирование инновационных ФЦП, 2010 год

№ п/п	Наименование инновационной ФЦП	Объем финансирования (в % от общего объема)
1	Федеральная космическая программа	39,1
2	Глобальная навигационная система	16,3
3	Гражданская авиационная техника	13,1
4	Научные и научно-педагогические кадры инновационной России	7,2
5	Развитие телерадиовещания	6,3
6	Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития НТК	4,3
7	Гражданская морская техника	4,0
8	Электронная компонентная база и радиоэлектроника	3,1
9	Инфраструктура наноиндустрии	2,9
10	Ядерные энерготехнологии	1,8
11	Национальная технологическая база	1,8

Инфраструктура генерации знаний является одним из основных типов инновационной инфраструктуры. Здесь зарождаются научные идеи, разрабатываются проекты, это первый этап создания инновационного продукта. Мировыми центрами научных инноваций являются университеты, "опоясанные" промышленными предприятиями, торговыми фирмами, исследовательскими малыми и средними предприятиями, центрами. Для России это наиболее перспективный вариант вследствие развитости национальной системы образования. Основными организациями российской инфраструктуры генерации знаний являются государственные вузы (53%), научные центры и отделения академии наук (17%), другие структуры. На Москву и Санкт-Петербург приходится 40% российской инфраструктуры генерации знаний, в целом на 10 регионов-лидеров – 63%.

Статистическим индикатором действительной научной активности считается число патентных заявок. Прослеживается связь: инновационных разработок в регионе тем больше, чем больше в нем научно-исследовательских и научно-образовательных учреждений. Например, в расчете на 1000 исследователей в Москве число патентных заявок – 64, в Санкт-Петербурге – 42. Несмотря на то, что отечественная инфраструктура генерации знаний наиболее развита, она не обеспечивает конкурентоспособности на мировом рынке: Россия отстает от США более чем в 66 раз по количеству патентных международных заявок (табл. 4).

Таблица 4

Связь числа международных патентных заявок и числа государственных вузов

№ п/п	Государство	Число международных патентных заявок	Число государственных вузов
1	США	46079	1781
2	Россия	669	687
3	Индия	865	221
4	Япония	29807	175
5	Польша	173	138
6	Казахстан	21	47

Индикатор реальной научной активности в России составляет 0,97, в Индии – 3,91, в США – 25,87, в Японии – 170,33, в Польше – 1,25, в Казахстане – 0,45. Россия на мировом рынке инновационных исследований и разработок занимает место между Польшей и Казахстаном, и потенциал ее инфраструктуры генерации знаний в большой степени не использован.

Другими проблемами состояния российского образования и науки являются: дефицит молодых научных кадров, звена прикладной и отраслевой науки; несоответствие системы профессионального образования запросам современной экономики и качества российского образования - спросу на российском и мировом рынке труда; оторванность организации научной деятельности вузов, НИИ от современных требований, отсутствие действенных механизмов контроля результатов их научной деятельности.

Решения, предлагаемые в этой сфере на современном этапе: формирование цепочки "Школа – техникум - университет – малый бизнес" и передача бизнесу лучших практик и студенческих инициатив; разработка и внедрение образовательных программ общего и среднего профобразования нового поколения по подготовке высококвалифицированных кадров для инновационных отраслей; работа со студентами высших учебных заведений по формированию положительного отношения к предпринимательству, привлечение к созданию и работе в рамках бизнес-инкубаторов, формирование благоприятных условий для их предпринимательства; стимулирование деятельности предприятий-посредников между научным сообществом и бизнесом; поддержка собственного бизнеса выпускников.

Главный ресурс достижения стратегической цели развития инновационной деятельности и формирования российской инновационной экономики – высшая школа. Система высшего образования обеспечивает основу развития – подготовку высококвалифицированных кадров. В соответствии с решениями о создании "поясов" коммерциализации исследований вузовской науки, инфраструктура высшей школы РФ дополняется инновационно-инвестиционными структурами (центрами, комплексами, компаниями, малыми инновационными предприятиями, бизнес-инкубаторами) [3]. Федеральный закон РФ от 02 августа 2009 г. № 217-ФЗ позволяет высшим учебным заведениям и научным организациям в форме государственных учреждений создавать малые предприятия для коммерциализации результатов научных исследований. Бюджетные учреждения науки и образования могут самостоятельно учреждать хозяйственные общества, вносить в их уставный капитал не только денежные средства и иное имущество, но и права на результаты интеллектуальной деятельности. В зависимости от организационно-правовой формы хозяйственного общества, указанные учреждения могут самостоятельно распоряжаться доходами от долей или акций общества.

Министерство экономического развития РФ в рамках программы государственной поддержки малого и среднего бизнеса, ориентированных на 217-ФЗ, для формирования инновационной среды выделило и направило в регионы 3,0 млрд. руб. Фондом содействия развитию малых форм предпринимательства в научно-технической сфере запущена новая программа "Старт-Наука", бюджет которой составил 200,0 млн. руб.

Постановление Правительства РФ от 9 апреля 2010 г. № 218 "О мерах государственной поддержки развития кооперации российских высших учебных заведений и производственных предприятий" [4] – другой нормативный акт, предусматривающий выделение субсидий производственным предприятиям для финансирования комплексных проектов по организации высокотехнологичного производства совместно с российскими вузами. Общий объем субсидий на 2010-2012 гг. составит 19,0 млрд. руб. для финансирования порядка 200 комплексных проектов с объемом финансирования каждого из них в размере от 30,0 млн. руб. до 100,0 млн. руб. в год.

Постановление Правительства РФ № 219 от 9 апреля 2010 г. “О государственной поддержке развития инновационной инфраструктуры в федеральных образовательных учреждениях высшего профессионального образования” [5], направленное на формирование инновационной среды и поддержку хозяйственных обществ, учреждаемых на основании № 217-ФЗ, устанавливает общий объем бюджетных ассигнований в размере 8,0 млрд. руб. на 2010-2012 гг.

Постановление Правительства РФ № 220 от 9 апреля 2010 г. “О мерах по привлечению ведущих ученых в российские высшие учебные заведения” [6] предполагает проведение около 80 проектов, под которые учреждаются гранты Правительства РФ для государственной поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых в российских ВУЗах. Общий объем бюджетных ассигнований на выплату грантов в 2010-2012 гг. составит 12 млрд. руб. Указанные нормативно-правовые акты –документы интеграции образования и науки.

Российские малые инновационные предприятия (МИП) в больших количествах начали создаваться с 1991 года. В 1995 г. была принята программа активизации инновационной деятельности, в 2003 г. объявлена программа Фонда содействия “СТАРТ”. В 2005 г. вышли Постановление Правительства РФ “Основные направления политики Российской Федерации в области развития инновационной системы на период до 2010 года” и Закон РФ от 22 июля 2005 г. “Об особых экономических зонах в Российской Федерации” № 116-ФЗ. В 2006 г. создана “Российская венчурная компания” (РВК). В 2007 г. заработала программа Фонда содействия развитию малых форм предприятий в научно-технической сфере “У.М.Н.И.К.”. Указанные решения были вызваны низкими темпами развития российской экономики. Вузам теперь разрешено вкладывать нематериальные активы в виде патентов в уставной капитал создаваемых ими хозяйственных обществ (МИП). Результатом должна стать коммерциализация научных разработок сотрудников, создание новых рабочих мест для студентов и выпускников вузов. Инновационные предприятия имеют важные особенности. В первую очередь, это стратегические навыки, к которым относятся долгосрочное видение, способность предвидеть рыночные тенденции, собирать, обрабатывать и применять технологическую и экономическую информацию. Важны и организационные навыки: умение рисковать, объединить подразделения и сотрудников, ведущих исследовательские работы, заказчиков, поставщиков, экспертов, наконец, готовность инвестировать в человеческие ресурсы.

Организация вузовских МИП приводит к вопросу о привлечении бизнеса. Возможные источники финансовых ресурсов – гранты, венчурный капитал, инвестиции. Термин “венчурный” привнесен в российскую практику с 1995 г. Опыт по применению венчурных схем инвестирования накоплен и в Санкт-Петербурге, Российским технологическим фондом (РТФ). Важным шагом формирования индустрии венчурного инвестирования стало создание ОАО “Российская венчурная компания (РВК)”, на которую возложены следующие основные функции: отбор лучших венчурных управляющих компаний на конкурсной основе и приобретение паев венчурных фондов, создаваемых этими компаниями. В Санкт-Петербурге накоплен положительный опыт создания инновационных предприятий при вузах. В 1991 г. был создан Технопарк “ЛЭТИ”, объединивший 20 малых фирм сферы науки и наукоемкого бизнеса и 6 фирм сферы поддержки инновационного бизнеса, предоставляющих в общей сложности около 400 рабочих мест.

Проблемы, с которыми сталкиваются вузы, реализуя требования закона № 217-ФЗ: определение приоритетных направлений деятельности МИП, выбор организационно-правовой формы МИП (ООО, ЗАО, ОАО), разработка, принятие и регистрация уставных документов; разработка модели управления сетью МИП; привлечение инвесторов к финансированию МИП; развитие инновационного мышления сотрудников вузов; минимизация затрат на создание пилотных разработок инновационного продукта и др. Проблемы есть и у инвестора: закон не ограничивает право вуза коммерциализировать интеллектуальную собственность несколько раз путем создания очередного МИП.

В целом, закон о создании хозяйственных обществ на базе вузов представляет механизм, позволяющий привлекать в МИП преподавательский состав, сотрудников, студентов, бакалавров, магистрантов, аспирантов. Все они становятся участниками реального рыночного процесса, приобретают профессиональный опыт в условиях рынка, занимаясь научными исследованиями, преподавательской и учебной деятельностью [7].

Библиографический список

1. Электронный ресурс http://www.economy.gov.ru/minec/main/
2. Электронный ресурс www.irpgroup.ru
3. Федеральный закон Российской Федерации. О внесении изменений в отдельные законодательные акты Российской Федерации по вопросам создания бюджетными научными и образовательными учреждениями хозяйственных обществ в целях практического применения (внедрения) результатов интеллектуальной деятельности [Текст]: [федер. закон: принят 2 августа 2009 г., № 217-ФЗ]. – РГ. – Федеральный выпуск № 4966 от 4 августа 2009 г.; электронный ресурс www.rg.ru/2009/08/04/int-dok.html
4. Электронный ресурс www.pnzgu.ru/dep/o_niid/node/48
5. Электронный ресурс www.pnzgu.ru/dep/o_niid/node/49
6. Электронный ресурс www.referent.ru/1/153605
7. *Угольникова, О.Д.* Экономические, правовые и прикладные аспекты создания малых инновационных предприятий в вузе [Текст] / О.Д. Угольникова // Сборник научных трудов по результатам II Международной научно-практической конференции и школы-семинара. Инновационные процессы в сфере сервиса: проблемы и перспективы. – СПб.: СПбГУСЭ, 2010. – Т. 4. – С. 307-309.

Развитие творческой активности учащихся во внеурочное время

Н.В. Василишина

Если запастись терпением и проявить старание, то посеянные семена знания непременно дадут добрые всходы. Ученья корень горек, да плод сладок.
Леонардо да Винчи.

В современном мире резко возрастает значимость творческой деятельности и одаренных людей. Требования к человеку непрерывно растут. Личностный и творческий потенциал становится одним из основных ресурсов развития общества. Поэтому перед системой образования все более актуальной становится задача раскрытия и развития задатков творческой деятельности детей; удовлетворение их познавательных потребностей и, по возможности, максимального развития их индивидуальных способностей.

И этому в нашем крае всегда уделялось самое пристальное внимание. Эта работа объединила школьных учителей и профессорско-преподавательский состав ведущих вузов края. Преподавателями проводятся математические чтения для старшеклассников, где рассматриваются темы по алгебре и геометрии. Также осуществляется выезд преподавателей в различные районы для чтения лекций старшеклассникам и проведения занятий с младшими школьниками. Во многих вузах края организованы занятия с одаренными детьми в рамках "Малого Матфака" (например: Армавирской государственной педагогической академией, Кубанским государственным университетом). Большая работа в крае проводится для проведения зимних и летних математических школ, а также заочных школ для учащихся в течение учебного года. В 2005 году Управлением образования города Краснодара был создан Центр дополнительного образования детей "Малая академия", одним из видов деятельности которого является проведение в крае научно-практической конференции школьников "Эврика". Учащиеся посещают математические кружки, участвуют в очных и заочных предметных олимпиадах, математических турнирах и фестивалях, участвуют в математических боях. И это далеко не все, что проводится нами для развития творческой активности.

Для решения вопроса развития творческой активности важно определить существенные стороны понятия "творческая активность", раскрыть пути развития этого качества личности учащихся во внеурочное время. Вопросы развития творческой активности личности нашли свое отражение в работах психологов А.В. Петровского, М.Г. Ярошевского и др. Творческая активность может быть определена как целостность, для которой характерно множество ее проявлений: единство внутренней и внешней творческой активности, взаимная обусловленность мотивационного и операционного компонентов, воображение и продуктивное мышление как основа единого исполнительного механизма психической творческой активности (Л.С. Выготский), включенность поисковой активности вследствие того, что результат творчества не задан изначально. Отражает целостность творческой активности и перенос способов и особенностей творческой деятельности из структуры одного направления творчества в структуру другого, проявляющийся, в частности, в "универсальных" творческих способностях (Б.М. Теплов). Ряд ученых (М.А. Данилов, А.В. Петровский, Т.И. Шамова и др.), давая оценку понятия "творческая активность" в контексте деятельности, определяют ее как установку на преобразующие и поисковые способы деятельности, как количественную или качественную характеристику деятельности, проявляющуюся в интенсивности, напряженности, своеобразии используемых мыслительных операций, результативности, эстетической ценности усвоенных знаний.

Творческая активность выражает стремление и готовность личности сознательно и добровольно, по внутреннему убеждению, совершенствовать инициативные новаторские действия в самых различных областях человеческой деятельности. Можно рассматривать творческую активность как устойчивое интегративное качество, одновременно присущее и самой личности, и ее деятельности, выражающееся в целенаправленном единстве потребностей, мотивов, интереса и действий, характеризующееся осознанным поиском творческих ситуаций. Творческая активность предполагает теоретическое осмысление знаний, самостоятельный поиск решения проблемы.

В число показателей **творческой активности** можно включить:

– **самостоятельность** ;

– **оригинальность** (согласно работам многих исследователей, например В.И. Андреева, Я.А. Пономарева);

– **новизну результатов и способов деятельности.** Это показатель, без которого изучение творческой активности невозможно. Справедливо считает Д.Б. Богоявленская, что "в выходе за пределы заданного и кроется «тайна» высших форм творчества, т.е. способность видеть в предметах нечто новое, такое, чего не видят другие". Однако сложность выявления степени новизны обусловлена трудностями, связанными с определением разницы между старым и новым, между вновь созданным и существовавшим ранее.

Я буду фиксировать различия между заданными извне целями и способами творческой деятельности и целями и способами возникающей вслед за этим самостоятельной творческой деятельности.

Анализ различных подходов позволил выделить следующие **показатели сформированности творческой активности** детей в процессе обучения во внеурочное время:

1. Высокий уровень интереса к предмету.

2. Способность к фантазированию, воображению и моделированию.

3. Проявление догадливости, сообразительности; открытие новых для себя знаний, способов действий, поиск ответов на вопросы в книгах.

4. Проявление радостных эмоций в процессе работы.

5. Способность переживать ситуацию успеха, наслаждаться процессом творчества.

6. Стремление к оригинальности.

7. Проявление самостоятельности в работе.

8. Умение преодолевать возникшие трудности.

На основании этих показателей можно определить несколько **уровней** сформированности творческой активности детей.

Низкий уровень – отсутствует потребность в пополнении знаний, умений и навыков. Познавательный интерес носит занимательный характер. Дети не стремятся к самостоятельному оригинальному выполнению работ творческого характера, не проявляют высокой умственной активности, склонны к репродуктивной деятельности. От заданий на перенос знаний, умений в новые ситуации отказываются. Практически не применяют приемов самоконтроля. При возникновении трудностей у таких детей преобладают отрицательные эмоции. Они не могут и порой не желают преодолевать трудности в поисках ответа на вопрос.

Средний уровень – потребность в пополнении знаний, умений и навыков

проявляется редко. Познавательный интерес непостоянен, ситуативен. Дети со средним уровнем творческой активности стремятся к выполнению заданий нестандартного характера, но выполнить их самостоятельно могут редко, им необходима помощь взрослого. Они могут находить новые способы или преобразовывать известные им, предлагать свои идеи, при сильной заинтересованности осуществляют поиск нового решения. Самостоятельно осуществлять самоконтроль не могут. Преодолевают трудности только в группе или с помощью взрослого. В случае получения искомого результата испытывают радость.

Недостаточно высокий уровень – потребность в пополнении знаний, умений и навыков проявляется часто. Познавательный интерес широк, но неустойчив. Интерес к творческой деятельности часто проявляется на высоком уровне. Сильно развито стремление к самостоятельному, оригинальному выполнению работ творческого характера. Такие дети проявляют достаточную умственную активность, способны осуществлять широкий перенос знаний, умений в новые ситуации. Самоконтроль присутствует на всех этапах деятельности. При неудачах часто останавливаются на полпути, хотя вполне могут преодолеть возникшие трудности. Не всегда доводят начатую работу до конца. Охотно берутся за выполнение любого творческого задания, при удачном решении которого испытывают радость.

Высокий уровень – стремятся постоянно удовлетворять потребность в пополнении знаний, умений и навыков, проявляют устойчивый познавательный интерес. Всегда самостоятельны в выполнении работ творческого характера. Часто предлагают оригинальные решения. Поиск ответа на нестандартные задания, как правило, завершается успешно. Дети с высоким уровнем творческой активности проявляют высокую умственную активность, у них хорошо развита способность осуществлять самоконтроль.

Такое понимание уровней творческой активности детей в обобщенном виде показывает не просто деятельностное состояние ребенка, но и связанную с ним сформированность личностных качеств, проявляемых в этой деятельности.

В подростковом и юношеском возрасте творческая активность приобретает форму самостоятельного формулирования проблем и исследовательских познавательных задач. Это выражается в появлении стойких личностных интересов к той или иной области знания и практики. На их основе возникают устойчивые профессиональные запросы старшеклассников.

Так развивающаяся исследовательская активность становится (или не становится) главным фактором, обеспечивающим развитие познавательных процессов в обучении и составляющим основу избирательности внимания, памяти, мышления в обучении и творчестве ученика. Сегодня актуальна проблема формирования творчески активной личности, способной самостоятельно делать выбор, ставить и реализовывать цели, выходящие за рамки, предписанные стандартными требованиями, анализировать свою деятельность. Творческая личность готова не только к постоянным изменениям, но и к принятию этих изменений как возможности получения удовлетворения потребности в решении творческих задач.

Практика показывает, что многие из завтрашних специалистов, знающих школьную программу, не в состоянии использовать эти знания в нестандартной обстановке, не владеют творческим мышлением, а опираются в основном на свою эрудицию, память, затрудняются при ответах на проблемные вопросы даже в тех случаях, когда имеют в руках учебники и учебные пособия. Они мало подготовлены к такого рода общению, к творческому анализу. Там, где ведется самостоятельный поиск решения проблем, осуществляется поиск новых, оригинальных способов их решения, проявляется подлинно творческая активность учащихся. Главная ориентация на усвоение знаний учащимися, перегрузка содержанием и жесткие требования учебных программ, а также ограниченность учебного времени приводят к тому, что наблюдается снижение активности и творчества учащихся.

Не секрет, что в школе получил распространение объяснительно-иллюстративный метод обучения, который наряду с положительными сторонами имеет ряд недостатков. Среди существенных недостатков этого метода обучения - крайне низкая познавательная активность учащихся, стереотипность мышления. Что же касается элементов творчества, поиска, исследования, то они сведены к минимуму. Между тем, известно, что только то становится действительно прочным достоянием учащегося, что прошло через его самостоятельную мысль и самостоятельную деятельность. Процесс обучения может протекать с различным приложением сил, самостоятельности учащихся, познавательной и творческой активности. В одних случаях этот процесс носит характер подражательный, репродуктивный, в других – поисковый, а иногда и творческий. Именно характер учебного процесса влияет на его конечный результат – уровень приобретенных знаний, умений и навыков, творческой активности и навыков творческой деятельности.

Творческая активность учащихся – явление многофакторное. Можно выделить две группы факторов: внешние и внутренние. Педагог может оказывать влияние на две эти группы факторов, формирующих и развивающих творческую активность.

Творческая активность учащихся в системе дополнительного образования в сравнении с традиционной школой имеет определенные преимущества. Главное из них - свобода выбора, учащийся может самостоятельно выбрать кружок, в котором ему хотелось бы заниматься, и в любой момент перейти в другой кружок, если его интересы изменились.

Для эффективного формирования и развития творческой активности учащихся необходим пример творческой деятельности самого педагога. С этой целью в нашем крае стало традицией проводить математические бои с учителями. Ведь если сам ты не играл в математический бой, то ты не сможешь и детей этому научить.

Формированию и развитию творческой активности учащихся способствует опыт творческой деятельности, самостоятельная работа учащегося с одной стороны, и наблюдение и создание педагогом, с другой стороны, необходимых условий для проявления потребностей и способностей учащегося (выявление потребностей, диагностика способностей, свободная зона творчества учащегося).

Библиографический список

1. *Абульханова-Славская, К.А.* Типология активности личности [Текст] / К.А. Абульханова-Славская // Психологический журнал. – 1985.
2. *Апьтшуллер, Г.С.* Найти идею: Введение в теорию решения изобретательских задач [Текст] / Г.С. Апьтшуллер. – Новосибирск: Наука, 1991.
3. *Анцыфирова, Л.И.* Психология формирования и развития личности [Текст] / Л.И. Анцыфирова. – М.: Наука, 1989.
4. *Асатрян, Л.Т.* Развитие творческих технических способностей школьников в кружках СЮТ [Текст]: дис. ...канд. пед. наук: 13.00.01 / Л.Т. Асатрян. – М.: 1987.
5. *Балл, Г.А.* Нормы деятельности и творческой активности личности [Текст] / Г.А. Балл // Вопросы психологии. 1990. – № 6.
6. *Безруких, М.М.* Знаете ли вы своего ученика [Текст] / М.М. Безруких, С.П. Ефимова. – М.: Просвещение, 1991.
7. *Енин, А.В.* Внеклассная работа в системе воспитания творческой активности подростков [Текст]: дис. ...канд. пед. наук: 13.00.01 / А.В. Енин. – М.: 1998.

Методические аспекты создания развивающей среды при работе с теоремой на уроке

Т.М. Корикова, И.В. Суслова, А.В. Ястребов

В настоящее время активно осуществляется внедрение новых подходов в процесс обучения в общеобразовательной школе. Вчерашнему школьнику, являющемуся в настоящее время студентом педвуза, необходимо переосмыслить процесс обучения с позиции новых ценностей и принципов как в работе, так и в общении с детьми. Начинающему учителю следует понимать обучение как содействие индивидуальному, личностному развитию ученика, его успешной социализации в обществе, а не только как передачу накопленных в определенной области науки знаний и использование методик их усвоения. Поэтому в период обучения в вузе студенту необходимо иметь внутреннюю мотивацию, направленную на учебную деятельность по формированию тех компетенций, которые являются наиболее значимыми в дальнейшей профессиональной работе.

Среди множества компетенций учителя выделим ту, которая является базовой. Такой компетенцией, на наш взгляд, является профессиональное умение учителя создать на уроке *развивающую среду*, т.е. такую атмосферу, которая обеспечивала бы личностное интеллектуальное развитие учащихся, возможность достижения ими запланированных результатов обучения. Основное назначение развивающей среды состоит в том, чтобы каждый ученик в соответствии со своими возможностями начал проявлять свою мыслительную активность в рассуждениях, воображении, догадках, активность в общении с учителем и сверстниками. В такой атмосфере он мотивированно, ориентируясь на свои интересы, включается в различные виды деятельности, не боится высказывать свои суждения, учится работать а режиме активного диалога, планированию своих действий, самостоятельности в выполнении заданий и принятии решений, ответственности за конечный результат работы на уроке. Естественно, что создаваемая на уроке *развивающая среда* должна мотивировать и инициировать ученика, не только к самостоятельным действиям в решении учебных задач, но и предоставлять возможности для обучения различным способам мышления, участия в исследовательской деятельности.

Отметим, что компетенция по созданию развивающей среды включает в себя ряд других компетенций как составные части.

Понятие развивающей среды введено в работах психолога Дж. Равена. Это понятие включает в себя как действия учителя по ее организации, так и его личные и профессиональные качества. Чтобы определить наличие или отсутствие развивающей среды на уроке нужны критерии, по которым можно определить, созданы или нет учителем возможности для учащихся: а) осуществлять целенаправленную самостоятельную, поисковую работу на уроке; б) осознать как способы, так и значение собственной мыслительной деятельности, которая привела к достижению поставленной цели.

В своей работе Д.А. Иванов [1] формулирует основные принципы деятельности учителя по созданию развивающей среды следующим образом:

1. *Принцип создания мотивации учения* – оказание помощи учащимся в постановке личных целей, учет их интересов, создание ситуации для возникновения потребности в исследовании, в разрешении противоречий, оказание помощи в выборе индивидуальных траекторий движения к результату.

2. *Принцип авторства или личной причастности.*

3. *Принцип проблемного обучения и case study*: знания даются не “в лоб” и в отрыве от жизни, а вырабатываются самими учащимися по ситуации, как условие понимания и разрешения проблем.

4.*Принцип вариативности* – создания для учеников ситуации поиска и опробования разных путей.

5.*Принцип личной позиции преподавателя* – демонстрация своего понимания, отношения к обсуждаемой проблеме, своих ценностей и умений.

Выделим основные умения/ компетенции, овладение которыми может обеспечить готовность к деятельности по созданию развивающей среды при обучении математике (это те компетенции, которые входят в состав базовой).

– умение учиться (определять для себя мотивацию своего обучения, планировать свою работу, проводить рефлексию и анализ достигнутого);

– умение планировать и организовывать самостоятельную работу учащихся (помогать ставить цель, определять результат);

– умение мотивировать работу учащихся, включением их в разнообразные виды деятельности;

– умение подбирать учебный материал и использовать разные формы организации работы с учетом интересов, склонностей и особенностей учащихся, что позволит более полноценно развивать у них соответствующие компетенции;

– умение организовать исследовательскую деятельность учащихся и руководить ею;

– умение использовать дополнительную литературу, для того чтобы ознакомиться с другими подходами, идеями рассуждения, доказательствами; уметь сравнивать различные способы изложения материала, определять позицию автора того или иного учебника, учитывая то, как преподносится материал;

– умение осуществлять рефлексию своей деятельности и своего поведения и умение организовать рефлексию у обучающихся в процессе проведения занятий;

– умение обосновать систему оценивания достигнутых результатов таким образом, чтобы она способствовала развитию компетенции у обучающихся оценивать свои достижения;

– умение создать атмосферу, в которой учащиеся свободно высказывали бы свои соображения, точки зрения на обсуждаемый вопрос, умение задавать вопросы, способствующие развитию мысли ученика, подводить итоги проделанной работы;

– владение компьютерными технологиями и умение использовать их в учебном процессе.

В процессе изучения математики учащиеся знакомятся с понятиями, новыми теоретическими положениями, занимаются решением задач. Очевидно, что в процессе изучения формируется система математических знаний. Менее очевидно то, каким образом процесс получения нового знания способствует развитию ученика, что в свою очередь делает обучение мотивированным и целенаправленным. Это, на наш взгляд, в большой степени зависит от готовности учителя к созданию развивающей среды при проведении урока получения нового знания.

Руководствуясь выше сформулированными принципами, проследим возможности создания развивающей среды на примере работы с одной из теорем. В качестве иллюстрации рассмотрим теоремы, связанные с доказательством основных соотношений о пропорциональности отрезков хорд и секущих окружности.

Теорема 1 (свойство отрезков пересекающихся хорд). *Если две хорды AB и CD одной окружности пересекаются в точке M, то*

$$AM \cdot MB = CM \cdot MD.$$

Мотивация 1. Для мотивации изучения теоремы можно учащимся дать *измерительно-вычислительное задание:* “Постройте окружность и любые две пересекающиеся хорды (в частности, хорда может быть диаметром). Измерьте образовавшиеся отрезки хорд и сравните произведения длин отрезков каждой из хорд”.

В результате такой практической работы в классе будет рассмотрено большое число пар пересекающихся хорд различных окружностей, что позволит выдвинуть гипотезу о равенстве произведений отрезков любых пересекающихся хорд в окружности. Эта гипотеза требует доказательства. Во-первых, вывод получен с помощью измерений, которые всегда имеют погрешность. Во-вторых, он сделан по аналогии на основе метода неполной индукции, а такой способ рассуждений не всегда приводит к верному выводу. Поэтому перед учащимся встает как учебная задача – выдвинуть гипотезу согласно проведенным наблюдениям, так и исследовательская – доказать или опровергнуть выдвинутую гипотенузу.

Мотивация 2 (создание проблемной ситуации). Учитель может предложить учащимся своеобразную игру – "угадайку". Каждый ученик строит две хорды окружности AB и CD, пересекающиеся в точке M. Измеряют длины отрезков AM, MB, CM и MD, называя учителю длины трех из них. Учитель "угадывает" длину четвертого отрезка, вызывая удивление школьников.

Раскрытие "тайны угадывания" приводит учащихся к необходимости овладения новым знанием. Дальнейшее подведение к самостоятельной формулировке теоремы можно вести так же, как описано в первом случае мотивации.

Ознакомление с фактом, изложенным в теореме, происходит в результате выполнения измерительно-вычислительного задания на этапе мотивации.

Для того чтобы включить учащихся в самостоятельную работу по поиску доказательства теоремы, следует уделить внимание ***выделению ее условия и заключения.***

Дано: окружность, AB и CD – хорды, $AB \cap CD = M$.

Доказать: $AM \cdot MB = CM \cdot MD$.

Чтобы доказательство было понятным и легче воспринятым учащимися, следует осуществлять ***актуализацию необходимых знаний.***

Целесообразно повторить свойства вписанных и вертикальных углов и признаки подобия треугольников. Это можно сделать, предложив набор задач на готовых чертежах.

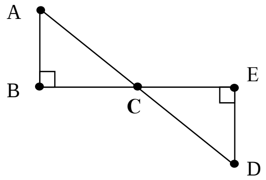


Рис. 1

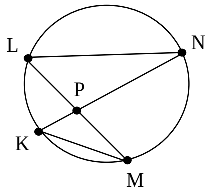


Рис. 2

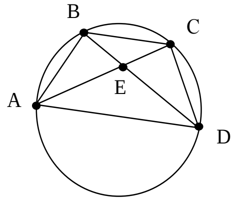


Рис. 3

Задание. На рисунках 1-3:

1) укажите равные углы;

2) выделите подобные треугольники.

Осознанию доказательства и пониманию проводимых дополнительных построений способствует аналитическое рассуждение, приводящее к доказательству рассматриваемой теоремы.

Аналитическое рассуждение приводит к доказательству теоремы 1, основанному на методе подобия.

1) Для того, чтобы равенство $AM \cdot MB = CM \cdot MD$ было верно, достаточно, чтобы была верна пропорция $\frac{AM}{CM} = \frac{MD}{MB}$. Можно также использовать одну из равносильных пропорций $\frac{MB}{MD} = \frac{CM}{AM}$ или $\frac{MB}{CM} = \frac{MD}{AM}$ или $\frac{AM}{MD} = \frac{CM}{MB}$.

2) Для пропорциональности $\frac{AM}{CM} = \frac{MD}{MB}$ достаточно, чтобы были подобны треугольники AMC и DMB. Выполним дополнительное построение – соединим точки A, C и B, D. При этом мы включим в чертеж необходимые треугольники AMC и DMB (рис. 4).

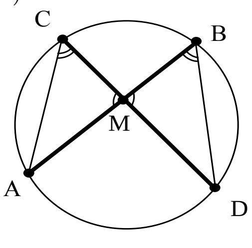


Рис. 4

3) Для того, чтобы треугольники AMC и DMB были подобны, достаточно убедиться в наличии условия одного из признаков подобия треугольников. Условие теоремы, следствия из дополнительного построения, а также знания о свойствах вертикальных и вписанных углов позволяют установить, что углы AMC и DMB равны как вертикальные, а углы ACM и DBM равны как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу AD.

Рассуждение приведено *методом восходящего анализа.*

После аналитического рассуждения легко составить с учащимися ***план доказательства:***

1. Сделать дополнительное построение.
2. Доказать подобие треугольников AMC и DMB.
3. Записать пропорциональность сторон подобных треугольников.

Краткую ***запись доказательства,*** которую можно рассматривать как *синтетический метод* доказательства, учащиеся могут выполнить самостоятельно.

Набор задач на ***закрепление и применение*** доказанной теоремы должен быть разноуровневым. Естественно начать с задачи на прямое применение теоремы в стандартной ситуации.

Задача 1. Хорда KL пересекает хорду MN той же окружности в ее середине – точке E. Найдите длину хорды MN, если $KE = 20$, а $EL = 5$.

Затем, учащиеся включаются в работу с задачами, которые предполагают использование новой теоремы в комбинации с ранее изученным материалом.

Задача 2. На продолжениях медиан AM и BE треугольника ABC взяты точки P и K соответственно, такие, что $AP : AM = 2 : 1$, а $BK : BE = 3 : 2$. Оказалось, что точки A, B, C, P и K лежат на одной окружности. Найдите углы треугольника ABC.

Ответ: $\angle A = 90^\circ$, $\angle C = \arccos \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\angle B = 90^0 - \arccos \frac{\sqrt{2}}{5}$.

При решении задачи 2 помимо свойства пересекающихся хорд необходимо использовать целый ряд теорем: свойство медиан треугольника; признак параллелограмма; свойство четырехугольника, вписанного в окружность; теорему Пифагора; свойство вписанного угла, опирающегося на диаметр. Именно в многочисленных связях с другими теоремами геометрии и состоит математическая красота этой задачи.

Формулировка обратного утверждения и установление его истинности способствует лучшему осознанию учащимися структуры изучаемой теоремы и расширению их знаний. Школьные учебники, как правило, не ориентируют учащихся на такой вид деятельности.

Теорема 2 (обратная теореме 1). *Если отрезки AB и CD пересекаются в точке M и $AM \cdot MB = CM \cdot MD$, то отрезки AB и CD являются хордами одной окружности.*

Концы двух пересекающихся отрезков можно ассоциировать с вершинами выпуклого четырехугольника, в котором дынные отрезки будут диагоналями. Тогда возможна другая формулировка обратной теоремы.

Теорема 2_1 (обратная к теореме 1). *Если точка пересечения диагоналей четырехугольника делит их на отрезки такие, что произведения отрезков каждой из диагоналей равны, то около такого четырехугольника можно описать окружность.*

Полезно рассмотреть возможности дальнейшего ***расширения*** теоремы 1. Заменим *хорду* на *секущую* (можно считать, что хорда является частью секущей). Рассмотрим случай, когда две секущие имеют общую точку M вне круга.

Теорема 3 (аналогичная теореме 1). *Если из точки M к окружности проведены две секущие (рис. 5), пересекающие окружность в точках A, B и C, D соответственно, то $AM \cdot MB = CM \cdot MD$.*

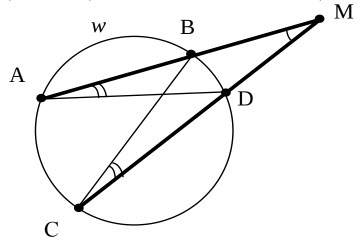


Рис. 5

Для доказательства теоремы 3 учащимся можно предложить самостоятельно выполнить перенос приема доказательства теоремы 1 в новую ситуацию.

Отметим, что возможны другие формулировки теоремы 3.

Теорема 3_1. *Произведение секущей к окружности на ее внешнюю часть не зависит от выбора секущей (т.е. есть величина постоянная).*

У учащихся вызывает интерес и одновременно трудности в установлении той константы, о которой идет речь в теореме 3_1. Можно предложить школьникам представить вращение секущей MC вокруг точки M, продолжающееся до тех пор, пока секущая MC не займет положение касательной, касающейся окружности в точке K (рис. 6).

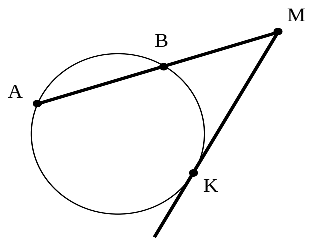


Рис. 6

При этом, точки C и D совпадают с точкой K, и получим, что $MC = MD = MK$. Тогда из равенства $AM \cdot MB = CM \cdot MD$ получают новое равенство $AM \cdot MB = MK^2$. Теперь учащиеся сами смогут сформулировать соответствующую теорему.

Теорема 4 (конкретизация теоремы 3). *Произведение большего отрезка секущей окружности на ее внешнюю часть равно квадрату отрезка касательной, проведенной из той же точки.*

Доказательство вытекает из подобия треугольников AMK и KMB (рис. 6), установление которого включает необходимость знания свойства об угле между касательной и хордой.

Для ***мотивации*** изучения теоремы 4 можно создать проблемную ситуацию, используя *задачу с практическим содержанием.*

Задача 3. Как далеко видно из самолета, летящего на высоте 4 км. над Землей, если радиус Земли 6370 км?

Для решения можно воспользоваться теоремой Пифагора. ***Второе решение*** базируется на теореме 4. По условию задачи (рис. 7) MA – секущая, причем $AB = 2R = 2 \cdot 6370$ (км), $MB = 4$ км, откуда $MA = 12744$ км. Здесь касательная MK к окружности – это искомый отрезок. По теореме 4 имеем: $MK^2 = MA \cdot BM$.

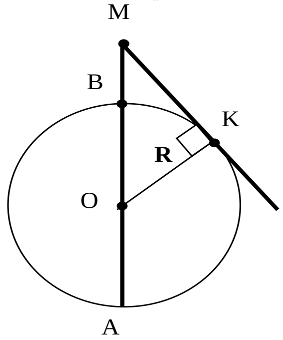


Рис. 7

Следствие теоремы 4 (свойство касательных к окружности). *Касательные, проведенные из точки к окружности равны (рис. 8).*

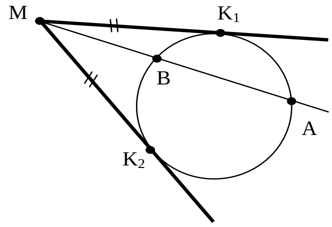


Рис.8

Расширение знаний по этой теме может осуществляться во внеурочной работе (на факультативе или элективном курсе). Можно познакомить учащихся с понятием *степень точки относительно окружности.*

Если точка M лежит вне круга, то по теореме 4 о квадрате касательной следует, что $AM \cdot MB = MK^2$ (рис. 9). С другой стороны $MK^2 = OM^2 - R^2$, где O – центр окружности, OM – расстояние точки M до ее центра, R – ее радиус (рис. 10). Итак,

$$MA \cdot MB = OM^2 - R^2. \tag{1}$$

Если точка M лежит внутри круга, то по теореме 1 о свойстве пересекающихся хорд (одна из хорд является диаметром (рис. 10)), имеем $MA \cdot MB = MC \cdot MD$, где $MC = R - OM$ и $MD = R + OM$.

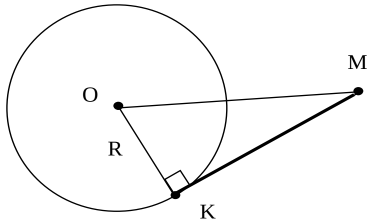


Рис. 9

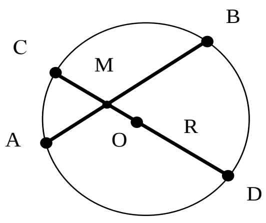


Рис. 10

Итак,

$$MA \cdot MB = R^2 - OM^2. \tag{2}$$

Выражения (1) и (2) похожи друг на друга. Придадим им еще большее сходство. Будем понимать под произведением направленных отрезков $\overline{MA} \cdot \overline{MB}$ произведение длин отрезков MA и MB, взятых со знаком "плюс", если точки A и B лежат по одну сторону от M, и со знаком "минус", если по разные стороны от точки M.

Тогда формулы (1) и (2) можно объединить в одну: $\overline{MA} \cdot \overline{MB} = OM^2 - R^2$.

Формула справедлива, если точка M лежит и на окружности.

Величина $\delta = \overline{MA} \cdot \overline{MB} = OM^2 - R^2$ называется *степенью точки M относительно данной окружности.*

Очень важно обсудить с учащимися вопрос о возможности "переноса" изучаемой теоремы из плоскости в пространство. Заменив окружность сферой, круг – шаром, хорду окружности – хордой сферы (отрезок, соединяющий две точки сферы), по аналогии теоремам 1-4 формируем следующие теоремы.

Теорема 5 (аналогичная теоремой 1). *Если две хорды AB и CD одной сферы пересекаются в точке M, то $AM \cdot MB = CM \cdot MD$.*

Две пересекающиеся хорды задают единственную плоскость. Сечение шара такой плоскостью есть круг. Продолжение доказательства теоремы 5 полностью повторяет доказательство теоремы 1.

При доказательстве следующих теорем используется та же схема: данные в условии теорем (две пересекающиеся секущие, пересекающиеся секущая и хорда) однозначно задают секущую плоскость; выделяется круг – сечение шара; повторяется соответствующее доказательство в плоскости.

Теорема 6 (обратная теореме 5). *Если отрезки AB и CD в пространстве пересекаются в точке M и $AM \cdot MB = CM \cdot MD$, то отрезки AB и CD являются хордами одной сферы.*

Теорема 7 (аналогичная теореме 3). *Если из точки M к сфере проведены две секущие, пересекающие сферу в точках A, B и C, D соответственно, то $AM \cdot MB = CM \cdot MD$.*

Теорема 8 (аналогичная теореме 4). *Произведение большего отрезка секущей сферы на ее внешнюю часть равно квадрату отрезка касательной, проведенной из той же точки.*

В приведенном примере авторами выделены основные методические аспекты по созданию развивающей среды при работе с теоремой на уроке с учетом выделенных принципов по созданию развивающей среды.

Очевидно, что для такой работы учителю необходимо накапливать аргументы, мотивирующие изучение конкретной теоремы, осваивать различные методы изучения теорем вообще, а для конкретной теоремы уметь отбирать эффективные методы ее изучения, разрабатывать полезные и красивые приложения изученных фактов, систематизировать приемы актуализации знаний, их использование и преобразование в новую информацию и др.

Библиографический список

1. *Иванов, Д.А.* Экспертиза в образовании [Текст]: учеб. пособие / Д.А. Иванов. – М.: Академия, 2008.
2. *Корикова, Т.М.* Избранные задачи школьной математики в деталях и нюансах [Текст]: учеб. пособие / Т.М. Корикова, И.В. Суслова, А.В. Ястребов. – Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2010.
3. *Маркова, А.К.* Формирование мотивации учения [Текст] / А.К. Маркова [и др.]. – М.: Просвещение, 1990.

Задачи с параметрами в школьном курсе математики

С.Ф. Митенева

Новые технологии обучения предполагают внедрение в учебный процесс принципиально новых дидактических систем, разработанных на основе содержательного учебного материала. В связи с этим требует решения задача внедрения в учебный процесс качественно новых систем упражнений развивающего характера.

В качестве содержательной основы для построения системы упражнений развивающего характера можно предложить задачи с параметрами. Наиболее рациональное решение таких задач связано с актуализацией обширного учебного материала и достигается путем комплексного применения аналитических и конструктивных приемов. Это позволяет рассматривать задачи с параметрами как содержательный материал для полноценной математической деятельности.

Задачи с параметрами играют важную роль в формировании логического мышления и математической культуры у школьников, но их решение вызывает большие затруднения. Это связано с тем, что каждое уравнение или неравенство с параметрами – это целый класс обычных уравнений или неравенств, для каждого из которых должно быть получено решение. Чтобы успешно справиться с ними, необходимо приобрести опыт их решения.

В последние годы появилось много пособий по решению задач с параметрами, однако большинство из них предназначено абитуриентам, готовящимся к поступлению в вуз. Начинать же знакомство с параметрами нужно намного раньше, при рассмотрении разделов школьной математики (линейные и квадратные уравнения и неравенства, простейшие иррациональные уравнения и неравенства, системы уравнений и неравенств).

Несмотря на то, что программа по математике средней школы не упоминает в явном виде о задачах с параметрами, было бы ошибкой утверждать, что они не рассматриваются в рамках школьного курса математики (например, в уравнениях $x^2 = a$, $ax^2 + вx + c = 0$, $\sin x = a$, $\cos x = a$, $tgx = a$, $ctgx = a$ числа $a, в, c$ являются параметрами). Опыт показывает, что задачам с параметрами следовало бы уделять больше внимания, т.к. они способствуют интеллектуальному развитию учащихся, служат хорошим материалом для отработки навыков, содействуют развитию творческих способностей учащихся, привитию интереса к математике. Задачи с параметром встречаются на экзамене по математике и часто оказываются не по силам выпускникам школ, поскольку у большинства учащихся нет должной свободы в общении с параметрами.

Основная методическая особенность уравнений с параметрами состоит в том, что в самом начале знакомства с параметром у учащихся возникает некий психологический барьер, который обусловлен противоречивыми характеристиками параметра. С одной стороны, параметр в уравнении следует считать величиной известной, а с другой – конкретное значение параметра не известно. С одной стороны, параметр является величиной постоянной, а с другой – он может принимать различные значения.

В связи с этим представляется целесообразным начинать изучение уравнений с параметром с решения простых уравнений без ветвлений.

Например: 1) $3 \cdot x = a$.

Ответ: при $a \in (-\infty; +\infty)$ $x = a/3$.

2) $|x| = |a|$.

Ответ: при $a \in (-\infty; +\infty)$ $x = \pm a$.

Затем переходить к решению простейших уравнений с небольшим числом легко угадываемых ветвлений.

Например: 3) $a \cdot x = 7$.

Ответ: при $a \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ $x = 7/a$.

4) $|x| = a$.

Ответ: при $a < 0$, корней нет; при $a = 0$, $x = 0$; при $a > 0$, $x = \pm a$.

Следующий шаг в изучении уравнений с параметром составляют несложные уравнения, при решении которых требуется дополнительная проверка, связанная с ограничениями их области определения.

Например: 5) $\frac{a}{x-2} = 1$.

Ответ: при $a = 0$, корней нет; при $a \neq 0$, $x = a + 2$.

6) $\frac{x}{x-1} = a$.

Ответ: при $a = 1$, корней нет; при $a \neq 1, x = \frac{a}{a-1}$.

Данная цепочка уравнений имеет ясную дидактическую цель – помочь учащимся составить представление о параметре, о том, что значит решить уравнение с параметром. Другими словами помогает учащимся осмыслить несколько строк определения: *"Пусть дано равенство с переменными x,a: f(x,a)=0. Если ставится задача для каждого действительно значения a решить это уравнение относительно x, то уравнение f(x,a)=0 называется уравнением с переменной x и параметром a. Решить уравнение с параметром a – это значит для каждого значения a найти значение x, удовлетворяющее этому уравнению"* [1, с. 160].

Учащимся, имеющим даже небольшой опыт решения уравнений с параметром, полезно предлагать задания на составление таких уравнений.

1. Составьте уравнение с параметром a так, чтобы каждому значению a соответствовало единственное значение x. (Например: $2x + a = 4$.)
2. Составьте уравнение с параметром a, которое при любом значении a не имеет корней. (Например: $x^2 + a^2 + 1 = 0$.)
3. Составьте уравнение с параметром a, которое не имеет корней при всех $a < 0$. (Например: $|x + 1| = a$.)
4. Составьте уравнение с параметром a так, чтобы при каком-то одном значении параметра корнем уравнения было любое действительное число, а при всех остальных значениях a уравнение не имело корней. (Например: $cos^2 x + \sin^2 x = a$.)
5. Составьте логарифмическое уравнение с параметром. (Например: $\log_a x + \log_a x^2 = 3$.)
6. Составьте показательное уравнение с параметром так, чтобы оно имело единственное решение. (Например: $a(2^x + 2^{-x}) = 5$.)

Накладывая различные условия на значения параметра, на значение переменной, на число корней или число ветвлений, на тип уравнения и т.п., в зависимости от целей и математической подготовки класса, учащимся можно предложить много разнообразных заданий на составление уравнений с параметром.

Рассказ об уравнениях с параметрами становится более наглядным, более доступным для учащихся, если использовать блок-схемы и геометрические интерпретации. К сожалению, в рамках школьной программы очень сложно вести подробный разговор о задачах с параметрами. Однако более близкое знакомство с параметрами, отработка прочных навыков решения уравнений с параметрами, различные приемы решения уравнений возможны на факультативных и кружковых занятиях по математике [2].

Рассмотрим вопрос организации урока по составлению различных уравнений с параметрами в рамках некоторой темы. Очень часто желание учителя составить дополнительные задания для учащихся не осуществляется из-за недостатка времени. В некоторых случаях уравнения с параметром могут облегчить эту работу.

Например:

1) Решить уравнение $\sqrt{\mathrm{x}-\sqrt{\mathrm{x}-\mathrm{a}}}=\mathrm{a}$.

Решение. Т.к. левая часть уравнения неотрицательна, то уравнение не имеет решений при a<0.

При a ≥0 имеем $\sqrt{\mathrm{x}-\sqrt{\mathrm{x}-\mathrm{a}}}=\mathrm{a} \Leftrightarrow x-\sqrt{x-a}=a^2 \Leftrightarrow \sqrt{x-a}=x-a^2 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x-a=(x-a^2)^2 \\ x-a^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x(2a^2+1)+a^4+a=0 \\ x \geq a^2 \end{cases}.$$

По тереме Виета уравнение $\mathrm{x}^2-\mathrm{x}(2\mathrm{a}^2+1)+(\mathrm{a}^2+\mathrm{a})(\mathrm{a}^2-\mathrm{a}+1)=0$ имеет корни $\mathrm{x}_1=\mathrm{a}^2-\mathrm{a}+1$, $\mathrm{x}_2=\mathrm{a}^2+\mathrm{a}$, причем $\mathrm{x}_1 \geq \mathrm{a}^2$ при $\mathrm{a} \leq 1$, $\mathrm{x}_2 \geq \mathrm{a}^2$ при $\mathrm{a} \geq 0$; при a=1/2, $\mathrm{x}_1=\mathrm{x}_2=3/4$.

Таким образом, получаем: при a<0 – нет решений; при a=1/2, x=3/4; при $\mathrm{a} \in [0;\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{2};1]\mathrm{x}_1=\mathrm{a}^2-\mathrm{a}+1, \mathrm{x}_2=\mathrm{a}^2+\mathrm{a}$; при a>1, $\mathrm{x}_1=\mathrm{x}_2=\mathrm{a}^2+\mathrm{a}$.

Придавая параметру a различные числовые значения, можно написать много уравнений, корни которых легко найти по полученным формулам. Несколько таких уравнений приведены в таблице.

Значение параметра	*Уравнение*	*Ответ*
$\mathrm{a}=1/3$	$\sqrt{\mathrm{x}-\sqrt{\mathrm{x}-\frac{1}{3}}}=\frac{1}{3}$	$\mathrm{x}_1=\frac{7}{9}, \mathrm{x}_2=\frac{4}{9}$
$\mathrm{a}=3/4$	$\sqrt{\mathrm{x}-\sqrt{\mathrm{x}-\frac{3}{4}}}=\frac{3}{4}$	$\mathrm{x}_1=\frac{13}{16}, \mathrm{x}_2=1\frac{5}{16}$
$\mathrm{a}=2$	$\sqrt{\mathrm{x}-\sqrt{\mathrm{x}-2}}=2$	$\mathrm{x}=5$
$\mathrm{a}=3$	$\sqrt{\mathrm{x}-\sqrt{\mathrm{x}-3}}=3$	$\mathrm{x}=12$

2) Решив уравнение *x·|x-4|+a=0* получим: при a<-4, $\mathrm{x}=2+\sqrt{4-\mathrm{a}}$; при -4≤ a <0, $\mathrm{x}=2\pm\sqrt{4+\mathrm{a}}, \mathrm{x}=2+\sqrt{4-\mathrm{a}}$; при a=0, $\mathrm{x}=0, \mathrm{x}=4$; при a>0, $\mathrm{x}=2-\sqrt{4+\mathrm{a}}$.

Ниже приведены уравнения, корни которых легко находятся по полученным формулам.

Значение параметра	*Уравнение*	*Ответ*
$\mathrm{a}=0$	*x· |x-4 |=0*	$\mathrm{x}=0, \mathrm{x}=4$
$\mathrm{a}=1$	*x· |x-4|+1=0*	$x=2-\sqrt{5}$
$\mathrm{a}=2,25$	*x· |x-4|+2,25=0*	$\mathrm{x}=-0,5$
$\mathrm{a}=-3$	*x· |x-4|-3=0*	*x=1, x=3,* $x=2+\sqrt{7}$
$\mathrm{a}=-5$	*x· |x-4|-5=0*	$\mathrm{x}=5$

Иногда различным значениям параметра соответствуют уравнения разной степени сложности. Этим обстоятельством можно воспользоваться для организации индивидуального подхода к учащимся.

Библиографический список

1. *Гусев, В.А.* Математика. Справочные материалы [Текст] / В.А. Гусев, А.Г. Мордкович. – М.: Просвещение, 1988.
2. *Черкасов, О.Ю.* Математика: интенсивный курс подготовки к экзамену [Текст] / О.Ю. Черкасов, А.Г. Якушев. – М.: Рольф, 1997. – 384 с.
3. *Шестаков, С.А.* Уравнения с параметрами [Текст] / С.А. Шестаков, Е.В. Юрченко. – М.: СЛОГ, 1993.

Инструментально-технологические возможности проектирования методической системы преподавания математики в условиях компетентностного подхода

А.Г. Мусаелян

Сегодня стремительно растут требования к уровню подготовки специалистов, а оптимизация учебного процесса становится одной из главных задач преподавательского состава вуза. Последние годы наблюдается глобальный процесс стандартизации высшего образовательного пространства. Чтобы каждый студент достигал уровня образовательного стандарта, вузам необходим новый педагогический инструментарий по оценке качества достижения планируемых результатов.

Как известно, если есть стандарт, то традиционных методов не достаточно для его реализации. Возникает необходимость появления технологии как решение проблемы перехода от традиционной школы к инновационной. Ее сущность заключается в реализации следующих подходах. Во-первых, это системный подход, результатом которого становится обновленная система образования. Во-вторых, это технологический подход, результатом которого становится технология построения системы образования. В-третьих, это компетентностный подход, который рассматривается как один из главных путей повышения качества профессионального образования [3]. То есть, иными словами, выходим на системно-целевой уровень проектирования системы образования.

Главная задача образовательной политики на современном этапе развития российского общества – обеспечение качества образования при сохранении его доступности, фундаментальности и соответствия актуальным и перспективным потребностям личности, общества и государства.

“Развитие традиционной методики преподавания, исчерпав себя, не может обеспечить функционирование единого образовательного пространства России. Можно уже сегодня прогнозировать начало технологического века, который свое шествие начнет с параметризации и технологизации основных объектов и категорий традиционной педагогики” [2]. “Педагогическая технология – это систематическое и последовательное воплощение на практике заранее спроектированного процесса обучения, а также система способов и средств достижения целей и условий управления этим процессом”.

Педагогическую технологию отмечают два принципиальных момента:

1) технология – это гарантированность конечного результата,

2) технология – это проект будущего учебного процесса.

Поэтому говоря о технологии формирования учебного портрета группы студентов технического вуза по математике, наш взгляд остановился на педагогической технологии В.М.Монахова, так как **указанная технология гарантирует достижение планируемого результата обучения.**

Использование данной технологии на практике определяет ее доступность, высокую скорость освоения, эффективность использования. Кроме того, технология может быть применена в любой учебной группе – в этом ее универсальность.

Выбор или построение информационной модели учебного процесса является необходимым условием технологизации. В педагогической технологии В.М. Монахова информационная модель учебного процесса выстраивается параметрически. Выбрано пять параметров, наиболее целостно и адекватно отражающих и представляющих закономерности учебного процесса: целеполагание (система микроцелей); диагностика; дозирование самостоятельной деятельности студентов; коррекция; логическая структура проекта.

Все компоненты органично взаимосвязаны:

– содержание микроцели определяет содержание диагностики;

– содержание диагностики задает содержание, объем, сложность и трудность компонента дозирования домашних заданий;

– содержание дозирования проверяется как достаточное или недостаточное при проведении диагностики;

– компонент коррекции – это фактическая программа деятельности преподавателя и студента, не прошедшими диагностику;

– логическая структура – это органичное и динамичное единство содержательного, процессуального и мотивационного в проекте учебного процесса.

Проведенный обзор основных сущностных положений педагогической технологии В.М. Монахова показывает, что данная технология обучения учитывает важнейшие аспекты современного развития нашего общества. В вузе не только приобретаются знания, но также осуществляется и конструирование восприятия окружающего мира, и диагностирование учебного процесса, достигнутых результатов. Целью дидактического диагностирования является своевременное выявление, оценивание и анализ течения процесса в связи с его продуктивностью.

В процессе обучения важную роль играет так называемая обратная связь, т.е. информация, которая поступает от студента к преподавателю и свидетельствует о ходе учения, затруднениях и достижениях студентов в овладении знаниями, развитие умений и навыков, познавательных и иных способностей, качеств личности в целом. Обратная связь важна для преподавателя, так как позволяет ему диагностировать образовательный процесс, оценивать результаты, корректировать свои действия, дифференцировать методы и задания с учетом индивидуального продвижения и развития студентов. Не менее важна обратная связь для самих студентов, ибо благодаря ей они могут видеть недостатки и достижения, получить оценку своей деятельности, советы по ее корректированию.

Метод моделирования результатов обучения и их представления определяются как норма качества высшего образования. Результаты – это набор компетенций, включающие знания и навыки студента. Компетентностный подход позволяет сохранять гибкость структуры и содержания учебного плана.

Об эффективности учебного процесса свидетельствует изменение показателя качества обученности студентов – их успеваемость. Автор статьи предлагает рассмотреть новую методическую систему оценки качества математической подготовки студентов-инженеров, построенной на основе технологии В.М. Монахова в условиях компетентностного подхода. С позиций компетентностного подхода уровень образованности определяется способностью человека решать проблемы различной сложности на основе имеющихся у него знаний. Компетентностный подход акцентирует внимание на способности студентов использовать полученные знания.

Определим факторы, влияющие на успеваемость первокурскников-“нематематиков”, актуальные в настоящем времени:

1) территориальный фактор получения математической подготовки в среднем учебном заведении,
2) основа экономического отношения с вузом,
3) форма получения среднего образования,
4) школьная математическая подготовка.

Студенты за учебный период (первый курс) написали 9 работ. Их темы: 1) линейная алгебра, 2) векторная алгебра, 3) аналитическая геометрия, 4) пределы, 5) дифференциальное исчисление функций одного переменного, 6) интегральное исчисление функций одного переменного, 7) дифференциальные уравнения, 8) дифференциальное исчисление функций нескольких переменных, 9) ряды.

Учитывая факторы, влияющие на успеваемость первокурсников, и три группы ключевых компетенций: социальные, учебные, дидактические, построена схема, на основе которой по собранной информации успеваемости исследуемых студентов можно сформировать учебный портрет данной группы.

Социальные компетенции – это компетенции, которые характеризуют взаимодействие студента и социума. К данной группе относятся следующие факторы из вышеперечисленных:
1) территориальный фактор получения математической подготовки в среднем учебном заведении;
2) основа экономического отношения с вузом.

При проектирование методической системы преподавания математики при подготовке инженеров, определяющей изменение уровня качества образования, исследуемые студенты делятся на такие альтернативные множества, как:
– для фактора (1): “москвичи” и “иногородние”;
– для фактора (2): “бюджетники” и “контрактники”.

Учебные компетенции – это компетенции, которые характеризуют прогнозируемый результат усвоения изучаемого материала курса высшей математики.

Дидактические компетенции – это компетенции, которые характеризуют основы образования, обучения. К данной группе относятся следующие факторы из вышеперечисленных:
3) форма получения среднего образования;
4) школьная математическая подготовка.

При проектирование методической системы преподавания математики при подготовке инженеров, определяющей изменение уровня качества образования, исследуемые студенты делятся на такие альтернативные множества, как:
– для фактора (3): “школа” и “техникум”;
– для фактора (4): “хорошисты” и “троечники”.

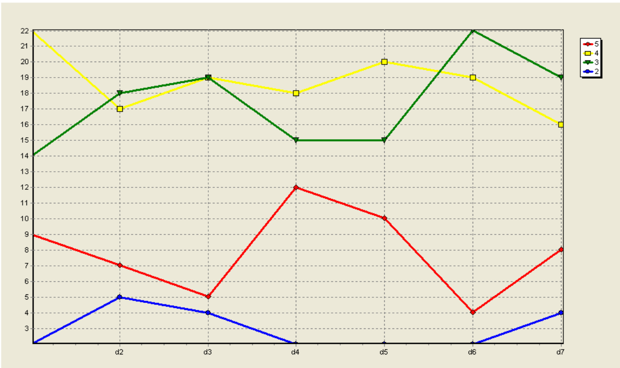
Автора интересуют взаимодействия между компетенциями:
1) учебными и социальными,
2) учебными и дидактические.

Определение характера данных взаимодействий можно осуществить с помощью **компьютерной системы аналитической обработки результатов диагностик.** Данная система выстраивает графики:
– индивидуальной траектории успеха студента по предмету за учебный период;
– графическое представление результатов диагностик всей исследуемой группы студентов за учебный период.

Каждая диагностика включает четыре задания, соответствующие трем уровням сложности: первые два задания на “стандарт”, третье задание на “хорошо”, четвертое задание на “отлично”.

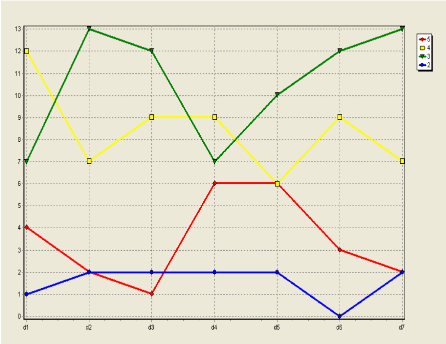
Автором определен портрет группы экономистов МГУПриродообустройства по схеме:

“Вся группа”

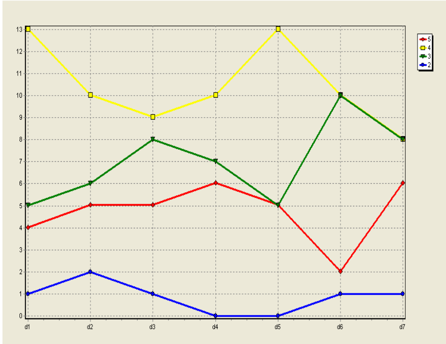


Компьютерная система выдала результат: все диагностики кривых находятся в пределах нормы.

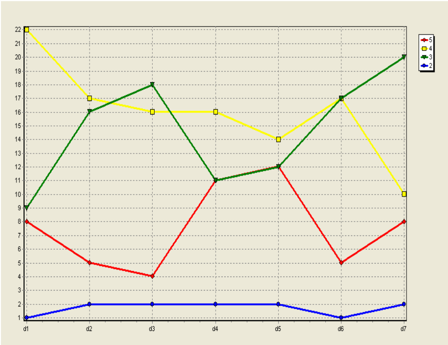
Рассмотрим графические представления результатов диагностик альтернативных множеств исследуемых студентов для замера качества учебного процесса.



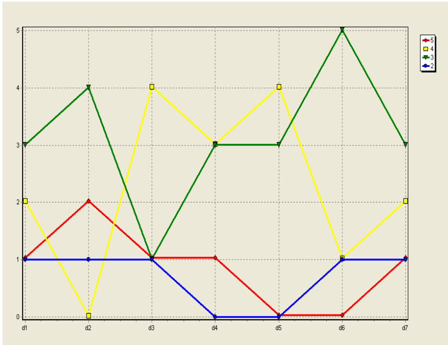
“Москвичи”



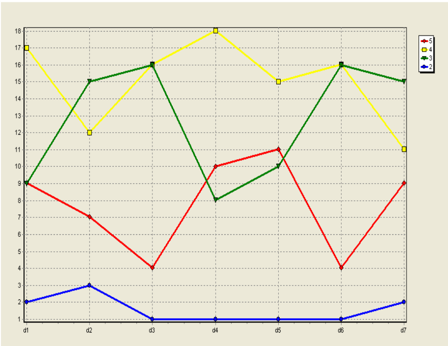
“Иногородние”



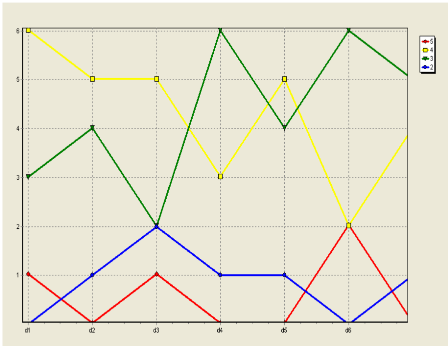
“Школа”



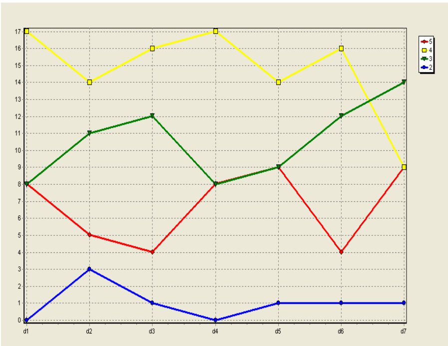
“Техникум”



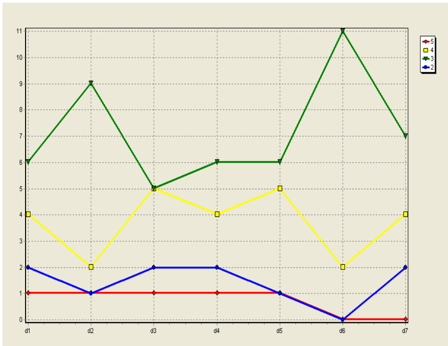
“Бюджет”



“Контракт”



“Хорошисты”



“Троечники”

Картина динамики успеваемости “Всей группы” показывает, что студенты – экономисты справляются со стандартом по курсу “Высшая математика”.

Анализ, проведенный по указанной схеме, показывает, что в проигрышной ситуации находятся студенты таких множеств, как “техникум”, “контракт”. На основе результатов диагностик компьютерная система выдавала для этих множеств: увеличение количества оценок “3” получено за счет уменьшения количества оценок на “4”.

Получив учебный портрет группы, преподаватель понимает все плюсы и минусы своей методики и какие методические изменения надо внести в процессе преподавания.

Библиографический список

1. *Бахусова, Е.В.* Компьютерная система аналитической обработки результатов диагностик [Текст] / Е.В. Бахусова // Материалы международной конференции "Информатизация образования 2008". – Минск, 2008.
2. *Монахов, В.М.* Введение в теорию педагогических технологий [Текст]: монография / В.М. Монахов. – Волгоград: Перемена, 2006.
3. *Монахов, В.М.* Методологические основания разработки технологий построения систем образования с заданными свойствами [Текст] / В.М. Монахов // Материалы международной научно-практической конференции. – 2010.
4. *Мусаелян, А.Г.* К вопросу построения и функционирования методической системы преподавания высшей математики в вузе: аспект управления качеством [Текст] / А.Г. Мусаелян, Е.В. Бахусова // Материалы международной научно-практической конференции. – 2010.

О методических основах проектирования системы задач на развитие функциональных умений в контексте деятельностного подхода к обучению математике

И.В. Насикан

Для решения основных задач модернизации российского образования – повышения его доступности, качества и эффективности – предлагается проведение в современной школе не только масштабных структурных, институциональных, организационно-экономических преобразований, но в первую очередь – значительное обновление содержания общего образования, приведение его в соответствие с требованиями времени и задачами развития государства. Нормы и требования, определяющие обязательный минимум содержания основных образовательных программ общего образования приведены в Государственном стандарте, который ориентирован не только на знаниевый, но в первую очередь на деятельностный компонент образования, что позволяет повысить мотивацию обучения, в наибольшей степени реализовать способности, возможности и интересы каждого ребенка. На пути достижения основных целей Федерального компонента стандарта (формирование целостного представления о мире, приобретение опыта разнообразных видов деятельности, подготовка к осознанному выбору индивидуальной образовательной или профессиональной траектории) особая роль отводится формированию различных умений учащихся, меняется система требований к этим умениям.

В теории и методике обучения математике традиционной стала трактовка умения как знания в действии, что подчеркивает деятельностную природу умений и их органичную связь со знаниями. В психолого-педагогической литературе выделяются такие признаки, объединяющие знания и умения, как обобщенность, необратимость, поэтапность и системность. Как и знание, умение всегда имеет свое логическое основание, ядро, приводит к определенным результатам и может быть уложено в систему умений [4]. В основу требований к умениям, закрепленным в государственном стандарте общего образования, положена многоуровневая структура учебной деятельности. В свою очередь, требования обусловлены конкретными целями обучения. Формирование умений призвано осуществить, в основном специфические учебные действия, состав и последовательность которых определяются содержанием и логикой конкретной задачи, знанием методов и способов ее решения. Полноценное формирование умения должно обеспечиваться повторяемостью и углублением изучаемого материала, на основе которого может происходить первоначальное ознакомление с умением, дальнейшее его формирование и развитие; дозированием учебного времени, необходимого для отработки составных частей умения.

Функционально-графическая линия школьного курса алгебры с 80-х годов XX столетия является одной из основных и приоритетных, уровень развития функциональных умений учащихся играет большую роль в успешном овладении материалом остальных содержательно-методических линий школьного курса математики.

В сложившейся на сегодняшний день ситуации проведения государственной (итоговой) аттестации (в дальнейшем – ГИА) выпускников основной школы в новой форме авторы контрольно-измерительных материалов по математике уделяют много внимания проверке базовых функциональных умений учащихся. Тем не менее, в соответствующих публикациях и ежегодных аналитических отчетах Федерального института педагогических измерений (ФИПИ) подготовленных по результатам ГИА за курс основной школы в различных регионах станы, неоднократно указывается на низкий уровень сформированности у учащихся функциональных знаний, умений и навыков. На сегодняшний день около 30% девятиклассников, участвующих в ГИА по математике в новой форме, не овладели базовыми функциональными умениями, необходимыми для практического применения и дальнейшего изучения в X-XI классах элементов математического анализа. Среди причин, этому способствующих, указываются многие факты: отсутствие у школьников интереса к предмету вообще и изучению функций в частности; изучение каждого нового вида функций и их свойств фактически вне связи с предыдущими; разрыв между вычислительными и функционально-графическими умениями у учащихся.

Таким образом, назревает проблема поиска такой технологии проектирования системы задач, способствующих развитию функциональных умений, которая позволит разрешить противоречия между: состоянием традиционной методики преподавания функционально-графической линии и новыми требованиями, предъявляемыми к организации учебного процесса; существующей системой задач и упражнений и предъявляемыми требованиями к проектированию содержания функциональной предметно-методической линии; результатами уровня сформированности функциональных умений и требованиями, предъявляемыми к математической подготовке выпускников основной школы.

Проведенный анализ психолого-педагогической литературы позволяет отнести функционально-графические умения учащихся к специальным учебным умениям, которые формируются в рамках учебного предмета. На основе требований действующего государственного стандарта общего образования к уровню подготовки выпускников основной школы базовые функционально-графические умения учащихся можно классифицировать следующим образом (см. табл. 1).

В рамках приведенной классификации при проектировании системы задач и упражнений для изучения отдельных функций и их свойств, мы ориентировались на необходимость включения в нее заданий, разнообразных как по содержанию, так и по форме, способствующих выработке у учащихся системы общих указаний и алгоритмических действий, нацеленных на усиление связи обучения с жизнью и обеспечивающих развитие функциональных умений.

Таблица 1

Классификация функциональных умений учащихся

Вычислительные	Графические	Аналитические	Прикладные
1) Определять значение функции, по значению аргумента при различных способах задания функции; 2) Находить значение аргумента по известному значению функции	1) Определять координаты точки плоскости, строить точки с заданными координатами. 2) Строить графики изученных элементарных функций. 3) Изображать множество решений линейного неравенства. 4) Применять графические представления при решении уравнений, систем, неравенств.	1) Описывать по графику и по формуле поведение и свойства функций: область определения, нули, промежутки знакопостоянства, четность-нечетность, монотонность, область значений, наибольшее, наименьшее значение. 2) Решать уравнения, простейшие системы уравнений, используя свойства функций и их графиков. 3) Решать простейшие задачи с параметрами на применение свойств функций и графических представлений.	1) Выполнять расчеты по формулам. 2) Составлять формулы, выражающие зависимость между реальными величинами. 3) Описывать зависимости между различными величинами и параметрами (например, физическими, экономическими и т.д.) соответствующими формулами при исследовании несложных практических ситуаций. 4) Интерпретировать графики реальных зависимостей между величинами.

Проблема проектирования системы задач в школьном курсе математики имеет много аспектов: это уяснение целей и функций задач в обучении, вопросов систематизации и классификации задач, определение содержания и методов их решения, совершенствование методики обучения решению задач и т.д. Теория и методика обучения решению математических задач раскрыта в трудах Ю.М. Колягина, В.И. Крупича, Г.И. Саранцева и др.

Для достижения какой-либо цели обучения требуется определенная *система задач*, в которой каждая составляющая характеризуется не только сама по себе, но и с учетом ее вклада в достижение заданной цели. Педагоги, психологи и методисты сходятся к мысли, что ни одна задача, решаемая изолированно, не даст желаемого результата. Так, Г.И. Саранцев [7] указывает на то, что решение задач вызывает определенную умственную деятельность, которая обусловлена не только их содержанием, но и зависит от последовательности их решения, количества однотипных задач, комбинаций их с другими задачами. Правильно спроектированная система задач дает учащимся полноту представлений, облегчает математическое общение, способствует гибкости, глубине и осознанности знаний и прочности сформированных умений.

Для изучения проблем, касающихся использования системы задач в обучении, необходимо ответить на вопрос: что представляет собой система задач и в чем ее сущность. Под *системой задач* мы будем понимать совокупность упорядоченных и подобранных в соответствии с поставленной целью задач, действующих, как одно целое, взаимосвязь и взаимодействие которых приводит к заранее намеченному результату.

По нашему мнению, целесообразно рассматривать две основных группы требований к системе задач: 1 группа – требования к содержанию, 2 группа – требования к структуре системы задач. Такой подход обеспечивает доступность и успешность практики проектирования систем задач, поскольку появляется возможность ответить на два главных вопроса: какие задачи необходимо включить в систему и как их расположить. Будем опираться на систему требований, предложенную О.Н. Орлянской [6].

При рассмотрении 1 группы выделим следующие требования.

Адекватность содержанию образования. Под этим требованием понимается типичность задач системы для изучаемой темы, соответствие задач программному материалу, отражение в них теоретических вопросов, направленность на осуществление обучающих функций.

Полнота. Она предполагает наличие в системе задач на все изучаемые понятия и факты. Система является полной, если она обеспечивает реализацию как общих, так и конкретных целей обучения.

К структуре системы задач предъявляются пять требований.

Целевая достаточность. Здесь подразумевается наличие в системе задач как для тренажа, так и для самостоятельного решения, а также индивидуальных задач исследовательского, творческого характера. В системе также должны сочетаться задачи на формирование умений и навыков с задачами на понимание и повторение материала.

Нарастание сложности. Это требование согласуется с одним из главных принципов обучения: от простого – к сложному.

Рациональность объема предполагает, что задач должно быть достаточное количество для усвоения материала всеми учащимися. Но в то же время недопустимо, чтобы из-за избыточного числа задач учащиеся потеряли интерес к изучаемому материалу.

Возможность осуществления индивидуального подхода предполагает, что при проектировании системы учитель должен представлять, каким способом он будет осуществлять индивидуализацию.

Иерархичность. Система задач должна состоять из нескольких подсистем, которые в свою очередь обладают всеми признаками системы.

Перечисленные требования являются необходимыми условиями функционирования системы задач и должны быть учтены при ее проектировании.

Очень важно отличать требования к системе задач от правил ее построения. Требования показывают те качества, по которым можно судить, является ли данная совокупность задач системой. Правила же построения системы позволяют понять, как осуществить отбор задач, в какой очередности их расположить, чтобы спроектированная таким образом система отвечала предъявленным к ней требованиям.

Выделяя *правила проектирования системы задач*, будем учитывать, что их количество должно быть достаточным для создания эффективной системы, но не должно загромождать процесс проектирования; каждое правило должно непосредственно указывать, какие задачи необходимо включить в систему и как их структурировать; соблюдение правил должно быть нацелено на удовлетворение всех требований, предъявляемых к любой системе задач.

Согласно этим положениям, при проектировании системы задач полезно придерживаться следующих правил:

1. *Правило учета целей.* При отборе задач в систему необходимо учитывать цели, которых помогает добиться каждая из них. Нельзя упускать из виду и общие цели использования задач, их место в общей системе.
2. *Правило полноты.* Перед отбором задач для системы необходимо выделить все понятия и факты, которые должны усвоить учащиеся, умения и навыки, которые они должны приобретать в процессе решения задач системы.
3. *Правило соответствия* каждой группы задач, включенных в систему, *определенным компонентам учебно-познавательной деятельности* (организационно-действенному, стимулирующему и контрольно-оценочному). В соответствии с указанными компонентами наша система будет содержать задачи, предполагающие выполнение упражнений, стимулирующих, организующих и осуществляющих, учебно-познавательную деятельность, а также упражнений, в процессе выполнения которых осуществляется контроль и самоконтроль учебно-познавательной деятельности. Учитывая дидактические цели, каждый этап усвоения умений (в нашем случае функциональных) должен отображаться на соответствующий вид упражнений:

актуализация базовых (опорных) умений	$\leftrightarrow$	подготовительные упражнения
усвоение умений	$\leftrightarrow$	вводные упражнения
первичное применение умений	$\leftrightarrow$	пробные упражнения
овладение умениями в стандартных условиях	$\leftrightarrow$	тренировочные упражнения
творческий перенос умений в нестандартные условия	$\leftrightarrow$	творческие упражнения

4. *Правило доступности.* Каждая задача системы должна быть посильна ученику.
5. *Правило однотипности.* Разумное включение в систему однотипных задач, способствует формированию прочных знаний и умений.
6. *Правило разнообразия.* Чтобы избежать снижения интереса, внимания и активности учащихся, в систему должны быть включены задачи, разнообразные по форме, содержанию и способу решения.
7. *Правило противопоставления.* Необходимо в систему включать задачи на сходные и взаимообратные понятия, а также задачи, не имеющие решения, и контрпримеры.
8. *Правило дифференциации.* Необходимо располагать задачи в системе по мере нарастания их сложности.

9. *Правило структурности.* Система задач должна быть разбита на несколько подсистем, которые отделяются друг от друга либо задачами на повторение, либо нестандартными задачами.
10. *Правило индивидуализации.* Следует учитывать, что для усвоения одного и того же материала разным учащимся требуется разное время для решения одной и той же задачи, а также неодинаковое количество задач. Поэтому система задач должна иметь открытую структуру, то есть учитель должен иметь возможность исключать некоторые задачи системы или менять форму их предъявления.

Владение приведенными выше правилами позволяет учителю осуществлять отбор и упорядочивание задач, но еще не дает возможности полноценного проектирования системы. Необходимо знать различные *методы проектирования систем задач* и частью из них свободно владеть.

Рассматривая наиболее распространенные в педагогической практике методы, выделим следующие:

1. *Метод ключевой задачи.* Этот метод приводится в трудах В.Г. Болтянского [1], Г.В. Дорофеева [2, 3], Г.И. Ковалевой [5] и др. Его суть заключается в выделении опорной задачи, вокруг которой группируется определенный набор задач.
2. *Метод варьирования задачи.* Этот метод состоит в том, что каждая задача системы получена из данной путем варьирования ее содержания или формы. Роль варьирования как эффективного средства осознанного усвоения учебного материала обоснована психологами Д.Н. Богоявленским, Е.И. Кабановой-Меллер, И.А. Менчинской, Ю.Л. Самариным.
3. *Метод целевой задачи.* На важность этого метода указывают исследователи В.В. Гузеев, М.И. Денисова и др. Суть метода в том, что сложность действий, требующихся для решения задачи, приводит к необходимости постепенного нарастания числа операций, составляющих ее решение.

Опираясь на системный подход, разработанный в теории и практике обучения математике можно выделить четыре этапа проектирования системы задач и упражнений.

I этап – теоретический. Данный этап включает несколько ступеней.

– Выявление совокупности основных понятий, фактов и умений, которые должны быть сформированы в процессе изучения темы в соответствии с программными требованиями. Формулировка общих целей изучения данной темы.

– Установление взаимосвязей между понятиями и фактами внутри системы, а также ее связи с другими темами.

– Определение необходимых для раскрытия темы видов уроков.

– Формулирование частных целей для отдельных уроков и выявление тех понятий, фактов и умений, которые должны быть сформированы на каждом из них.

II этап – отборочный. В соответствии с поставленными целями для каждого урока осуществляется отбор задач с учетом выделенных принципов отбора. Недостающие в учебных пособиях для достижения определенных целей задачи строятся с помощью приемов обобщения, конкретизации, составления обратных задач, варьирования, составления более сложных задач.

III этап – структурирующий. Между совокупностью отобранных для каждого урока задач устанавливаются взаимосвязи. В соответствии с ними, а также типами уроков, для которых проектируются системы задач, производится выбор методов проектирования. В соответствии с правилами упорядочивания задач системы и выбранными методами проектирования строятся подсистемы задач и упражнений для каждого из уроков.

IV этап – констатирующий. Проверяется соответствие построенных систем задач выделенным системным требованиям. В случае необходимости проводится корректировка.

Точно следуя выделенным этапам, а также правилам и методам проектирования системы задач, можно для любой темы школьного курса математики в рамках функционально-графической предметной линии построить систему задач, отвечающую всем предъявляемым к ней требованиям.

Приведем пример структурной части системы задач по теме: “Применение функционально-графического метода к решению уравнений и неравенств, содержащих абсолютные величины”. Тема изучается в рамках элективного курса “Функции и графики” во втором полугодии 9 класса.

Говоря об актуальности функционально-графического метода решения уравнений и неравенств, отметим следующее: метод является не целью, а средством, помогающим решить уравнение или неравенство, что способствует реализации деятельностной составляющей процесса формирования и развития умений; метод позволяет решить то или иное уравнение, неравенство в тот период, когда других приемов школьники еще не знают или не владеют ими в совершенстве.

Графический метод обычно применяется для решения уравнений и неравенств, содержащих модуль, типа: $|f(x)| = a$, $|f(x)| = g(x)$,$f(|x|) = g(x)$, $|f(x)| = |g(x)|$, $|f(x)| > a$, $|f(x)| < a$, $|f(x)| < g(x)$, $|f(x)| > g(x)$ и некоторых других. Суть метода заключается в том, чтобы:

1) построить графики функций $y = |f(x)|\,, y = f\,|x|\,, y = g(x), y = |g(x)|\,, y = a$;

2) выяснить их взаимное расположение в зависимости от условия задачи.

В рамках спроектированной нами системы задач решение уравнений и неравенств, содержащих абсолютные величины, функционально-графическим методом предваряется рассмотрением задач (включенных в систему на основе метода варьирования и реконструкции) на построение графиков функций с модулем. Например, учащимся предлагается построить графики функций:

$y = 2|x| - 2$, $y = |x - 2|$, $y = |1 - |x||$ (на основе умений выполнять преобразования графика $y = kx + b$);

$y = x^2 - |x| - 6$, $y = |x^2 - 6x + 5|$, $y = |x^2 - 2|x| - 15|$ (на основе умений выполнять преобразования графика y= ax^2+bx+c).

После этого можно переходить к решению уравнений и неравенств. Например: решить уравнение: $|x - 4| + |(x - 1)(x - 3)| = 1$.

Выполняя последовательное построение графиков функций *y=1–|x–4|* и *y = |(x–1)(x–3)|* с учетом ранее изученных преобразований графика линейной функции, получим (см. рис. 1):

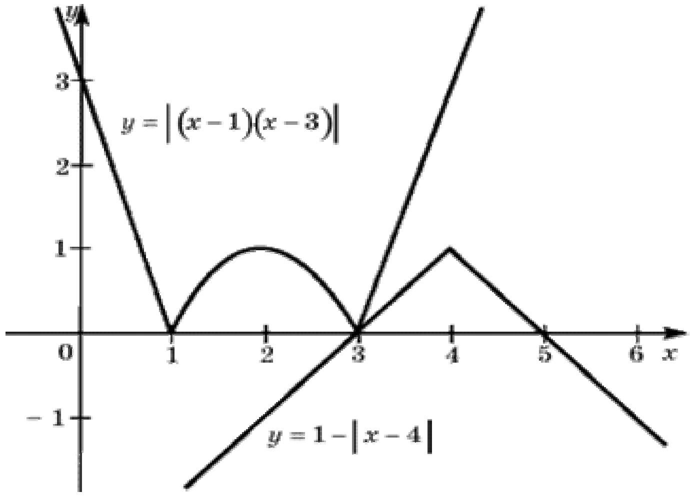


Рис. 1

(3;0) – точка пересечения графиков функций. Значит, x=3 – корень уравнения.

Библиографический список

1. *Болтянский, В.Г.* Векторы в курсе геометрии средней школы [Текст]: пособие для учителей / В.Г. Болтянский. – М.: Учпедгиз, 1962. – 96 с.
2. *Дорофеев, Г.В.* О принципах отбора содержания школьного математического образования [Текст] / Г.В. Дорофеев // Математика в школе. – 1990. – № 6. – С. 2-5.
3. *Дорофеев, Г.В.* О составлении циклов взаимосвязанных задач [Текст] / Г.В. Дорофеев // Математика в школе. – 1983. – № 6. – С. 34-39.
4. *Епишева, О.Б.* Технология обучения математике на основе деятельностного подхода [Текст] / О.Б. Епишева. – М.: Просвещение, 2003. – 223 с.
5. *Ковалева, Г.И.* Формирование у старшеклассников интереса к самосознанию в процессе решения учебных задач [Текст]: дис... канд. пед. наук: 13.00.02 / Ковалева Галина Ивановна. – Волгоград, 1998.
6. *Орлянская, О.Н.* Методика формирования у будущих учителей математики умения конструировать системы задач [Текст]: дис... канд. пед. наук: 13.00.02 / Орлянская Ольга Николаевна. – Волгоград, 2004.
7. *Саранцев, Г.И.* Упражнения в обучении математике [Текст] / Г.И. Саранцев. – 2-е изд., дораб. – М.: Просвещение, 2005. – 225 с.

Проблемы и возможности числовой содержательно-методической линии в средней школе

О.В. Белая, М.В. Поспелов

Настоящая статья посвящена вопросу совершенствования методики изучения математического материала, связанного с формированием понятия числа и развитием соответствующих умений и навыков. Актуальность данной темы на наш взгляд чрезвычайно возросла в настоящее время в связи с очевидным ухудшением качества знаний, приобретаемых учащимися средней школы по темам числовой содержательно-методической линии. Следует отметить, что вопрос настолько важен, что иногда обсуждение **именно этого** вопроса ведется на самом высоком уровне и приобретает формы эмоциональные, тяготеющие к обобщениям (см., например, [1]).

Прежде всего, стоит обсудить причины упадка заглавной линии. С нашей точки зрения, они группируются в три блока, каждый из которых можно условно считать одной составной причиной.

Во-первых, назовем неочевидную, но важную и крайне труднопреодолимую причину. Дело в том, что материал числовой линии традиционно поддерживался рядом сторонних предметов. Таковыми, например, являлись физика, химия, черчение и другие учебные дисциплины средней школы: использование всевозможных измерений, поиск пропорций и прочих количественных соотношений и т.д. способствовали развитию представлений о количественной ипостаси числа. В сегодняшних условиях изучение, например, физики все больше приобретает описательный характер, уровень и количество решаемых учебных задач с числовыми вычислениями от года к году уменьшается. Причины этого процесса вполне понятны и естественны, что еще больше осложняет ситуацию. Наличие этой тенденции приводит нас к вопросу о **замене** роли, которую прежде играли сторонние учебные дисциплины в формировании и развитии элементов числовой содержательной линии какими-то новыми методическими решениями.

Во-вторых, имеются существенные причины и в самом учебном предмете математики. Дело в том, что в современных условиях материал ряда содержательных линий школьной математики существенно расширяется. Так, например, в значительной степени расширился материал линии вычислимости, которая формирует представление об алгоритмах, закономерностях вычислительного процесса, вычислительной сложности. Такое расширение выглядит вполне естественным в свете строительства информационного общества. Более того, нельзя не согласиться, что развитие этих представлений должно являться задачей именно учебной дисциплины математики, так как перенос этого материала в учебный предмет информатики привел бы к существенным методическим трудностям. Этот пример наиболее показателен, но не единичен: определенному расширению изучаемого материала подвержены также алгебраическая, функциональная и ряд других содержательных линий. На фоне общего сокращения учебного времени расширение материала перечисленных линий оказывает существенное негативное влияние на результаты обучения. Кроме того, в последние годы в курсе математики появились и новые содержательно-методические линии. Таковы, например, линии элементов математической статистики и дискретной математики. Не будем останавливаться на целесообразности и значимости новых линий для учебного предмета математики в целом: они очевидны. Однако отметим, что в этой ситуации важно не только то, что изучение новых содержательных линий требует дополнительного учебного времени, но и то, что материал этих линий существенно разнится с материалом других линий. Таким образом, наблюдается смысловая перегруженность, которая также способствует ухудшению результатов реализации числовой содержательной линии.

В-третьих, в последние десятилетия реализация числовой содержательной линии сталкивается с трудностями, связанными с распространением вычислительной техники. Природа этих трудностей состоит в том, что многие учебные действия изменяют свои дидактические свойства, например, при использовании учащимися калькуляторов, вместо применения навыков устного счета и других вычислительных умений. Имеет место также значительная просадка мотивационной базы: учащиеся все чаще отказываются видеть практическую пользу наработки вычислительных умений. В сочетании с уже упоминавшимся развитием материала линии вычислимости эти эффекты еще более усугубляются. Эта последняя причина старше двух предыдущих и повседневная школьная практика в большей степени адаптировалась к ней. Однако на сегодняшний день и ее вклад в размывание числовой линии значим.

Такое положение вещей ставит перед нами вопрос о целесообразности сохранения числовой содержательно-методической линии в курсе средней школы как таковой. Действительно, отдельные содержательные элементы линии могли бы найти себе место в разных частях школьной учебной программы математики, а некоторые вообще бы могли быть перенесены в информатику. Таковы, например, алгоритмы умножения и деления десятичных дробей. Такая идея выглядит привлекательной как в свете расширения содержания учебного предмета математики, так и в связи с поиском новых форм организации обучения информатике. Тем не менее, на наш взгляд имеются серьезные аргументы в пользу сохранения числовой содержательно-методической линии, в качестве единой и самостоятельной дидактической единицы. Перечислим главные из них.

На первое место можно поставить возможности реорганизации материала линии, которые позволят поддержать материал новых содержательных линий курса математики, таким образом, разгрузят новые разделы. В качестве примера можно привести понятие случайной величины, которую можно осмысливать как расширение понятия числа. Общий замысел соответствующего методического решения может сводиться к переносу усилий по развитию понятия случайной величины в лоно числовой линии. При этом значительная часть материала разделов теории вероятностей и математической статистики должна сопрягаться с элементами числовой линии. Ясно, что реализация этого замысла приведет к продлению числовой содержательной линии до самого завершения программы средней школы. В современных условиях это кажется целесообразным: при невозможности сосредоточить в направлении развития числовой тематики те же что и раньше методические усилия на этапе 5-7 классов можно равномерно распределить эти усилия от 5-го до 9-го или даже 11-го класса. Мы видим в этом дополнительные преимущества, заключающиеся в том, что попутно можно было бы поддержать материалом числовой линии и другие развивающиеся разделы школьной математики. Кроме того, создается благоприятная возможность для поддержки части материала линий лабораторным практикумом в компьютерном классе.

На втором месте как раз аргументация, связанная с взаимодействием учебных предметов математики и информатики. Дело в том, что алгоритмы числовой линии часто представляют собой идеальный материал для учебных заданий по некоторым разделам информатики (например, программирования). Хотя в большей степени это касается алгоритмов обработки целых чисел (алгоритм Евклида, алгоритм проверки числа на простоту и др.), ценность для информатики представляют и алгоритмы обработки рациональных чисел, моделирование алгебраических чисел и так далее. Стоит обратить внимание, что значимость этого аргумента дополнительно возрастает в связи со сделанными замечаниями по поводу понятия случайной величины. Кроме того, возникает эффект обратной связи: числовая линия получает поддержку со стороны информатики.

Наконец, на третьем месте в пользу сохранения числовой содержательно-методической линии можно привести аргументы, относящиеся к общекультурным изменениям. В связи со строительством информационного общества и сопутствующей тенденцией культурного освоения информационных технологий высокую значимость приобретают знания в области теории целого числа. Это важно как для понимания основ построения протоколов обмена информацией, которое становится сегодня необходимым условием комфортной социальной адаптации, так и для создания первоначальных условий для будущего профессионального образования. По мере не снижающего темпов роста потребности общества в профессионалах информационного обмена возрастает и потребность в расширении кадрового ресурса, по-видимому, в своей основе должного охватить уже все общество.

Приведенные аргументы склоняют нас к положительному ответу на вопрос о сохранении числовой содержательно-методической линии в программе математики средней школы. Можно лишь говорить о значимости этой линии для дисциплины в целом. Неясно, сохранится ли за ней традиционная основообразующая роль, однако, опираясь на сделанные замечания, можно предположить, что реорганизация линии позволит эту роль за ней оставить. Указывает на это и практика развития линии: современные школьные учебники обнаруживают массу находок в деле "настройки" традиционной числовой линии, позволяющей последней оставаться основой школьной математики как предмета (см., например, [2]). При этом обоснование этих перемен, как правило, опирается на выверенную, надежную научно-методическую основу (см. [3]). Тем более логичной должна выглядеть делаемая нами ниже попытка наметить предложения по реорганизации числовой содержательно-методической линии. Мы попытаемся сформулировать несколько основных положений, исходя из следующих предположений:

1. Числовая содержательно-методическая линия остается основой построения предмета школьной математики.

2. Числовая содержательно-методическая линия в современных условиях должна охватывать все классы средней школы, в большей степени распределяя материал от первого до выпускного класса.

3. Реорганизованная числовая содержательно-методическая линия должна реализовывать все три группы возможностей, перечисленные нами при аргументации ее сохранения.

Опираясь на эти предположения, можно приступить к формулировке основных положений реорганизации линии.

Интеграция в линию всех близких ей разделов.

На наш взгляд, правильным решением является встраивание в числовую линию всех разделов предмета школьной математики, тяготеющих к понятию числа. Выше уже приводился пример новой содержательной линии (линии математической статистики), в основе которой лежит понятие случайной величины. Обладая свойствами, не присущими числу, случайная величина, тем не менее, может быть введена как обобщение понятия числа. По всей видимости, включение соответствующих разделов в числовую линию на возможно более ранних этапах могло бы стать основой систематической координации линий. В качестве непосредственных последствий такого решения видятся "омоложение" в школьной программе понятий о средних величинах и расширение этого материала, смещение акцента при формировании представлений о случайной величине в сторону операций со случайными величинами и другие. Отметим, что пример элементов теории вероятностей и математической статистики показателен, но не единичен. Есть и другие удобные для встраивания в числовую линию разделы, которые смогут обеспечить координацию материала с другими содержательными линиями.

Поддержка линии лабораторным практикумом за компьютерами.

Сегодня мы видим возможность использования вычислительной техники для решения проблемы, которая в прошлом возникла во многом именно благодаря развитию и распространению этой техники. Наглядная реализация алгоритмов операций над числами позволит обеспечить понимание смысла этих алгоритмов. Возможно, следует вовсе отказаться от формирования, например, навыка применения строкового алгоритма умножения десятичных дробей, оставляя этот алгоритм на уровне осмысленного умения. Таким образом, вместо отработки операции, в современной бытовой практике **всегда** выполняемой вычислительными приборами, мы получим базу для изучения строковых алгоритмов и знания о свойствах умножения десятичных дробей, вытекающие из свойств алгоритма умножения.

Соответствующий лабораторный практикум видится нам сегментированным и неоднородным. Кроме реализации определенных алгоритмов (которую сегодня можно считать самой эффективной формой поддержки математики лабораторным практикумом) компьютерная поддержка числовой линии может осуществляться и в других формах. При этом стоит заметить, что эффективность этих демонстрационных, моделирующих, информирующих и других дидактических информационных технологий дополнительно повышается при согласованно организованном лабораторном практикуме.

Как уже подчеркивалось выше, согласование материала учебных предметов математики и информатики создаст более выгодные условия для обмена материалом. В частности, можно даже ставить вопрос и о переносе строковых алгоритмов операций над десятичными дробями в материал информатики.

Перераспределение акцентов в формировании понятия числа.

Нам представляется, что акценты при формировании понятия числа должны сместиться от рациональных чисел к целым и от алгебраических чисел к вещественным и комплексным. Повседневная педагогическая практика свидетельствует о том, что при возможности углубления материала предмета почти всегда выбор делается в пользу теории целого числа для предпрофильного этапа и комплексных чисел – для профильного. В современных методических комплектах по алгебре комплексные числа появляются уже в 8 классе (хотя соответствующие им урочные серии учителями часто не организуются). В качестве занимательных задач, задач повышенной трудности, в современные школьные учебники обязательно входят задачи на делимость, использование числовых инвариантов и другие.

Эти свидетельства в пользу развития разделов теории целого числа и комплексных чисел приводят к мысли об адаптации этих разделов к числовой линии и, более того, придании целому числу особой роли кульминации всей линии. Выше уже отмечалось, что такая реорганизация желательна в свете общекультурных и хозяйственных изменений в жизни современного общества. Возможности же для этой реорганизации очевидно есть.

Последствия таких изменений с трудом поддаются прогнозированию, так как многое еще неясно и зависит от результатов эксперимента. Однако ясно, например, что меньшую роль будет играть понятие числовой оси, но сравнение чисел (во многом ранее с числовой осью связанное), напротив, приобретет большую значимость и, соответственно, укрепит свои позиции в системе учебных заданий. Умения действий с дробями будут перенесены на более поздние этапы обучения (это, кстати, наблюдается уже сегодня). Вероятно появление в числовой линии и конструктивных чисел (тех, каждая цифра в десятичном представлении которых может быть вычислена с помощью некоторого алгоритма).

Возможны и другие последствия реорганизации числовой линии, предсказать которые пока не представляется возможным. Заканчивая это предварительное изложение подчеркнем, что находимся еще даже не в начале пути, а в процессе поиска этого начала. Предстоит систематизация материала по накапливающимся изменениям в реализации числовой содержательно-методической линии школьной математики и принятие решения по первому этапу экспериментального исследования, который и определит точное первоначальное направление дальнейшего поиска.

Библиографический список

1. *Арнольд, В.И.* Нужна ли в школе математика? [Текст] / В.И. Арнольд. – М.: МЦНМО, 2001.
2. *Зубарева, И.И.* Математика. 5-6 кл. [Текст]: метод. пособие для учителя / А.Г. Мордкович, И.И. Зубарева. – М.: Мнемозина, 2005.
3. *Зубарева, И.И.* Изучение числовой линии курса математики основной школы [Текст] / И.И. Зубарева // Материалы XXVII Всерос. семинара преподавателей математики ун-тов и педвузов “Проблемы многоуровневой подготовки учителей математики для современной школы” – Пермь: ПГПУ, 2008. – С. 188-189.

Особенности организации самостоятельной работы студентов по математике с позиций вариативного обучения

А.А. Савадова

Образование должно обеспечить не только полноценное личностное, социальное, культурное развитие обучающегося, но и готовность к дальнейшему развитию или к самообразованию. Этот компонент образования особенно важен, поскольку каждый человек должен уметь самостоятельно оценивать себя, самостоятельно принимать решения, определять содержание своей деятельности и находить средства ее реализации. Поэтому в настоящее время актуальны вопросы, связанные с такой организацией процесса обучения, который обеспечивал бы возможность и готовность осуществлять непрерывное образование.

Новые стандарты образования требуют пересмотра устоявшихся подходов к обучению, посредством которых невозможно подготовить будущих специалистов, отвечающих указанным требованиям. Современная педагогика считает формирование умений и навыков самообразования высшим этапом обучения и одним из необходимых условий осуществления непрерывного образования, в основе которого лежит процесс самообучения.

Между обучением и самообучением как соответственно средством и компонентом саморазвития личности существует определенная связь: проявляя активность и прилагая усилия, человек обучает себя при участии других людей. По мнению специалистов, в процессе развития самосознания в юношеском возрасте происходит формирование самостоятельности в такой степени, которая порождает новое отношение к себе и к своей деятельности, побуждая личность к саморазвитию. Осознавая свои потребности и возможности, человек стремится реализовать их в познавательной деятельности и переходит от обучения к самообучению. Они существенно отличаются друг от друга: первое - это средство формирования второго, а второе - продукт, результат первого. Обучение характеризуется взаимодействием педагога и учащегося. В самообучении человек – и субъект, и объект деятельности, что вызывает активную рефлексию и определяет своеобразие этапов этой деятельности. К ним относятся внутренняя потребность в самообучении, собственное целеполагание, самоорганизация познавательной деятельности. Собственное целеполагание, характерное для самообучающегося, обеспечивает значительно большую продуктивность его деятельности. В обучении преподаватель организует и проводит процесс учения, выбирая средства и способы деятельности обучающегося, определяя порядок его взаимодействия с другими людьми. Самообучающийся же сам организует, регулирует и контролирует свой познавательный труд, а способы его деятельности индивидуализированы в соответствии с его личностными особенностями [2]. Таким образом, пространство образования превращается в пространство выбора, а процесс обучения приобретает черты "вариативности", которая предполагает: признание разнообразия содержания, форм и методов обучения с учетом целей развития каждого участника педагогического процесса и осуществление в связи с этим его педагогической поддержки; использование в процессе обучения не однотипных моделей, равных для всех, а различных, зависящих от индивидуальных особенностей обучаемых, сформировавшихся в ходе приобретения ими личного опыта, построение так называемой индивидуальной траектории; неограниченное использование образовательных ресурсов для достижения индивидуальных целей обучения каждого студента.

Студент, умеющий организовать самообучение, благодаря выработанной им способности к целеполаганию, сам ставит перед собой цель и стремится к ее достижению, приобретая теоретические знания, овладевая навыками и приемами осуществления профессиональной деятельности, развивая необходимые профессиональные и личностные качества, умения, способности. Познавательная мотивация, лежащая в основе самообучения, становится исходным моментом развития профессиональной мотивации и направленности личности будущего специалиста.

Возможности для перехода к самообучению возникают в процессе организации познавательной деятельности, которая преследует двуединую цель: формирование самостоятельности как черты личности и развитие способностей, умений, приобретение знаний и навыков.

В основу конструирования самостоятельной работы студентов должны быть положены шесть взаимосвязанных и обусловливающих друг друга принципов: приоритетное внимание к мотивационному обеспечению процесса обучения и самообучения; опора на процессы саморазвития и индивидуализация обучения; постепенное расширение сферы самостоятельности обучающихся и уменьшение доли педагогического руководства ими; обучение рациональным способам учебной деятельности и самостоятельного приобретения знаний; ориентация на творчество в учении и познании; активизация совместной деятельности обучающихся. Определяющее условие реализации этих принципов – пробуждение субъектности в каждом участнике образовательного процесса.

В процессе профессиональной деятельности выпускникам придется работать в постоянно меняющихся условиях и решать сложные задачи с высоким уровнем неопределенности. Студенты должны уметь ставить профессиональные задачи и разрабатывать пути их решения, находить и обрабатывать необходимую информацию, корректировать свою деятельность по мере изменения ситуации, а также самостоятельно повышать образовательный и профессиональный уровень в течение всей жизни. Другими словами, целью современного образования является не только обеспечение будущего специалиста базовой информацией, но и:

– развитие его способности к логическому и алгоритмическому мышлению;

– развитие творческой инициативы;

– формирование навыков использования полученной информации для решения практических задач, обучение приемам исследования;

– развитие умения анализировать частные явления и находить общие закономерности;

– расширение и углубление знаний в области теоретических основ изучаемых дисциплин;

– обучение приемам автоматизации расчетных задач и изучение математических методов в их компьютерной реализации (подход к математическим расчетам в настоящее время коренным образом изменился, и специалист, не умеющий применять математические методы на компьютере, уже не является специалистом современного уровня);

– формирование представления о необходимости самостоятельного получения новой, причем не обязательно узкоспециальной информации в течение всего периода профессиональной деятельности;

– формирование навыка самостоятельной учебно-исследовательской и научно-исследовательской работы;

– обучение приемам работы со справочно-информационными изданиями по подбору литературы по заданной теме;

– формирование навыков грамотного изложения результатов исследований, способности аргументировано защищать и обосновывать полученные результаты.

Чтобы подготовить себя к такой работе, обучающимся важно приобрести опыт самостоятельного решения исследовательских задач, для чего необходима организация самостоятельной поисковой деятельности студентов. Поэтому уже с первых дней обучения в вузе актуальной становится самостоятельная работа студентов. Студент должен изучить курс математики в нужном объеме независимо от количества прослушанных лекций и аудиторных занятий. А для этого он конкретно должен получить задание и иметь план для самостоятельного овладения определенными разделами математики, то есть иметь так называемую индивидуальную образовательную траекторию, подразумевающую содержательный компонент и разработанный способ его реализации.

В современной педагогической мысли делается акцент на активные формы учебно-педагогического процесса – взаимодействие, сотрудничество преподавателя и студентов, а также самих обучающихся друг с другом.

Само по себе обучение (приобретение студентом знаний, умений, навыков) еще не означает развитие. Овладение знаниями должно быть организовано так, чтобы вносить новые элементы в деятельность, формировать новое отношение обучающегося к этой деятельности и тем самым обеспечить развитие. Возникает вопрос, как следует управлять учебным процессом, чтобы обеспечить осмысленное стремление к процессу познания и как осуществить контроль знаний.

В современных условиях вариативности, дифференцированности и стандартизации образования важным средством методического обеспечения учебного процесса в единстве целей, содержания, дидактических процессов и организационных форм становится учебно-методический комплекс (УМК) той или иной дисциплины. Учебно-методический комплекс является эффективным пособием как для изучения студентами учебных дисциплин, так и проведения самостоятельной работы. В этом случае учебный модуль, выступающий как структурная единица данного УМК, одновременно является: 1) целевой программой *действий студента*, 2) банком информации, 3) методическим руководством по достижению учебных целей и 4) формой самоконтроля знаний студента и их возможной коррекции. Функционально УМК представляет модельное описание педагогической системы:

– выступает в качестве инструмента системно-методического обеспечения учебного процесса по взятой дисциплине, его предварительного проектирования (в этом заключается его главная функция);

– объединяет в единое целое различные дидактические средства обучения, подчиняя их целям обучения и воспитания;

– не только фиксирует, но и раскрывает (развертывает) требования к содержанию изучаемой дисциплины, к умениям и навыкам выпускников, содержащиеся в образовательном стандарте, и тем самым способствует его реализации;

– служит накоплению новых знаний, новаторских идей и разработок, стимулирует развитие творческого потенциала педагога [1].

Можно сказать, что УМК – это специально сконструированное дидактическое средство, способное организационно и содержательно влиять на управляемую (контролируемую) самостоятельную работу студента и его самоорганизацию и самообучение, т.е. осуществлять процесс учения. Таким образом, УМК – это дидактическое средство, призванное и способное реализовать один из фундаментальных принципов дидактики, заключающийся в том, что самостоятельная работа студентов необходимо предполагает собственную учебно-познавательную и учебно-практическую деятельность (управляемую, самоуправляемую), только в результате которой студент (обучаемый) и способен чему-то научиться, усвоить знания, освоить ту или иную практическую деятельность. Грамотно составленный УМК позволяет: четко определять конкретные цели и задачи изучения курса математики, круг знаний и навыков, приобретаемых в процессе обучения; обеспечивать гибкость, динамичность и разноуровневость процесса обучения; индивидуализировать работу со студентами; гарантировать получение базовых знаний в объеме, необходимом для формирования у обучаемого общенаучных и методологических основ по самостоятельному приобретению новых знаний; эффективно организовывать самостоятельную, учебно-исследовательскую и научно-исследовательскую работу студентов; осуществлять профессиональную направленность преподавания математики; обеспечивать преемственность этапов обучения; прививать навыки пользователей вычислительной техники; использовать унифицированную систему контроля знаний и умений.

Еще одним видом индивидуальной самостоятельной работы студентов, выполняемой при методическом руководстве преподавателя, могут быть творческие задания, связанные с чтением математической литературы и ее анализом, а также составление такого математического рассказа, который был бы понятен и доступен, к примеру, другим студентам. Можно попросить студента делать минимум записей во время лекции, например, фиксировать только формулировки теорем, необходимые чертежи и рисунки, поясняющие смысл этих теорем. Идеи доказательства теорем будут поняты студентом, если он внимательно следит за логикой рассуждений лектора. Он слушает преподавателя, отвечает на его вопросы, думает, анализирует и разбирается в новом материале. Это раскрепощает студента. Слушать и одновременно вести записи, особенно на младших курсах, умеют лишь некоторые студенты. Большинство же, записывая что-то за лектором, теряют нить рассуждений, пропускают отдельные важные моменты и не получают единой целостной картины. Но после занятия студент должен сделать более подробный конспект прослушанной лекции. Это и есть его самостоятельная творческая работа. При этом он должен использовать для сравнения указанную на лекции учебную и методическую литературу. В этом ему поможет умение читать и анализировать математический текст. После выполнения такого индивидуального задания можно проводить коллоквиум. Коллоквиум позволяет диагностировать усвоение нового материала, активизирует студентов и может быть рекомендован как одна из наиболее действенных форм обратной связи. Примечательно, что если у студента на лекции главной целью является подробный конспект, то на коллоквиуме он делает много смысловых ошибок. Он просто воспроизводит конспект лекции, не понимая смысл рассматриваемых вопросов. Таким образом, рассматриваемая индивидуальная самостоятельная работа будет направлена на самостоятельный поиск знаний и на то, чтобы студент умел слушать любую информацию, умел читать и анализировать учебную, методическую и научную литературу, приобрел навыки написания конспекта после прослушивания нового материала.

По некоторым важным темам можно предусмотреть защиту типового расчета в форме беседы преподавателя со студентом о ходе решения задач и обосновании выбора способа решения с обсуждением теоретических вопросов.

Студентам с высоким познавательным потенциалом могут быть интересны такие формы учебной работы, как студенческая конференция, конкурс студенческих работ, где необходимо предъявить результаты своих самостоятельных исследований. Выполнение учебно-исследовательской работы студентов требует от них высокой степени самостоятельности и познавательной активности. Учебные исследования способствуют развитию умения вести научный поиск, формированию аналитического мышления, пробуждению интереса к науке, углублению межпредметных связей, а также дают студентам возможность отразить опыт, приобретенный ими в различных областях науки и практики.

При изучении математики в вузе ряд ее разделов, не обязательно сложных, остается вне поля зрения студентов. Это происходит по разным причинам, но очевидно, что попытка решить задачи по таким разделам чаще всего обречена на неудачу, ведь студент впервые встречается с новыми понятиями. Конечно, если студент постоянно занят самообразованием, то этот недостаток устраним, тем более, если самостоятельную работу сопроводить необходимыми указаниями. Однако необходимость закрепления основного материала большинством студентов оставляет преподавателю не так много времени для углубленного изучения рассматриваемых тем, а также для решения сложных и оригинальных задач. Эти проблемы решаются в рамках специального кружка, где есть возможность дать сведения об отдельных понятиях, теоремах, методах, лишь частично затрагиваемых программой или вообще в нее не входящих, а также направить студента на глубокое осмысление, анализ, оценку, сравнение, систематизацию знаний, получение обоснованных выводов. Кружковая работа продолжает линию, начатую на лекциях, практических занятиях и консультациях по целенаправленному получению студентом глубоких фундаментальных знаний по частично самостоятельно разрабатываемой им программе и в индивидуальном темпе.

Самостоятельная работа студентов – одно из средств обеспечения вариативности процесса обучения в вузе. Индивидуальный план самостоятельной работы по математике, а также совместная деятельность педагогов и студентов в режиме интерактивного общения, сконструированные и организуемые с целью реализации личностно ориентированной педагогической деятельности, усиливают познавательную и социальную мотивацию студентов, существенно повышают эффективность и качество их математического образования.

Библиографический список

1. *Макаров, А.В.* Учебно-методический комплекс: модульная технология разработки [Текст]: учебно-метод. пособие / А.В. Макаров, З.П. Трофимова, В.С. Вязовкин, Ю.Ю. Гафарова. – Минск: РИВШ БГУ, 2001. – 118 с.
2. *Митрохина, С.В.* Развитие самостоятельной деятельности обучающихся при изучении математики в системе “общеобразовательная школа-вуз” [Текст]: дис. ... докт. пед. наук: 13.00.02 / Митрохина Светлана Васильевна. – Орел, 2009.

Особенности фундирования знаний при изучении курса геометрии

Н.Б. Яновская

В соответствии с учебным планом темы “Линейная алгебра. Векторная алгебра и аналитическая геометрия” составляют базовый раздел курса математики в первом учебном семестре, содержание которого образует учебный модуль, имеющий определенную логическую завершенность по отношению к установленным целями результатам обучения. Особое значение приобретает правильно смоделированная и развернутая во времени спираль фундирования вновь вводимых понятий, цель которой – создать позитивную познавательную основу для изучения следующих учебных разделов [1]. По существу изучение всего данного раздела основано на фундировании знаний, полученных в школьном курсе математики:

– понятие системы двух линейных уравнений (от системы двух уравнений с двумя неизвестными и двух способов определения неизвестных – подстановки и алгебраического сложения – переходим к системе трех и более уравнений и определению неизвестных одним из трех способов – по правилу Гаусса, методом Крамера или решением матричного уравнения);

– понятие прямой на плоскости (от основной формы записи уравнения прямой, связывающего угловой коэффициент прямой и величину отрезка, отсекаемого прямой на оси ординат, переходим к общему и нормальному уравнению прямой);

– понятие кривых второго порядка (от окружности и равнобочной гиперболы – графика взаимно-обратной зависимости между двумя переменными – переходим к кривым второго порядка – эллипсу, гиперболе и параболе);

– понятие поверхности второго порядка (от вычисления элементов шара и конуса переходим к уравнениям сферы и конической поверхности и добавляем еще семь поверхностей второго порядка);

– понятие вектора и произведения векторов (к скалярному произведению векторов добавляем векторное и векторно-скалярное произведение).

Создание соответствующих дидактических условий позволяет знаниям, полученным в средней школе, служить основой и структурообразующим фактором теоретических и практических знаний более высокого уровня, а каждому следующему слою фундирования обеспечивает совершенствование и углубление практических умений, основанных на теоретических знаниях. Степень развернутости процесса фундирования и различие в целеполагании каждого слоя фундирования определяют три компоненты процесса фундирования: глобальную, локальную и модульную [1].

В соответствии с поставленными целями обучения, определяющими структуру и способы формирования знаний, изучение раздела “Прямая и плоскость в пространстве” основано на глобальном фундировании, основными характеристиками которого являются:

– развернутость учебной деятельности во времени,

– наличие существенной обобщенной связи,

– наглядное моделирование структуры видовых проявлений каждого учебного элемента,

– существование спиралевидной модели видовых взаимосвязей, где начальное звено составляют знания за среднюю школу,

– обязательное теоретическое обобщение при методическом осмыслении начального звена,

– корреляция начального и конечного звеньев спирали.

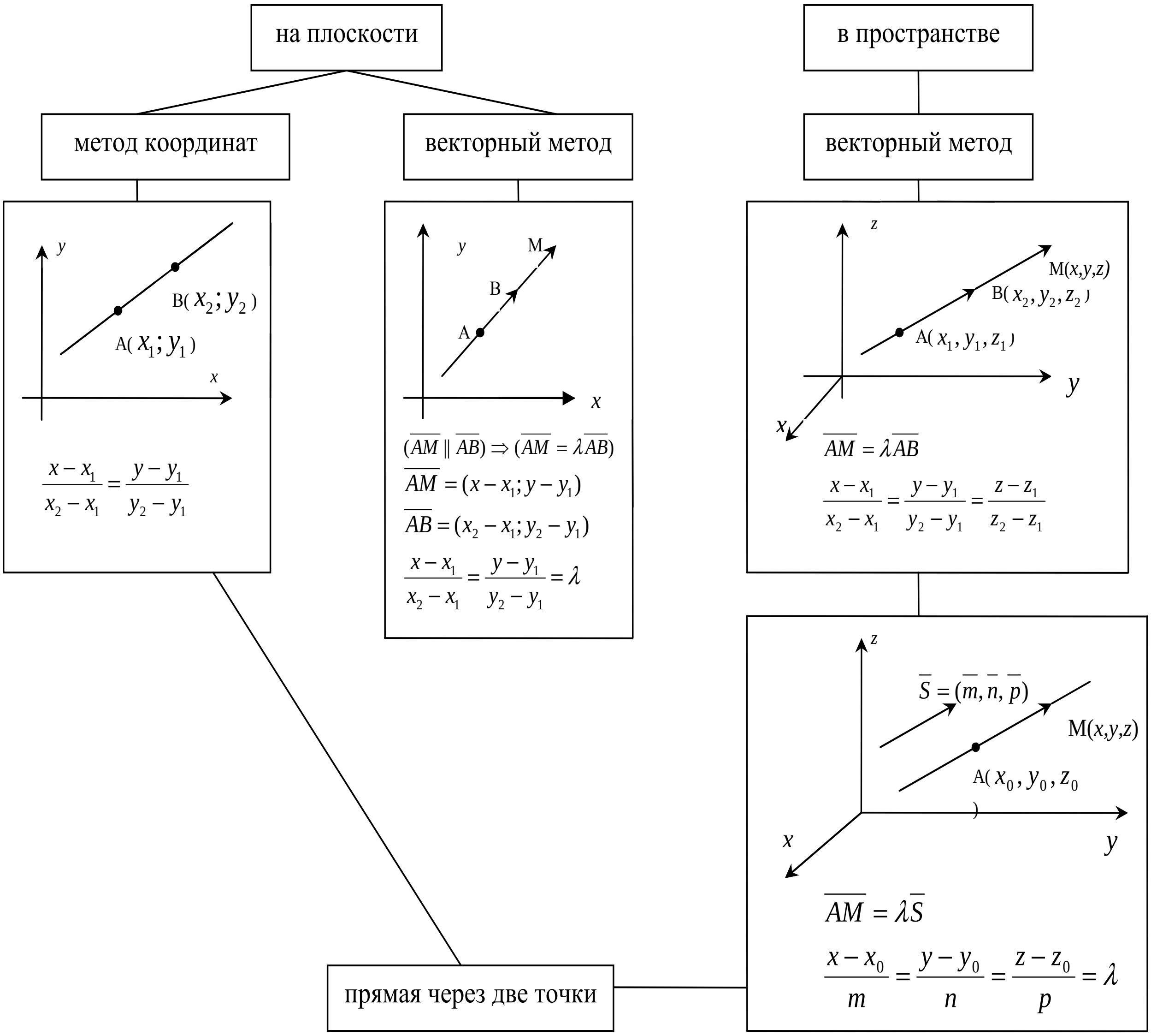


Рис. 1. Образование базовых понятий (фундирование) прямой линии на плоскости и в пространстве

Действительно, при изучении данной темы присутствуют все компоненты глобального фундирования. Развернутость учебной деятельности во времени обеспечена рабочими программами курса, предусматривающими достаточное большое время для изучения данного раздела. Существование обобщенной связи между известными и вновь вводимыми знаниями доказывает общий подход к изложению теоретического курса и к методу решения прикладных задач – на основе свойств векторов и векторных произведений. Подтверждение – схема образования базовых понятий прямой линии на плоскости и в пространстве (рис. 1) и схема образования базовых понятий прямой и плоскости (рис. 2).

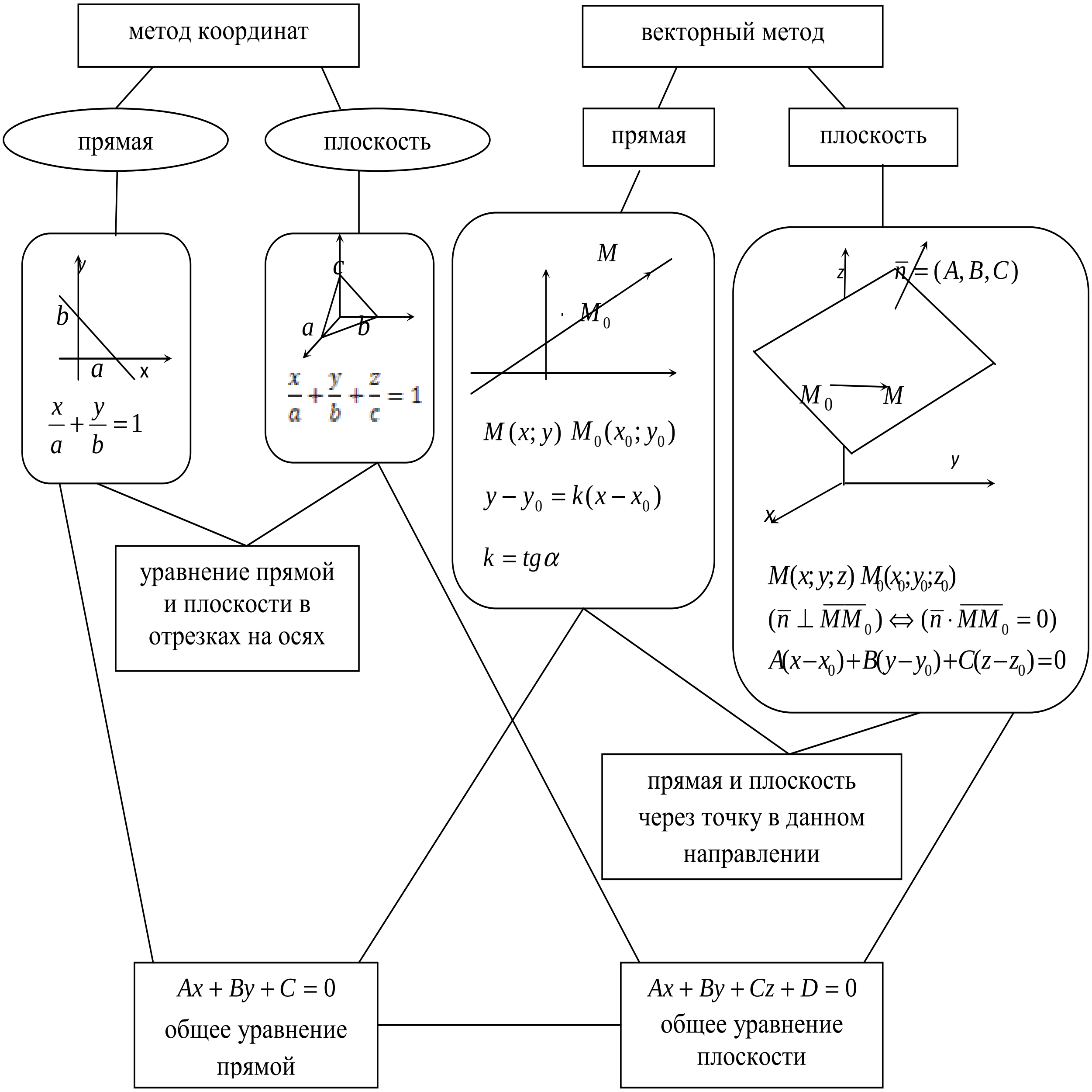


Рис. 2. Образование базовых понятий (фундирование) прямой и плоскости

Наглядное моделирование структуры видовых проявлений каждого учебного элемента присутствует как основной метод изложения учебного материала. Спиралевидная модель видовых взаимосвязей вновь вводимых понятий приведена на рис. 3:

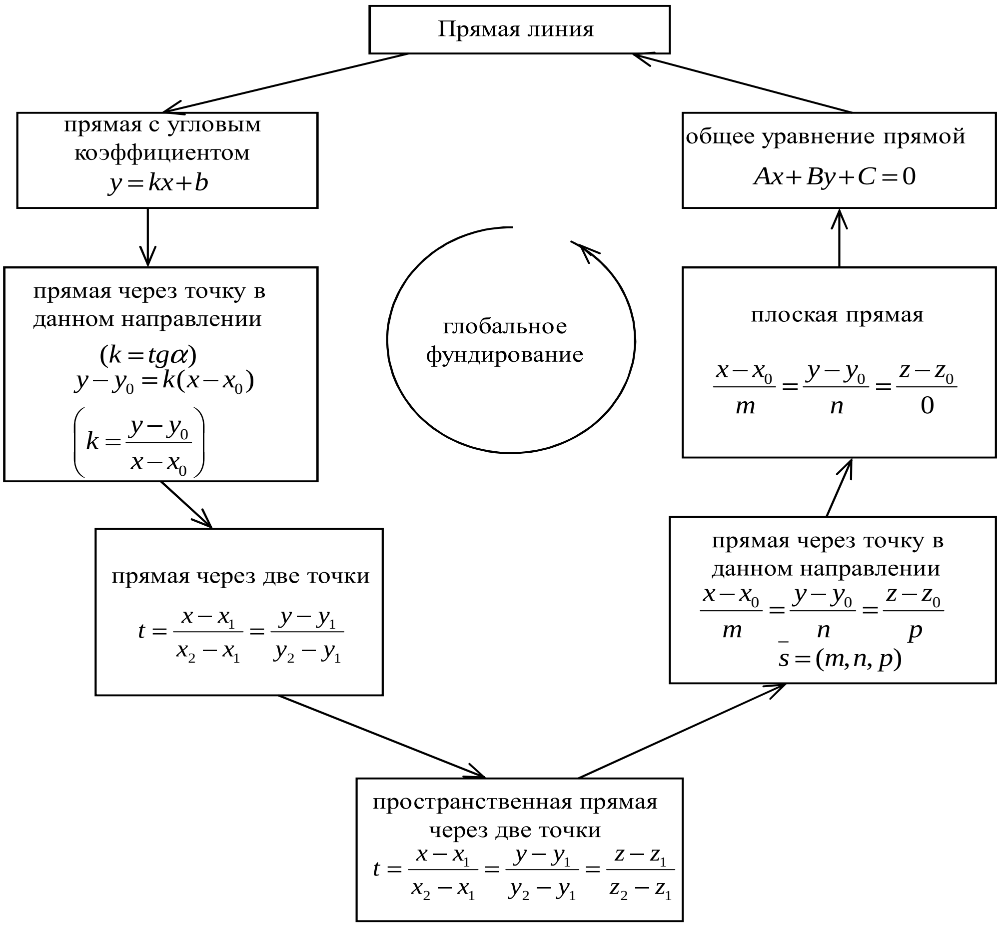


Рис. 3. Спираль фундирования понятия прямой линии

уравнение прямой с угловым коэффициентом (исходное понятие) – уравнение прямой, проходящей через две точки – уравнение прямой в пространстве – уравнение прямой в координатной плоскости xoy – общее уравнение прямой на плоскости – ее частный случай (уравнение прямой с угловым коэффициентом – исходное понятие). Изучение данного раздела основано на теоретическом обобщении начального звена фундирования, что становится возможным при координатно-векторном методе введения понятия прямой и плоскости в пространстве (рис. 4).

Положение прямой в пространстве определяет точка прямой и направляющий вектор (соответственно уравнение прямой содержит координаты точки и направляющего вектора), а положение плоскости определено точкой плоскости и нормальным вектором (соответственно уравнение плоскости содержит координаты точки и нормального вектора). Доказательством существования корреляции начального и конечного звеньев спирали фундирования знаний может служить определение угла между плоскими прямыми, основанное на использовании направляющих векторов пространственных прямых.

Действительно, известна формула определения угла между плоскими прямыми, заданными уравнениями с угловым коэффициентом $\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}$, где k_1 и k_2 – соответственно угловые коэффициенты прямых $y = k_1 x + b_1$ и $y = k_2 x + b_2$. Перейдем к записи уравнения прямой в пространстве (каноническим уравнениям прямой) $\frac{y - b_1}{k_1} = \frac{x}{1}$ и $\frac{y - b_2}{k_2} = \frac{x}{1}$, что равносильно $\frac{x}{1} = \frac{y - b_1}{k_1} = \frac{z}{0}$ и $\frac{x}{1} = \frac{y - b_2}{k_2} = \frac{z}{0}$, так как прямые расположены в плоскости xoy. Следовательно, направляющие векторы первой и второй прямой $\vec{s}_1 = (1; k_1; 0)$, $\vec{s}_2 = (1; k_2; 0)$, а угол между прямыми можно определить по формуле косинуса угла между направляющими векторами $\cos\varphi = \frac{\vec{s}_1 \vec{s}_2}{|\vec{s}_1| \cdot |\vec{s}_2|} = \frac{1 + k_1 \cdot k_2}{\sqrt{1 + k_1^2} \cdot \sqrt{1 + k_2^2}}$. Если использовать формулу курса тригонометрии $1 + \operatorname{tg}^2\varphi = \frac{1}{\cos^2\varphi =}$, то получим исходную формулу определения угла между плоскими прямыми, что доказывает: угол между плоскими прямыми можно определять по формуле определения угла между пространственными прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности плоских прямых (соответственно $k_1 = k_2$ и $k_1 k_2 = -1$) также можно получить из условия коллинеарности и ортогональности направляющих векторов пространственных прямых $\frac{1}{1} = \frac{k_1}{k_2} \Rightarrow k_1 = k_2$ и $\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = 0 \Rightarrow 1 + k_1 k_2 = 0 \Rightarrow k_1 k_2 = -1$.

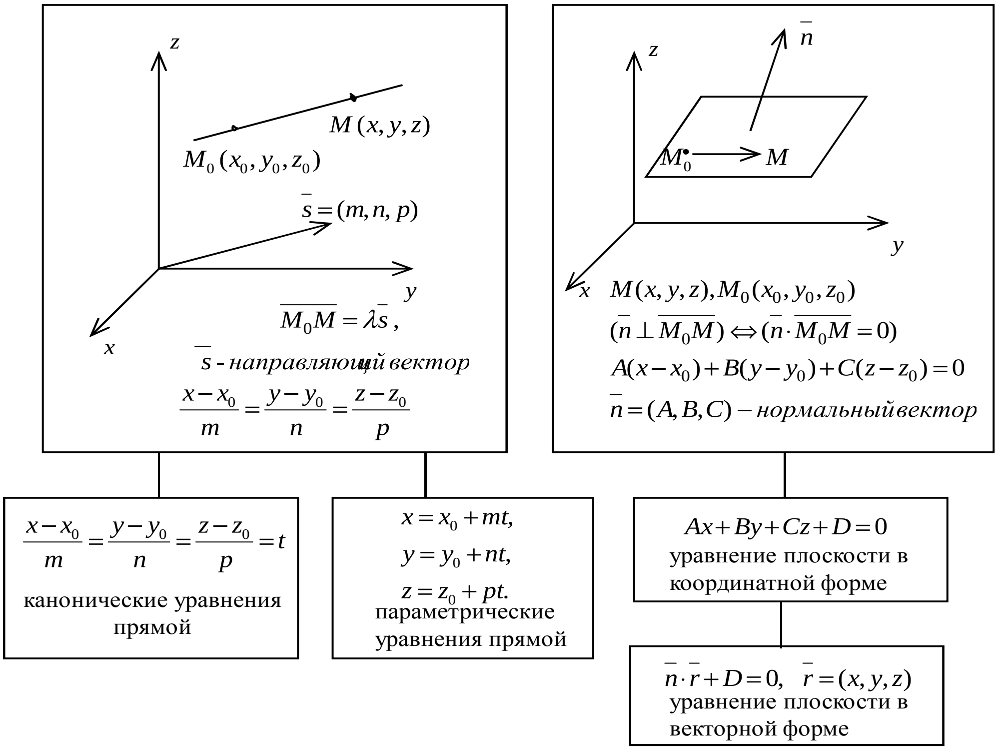


Рис. 4. Схема фундирования прямой и плоскости в пространстве

Изучение темы “Прямая и плоскость в пространстве”, основанное на векторном методе изложения, способствует формированию целостного представления о математических методах и о взаимосвязях общего и частного. Теоретический и практический материал настолько взаимосвязан (наличие обобщенной связи в структуре), что особого внимания требует последовательность его изложения: общее уравнение прямой $Ax+By+C=0$ (первая тема в разделе “Линейная алгебра”) объединяет все виды уравнений прямой на плоскости и одновременно определяет уравнение плоскости, параллельной оси oz (последняя тема в разделе “Аналитическая геометрия”); геометрическая интерпретация уравнения $Ax+By+Cz+Д=0$ (последняя тема в разделе “Аналитическая геометрия”) позволяет интерпретировать решение системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными (первая тема в разделе “Линейная алгебра”) как определение координат точки при пересечении трех плоскостей, так как коэффициенты при неизвестных в каждом линейном уравнении $ax+by+cz+d=0$ определяют координаты нормального вектора плоскости $(a; b; c)$. Основанное на фундировании знаний изучение данного раздела геометрии доказывает, что наглядно-модельный принцип является основным при обучении математике, а понятия множества и векторного пространства – основными понятиями геометрии, составляющими ее рабочий инструмент при решении задач и упражнений, выполняя дидактическую задачу обучения – теоретическое и практическое осмысление изучаемого материала. В данном случае фундирование необходимо понимать как процесс приобретения, освоения и преобразования имеющихся у студентов компетенций по математической подготовке в направлении постоянного углубления теоретических знаний и практических умений.

Изучение данного раздела основано на послойном фундировании знаний. Первый слой, цель которого – фундирование ближайшего видового обобщения методом наглядного моделирования, называемый профессиональным, состоит в широко применяемой геометрической интерпретации основных элементов данного раздела – точки, прямой и плоскости. Второй слой фундирования (собственно фундирование) представляет осуществление глубокого теоретического обобщения учебного материала, обеспечивающего переход от некоторого объекта в форму модели, что позволяет обнаружить в объекте свойства, первоначально не появляющиеся при непосредственном оперировании. Пример – решение систем линейных уравнений. Геометрическая интерпретация каждого линейного уравнения с тремя неизвестными позволяет осуществить общий подход к смыслу решения системы трех уравнений (в случае существования единственного решения – система совместна и определенна, существования бесчисленного множества решений – система неопределенна и отсутствия решения системы – система несовместна). В первом случае существует точка пересечения трех плоскостей, во втором – три плоскости пересекаются по прямой и в третьем – плоскости не имеют общих точек пересечения. Третий слой фундирования (технологический) определяет усвоение технологических приемов применения знаний и умений, то есть практическое закрепление теоретических знаний – приобретение практических умений и переход умений в навыки. Рассматривая фундирование как процесс не только приобретения и усвоения знаний, но и как процесс создания условий для интеграции базовых учебных элементов, в качестве которых в данном случае выступает векторно-координатный метод, необходимо признать, что главным в данном случае является создание педагогических условий для развития поисковой и творческой активности студентов. Для осуществления данной задачи необходимо использовать технологию обучения математике, основанную на самостоятельном конструировании условий задач и упражнений студентами с целью последующего решения и проверки полученного результата [2].

Библиографический список

1. Дидактический модуль по математическому анализу: Теория и практика [Текст]: учеб. пособие / под ред. Е.И. Смирнова. – Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2002. – 181 с.
2. *Яновская, Н.Б.* Активизация познавательной деятельности при обучении [Текст] / Н.Б. Яновская, Г.Б. Яновский // Университетское образование: X Международная научно-методическая конференция. – Пенза: ПГУ, 2006. – С. 271-273.

Обучение школьников построению математической модели задачи на основе анализа ее контекста

Н.М. Епифанова, Н.А. Меньшикова

В статье рассматривается ценный в научно-методическом отношении аспект методики работы учителя по формированию у школьников умений построения математической модели задачи, в частности задачи, не содержащей числовых данных. “Задачи без числовых данных – это задачи, в условиях которых не содержатся числа, или таковых очень мало” [4].

Многие задачи такого характера могут быть решены с полными вычислениями и могут приводить к числовым ответам. Подобные задачи рассматривали в своих работах С.И. Новоселов, Л.М. Лоповок, Д.С. Людмилов и др. Задачи такого типа наиболее трудны для восприятия учащимися.

Решение учащимися сюжетных задач, способствует развитию их логического мышления, формированию у них образов геометрических объектов, физических процессов, явлений из повседневной жизни, ибо любая сюжетная задача представляет собой знаковую модель некой реальной ситуации. Для учащихся неоценимым опытом является овладение приемами распознавания формальных характеристик образов, которые следует принять во внимание, чтобы решить задачу. В процессе решения задач учащиеся учатся “переводить на язык математики слова родного языка”, характеризующие данные объекты и отношения между ними (встретить, догнать, уменьшить, увеличить, после – раньше, наибольший, наименьший и др.), конструировать ее математическую модель.

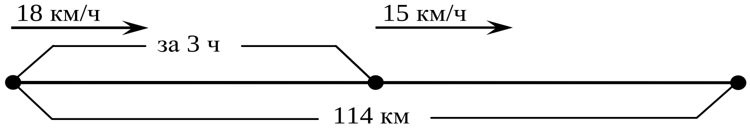
Использование моделирования в обучении имеет два аспекта:

– во-первых, моделирование является тем учебным действием и средством, без которого невозможно полноценное обучение;

– во-вторых, моделирование служит тем содержанием, которое должно быть усвоено учащимися в результате обучения, тем методом познания, которым они должны овладеть.

◦ Одним из видов учебного моделирования является обучение школьников схематическому представлению текста задачи с целью выявления и фиксации, существующих в сюжете особенностей и отношений. В качестве моделей выступают предметные и знаковые средства: схемы, чертежи, формулы, выражения.

Практика показывает, что немало затруднений возникает у учащихся при решении сюжетных задач на движение различных объектов. Как правило, при объяснении способов решения задач на равномерное движение для наглядности применяются схематические рисунки. Так, в тетради с печатной основой для 5 класса содержатся задания, для выполнения, которых ученику необходимо составить по приведенной схеме текст задачи и решить ее.



За какое время был пройден весь путь ?

Визуализация содержания задачи с помощью модели позволяет учащимся увидеть структуру скрытых в задаче математических отношений.

◦ Ведущее значение при обучении решению сюжетных задач приобретает овладение учащимися умением распознавания их математических моделей.

Для формирования этого умения учителем могут использоваться многокомпонентные задания на выявление сходства и отличия в сюжетах задач, на составление выражения, позволяющего выявить математические закономерности, а также на составление аналогичных сюжетов по заданному буквенному выражению.

1. Сравни задачи:

а) За три часа работы двигатель израсходовал 6 литров горючего. Механик налил в бак двигателя 16 литров горючего. Какое время сможет проработать двигатель с таким запасом горючего?	б) Чтобы сварить варенье из двух килограммов ягод, нужно 3 кг сахара. Хозяйка купила 5 кг ягод. Сколько сахара ей потребуется для того, чтобы сварить из этих ягод варенье?

Чем они похожи? Чем отличаются?

2. Реши обе задачи выражениями.

3. Если у тебя трудности с вычислениями, попробуй перейти к более удобным единицам измерения.

4. Сравни выражения, которые получились при решении задач. В чем основное различие между ними?

5. Составь задачу, которая решалась бы одним из таких выражений: $(k \div l) \cdot b$ или $c \div (m \div n)$.

Натуральные числа подбери самостоятельно.

(Первая задача решается с помощью выражения $t = 16 \div (\,6 \div 3\,)$, вторая задача – с помощью выражения $S = (\,3 \div 2\,) \cdot 5$. В пятом пункте задания аналогичные выражения представлены в общем виде.)

◦ Для более глубокого овладения учащимися приемами моделирования служат:

– задачи с “неверными” условиями;

– задачи с “неполным составом действий”.

Приведем примеры подобных задач.

1. Площадь квадрата равна 0,36 м^2. Одну его сторону увеличили вдвое, а другую уменьшили на 0,8 м. Какой станет площадь получившейся фигуры? (Сторона исходного квадрата составляет всего 0,6 м, а, кроме того, при подобных действиях форма фигуры может измениться и уже не будет являться квадратом).

2. Поезд состоит из цистерн, товарных вагонов и платформ. Цистерн в нем на 4 меньше, чем платформ, и на 8 меньше, чем товарных вагонов. Сколько цистерн, товарных вагонов и платформ содержится в поезде? (Не указано общее количество вагонов).

3. Зная угол ската двускатной крыши, вычислить, сколько примерно жести потребуется на ее покрытие. (Необходимо указать размеры крыши.)

◦ Другим важным направлением работы по формированию умений составлять математические модели является разработка сюжета по известной математической модели. Так, при изучении темы “Неравенства” с учащимися рассматривается задание: “Доказать неравенство $\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x-y} > \frac{2}{x}$ для положительных значений x и y”. Далее ученикам предлагается разработать сюжет, математической моделью которого являлось бы доказанное неравенство. Это могут быть, например, задачи со следующими сюжетами.

а) Самолет совершает рейс из города А в город В туда и обратно в ветреную погоду. Собственная скорость самолета x (км/ч), скорость ветра y (км/ч) и не меняет направления за все время рейса. Докажите, что в безветренную погоду при прочих равных условиях на весь рейс будет потрачено меньше времени.

б) Собственная скорость лодки составляет x (км/ч), скорость течения реки y (км/ч). Лодка прошла по реке S (км) туда и обратно, а затем по озеру такое же расстояние и вернулась назад. Докажите, что на движение по реке лодка затратила больше времени, чем на движение по озеру.

◦ Анализ содержания задачного материала школьных учебников свидетельствует, что обучение приемам моделирования происходит, в основном, на стандартных типовых задачах. Однако, в действующих школьных учебниках математики недостаточное внимание уделяется построению математических моделей задач, в тексте которых не содержится числовых данных или их мало (к таковым могут относиться как сюжетные, так и геометрические задачи). Следует заметить, что школьникам в задачах “без числовых данных” (недоопределенных и т.п.) заметить структуру математических соотношений значительно сложнее, нежели при решении задач с полными числовыми данными. Отчасти это объясняется не очень большим словарным запасом, неумением переносить полученные знания по другим школьным предметам в ситуацию математической задачи, противопоставлением математической задачи и житейской ситуации. Так, например, учащиеся затрудняются выявить математические соотношения в задачах с физическим содержанием, когда физическая закономерность не описана математическим языком. Характерной является, например, задача: “*Из пунктов А и В навстречу друг другу одновременно отправляются две машины. После встречи одной из них потребовалось на остальной путь столько часов, сколько у другой ушло на весь путь. Найдите отношение скоростей машин*”.

В первом издании учебника “Алгебра и начала анализа 10-11” под редакцией А.Н. Колмогорова в теме “Приложения производной” предлагалась классическая задача курса дифференциального исчисления “*Из круглого бревна вырезать балку наибольшей прочности*”. При такой трактовке условия задачи учащиеся испытывали большие затруднения в выявлении математических закономерностей, заложенных в задаче. Поэтому в последующих изданиях учебника данная задача была авторами конкретизирована: “*Из круглого бревна вырезают балку с прямоугольным сечением наибольшей площади. Найдите размеры сечения балки, если радиус сечения бревна равен 20 см.*”

Затруднения учащихся при построении аналитических моделей задач данного вида особенно наглядно проявляются при решении геометрических задач алгебраическим методом, а также в задачах на распознавание геометрических фигур; в задачах, "распадающихся" на несколько частных случаев. К ним относятся задачи вида:

– Найти углы равнобедренного треугольника, если известно, что прямая, проходящая через вершину угла при основании, делит его на два треугольника, каждый из которых является равнобедренным. (Ответ: 36°, 72°, 72°; $\left(25\frac{2}{7}\right)^\circ$, $\left(77\frac{1}{7}\right)^\circ$, $\left(77\frac{1}{7}\right)^\circ$).

– Все ребра пирамиды равны. Определите двугранный угол при ее основании.

(Боковые грани пирамиды – правильные треугольники. Следовательно плоские углы при ее вершине 60°, число таких плоских углов должно быть меньше 360:60=6. Тогда пирамида может быть треугольной, четырехугольной или пятиугольной. Рассмотреть каждый случай отдельно.)

– В цилиндр вписан шар. Найти отношение объема шара к объему цилиндра.

– Найдите отношение корней биквадратного уравнения, если известно, что они составляют геометрическую прогрессию.

◦ Рассматриваемая методическая проблема актуальна также и в связи с тем, что в контрольно-измерительных материалах Единого государственного экзамена по математике появляются задачи, проверяющие умения учащихся не только составлять модели, но и соотносить модель с текстом задачи и исследовать модель. Например, в заданиях B10 выпускник не только самостоятельно должен составить неравенство, являющееся моделью текстовой задачи, но и решив его, верно интерпретировать полученные результаты в рамках описываемой в задаче ситуации.

Рассмотрим задание из пособия по подготовке к ЕГЭ 2011 года.

Высота, на которой находится камень, брошенный с земли вертикально вверх, меняется по закону $h(t) = 2 + 14t - 5t^2$. *Сколько секунд камень будет находиться на высоте более 10 метров?*

Решая данную задачу, ученик должен не только найти границы промежутка, являющегося решением неравенства, составленного по данным задачи, но и найти длину этого промежутка, чтобы ответить на основной поставленный вопрос.

Приведенные выше примеры показывают, что в методике обучения школьников методам решения текстовых задач до сих пор имеются еще недостаточно разработанные области. С нашей точки зрения, необходимо большее внимание уделять обучению анализу текста задачи, выявлению количественных зависимостей между объектами на первом этапе работы с задачей. С этой целью желательно включать в практику работы учителя математические задачи следующего плана:

– на составление модели по тексту задачи;
– на разработку сюжета по заданной модели;
– на соотнесение текста и модели;
– на исследование математической модели.

Библиографический список

1. *Колмогоров, А.Н.* Алгебра и начала анализа [Текст]: учеб. для 10-11 кл. общеобразоват. учреждений / А.Н. Колмогоров, А.М. Абрамов, Ю.П. Дудницын [и др.]; под ред. А.Н. Колмогорова. – М.: Просвещение, 2009.
2. *Ванцян, А.Г.* Математика [Текст]: эксперим. учеб. для 5 кл. общеобраз. шк. / А.Г. Ванцян. – Самара: Корпорация "Федоров", 1998.
3. *Коваленко, В.Г.* Дидактические игры на уроках математики [Текст]: кн. для учителя / В.Г. Коваленко. – М.: Просвещение, 1990.
4. *Людмилов, Д.С.* Задачи без числовых данных [Текст] / Д.С. Людмилов. – М.: Учпедгиз, 1951.

Метод проектов как средство обобщения и систематизации знаний учащихся по математике

Г.В. Шумская

В современном образовании сложились условия для востребованности метода проектов. Проект как комплексный и многоцелевой метод, имеет большое количество видов и разновидностей, таких как:

1. Практико-ориентированный проект.
2. Исследовательский проект.
3. Информационный проект.
4. Творческий проект.
5. Ролевой проект.

Цели учебно-исследовательской деятельности – актуализация интереса к фундаментальным наукам, развитие интеллектуальной инициативы учащихся в процессе обучения, обучение новым информационным технологиям.

Остановимся более подробно на информационном проекте, который направлен на сбор информации о каком-то объекте, явлении с целью ее анализа, обобщения и представления для широкой аудитории.

Выделяют два вида проектов по комплексности (предметно-содержательной области): монопроекты, осуществляемые в рамках одного предмета, и межпредметные проекты (в рамках нескольких предметов).

Важная организационная задача участников проекта - выбор форм продукта проектной деятельности. Различают следующие результаты проектной деятельности:

- Web-сайт,
- игра,
- макет,
- модель,
- мультимедийный продукт,
- публикация,
- статья,
- учебное пособие и другие.

От выбора формы зависит, насколько выполнение продукта будет удачным, а защита проекта – убедительной. Главная педагогическая цель проекта – формирование различных ключевых компетенций, под которыми понимаются комплексные свойства личности, включающие взаимосвязанные знания, умения, ценности, а также готовность применить их в нужной ситуации.

Выделяют четыре этапа проектной деятельности:

1. Погружение:
   - пробуждение интереса к теме;
   - формулирование проблемы;
   - поиск способа решения проблемы.
2. Организация деятельности:
   - уточнение роли каждого участника проекта;
   - планирование работы по решению задачи проекта.
3. Осуществление деятельности:
   - самостоятельная работа под наблюдением руководителя проекта.
4. Презентации:
   - окончание работы;
   - демонстрация результатов;
   - анализ проделанной работы.

Метод проектов привлекателен тем, что может обеспечить развитие творческой инициативы и самостоятельности учащегося. В процессе проектной деятельности формируются общеучебные умения и навыки, а именно:

1. Рефлексивные умения:
   - умение осмыслить задачу, для решения которой недостаточно знаний;
   - умение находить ответ на вопрос для решения поставленной задачи.
2. Поисковые (исследовательские) умения:
   - умение самостоятельно находить способ действия;
   - умение самостоятельно находить недостающую информацию;
   - умение выдвигать гипотезы;
   - умение устанавливать причинно-следственные связи.
3. Умения и навыки работы в сотрудничестве:
   - умение взаимопомощи в группе в решении общих задач;
   - умение планировать и анализировать собственную деятельность.
4. Коммуникативные умения:
   - умение вести дискуссию;
   - умение отстаивать свою точку зрения.
5. Презентационные умения и навыки:
   - навыки монологической речи;
   - умение уверенно держать себя во время выступления;
   - умение отвечать на незапланированные вопросы.

Рассмотрим пример информационного проекта, выполненного учащимися 11 класса МОУ “Средняя общеобразовательная школа с углубленным изучением отдельных предметов № 8 г. Вологды” А. Ганцовым и Д. Жидковым.

Тема: “Числа Фибоначчи”

Учебные предметы: математика, информатика, экономика.
Участники: 11 класс.
Оборудование: компьютер, подключенный к сети Интернет, мультимедийный проектор.

Цель:

- изучить принципы и возможности практического применения чисел Фибоначчи в различных областях.

Задачи:

- изучить историю происхождения чисел Фибоначчи;
- проанализировать их свойства;
- сформировать общее представление о числах Фибоначчи;
- систематизировать знания о числах Фибоначчи.

Актуальность: числа Фибоначчи применяются в различных областях и сферах современного мира, наиболее популярны в оформлении ландшафта и дизайна помещений.

Содержание

Происхождение и определение.

Последовательность Фибоначчи была хорошо известна в древней Индии, где она применялась в метрических науках (просодии, другими словами – стихосложении), намного раньше, чем она стала известна в Европе.

Числа Фибоначчи – числовая последовательность, обладающая рядом свойств. Последовательность Фибоначчи начинается так: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233...

Свойства.

1. Отношение каждого числа к последующему более и более стремится к 0,618 по увеличению порядкового номера. Отношение же каждого числа к предыдущему стремится к 1,618 (обратному к 0,618). Число 0,618 называют ФИ.

2. При делении каждого числа на следующее за ним, через одно получается число 0,382; наоборот – соответственно 2,618.

3. Натуральное число N является числом Фибоначчи тогда и только тогда, когда $5N^2+4$ или $5N^2–4$ является квадратом.

4. Не существует арифметической прогрессии длиной больше 3, состоящей из чисел Фибоначчи.

Природа.

Было установлено, что числовой ряд чисел Фибоначчи характеризует структурную организацию многих живых систем. Спираль увидели в расположении семян подсолнечника, в шишках сосны, ананасах, кактусах и т.д.

Архитектура и дизайн.

Многие пытались разгадать секреты *пирамиды в Гизе.* В отличие от других египетских пирамид это не гробница, а скорее неразрешимая головоломка из числовых комбинаций. Пирамида построена так, чтобы площадь каждой из ее граней была равна квадрату ее высоты.

Светящиеся числа Фибоначчи от 1 до 55 прикреплены на дымовой трубе Turku Energia в Турку. Церковь Завета в г. Тампа (штат Флорида, США) – современное здание, в архитектуре которого использовались числовые последовательности Фибоначчи.

Форма панели тесно связана со спиральной траекторией Фибоначчи, квадратами, построенными на ее основе, и полученном в результате золотом прямоугольнике.

Литература.

Числа Фибоначчи не только доминируют в размерах стихотворений А.С. Пушкина, они определяют во многих случаях и внутреннюю композицию стихотворений: число стихов и число строк в них.

Космос и финансы.

И. Тициус, немецкий астроном XVIII в., с помощью ряда Фибоначчи нашел закономерность и порядок в расстояниях между планетами солнечной системы.

Коррекция тренда, согласно числу 0,618, предвидится, как правило, на уровне 61,8% от предшествующего изменения цены, что дает возможность вкладчику разместить приказ о закрытии сделки слегка ниже этого уровня. Методика прогностических расчетов с использованием Чисел Фибоначчи строится на том, что численное соотношение движения и отката должно давать коэффициенты “золотого сечения”.

Заключение

Именно связь проблемы гармонии с основными проблемами естествознания явилась, в частности, одной из важных целей и задач исследования фибоначчиевых закономерностей. Эта связь позволяет утверждать гармонию как новую систему мира – сущностную и целостную. Не преувеличивая, можно сказать, что последовательности Фибоначчи и числу фи на планете подчиняется все.

С данным проектом учащиеся приняли участие в YII городской научно-практической конференции “Мир науки” (февраль, 2011 г.) и во Всероссийской научной конференции “Молодые исследователи – регионам” (апрель, 2011 г.).

Таким образом, проектная деятельность создает условия для развития мышления учащихся, расширения их познавательного интереса, самообразования и самореализации в процессе практического применения знаний.

Библиографический список

1. *Савин, А.П.* Энциклопедический словарь юного математика [Текст] / А.П. Савин. – М.: Педагогика, 1989. – С. 312-314.
2. *Сергеев, И.С.* Как организовать проектную деятельность учащихся [Текст]: практ. пособие / И.С. Сергеев. – М.: АРКТИ, 2006. – 80 с.
3. *Степанова, М.В.* Учебно-исследовательская деятельность школьников в профильном обучении [Текст]: учебно-метод. пособие / под ред. А.П. Тряпицыной. – СПб.: Каро, 2006. – 96 с.
4. Какова роль учителя в проектной деятельности [Электронный ресурс] http://oalis.ucoz.ru/publ/kakova_rol_uchitelja_v_proektnoj_dejatelnosti/1-1-0-10

Особенности “компьютерных доказательств” геометрических утверждений

Т.С. Ширикова

Под доказательствоммы привыкли понимать процесс установления истинности одних утверждений на основании истинности других с использованием правил **логического вывода**, которые опираются на законы логики Аристотеля. Для того, чтобы показать возможность иного осмысления понятия доказательства обратимся к истории математики.Во все времена главной целью в математике было **убедить** окружающих в истинности формулируемого утверждения.Эта цель достигалась разными способами. Для египтян достаточно убедительным был сам факт того, что утверждение записано на папирусе. Т.е. они безоговорочно доверяли авторитетам. В Древней Индии критерием убедительности являлась наглядность, всем хорошо известны рисунки с лаконичным комментарием: “Смотри!”.

Традиционные представления о доказательстве восходят к периоду древнегреческой математики, именно греков можно считать родоначальниками дедуктивного метода.Они считали убедительным то, что может быть получено **“законным рассуждением”** из аксиом, которые очевидны и общепризнанны.

Греки развили этот метод настолько удачно, что в течение следующих двух тысяч лет понятие доказательности как в жизни, так и в математике, оставалось неизменным. В конце XIX – начале XX веков появилась символьная запись логических рассуждений, что послужило толчком к повышению требований к строгости доказательств.

В наше время представления о доказательствах изменились вновь под влиянием вычислительной техники. Сегодня компьютерная техника является незаменимым средством проведения математических доказательств. Она позволяет производить на свет доказательства, которые требуют **перебора** столь большого числа вариантов, что этот перебор становится недоступным человеку — а компьютеру доступен; либо же требуемые вычисления чересчур сложны, чтобы делать их вручную. Первым, но не единственным примером такого доказательства стало решение знаменитой проблемы четырех красок. К использованию компьютерных средств для проведения математических доказательств вынуждены прибегать даже начинающие математики-исследователи. Приведем в подтверждение этого высказывание одного из таких начинающих математиков-исследователей: “Даже в моей небогатой научной практике было уже два случая, когда в доказательстве математических фактов помогал компьютер. В одном случае мы написали программу, которая проводила вычисления в достаточно хитром кольце (через сведение к кольцу многочленов, конечно, но сведение тоже проводил компьютер). По результатам этих вычислений мы пришли к неким математическим выводам. Другой случай был даже более рафинированным: компьютер перебирал все возможные случаи, и на основе этого полного перебора, опираясь на то, что действительно все варианты были исследованы, мы доказали требуемую нижнюю оценку” [1].

Тот факт, что использование компьютерной техники не только расширило возможности, но и существенно изменило представления о “канонах” строгости математических доказательств сегодня подтверждаюти слова ректора МГУ, профессора В.А. Садовничего, прозвучавшие в его докладе на Всероссийском съезде учителей математики: “В непрерывной геометрии, оказывается, существенно возрос процент использования компьютеров. Это привело к новому явлению – задачи, ранее не решавшиеся в непрерывной геометрии “формульно-точно”, стали исследоваться сегодня “компьютерно”, то есть приближенно, а затем на этой основе часто удается сделать строго математически доказанные выводы” [2].

Приведенные цитаты показывают, что сегодня убедительными, а значит, строгими, считаются лишь те доказательства, которые подтверждены компьютерным экспериментом. Иногда компьютерный эксперимент оказывается единственно доступным способом подтверждения истинности математических утверждений. В этом смысле мы и будем употреблять здесь термин “компьютерное доказательство”.

Для компьютерной поддержки процесса обучения математики сегодня уже разработано специальное программное обеспечение. Так для целей обучения геометрии созданы интерактивные геометрические среды: GeoGebra, GeoNext, Живая геометрия, пакет Динамические Геометрические системы DGS, предметно-ориентированной инструментальной среды “TheGeometer'sSkecthpad” и др.

Остановлюсь в своем сообщении на рассмотрении лишь двух из них GeoGebra, GeoNext, так как в составе коллектива преподавателей, аспирантов, студентов математического факультета САФУ занимаюсь разработкой методики их использования в процессе обучения доказательствам геометрических утверждений.

Покажем на школьных геометрических задачах, условия, при которых компьютерный эксперимент может быть использован в качестве достаточно убедительного способа обоснования истинности изучаемых положений.

Логическую основу "компьютерного доказательства" составляют индуктивные умозаключения, совершаемые по схеме полной индукции:

Мы выделяем три метода "компьютерного доказательства":

1) метод полного перебора с установлением общего свойства;

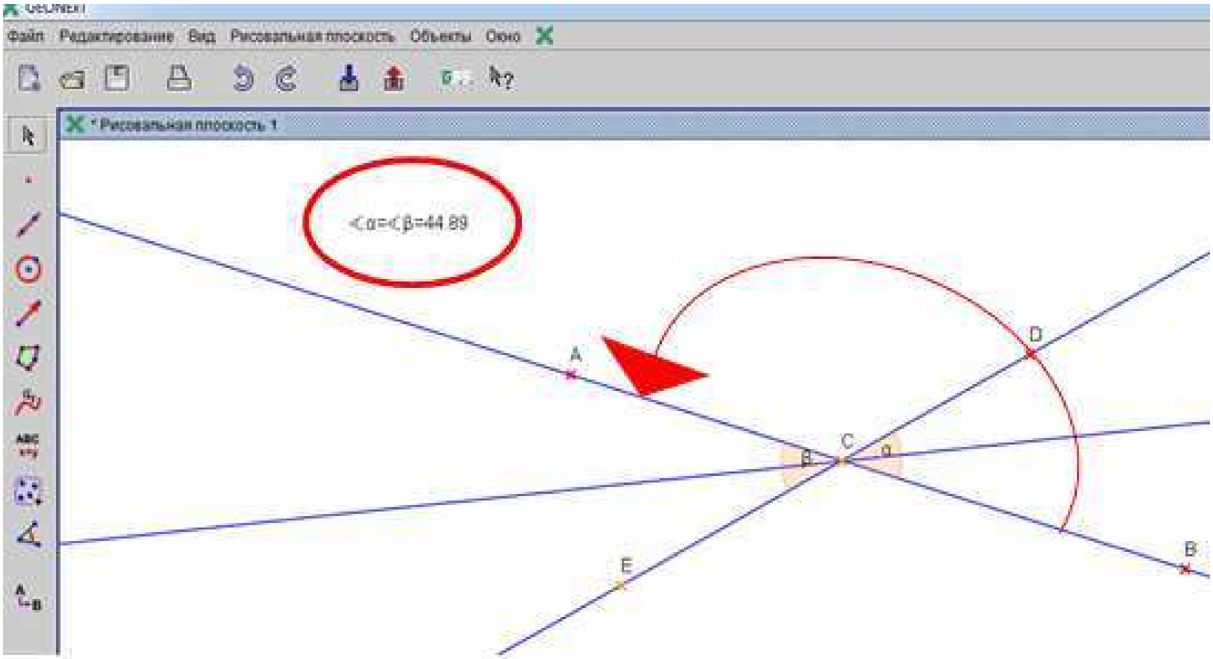
2) метод полного перебора с выделением частных (особых) случаев;

3) метод установление предельных связей.

Первый из названных методов применим к утверждениям о наличии некоторого общего свойства у геометрический объектов конечного или ограниченного кусочно-непрерывного множества. Например, для решения задачи "Биссектрисы вертикальных углов лежат на одной прямой вне зависимости от величин этих углов".

Применение этого метода требует построения, так называемого "динамического чертежа", т.е. чертежа допускающего непрерывные изменения изображенных на нем объектов (в нашем случае величин вертикальных углов). Построение таких чертежей отдельная довольно интересная задача, так как в процессе изменений должны сохраняться важные для доказательства свойства (углы должны оставаться вертикальными, а лучи, выходящие из их вершин – биссектрисами). Не останавливаясь на решении этой задачи, продемонстрирую само компьютерное доказательство методом полного перебора.

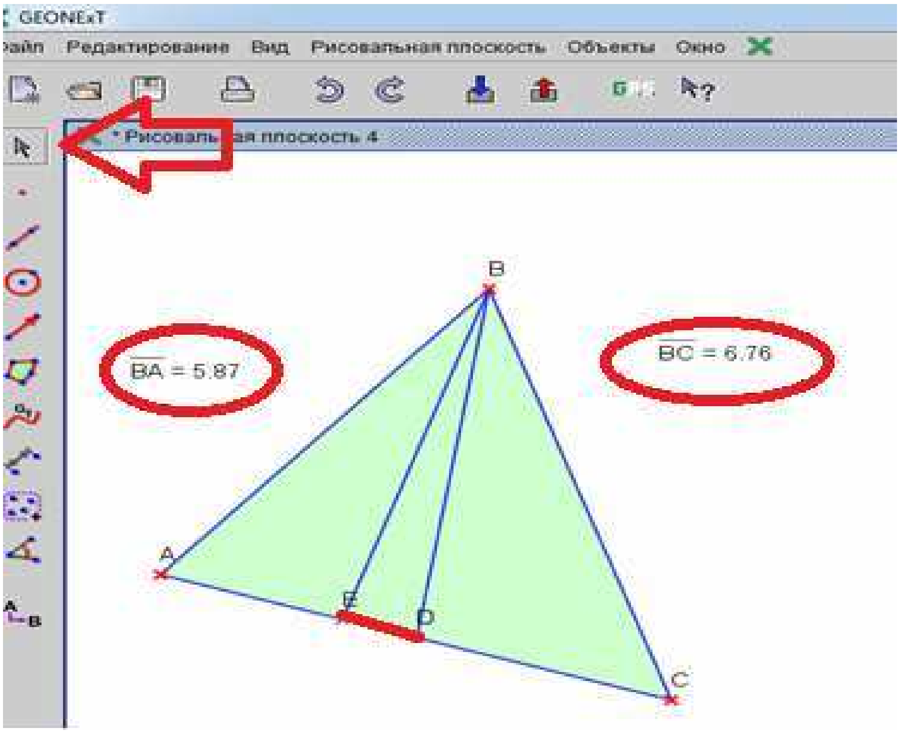
Так как значение угла между прямыми изменяется в промежутке от 0° до 180°, то в качестве начальной ситуации выберем ту, при которой угол между прямыми 0°. Будем постепенно увеличивать градусную меру $\angle$BCD до 180°. Для отслеживания сохранения взаимного расположения биссектрис углов $\angle$BCD и $\angle$ECA выведем на экран информацию о результатах измерения угла между прямыми. Если значение этого угла остается равным 180°, то утверждение считаем доказанным.



Второй метод – метод выделения частных случаев и исключений применяется для доказательства утверждений о наличии во множестве рассматриваемых геометрический объектов элементов, обладающих особыми свойствами

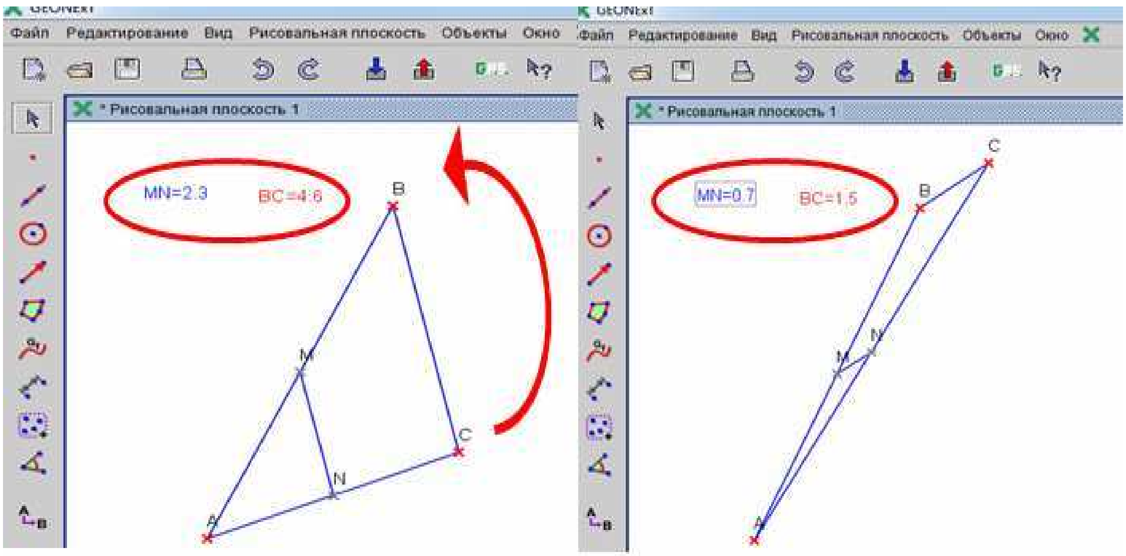
Например, "Среди всех возможных вариантов положения медианы треугольника относительно высоты, проведенной к той же стороне, только в одном случае – их совпадения – треугольник является равнобедренным".

Доказательство проводится вновь с использованием динамического чертежа. В качестве показателя взаимного расположений высоты и медианы треугольника рассматривается расстояние между их основаниями – длина отрезка GK. В качестве начального положения высоты выбирается такое, при которой это расстояние наибольшее на экране. Затем, перемещая вершину G, постепенно уменьшаем это расстояние до 0. В ходе изменения следим за соотношением длин боковых сторон треугольника. Убеждаемся в том, что лишь в случае совпадения точек G и K они будут равны.



Третий метод – метод установления предельных связей, применяется для распространения ранее доказанных утверждений за пределы области их истинности

Например, “Известно, что если точки A, B и C являются вершинами треугольника, т.е. не лежат на одной прямой, а точки M и N являются серединами его сторон AB и AC, т.е. образуют среднюю линию треугольника, то BC=2MN. Докажите, что это соотношение длин отрезков сохраняется и в том случае, если точки A, B и C являются точками одной прямой”. Для доказательства на динамическом чертеже необходимо изобразить сначала известную ситуацию (точки A, B и C не на одной прямой), т.е. являются вершинами треугольника. Затем, двигая одну из вершин треугольника, например B, добиться принадлежности трех точек одной прямой. Следить за тем, сохраняется ли соотношение отрезков BC и MN при этом изменении. Если оно сохранилось, то все доказано.



Мы считаем, что современных школьников необходимо знакомить с особенностями “компьютерных” доказательств для того, чтобы они правильно понимали роль и место компьютерной техники в математической деятельности. При этом, мы вовсе не считаем, что “компьютерным” доказательством можно подменить логическое доказательство. Во-первых, потому, что доказать корректность компьютерной программы зачастую гораздо сложнее, чем убедиться в корректности логического доказательства (поэтому “компьютерное” доказательство вызывает у многих математиков недоверие).

Во-вторых, каждое из этих видов доказательств обладает своими образовательными функциями, которые представлены в таблице.

“Компьютерное” доказательство с использованием готовых динамических чертежей	**Убеждает** в истинности утверждений о закономерных связях
Конструктивное доказательство и построение динамических чертежей	**Вскрывает причины** существования закономерных связей
Логическое доказательство	**Объясняет** характер закономерных связей.

Библиографический список

1. *Николенко, С.* Истина в математике [Текст] / С. Николенко // Знание-сила. – 2008. – № 6.
2. *Садовничий, В.А.* О математике и ее преподавании в школе [Текст]: доклад на Всероссийском съезде учителей математики 28 октября 2010 г. / В.А. Садовничий. – М.: Изд-во МГУ, 2010. – 24 с.

Развитие исследовательских компетенций при построении и анализе свойств множества Мандельброта

Е.С. Стакина

Мир, окружающий человека, невероятно изменчив. Некоторые его события, которые заметно меняют ход истории, нередко просто невозможно спрогнозировать. Изобретая все новые технические устройства, делая все более совершенной социальную среду, человек может не учесть мельчайшую деталь, и тогда вся, казалось бы, идеально организованная структура превращается в хаотическую. Но возможно ли “приручить” хаос, изучить его? Над этим вопросом размышляют многие современные ученые, и математики в том числе. Рассматривая разнообразные фрактальные структуры, они пытаются, если не проникнуть в суть хаоса и понять его смысл, то хотя бы приобщится к нему и попытаться определить примерный ход протекания каких-либо хаотических явлений. Фрактальная геометрия, как наука, открывает для этого большие возможности.

На спецкурсах по фрактальной геометрии студенты приобщаются к понятиям хаоса и рассмотрению фрактальных структур благодаря изучению нелинейных комплексных отображений. В ходе такой деятельности свое развитие получают исследовательские компетенции обучаемых.

Определяя исследовательскую компетенцию, мы будем придерживаться точки зрения А.В. Хуторского, считая, что это знания как результат познавательной деятельности человека в определенной области науки, методы, методики исследования, которыми он должен овладеть, чтобы осуществлять исследовательскую деятельность, а также мотивацию и позицию исследователя, его ценностные ориентации [2].

В данной статье более подробно остановимся на рассмотрении квадратичных и кубических отображений. Наиболее известным примером такого рода является простейшее квадратичное отображение $z_{n+1} = f(z_n) = z_n^2 + c$. На его примере студенты знакомятся с понятием множества Жюлиа.

Множество Жюлиа для функции комплексного переменного $f(z)$, обозначаемое $J(f)$, определяется как $J(f) = \partial\{z : f^{(n)}(z) \to \infty, n \to \infty\}$, где ∂ – граница области притяжения бесконечности, а $f^{(n)}(z) = f(f^{(n-1)}(z))$, $n = 1, 2, ...$ Заполняющее множество Жюлиа состоит из точек, орбиты которых пойманы, в отличие от границы этого множества, являющейся настоящим множеством Жюлиа [1].

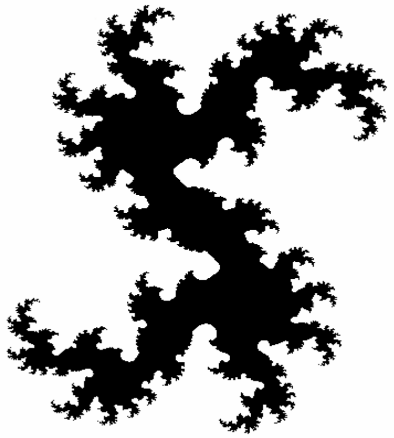


Рис. 1. Заполняющее множество Жюлиа для функции $f(z) = z^2 + 0,4 + 0,2i$

Далее студентам предлагается рассмотреть кубические функции комплексного переменного $f(z) = z^3 + c$, где c – произвольный параметр (рис. 2).

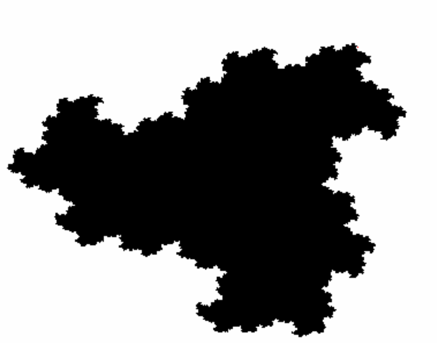


Рис. 2. Заполняющее множество Жюлиа для функции $f(z) = z^3 + 0.5 + 0.3i$

Студенты получают задание построить заполняющее множество Жюлиа в среде программирования и проследить, как влияет на его изображение изменение параметра с. Блок-схема, описывающая алгоритм, изображена на рис. 3.

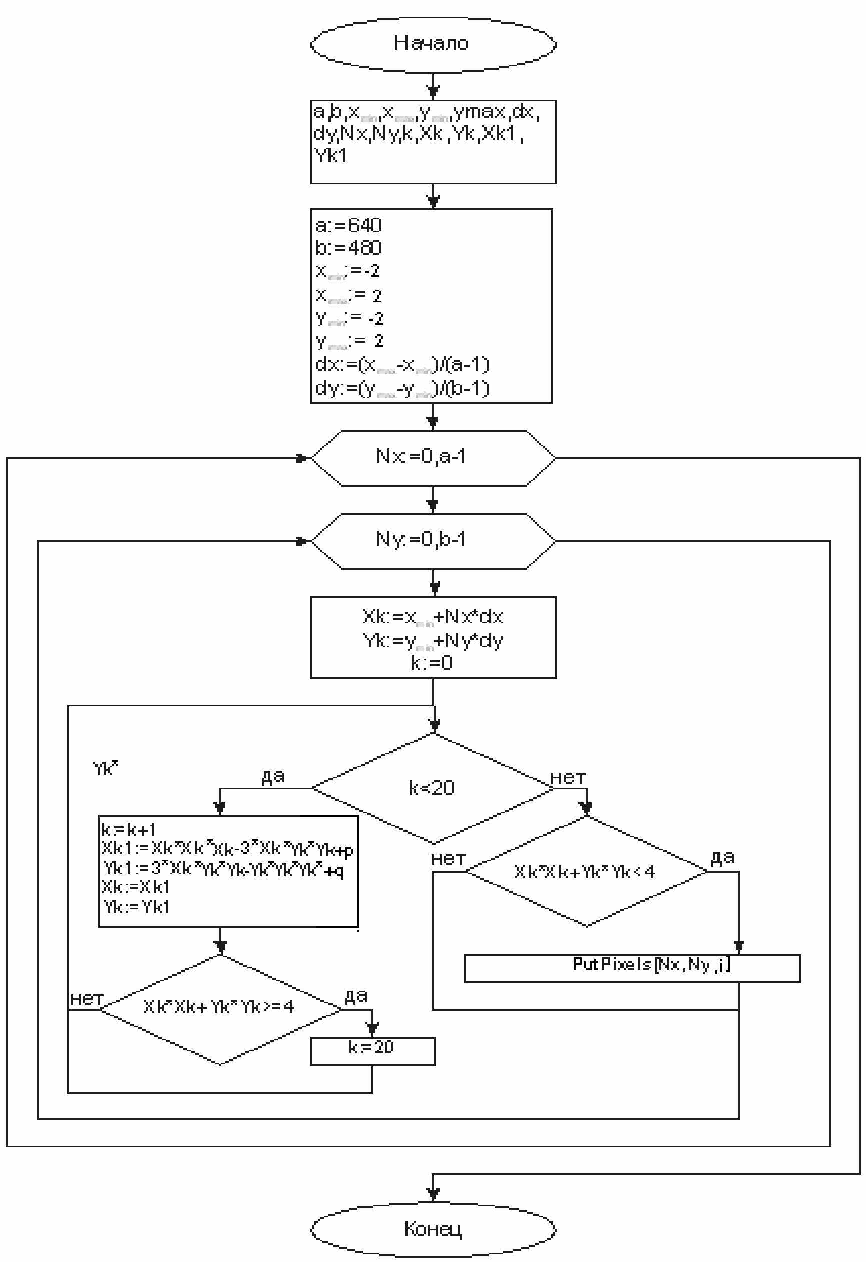


Рис. 3. Блок – схема построения заполняющего множества Жюлиа для функции $f(z) = z^3 + c$

Таким образом, студенты закрепляют навыки работы с языками программирования, развивают исследовательские способности.

Большие возможности для развития исследовательских компетенций открываются при изучении множества Мандельброта.

Под множеством Мандельброта для полинома $f_c(z) = z^2 + c$ понимается множество всех точек $c \in C(c = c_1 + i \cdot c_2)$, для которых орбита точки 0 ограничена. На языке итерированных функций это будет означать: $M = \{c \in C : f_c^{(n)}(0)\}_{n=0}^{\infty}$ *ограничена*$\}$ (рис. 4).

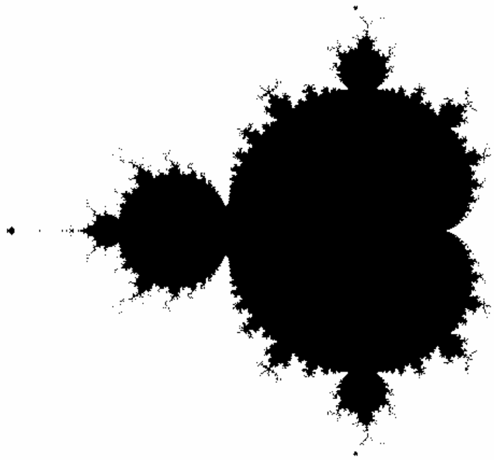


Рис. 4. Множество Мандельброта для функции $f(z) = z^2 + c$

Студентам предлагается рассмотреть квадратичные $f(z) = z^2 + c$ и кубические $f(z) = z^3 + c$ отображения. Исследовательская деятельность строиться по следующему принципу: преподаватель обращает внимание на некоторые математические особенности одного из данных множеств. К примеру, после построения множества Мандельброта для функции $f(z) = z^2 + c$ с помощью компьютерных средств, можно обратить внимание, что множество обладает некоторым видом симметрии. Студентам предлагается доказать следующие утверждения:

1. Множество Мандельброта для функции $f(z) = z^2 + c$ симметрично относительно вещественной оси.
2. Множество Мандельброта для функции $f(z) = z^2 + c$ не симметрично относительно мнимой оси.
3. Множество Мандельброта для функции $f(z) = z^2 + c$ не обладает центральной симметрией.

Представим указания к проверке некоторых из данных свойств:

1. Симметрия относительно вещественной оси будет в том случае, если с $\in M$, то и $\overline{c} \in M$. Рассмотрим две функции $f_1(z) = z^2 + c$ и $f_2(z) = z^2 + \overline{c}$. Проследим за орбитой точки $z = 0$ при итерировании первой и второй функций.

$$f_1^{(1)}(0) = c_1 + i \cdot c_2,$$
$$f_2^{(1)}(0) = c_1 - i \cdot c_2,$$
$$f_1^{(2)}(0) = c_1^2 - c_2^2 + c_1 + i \cdot (2 \cdot c_1 \cdot c_2 + c_2),$$
$$f_2^{(2)}(0) = c_1^2 - c_2^2 + c_1 - i \cdot (2 \cdot c_1 \cdot c_2 + c_2) \text{ и т.д.}$$

Нетрудно заметить, что на каждом шаге итерирования функций f_1 и f_2 орбиты точки 0 будут симметричны относительно действительной оси (сопряженные комплексные числа). Следовательно, расстояние до начала координат от этих орбит будет одинаково. Таким образом, если $c \in M$, то и $\overline{c} \in M$.

2. Симметрия относительно мнимой оси будет в том случае, если с $\in M$, то и с$' \in M$, где с $=$ с$_1 + i \cdot c_2$; $c' = -$с$_1 + i \cdot c_2$. Приведем пример, при котором данное условие не выполняется. Пусть с $= -1$, очевидно, что последовательность 0, –1, 0, –1, 0, –1,... ограничена, то есть с $= -1$ принадлежит множеству Мандельброта. При этом, если с $= 1$, то последовательность 2, 5, 26,... не ограничена, что означает, что с $= 1$ не принадлежит этому множеству, то есть симметрии относительно мнимой оси нет.

Далее студенты строят множество Мандельброта для функции $f(z) = z^3 + c$ (см. рис. 5) и самостоятельно выявляют его математические особенности, к которым можно отнести следующие:

1. Множество Мандельброта для функции $f(z) = z^3 + c$ симметрично относительно вещественной оси.
2. Множество Мандельброта для функции $f(z) = z^3 + c$ симметрично относительно мнимой оси.
3. Множество Мандельброта для функции $f(z) = z^3 + c$ обладает центральной симметрией.

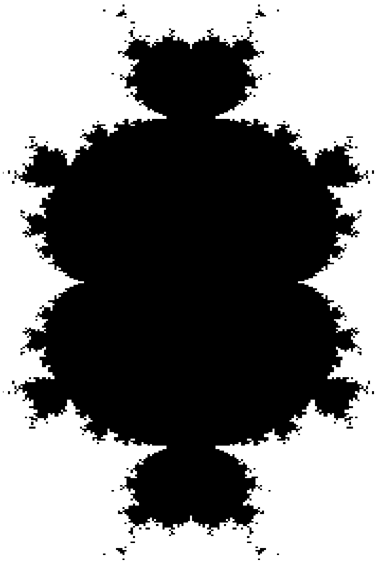


Рис. 5. Множество Мандельброта для функции $f(z) = z^3 + c$

Представим указания к проверке данных свойств:

1. Симметрия относительно вещественной оси будет в том случае, если $\mathrm{c} \in M$, то и $\overline{c} \in M$. Рассмотрим две функции $f_1(z) = z^3 + c$ и $f_2(z) = z^3 + \overline{c}$. Проследим за орбитой точки $z = 0$ при итерировании первой и второй функций.

$$f_1^{(1)}(0) = c_1 + i \cdot c_2,$$

$$f_2^{(1)}(0) = c_1 - i \cdot c_2;$$

$$f_1^{(2)}(0) = c_1^3 - 3c_2^2\mathrm{c}_1 + c_1 + i \cdot (3 \cdot c_1^2 \cdot c_2 - c_2^3 + \mathrm{c}_2),$$

$$f_2^{(2)}(0) = c_1^3 - 3c_2^2\mathrm{c}_1 + c_1 - i \cdot (3 \cdot c_1^2 \cdot c_2 - c_2^3 + \mathrm{c}_2) \text{ и т.д.}$$

Нетрудно заметить, что на каждом шаге итерирования функций f_1 и f_2 орбиты точки 0 будут симметричны относительно действительной оси (сопряженные комплексные числа). Следовательно, расстояние до начала координат от этих орбит будет одинаково. Таким образом, если $c \in M$, то и $\overline{c} \in M$.

2. Симметрия относительно мнимой оси будет в том случае, если $\mathrm{c} \in M$, то и $\mathrm{c}' \in M$, где $\mathrm{c} = \mathrm{c}_1 + i \cdot c_2$; $c' = -\mathrm{c}_1 + i \cdot c_2$. Рассмотрим две функции $f_1(z) = z^3 + c$ и $f_2(z) = z^3 + c'$. Проследим за орбитой точки $z = 0$ при итерировании первой и второй функций. $f_1(0) = c_1 + i \cdot c_2$, $f_2(0) = -c_1 - i \cdot c_2$. $f_1^{(2)}(0) = c_1^3 - 3c_2^2\mathrm{c}_1 + c_1 + i \cdot (3 \cdot c_1^2 \cdot c_2 - c_2^3 + \mathrm{c}_2)$. $f_1^{(2)}(0) = -c_1^3 + 3c_2^2\mathrm{c}_1 - c_1 + i \cdot (3 \cdot c_1^2 \cdot c_2 - c_2^3 + \mathrm{c}_2)$. Нетрудно заметить, что на каждом шаге итерирования функций f_1 и f_2 орбиты точки 0 будут симметричны относительно мнимой оси (противоположные действительные части). То есть, если $\mathrm{c} \in M$, то и $\mathrm{c}' \in M$.

3. Очевидно, что если множество обладает симметрией относительно вещественной оси и обладает симметрией относительно мнимой оси, то оно является центрально симметричным.

Так как данная тема не раскрыта в современной литературе, то все выкладки по изучению множества Мандельброта обучаемые могут сделать только благодаря своей собственной математической подготовке и исследовательским качествам личности, которые в процессе такой работы продолжают свое развитие.

Завершающим этапом такой деятельности является сравнительный анализ полученных результатов.

Множество Мандельброта для функции $f(z) = z^2 + c$	Множество Мандельброта для функции $f(z) = z^3 + c$
симметрично относительно вещественной оси	симметрично относительно вещественной оси
не симметрично относительно мнимой оси	симметрично относительно мнимой оси
не обладает центральной симметрией	обладает центральной симметрией

После окончания данной работы, студенты могут выявить новые математические особенности данных множеств, и установить какие-то ранее неизвестные математические факты, формулируя их в форме задач, и попытаться доказать их истинность или ошибочность.

Мы представили одну из компетенций, которую можно развивать в рамках обучения по направлению подготовки "Прикладная математика и информатика" на спецкурсах по фрактальной геометрии. На самом деле потенциал этой научной области гораздо шире, и в дальнейшем можно рассмотреть вопрос о том, какое влияние оказывает обучение фрактальной геометрии на формирование профессиональных компетенций бакалавров в области прикладной математики и информатики в целом.

Библиографический список

1. *Секованов, В.С.* Элементы теории фрактальных множеств [Текст]: учеб. пособие / В.С. Секованов. – Кострома: Изд-во КГУ, 2005. – С. 56-61.
2. Компетенции в образовании: опыт проектирования [Текст]: сб. науч. тр. / под ред. А.В. Хуторского. – М.: Научно-внедренческое предприятие “ ИНЭК”, 2007. – С. 327.

Информационно-коммуникационные технологии как средство развития творческой активности учащихся

Ю.А. Митенев

В настоящее время перед средней школой государством и обществом поставлены задачи совершенствования образования в связи с изменившейся социально-экономической обстановкой, которая требует от гражданина профессиональной мобильности, гибкости, творческой активности. Новые требования нашли отражение в “Концепции модернизации российского образования на период до 2010 года”, государственной программе “Образование и развитие инновационной экономики: внедрение современной модели образования в 2009-2012 годы”. В этих документах отмечено, что современный школьник должен стать активной, созидающей, творческой личностью, уверенно владеющей информационно-коммуникационными технологиями (ИКТ). Кроме того, “содержание и методы обучения будут модернизированы на основе эффективного использования возможностей современных информационно-коммуникационных технологий. Это приведет к необходимости смены образовательных технологий и роли преподавателя, расширению его профессиональной деятельности, возможности выступать консультантом, направлять и оценивать самостоятельную деятельность учащихся”.

В национальной образовательной инициативе “Наша новая школа” отмечается, что главной задачей современной школы является “. . . раскрытие способностей каждого ученика, воспитание порядочного и патриотичного человека, личности, готовой к жизни в высокотехнологичном, конкурентном мире. Школьное обучение должно быть построено так, чтобы выпускники могли самостоятельно ставить и достигать серьезных целей, умело реагировать на разные жизненные ситуации” [2].

В числе основных направлений развития общего образования выделяются переход на новые образовательные стандарты; развитие системы поддержки талантливых детей; совершенствование учительского корпуса и др.

Ключевыми механизмами реализации данных направлений являются проектные и программные методы работы, деятельность которых будет осуществляться в рамках приоритетного национального проекта “Образование”, Федеральной целевой программы развития образования и Федеральной целевой программы “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России”.

Период перехода от индустриального общества к постиндустриальному характеризуется резким скачком объема информации. Современное информационное общество ставит перед школой задачу подготовки выпускников, способных гибко адаптироваться к меняющимся жизненным ситуациям, самостоятельно приобретать необходимые знания, умело применять их на практике для решения разнообразных возникающих проблем; самостоятельно, критически мыслить, уметь видеть возникающие в реальной действительности проблемы и искать пути их рационального решения, быть способными генерировать новые идеи, творчески мыслить; грамотно работать с информацией [1].

Нами *информационно-коммуникационная технология обучения понимается как технология, использующая специальные способы, программные и технические средства для работы с информацией.*

То есть, информационно-коммуникационные технологии следует понимать как приложение информационных технологий для создания новых возможностей передачи знаний (деятельности педагога), восприятия знаний (деятельности обучаемого), оценки качества обучения и всестороннего развития личности обучаемого в ходе учебно-воспитательного процесса.

На занятиях по математике имеется немало возможностей заинтересовать школьников содержанием этой науки. Вместе с тем основная цель занятий все же состоит в обучении определенному комплексу процедур математического характера, занимательность изложения подчинена этой цели, развитие способностей учащихся происходит в рамках изучения обязательного материала.

Под внеурочными занятиями по математике будем понимать необязательные систематические занятия с учащимися во внеурочное время [3].

Одной из важнейших целей проведения внеурочных занятий по математике является развитие интереса учащихся к математике, привлечение учащихся к занятиям в факультативах. У учащихся имеется большое желание проверить свои силы, математические способности, умение решать нестандартные задачи.

Существуют различные виды внеурочных занятий по математике:

1. Работа с учащимися, отстающими от других в изучении программного материала.
2. Работа с учащимися, проявляющими интерес к математике.
3. Работа с учащимися по развитию интереса в изучении математики.

Основной целью первого вида внеурочных занятий является ликвидация пробелов и предупреждение неуспеваемости учащихся. Эта работа должна носить ярко выраженный индивидуальный характер и требует от учителя особого такта и характера.

На наш взгляд, для этих целей целесообразно использовать программную среду "1С: Математический конструктор", которая предназначена для создания интерактивных моделей по математике, сочетающих в себе конструирование, динамическое варьирование, эксперимент и предоставляет школьникам возможность творческой манипуляции с объектами, конструирования и решения задач.

Цели второго вида внеурочных занятий по математике могут быть очень разнообразны и зависят от того, что интересного и что нового хотят узнать о математике ученики. Например, целями реализации данного направления могут быть:

1. Развитие и углубление знаний по программному материалу.
2. Привитие учащимся навыков исследовательской работы.
3. Воспитание культуры математического мышления.
4. Развитие представлений о практическом применении математики и т.п.

С помощью "Математического конструктора" можно проводить численные экспериментальные наблюдения, которые могут вести к самостоятельному открытию тех или иных фактов, т.к. все расстояния, углы и площади в "Математическом конструкторе" легко измеряемы.

Третий вид внеурочных занятий также может иметь цели, подобные для занятий второго вида, но главный упор делается на развитие интереса к математике в соответствии с возможностями той или иной группы учащихся.

Таким образом, внеурочные занятия по математике призваны решить целый комплекс задач по углубленному математическому образованию, всестороннему развитию индивидуальных способностей школьников и максимальному удовлетворению их интересов и потребностей. Для непрерывного обучения особое значение имеют развитие самостоятельности и творческой активности учащихся и воспитание навыков самообучения по математике.

Библиографический список

1. Информатизация образования-2010: педагогические аспекты создания информационно-образовательной среды [Текст]: материалы междунар. науч. конф., Минск, 27-30 окт. 2010 г. / редкол.: И.А. Новик [и др.]. – Минск: БГУ, 2010. – 591 с.
2. *Казаренков, В.И.* Педагогические основы организации внеурочных занятий школьников по учебным предметам [Текст] / В.И. Казаренков. – М., 1998. – 158 с.
3. Национальная образовательная инициатива "Наша новая школа" [Текст] / утв. Президентом Российской Федерации Д.А. Медведевым 04 февраля 2010 г. Приказ № 271.

Использование динамических систем как средство формирования креативности

А.С. Бабенко

В современном обществе одной из важнейших задач образования является формирование всесторонне развитой личности, обладающей качествами, которые позволяют творчески подходить к выполнению работы, креативно мыслить, способной к саморазвитию и постоянном обновлению знаний. При переходе на многоуровневую модель обучения, компетентный выпускник должен эффективно выполнять профессиональную деятельность, в связи с этим он должен обладать определенными способностями и креативными качествами, такими как критичность мышления, гибкость мышления, познавательная активность и т.д., в том числе повышение мотивации и самостоятельность.

Также следует отметить, что креативные качества личности студента тесно связаны с наличием таких компетенций, предусмотренных федеральным государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования по направлению подготовки "Прикладная математика" квалификация (степень) "бакалавр", как общекультурные: 1) способен находить организационно-управленческие решения в нестандартных ситуациях и готов нести за них ответственность; 2) стремится к саморазвитию, повышению своей квалификации и мастерства; и профессиональные: 3) способен и готов решать проблемы, брать на себя ответственность; 4) способен самостоятельно изучать новые разделы фундаментальных наук.

В начале работы сделаем упор на развитии такого креативного качества как гибкость мышления и предложим студентам смоделировать изменение численности популяции различными способами. Не каждый студент сможет найти несколько способов решения задачи. Однако в ходе беседы с помощью наводящих вопросов преподавателя, студент приходит к выводу, что существуют как минимум два способа создания модели.

Пусть x – численность популяции в некоторый момент времени, тогда изменение численности популяции с течением времени можно задать двумя способами (с помощью непрерывной и дискретной динамических систем): или вычислить скорость изменения популяции x', задав дифференциальное уравнение $x' = f(x)$, или найти численность популяции в следующий момент времени, задав разностное уравнение $x_{n+1} = f(x_n)$.

Изменение численности популяции зависит от того, сколько животных было, то есть от x и от того, сколько их погибнет из-за отсутствия пищи, то есть от $a - bx$. Таким образом, $f(x) = x(a - bx)$, где b – параметр плодовитости животных, a – параметр, характеризующий имеющиеся ресурсы [1].

Если же необходимо знать поголовье только раз в месяц или раз в неделю, тогда изменение численности популяции можно описать логистическим отображением или отображением Ферхюльста, являющееся упрощенной моделью системы. Пусть x_n представляет численность популяции в год с номером n, тогда численность популяции в данный год - x_{n+1}, зависимость от того, сколько животных было год назад. Эту зависимость можно определить логистическим отображением: $x_{n+1} = r \cdot x_n(1 - x_n)$, где r - плодовитость животных и $0 \leq x_n \leq 1$. Очевидно, что величина $1 - x_n$ пропорциональна количеству имеющейся пищи [2].

Рассмотрим подробнее первую модель.

Решим данное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = x(a - bx). \tag{1}$$

Полученное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными: $\frac{dx}{x(a-bx)} = dt$. Проинтегрируем левую и правую части уравнения $\int \frac{dx}{x(a-bx)} = \int dt$. Преобразуем подынтегральное выражение $\int \left(\frac{1}{ax} + \frac{b}{a(a-bx)}\right) dx = \int dt$, тогда $\frac{1}{a}\ln|x| - \frac{1}{a}\ln|a - bx| = t + c$. Используя свойства логарифма, получаем $\ln\left|\frac{x}{a-bx}\right| = at + c$, следовательно, $\frac{x}{a-bx} = Ce^{at}$. Выразим x

$$x = \frac{aCe^{at}}{1 + bCe^{at}}.$$

$x = \frac{a}{b}$ так же является решением (если подставить в уравнение (1)).

Исходя из найденного решения, можно построить фазовый портрет системы (1) (рис. 1, один из случаев). На этом этапе решения, студенты могут предложить либо провести качественное исследование динамической системы, чтобы провести анализ изменения численности популяции, либо построить фазовый портрет по найденному решению с использованием информационно-коммуникационных технологий (ИКТ).

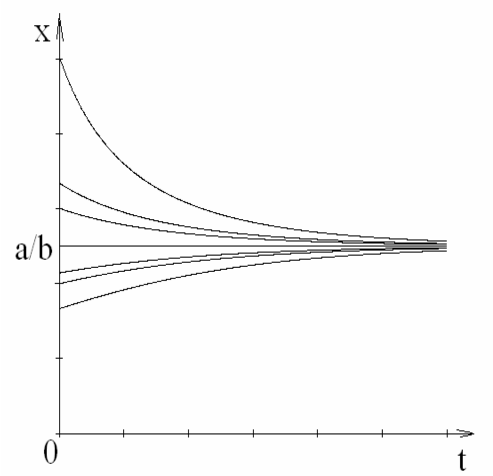


Рис. 1

Студенты, интерпретируя полученное решение, делают вывод: численность популяции, в зависимости от коэффициентов a и b, будет увеличиваться или уменьшаться до определенного значения. Далее численность популяции остается постоянной, то есть умирает столько же сколько и рождается, что не соответствует действительности.

В результате рассмотрения первой модели, у студентов повышается мотивация (использование ИКТ), развивается критичность и гибкость мышления (исследование можно провести разными способами), кроме того они самостоятельно находят решение дифференциального уравнения, в том числе и особые.

Акцентируем внимание на развитии тех креативных качеств личности, которые получают свое развитие в процессе рассмотрения второй модели.

Пусть данная функция $f(x) = rx(1 - x)$ задана на отрезке $[0, 1]$, тогда $r \in [0, 4]$.

Подойти к вопросу исследования логистического отображения можно в проблемной форме. Преподаватель ставит следующую задачу: "Найдите неподвижные точки логистического отображения и определите их характер". Студенты в ходе самостоятельных рассуждений или групповой дискуссии приходят к выводу, что для определения характера точки можно использовать два способа: определение притягивающей или отталкивающей точек (на основе производной правой части) или графический способ (диаграмму Ламерея), в ходе чего делается упор на развитие такого креативного качества как гибкость мышления.

Точки $x_1 = 0, x_2 = 1 - \frac{1}{r}$. x_1 - неподвижная точка при любом r, при $r < 1$ x_2 лежит вне промежутка $[0; 1]$ и соответственно не является неподвижной точкой. Точка x_1 является притягивающейся при $r < 1$ и отталкивающаяся при $r > 1$, точка x_2 является притягивающейся при $1 < r < 3$ и отталкивающаяся при $r > 3$ [3].

Затем следует рассмотреть вторую итерацию $f^{(2)}(x) = f(f(x)) = r\,(rx\,(1-x))\,(1-rx\,(1-x))$.

Теперь возникает вопрос, как найти неподвижные точки и определить их характер, в зависимости от изменения параметра r.

Студенты замечают, что две неподвижные точки $x_1 = 0, x_2 = 1 - \frac{1}{r}$, полученные ранее, остаются и добавляются еще две точки $x_{3,4} = \frac{r(r+1) \pm \sqrt{(r-3)(r^3+r)}}{2r^2}$ периода 2. При этом, используя один из способов определения характера точек, находим, что точки $x_1 = 0, x_2 = 1 - \frac{1}{r}$ при $r < 1$ притягивающие, а при $r > 1$ – отталкивающие.

Далее необходимо рассмотреть точки $x_{3,4}$, но определить притягивающие они или отталкивающие достаточно сложно, поэтому разумнее всего воспользоваться ИКТ.

Как известно интеграционные процессы в науке являются средством развития критичности мышления, повышения мотивации. Данная модель наглядно демонстрирует нам то, что при ее составлении и исследовании студентам приходится использовать как знания в области математики, так и информатики, вследствие чего формируется такое креативное качество как критичность мышления [4].

В процессе исследования модели, характеризующей изменение численности популяции, студенты самостоятельно ставят себе проблему об определении характера неподвижных точек $x_{3,4}$ и самостоятельно пытаются найти решение поставленной проблемы, тем самым развивая в себе такое креативное качество, как познавательную активность.

Точки $x_{3,4}$ существую только при $r > 3$ и остаются притягивающимися до определенного значения параметра $r_1 = 3,44948$, который необходимо вычислить с помощью ИКТ, а далее одновременно становятся отталкивающимися

Отображение $f^{(4)}(x)$ будет иметь уже четыре притягивающиеся неподвижные точки до некоторого значения параметра r и ситуация повториться, они одновременно становятся отталкивающимися и т.д. при $n = 8, 16, ...$ В результате, обнаруживаем каскад бифуркаций, сопровождающаяся удвоением периода, при этом итерационный процесс прогнозировать становится невозможно, такое поведение назвали хаотичнским

Изобразив сложившуюся ситуацию, по оси Ох откладываем значения параметра r, а по оси Оу неподвижные точки, при чем только те которые являются притягивающимися (рис. 2).

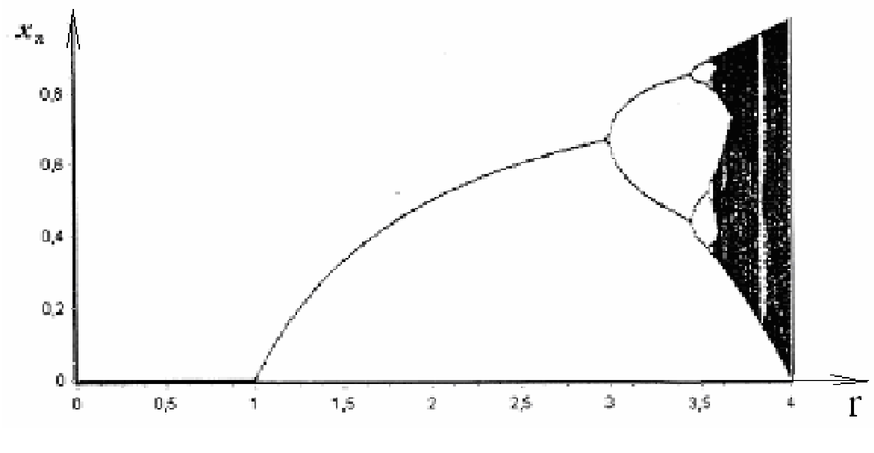


Рис. 2

Студенты, интерпретируя полученное решение, делают вывод: численность популяции, в зависимости от параметра r, будет вести себя не предсказуемо: либо вымрет при $r < 1$, будет расти при $1 < r < 3$, может пойти по двум различным сценариям (либо численность продолжит расти, либо станет уменьшаться) при $3 < r < r_1$ и т.д.

Вместе со студентами следует провести сравнительный анализ рассмотренных моделей.

Задание системы непрерывно $x' = x\,(a - bx)$ дает возможность нахождения изменений количества особей в любой момент времени. Исследование системы связано с качественной теорией дифференциальных уравнений и анализом сложных математических моделей, но изучение системы дает не точное описание реального процесса, не учитываются многие условия.

Задав дискретную динамическую систему, в итоге получаем простое одномерное отображение, которое обладаем интереснейшими свойствами, наблюдаемые при изменении параметра r и приводящие к процессу, обладающему хаотичностью.

Библиографический список

1. *Арнольд, В.И.* “Жесткие” и “мягкие” математические модели [Текст] / В.И. Арнольд. – М.: МЦНМО, 2000.
2. *Гринченко, В.Т.* Введение в нелинейную динамику: Хаос и фракталы [Текст] / В.Т. Гринченко, В.Т. Мацыпура, А.А. Снарский. – М.: Изд-во ЛКИ, 2007. – 264 с.
3. *Данилов, Ю.А.* Лекции по нелинейной динамике. Элементарное введение [Текст] / Ю.А. Данилов. – М.: КомКнига, 2006. – 208 с.
4. *Секованов, В.С.* Тетрадная форма обучения фрактальной геометрии и теории хаоса в рамках математического кружка [Текст] / В.С. Секованов // Des jeux a la creativite methodes d’educathion active. France, Juillet. Editions du JIPTO. 2007. – С. 172-175.

Глава 4

История и философия математики и математического образования

Несколько замечаний о мифотворчестве в истории математики

Г.М. Полотовский

Под мифотворчеством в этом тексте понимается выдвижение и распространение (повторение) утверждений, не подкрепленных источниками, а иногда и заведомо неверных. Конечно, "*общественное сознание отчасти мифологично, и это давно не новость*" [1, с. 137]. Однако ниже речь пойдет о мифах, "въевшихся" в научную дисциплину и в ее преподавание, а этого хотелось бы избегать.

1. "Мифы Древней Греции". Известно, что о биографии Пифагора нам ничего достоверно не известно. Что же написано по этому поводу разными авторами? В недавно вышедшей книге [2] читаем: "*Конечно, вся биография Пифагора является знаком вопроса. Родился он на богатом торговом острове Самос в Эгейском море рядом с Ионией. Учился у Фалеса и Анаксимандра. Был призером Олимпийских игр по кулачному бою. По совету Фалеса отправился для усовершенствования знаний в Египет, учился математике у египетских жрецов*". Где же здесь знаки вопроса, если излагаются такие подробности?[1]

В [3] написано: "*Пифагор много путешествовал: есть сообщения о его длительном обучении в Вавилоне (и, возможно, в Индии), а также в Египте*". Совсем без всяких оговорок о долгих путешествиях Пифагора сообщается в [4, с. 62], а в знаменитой книге Б.Л. ван дер Вардена [5] путешествиям Пифагора посвящен целый параграф (с. 129-132). Этот ряд примеров легко продолжить[2], причем недавнее популяризаторское издание [7] (тираж 300000) – явный претендент на наиболее полное собрание мифов о Пифагоре.

Все это, по меньшей мере, странно, поскольку еще в начале прошлого века известный немецкий философ Э. Целлер (1814-1908) писал [8]: "*Я считаю недоказанным пребывание Пифагора в Египте, но и доказать, что он там не был, также невозможно*", а никаких новых источников с тех пор не обнаружено. Особенно это странно для публикаций, вышедших позже книг [9, 10], в которых Л.Я. Жмудь на основании тщательного анализа источников, упоминающих о путешествиях Пифагора, приходит к выводу: "*Итак, что же можно сказать о путешествиях, если первые свидетельства о них явно недостоверны, а основанная на них поздняя традиция не добавляет ни одной правдоподобной детали? Лишь то, что у нас нет оснований верить в их реальность*" [9, с. 23].

Следует заметить, что утверждение о путешествиях Пифагора не так безобидно, как это может показаться: оно служит одним из подтверждений тезиса о заимствовании греками математики древних цивилизаций Востока. Этот тезис не является общепризнанным – в частности, в [9, 10] приведены многочисленные контраргументы[3].

2. Декарт, Ньютон и алгебраические кривые. "*Топологические описания кривых степеней 3 и 4 были получены Ньютоном и Декартом*". В этой фразе, впервые, кажется, опубликованной в [11], а затем повторенной в трех изданиях книги [12, с. 39] и (немного другими словами) в [13, с. 6], верным является, на мой взгляд, только утверждение "описание кривых степени 3 было получено Ньютоном". Действительно, классификация[4] неприводимых аффинных кривых степени 3 найдена И. Ньютоном [14]. Однако аналогичная по детализации (но проективная, а не аффинная, как у Ньютона[5]) классификация кривых степени 4, содержащая более 1000 типов, была получена лишь в конце XX века Д.А. Гудковым и его учениками. Что касается Р. Декарта, то хотя его "Геометрия" 1637 года [15], несомненно, сыграла исключительную роль в становлении и развитии "полиномиальной культуры", рассмотренные им алгебраические кривые[6] – декартов лист и овалы Декарта – не оказали влияния на развитие классификации алгебраических кривых. Более того, хотя разделение кривых

---

[1] В числе которых часто повторяющаяся ошибка: победителем на 48-х Олимпийских играх, т.е. примерно за 20 лет до рождения Пифагора-ученого, был его тезка (имя "Пифагор" означает "предсказанный Пифией" и не является уникальным).

[2] Отдельно в этом ряду стоит хорошая книга [6], в предисловии к которой честно написано, что вопросы, касающиеся биографии Пифагора, являются и "видимо, так и останутся предметом научных споров"; "автор предлагает свою версию биографии ученого". Но вряд ли все читают предисловия, зато многие запомнят красочно описанные в основном тексте приключения Пифагора: "Здесь погибают безумцы, возжелавшие тайного знания, – троекратно повторило эхо округлого зала чей-то вкрадчивый голос..." и т.п.

[3] Замечу, что мне не известны работы, в которых дана критика основных положений книг [9, 10].

[4] Эта более тонкая, чем топологическая, классификация содержит 78 типов.

[5] Не знаю, был ли Ньютон знаком с проективной геометрией, но по существу он знал и проективную классификацию неприводимых кривых степени 3, состоящую из 5 типов.

[6] Так же, как известные из древности конхоида Никомеда, циссоида Диоклеса и появившиеся в XVII веке парабола Нейля, строфоида Торричелли, лемниската Бернулли, улитка Паскаля и т.д.

на “геометрические” и “механические” принадлежит Декарту[1], его вклад собственно в задачу классификации алгебраических кривых, мягко говоря, незначителен. Дело в том, что Декарт предложил крайне неудачный параметр классификации: “*Если уравнение будет восходить до трех или четырех измерений обеих или одной из двух неопределенных величин..., то кривая будет второго рода. И если уравнение будет восходить до пяти или шести измерений, то она будет третьего рода, и так далее до бесконечности для других кривых*” [15, с. 33]. Иначе говоря, Декарт причислял кривые степеней $2m$–1 и $2m$ к одному роду m. Источником такого неестественного подхода было убеждение Декарта в том, что уравнение шестой степени приводится к уравнению пятой степени так же, как уравнение четвертой приводится к уравнению третьей [15, с. 35]. Ферма возражал Декарту, считая, что в случае уравнения с двумя неизвестными такое сведение в общем случае невозможно, но общепринятому подходу – классификации алгебраических кривых по степеням уравнений – мы обязаны Ньютону.

Замечу еще, что когда Декарт умер, Ньютону едва исполнилось 7 лет. Поскольку “описание кривых степени 3” неоспоримо принадлежит Ньютону, из процитированного в начале этого пункта тезиса следует, что Декарт нашел “описание кривых степени 4” раньше, чем были расклассифицированы кривые степени 3, что, конечно, невероятно.

3. Биография и иконография Н.И. Лобачевского. Описание биографии Н.И. Лобачевского в недавнем издании [16] (тираж 100000) начинается со следующего интригующего заявления: “*Место и дата рождения Николая Ивановича Лобачевского до сих пор вызывают споры среди биографов*”. Действительно, это так... было до 1948 года! Не знаю, из какого устаревшего текста списана эта фраза, но в любом случае это неуважение к памяти о многих замечательных людях, приложивших большие усилия для раскрытия загадок биографии Лобачевского. Ввиду недостатка места перечислю здесь только некоторые из имен, отсылая читателя за подробностями к моей статье [17]: математики А.В. Васильев (1853-1929), В.Ф. Каган (1869-1953), Д.А. Гудков (1918-1992), архивариус И.И. Вишневский (1862-1943), литературовед и архивист Л.Б. Модзалевский (1902-1948), историк Б.В. Федоренко (1913-2007), академик А.А. Андронов (1901-1952), архивист-палеограф Н.И. Привалова (1900-1987). Дата рождения Н.И. Лобачевского – 1 декабря (20 ноября по старому стилю) 1792 года – является общепризнанной с 1948 года, после публикации ее в книгах [18, 19] В.Ф. Кагана, автора очень аккуратного и осторожного. Что касается места рождения, то с 1956 года (после публикаций [20] и [21]) нет сомнений, что это Нижний Новгород.

Другой миф в [16] – навязчивый штамп “11 (23) *февраля* 1826 *года навсегда вошло в историю математики. В этот день* $<\ldots>$ *Лобачевский прочитал доклад, в котором сформулировал основные идеи новой геометрии*”. Уже неоднократно отмечалось (например, в [17, 22]), что нет никаких данных о том, что Лобачевский прочитал доклад – известные документы лишь сообщают, что он представил на отзыв свою рукопись, которая утрачена и о ее содержании нет никаких достоверных сведений.

Оставляя в стороне прочие ошибки в [16], ограничимся лишь вновь создаваемым мифом: “В разных городах нашей страны стоят памятники “Копернику геометрии””. Мне известен только один памятник[2] Лобачевскому – скульптура работы М.Л. Диллон, установленная в 1906 году перед зданием Казанского университета. К сожалению, до сих пор нет памятника Н.И. Лобачевскому на его родине, в Нижнем Новгороде.

Неблагополучна ситуация и с живописными изображениями Лобачевского. Еще в 1988 году Б.В. Федоренко доказал в [22] (и это неоднократно отмечалось позже), что на портрете работы В.А. Щеголькова изображен не Лобачевский. Тем не менее, этот портрет до сих пор появляется в качестве портрета Н.И. Лобачевского в разных изданиях. Так, из 50 первых живописных изображений, выдаваемых поисковой системой “Google” по запросу “Н.И. Лобачевский”, 9 являются портретом неизвестного кисти В.А. Щеголькова. К сожалению, этот портрет неизвестного выступает в роли изображения Лобачевского и в книге [1, с. 153].

4. Сравнение Гудкова. В 1969 году Д.А. Гудков нашел топологическую классификацию неособых вещественных кривых степени 6, ответив тем самым на один из главных вопросов первой части 16-ой проблемы Гильберта. При этом Гудков, заметив закономерность в таблице реализуемых расположений кривых степени 6, проверил эту закономерность для кривых более высоких степеней, строящихся известными в то время методами, и сформулировал ее в виде сравнения (см. ниже). После безуспешных попыток доказать это сравнение Д.А. Гудков стал пропагандировать его – в частности, в 1971 году опубликовал это сравнение в качестве гипотезы в заметке в Докладах Академии Наук. Вот как пишет сам Д.А. Гудков в [23]: “*Решение задачи о кривых шестого порядка позволило мне сформулировать следующую гипотезу: если* $f{=}0$ *есть уравнение M-кривой четного порядка* m в $\mathbf{R}P^2$ *и множество* $B_+(f{\geq}0)$ *ориентируемо, то* $\chi(B_+) \equiv (m/2)^2 \bmod 8$”[3]. В том же 1971 году В.И. Арнольд в своей замечательной статье [24], открывшей, по общему признанию, современный период в исследовании топологии вещественных алгебраических многообразий, доказал указанное сравнение

[1] По-видимому, именно это подразделение кривых на “геометрические” и “механические” (т.е. в идущих от Г.В. Лейбница современных терминах – на алгебраические и трансцендентные соответственно) имеется в виду под словом “классификация” на стр. 31 в [4]: “Декарт нашел единое построение для решения уравнений 3-й и 4-й степени с помощью параболы и окружности. Впрочем, использование геометрических построений в алгебре привело его к классификации алгебраических кривых и тесно связано с развитием аналитической геометрии”.

[2] Не считая нескольких бюстов.

[3] Первоначальная формулировка Гудкова приведена ниже в цитате из [26].

"наполовину", т.е. по модулю 4, а не по модулю 8. В следующем году В.А. Рохлин доказал это сравнение в полном объеме и при этом назвал его гипотезой Гудкова[1]. Такова вкратце[2] хорошо известная и многократно описанная в обзорах разных авторов история открытия и доказательства первого ограничения на топологию вещественных алгебраических многообразий, имеющего вид сравнения (до этого все ограничения имели вид неравенств).

До 2002 года В.И. Арнольд описывал эту историю точно так же. Приведу только два примера: "*Утверждение* (1) (т.е. приведенное выше сравнение – *Г.П.*) (*с заменой модуля* 4 *на* 8) *было сформулировано Д.А. Гудковым в виде гипотезы, подтвержденной большим количеством примеров. Хотя доказательство сравнения* (1) *не использует результатов Д.А. Гудкова, настоящая работа не могла бы быть выполнена, если бы Д.А. Гудков не сообщил автору о своей гипотезе*" [23, с. 6]; "*Я вспоминаю, как И.Г. Петровский, ректор МГУ и основатель теории вещественных алгебраических кривых, попросил меня прочитать диссертацию Д.А. Гудкова. Гудков решил задачу о взаимном расположении овалов вещественных алгебраических кривых степени 6 в проективной плоскости. В этой очень сложной диссертации, которую я никогда не читал, я был поражен одним сравнением по модулю* 8, *высказанным Гудковым в качестве гипотезы*[3]: $p - m \equiv k^2 (\mathrm{mod} 8)$, *где p есть число овалов гладкой кривой степени* $2k$, "*содержащихся внутри" четного числа овалов, и m есть число овалов этой кривой, содержащихся внутри нечетного числа овалов, при условии, что общее число овалов достигает своего максимального значения.* <...> *Сравнение Гудкова подтверждали все M-кривые, известные к тому моменту*" [26]. Однако в [12] В.И. Арнольдом написано, в частности, следующее: "*Продумывая работу Гудкова,* ***я заметил*** (выделено мной – *Г.П.*), *что не только для кривых степени 6, но и для всех исследованных им кривых четной степени проявлялись замечательные сравнения по модулю* 8" [12, с. 42]. Естественно, это вызвало недоумение тех, кто знал историю открытия сравнения Гудкова, а Е.И. Гордон[4] в 2003 году написал В.И. Арнольду: "*К сожалению, нашел в ней* (т.е. в книге [12] – *Г.П.*) *некоторую неточность на стр. 42-43, относящуюся к сравнению Д.А. Гудкова... Было бы очень хорошо, если бы Вы сочли возможным в каком-нибудь виде эту неточность исправить*". В своем ответе от 28 ноября 2003 года В.И. Арнольд, настаивая на своей версии, снабдил ее разными дополнительными подробностями, отметив при этом, что "*доказательств в письменном виде у меня нет*". К сожалению, В.И. Арнольд стал повторять свою версию в последующих публикациях [13] и [27], снабжая ее этими и все новыми удивительными подробностями, противоречащими и тому, что В.И. Арнольд писал до 2002 года, и истинному положению вещей, о котором я могу судить как ученик Д.А. Гудкова, бывший с ним едва ли не в ежедневном контакте с 1970 до 1992 года. После появления публикации в УМН [27] Е.И. Гордон и я направили совместное подробное письмо в редакцию этого журнала, в котором на основании документов из архива Д.А. Гудкова (один из этих документов опубликован в [25, с. 192]), а также всего корпуса имеющихся публикаций, восстанавливали действительную историю открытия сравнения Гудкова, в которой мы убеждены. Одновременно мы послали электронную копию этого письма В.И. Арнольду и ряду известных математиков, в том числе ученикам В.И. Арнольда. К сожалению, редакция журнала даже не сочла должным сообщить о получении письма. Впрочем, нашей целью не была, конечно, публикация "против Арнольда" – письмо завершалось так: "*Вероятно, создавшаяся ситуация – результат известного явления специфической "аберрации памяти", о котором хорошо написал Г. Цейтен* [11]: "*Декарт проявил ту же недооценку того, чем он обязан другим, за которую его упрекали в области философии. Это нередкая ошибка великих умов, которые воспринятое у других тотчас же путем новой и самостоятельной переработки включают в свою собственную систему*"". Мы хотели разъяснить математическому сообществу истинное положение дел и защитить доброе имя Д.А. Гудкова[5]. Надеемся, что в какой-то мере это удалось. Но мифы живут самостоятельной жизнью: так, на странице "Википедии", посвященной 16-ой проблеме Гильберта, история открытия сравнения Гудкова периодически излагается в версии Арнольда, а миф из раздела 2 этой заметки, снабженный ссылкой на [12], присутствует постоянно.

5. Что делать? К сожалению, историко-математические мифы не исчерпываются рассмотренными выше – отмечу, например, мифы вокруг гипотезы Гольдбаха, детально разобранные в [1]. Что же со всеми этими мифами делать? В части, касающейся общественного сознания – по-видимому, ничего: что можно противопоставить закону природы? Замечательно подходит здесь сказанное недавно писателем и кинокритиком Ю.А. Богомоловым (см. http://www. grani.ru/opinion/m.188292.html) по поводу, не связанному с историей математики:

---

[1]Сейчас в литературе это сравнение называется обычно "сравнение Гудкова-Рохлина".

[2]Подробности и ссылки на оригинальные работы можно найти в моей статье [25].

[3]В действительности в диссертации Гудкова ни сравнения, ни гипотезы не было: в то время Гудков еще пытался доказать сравнение самостоятельно.

[4]Профессор Е.И. Гордон (сейчас работает в США) проработал на кафедре Д.А. Гудкова около 20 лет; кроме того, Д.А. Гудков был близким другом его родителей, и все обстоятельства, связанные с результатами и с докторской диссертацией Д.А. Гудкова, много раз подробно обсуждались у него дома.

[5]Я считаю необходимым сделать следующее замечание личного характера. Как и многие другие, я считаю В.И. Арнольда одним из самых выдающихся математиков нашего времени и отношусь к нему с глубоким уважением. Кроме того, я многим обязан В.И. Арнольду: он был оппонентом при защите моей диссертации и оказывал мне поддержку и в нематематических ситуациях. Но и своему учителю Д.А. Гудкову я обязан не в меньшей степени.

"*Массовое сознание (и в особенности массовое подсознание) инфантильно. Оно готово воспринимать историю в форме сказок и легенд. Оно предпочитает реалиям их толкования. А беллетристику – документалистике*".

"*Конечно, крот мифологии делает свое дело. Он роет глубже крота истории. А массовое сознание так устроено, что перед историей оно отдает предпочтение мифологии, которая и вытесняет из голов отдельных граждан картину того, что и как было на самом деле*".

Занимаясь же историей математики (в том числе чтением лекций или написанием книг) можно, конечно, поддерживать любые версии или изобретать собственные, но при этом весьма желательно четко отделять версию от факта, а если позволяют время и место – то хотя бы упоминать о других имеющихся версиях.

Библиографический список

1. *Успенский, В.А.* Апология математики [Текст] / В.А. Успенский. – СПб.: Амфора, 2009. – 554 с.
2. *Гильмуллин, М.Ф.* История математики [Текст]: учеб. пособие / М.Ф. Гильмуллин. – Елабуга: Изд-во ЕГПУ, 2009. – 212 с.
3. *Зверкина, Г.А.* История математики [Текст]: учеб. пособие / Г.А. Зверкина. – М.: МИИТ, 2005. – 108 с.
4. *Даан-Дальмедико, А.* Пути и лабиринты. Очерки по истории математики [Текст] / А. Даан-Дальмедико, Ж. Пейффер. – М.: Мир, 1986. – 431 с.
5. *Ван дер Варден, Б.Л.* Пробуждающаяся наука [Текст] / Б.Л. Ван дер Варден – М.: ГИФМЛ, 1959. – 459 с.
6. *Волошинов, А.В.* Пифагор: союз истины, добра и красоты [Текст] / А.В. Волошинов. – М.: Просвещение, 1993. – 224 с.
7. Пифагор [Текст] // Еженед. издание "100 человек, которые изменили ход истории". – Изд-во "Де Агостини", 2008. – Вып. 19.
8. *Целлер, Э.* Очерк истории греческой философии [Текст] / Э. Целлер. – М.: Типо-лит. Ю. Венер, 1912. – 256 с.
9. *Жмудь, Л.Я.* Пифагор и его школа [Текст] / Л.Я. Жмудь. – Л.: Наука, 1990. – 188 с.
10. *Жмудь, Л.Я.* Наука, философия и религия в раннем пифагореизме [Текст] / Л.Я. Жмудь – СПб.: ВГЛ, Алетейя, 1994. – 375 с.
11. *Арнольд, В.И.* Топология действительных алгебраических многообразий [Текст] / В.И. Арнольд, О.А. Олейник // Вестник МГУ. Математика. Механика. – 1979. – № 6. – С. 7-17.
12. *Арнольд, В.И.* Что такое математика? [Текст] / В.И. Арнольд. – М.: МЦНМО, 2002. – 104 с.
13. *Арнольд, В.И.* Экспериментальное наблюдение математических фактов [Текст] / В.И. Арнольд. – М.: МЦНМО, 2006. – 119 с.
14. *Newton, I.* Enumeratio linearum tertii ordinis. Optics. London, 1704. – P. 138-162.
15. *Декарт, Р.* Геометрия [Текст] / Р. Декарт. – М.-Л.: ОНТИ, 1938. – 296 с.
16. Николай Лобачевский [Текст] // Еженедельное издание "Наша история. 100 великих имен". – Изд-во "Де Агостини", 2010. – Вып. 38.
17. *Полотовский, Г.М.* Как изучалась биография Н.И. Лобачевского [Текст] / Г.М. Полотовский // Историко-математические исследования. – 2007. – Сер. 2. – Вып. 12(47). – С. 32-49.
18. *Каган, В.Ф.* Великий ученый Н.И. Лобачевский и его место в мировой науке [Текст] / В.Ф. Каган. – М.-Л.: ГИТТЛ, 1948. – 84 с.
19. *Каган, В.Ф.* Лобачевский [Текст] / В.Ф. Каган; 2-е изд. М.-Л.: Изд. АН СССР, 1948. – 508 с.
20. *Андронов, А.А.* Где и когда родился Н.И. Лобачевский (Записка о месте и дате рождения Н.И. Лобачевского) [Текст] / А.А. Андронов // Историко-математические исследования. – 1956. – Вып. IX. – С. 9-48.
21. *Привалова, Н.И.* Дом, в котором родился Н.И. Лобачевский [Текст] / Н.И. Привалова // Историко-математические исследования. – 1956. – Вып. IX. – С. 49-64.
22. *Федоренко, Б.В.* Новые материалы к биографии Н.И. Лобачевского [Текст] / Б.В. Федоренко. – Л.: Наука, 1988. – 384 с.
23. *Гудков, Д.А.* Топология вещественных проективных алгебраических многообразий [Текст] / Д.А. Гудков // УМН. – 1974.– Т. 29. – Вып. 4(178). – С. 3-79.
24. *Арнольд, В.И.* О расположении овалов вещественных плоских алгебраических кривых, инволюциях четырехмерных гладких многообразий и арифметике квадратичных форм [Текст] / В.И Арнольд // Функц. анализ и его приложения. – 1971. – Т. 5. – Вып. 3. – С. 1-9.
25. *Полотовский, Г.М.* Топология вещественных алгебраических кривых: история и результаты [Текст] / Г.М. Полотовский // Историко-математические исследования. – 2011. – Вып. 14(49). – Сер. 2. – С. 177-212.
26. Questions à V.I. Arnold. Interview réalisé par Michèle Audin et Patrick Iglesias // Gasette des mathematicians. № 52, Avril 1992. – P. 5-12.
27. *Арнольд, В.И.* Недооцененный Пуанкаре [Текст] / В.И. Арнольд // УМН. – 2006. – Т. 61. – Вып. 1(367). – С. 3-24.
28. *Цейтен, Г.Г.* История математики в XVI и XVII веках [Текст] / Г.Г. Цейтен. – М.-Л.: ГТТИ, 1933. – 429 с.

Математика социальных пространств: расширение дискурса (на пути к "новой" истории математики)[1]

Р.А. Симонов

Обычно в исторической/ культурной (социальной) антропологии применяется понятие более узкого смысла – "геометрия социальных пространств". О предмете "геометрии социальных пространств" академик Вяч.Вс. Иванов говорит следующее: "Ее предмет включает не только пространственные модели человеческих поселений – от изучаемых археологией и этнологией до современных городов – мегаполисов. Эта наука исследует и соответствующие биологические модели, например, муравейников, термитников. Наконец, она изучает и пространственные структуры коллектива клеток. Проблемы геометрии мозга исследовались нашими математиками еще на первых этапах развития у нас кибернетики" [4, с. 388]. Наличие указанной науки ("геометрии социальных пространств") не исключает антропологического подхода к другим математическим явлениям, например, числам, а не только пространственным структурам. Так, Вяч.Вс. Иванов отдельный раздел цитированной книги посвящает/ отводит материалу, озаглавленному "К антропологии числа" [4, с. 420-442]. То есть в принципе речь может идти об антропологии математического знания в целом, а не только об отдельной его части – геометрии.

Этот, вообще говоря, тривиальный вывод может иметь важное значение для расширения предмета истории математики, как он традиционно понимается – как имеющий отношение исключительно или преимущественно: 1) к математике как науке и 2) к преподаванию математики в школе и вузе. В свете изложенного вырисовывается третий аспект истории математики – антропологический – с предметом, имеющим отношение: 3) к использованию математики в повседневной жизни человека[2].

Видный историк науки А.П. Юшкевич (1906-1993) писал: "Подводя итоги развития математической культуры в России до XVIII века, мы видим, что к этому времени были удовлетворены лишь первые потребности в сравнительно элементарных областях. Возникла рукописная литература по практической арифметике и геометрии, но попытка создания более совершенных руководств по геометрии не получила официальной поддержки… В итоге наука в целом, и математика в частности, резко отставали у нас от передовых стран Западной Европы, где на протяжении XVII столетия достигнуты были большие успехи в астрономии и механике, химии и биологии, где Декарт и Ферма заложили начала аналитической геометрии, Ньютон и Лейбниц, завершая труды целой плеяды ученых, разработали основы дифференциального и интегрального исчисления, и где успешно исследовались проблемы теории чисел, теории вероятностей, проективной геометрии и т.д." [5, с. 51].

Соглашаясь в целом с такой оценкой, следует отметить ее ориентированность на научную сторону математики (концепт[3]: математика в науке и для науки). О просветительной или образовательной стороне математики тот же автор писал: "В первой четверти XVIII века математическому просвещению в России было сообщено новое направление. Математика перестает быть частным делом, и обучение ей ставится на службу политическим, военным, экономическим задачам государства. За распространение светского образования борется с большой энергией правительство во главе с царем, позднее императором Петром I (1682-1725)" [5, с. 52] (концепт: математика в образовании и для образования).

Культурно-гуманитарные вопросы математики обычно/ как правило рассматриваются в качестве попутного материала в отмеченных двух концептах (научном и образовательном). Это, тем не менее, свидетельствует об объективном существовании соответствующего третьего концепта: математика в повседневной жизни человека и для нее. Имеются попытки вычленения указанного концепта как самостоятельного аспекта математического знания. Например, еще в 1976 г. историк науки В.К. Кузаков выделил в составе древнерусской математической культуры математику "повседневной практики" или "математику быта". Ставя на достаточно высокое место (по средневековым меркам) математические знания Кирика Новгородца [9, с. 129-143] и составителей/ разработчиков пасхальных таблиц, В.К. Кузаков отмечал: "Разумеется, в повседневной практике в ходу была более

[1]В настоящей статье под словом "дискурс" понимается контекстное поле, в котором работает автор статьи, это поле не совпадает полностью с традиционным дискурсом истории математики. В принципе, любая исследовательская деятельность предполагает расширение дискурса, что не требует специальной апелляции к идее дискурса. Такое обращение необходимо, как кажется, тогда, когда, как в данном случае, необходимо приобщить/ завоевать аудиторию, сделать ее сознательным участником-адептом нового/ расширенного дискурса (контекстного поля) истории математики (см. [1; 2; 3, с. 419]).

[2]Указанная градация имеет определенное подтверждение в существующей номенклатуре ученых степеней, присуждаемых за диссертации по истории математики: по физико-математическим наукам в области истории математики как науки и по педагогическим наукам в области истории математического просвещения/ образования. Относительно мало защищается работ в области истории математики по историческим наукам, но именно в них затрагиваются / поднимаются гуманитарные вопросы культуры научной деятельности, например, в диссертации доктора исторических наук М.М. Рожанской об арабских средневековых математических рукописях.

[3]Здесь "концепт": смысл денотата (предмета) соответствующего имени, напр., выраженного словами "математика в науке и для науки"; подробнее см. [6, с. 263]. Доктор философских наук А.Л. Никифоров указывает на аналогичный случай: толкование термина "концепт" как смысла слова: "Наш известный лингвист Ю.С. Степанов, рассматривая понятие смысла в естественном языке, истолковывает смысл как некий *концепт*" ([7, с. 43]; см. также: [8, с. 43] и др.).

простая математика – математика «быта»" [10, с. 113]. Аспект повседневной "математики быта" в свое время не нашел мало-мальски значимого развития в истории математики.

Почему "математика быта" недостаточно изучается историей математики? Возможно, из очевидности этого феномена ("математики быта") для математиков до такой степени, что он (этот феномен) становится "нематематикой" – противоположностью математики (как научной и образовательной системы). Это как будто бы согласуется со следующей психологической моделью. Если для математика она сама – его Я (Ego), то тогда "математику быта" можно рассматривать как восприятие "другого", не Я (Alter ego), Юнговской "Тени" [11], имплицирующее неочевидность ее ("математики быта") понимания как "математики". О подобом механизме восприятия недавно (по другому поводу) А.М. Кантор писал: "... То, что основатель аналитической психологии К.Г. Юнг определял как "Тень", т.е. нечто, имеющее для человека (и культуры) базовое, универсальное, архетипическое значение, но, в то же время, неочевидное для него самого – alter ego, обладающее его волей и заслоняющее от него" [12, с. 383]. Предложенная модель как будто бы показывает, как психологическими причинами можно объяснить недостаток внимания ученых к "математике быта".

Причем, по мнению ряда ученых (упрощенно говоря) [13, с. 55-63][1], в силу особенностей когнитивного (познающего) восприятия, человек сразу выделяет/ различает объекты, похожие на Эго, и в дальнейшем учитывает это различие. Значит, по указанной концепции [2], человек уже на уровне восприятия, может различать объекты/ явления, как принадлежащие "математике" (в его понимании) или к ней не относящиеся. Следовательно, исключение "математики быта" из области "математики" может производиться людьми непроизвольно, без предварительного анализа/ размышления. При этом мотивация историка математики направлена на сохранение традиционного состава "математики", что обусловливает дефицит внимания к изучению "математики быта".

Указанное невнимательное отношение к "математике быта", возможно, усиливается историческими обстоятельствами. Существует мнение, что письменность, изобретенная византийцами Константином-Кириллом и Мефодием для славян, несла им готовое знание, не совсем адекватное ментальности неофитов. В результате сложилась оппозиция "книжности"/ "некнижности", в которой заложены смыслы сакрального и профанного, культурного/ научного и бытового. Культуролог А.Г. Захарченко об этом размышляет так: "Мы получили письменность "почти что внезапно" и, можно сказать, задаром. Это событие изменило национальное языковое сознание и неразрывно связанную с ним ментальность и заложило один из основополагающих структурных принципов нашей культуры. Оппозиция "книжности"/ "некнижности" на разных этапах истории проявлялась как сакральное и профанное (церковное и гражданское), свое и чужое, культурное и бытовое, даже вульгарное и т.д. Легко увидеть, что она жива и продуктивна в различных сферах общественной жизни и по сию пору" [15, с. 342].

Действительно, пренебрежительное отношение к изучению "математики быта" в определенной степени можно отнести на счет указанной черты национальной культуры, связывающей "быт" с профанной, "некнижной" (ненаучной) сферой жизни, где "математика" (понимаемая в научном и образовательном, но не бытовом значениии) занимает довольно высокое место. (Другое дело, что хотелось бы видеть это место еще более высоким; кстати, это можно обеспечить и за счет большего внимания к "математике быта".)

Недавно появилось направление под названием "математиковедение" (как своего рода частный случай науковедения – науки о науке), одной из задач которого является определение места математики в системе наук [16, с. 184-190; 17, с. 190-195; 18, с. 135-141]. Любопытно, что в перечне разделов математиковедения повседневность явно не фигурирует, а представлена как бы неявно - в стертом и неопределенном виде ("математика и общество"). В основном же математиковедение охватывает математику как науку, включая философско-методолого-исторический аспект ("интеграция различных областей математики", "история и современное состояние математики", "философия математики", "методология математики"), и образовательную составляющую ("математическое образование", "математическое просвещение") [18, с. 136]. По существу, математиковедение остается в том же (привычном) "организованном" пространстве математического знания, в котором "правят бал" научный и образовательный аспекты, а "неорганизованная"/ "стихийная" повседневность, как постоянная/ константная часть человеческого бытия, по существу остается за пределами историко-математического пространства.

А между тем, именно осмысление "первобытным" человеком повседневности могло привести к выделению математики (одновременно и ее истории) в самостоятельный объект знания. В частности, известный ученый-антрополог Клод Леви-Стросс стоял у истоков антропологического подхода к математике, исследуя геометрическую структуру жилищ индейцев (в рамках разработки "геометрии социальных пространств"). В результате, например, выяснилось, что структура поселений индейцев бороро в Бразилии, сопоставимая также со сходными данными по племени виннебаго в США и некоторых племен Индонезии, укладывается в двоичную и троичную структуру: "Оказалось, что одна из половин (поселения – Р.С.), в свою очередь делится на две половины. Поэтому вся система может описываться как двоичная – радиальная, и как троичная – концентрическая" [19; 4, с. 388].

[1] Статья открывает панельную дискуссию по интерсубъективности.

[2] Указанную концепцию разделяют не все ученые, см. [14, с. 81].

Нетрудно заметить, что при этом наименьшая часть поделенного пространства арифметически будет равна 1/4 поселения, а геометрически (но без учета точной меры) – 1/3. В трактовке “первобытного” восприятия речь шла об одном и том же, однако арифметически невозможно одну треть приравнивать одной четверти, хотя геометрически “первобытное” сознание это допускало. Возможно, осознание указанного противоречия дало на заре человечества толчок, который в конце концов привел к выделению двух самостоятельных (но взаимосвязанных) частей математики – геометрии и арифметики. Для Руси эта история/ ситуация имеет особое значение, поскольку здесь сформировался уникальный, нигде более не встречающийся счет, основанный на последовательном делении пополам дробей: одной четвертой (“чети” – по-древнерусски) и одной третьей (“трети”). Эта структура служила основой так называемых “сошных дробей”, которые использовались при проведении общегосударственной фискальной реформы (поземельного обложения), осуществляемой правительством Ивана Грозного в России с середины XVI века.

Чтобы глубже и полнее разобраться в математизации фискальной реформы XVI в., обратимся к опыту расширения дискурса исторической географии в смысле, подобном указанному в начале настоящей статьи. Здесь “прежнее, традиционное понимание исторической географии прошлого подверглось принципиальной корректировке... География происходивших в прошлом процессов стала переосмысливаться как география территориального размещения в изучаемом прошлом явлений культуры, или география культуры ушедших в историю эпох. Такое понимание исторической географии, которое давал В.А. Муравьев, помещало ее не просто в ряд вспомогательных исторических дисциплин, но превращало в одну из отраслей современного научного гуманитарного знания, ставящего в центр своего внимания процессы развития культуры, которая понимается предельно широко, как общий результат всех форм деятельности человека и общества” [20, с. 496-497].

В историографии появился термин “культурная география” как результат указанного расширения дискурса исторической географии. Причем такое расширение контекстного поля исторической географии подготовило ее превращение в новый эффективный способ изучения гуманитарного знания, деятельности человека и общества. Культурная география “стала все смелее покидать поле естествознания и интересоваться не только социально-экономическими процессами, но искать культурно-антропологическую основу для своих исследований,... результатом чего надо признать возникновение “новой” культурной географии...” [21, с. 36]. При этом четко определилась ограниченность исследовательских возможностей прежней (классической) исторической географии: “...Классическая историческая география в своих объяснениях использовала в основном материальное взаимодействие природных условий – рельефа, воды, почв и климата с материальной деятельностью человека, без социокультурного контекста. Семиотическая среда географии в исторической динамике, т.е. подвижность и изменчивость пространственных представлений людей, выраженная в географической символике, в расчет не бралась” [22, с. 187].

Нечто похожее происходило в исследовании математизации фискальной реформы XVI в. в классической истории математики. При этом основным критерием выступало соответствие содержания источников некоему идеалу математического знания, а не социальным процессам и явлениям. Суммарные выводы историков математики были такими. Геометрические методы измерения площадей удивительно архаичны и не отличаются точностью, давая ошибку до 20%. Арифметические методы используют ограниченный набор исходных дробей: 1/2, 1/3, 1/4 и систему цепных делений пополам третей и четей (четвертей) [по типу полтрети, пол-полтрети, пол-пол-полтрети и так далее, полчети, пол-полчети, пол-пол-полчети и т.д.] и их комбинаций, чем выражалась практически любая дробь, встречавшаяся в сошном письме. Историки математики, сознавая связь этих (геометрических и арифметических) знаний с фискальной основой сошного письма, глубоко не вникали в социальные особенности их (соответствующих математических знаний) возникновения, употребления и развития.

Чтобы понять значение указанных знаний, необходимо рассмотреть социальный смысл геометро-расчетной составляющей фискальной реформы XVI в. (более подробно см. [23, с. 93-103]). Для России XVI в. при проведении поземельного налогообложения огромную проблему составляла необыкновенно увеличившаяся территория страны: в 10 раз за сто лет. Как ярко писал по этому поводу Карл Маркс: “Изумленная Европа, в начале царствования Ивана едва замечавшая существование Московии, была поражена внезапным появлением на ее восточных границах огромного государства” (цит. по [24, с. 8, 13]). Можно себе представить, что кадастровая перепись огромных площадей земли, разнообразной по качеству, назначению и расположению (пашни, леса, луга, пустоши, взгорья, озера, реки, степи, тундра), казалась невыполнимой за короткое время. И тем не менее она была решена, что является вопросом исключительной исторической и практической важности. Ведь если бы налоговое обеспечение не было своевременно проведено, то государство в новой неимеверно расширившейся величине, не имея необходимых средств, не выдержало бы тяжести расходов на свое существование, и просто рассыпалось на массу мелких уделов. Эта проблема стоит до сих пор (конечно, в преображенном виде) перед нашей родиной, остающейся одной из самых больших по территории стран мира.

Исходя из указанных обстоятельств, при решении налоговых проблем для такой большой территории, как Россия, требовалась надежная и простая математическая система, включавшая геометрическую и расчетно-арифметическую составляющие. Насколько известно, такой математической системы в Европе не существовало, так как никогда ранее не возникала проблема использования столь специального геометро-арифметического обеспечения сбора налогов в быстро возникшем огромном государстве. Следует учитывать, что государство не просто разрослось: население центральных районов России максимально уплотнилось: “...На конец XV –

первую половину XVI в. приходится максимальное уплотнение расселенческой структуры, когда плотность деревень и починков в Замосковском крае в среднем составляла от 1 до 4-х на [квадратный] км. В результате этой волны внутренней колонизации поселениями были заняты все удобные для проживания места" [25, с. 222].

Есть одна сложная проблема, которая пока не имеет полного решения, но как будто бы обретает контуры направления возможного изучения: это организация практики землемерных работ в рамках фискальной реформы XVI в. Об этом отсутствуют надежные источники. Однако недавно источниковедом А.А. Фроловым была предпринята исследовательская работа в рамках одного из научных проектов РФФИ по реконструкции деятельности составителей писцовой книги Деревской пятины Новгородской земли 1495-1496 гг. [26, с. 446-449]; см. также [27, с. 29-81]. Была проведена реконструкция маршрутов движения писцов по территории отдельных погостов-округов, изучен алгоритм их работы (см. [28, с. 55-69; 29, с. 299-318; 30]). Для нас особый интерес этот вопрос имеет в связи с тем, что он пересекается/ перекликается с исследованием молодого А.Н. Колмогорова, который, как известно, первоначально хотел заняться не математикой, а историей [31]. Эти его исследования не остались втуне, а привлекли внимание историков в связи с указанными новейшими работами.

Дело в том, что новая расшифровка текста писцовой книги Деревской пятины дала интересные результаты для воссоздания измерительной работы писцов, приближенной к реальности. Точность измерений через периметр ("округою") была при определенных обстоятельствах еще более низкой, чем математический "идеал" приближенной формулы, которая имела, как отмечалось выше, довольно большую погрешность в 20%. В действительности, "дорожная"/ скоростная измерительная практика могла давать большую/меньшую погрешность (в зависимости от направления суммирующихся погрешностей – с избытком или недостатком).

Описание земель Деревской пятины происходило "в движении" с достаточно высокой скоростью. Дневной путь писца достигал 36-40 км (иногда до 41-45 км); тяглоспособность хозяйства определялась оценкой писца, сделанной "на глаз", и обежным окладом соответствующей единицы обложения, указанной в книге "старого письма". Именно в связи с этими книгами, в том числе с их датировкой ок. 1480 г., в современной историографии дается ссылка на указанную работу А.Н. Колмогорова [32, с. 227-228]. Важно, что территории, ранее проходившие фискально-кадастровый учет, с его письменной фиксацией в соответствующих книгах (типа "старого письма"), в смысле быстроты расчетов находились несравненно в более выгодном положении, чем земли, его не имевшие (преимущественно южные и восточные районы; именно здесь возникала проблема задержек в связи с измерением пространств новых угодий).

Историки математики разграничивают (по критерию точности) изложение средневековой геометрии и арифметики в России: геометрию считают собравшей в себе приближенные, отличающиеся архаичностью методы, а арифметику – более научной/ точной. А.П. Юшкевич объясняет это разницей интересов пользователей арифметических и геометрических знаний: "Арифметика в значительной мере обслуживала предприимчивый торговый люд, высоко ценивший точность в денежных расчетах. А землемерной геометрией занимались чиновники, пользовавшиеся прадедовскими приемами, не придавая большого значения их точности и не будучи заинтересованными в ней. Обилие свободной земли также не стимулировало аккуратности измерений" [5, с. 46].

Однако в состав древнерусской арифметики, как говорилось выше, входила сошная арифметика, которая также ориентировалась не на точность, а на приближенность результатов. Это подтвердил недавними исследованиями израильский ученый М.А. Цайгер, который отметил, что в сошной арифметике результаты имели точность до 1/48: "Если же в итоге получались более мелкие дроби, то их попросту отбрасывали, полагая, что их учет не повлияет по существу на результат" [33, с. 57]; см. также [34, с. 135-142]. Поэтому в действительности древнерусская измерительная геометрия и сошная арифметика были объединены общим подходом – достижением результата с опорой на приближенные методы – "скорости ради мерныя", что определяло "обилие свободной земли" (А.П. Юшкевич). Следовательно, сошная математика выражала (в единстве геометрической и арифметической составляющих) своего рода идею минимакса: достижение минимальными средствами максимального эффекта.

Русская сошная математика, будучи уникальным явлением, в то же время включала в себя отдельные элементы математического знания, присущие культурам разных стран, разбросанных по всей Евразии: Индии, Золотой орды, Литвы, Англии и др. Фиксируя в сознании, что ядро сошной математики отличается архаичностью, можно допустить его (ядра) возникновение в отдаленные эпохи у пранарода, впоследствии распавшегося на отдельные группы, расселившиеся по Евразии. Эта модель соответствует открытию члена-корреспондента РАН Е.А. Старостина (поддержанному академиком Вяч. Вс. Ивановым и другими учеными) закономерных соответствий между праязыками других семей, входящих в северо-кавказско-енисейско-сино-тибетскую макросемью [35; 4, с. 300-301].

Этнические группы, участвовавшие в ранних миграциях, могли менять место обитания из-за недоставка земли/ простора для пропитания/ проживания. На новом месте они были озабочены, по существу, теми же вечными проблемами: достаточностью/ недостаточностью земельных площадей для сельскохозяйственного использования (отсюда могла идти мотивация кадастрового землемерия) и безопасности общественного существования (отсюда – мотивация фискального счета). Могли ли эти знания закрепиться в общественной памяти? На подобный вопрос по существу положительно отвечал священник Павел Флоренский, исходя из своего понимания памяти как "творческого начала мысли": "...Таким образом, действительно, **память** – это и есть **мысль** по преимуществу, **сама** мысль в ее чистейшем и коренном значении" [36, с. 203; 4, с. 573].

Резюмируя, можно сказать, что "новая" история математики, учитывая научную и образовательную стороны математики, концентрирует внимание исследователя на социально-культурных аспектах деятельности человека, открывает путь к более адекватному пониманию роли и места математики в истории. Можно пойти дальше, и, вновь обращаясь к опыту исторической/ культурной географии, вслед за ней наметить новый путь в постижении исторического прошлого. Дело в том, что в самое последнее время в зарубежной и отечественной науке произошел так называемый "пространственный поворот" в историографии. Одним из импульсов этого "поворота" становится превращение исторической географии в метод современного исторического исследования: "Становясь одним из методов современного исторического исследования, историческая география позволяет изучать генезис и развитие европейских государств-наций уже не только в проблемном поле политической истории, но и посредством культурной истории" [21, с. 40; 37, с. 465-493].

Обобщая сказанное, можно предположить, что в недалеком будущем "новая" история математики также может стать методом современного исторического исследования (а не только входить в предметную область истории науки). Об этом как будто бы свидетельствует культурная корреляция между приближенным способом определения земельной площади по ее периметру (границе), широко использовавшимся в фискальной реформе XVI в., и современным отношением к административным границам государственных территорий России.

Оказывается, что указанное измерение площади через периметр на евразийской территории России в процессе фискальной реформы XVI в., по-видимому, влияло на динамику человеческих смыслов. Об этом свидетельствует использование модификации указанного приема золотоордынцами при определении людской численности покоренного города/поселения для взимания ясака [23, с. 98-99]. А также существование у средневековых башкир притчи-загадки, основанной на том же методе расчета площади по длине границы/периметра геометрического объекта/территории [38, с. 455-456].

В указанной притче-загадке говорится о хитроумном пришельце, который уговорил хозяев уступить ему участок земли размером с бычью шкуру. Затем, разрезав шкуру на тонкие ремешки, опоясал ими огромную территорию, став якобы на законном основании ее владельцем [38, с. 456]. Действительно, площадь шкуры можно определить через ее периметр. Однако при достаточно внимательном рассмотрении видно, что в ней (притче) длина ремешков, нарезанных из шкуры, ложно трансформируется в величину периметра не шкуры, а новой фигуры, во много раз большей бычьей шкуры. Подмена происходит в нарушение математического смысла, состоящего в том, что при определении площади геометрической фигуры необходимо брать периметр именно измеряемой (или ей конгруэнтной), а не иной другой/ произвольной фигуры.

Математическая основа рассматриваемого башкирского предания сводится к обманному (неверному) толкованию периметра/границы некоторой территории. При этом отъем земельной собственности основывается не на силовом, а интеллектуальном давлении, на обмане, в результате манипулирования незрелым сознанием, не улавливающим опасности переноса границы/ периметра с одного места на другое. Сюжет башкирской притчи-загадки предполагает формирование умения понять скрытый в ней смысл, состоящий в математической абсурдности/ невозможности/ бессмысленности изложенной ситуации: умный ей улыбнется, глупый в нее поверит.

Это свидетельствует об осознании людьми традиционного уклада жизни уже в XVI в. важности знания элементов математики, что могло сконцентрировать творческое внимание на разработке/ актуализации рассмотренной умной притчи-загадки, с заложенной в ней мыслью: математика помогает избегать неверных решений в жизни. Притча о бычьей шкуре показывает, что граница/ периметр как отвлеченное математическое понятие приобретает дополнительное культурное значение, связанное с реалиями жизни людей. В данном случае можно говорить словами исследовательницы, сказанными по поводу осмысления аналогичной проблемы известным ученым Ю.М. Лотманом, "что реальность, в том числе и пространственная, в которую погружен человек, участвует в создании образа мира через символизацию объектов этой реальности" [22, с. 187]; см. также [39, с. 175].

Отсюда можно сделать важный историко-практический вывод: произвольная "игра" границами опасна. Так, "создание современной конфигурации административных границ в виде Северокавказского Федерального округа (СКФО) изменило географическое представление о регионе... Однако дело не ограничивается изменением географии. Меняются смыслы. В сознании славянского и русскоязычного населения округа складывается образ изолированного от России пространства... "Нарезание" новых административно-территориальных границ существенно влияет на социокультурный контекст локального северокавказского общества и на социально-психологическое состояние его граждан, усиливая позиционирование региональных идентичностей и размывая национально-государственную идентичность" [22, с. 188-189].

Следовательно, "новая" история математики выступает в данном случае средством, которое на ярком материале творчества средневековых башкир может показать пагубность для истории и культуры региона (конкретно – Северного Кавказа) бездумного/ опрометчивого манипулирования его границами. Итак, за "пространственным поворотом" в историографии, возможно, последует "историко-математический поворот", который позволит рассматривать гуманитарную историю не только в проблемном поле политической истории, но и в поле "новой" истории математики. Когда это случится и произойдет ли вообще – покажет будущее.

Это может произойти, если опираться на прогноз философов о научном познании, в связи с "нараставшими радикальными изменениями в стиле мышления", с переходом "к такой рациональности, где логическую роль играют уже *много* субъектов, вступающих друг с другом в межсубъектное (интерсубъектное) общение". При этом следует иметь в виду, что "гораздо больший вклад в разработку понятия *общения* в последние десятилетия внесли такие понятия, как культура, контекст, дискурс, уникальность, особенность" [40, с. 67, 70]. То есть переход (если он произойдет) к "новой" истории математики, скорее всего, не обойдется без усвоения/ утилизации указанных понятий. Поэтому использование некоторых из них в настоящей статье в какой-то степени обусловлено предметом воспроизведенного исследования.

Явление "новой" истории математики, по-видимому, связано с ходом развития общества, вступающего в новую фазу, где главную роль играет человек знания, и сама жизнь более когнитивна/ познающа [41, с. 101-116]. При этом "с появлением в конце XX в. методов трехмерного картирования мозга на первый план выдвинулась методология когнитивной нейронауки[1]... Это позволило сделать вывод, что функционирование человеческого мозга не может быть сведено к вычислениям, а отличается способностью к пониманию" [41, с. 104-105]. И что "человеческий мозг все еще находится под воздействием адаптивных эволюционных процессов" и что "следует возлагать надежды не на еще большее усложнение техники, а на методологический и даже философский прорыв, который должен привести к возникновению новой мультидисциплинарной научной парадигмы" [43, с. 14, 15]. Ссылаясь на мнение академика Н.Н. Моисеева, современные философы считают, что произойдут указанные коцептуализационные процессы примерно в ближайшие 100 лет [41, с. 115-116]. Значит, выход науки (в том числе, истории математики) на новый когнитивный уровень "посредством интеграции естественных и гуманитарных наук" [41, с. 110], если не предопределен, то достаточно вероятен.

Библиографический список

1. *Фуко, М.* Слова и вещи. Археология гуманитарных наук [Текст] / М. Фуко. – М., 1977.
2. *Милевская, Т.* Дискурс и текст: проблема дефиниции [Электронный ресурс]. URL: http://teneta.rinet.ru/rus/me/milevskat-discoursendtextdfn.htm
3. *Соина, Ю.* Советская мода: парадокс или реальность? [Текст] / Ю. Соина // Труды "Русской антропологической школы". – М., 2010. – Вып. 7.
4. *Иванов, Вяч. Вс.* Избранные труды по семиотике и истории культуры [Текст] / Вяч.Вс. Иванов. – М., 2010. – Т. VII. – Кн. 1.
5. *Юшкевич, А.П.* История математики в России до 1917 года [Текст] / А.П. Юшкевич. – М., 1968.
6. *Кондаков, Н.И.* Концепт [Текст] / Н.И. Кондаков // Логический словарь-справочник. – 2-е изд. – М., 1975.
7. *Никифоров, А.Л.* Чувственно-вербальное построение предметного мира [Текст] / А.Л. Никифоров // Эпистемология & философия науки. – М., 2011. – Т. XXVII. – № 1.
8. *Степанов, Ю.С.* Константы: словарь русской культуры [Текст] / Ю.С. Степанов. – М., 2001.
9. *Мильков, В.В.* Наследие Кирика Новгородца (к 900-летию древнерусского ученого и мыслителя) [Текст] / В.В. Мильков, Р.А. Симонов // Эпистемология & философия науки. – М., 2011. – Т. XXVII. – № 1.
10. *Кузаков, В.К.* Очерки развития естественнонаучных и технических представлений на Руси в X-XVII вв. [Текст] / В.К. Кузаков. – М., 1976.
11. *Сэмьюэлз, Э.* Критический словарь аналитической психологии К. Юнга [Текст] / Э. Сэмьюэлз [и др.]. – М., 1999.
12. *Кантор, А.М.* Аффект в свете русской языковой культуры [Текст] / А.М. Кантор // Кириллица. От возникновения до наших дней. – СПб., 2011.
13. *Смирнова, Н.М.* Возможна ли междисциплинарная модель интерсубъективности? [Текст] / Н.М. Смирнова // Эпистемология & философия науки. – М,. 2011. – Т. XXVII. – № 1.
14. *Антоновский, А.Ю.* От Эго и Альтера к сообщению информации [Текст] / А.Ю. Антоновский // Эпистемология & философия науки. – М., 2011. – Т. XXVII. – № 1.
15. *Захарченко, Е.Г.* К вопросу о соотношении письменной и устной речи [Текст] / Е.Г. Захарченко // Кириллица. От возникновения до наших дней. – СПб., 2011.
16. *Артемов, А.А.* Математиковедение как область науковедения [Текст] / А.А. Артемов, Н.Б. Волотова, С.В. Кольцова // Проблемы истории физико-математических наук: материалы IV-й Международной конференции. – Тамбов: Изд-во ТГУ, 2004.
17. *Артемов, А.А.* Математиковедение как новое научное направление [Текст] / А.А. Артемов, Н.Б. Волотова, С.В. Кольцова // Научно-теоретический и методический журнал. – М.: Изд-во РУДН, 2005. – № 9.
18. *Артемов, А.А.* О роли математиковедения в науке и образовании [Текст] / А.А. Артемов, Н.Б. Волотова, С.В. Кольцова, Л.М. Молчанова // Современное математическое образование и проблемы истории и методологии математики: Международная научная конференция. 6-я Всероссийская школа по истории математики. – Тамбов: Изд-во ТГУ, 2006.
19. *Леви-Стросс, К.* Структурная антропология [Текст] / К. Леви-Стросс. – 2-е изд. – М., 1985.
20. *Мининков, Н.А.* Лекционный курс В.А. Муравьева по исторической географии на истфаке Южного федерального университета в 2008 г. [Текст] / Н.А. Мининков // Историческая география: пространство человека vs человек в пространстве: материалы XXIII Международной научной конференции. – М.: Изд-во РГГУ, 2011.

[1] Примерно в этот период нейромодели стали использоваться и в истории математики, см. [42, с. 106-112].

21. *Казаков, Р.Б.* Историческая география в пространстве современного гуманитарного знания: от вспомогательной дисциплины к методу гуманитарного познания [Текст] / Р.Б. Казаков, С.И. Маловичко, М.Ф. Румянцева // Историческая география: пространство человека vs человек в пространстве: материалы XXIII Международной научной конференции. – М.: Изд-во РГГУ, 2011.
22. *Булыгина, Т.А.* Граница в категориях классической исторической географии и в исследовательских полях "новой локальной истории" [Текст] / Т.А. Булыгина // Историческая география: пространство человека vs человек в пространстве: материалы XXIII Международной научной конференции. – М.: Изд-во РГГУ, 2011.
23. *Симонов, Р.А.* Геометрия социальных пространств и система земельного налогообложения в России XVI века [Текст] / Р.А. Симонов // Историческая география: пространство человека vs человек в пространстве: материалы XXIII Международной научной конференции. – М.: Изд-во РГГУ, 2011.
24. *Сахаров, А.М.* Россия и ее культура в XVI веке [Текст] / А.М. Сахаров // Очерки русской культуры XVI века. – М., 1977. – Ч. 1.
25. *Грязнов, А.Л.* Реконструкция системы расселения и структуры землевладения Замосковского края в XV-XVII вв. [Текст] / А.Л. Грязнов // Историческая география: пространство человека vs человек в пространстве: материалы XXIII Международной научной конференции. – М.: Изд-во РГГУ, 2011.
26. *Фролов, А.А.* Историко-географические аспекты писцовых полевых работ рубежа XV-XVI вв. [Текст] / А.А. Фролов // Историческая география: пространство человека vs человек в пространстве: материалы XXIII Международной научной конференции. – М.: Изд-во РГГУ, 2011.
27. Писцовая книга дворцовых земель Деревской пятины 1495-1496 гг. [Текст] // Писцовые книги Новгородской земли. – М., 1999. – Т. 1.
28. *Фролов, А.А.* Некоторые вопросы источниковедения писцовой книги Деревской пятины письма 1495-1496 годов [Текст] / А.А. Фролов // Древняя Русь. Вопросы медиевистики. – 2004. – № 3(17).
29. *Фролов, А.А.* Методы работы писцов в Деревской пятине Новгородской земли во время письма 1495-1496 годов и проблема реконструкции писцовых полевых записей [Текст] / А.А. Фролов // Исследования по истории средневековой Руси. – М.-СПб., 2006.
30. *Фролов, А.А.* Исторический атлас Деревской пятины Новгородской земли (по писцовым книгам письма 1495-1496 гг.) [Текст] / А.А. Фролов, Н.В. Пиотух. – М.-СПб., 2008. – Т. 1-3.
31. *Колмогоров, А.Н.* Новгородское землевладение XV века [Текст] / А.Н. Колмогоров. – М., 1994.
32. *Фролов, А.А.* Источники ретроспективной информации писцовой книги новгородской Деревской пятины конца XV века (сведения о доходах) [Текст] / А.А. Фролов // Очерки феодальной России. – М.-СПб., 2010. – Вып. 14.
33. *Цайгер, М.А.* Арифметика в Московском государстве XVI века [Текст] / М.А. Цайгер. – Беэр-Шева, 2010.
34. *Симонов, Р.А.* К истории счета в допетровской Руси [Текст] / Р.А. Симонов // Математика в высшем образовании. – 2010. – № 8.
35. *Сторостин, С.А.* Труды по языкознанию [Текст] / С.А. Сторостин. – М., 2007.
36. *Флоренский, П.А.* Столп и утверждение истины [Текст] / П.А. Флоренский. – М., 1914.
37. *Ethington, P.J.* Placing the Past: 'Groundwork' for a Spatial Theory of History // Rethinking History. 2007. Vol. 11, № 4.
38. *Трепавлов, В.В.* Добровольное присоединение башкир к России: лояльность в обмен на ярлык [Текст] / В.В. Трепавлов // Труды Отделения историко-филологических наук РАН, 2007 год. – М., 2009.
39. *Лотман, Ю.М.* Внутри мыслящих миров [Текст] / Ю.М. Лотман. – М., 1996.
40. *Маркова, Л.А.* Индивидуальное и общее в интерпретации интерсубъективности [Текст] / Л.А. Маркова // Эпистемология & философия науки. – 2011. – Т. XXVII. – № 1.
41. *Черникова, И.В.* Когнитивные науки и когнитивные технологии в зеркале философской рефлексии [Текст] / И.В. Черникова // Эпистемология & философия науки. – 2011. – Т. XXVII. – № 1.
42. *Симонов, Р.А.* Источники по истории математики в свете нейропсихологического моделирования культуры Руси [Текст] / Р.А. Симонов // История математики и математического образования как предмет исследования и преподавания. Труды V Всероссийской Школы по истории математики. – Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2003.
43. *Черниговская, Т.В.* Если зеркало будет смотреться в зеркало, что оно там увидит (к вопросу об эволюции языка и сознания) [Текст] / Т.В. Черниговская // Когнитивные исследования. – М., 2010.

Архаические представления о числах и наследие Кирика Новгородца

Г.А. Зверкина

Кирик Новгородец [1] (1110 – после 1156-1158) жил и развивался в средневековом Великом Новгороде, когда архаические представления о числах еще не трансформировались в привычные нам.

В сочинении Кирика Новгородца "Учение имже ведати человеку числа всех лет" [2], основная цель которого – описание и использование стандартных мер времени (день, неделя, месяц, год, количество лет в Солнечном и Лунном круге и пр.) для вычисления даты Пасхи.

Однако в рассуждении об “обновлении стихий” (п. 10-13) появляются числа 40, 60, 70, 80: 80 лет – период обновления неба, 40 лет – период обновления земли, 60 лет – период обновления моря, 70 лет – период обновления вод.

А в п. 21-27 описывается семикратное деление часа на 5, в результате чего вычисляется “седьмой дробный часик” – минимальная частица времени.

Возникает вопрос, не связаны ли эти числовые данные с представлениями о числах предшественников Кирика – византийских и греческих ученых, а также с некими древними традициями?

О том, каковы были эти представления, мы можем судить по словесному обозначению чисел, а также анализируя развитие нумераций у разных народов: это развитие имеет достаточно много общих черт.

Зарождение нумераций. Особая роль чисел 4 и 40. Как известно, счет у древнего человека сводился к сопоставлению (установлению взаимно-однозначного соответствия) пересчитываемых объектов и имеющегося эталонного набора (группы камешков, палочек, пальцев на руках и на ногах или частей тела). При этом можно говорить о возникновении системы счета лишь тогда, когда числительные становились независимыми от объекта счета (т.е. для обозначения “двух коров” и “двух деревьев” применялось одно и то же слово – “два” – “отвлеченное” числительное; у некоторых современных примитивных племен для счета разных объектов сохранились разные числительные; следы этого сохранились и в некоторых современных языках).

Первые исторически возникшие числительные обозначали числа 1, 2 и “много”; для обозначения б***о***льших величин использовались комбинации из 1, 2 и, позднее, слов “рука” (5), “две руки” (10), “человек” (20 – число всех пальцев человека): число 18 могло быть названо как “человек без двух” (20–2=18) или как “две руки, нога, два, один” (10+5+2+1=18). Следы таких систем счета сохранились во многих языках и культурах: для обозначения 2 часто используется несколько синонимов (в русском языке – два, пара, оба). Позднее появилось число 3, а последующие числа – 4, 5,... у славян были изобретены много позже: об этом свидетельствует, в частности, строение слов “двое”, “трое” – но: “четве***РО***”, “пяте***РО***”, “семе***РО***” (см., например, [3]) и т.д. То есть, 4 – это начало нового этапа развития числовой системы, дважды двойка, и это число выделялось нашими древними предками из общего ряда чисел. Далее мы увидим, что в древнерусском счете важную роль играло также число 40.

Как известно, на основе пальцевого счета сформировались пятеричная (“пять”=“пясть”=“пядь”), десятеричная и двадцатеричная системы счисления. Счет пятерками (пятк***а***ми) обнаружен у древних инков и славян. Что касается счета десятками и двадцатками, то числа первой двадцатки практически у всех народов выделялись особо: во многих языках названия чисел от 11 до 20 строятся иначе, чем последующие числительные (например, во французском языке 80=*quatre-vingts* – четырежды двадцать). Это свидетельствует о следах применения двадцатеричной системы счета. Итак, основные исторически возникавшие системы счета имели в своей основе 5, 10, 20 [4].

Двадцатка являлась одной из базовых единиц счета[1], о чем напоминает нам специальное название “сорок”=40, в отличие от “стандартной” конструкции три-дцать[2], пять-десять, шесть-десять и т.д. И удвоенная двадцатка (=40) казалась нашим древним предкам чрезвычайно большим числом, поскольку такого большого количества однотипных предметов в быту древнего человека пересчитывать не приходилось. Возможна также связь с “особым” числом 4, т.к. 40=2×20[3]. Вспомним также “сорок сороков” как обозначение невообразимо большого количества. В те времена, когда про Москву говорили, что в ней имеется “сорок сороков” церквей, конечно общее число храмов в столице было существенно меньше 1600=40×40. В этом контексте “сорок сороков” обозначают некое чрезвычайно большое количество, т.е. “бесконечная бесконечность”: повторюсь, что древние жители Руси крайне редко имели в быту дело с числами больше 40.

Периоды “обновления стихий” у Кирика Новгородца. В своем “Учении о числах” Кирик сообщает:

“10. Об обновлении неба. Небо обновляется через 80 лет. Таких обновлений от Адама до 6644 года – 83. От последнего обновления протекло 4 года.

11. О земном обновлении. Земля обновляется через 40 лет. Таких обновлений в том же количестве лет было 166, а от последнего обновления прошло 4 года.

12. На каком году обновляется море. Море обновляется через 60 лет. Таких обновлений в том же количестве лет было 110, от последнего обновления прошло 44 года.

13. Обновление воды. Воды обновляются через 70 лет. Таких обновлений было от Адама до настоящего времени 94 и еще остается 64 [года].”

Сама идея представления о наличии образующих мироздание четырех стихий не нова: о четырех стихиях-первоосновах (огонь-вода, земля-воздух) рассуждали античные авторы[4]. Однако об их обновлении и тем более о периоде этого обновления предшественники Кирика не сообщали.

---

[1]Напомню, что комбинация двадцаток и десяток в наименовании числительных сохранилась в разных языках, например, по-французски 97 – *quatre-vingt-dix sept* – четыре-двадцать-десять семь, 78 – *soixante-dix huit* – шестьдесят-десять восемь, а для чисел от 11 до 19 практически во всех языках существует особая форма конструирования их названий.

[2]Слово три-дцать для 30, отличное по форме (но не структуре) от названий для 50, 60,... говорит о его более древнем происхождении.

[3]Аналогичная ситуация и в греческом языке: 3 – $\tau\rho\epsilon\iota\varsigma$, 30 – $\tau\rho\iota\nu\tau\alpha$, 5 – $\pi\nu\tau\epsilon$, 50 – $\pi\epsilon\nu\nu\tau\alpha$, 6 – $\xi\iota$, 60 – $\epsilon\xi\nu\tau\alpha$,... но 2 – δo, 20 – $\epsilon\kappa o\sigma\iota$ 4 – $\tau\sigma\sigma\epsilon\rho\iota\varsigma$ и 40 – $\sigma\alpha\rho\nu\tau\alpha$.

[4]См.: *Платон.* Тимей 37D–38A; *Аристотель.* Физика. Кн. IV. 14.

Составляя календарно-математический трактат, Кирик, видимо, стремился всем явлениям природы, порождающим окружающий мир, также сопоставить некие промежутки времени, которые должны соответствовать значимости стихий-первооснов.

Видимо, период обновления земли – необъятного вместилища окружающего человека мира – выбран размером в 40 лет, поскольку, как уже говорилось, для древних жителей Руси 40 – это символ бесконечности. Но небо включает в себя всю землю, и потому следует признать, что оно в 2 раза больше, и период его обновления $80=40\times 2$ – также в 2 раза больше периода обновления земли. Море, находящееся между небом и землей, имеет период обновления соответственно равный среднему между периодами земли и неба: $60=(80+40)/2$. А "в***о***ды", т.е. небесные воды (дождь, туман, снег), соответственно, имеют период обновления средний между периодами окружающих их стихий: $70=(60+80)/2$. Интересно, что в трактате 1138 (см. [5]) года мы видим "правильный" порядок перечисления периодов обновления стихий: земля – 40 лет; небо – 80 лет; море – 60 лет; в***о***ды – 70 лет.

Надо заметить, что, зная о периодах Солнечного и Лунного кругов (28 и 19 лет), не выражавшихся круглыми (кратными 10) числами, для обновления стихий, Кирик Новгородец указывает именно круглые числа. (Тенденция к округлению до полных десятков прослеживается и в более поздних русских рукописях, например, в "Книге Большому чертежу" [6] практически все расстояния между населенными пунктами округлены до десятков верст, и только для малых расстояний (меньше 10 верст) расстояние указывается более точно; иногда небольшие расстояния (менее 20 верст) округляются с точностью 5 верст.)

Хотя Кирик оперировал с намного б***о***льшими числами, число 40 как основа расчета периодов обновления стихий, по-видимому – дань традиции или оно было извлечено из более древнего источника, восходящего к древнейшим представлениям славян о числах.

Древняя магия чисел. Кроме естественной прикладной хозяйственной функции, числа несли в себе для древнего человека и некий сакральный смысл. Уже сам тот факт, что одними и теми же числительными можно пересчитывать живые и неживые, материальные и нематериальные (например, дни) объекты, позволял приписывать им некую магическую или божественную сущность. Так, широко известно, что весьма образованные пифагорейцы приписывали десятке массу действительных или надуманных свойств, поскольку обнаружили, что десяткой как основой счета пользовались все известные им народы. Много полезных свойств приписывалось с глубокой древности числам 2 и 3 – самым первым числам, которыми овладела человеческая мысль (священным числом древних монголов была девятка – три тройки). Кроме того, особая роль приписывалась числу 7. Так, в античности с семеркой (седмицей) связывались самые различные периоды существования человека, не говоря уже о том, что мудрецов в Греции было всегда ровно семь – см., например, [7].

Вернемся теперь к тексту Кирика Новгородца.

Интересно здесь число 70 для периода обновления вод – не моря, но вод небесных. И здесь можно увидеть как арифметическую операцию $70=(60+80)/2$, так и отголоски обожествления семерки еще в античности. Кроме того, Кирик 7 раз делил час на 5, что мы обсудим ниже.

Дроби и быстрый счет в древности. Кроме непосредственного счета, древним людям, начиная с некоторого времени, приходилось производить и арифметические операции с числами. Естественно, первыми появились операции сложения и (позднее) вычитания. Но, кроме того, широко использовались и операции удвоения (умножения на два) и раздвоения (деления на два); следы этого мы видим в древнерусских названиях пол-четь, пол-пол-чети, пол-трети, пол-пол-трети и т.п. [8].

Надо сказать, что деление, как наиболее сложная из арифметических операций, была доступна не каждому. Простейшая процедура деления некоторого набора объектов на несколько равных частей представляла собой раскладывание этих предметов последовательно (по одному) в нужное количество мест (кучек); иногда эта процедура проводилась с помощью счетного материала – камешков, косточек плодов и т.п.[1].

В обыденной жизни деление заключалось в поочередном раскладывании предметов (или соответствующего им счетного материала) на равные кучки. Этот метод деления с некоторыми изменениями реализовывался на счетных досках, и он сохранился в практике вычислений на русских счетах и на абаках: здесь деление заменяется неоднократным вычитанием делителя из делимого с фиксацией количества вычитаний.

Обратным к этой процедуре являлся метод подсчета большого количества однородных объектов, например, большого стада животных. Этот метод до сих пор применяется пастухами больших овечьих отар и заключается в следующем.

Стадо животных *очень быстро* прогоняется через узкий проход таким образом, чтобы через него одновременно могла пройти только одна особь (иногда при этом животное перепрыгивает через невысокий порожек). Животные очень быстро пробегают через этот проход, и их столь же быстро пересчитывают счетчики.

Один из них следит за воротцами, и при прохождении оговоренного количества голов (обычно 5, 10 или 20) подает знак напарнику (хлопком или криком), а напарник уже более спокойно фиксирует количество сигналов (иногда счетчик один – при прохождении группы животных он перекладывает заранее заготовленный камень из кармана в карман или сдвигает руку на веревке с узелками). Затем умножением числа отмеченных

[1] Видимо, именно повторному раздвоению лунного 28-дневного месяца мы обязаны изобретением 7-дневного периода – недели.

знаков на количество животных в группе определяется общее количество животных[1]. Подобный метод (один счетчик пересчитывает объекты от 1 до, например, 20, а другой фиксирует число таких групп) неоднократно фиксировался этнографами у примитивных племен; у папуасов Новой Гвинеи это наблюдал Н.Н. Миклухо-Маклай.

Так пересчитывали не только овец, но и вражескую военную силу, сплавляемый по рекам лес, и многое другое.

Седьмые дробные часики Кирика Новгородца. В определении Кириком Новгородцем мельчайшей частицы времени, или "седьмого дробного часика" мы видим последовательное семикратное деления часа на 5.

"21. О дробных часах каждого дня. Это же пишем для любителей мудрости и для желающих все хорошо усвоить, о так называемых дробных; как будет их 60, они составят день, так как во дне 12 часов, а в каждом часе 5 дробных [часов], также и ночью.

22. Вторых же дробных в одном первом дробном [часе] 5, а во дне их 300.

23. Также и третьих дробных в одном втором дробном часе 5. А во дне их 1500.

24. Четвертых же дробных в третьем дробном также 5, а во дне их 7500.

25. Пятых же дробных в четвертом дробном 5, а во дне их 37500.

26. Шестых же дробных в пятом дробном — опять-таки 5, а во дне их 187500.

27. Из шестых дробных получаются седьмые дробные, из одного 5. А седьмых дробных часиков в одном дне 937500, столько же и в ночи.

Больше же этого не бывает, то есть от седьмых дробных ничего не получается."[2]

Заманчиво связать тот факт, что именно 7 раз он делит час на 5 долей, с представлением древних о магических свойствах числа 7 и архаичной пятеричной системой счета.

Но если вернуться к конструкции подсчета величины "седьмого дробного часика", то представляется возможным, что Кирик подсчитывал количество очень быстро проходящих событий, которые он мог различить, например, слухом, используя счет пятк***а***ми и описанную выше методику подсчета животных.

Действительно, слушая быструю дробь звуков, можно выделить три-четыре-пять звуков, но пересчитать всю последовательность невозможно.

Величина "седьмого дробного часика" равна примерно 0,04608 сек. = 3600 сек./78125. Таких "часиков" за 1 секунду случается 21,70139 – имеются в виду современные секунды[3].

Но Кирик Новгородец имел в дело с "косыми" часами, определяющимися как 1/12 светлого или темного времени суток, поэтому количество "седьмых дробных часиков" в одной современной секунде может колебаться от 14 до 47. Дело в том, что на широте Новгорода самый короткий световой день составляет около 5,5 часов, а самый длинный – около 18,5 часов. Поэтому и размер "седьмого дробного часика" может колебаться от 0,02112 до 0,07104 современной секунды.

Однако естественнее считать, что Кирик свои "часики" привязывал ко времени весеннего или осеннего равноденствия, поскольку в зимнее время года частота "седьмых дробных часиков" близка к известной нам частоте 50 Гц, т.е. напоминает то гудение, которое раздается из неисправного репродуктора. А в летнее время "седьмой дробный часик" почти в 4 раза дольше.

Итак, приходится предположить, что *Кирик пользовался не косыми, а равными (равноденственными) часами.*

Мог ли Кирик Новгородец смоделировать и пересчитать "седьмые дробные часики"? Человек может выбить на столе всеми пальцами одной руки дробь 4-5 раз в секунду. И время, которое получится между ударами пальцев по столу, как раз и будет примерно соответствовать "седьмому дробному часику".

Однако вспомним, что Кирик жил в музыкальной среде Древнего Новгорода, где археологи нашли уже столько музыкальных инструментов, что из них можно составить оркестр. Это были бубны, сопели-свирели, гудки[4] и гусли.

Наиболее распространенный инструмент – гусли – в то время обычно имел 5-6 струн. Проведя пальцем по всем пяти струнам гусель (прием игры *arpeggio*), получаем 5 последовательных звуков. Легко повторить это 4-5 раз в секунду (а это и есть седьмые дробные часики).

И можно привлечь к помощи человека, который будет сигналом фиксировать каждую группу из пяти звуков. Т.е. от сигнала до сигнала пройдет 25 ударов.

Получившаяся последовательность сигналов (примерно 1 в секунду) уже не так быстротечна, и при желании, опять разбивая ее на пятк***и***, пересчитывая их и т.д., можно установить общее количество ударов пальцами по струнам за 1 час.

---

[1]Именно этот метод привел к созданию средства от бессонницы – счету овечек. В средневековой Британии для подсчета овец использовались считалки с известным числом слов, одна из них "Yan, Tyan, Tethera..." до сих пор хорошо известна в англоязычном мире. Страдающий от бессонницы повторял эту или подобную считалку, – и монотонное повторение усыпляло его.

[2]Т.е. более короткого промежутка времени человек не заметит.

[3]Примерно с такой частотой звучит дробь дятла. Или же короткие ноты в эталонном исполнении (1 минута 6 секунд) "Полета шмеля" из оперы "Сказка о царе Салтане" Н. Римского-Корсакова.

[4]Гудок – примитивная скрипка.

Надо заметить, что кроме обычных методов измерения времени Кирик имел и более точное средство измерения времени, то самое, которое в свое время позволило Галилео Галилею произвести точные расчеты колебания маятников и вывести соответствующий физический закон. Речь идет о пульсе или частоте биения сердца. Предполагается, что во времена Галилея пульс здорового человека в спокойном состоянии составлял около 60 ударов в минуту, т.е. 1 удар в секунду. Можно предполагать, что и в Новгородской республике было так же.

Таким образом, Кирик имел возможность для более или менее точного измерения мельчайшей различимой человеком частицы времени и он стремился найти наиболее точную (возможную в то время) шкалу для измерения времени. Он мог пытаться делить время одного удара сердца на интервалы или же определять число звуков за известный ему каким-либо образом фиксируемый небольшой промежуток времени[1].

Все высказанное – это лишь гипотеза, которая может объяснить один из вариантов получения Кириком его результатов. Мы можем лишь констатировать, что фиксация и подсчет "седьмых дробных часиков" были вполне выполнимы в XII веке.

Для подсчета минимальной различимой человеком частицы времени Кирик мог использовать и другие природные или рукотворные процессы, сопровождающиеся быстрой последовательностью звуков или явлений.

Имея музыкальную подготовку[2] и владея народным методом подсчетов, он мог определить ритм пятерок этих звуков, и, пересчитывая новый ритм пятк***а***ми, определить, что 7-й уровень подсчета (примерно) совпадает с часом. Несомненно, вычисления Кирика не могли быть абсолютно точными: можно предположить, что он "округлил" "седьмые дробные часики" для того, чтобы определить их длительность элегантным и несложным способом.

Выводы.

Итак, размышления о приведенных Кириком Новгородцем числах, не связанных с календарными расчетами, приводят к следующим выводам:

– значения периодов обновления стихий имеют свои корни в древнейших представлениях о числах, сформировавшихся в доисторический период;

– для определения "седьмого дробного часика" Кирик использовал не косые, а равные (равноденственные) часы;

*– в определении "седьмого дробного часика" мог быть использован архаичный счет пятк**а**ми и традиционные методики быстрого подсчета большого количества объектов;*

– количество деления часа на пять частей (7 раз) не связано с архаическими представлениями о свойствах числа 7, а могло быть определено экспериментально.

Автор выражает глубокую признательность профессору Р.А. Симонову за ценные беседы и консультации.

Библиографический список

1. *Симонов, Р.А.* Кирик Новгородец – ученый XII века [Текст] / Р.А. Симонов. – М., Наука, 1980.
2. *Кирик Новгородец.* Учение имже ведати человеку числа всех лет [Текст] / Кирик Новгородец; перевод В.П. Зубова, Т.А. Коншиной // Историко-математические исследования. – 1953. – Т. VI. – С. 174-195.
3. *Иванов, Вяч.Вс.* Избранные труды по семиотике и истории культуры [Текст] / Вяч.Вс. Иванов. – М.: Знак, 2010. – Т. 7. – Кн. 1. – Серия: Язык. Семиотика. Культура. – 736 с.
4. История математики [Текст]: В 3 т. Т. 1. / под ред. А.П. Юшкевича. – М.: Наука, 1970. – 352 с.
5. *Симонов, Р.А.* Некоторые проблемы "Учения" Кирика Новгородца [Текст] / Р.А. Симонов // Календарно-хронологическая культура и проблемы ее изучения: материалы научной конференции. – М., 2006. – С. 5-13.
6. Книга Большому Чертежу [Текст] / под ред. К.И. Сербиной. – М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1950. – 228 с.
7. Фрагменты ранних греческих философов [Текст] / составитель А.В. Лебедев. – М.: Наука, 1989. – Ч. I.
8. *Юшкевич, А.П.* История математики в России до 1917 года [Текст] / А.П. Юшкевич. – М.: Наука, 1968.

Кирик Новгородец – открытия свидетельств научного потенциала Древней Руси

Д.И. Пронин

"Исторический путь России свидетельствует о громадных запасах
не только материальных благ, но и духовных ценностей."
Лихачев Д.С. "Русское искусство от древности до авангарда"

Введение

Современному обществу (как, впрочем, и 100, и 200 лет назад) и даже передовым его представителям мало что известно о научном потенциале Древней Руси. Между тем как культурный и интеллектуальный уровни представителей той эпохи способны поразить исследователей богатством и красотой мысли, неординарностью и стремлением к познанию Истины.

[1] Время чтения молитвы или иного недолгого, но привычного действия.

[2] Как известно, Кирик Новгородец был руководителем (регентом) хора.

В своей книге "Раздумья о России" великий ученый академик Дмитрий Сергеевич Лихачев пишет: "Россию упрекают, Россию восхваляют. Одни считают ее культуру несамостоятельной, подражательной. Другие гордятся ее прозой, поэзией, театром, музыкой, иконописью... Одни видят в России гипертрофию государственного начала, а народ воспринимают как покорный. Другие отмечают в русском народе анархическое начало и постоянное бунтарство, неприятие власти. Одни отмечают в нашей истории отсутствие определенной целеустремленности. Другие видят в русской истории "русскую идею", наличие у нас сознания гипертрофированной собственной миссии. Между тем, движение к будущему невозможно без точного понимания прошлого и характерного" [1, с. 7].

Я считаю, что пришло время обратить свой взор в прошлое и заметить тех, кто просвещал отечество, тех, кто продвигал науку. К их числу принадлежит диакон и доместик Новгородского Антониева монастыря – Кирик Новгородец, живший в XII веке.

В этой работе я хочу обратить внимание на его труды[1] в свете их переосмысления и переоценки ведущими исследователями науки. Дмитрий Сергеевич Лихачев, неоднократно обращавшийся к личности Кирика Новгородца в своих публикациях [2; 3, с. 364], одним из первых дал высокую оценку "Учению им же ведати человеку числа всех лет".

1. Личность Кирика Новгородца

Биография Кирика полна белых пятен. Год рождения известен из "Учения", благодаря его расчетам количества дней, пройденных от сотворения мира[2] и дней прожитых им.

Кирик Новгородец (1110 – после 1156/1158) был монахом и доместиком[3] Новгородского Антониева монастыря (что известно из того же произведения), был одним из приближенных Нифонта, о чем можно судить из "Вопрошания", возможно, его библиотекарем [3, с. 364], согласно гипотезе Дмитрия Сергеевича Лихачева. Оба произведения обнаруживают его высокообразованность (заключенные в "Учении" знания соответствуют классическому квадривиуму – средневековому образовательному циклу, открывавшему доступ к богословским занятиям; как отмечает В.В. Мильков, "Вопрошание" выходит далеко за рамки чисто канонического творчества, произведение оценивается как высокопрофессиональный богословский труд), сопоставимую с такими его современниками как Владимир Мономах или Нифонт. По мнению исследователей [4, с. 306-319], Кирик являлся одним из тех русских людей, которые пополнили общину Антониевского монастыря (монастырь основан Антонием Римлянином и его соратниками; возможно основатели принадлежали к ирландским монахам). Тем самым можно объяснить ученость Кирика – выходцы из Европы дали ему высокое, университетское образование в стенах монастыря.

2. Исследования наследия Кирика Новгородца

Проанализировав мнения различных исследователей о трудах Кирика Новгородца, я выделил два периода в изучении его наследия. В первый период[4] его произведения не были поняты в должной мере и, следовательно, не были оценены по достоинству (за исключением отдельных случаев; об этом см. ниже). Во второй период[5], условно обозначая его от начала XX века по настоящее время, происходила смена, казалось бы, незыблемых, устоявшихся представлений – можно сказать, произошла ревизия отношения и понимания наследия этого, вне всякого сомнения, незаурядного ученого XII века.

2.1 Представления XIX века

Кирик Новгородец стал известен как древнерусский писатель и ученый в 20-е гг. XIX в. Первое печатное издание "Учения" было осуществлено в 1828 г. митрополитом Евгением Болховитиновым [5]. Издатели столкнулись с проблемами [6, с. 70] в связи с интерпретацией чисел в работе Кирика, которые были выражены в буквенной нумерации[6] его времени и доходили до значений в десятки миллионов(!). По сути, из-за неточной передачи текста настоящее признание и понимание трудов Кирика было отсрочено на долгие годы. В 1847 году П.В. Хавский в своей работе [7] "исправлял" значения расчетов Кирика, даже не предполагая, что автор безукоризненно точен во всех своих выкладках [6, с. 70]. Поразительно, но П.В. Хавский не стал проверять печатный текст по подлиннику. К сожалению, эта публикация породила неверные представления о произведении Кирика Новгородца [6, с. 70]. Затем В.В. Бобынин допустил ту же ошибку [6, с. 71] что и П.В. Хавский – он, не проверяя по подлиннику, точно так же сообщает о некорректности вычислений в "Учении". На этом основании он заключал, что на Руси не умели считать далее 10 тысяч, и в целом арифметика находилась на низком уровне [8]. Тем не менее, были и положительные моменты в данном периоде изучения наследия Кирика. В 1862 г. известный

[1] На настоящий момент наиболее известны и изучены два произведения Кирика – "Учение им же ведати человеку числа всех лет" (1136 г.) и "Вопрошание" (40-50-е годы XII века)

[2] Система летоисчисления, в которой за точку отсчета бралось "Сотворение Мира".

[3] Руководитель церковного хора.

[4] положения которого изложены ниже в достаточно условно названном пункте "Представления XIX века".

[5] представлен ниже в пункте "Осознание ценности".

[6] Все математические выкладки Кирика Новгородца записаны в кириллической нумерации с использованием системы счета "великое число". Т.о., изначально в рукописи находились знаки, которые нетипичны для типографии и сравнительно трудны для точной передачи и в современном книгопечатании.

математик В.Я. Буняковский по результатам анализа отдельных фрагментов вычислений Кирика отметил их правильность [9].

Очевидно, что подлинник не был привлечен к исследованиям П.В. Хавского и В.В. Бобынина, т.к. в таком случае не были бы найдены ошибки, в действительности – ошибки не самого Кирика, а типографии.

2.2 Осознание ценности

Однако в начале XX века были сделаны важные шаги к пониманию "Учения". А.А. Шахматов и Н.В. Степанов были одними из тех, кто открыл новый этап в исследованиях. Н.В. Степанову были ясны изъяны работ П.В. Хавского и В.В. Бобынина [6, с. 74]. Но, несмотря на уже совершенно иной взгляд и иное понимание "Учения", он почему-то не обратил внимание на то, каким образом производились вычисления, не принимал того, что Кирик знал о календарном значении високоса. И, тем не менее, благодаря А.А. Шахматову и Н.В. Степанову творчество Кирика стало рассматриваться как важная веха в развитии хронологии на Руси. Это привело к научному всплеску изучения календарных представлений в эту эпоху [10].

Дмитрий Сергеевич Лихачев одним из первых высоко оценил "Учение" и считал его произведением специально написанным для хронологии [2]. Кроме того, он считал, что Кирик Новгородец принимал участие в новгородском летописании [2]. Он выразил гипотезу о том, что Кирик был библиотекарем Нифонта [3, с. 364].

Фототипическое издание в 1953 году "Учения" В.П. Зубовым [11] с переводом послужило развитию изучения данного произведения Кирика. Начались исследования "о дробном делении часа". Хотя в работе В.П. Зубова имеются недостаточно обоснованные предположения о дробных делениях часа, тем не менее выявлено, что дробные деления часа, по-видимому, является оригинальным "изобретением" на Руси и может характеризовать реальный вклад в мировую науку Кирика или кого-то из неизвестных древнерусских ученых, кем он был разработан [6, с. 77]. Как отмечает Р.А. Симонов, вопрос о происхождении древнерусского пятеричного часового счета еще только открыт и ждет своего разрешения[1].

2.3 Развитие идей Лихачева

Важную веху в истории изучения наследия Кирика Новгородца открыл Рэм Александрович Симонов. Начиная с 1970-х г. он продолжает исследования и по сей день. Благодаря ему открыто новое понимание и значение произведений Кирика [6, 12-15]. В XXI веке осознание значимости стало еще большим, как понимание того, что Кирик включил циклы в число факторов математического исследования времени, тем самым предвосхитив современные представления о времени (по мнению академика Паршина для понимания феномена времени необходимо "включить представление о циклах в устройство космоса в качестве его основы") [6, с. 78], роль Кирика велика как человека, который участвовал в становлении современной науки, давая развитие ятронауке [6, с. 79]. Кроме того, Кирик "рассматривает хронологию как средство, в какой-то степени освобождающее человека от власти Божественного провидения, как средство, находящееся на службе у человека. Возможно, поэтому расчеты Кирика привязаны не к эсхатологическим 7000 лет, а к текущему году написания – к 1136 г." [6, с. 78-79].

В "Учении" Кирика проявляется прагматическое отношение к хронологии, в нем отсутствует богословско-символический текст, в отличие от других средневековых произведений. Путь Кирика самобытен, он отступает от общепринятых канонов в "Учении".

Такую самобытность академик Дмитрий Сергеевич Лихачев объясняет следующим образом: "ломка традиционных форм вообще была довольно обычной на Руси. Дело в том, что новая, явившаяся на Русь культура (византийская – примечание Р.А. Симонова) была хотя и очень высокой, создав первоклассную "интеллигенцию", но эта культура налегла тонким слоем, слоем хрупким и слабым. Это имело не только дурные последствия, но и хорошие: образование новых форм, появление внетрадиционных произведений было этим очень облегчено. Все более или менее выдающиеся произведения литературы (и науки, как "Учение" Кирика – примечание Р.А. Симонова), основанные на глубоких внутренних потребностях, вырываются за пределы традиционных форм" [6, с. 79].

3. Научный потенциал Древней Руси

Существуют две противоположные оценки культуры Древней Руси [15]. Одни считают, что Древняя Русь обладала собственным самобытным путем, была интеллектуально развитой и культурной, а другие не видят в ее прошлом ничего, кроме отсталости, несостоятельности науки, культуры и т.д.

Я считаю, что Древняя Русь обладала не меньшим потенциалом, чем какая-либо другая страна, что в ее недрах созревали свои гении, в том числе в науке. И здесь уместны слова из оды Михаила Васильевича Ломоносова [16]:

О, ваши дни благословенны!
Дерзайте ныне ободренны
Раченьем вашим показать,
Что может собственных Платонов
И быстрых разумом Невтонов
Российская земля рождать.

---

[1] Одно из решений А.Е. Раик см. [6, с. 77].

Яркими доказательствами интеллектуальной развитости Древней Руси являются Кирик Новгородец, многочисленные находки берестяных грамот[1] и многие другие косвенные и прямые свидетельства. В связи с осознанием высокого полета мысли Кирика был поставлен вопрос о несоответствии научного содержания "Учения" и общего интеллектуального уровня Руси [6, с. 78]. Разумеется, нельзя утверждать абсолютную образованность на Руси – это было бы абсурдом! Но, по моему мнению, совершенно очевидно, что взгляд на древнерусскую культуру как на отсталую, застойную и низкоинтеллектуальную – несостоятелен. Это подтверждается в том числе открытием текста 1138 г. [12], являющимся своеобразным откликом на "Учение" Кирика, который дает основания полагать, что Кирик не был единственным "числолюбцем".

Заключение

Таким образом, Древняя Русь обладала высоким научным потенциалом, что подтверждается, в том числе, исследованиями наследия Кирика Новгородца.

К концу XX века и в нашей стране, и в мире стало признаваться огромное значение "Учения" как произведения научного средневекового творчества, рассматриваться как гениальное для своего времени произведение.

Тем не менее, ученым, общественности еще предстоит много работы. Следует искать и изучать в том числе случаи употребления математических и иных знаний в быту. Следует популяризовывать открытия и достижения в этой области. Мне понятна и близка мысль Н.В. Степанова, который предлагал поставить символический памятник Кирику Новгородцу в виде издания его произведений еще в 1908 году в связи с наступавшим в то время юбилеем [17]. К сожалению, его идея не осуществлена до сих пор.

К 900-летнему юбилею Кирика Новгородца в 2010 году вышла статья известного историка древнерусской науки, книговеда и историка книги, доктора исторических наук, профессора Рэма Александровича Симонова [6], который на протяжении всей своей научной жизни стремится донести до умов людей важность и значимость этих открытий.

Без знания прошлого человек навряд ли может быть счастлив в настоящем и уж тем более в будущем. Это значит, что каждый человек должен возрождать прежде всего в себе память о наших далеких предках, о великой истории своей страны. В этой связи привожу цитату из книги Дмитрия Сергеевича Лихачева "Русское искусство от древности до авангарда": "Осмыслить русскую историю, выявить существенные черты России чрезвычайно важно для современности, ибо многое из того, что произошло и происходит в наши дни, в известной мере определяется и будет еще определяться тем, что представляет собой Россия... Перед нами стоит задача восстановить полноту русской культуры. Прошлая Россия в наше время не может быть сброшена со счетов даже тех, кто искренне стремится к ее будущему утверждению в веках" [18, с. 31.].

Библиографический список

1. *Лихачев, Д.С.* Раздумья о России [Текст] / Д.С. Лихачев. – СПб., 2004.
2. *Лихачев, Д.С.* Русские летописи и их культурно-историческое значение [Текст] / Д.С. Лихачев. – М.-Л., 1947. – С. 203-204; 211-212; 442.
3. *Лихачев, Д.С.* Текстология [Текст] / Д.С. Лихачев. – 2-е изд. – Л., 1983.
4. *Симонов, Р.А.* "Учение" Кирика Новгородца [Текст] / Р.А. Симонов, В.В. Мильков; *Симонов, Р.А.* Математическая и календарно-астрономическая мысль Древней Руси [Текст] / Р.А. Симонов. – М., 2007.
5. *Е[вгений].* Сведение о Кирике, предлагавшем вопросы Нифонту, епископу Новгородскому [Текст] / Е[вгений] // Труды и летописи Имп. Общества истории и древностей российских. – М., 1828. – Ч. 4. – Кн. 1. – С. 122.
6. *Симонов, Р.А.* Роль Кирика Новгородца в культуре Руси (к 900-летию со дня рождения) [Текст] / Р.А. Симонов // Древняя Русь. – М., 2010. – № 4(42).
7. *Хавский, П.* Примечания на русские хронологические вычисления. Дополнительная выписка из вычислений Кирика XII в. [Текст] / П. Хавский // Чтения в обществе истории и древностей российских при Московском университете. – М., 1847. – С. 35-39.
8. *Бобынин, В.В.* Состояние математических знаний в России до XVI века [Текст] / В.В. Бобынин // Журнал Министерства народного просвещения. – СПб., 1884. – Ч. 232. – Апрель. – С. 194.
9. *Буняковский, В.Я.* Арифметика [Текст] / В.Я. Буняковский // Энциклопедический словарь, составленный русскими учеными и литераторами. – СПб., 1862. – Т. 5. – Отд. 1. – С. 350-351.
10. *Степанов, Н.В.* Единицы счета времени (до XIII века) по Лаврентьевской и 1-й Новгородской летописям [Текст] / Н.В. Степанов // Чтения в обществе истории и древностей российских при Московском университете. – М., 1909. – Кн. 4; *Степанов, Н.В.* Заметка о хронологической статье Кирика (XII век) [Текст] / Н.В. Степанов // Известия Отделения русского языка и словесности Академии наук. – СПб., 1910. – Т. 15. – Кн. 3; *Степанов, Н.В.* "Летописец вскоре" патриарха Никифора в Новгородской кормчей [Текст] / Н.В. Степанов // Известия Отделения русского языка и словесности Академии наук. – Т. 17. – Кн. 2, 3.
11. *Зубов, В.П.* Кирик Новгородец и древнерусские деления часа [Текст] / В.П. Зубов // Историко-математические исследования. – М., 1953. – Вып. 6. – С. 196-212.

[1] Найдено более 1100 берестяных грамот в Великом Новгороде, Торжке, Старой Руссе, Пскове, Смоленске, Витебске, Мстиславле, Москве, Твери и других городах, датированные периодом XI-XV вв.

12. *Симонов, Р.А.* О новом древнерусском тексте 1138 г. [Текст] / Р.А. Симонов // Историко-математические исследования. – М., 1995. – Сер. 2. – Вып. 1(36). – С. 66-84.
13. *Симонов, Р.А.* Новые материалы по истории математики Древней Руси [Текст] / Р.А. Симонов // Историко-математические исследования. – М., 2000. – Сер. 2. – Вып. 5(40). – С. 244-271.
14. *Симонов, Р.А.* Кирик Новгородец ученый XII века [Текст] / Р.А. Симонов. – М., 1980.
15. *Симонов, Р.А.* Математическая и календарно-астрономическая мысль Древней Руси [Текст] / Р.А. Симонов. – М., 2007. – С. 279.
16. *Ломоносов, М.В.* "На день восшествия на престол императрицы Елизаветы" [Текст] / М.В. Ломоносов. – 1747.
17. *Пашков, А.М.* Кирик Новгородец в письмах Н.В. Степанова к А.А. Шахматову (К 850-летию со времени создания "Учения") [Текст] / А.М. Пашков, Р.А. Симонов // Историко-астрономические исследования. – М., 1987. – Вып. 19. – С. 318.
18. *Лихачев, Д.С.* Россия [Текст] / Д.С. Лихачев // в кн. *Лихачев, Д.С.* Русское искусство от древности до авангарда [Текст] / Д.С. Лихачев. – СПб., 2009.

Развитие теории конфигураций в XIX – начале XX века

В.Г. Алябьева

Теория конфигураций является одной из частей комбинаторного анализа, изучающей порядок и распределение элементов по определенным правилам.

Искусство комбинаторики в широком смысле Г.В. Лейбниц понимал как часть Искусства Изобретения, отождествляя его с синтезом. Первые комбинаторные вычисления Лейбниц выполнил в 1666 году в своей диссертации "Искусство комбинаторики", а затем в течение всей своей жизни многократно возвращался к размышлениям о роли комбинаторики в системе научного знания. Взгляды Лейбница на высокую значимость комбинаторного искусства разделял выдающийся математик XIX века *Дж.Дж. Сильвестр* (James Joseph Sylvester, 1814-1897). Исследованию комбинаторных проблем Сильвестр посвятил несколько статей, начиная со статьи 1844 года "Элементарные исследования в анализе комбинаторных агрегатов" [8, v. 1, p. 91-102], в которой он обсудил правила образования различных наборов и систем наборов из элементов данного n-множества. Сильвестр подчеркивал, что решаемые им проблемы относятся к новой математической дисциплине, предметом изучения которой является расположение элементов друг относительно друга. Эта новая наука находится в таком же отношении к количественному комбинаторному анализу, в каком геометрия положения (т. е. проективная геометрия – В.А.) – к метрической, или теория чисел – к вычислительной арифметике.

"Число, положение, комбинация – представляются мне тремя пересекающимися, но различными сферами мысли, к которым имеют отношение все математические идеи," – пишет Сильвестр.

В статье Сильвестр строит всевозможные системы пар, троек, иных комбинаций из элементов данного множества, удовлетворяющие различным ограничениям на вхождение элементов, формулирует правила построения таких систем, вводит многочисленные оригинальные термины. Так, термином *synthеme* он именует любой "агрегат комбинаций", в котором все элементы данного множества появляются один и только один раз. Полный набор независимых *syntheme,* содержащий все пары элементов данного множества, он называет *total of dual syntheme.* Аналогично строятся полные системы независимых наборов троек, четверок и т.д. Для шести элементов *total of dual syntheme* выглядит так:

$$\begin{gathered}((a,b),\ (c,d),\ (e,f)),\\ ((a,d),\ (c,f),\ (e,b)),\\ ((a,c),\ (d,e,),\ (f,b)),\\ ((a,f),\ (b,d),\ (c,e)),\\ ((a,e),\ (d,f),\ (b,c)).\end{gathered}$$

К идеям 1844 года Сильвестр вернулся в статьях 1861 года: "Заметка об исторических источниках функций от шести переменных" [8, v. 2., p. 265-271], "Замечание о тактике девяти элементов" [8, v. 2, p. 286-289]. В этих статьях он вводит термин "*тактика"* для обозначения нового раздела математики, изучающего расположение элементов. К этому разделу он относил теорию групп (подстановок), комбинаторный анализ, теорию чисел. Учению о тактике Сильвестр предрекал большое будущее. Он полагал, что новое учение потребует специального символического исчисления. Однако Сильвестр не реализовал столь широкий замысел, ограничившись решением частных задач.

Взгляды Сильвестра на тактику разделял не менее знаменитый *Артур Кэли* (Arthur Cayley, 1821-1895). Практический вклад самого Кэли в развитие комбинаторного анализа достаточно велик. Он исследовал магические и латинские квадраты, ориентированные графы, системы троек. В статье 1846 года "О некоторых теоремах геометрии положения" [4, v. 1, p. 317-328] он строит целый класс комбинаторно-геометрических конфигураций в проективном пространстве P_n, частным случаем которых является плоская конфигурация, состоящая из $\binom{s}{n-1}$ точек и $\binom{s}{n}$ прямых, где символами $\binom{s}{n-1}$ и $\binom{s}{n}$ обозначены сочетания из s элементов, соответственно, по $n-1$ и n. Через каждую точку конфигурации проходит $(s-n+1)$ прямых, на каждой прямой лежит n точек. В 1864 году Кэли в статье "О понятиях и границах алгебры" [4, v. 5, p. 292-294], находясь под сильным впечатлением от растущего значения теории групп, предлагал различать в алгебре два вида операций: *тактические и логистические.* Тактическая операция, по мысли Кэли, связана с расположением множества вещей некоторым образом, логистическая (арифметическая) операция представляет собой вычисление для получения в результате числа. Каждая алгебраическая теорема основывается в конечном счете на тактических основаниях. Однако нельзя абсолютно резко разделить тактические и логистические опреции. Во всякой серии логистических операций есть тактический элемент, во многих тактических операциях, например, при разбиении чисел, есть кое-что логистическое. Таким образом, алгебра имеет два больших раздела: *Тактику и Логистику.*

Весьма известными тактическими задачами, привлекавшими внимание многих математиков в XIX веке, были задача Киркмана о 15 школьницах (1850) и комбинаторные задачи Штейнера (1853). *Т.Р. Киркман* (Thomas Penyngton Kirkman, 1806-1895) родился в семье, далекой от научных кругов. После окончания университета в Дублине в 1833 году он был посвящен в духовный сан, стал пастором. Математику Киркман изучал самостоятельно, причем весьма основательно. Вскоре он стал разбираться в актуальных математических исследованиях своего времени, был дружен с Кэли, де Морганом, Гамильтоном. Его математические работы относились к топологии, теории групп, гиперкомплексным числам, комбинаторике, теории узлов. В области комбинаторики Киркман сформулировал и частично решил задачу о 15 школьницах, которую позднее стали называть задачей Киркмана.

В 1844 году английский актуарий Международного страхового фонда С.У. Вулхауз (Stoker Wesley Bakker Woolhouse, 1809-1893) опубликовал в журнале "*Lady's and Gentleman's Diary*" конкурсную задачу № 1733. Об этой задаче и ее частичном решении сообщил Киркман 15 декабря 1846 года на заседании Литературного и философского общества в Манчестере. Текст задачи был таков: найти наибольшее число $Q_{x,y,z}$ комбинаций из x элементов по y таких, чтобы никакие комбинации по z не встречались дважды [6]. Киркман решил задачу для $y=3$ и $z=2$. Он отметил, что для $x=6n+1$ или $x=6n+3$ система троек строится, и построил систему троек для $x=7$ и для $x=15$. В 1850 году Киркман построил системы $(p+1)$-множеств, составленные из элементов (p^2+p+1)-множества так, чтобы каждая пара элементов появлялась точно в одном $(p+1)$-множестве. Позднее, когда были введены соответствующие понятия, стало ясно, что эти системы являются конечными проективными плоскостями порядка p. В 1850 году Киркману приходит мысль сформулировать задачу для случая троек в развлекательной форме: 15 школьниц гуляют вместе каждый день, выстроившись в колонну по три человека в ряду. Каждая девочка в течение недели точно один раз бывает в одном ряду с другой. В течение скольких недель возможны такие прогулки? Эту задачу Киркман опубликовал в популярном и в математическом журналах. Задача привлекла внимание публики и сделала имя Киркмана знаменитым. Задачу стали называть "задача Киркмана о пятнадцати школьницах".

В 1869 году Киркман с гордостью вспоминал, что он имел честь ввести на планету знаменитых пятнадцать леди. Однако приоритет Киркмана оспаривал Сильвестр. В 1861 году он утверждал, что задача о семи рядах троек носится в воздухе, общеизвестна, что он уже много лет решает эту задачу со студентами. Эту задачу студенты устно передавали друг другу. Весьма вероятно, что Сильвестр прав. Если мы обратимся к его статье 1844 года, то уже в ней увидим задачи, близкие задаче Киркмана. Это убеждает нас в том, что подобные задачи Сильвестр решал до 1859 года. Однако, как мы уже отмечали, в математическом мире задача о распределении троек в семь рядов, а точнее, задача о пятнадцати школьницах, известна как задача Киркмана.

Задача Киркмана уточнялась, обобщалась, к ее решению обращались математики в течение второй половины XIX века и в XX веке, в том числе Кэли и Сильвестр.

Понятие "система Киркмана" следует отличать от понятия киркмановского расположения. Системой Киркмана из 15 элементов называется система из 35 троек, в которой каждая пара элементов содержится один раз. Распределение троек в системе Киркмана в такие 7 подмножеств по пять троек в каждом, что каждая тройка входит в каждое подмножество, называется киркмановским расположением (*Kirkman parade*). Известны 4 неэквивалентные системы Киркмана и 7 неэквивалентных киркмановских расположения из 15 элементов. Группы автоморфизмов киркмановского расположения пятнадцати элементов были найдены в 1922 году американским математиком Коулом [5]. В общем случае задача Киркмана была решена в 1969 году на языке блок-схем. Отметим, что задача Киркмана была предметом специального историко-математического исследования в статье Аллы Ефимовны Малых (1980) [3].

Рассмотрим один из первых, наиболее элегантных методов решения киркмановского расположения элементов, данных *Anstice R.R.* (1852) и *B. Peirce B.* (1859). Среди пятнадцати элементов выделяем один элемент p, оставшиеся 14 элементов распределим в 2 класса по семь элементов в каждом: $a_1, a_2, ..., a_7$ и $b_1, b_2, ..., b_7$. Тогда воскресная прогулка выглядит так: pa_1b_1, $b_4a_5a_7$, $b_6a_3a_4$, $b_7a_2a_6$, $b_2b_3b_5$. Для других дней недели получаем соответствующие тройки, не изменяя p и увеличивая на 1 по модулю 7 индексы у элементов a_i и b_i. Тогда понедельнику соответствует разбиение: pa_2b_2, $b_5a_6a_1$, $b_7a_4a_5$, $b_1a_3a_7$ и $b_3b_4b_6$ и т.д. Таких разбиений существует столько, сколько существует вычетов по модулю 7, то есть 7. Полученное решение преобразуется в себя группой порядка 168, порожденной подстановками

$$\alpha = (a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7)\cdot(b_1b_2b_3b_4b_5b_6b_7),$$
$$\beta = (b_3b_7)(b_5b_6)(pa_4)(a_1a_2)(a_3a_5)(a_6a_7).$$

В 1897 году Бернсайд предложил теоретико-групповой вариант задачи Киркмана: доказать, что в группе порядка 16, чьи элементы, кроме единицы, имеют порядок 2, множество из 15 нееединичных элементов можно разбить в 5 подмножеств по три элемента так, что всегда три элемента подмножества образуют с единицей подгруппу, и что это разбиение можно выполнить 7 различными способами.

Исследованием систем троек Киркмана занимались английские и американские математики. Европейские математики исследовали так называемые системы Штейнера. Если в случае систем Киркмана можно пока только строить предположения о задачах, приведших к системам (вероятнее всего, это были задачи, связанные с проблемой разрешимости уравнений), то в случае систем Штейнера мы вполне определенно можем указать такие задачи.

Исследуя конфигурацию из 28 касательных плоской кривой четвертого порядка, *Штейнер* (Jakob Steiner, 1796-1863) заметил четкие закономерности в распределении точек конфигурации. В октябре 1852 года он опубликовал статью "Свойства кривых четвертого порядка, связанные с наличием двойных касательных", а в ноябре 1852 года он сформулировал знаменитые комбинаторные задачи.

1. Каким должно быть число N, чтобы N элементов можно было расположить в тройки так, чтобы каждые два элемента входили в одну и только одну тройку?
2. Каким должно быть число N, чтобы N элементов можно было расположить в четверки так, чтобы каждая тройка, не вошедшая в первую систему, входила в одну и только одну четверку, при этом никакие три элемента четверки не входили в первую систему троек?
3. Каким должно быть число N, чтобы N элементов можно было расположить в пятерки так, чтобы каждая четверка, не вошедшая в предыдущую систему, входила в одну и только одну систему пятерок? При этом никакие тройки, никакие четверки элементов в пятерке не принадлежат ранее названным системам.

   И так далее до семерок.

Отвечая на эти вопросы, Штейнер утверждает, что число N, для которого можно построить систему троек, с необходимостью должно иметь вид $6n+1$ или $6n+3$. Является ли это условие достаточным? Ответа на этот вопрос Штейнер не дает. В этой же статье Штейнер приводит без доказательства формулы для подсчета числа троек, четверок, пятерок, шестерок и семерок. Так, из N элементов число *троек* равно $\frac{N(N-1)}{2\cdot 3}$, число *четверок* равно $\frac{N(N-1)(N-3)}{2\cdot 3\cdot 4}$ и т.д.

Из всех сформулированных Штейнером в статье 1853 года задач наибольшее внимание привлекли задачи на построение троек, "троек Штейнера", как стали говорить позднее. Системы троек Киркмана совпадают с системами троек Штейнера. Киркмановское расположение троек по дням недели представляет систему троек Штейнера с параллелизмом или дубликатами.

В 1859 году *Reiss M.* доказал, что условия, необходимые для существования системы троек Штейнера, являются достаточными.

В 1896 году американский математик *Елиаким Гастингс Мур* (Eliakim Hastings Moore, 1862-1932) в статье "Tactical memoranda" [7] ввел термин *тактическая конфигурация*. Пусть задано n множеств $a_1, a_2, ..., a_n$, для элементов которых задано отношение инцидентности. Эти множества образуют тактическую конфигурацию, если для любых g и h ($g \neq h$) каждый элемент из множества g инцидентен с одним и тем же числом a_{gh} элементов из множества h. Конфигурация называется геометрической, если для элементов принадлежащих ей множеств можно ввести геометрическую терминологию, отождествив элементы множества i с подпространством R_{i-1} размерности $i-1$ из пространства R_n размерности n. В своей статье Мур рассматривает многочисленные примеры тактических систем и доказывает их свойства. Наиболее важными считаются вопросы о числе систем определенного вида для заданного числа элементов. К тактическим системам общего вида Мур относит сочетания и размещения с повторениями и без повторений. Терминами "сочетание" и "размещение" Мур не пользуется, но его определения дословно совпадают с современными определениями сочетаний и размещений. Так, термином $k-id$ из m элементов он называет упорядоченный k-набор $(a_1, a_2, ..., a_k)$ различных элементов из данного m-множества. Число $k-ids$ равно $m_k = m\cdot(m-1)\cdot ...\cdot(m-k+1)$. Неупорядоченный набор $\{a_1, a_2, ..., a_k\}$, содержащий k различных элементов данного m-множества, Мур называет $k-ad$. Число $k-ads$ равно $\frac{m_k}{k_k}$. Символом $S[k,l,m]$, $m \geq k \geq l$, Мур обозначил системы, состоящие из таких k-сочетаний (или блоков длины k) данного m-множества, что каждое l-сочетание входит в одно и только одно k-сочетание. Число таких k-сочетаний в системе $S[k,l,m]$ равно

$$\frac{m\cdot(m-1)\cdot ...\cdot(m-l+1)}{k\cdot(k-1)\cdot ...\cdot(k-l+1)}.$$

К системам описанного вида обратился в 1938 году Э. Витт в статье "О системах Штейнера" [9]. Эти системы Витт назвал системами Штейнера и обозначил через $S(k,l,m)$, в результате чего внес путаницу в историю математики. Изучению свойств систем Штейнера, поиску неизоморфных систем, нахождению их групп автоморфизмов посвящались в XX веке многочисленные статьи. Авторов не заботил тот факт, что системы Штейнера определил не Штейнер. Как об удивительном факте сообщил в 1984 году известный специалист в области блок-схем *Hanani H.* в статье "Об изначальных системах Штейнера", что в "Комбинаторных задачах"

Штейнер ввел не те системы, которые сейчас называют его именем. Hanani, однако, не сообщает, кто ввел системы, именуемые шнейнеровыми.

Геометрия систем Штейнера была объектом специального изучения в статьях и кандидатской диссертации В.В. Афанасьева [2]. Он изучил выполнимость различных конфигураций в системах Штейнера $S(22,6,3)$, $S(23,7,4)$, $S(24,8,5)$. Группами автоморфизмов перечисленных систем являются знаменитые спорадические группы Матье [1]. Система $S(22,6,3)$ содержит 22 точки и 77 блоков по 6 точек в каждом блоке. Блок однозначно определяется заданием любых трех его точек. Любые два блока либо пересекаются в двух точках, либо не пересекаются. В.В. Афанасьев доказал выполнимость для системы $S(22,6,3)$ теоремы Микеля и теоремы "о связках" – основных конфигурационных теорем конформной геометрии. Для систем $S(23,7,4)$ и $S(24,8,5)$ доказаны обобщения теоремы Микеля.

Обобщением понятия "тактическая конфигурация" в XX явилось понятие блок-схемы. В 1935-1940 годах в статьях Р. Фишера [5], работавшего в ту пору главным статистиком Ротемстедской агробиологической станции, и в работах его сотрудников, посвященных планированию эксперимента, появился сначала термин *block arrangement*, затем – *block design*, дословный перевод которого – "блочный план". С.А. Широкова (Рукова) в 1966 году готовила обзорную статью о *block design* для "Успехов математических наук" по материалам зарубежной печати, одновременно она переводила с английского книгу М. Холла (M. Hall) "Комбинаторика", где этот термин встречается. Широкова предложила перевести *block design* как "блок-схема". Этот перевод в русской литературе утвердился. Под блок-схемой понимается система подмножеств конечного множества, удовлетворяющая некоторым условиям, относящимся к частоте появления пар элементов в подмножествах системы. Блок-схема задается парой множеств (V,B), где $V=\{a_1,a_2,...,a_v\}$, $B=\{B_1,B_2,...,B_b\}$, $B_i\subseteq V$, $i=1,2,...,b$. Элементы множества V называются *элементами* блок-схемы, а элементы множества B – ее *блоками.* Обозначим через v число элементов в схеме, через b – число блоков. Число элементов, принадлежащих блоку B_j, обозначим через k_j. Число блоков, инцидентных элементу a_i обозначим через r_i. Через λ_{ij} обозначим число блоков, которым принадлежит пара элементов $\{a_i,a_j\}$. Если все блоки состоят из одинакового количества k элементов, если каждый элемент входит в одно и то же число r блоков и если число блоков, которым принадлежит любая пара элементов $\{a_i,a_j\}$ постоянно и равно λ, то схема называется *уравновешенной неполной* блок-схемой. Слово "уравновешенный" характеризует одинаковую частоту появлений элементов и пар элементов, а слово "неполный" служит указанием на то, что, вообще говоря, не все k-элементные множества входят в качестве блоков в схему. Для параметров уравновешенной неполной блок-схемы выполняются соотношения:

$$vr=kb,\quad \lambda(v-1)=r(k-1).$$

Частным видом тактических конфигураций являются конечные проективные и аффинные геометрии, которые были аксиоматически определены в конце XIX – начале XX века. Так система троек из семи элементов, в которых каждая пара элементов встречается точно один раз, построенная Киркманом, является конечной проективной плоскостью порядка 2:

$$\begin{matrix} 1&1&1&2&2&3&3\\ 2&7&5&7&5&5&4 \end{matrix}$$

Если точками плоскости считать числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, прямыми – выделенные тройки чисел, расположенные в столбцах схемы, то для построенной схемы выполняется аксиоматика проективной плоскости:

P1. Через любые две различные точки проходит единственная прямая.

P2. Любые две различные прямые пересекаются в единственной точке.

P3. Существуют четыре неколлинеарные по три точки.

Ученик Мура *Освальд Веблен* (Osvald Veblen, 1880-1960) в 1906 году в статье "Конечные проективные геометрии" указал общий метод построения конечных проективных пространств размерностей, превышающих 2, и конечных проективных плоскостей над полями Галуа, сформулировал аксиоматику конечной n-мерной геометрии. Веблен доказал, что для проективной n-мерной геометрии ($n>2$) выполняется теорема Дезарга. Выполнимость теоремы Дезарга для конечной проективной плоскости зависит от свойств координатизирующей системы. Если конечная плоскость построена над конечным *полем*, то теорема Дезарга в конечной плоскости выполняется. Истории конечных геометрий посвящена кандидатская диссертация А.Е. Малых.

Теория тактических конфигураций развивалась, тесно взаимодействуя с теорией геометрических конфигураций, теорией конечных групп и с теорией графов. В 1974 году в статье "Тактические конфигурации: введение" *L.Q. Judith* определил тактическую конфигурацию ранга r на языке теории графов как семейство r непересекающихся множеств вершин $A_1,A_2,...,A_r$, называемых связками, с соотношением смежности между вершинами. Каждая вершина связки A_i смежна с вершинами связки A_j. Это постоянное число d_{ij} называется $(i-j)$-степенью, множество всех таких степеней называется множеством степеней конфигурации. Тогда тактическую конфигурацию можно определить как r-дольный граф. Проективная плоскость порядка n определяется как конфигурация ранга 2 со множеством степеней $\{n,n\}$, с обхватом 6 и размерами обеих полос n^2+n+1. Обхват графа равен числу вершин в наименьшем полигоне графа.

В настоящее время теория тактических (или комбинаторных) конфигураций – бурно развивающаяся часть комбинаторного анализа, имеющая многочисленные применения.

Библиографический список

1. *Алябьева, В.Г.* Геометрия простых конечных групп [Текст] / В.Г. Алябьева // Актуальные проблемы преподавания геометрии. Материалы научно-практической конференции, посвященной юбилею кафедры геометрии ПГПУ. – Пермь: ПГПУ, 2009. – С. 9-14.
2. *Афанасьев, В.В.* Теорема Микеля и ее обощения для систем Штейнера S(22,6,3), S(23,7,4), S(24,8,5) [Текст] / В.В. Афанасьев. – Ярославль: ЯГПИ, 1984. – Деп. в ВИНИТИ, 16.04.84. – № 2370-84.
3. *Малых, А.Е.* О проблеме Киркмана и ее развитии во второй половине XIX – начале XX века [Текст] / А.Е. Малых. – Пермь: Пермь: ПГПИ, 1980. – 13 с. – Деп. в ВИНИТИ, 29.04.80. – № 1338-80.
4. *Cayley, A.* The collected mathematical papers. – Cambridge. 1890-1898. v.1-13.
5. *Fisher, R.A.* The design of experiments. – Edinburgh: Oliver and Boyd. 3 d.ed.1942. 236 p.
6. *Kirkman, T.P.* On a problem in combinations // Cambridge and Dublin mathematical journal. 1847. V. 2. P. 192-204.
7. *Moore, E.H.* Tactical memoranda I-III // American journal of mathematics. 1896. V. 18. P. 264-303.
8. *Sylvester, J.J.* The collected mathematical papers. – Cambridge. 1889-1898. V. 1-2.
9. *Witt, E.* Über Steinersche Systeme // Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Universität Hamburg. 1938. Bd. 12. S. 265-275, 256-264.

История рядов Фарея

О.О. Барабанов

Человеку свойственно стремление к порядку. Это стремление при упорности в одном правильно выбранном направлении, как правило, приводит к открытиям. В геометрии поиски порядка в мире прямых привели к геометрии Лобачевского. А что в арифметике?

Там есть огромный и хаотический мир обыкновенных дробей. Может ли здесь быть какой-нибудь порядок? Есть ли он помимо и в отличие от естественного представления, что обыкновенные дроби всюду плотны среди действительных чисел? Оказывается, есть. Установление этого порядка связано с именами: *Шарль Харос* (1802), *Джон Фарей* (1816), *Огюстен Луи Коши* (1816). Смысл порядка, о котором пойдет речь, очень прост. Обыкновенные несократимые дроби, у которых значения принадлежат отрезку $[0,1]$, а знаменатели не превосходят заданного натурального числа n, выстраиваются по возрастанию значений. Такого рода конечные последовательности называются сейчас *рядами Фарея (Farey series)*, реже – последовательностями Фарея (Farey sequences). Выглядят ряды Фарея в зависимости от n следующим образом:

$$F_1 = \left\{ \frac{0}{1},\ \frac{1}{1} \right\},$$

$$F_2 = \left\{ \frac{0}{1},\ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}},\ \frac{1}{1} \right\},$$

$$F_3 = \left\{ \frac{0}{1},\ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}},\ \frac{1}{2},\ \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}},\ \frac{1}{1} \right\},$$

$$F_4 = \left\{ \frac{0}{1},\ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}},\ \frac{1}{1} \right\},$$

$$F_5 = \left\{ \frac{0}{1},\ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{3},\ \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}},\ \frac{1}{2},\ \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{5}},\ \frac{1}{1} \right\},$$

и так далее. Каждый следующий ряд Фарея получается некоторым дополнением к предыдущему. Эти дополнения выделены выше жирным шрифтом.

Такое установление порядка среди обыкновенных простых дробей подобно Таблице Менделеева для химических элементов. Неудивительно поэтому, что ряды Фарея обладают многими интересными свойствами и, прямо или косвенно, участвуют в постановках и доказательствах самых разнообразных математических проблем. Поэтому в последнее время истории рядов Фарея уделяется повышенное внимание. Отметим, в частности, монографию [1], далеко не полный обзор румынских математиков [2], а также Интернет-публикацию [3]. Дополнительный интерес к истории рядов Фарея связан с проблемой авторства. В 1918 году Харди[1] и Рамануджан[2] в своей работе [4] использовали термин “ряд Фарея” без упоминания Хароса и Коши. В 1919 году Диксон[3] в первом томе [5, с. 156] своего грандиозного труда по истории теории чисел написал, что “Харос

[1] *Hardy*, Godfrey Harold (1877-1947).
[2] *Ramanujan*, Srinivasa Iyengar (1887-1920).
[3] *Dickson*, Leonard Eugene (1874-1954).

[6] доказал результаты, переоткрытые затем Фареем [7, 8] и Коши [9]". Затем Хинчин[1] в 1935 году [10], Виноградов[2] в 1936 году [11] и Форд[3] в 1938 году [12] употребляют термин "ряд Фарея" без упоминания о Харосе и Коши. В 1940 году в своем знаменитом эссе "Апология математика" [13] Харди отказался от своей ссылки [4] на Фарея и высказался радикально: "... Фарей обессмертил себя тем, что не смог понять теорему, вполне доказанную Харосом четырнадцатью годами раньше". Тем не менее, в 1968 году в своей книге [14] Чандрасекхаран[4] не упоминает Хароса, а опорную теорему называет теоремой Фарея-Коши. В своей статье [15] 1997 года Стечкин[5], ссылаясь на [5] и [16] пишет, что основные арифметические свойства F_n были установлены Харосом, а "исторически неправильное" название "ряд Фарея" принадлежит Харди и Рамануджану [4].

Все вышеупомянутые авторы – выдающиеся математики XX века. Но, как видим, общей определенности по вопросу о происхождении рядов Фарея у них не было. Чтобы прояснить этот вопрос, единственный выход – непосредственно рассмотреть оригиналы работ Хароса, Фарея и Коши, тем более, что они по объему небольшие. В этом смысле настоящая работа является анонсом к предстоящей публикации переводов на русский язык работ Хароса, Фарея и Коши в журнале "История науки и техники".

Прежде, чем переходить к сопоставлению работ Хароса, Фарея и Коши, коснемся *медиантного* свойства ряда Фарея.

Медианта. Достаточно взглянуть на вышеприведенные ряды F_n, чтобы убедиться в любопытном свойстве этих рядов: каждый не крайний член ряда F_n по значению равен дроби, числитель которой и знаменатель которой, соответственно, равны суммам числителей и знаменателей двух соседних дробей ряда (слева и справа). Так получается *медианта* – (от позднелат. medians, находящийся посредине), термин[6], который восходит к *Никола Шюке (Chuquet,* Nicolas, ок. 1445-1488). В своем рукописном труде Triparty en la science des nombres (1484) Шюке записал, без доказательства, следующее "правило средних чисел": если

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d}, \quad \text{то} \quad \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d},$$

см. [17, с. 289]. Это промежуточное значение

$$\frac{a+c}{b+d}$$

называется сейчас *медиантой* дробей $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, как некое среднее между этими дробями.

Пока неизвестно, кто первым употребил термин *медианта*, *mediant (англ.)* в математике. У Диксона в параграфе, посвященном рядам Фарея [5, с. 156], находим следующую фразу: "A. Brocot [18] considered the sets obtained by **mediation**[7] [Farey] from 0/1, 1/0 :

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{0}; \qquad \frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{0}; \ldots$$

Здесь речь идет о расширении понятия рядов Фарея на все обыкновенные дроби, что производится бинарным деревом Штерна-Брока [18, 19], хорошо описанным в книге Дональда Кнута с коллегами [20]. В русский математический язык термин "медианта" ввел, по-видимому, Хинчин [10] в 1935 году.

Не менее важным, чем медиантное свойство рядов Фарея, является

Детерминантное свойство. Скажем, что конечная или бесконечная возрастающая последовательность обыкновенных дробей обладает *детерминантным свойством*, если для любой пары соседних дробей $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ выполняется равенство

$$ad - bc = -1.$$

Детерминантное свойство, очевидно, обеспечивает несократимость дробей.

Без использования целочисленности элементарными алгебраическими операциями легко доказать две следующие теоремы.

Теорема 1. *В последовательности дробей, обладающей детерминантным свойством, каждая не крайняя дробь имеет значение медианты соседствующих с ней дробей.*

Теорема 2. *Детерминантное свойство последовательности дробей сохраняется при вставке медиант.*

Намного сложнее доказывается следующая, целочисленная, принципиальная

Теорема 3. *Пусть две обыкновенные дроби обладают детерминантным свойством. Тогда среди всех промежуточных дробей минимальный знаменатель будет у медианты и только у нее.*

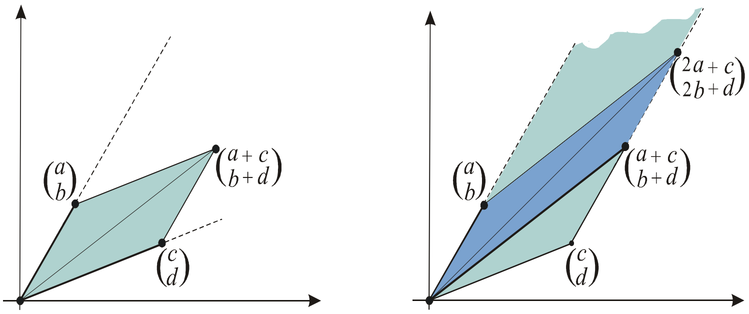
---

[1] *Хинчин*, Александр Яковлевич (1894-1959).
[2] *Виноградов*, Иван Матвеевич (1891-1993).
[3] *Ford*, Lester R. (1886-1967).
[4] *Chandrasekharan*, Komaravolu S. (р. 1920).
[5] *Стечкин*, Сергей Борисович (1920-1995).
[6] В другом, неарифметическом, смысле термин *мендианта* используется также в теории музыки.
[7] Выделение наше.

Эту теорему можно доказывать по-разному, однако наиболее выразительное доказательство основано на *формуле Пика*[1] [21] для площади односвязного многоугольника с целочисленными вершинами:

$$S = i + \frac{r}{2} - 1,$$

где S – площадь многоугольника (в данном случае – параллелограмма), а i и r – количества внутренних и граничных целочисленных точек соответственно. В силу несократимости дробей $r = 4$. По детерминантному свойству $S = 1$. Поэтому $i = 0$, т.е. промежуточных дробей со знаменателем меньше чем у медианты в параллелограмме, включая его границы, на левом рисунке нет. Аналогично, нет таких дробей в затемненном параллелограмме на правом рисунке, и т.д. Объединение всех таких параллелограммов заметет всю серую полосу на правом рисунке. Отсюда, очевидно, следует, что левее медианты утверждение теоремы выполнено. Совершенно аналогично оно выполнено и правее медианты. Теорема доказана.



Шарль Харос (*Haros, Charles,* 17??-около 1809) – один из группы математиков Бюро Кадастра Французской республики с октября 1794 по март 1802 в компании с Лежандром, Карно, Пуассоном и др. В 1801 году – автор работы "Инструкция по применению новых мер, которые должны быть введены во всей республике с 10-го Вандемьера, с таблицами отношений и сокращений" (работа поддержана Прони и Лежандром). Харосом пересмотрена и увеличена таблица логарифмов в основном для тех инженеров, которые занимались геодезией и кадастром [22]. О жизни и творчестве Хароса известно немного. Между тем, его таблицы высоко оценивались Прони, Лежандром и Безу. О их внедрении в 1809 году просила вдова Хароса в письме к Прони, рассчитывая, вероятно, на материальное вознаграждение [23].

В главной для нас работе [6] Харос описывает построение своих таблиц пересчета обыкновенных дробей в десятичные и обратно. К сожалению, сами таблицы не представлены даже в приложении к тому *Journal de l'École Polytechnique*, поэтому понять рассуждения Хароса практически невозможно. Можно только догадываться, что в исследовании Харосом ряда F_{99} его таблицы играли важную роль и, в частности, помогли ему построить ряд F_{99} без двух крайних дробей. Харос сообщает о 3003 членах этого ряда, что совпадает с истинным значением и свидетельствует об исчерпывающем построении Харосом ряда F_{99}. Две последних страницы [6] Харос посвящает задаче о построении ряда F_{99} без вспомогательных таблиц: *"Найти в порядке величин все несократимые дроби, заключенные между* 0 *и* 1, *при условии, что знаменатели этих дробей не превосходят двух цифр.*

... Чтобы решить эту задачу, я напишу сначала такую последовательность дробей:

$$\frac{1}{99}, \frac{1}{98}, \frac{1}{97}, \ \dots \ \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ \dots \ \frac{96}{97}, \frac{97}{98}, \frac{98}{99},$$

в которой, каждая дробь отличается от соседней единицей, деленной на произведение их знаменателей ...

Нам осталось теперь вставить между предыдущими дробями все такие несократимые дроби, знаменатели которых меньше 100".

Далее Харос приводит алгебраическую выкладку, которую, с некоторой натяжкой, можно приравнять к теоремам 1 и 2.

О математическом стиле Хароса говорит завершение его статьи:

"Так как три дроби $\frac{a}{b}$, $\frac{a+c}{b+d}$, $\frac{c}{d}$ *отличаются между собой на* $bc - ad = 1$, *деленную на произведение их знаменателей, то промежуточная дробь, таким образом, несократимая, и является, в то же время, обыкновенной дробью, которая больше приближается к одной или другой из двух дробей* $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$.

Знаменатели дробей, которые должны образовать таблицу в обсуждаемом вопросе, будут меньше, чем 100*; нельзя вставить никакую дробь в последовательность* $1/99$, $1/98$, $1/97, \dots$ $1/50$, *потому что сумма знаменателей двух соседних дробей превышает* 99, *но между* $1/50$ *и* $1/49$ *можно вставить* $2/99$. *Дроби* $1/49$ *и* $1/48$ *дают* $2/97$ *и можно идти таким образом подряд до дроби* $1/33$*; тогда между ней и* $1/32$ *можно будет вставить три дроби; получим сначала* $1/33$, $2/65$, $1/32$, потом $1/33$, $3/98$, $2/65$, $3/97$, $1/32$.

После этих примеров видно, как можно найти все промежуточные дроби между $1/32$ *и* $1/31$, *между* $1/31$ *и* $1/30$ *и так далее".*

[1] Georg Alexander Pick (1859-1942) – австрийский математик.

Тем самым, Харос предъявил метод медиантного насыщения с барьером $n = 99$ в знаменателе, начиная от обладающей детерминантным свойством последовательности из 195 дробей. Это привело его к некоторому ряду H_{99}, являющемуся подмножеством ряда F_{99}. Рассуждая в пользу Хароса, отнесем этот метод к произвольному n. По теореме 3 $H_n = F_n$. Сам Харос совпадение $H_{99} = F_{99}$ или подтверждал своими таблицами или принимал на веру.

Впервые имя Хароса в истории рядов Фарея возникает в 1919 году у Диксона [5, p. 156].

Фарей (*Farey, John, 1766-1826)* – английский геолог и любитель арифметики. В своем крохотном письме [7] *О любопытном свойстве обыкновенных дробей* в журнал *Philosophical Magazine*, обращаясь к издателю, Фарей написал:

"Сэр, в результате внимательного изучения "Таблиц десятичных остатков", составленных Генри Гудвином для широкого употребления, я удачным образом обнаружил следующее свойство общего характера для обыкновенных дробей.

Если все возможные обыкновенные дроби, чьи минимальные знаменатели не превосходят заданного числа, упорядочены по возрастанию, то числитель и знаменатель любой дроби будут суммами, соответственно, числителей и знаменателей соседних дробей – предшествующей и последующей, хотя, возможно, не наименьшими суммами.

Я не уверен, что это интересное свойство обыкновенных дробей где-либо ранее зафиксировано, или кем-нибудь доказано в частном или общем случае, поэтому я сообщаю об этом к удовольствию ваших математических читателей".

Стремясь объявить о своем открытии непосредственно и на континенте, Фарей одновременно со своим письмом в *Philosophical Magazine* послал французский перевод этого письма в авторитетный Парижский *Бюллетень Филоматического Общества*, где его заметка [8] еще до публикации попалась на глаза молниеносному Коши. Эта предприимчивость Фарея и обеспечила ему, в итоге, то бессмертие, о котором с некоторым раздражением высказался Харди в своей "Апологии математика" [13].

Коши в начале своей заметки *Доказательство одной любопытной теоремы о числах* [9] пишет о любопытном свойстве обыкновенных дробей, обнаруженном Дж. Фареем. Далее следует формулировка и доказательство следующей теоремы:

Если в возрастающей последовательности несократимых дробей, знаменатели которых не превышают любое наперед заданное целое число, взять две последовательные дроби, то их знаменатели будут взаимно просты, а их разность будет дробью с единицей в числителе.

В качестве основного инструмента для доказательства своей теоремы Коши использует (дважды) теорию линейного диофантова уравнения с двумя неизвестными при взаимно простых коэффициентах, причем при условии заведомо известного частного решения. В этом случае общее решение выражается двумя согласованными арифметическими прогрессиями. Этот факт был к началу XIX века прекрасно известен благодаря трудам Эйлера, Лагранжа и других математиков. Поэтому Коши не делает ссылок ни на кого, кроме Фарея (дважды!). Доказательство Коши опорной для теории рядов Фарея теоремы следует признать классическим по краткости и минимальности средств.

Сопоставление результатов Хароса, Фарея и Коши. Харос определил ряд F_{99} и построил ряд H_{99}. Доказательства, что $H_{99} = F_{99}$, не привел. Доказал элементарные теоремы 1, 2 и, соответственно, детерминантное и медиантное свойства H_{99}. Своим методом медиантного насыщения предвосхитил современные алгоритмы построения произвольного ряда Фарея через специальное дерево.

Фарей, как гипотезу, выдвинул медиантное свойство ряда F_n, и все! Заслуга Фарея состоит в четкой постановке проблемы, что и привлекло Коши.

Коши доказал детерминантное и медиантное свойства ряда F_n. Возможно, Коши даже пролистал статью Хароса, но в силу размытости предмета статьи, неуклюжести авторского текста при отсутствии таблиц, на которые Харос ссылался, Коши не придал ей значения. Пересечение Коши и Хароса – только теорема 1. Зато теорема Коши, фактически, эквивалентна теореме 3. Для доказательства подобных фактов прилежному арифметику и алгоритмику Харосу просто не доставало математической мощи.

Таким образом, Диксон, а следом за ним и Харди, не вполне правильно оценивали взимосвязь результатов Хароса, Фарея и Коши, что, впрочем, не отменяет заслугу Хароса с его конструктивным подходом. Любопытно, что даже резкая позиция Диксона и Харди в пользу Хароса не остановила новаторов компьютерной математики перед введением возмутительного термина "дерево Фарея" вместо справедливого *дерево Хароса.*

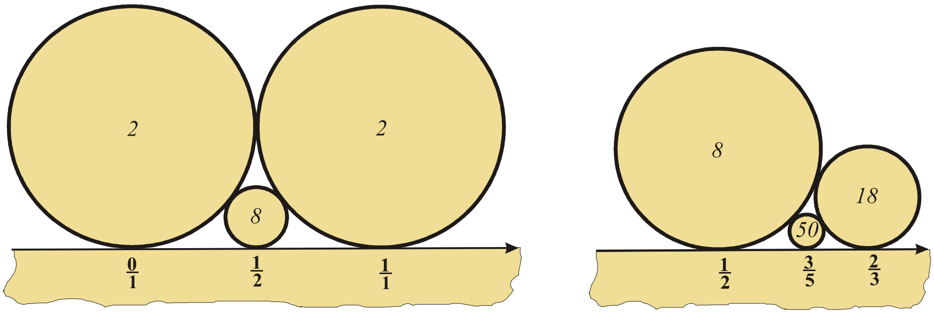
От Коши до Диксона было, согласно Диксону [5], более двадцати авторов, которые занимались рядами Фарея, среди них такие известные математики, как Чезаро, Сильвестр, Гурвиц, Серпинский. Отметим также Мертенса (1840-1927), который в работе [24] получил асимптотику для длины $\Phi(n)$ ряда Фарея F_n:

$$\Phi(n) = \frac{3}{\pi^2}n^2 + O(n \ln n).$$

Первое практическое применение рядов Фарея для автоматических вычислений связано со счислительной машиной Х.З. Слонимского (1810-1904), за которую Слонимский получил в 1845 году половинную Демидовскую премию в размере 2500 рублей [25].

Ранняя история рядов Фарея, впервые представлена в работе [26]. Сам термин "ряд Фарея", возможно впервые, встречается в авторитетной книге Лукаса[1] [27].

Круги Форда [12] начинаются с трех взаимно касающихся кругов кривизн 2, 2, , 0, из которых два первых круга касаются *опорного круга* (нижней полуплоскости) в абсциссах 0/1, 1/1, т.е. в членах ряда F_1. Последующими кругами Форда будут максимальные круги в промежутках между опорным кругом и другими, уже построенными, кругами. Например, на первом шаге получим левый рисунок с одним новым кругом кривизны 8. Затем возникнет и ситуация, изображенная на правом рисунке, и т.д. Оказывается, образование новых точек касания с опорным кругом есть ни что иное, как процедура медиантного насыщения Хароса, а, следовательно, контролируя знаменатель, мы будем получать один ряд Фарея за другим. При этом кривизна круга над каждой дробью Фарея $\frac{a}{b}$ есть $2b^2$.



Интересно, что каждая четверка кругов Форда – крайний случай конфигурации Декарта, а, следовательно, выполняется тождество Декарта для кривизн: *"квадратов сумма их двукрат есть суммы всех кривизн квадрат"* [28]. Например, для левого рисунка $2(2^2+2^2+0^2+8^2)=(2+2+0+8)^2$, и т.д. Так красивая арифметика согласуется с красивой геометрией.

Гипотеза Римана на языке рядов Фарея. Ряды Фарея используются в нескольких эквивалентных формулировках гипотезы Римана (**RH**):

$$Re(s)>\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\neq 0.$$

После доказательства Г.Я. Перельманом гипотезы Пуанкаре гипотеза Римана остается одной из шести нерешенных проблем в списке семи проблем тысячелетия, объявленного математическим институтом Клэя в 2000 году.

Сама по себе интересна неравномерность ряда Фарея F_n. Естественно ее оценивать через отклонение F_n от равномерной на отрезке [0, 1] сетки U_n с тем же числом членов $\Phi(n)$, как и у ряда Фарея F_n. Для этого существует бесконечно много метрик, но весьма популярны единообразно записываемые l_p-отклонения. В терминах этих отклонений получены формулировки, эквивалентные гипотезе Римана. Сначала Франель (*Franel,* Jerome, 1859-1939) в работе [29] доказал, что

$$RH \quad \Leftrightarrow \quad \|F_n-U_n\|_2=O(n^{-0.5+\varepsilon}) \quad \forall\varepsilon>0.$$

Затем Ландау (*Landau,* Edmund Georg Hermann, 1877-1938) в работе [30] доказал, что

$$RH \quad \Leftrightarrow \quad \|F_n-U_n\|_1=O(n^{0.5+\varepsilon}) \quad \forall\varepsilon>0.$$

Другие факты относительно асимптотик отклонений F_n от U_n при $n\to\infty$ можно найти в работе С.Б. Стечкина [15].

Заключение. На открытии IX Колмогоровских чтений Владимир Михайлович Тихомиров рассказал о своем видении математики как некоторого Дома, подъезды которого снабжены лестницами восхождения. В этом смысле ряды Фарея предоставляют прекрасную возможность восхождения в подъезде Арифметика, начиная от самого первого знакомства с обыкновенными дробями до серьезных математических проблем. Ряд Фарея – лифт в подъезде Арифметика!

Библиографический список

1. *Guthery, S.B.* A Motif of Mathematics Createspace: History and Application of the Mediant and the Farey Sequence. – Boston: Docent Press, 2010.
2. *Cobeli, C., Zaharescu, A.* The Haros-Farey sequence at two hundred years (A Survey)//Acta Universitatis Apulensis Journal, № 5, 2003, pp. 1-38. http://www.emis.de/journals/AUA/acta5.html
3. *Bogomolny, A.* Farey Series, A story. http://www.cut-the-knot.org/blue/FareyHistory.shtml

[1] *Lucas*, Fransois Edouard Anatole (1842-1891).

4. *Hardy, G.H., Ramanujan, S.* Asymptotic Formulae in Combinatory Analysis // Proc. London Math. Soc. (1918) s2-17(1), p. 75-115. *Ramanujan, S. etc.* Collected papers of Srinivasa Ramanujan, AMS Chelsea Publishing Series, 1927, pp. 189-200L. http://books.google.ru/books?id=EfnFJHlGo1oC&dq=Collected+Papers+of+Srinivasa+Ramanujan&source=gbs_navlinks_s.
5. *Dickson, L.E.* History of the Theory of Numbers, V. 1. Carnegie Institution of Washington, Washington, 1919, 516 p. http://lib.mexmat.ru/books/5143
6. *Haros, Ch.* Tables pour évaluer une fraction ordinaire avec autant de decimals qu'on voudra; et pour trouver la fraction ordinaire la plus simple, et qui approche sensiblement d'une fraction décimale // Journal de l'École Polytechnique, T. 4, № 11, 1802, pp. 364-368. http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k4336689/f374.image.langFR
7. *Farey, J.* On a curious property of vulgar fractions // The Philosophical Mag. and J., London, Vol. 47, № 3, 1816, pp. 385-386. http://www.archive.org/details/lepidopterarepor47winc
8. *Farey, J.* Propri'et'e curieuse des fractions ordinaires // Bull. Sc. Soc. Philomatique de Paris, **3** (1816), № 3, p. 112.
9. *Cauchy, A.L.* Démonstration d'un Théorème Curieux sur Les Nombres // Bulletin des Sciences, par la Société Philomatique de Paris, Vol. 3, № 3 (1816), pp. 133-135. *Cauchy, A.L.* Oeuvres Completes, series 2, volume 6, 1887, pp. 146-148. http://www.archive.org/details/oeuvresdaugusti206caucrich
10. *Хинчин, А.Я.* Цепные дроби [Текст] / А.Я. Хинчин. – ГИФМЛ, 1960. http://math.ru/lib/120
11. *Виноградов, И.М.* Основы теории чисел [Текст] / И.М. Виноградов. – 6-е изд., перераб. и доп. – М.-Л.: Гостехиздат, 1952. – 180 с. http://ilib.mirror1.mccme.ru/djvu/vinogradov.htm
12. *Ford, L.R.* Fractions // American Mathematical Monthly, 45 (9), 1938, p. 586-601. http://www.cimat.mx/~gil/docencia/2008/elementales/circulos_ford.pdf
13. *Hardy, G.H.* A Mathematician's Apology Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1940, p. 81-82. http://www.math.ualberta.ca/mss/ *Харди, Г.Г.* Апология математика [Текст] / Г.Г. Харди: перевод с англ. Ю.А. Данилова. – Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2000, 104 с. http://www.ega-math.narod.ru/Math/Hardy.htm
14. *Чандрасекхаран, К.* Введение в аналитическую теорию чисел [Текст] / К. Чандрасекхаран. – М.: Мир, 1974. http://www.ega-math.narod.ru/Books/Chandra.htm
15. *Стечкин, С.Б.* Ряды Фарея [Текст] / С.Б. Стечкин // Матем. заметки, 61:1 (1997). – С. 91–113. http://mi.mathnet.ru/mz1484
16. *Hardy, G.H., Wright, E.M.* An Introduction to the Theory of Numbers, 5th ed. Oxford, England: Clarendon Press, 1979. (First edition 1938). http://lib.mexmat.ru/books/460
17. История математики с древнейших времен до начала XIX столетия [Текст]. В 3 т. Т. 1 / под ред. А.П. Юшкевича). – М.: Наука, 1970. http://www.math.ru/lib/book/djvu/istoria/istmat1.djvu
18. *Stern, M.A.* Ueber eine zahlentheoretische Funktion // J. Reine Angew. Math. 55 (1858) 193-220. http://www.digizeitschriften.de/dms/img/?PPN=GDZPPN002150301
19. *Brocot, A.* Calcul des rouages parapproximation, nouvelle methode // Revue chronometrique. 3:186-194 (1861).
20. *Graham, R., Knuth, D., Patashnik, O.* Concrete Mathematics, 2nd edition, Addison-Wesley, 1994. *Грэхем, Р.* Конкретная математика. Основание информатики [Текст] / Р. Грэхем, Д. Кнут, О. Паташник. – М.: Мир, 1998. http://wmate.ru/ebooks/book487.html
21. *Georg, Pick* Geometrisches zur Zahlenlehre // Sitzungber. Lotos, Naturwissen Zeitschrift Prague, Vol. 19 (1899), pp. 311-319.
22. *Peaucelle, J.L.* Personnes ayant participé aux travaux du bureau du Cadastre de octobre 1791 Ma mars 1802 – avril 2011. http://locomat.loria.fr/cadastre/docs/peaucelle2011collaborateurs.pdf
23. *Guthery, S.B.* Haros and the Farey Series. http://docentpress.com/documents/TalkAtAMS1070Metting.pdf
24. *Mertens, F.* Ueber einige Asymptotische Gesetze der Zahlentheorie // J. fur die reine und angewandte Math 77 (1874): 289-338.
25. *Одинец, В.П.* К 200-летию со дня рождения создателей вычислительных машин, представленных к Демидовской премии, Х.З. Слонимского и Г. Куммера [Текст] / В.П. Одинец // Вестник Сыктывкарского университета. – Сыктывкар, 2011. – Сер. 1. – Вып. 11. – С. 38-43. http://www.syktsu.ru/_fac/math/vestnik/site/info/1.htm
26. *Glaisher, J.W.L.* On a Property of Vulgar Fractions // Lond. Ed. Dub. Phil. Mag., Ser. 5, Vol. 7, 1879, pp. 321-336. http://zs.thulb.uni-jena.de/servlets/MCRFileNodeServlet/jportal_derivate_00127629/PMS_1979_Bd7.pdf
27. *Lucas, E.* Théorie des Nombres, Gauthiers-Villars, Paris, 1891, Vol. 1, pp. 467-475, 508-510. http://visualiseur.bnf.fr/Visualiseur?Destination=Gallica&O=NUMM-29021
28. *Барабанов, О.О.* История теоремы Декарта о кругах [Текст] / О.О. Барабанов, Л.П. Барабанова // История науки и техники. – 2011. – № 5. – С. 26-39.
29. *Franel, J.* Les suites de Farey et les probl_emes des nombres premiers // Nachr. Ges. Wiss. G¨ottingen, Math.-Phys. Kl. 1924, P. 198-201.
30. *Landau, E.* Bemerkungen zu der vorstehenden Abhandlung von Herrn Franel, premiers // Nachr. Ges. Wiss. G¨ottingen, Math.-Phys. Kl. 1924, P. 202-206.

Вариационные задачи в XVII-XVIII веках

А.В. Петрова

Вариационное исчисление – раздел математики, изучающий вариации функционалов, где вариация суть аналог дифференциала.

Функционал представляет собой функции, которые каждой функции ставят в соответствие некоторое число. Простейшим примером функционала является длина кратчайшей линии, соединяющей две точки плоскости.

Основная задача вариационного исчисления – нахождение функции, в которой функционал достигает экстремального значения.

Вариационные задачи известны со времен античности. В Древней Греции были впервые поставлены изопериметрические задачи. Древнегреческие математики установили, что наибольшей площадью из всех изопериметрических фигур обладает круг, а из всех изоповерхностных тел – шар. Также были высказаны первые вариационные принципы в физике. Например, Герон Александрийский доказал, что угол падения луча света равен углу отражения, исходя из того, что луч должен проходить наикратчайшее расстояние.

Общая задача заключается в том, чтобы среди всех кривых y(x), определенных на интервале [a;b], выбрать такую, на которой достигает экстремума интеграл

$$I = \int\limits_a^b f(x, y, y')dx.$$

В течение всей истории вариационного исчисления основные методы создавались для этой конкретной задачи, а потом распространялись на более широкие классы.

В конце XVII века были достаточно изучены задачи дифференциального исчисления на нахождение экстремумов для того, чтобы исследовать вариационные задачи и разрабатывать их решения.

Вариационное исчисление превращается в самостоятельную математическую дисциплину. Это было связано, в первую очередь, с необходимостью решения экстремальных задач в области физики и механики.

Первую задачу вариационного исчисления поставил Ньютон в 1686 г. в произведении *"Philosophiae naturalis principia matematica"*. Задача была поставлена следующим образом. Найти тело вращения, испытывающее наименьшее сопротивление по направлению к своей оси при движении в жидкости. Сопротивление жидкости пропорционально квадрату скорости.

Ньютон нашел решение этой задачи в виде пропорции, которая в современных обозначениях представляет собой дифференциальное уравнение первого порядка:

$$\frac{yy'''}{(1+y'')^2} = \frac{a}{4}.$$

В 1696 г. Иоганн Бернулли поставил задачу о брахистохроне (от греч. $\beta\rho\chi\iota\sigma\tau o\varsigma$ – кратчайший и $\chi\rho\nu o\varsigma$ – время), кривой наискорейшего спуска.

Пусть в вертикальной плоскости имеются две точки A и B, которые могут быть соединены различными плоскими кривыми, в том числе и прямой линией.

Геометрический смысл задачи: найти такую кривую, если она существует, по которой материальная точка достигнет точки B за кратчайшее время.

Математически задача сводится к нахождению функции y(x), реализующей минимум функционала:

$$\int\limits_a^b \sqrt{\frac{1+(y')^2}{2y}dx},$$

где a, b – абсциссы точек A и B.

Решением задачи о брахистохроне является дуга циклоиды с горизонтальным основанием, точка возврата которой находится в точке A, то есть дуга, имеющая вертикальную касательную в точке A.

Задача была опубликована Иоганном Бернулли в 1696 г. в научном журнале *"Acta Eruditorum"*.

Но еще до этого Бернулли сообщил эту задачу Лейбницу, который сразу же решил ее и предложил опубликовать для конкурса, определив для решения годичный срок.

Представлено было три решения. Одно решение принадлежало Якобу Бернулли, второе – Лопиталю, третье опубликовано без подписи в январском выпуске *"Philosophical Transactions"*.

Иоганн Бернулли догадался, что неизвестным автором был никто иной, как Ньютон.

В 1697 г. Иоганн Бернулли поставил еще одну задачу: соединить кратчайшей линией две заданные точки на произвольной поверхности.

Иоганн Бернулли предложил задачу своему ученику – Леонарду Эйлеру, которому тогда был всего 21 год.

В 1728 г. Эйлер сформулировал общее решение для этой задачи с помощью дифференциального уравнения линии на поверхности и опубликовал ее в статье *“De linea brevissima in superficie quaelibet puncta iungenta”*.

Эйлер пытался найти общий метод для решения всех вариационных задач и в 1732 г. опубликовал *“Problematis isoperimetrici in latissimo sensu accepti solution generalis”*, где рассмотрел изопериметрическую задачу в самом общем виде.

Он совершенствовал эту теорию в течение двенадцати лет, и в 1744 году опубликовал трактат *“Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes sive solution problematis isoperimrtrici latissimo sensu accepti”*.

В нем Эйлер изложил общий метод максимумов и минимумов по отношению к кривым линиям и применил его ко всем поставленным до него задачам вариационного исчисления. Метод заключается в том, чтобы свести вариационную задачу к задаче на экстремум функции нескольких переменных.

Трактат состоит из шести глав и двух приложений.

В первой главе Эйлер подробно рассматривает метод нахождения кривых линий, для которых какая-либо наперед заданная величина достигает своего наибольшего или наименьшего значения, и формулирует задачи нахождения абсолютных и относительных экстремумов.

Во второй главе рассмотрено решение задачи о нахождении приращений или уменьшений некоторых величин, относящихся к кривой линии, одна из ординат которой увеличивается на бесконечно малую частицу. Здесь он приводит таблицу величин, испытывающих изменение, и их приращений.

Далее Эйлер пытается найти условие для экстремального значения интеграла W.

Сам интеграл он заменяет суммой прямоугольников и находит дифференциальное значение полученной суммы. Положив это значение равным нулю, Эйлер получил уравнение искомой кривой.

В том случае, когда функция Z зависит от x, y, y', получим классическое уравнение Эйлера:

$$f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} = 0.$$

В третьей главе рассматривается задача, в которой требуется найти приращения, получаемые в любой точке абсциссы неопределенной интегральной величиной, при увеличении одной из ординат на бесконечно малую частицу.

В этой главе Эйлер находит дифференциальные значения W, а потом составляет уравнения, определяющие искомую кривую.

Четвертая глава – о нахождении уравнения между двумя переменными x и y, чтобы при заданном значении x интеграл W получил наибольшее или наименьшее значение.

В пятой главе Эйлер формулирует общее свойство, интегральную формулу, или неопределенное выражение, имеющее одинаковое значение для всех кривых, среди которых нужно найти искомую.

Здесь он рассматривает относительные экстремумы функционалов с помощью метода, сводящего задачу на относительный экстремум к задаче на абсолютный экстремум.

Шестая глава – метод определения кривой, обладающей свойством максимума и минимума, среди всех кривых, имеющих несколько общих свойств.

Также в трактате даны два приложения, содержащие примеры применения вариационных задач в изучении упругих линий и движения тел в жидкости без диссипативных сил.

Эта формула в точности выражает принцип наименьшего действия, примененный Эйлером к тем задачам механики, которые он рассмотрел и решил теми способами, которые изложены в его произведении *“Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes sive solution problematis isoperimrtrici latissimo sensu accepti”*.

В XVIII веке в механике часто возникали задачи на экстремумы кратных и криволинейных интегралов. И метод Эйлера для решения таких задач оказался весьма трудным и громоздким. Эйлер понимал, что необходимо искать новые методы решения вариационных задач. И стремился найти их, проводя аналогию вариационного исчисления с дифференциальным.

Эйлер пытается применить к более общим задачам принцип, на котором строится теория экстремума функций конечного числа переменных, а именно – равенство нулю производной в точке экстремума. В “Методе нахождения” Эйлер пытается найти метод, который позволил бы свести вариационную задачу к дифференциальной. В своих исследованиях Эйлер осознал необходимость доказать соотношение: Pdp+pdP=0.

Соотношение доказал Лагранж. О чем и написал в письме к Эйлеру. Эйлеру очень понравился новый метод – он нашел в нем то, что давно искал. И он призывал Лагранжа к дальнейшему развитию метода.

Эйлер начал работать над усовершенствованием метода и в 1756 г. сообщил Берлинской Академии о двух новых работах. Публиковать их он не торопился, чтобы не умалить заслуги Лагранжа.

В 1762 г. Лагранж опубликовал свою первую работу по вариационному исчислению, “Опыт нового метода для определения максимумов и минимумов неопределенных интегральных формул”.

В своем трактате Лагранж кратко излагает основы метода вариаций. Для решения задачи об экстремуме функционала он использует аналогичный метод из дифференциального исчисления – найти производную рассматриваемого интеграла и положить ее равной нулю. Лагранж использует новый знак дифференцирования δ (варьирование) и понятие дифференциала заменяет понятием вариации.

Рассмотрим задачу о нахождении экстремума интеграла:

$$I = \int\limits_a^b f(x,y,y')dx.$$

Для его вариации получим:

$$\int\limits_a^b \delta f(x,y,y')dx = 0,$$

$$\delta \int\limits_a^b f(x,y,y')dx = 0.$$

По аналогии с дифференциалом:

$$\begin{cases} df = f_y dy + f_{y'} dy', \\ \delta f = f_y \delta y + f_{y'} dy'. \end{cases}$$

Отсюда:

$$\int (f_y \delta y + f_{y'} \delta y')dx = 0,$$

$$\int\limits_a^b (f_y - \frac{d}{dx} f_{y'}) \delta y dx + f_{y'} \delta y = 0, \qquad (*)$$

$$\int\limits_a^b f'_y \delta y' dx = f_{y'} \delta y - \int\limits_a^b \delta y \frac{d}{dx} f_{y'} dx.$$

Подынтегральное выражение дает уравнение Эйлера:

$$f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} = 0.$$

Лагранж вывел известное уравнение Эйлера для вариационной задачи, показал, что таким методом можно найти дифференциальное уравнение для более сложного интеграла

$$\int f(x,y,z,y',z',y^{''},z^{''},...)dx,$$

и получил систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} f_{y''} - ... = 0, \\ f_z - \frac{d}{dx} f_{z'} + \frac{d^2}{dx^2} f_{z''} - ... = 0. \end{cases}$$

Лагранж впервые решил уравнение с подвижными концами, заметив, что внеинтегральная часть в уравнении (*) дает соотношения для концов линии.

Метод Лагранжа позволяет применять дифференциальные методы в задачах вариационного исчисления, тем самым упрощая решения многих вариационных задач.

Исследования Лагранжа в вариационном исчислении сыграли большую роль в развитии аналитической механики. Одним из важнейших достижений Лагранжа в области аналитической механики является обобщение принципа наименьшего действия на систему сил. Он сделал возможным применять этот принцип к динамике системы.

Лагранж вывел вариационное исчисление на новый этап развития. Эйлер разъяснил его и ввел в широкую практику.

Безусловно, многие вопросы вариационного исчисления все еще оставались открытыми и были решены только в XIX веке. Несмотря на это, XVIII век считается веком замечательных открытий в области вариационного исчисления.

Библиографический список

1. *Юшкевич, А.П.* История математики [Текст]. В 3 т. Т. 3 / А.П. Юшкевич. – М.: Наука, 1972. – 494 с.
2. *Эйлер, Л.* Методы нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума и минимума или решение изопериметрической задачи, принимаемой в самом широком смысле [Текст] / Л. Эйлер. – М: Государственное технико-теоретическое издание, 1934. – 600 с.
3. *Гельфанд, И.М.*, Вариационное исчисление [Текст] / И.М. Гельфанд, С.В. Фомин. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1961. – 228 с.

От логики Пор-Рояля к дескриптивной теории множеств

Г.И. Синкевич

Во Франции в 6 лье от Парижа с XII века существовал женский монастырь Пор-Рояль. Близость столицы сказывалась в составе обитательниц монастыря – среди воспитанниц и монахинь были члены аристократических семей, а некоторая свобода нравов позволяла родственникам и знакомым навещать обитательниц и жить подолгу в доме для гостей. В XV веке здесь скрывался от правосудия Франсуа Вийон. При монастыре была школа, в которой преподавали известные ученые. Эту школу закончил Жан Расин, написавший историю Пор-Рояля (*Abrégé de l'histoire de PortRoyal*). К XVII веку при монастыре образовался кружок отшельников – постоянно проживающих дворян, военных, ученых-богословов, философов, филологов, математиков. Как приверженцы янсенизма, они состояли в оппозиции к иезуитам, имевшим большое влияние во Франции. Среди отшельников были Блез Паскаль, Антуан Арно, Пьер Николь, Клод Лансло. Бывал в Пор-Рояле и Рене Декарт. В школе при монастыре обучали по собственным учебникам, написанным членами кружка и отпечатанными в собственной типографии. В 1660 вышла "Грамматика Пор-Рояля" Арно и Лансло, в 1662 "Логика Пор-Рояля" Арно и Николя.

Это было время, когда научная и учебная литература начала издаваться на французском языке, в школе Пор-Рояля занятия велись по-французски, и сам французский язык преподавался по новой, фонетической методике. Латынь, как единственно возможный язык науки, постепенно уступает свои позиции. Филологи Пор-Рояля – Клод Лансло и Антуан Арно в своей "Грамматике" обсуждают вопрос об общей логической основе всех языков, соответствующих структуре мысли, о степени точности передачи смысла при переводе с одного языка на другой. Авторы стремились выявить фундаментальные структуры человеческого сознания. В "Логике" эта проблема рассматривается применительно к понятиям в науке вообще и математике в частности. В текст включены критически переработанные рассуждения Декарта и Паскаля. В отличие от Декарта, Паскаль был в большей степени реалистом, он провозглашал автономность науки по отношению к философии. Искусство думать предполагало освобождение от вербальных форм, стремление к изначальному смыслу. Впервые различались объем понятия и структура понятия, определение идеи (definition nominis) и определение реальной вещи (definition rei). Этот метод должен был стать не только методом обоснования, но и методом открытия. Математиков упрекали в недостаточной строгости, в использовании принципа предвосхищения основания (petitio principii) В разделе "Пятый недостаток – не думать о естественном порядке" Арно и Николь пишут: Это самый большой недостаток геометров. Они решили, что им не надо соблюдать никакого другого порядка, кроме того, чтобы первые положения служили для доказательства предыдущих. И таким образом, не заботясь о правилах истинного метода, состоящего в том, чтобы всегда начинать с самого простого и самого общего, и затем переходить к более сложному и более частному, они вперемешку говорят о линиях и площадях, треугольниках и квадратах, доказывают через посредство фигур свойства простых линий и допускают множество других нарушений (естественного порядка), искажающих эту прекрасную науку. В "Началах" Евклида этот недостаток встречается повсюду" [1, с. 337-338].

Утверждался принцип сохранности объема и структуры понятия в процессе рассуждения. Например, если в рассуждении используется понятие "четное число", что означает число, которое делится на 2, то в любой момент рассуждения мы тождественно можем вместо слов "четное число" подставить слова "число, которое делится на 2".

Вновь к этим вопросам математики обратились в XIX веке, когда в математике возникла проблема строгости. Французские математики сохранили традицию логики Пор-Рояля. Дискуссия о строгости и определенности в математике хорошо изложена в книге М. Клайна [2].

Георг Кантор в своей теории множеств создал новый тип определения. Математика на основе теории множеств приобрела характер фундаментальной науки, понятия которой не зависели от геометрического или физического смысла. Кантор пишет: "Процесс правильного образования понятий, по-моему, повсюду один и тот же: берут некоторую лишенную свойств вещь, которая первоначально есть ни что иное как имя или знак А, и придают ей закономерным образом различные, даже бесконечно многие понятные предикаты, значение которых известно уже из наличных идей и которые не должны противоречить друг другу. Благодаря этому определяются отношения А к уже имеющимся понятиям и особенно к родственным. Как только это закончено, так имеются налицо все условия для пробуждения дремлющего в нас понятия А, и оно появляется на свет, снабженное такой интрасубъективной реальностью, какой вообще можно требовать от понятий. Констатировать его транзиентное значение является тогда делом метафизики" [3, с. 103-104].

Кантор относит прикладные математические дисциплины к метафизике, отводя собственно математике роль фундаментальной науки, которую она обрела благодаря теории множеств. В зарождении понятия числа первичным для него было не порядковое число, а установление взаимно-однозначного соответствия между множествами, например, количество пальцев на одной и на другой руке.

Понятие действительного числа было сформулировано в XIX веке несколькими математиками. Кантор анализирует определения, данные Вейерштрассом, Дедекиндом и им самим: "Определению какого-либо иррационального действительного числа всегда соответствует строго определенное множество 1-й мощности рациональных чисел. В этом заключается общая черта всех форм определений. Различие же состоит в моменте порождения, при помощи которого множество соединяется с определяемым им числом, и в тех условиях, которым должно удовлетворять множество, чтобы оно оказалось подходящей основой для соответствующего определения числа. При первой форме [Вейерштрасса] момент порождения, связывающий множество с определяемым им числом, заключается в образовании сумм. Дедекинд использует совокупность всех рациональных чисел. Но она сопровождается тем крупным недостатком, что числа в анализе **никогда** не представляются в форме "сечений", в которую их приходится лишь вписывать весьма искусственным и сложным образом" [3, с. 81].

Кантор, вводя определения новых понятий, впервые использует иной способ их образования: "В излагаемой здесь теории **числовая величина** первоначально появляется вообще как нечто **беспредметное**, лишь как составная часть теорем, придающих ей реальность, например, теоремы, что соответствующая последовательность имеет пределом эту числовую величину... Понятие числа, как оно развито здесь, несет в себе зародыш необходимого и абсолютного обобщения" [3, с. 12]. В процессе рассуждения это понятие обрастает признаками, наполняется содержанием, сохраняя за собой возможность дальнейшего развития. Введя определение, например, перечислимых множеств, Кантор после ряда рассуждений, вновь вводит более точное определение [3, с. 68]. В отличие от логики Пор-Рояля, объем и структура понятия в начале и в конце рассуждения различны. Этот принцип, пришедший из гуманитарных наук, появился в математике впервые в работах Кантора. Впоследствии он лег в основу дескриптивной теории множеств.

Первый период развития теории множеств получил название "наивной" теории. Понятия стали формироваться вербально, из известных выражений формировались новые за счет операций со словами (терминами) по правилам грамматики. В то же время логическая структура языка не совпадает с его смысловой структурой, что породило парадоксы теории. Рассел анализировал этот процесс в своей теории дескрипций, различая два типа отношений знаков к обозначаемому объекту – имена и описания.

Основной принцип дескриптивной теории множеств сформулировал Н.Н. Лузин в своей диссертации: "Дано структурное свойство функции. Найти ее аналитическое выражение".

Лузин в 1934 году в статье "Дифференциальное исчисление", написанной для БСЭ, различает математический анализ большого и малого стилей, имеющих различное назначение – строгое учебное и креативное исследовательское. В исследовательской работе допускается использование принципа предвосхищения основания, в курсах "малого" стиля, напротив, вводятся "излишние" понятия, неразрешимость с помощью вводимых понятий важных проблем, однако, прекрасно ставящихся на языке этого малого анализа [4, с. 292-391].

В качестве примера можно привести хорошо известный курс математического анализа Г.М. Фихтенгольца. Он создавался в то время, когда была потребность простого и ясного изложения для пролетарского состава студентов. Этот курс прекрасно отвечает поставленной задаче. Недавно студенты СПбГАСУ под руководством профессора Н.М. Ивочкиной обнаружили, что введенное в этом курсе понятие статического момента плоской фигуры не востребовано в физике (там используется только момент инерции), а играет роль фиктивного конструкта, удобного для вычисления центра тяжести.

Математика в последней трети XIX и в первой трети XX века приобрела новую форму – обрела роль фундаментально самодостаточной теории. Значительную роль в этом процессе сыграла теория множеств, теория меры. Вспомним, что степень общности многих теорем варьировалась с точностью до множеств пренебрежимо малых, нулевой меры. Это давало понятиям возможность развиваться, получать в процессе исследования новые, более точные определения (например, аналитические и проективные множества). Процесс этот был в значительной степени связан с увеличением роли языка как порождающей структуры, использующей грамматическое средства и философское осмысление. Благодаря этому процессу выдвинулась на ведущие позиции московская школа теории множеств во главе с академиком Н.Н. Лузиным.

Библиографический список

1. *Арно, А.* Логика или искусство мыслить [Текст] / А. Арно, П. Николь. – М.: Наука, 1991. – 417 с.,
2. *Клайн, М.* Математика. Утрата определенности [Текст] / М. Клайн. – М.: 1984. – 446 с.
3. *Кантор, Г.* Труды по теории множеств [Текст] / Г. Кантор. – М., 1985.
4. *Лузин, Н.Н.* Собрание сочинений [Текст] / Н.Н. Лузин. – М., 1953-1959. – Т. 3.

Академик А.А. Андронов и его школа (к 110-летию со дня рождения А.А. Андронова)

Е.В. Губина

"*Я не знал и не знаю ни одного человека, который бы отличался от моего идеала хорошего человека меньше, чем А.А. Андронов*"
Г.С. Горелик

Александр Александрович Андронов родился 11 апреля 1901 года в Москве. Его мать, Лидия Александровна Липская, была домашней хозяйкой. Отца своего А.А. Андронов практически не знал, воспитывал его отчим – Корнелий Адамович Липский, врач одного из Московских роддомов.

В детстве А.А. Андронов решил, что будет врачом. Ему виделась новая медицина – не одно лишь "искусство врачевания", а еще и наука, использующая достижения математики и физики. Поэтому еще в школьные годы он занялся изучением высшей математики. Среднюю школу Андронов закончил в 1918 году, с 1918 по 1920 годы он работал браковщиком на заводе "Пулемет", монтером на электростанции, затем вступил добровольцем в Красную Армию, служил в военно-продовольственном отряде на Урале, был лектором политотдела Троицкого укрепленного района. Осенью 1920 года Андронов перенес тяжелую форму плеврита, был признан непригодным к военной службе и поступил на электромеханический факультет Московского Высшего Технического училища (МВТУ). С 1921 года одновременно с занятиями в МВТУ он стал посещать лекции на физмате МГУ, куда в 1923 году перевелся из МВТУ и который он окончил в 1925 году по специальности "теоретическая физика".

Годы учебы А.А. Андронова в МГУ совпали с началом расцвета московской математической школы. Курс математики был единым для математиков и для физиков, поэтому Андронов, настойчиво занимавшийся математикой, приобрел математическую культуру значительно более высокую, чем получали обычно физики-теоретики. Андронов проявил большой интерес и к теоретической механике (возможно, под влиянием С.А. Чаплыгина, который произвел на него сильное впечатление).

Решающую роль в формировании А.А. Андронова как ученого сыграла аспирантура под руководством Л.И. Мандельштама в НИИ физики при МГУ (1925-1929 гг.). Итогом учебы в аспирантуре стала диссертация "Предельные циклы Пуанкаре и теория автоколебаний", посвященная основополагающим вопросам теории нелинейных колебаний и ставшая решающим звеном в самом создании этой теории. Краткое изложение диссертации было опубликовано в [1], а затем в докладах Французской академии наук [2]. Сам А.А. Андронов писал, что эта диссертация определила область его дальнейшей научной деятельности – теорию колебаний и смежные вопросы математики и теоретической физики. Андронов ввел в теорию колебаний настоящую математику, основанную на теории обыкновенных дифференциальных уравнений, дал автоколебаниям их название и четкое математическое определение, указал путь строгого анализа автоколебательных режимов, определив надолго вперед подход к исследованию автоколебательных систем.

Г.С. Горелик писал об этом времени[1] "*Кто знал 25-летнего Шурку Андронова с его могучим телосложением, буйной энергией, голосом, гремевшим на все этажи физического института Московского университета, мог бы подумать, что именно он больше, чем кто-либо, предназначен для дел, не чуждых внешней эффектности, производящих сильное впечатление на людей, далеких от науки. На деле оказалось совсем иначе. Подвиги А.А. Андронова иного рода. Они совершались в тишине. Для того, чтобы их понять, нужно смотреть в глубь вещей*". Близкое окружение Андронова замечательно описано Н.М. Леонтович-Левиной: "*В эти годы в центре Москвы, на Сивцевом Вражке организовалась коммуна, вокруг которой собирались удивительные люди. Несомненно, это сообщество уникально для советского времени, да, пожалуй, вообще уникально. В эту компанию входили Николай Николаевич Парийский (астроном, впоследствии член-корреспондент АН*[2]*), Александр Александрович Андронов (физик, впоследствии академик), Петр Сергеевич Новиков (математик, впоследствии академик) Михаил Александрович Леонтович (физик, впоследствии академик), Александр Адольфович Витт (физик, впоследствии доктор физ.-мат. наук). Это основные мужчины, определяющие содержание жизни и дух своего сообщества. Все они учились в университете на физико-математическом факультете. Женщины были объединены учебой в Лосиноостровской гимназии. Это Лидия Викторовна Птицына, сестры Свешниковы (Татьяна и Наталья), Людмила Всеволодовна Келдыш. Входила в эту компанию и Евгения Александровна Леонтович, сестра М.А. Леонтовича. Несколько на особицу стоял Игорь Евгеньевич Тамм. Он был старше и к нему обращались на Вы и по имени-отчеству.*

Люди эти были очень яркими индивидуальностями и, конечно, очень отличались друг от друга. Однако было много, что их объединяло, они составляли содружество, имевшее общее лицо. Основой их жизни, стержнем, была наука. И наукой они занимались ради науки. Свое удовольствие они получали от открытия научного факта. Они не делали карьеры. Даже представить себе невозможно, чтобы кто-нибудь из них организовывал получение какого-либо звания. Но они не были сухарями и интересовались совсем не одной наукой. Очень большое значение в их жизни играла природа. Все они знали и любили литературу, интерес к искусству был у всех. Они были атеистами, при этом их нравственная планка была очень высока. В двадцатые годы они были "красными". Эти очень умные люди (причем думающие над социальными, общественными вопросами) не поняли преступность Октябрьской революции. Видимо самым революционным из них был А.А. Андронов. Они были обмануты фразеологией о социальной справедливости, равенстве. От чего зависело прозрение? Кроме, конечно, фактов, которые все знали. От того, насколько эти умнейшие люди разрешали себе в этих вопросах думать так же до конца, как они умели делать это в своей науке. При всей революционной настроенности этих людей в начале двадцатых годов ни один из них не был членом партии. Почему? Для них была невозможной потеря степеней свободы, взятие на себя обязательств что-то делать и говорить не согласно своим убеждениям, но согласно с чьими-то указаниями.

Образовалось несколько супружеских пар. Н.Н. Парийский и Л.В. Птицына, А.А. Андронов и Е.А. Леонтович, М.А. Леонтович и Т.П. Свешникова, П.С. Новиков и Л.В. Келдыш. Пары оказались очень крепкими – на всю жизнь, и в семьях было много детей. Удивительным был их пуританский образ жизни. Они воспри-

[1]Здесь и ниже все цитаты, не снабженные ссылками, даются по тексту книги [3].

[2]Это и следующие пояснения, взятые в скобки, в оригинальном тексте Н.М. Леонтович-Левиной даны ниже, за пределами данной цитаты.

няли эту пуританскую психологию очень глубоко и исповедовали ее всю жизнь. Они жили очень аскетично. Очень простая одежда, очень простая мебель. Неправильно сказать, что все они были очень счастливые люди, но они все были люди состоявшиеся. И причиной этого были не только заложенные в них способности в сочетании с научным любопытством, но и их нравственные позиции, которые не дали им распространить на мелочи то, из чего получилось нечто по-настоящему стоящее".

После окончания аспирантуры А.А. Андронов сначала работает во Всесоюзном электротехническом институте, а затем в НИИ физики при МГУ. В 1931 году А.А. Андронов и его жена Е.А. Леонтович переехали в Нижний Новгород (Горький). Причин для переезда молодых ученых было много, в том числе – забота о развитии отечественной науки и стремление создать научный центр в провинции. В Нижнем Новгороде Андронов начинает работать в Физико-техническом институте (ГИФТИ) и во вновь открывшемся 1 ноября 1931 года Нижегородском университете. В ГИФТИ он возглавлял отдел теории колебаний и теории автоматического регулирования (1931-1949). В университете по инициативе А.А. Андронова была создана кафедра теории колебаний (1933 г., одна из первых в мире), которой он заведовал до 1945 года.

Первые годы Александр Александрович совмещал работу в Горьком с работой в НИИ физики при МГУ, затем сосредоточил всю работу в Горьком. Вокруг Андронова сплотилась группа молодых ученых и преподавателей: Г.С. Горелик, С.М. Рытов, А.Г. Майер, Н.Н. Баутин, И.Л. Берштейн. В творческой атмосфере развивались настоящая наука и научная школа в том высоком смысле, который вкладывал в это понятие сам А.А. Андронов.

Свои исследования в 1931-1941 годы сам Андронов делил на три направления:

1. Развитие качественной теории дифференциальных уравнений и ее приложений к проблемам теории нелинейных колебаний.
2. Применение теории нелинейных колебаний к задачам радиотехники и механики.
3. Исследования в некоторых разделах теоретической физики, связанных с вопросами физики колебаний.

Главное место в работах А.А. Андронова этого периода занимало первое направление. Особого упоминания заслуживают работы по теории бифуркаций автоколебательных систем и прежде всего – идея о грубых системах, разработанная Андроновым совместно с Л.С. Понтрягиным [4]. Понятие грубости можно трактовать как устойчивость структуры разбиения фазового пространства системы на траектории по отношению к малым изменениям ее параметров.

В 1933 году Александр Александрович получил приглашение сделать доклад на Первой международной нелинейной конференции в Париже, а в 1934 году Ван-дер-Поль представил на конференции в Лондоне обширный доклад о советских работах по нелинейным колебаниям, написанный А.А. Андроновым совместно с другими авторами.

В 1934 А.А. Андронову было присуждено звание профессора, а год спустя – степень доктора физико-математических наук. Результаты работ А.А. Андронова и его сотрудников вошли в изданную в 1936 году коллективную монографию [5].

Академик Н.Д. Папалекси писал: "*Крупная заслуга А.А. Андронова и его многочисленных сотрудников и учеников – открытие значения методов качественного анализа дифференциальных уравнений для теории нелинейных колебаний и превращение их в мощное орудие исследования. С 1927-28 года ведущая роль исследований нелинейных колебательных систем и развитие их теории постепенно перешла к нам, и в настоящее время ведущая роль наших ученых в области нелинейных колебаний получила всеобщее признание*".

В 1937 году выходит в свет книга "Теория колебаний", написанная А.А. Андроновым совместно с А.А. Виттом и С.Э. Хайкиным. Однако в этом первом издании книги в числе авторов имени А.А. Витта, "*участвовавшего в написании книги наравне с другими авторами, но не указанного в их числе вследствие печальной ошибки*" (С.Э. Хайкин), не было. Эта "печальная ошибка" состояла в том, что А.А. Витт был репрессирован и умер в лагере на Колыме 26 апреля 1938 года[1]. Н.М. Леонтович-Левина пишет: *"Из всей их компании погиб только один человек – А.А. Витт. Про Витта мы теперь знаем очень мало. Но одно из его высказываний вошло в научный фольклор – "все плохое сократится, все хорошее останется""*.

О книге "Теория колебаний" Н.В. Бутенин, один из учеников А.А. Андронова, пишет: "*Вряд ли можно переоценить значение этой книги в становлении нелинейной теории колебаний как в нашей стране, так и во всем мире. Впервые появилась книга, где с ясной теоретической позиции излагались основы теории нелинейных колебаний как сложившейся науки; эта теория иллюстрировалась многочисленными примерами из различных областей физики и техники. Исследователи получили мощное оружие для решения задач, возникающих при рассмотрении нелинейных динамических систем*".

В 1959 году вышло второе издание "Теории колебаний" (в числе авторов был указан и А.А. Витт) с существенными дополнениями, сделанными Е.А. Леонтович и учеником А.А. Андронова Н.А. Железцовым. Второе издание представляло вершину "колебательных" достижений 50-х годов в области динамики нелинейных автономных систем второго порядка. В 70-е годы сформировалось мнение, что книга А.А. Андронова, А.А. Витта и С.Э. Хайкина – это классика, которую не следует дополнять и перерабатывать, и в 1981 году появилось третье издание знаменитой монографии, тождественное первому.

[1] А.А. Витт был посмертно реабилитирован в 1957 году.

Г.С. Горелик пишет: *“… Особые точки, предельные циклы, сепаратрисы – все это для А.А. как бы части живого организма: математической модели той или иной машины. И недаром он часто говорит: “Предельные циклы родятся, растут, умирают”. Он “просвечивает” математическим рентгеном особую точку и выясняет, что она “беременна” предельным циклом… Некоторые страницы рисунков в книге Андронова и Хайкина прямо напоминают эмбриологический атлас*”.

А.А. Андронов ввел в теорию колебаний математический аппарат, основанный на идеях качественной теории дифференциальных уравнений Пуанкаре, ввел понятия автоколебаний, грубой системы, бифуркационных значениях параметра, “фазового портрета” динамической системы…

В предвоенные годы А.А. Андронов получил фундаментальные результаты в теории автоматического регулирования. Эти исследования получили большое развитие в последние годы Великой Отечественной войны и в послевоенные годы. Система с автоматическим регулированием (например, самолет, снабженный автопилотом) обладает характерной склонностью к автоколебаниям (обычно нежелательным). Александр Александрович усмотрел глубокую аналогию между автоколебаниями в системах автоматического регулирования и колебаниями в радиофизике. В 1944 году совместно с А.Г. Майером он опубликовал свою первую статью по теории регулирования [6] и статью об автопилоте [7], написанную совместно с Н.Н. Баутиным. В 1945-1947 гг. совместно с Г.С. Гореликом, А.Г. Майером и Н.Н. Баутиным он продолжил этот цикл статей. За работы, выполненные во время Великой Отечественной войны, А.А. Андронов награжден орденом Красной Звезды.

В послевоенные годы А.А. Андронов и его сотрудники много работали над созданием книги, объединяющей результаты по качественной теории дифференциальных уравнений. Эта работа была завершена уже после смерти А.А. Андронова: в 1966 и 1967 годах вышли в свет коллективные монографии А.А. Андронова, Е.А. Леонтович, И.И. Гордона и А.Г. Майера [8] и [9].

В 1946 г. Александр Александрович, не являясь членом-корреспондентом Академии наук, единогласно избирается действительным членом АН СССР по отделению технических наук.

Научные успехи А.А. Андронова громадны и удивительны, особенно если учесть, что они достигнуты на фоне очень большой, порой самоотверженной организаторской, административной и педагогической работы.

Александр Александрович начал свою педагогическую деятельность очень рано. Еще до окончания МГУ он начал преподавать во 2-ом МГУ (Московский государственный педагогический институт) в качестве ассистента, а затем – в качестве доцента по кафедре теоретической физики и механики. В Горьком А.А. Андронов становится и до конца жизни остается профессором университета (ГГУ), в котором с осени 1941 по ноябрь 1942 года он выполнял обязанности проректора.

А.А. Андронов придавал очень большое значение качеству преподавания. Он разработал множество учебных планов и программ, поставил курс теории колебаний, читал курсы электродинамики и теории относительности, организовал преподавание теоретической физики. По общему признанию слушателей, его лекции были очень яркими, увлекательными, глубоко продуманными. А.А. Андронов четко следовал выработанным им правилам преподавания: сделать для студентов абсолютно ясными основы науки, после этого студентов можно подводить к вещам, действительно сложным для понимания. Кроме того, воздействовать не только на ум, но и на воображение студентов.

Андронов болезненно переживал отставание большинства периферийных вузов от вузов Москвы и Ленинграда в качестве подготовки специалистов. В 1950 году в статье [10] он указал три основные причины низкого качества работы вузов на периферии: 1) недостаточно высокая квалификация преподавателей; 2) слабая оснащенность лабораторий и библиотек и отсутствие во многих вузах хорошо оборудованных мастерских; 3) поверхностное руководство учебно-педагогическим процессом и формальный подход к оценке качества работы вузов со стороны министерств. А.А. Андронов писал о необходимости реорганизации университетов И.В. Сталину. Вот отрывок из черновика этого письма [11]: “… *В настоящей докладной записке мы хотим поставить вопрос о состоянии и дальнейшем развитии русских университетов, т.е. университетов, находящихся сейчас в ведении Наркомпроса Р.С.Ф.С.Р., т.к. о состоянии и деятельности других университетов мы имеем лишь косвенные* [*сведения*]*, однако мы думаем, что мы* [*неразборчиво*]*. Мы считаем, что состояние русских университетов в настоящее время, в особенности провинциальных, не соответствует ни достоинству великого русского народа, ни тем задачам, которые сейчас стоят перед нашей родиной…* ”.

А.А. Андронов выступал за тесную связь ГГУ с научно-исследовательскими институтами г. Горького и других городов страны. Он приглашал в Горьковский университет крупных ученых из других городов для чтения некоторых курсов и отдельных лекций. Благодаря ему в Горьком работали Г.С. Горелик, С.М. Рытов, С.П. Стрелков, В.Л. Гинзбург, Е.Л. Фейнберг, возглавившие разработку новых научных направлений и воспитавшие большую группу талантливых учеников.

В университете А.А. Андронов создал сеть научных семинаров, которые стали настоящей школой научно-исследовательской работы. Деятельностью семинаров по теории нелинейных колебаний, по качественной теории динамических систем, по теории электрических машин он руководил сам, другими руководили его сотрудники (Г.С. Горелик, Е.А. Леонтович, А.Г. Майер). Особое внимание Андронов уделял университетской библиотеке: “… *Никто так не заботился о библиотеке ГГУ, как Александр Александрович. Благодаря его хлопотам, библиотека ГГУ получала больше, чем другие библиотеки иностранной* (*валютной*) *литературы. Под его руководством комплектовались старые журналы. При его участии решались все важные для библиотеки* *дела...*" (А.И. Лалетина, работник библиотеки ГГУ). А.А. Андронов вложил много труда и энергии в работу со школьниками и абитуриентами. Он написал справочник для поступающих в университет.

В созданной Андроновым творческой атмосфере развивались настоящая наука и научная школа в том высоком смысле, который вкладывал в это понятие сам А.А. Андронов. В разные годы с ним работали А.Г. Майер, Н.П. Власов, Я.Н. Николаев, Н.Н. Баутин, Н.В. Бутенин, Г.В. Аронович, Н.А. Железцов, Ю.И. Неймарк, С.А. Жевакин, А.С. Алексеев, Н.А. Фуфаев, И.Л. Берштейн, С.В. Беллюстин, А.В. Гапонов-Грехов. *"Горьковской научной школе А.А. Андронова судьба определила долгую жизнь. Поднятая ею тема оказалась одной из основных, базовых в точном естествознании и технике, требующей длительной разработки и имеющей широчайшие и разнообразные приложения. Теория колебаний – наука об общих закономерностях эволюционных процессов различной природы: физической, химической, биологической, экономической, социальной. Изучаемая ею математическая модель - динамическая система – стала основной математической моделью точных наук"* (Ю.И. Неймарк, [12]). В 1996 году в Париже состоялась конференция "Андронов и его школа в Горьком".

А.А. Андронов был не только выдающимся физиком и математиком, он внес большой вклад в историю науки. Начиная заниматься новой задачей, он изучал всю имеющуюся литературу, включая историю исследования этой задачи. При этом Александр Александрович проявлял большой интерес к личностям самих исследователей. Первая работа по истории науки была опубликована им совместно с Е.А. Андроновой-Леонтович в 1930 году – это книга [13], посвященная жизни и мировоззрению Лапласа. Сейчас эта книга является библиографической редкостью. А.А. Андронов написал замечательную статью [14] о своем учителе Л.И. Мандельштаме, в которой определена роль Мандельштама в истории развития теории нелинейных колебаний. В статье [15] совершенно по-новому изложена история создания теории автоматического регулирования, в качестве главных создателей которой обоснованно названы Д. Максвелл, И.А. Вышнеградский и А. Стодола.

В 1947 году А.А. Андронов начинает заниматься биографией Н.И. Лобачевского. По инициативе, под руководством и при личном участии ученого созданная им исследовательская группа провела большую работу по изучению нижегородского периода жизни Н.И. Лобачевского. В результате этой работы удалось установить точную дату (20 ноября 1792 г. по старому стилю) и место (Нижний Новгород) рождения Лобачевского. По инициативе А.А. Андронова в 1956 году, уже после его смерти, Нижегородскому университету было присвоено имя Н.И. Лобачевского.

В 1947 году А.А. Андронов был избран депутатом Верховного Совета РСФСР, а в 1950 году – депутатом Верховного Совета СССР. К своим депутатским обязанностям он относился чрезвычайно добросовестно, не оставляя без внимания ни одно письмо, ни одно обращение. Благодаря его усилиям, был электрифицирован большой район Горьковской области, где свыше тридцати лет Советской власти люди жили при свете керосиновых ламп. Он разбирал жалобы и заявления избирателей о предоставлении жилплощади и оказании материальной и медицинской помощи, о помиловании и сокращении срока заключения, о розыске пропавших родственников и т.д. Очень многие люди, которым помог А.А. Андронов, присылали ему письма с благодарностью за тепло и отзывчивость.

А.А. Андронов находил время и для активной просветительской деятельности. Приведем воспоминания из [3] о его лекциях на Горьковском автозаводе: "*Инженерно-техническая общественность завода обратилась к руководству завода с предложением организовать лекцию об атомной энергии и атомной бомбе. В августе 1945 года американцы сбросили бомбы на Хиросиму и Нагасаки. Это событие вызвало во всем мире возмущение американским варварством, но одновременно и огромный интерес к этому виду оружия, обладающего колоссальной разрушительной силой. Лекция профессора Андронова была выслушана с неослабевающим интересом и имела такой успех, который я не могу описать. Сразу установился прочный контакт лектора с его слушателями, все были удивлены его умением ясно и доходчиво раскрыть перед слушателями сложные физические процессы, сопровождая рассказ о сложных явлениях элементами легко воспринимаемого и понятного юмора... А через несколько дней после очередной оперативки главный диспетчер Автозавода по селектору сообщил, что в очередной вторник состоится повторная лекция профессора Андронова. А потом добавил: "Это очень интересная лекция! И читает ее необыкновенный профессор. Советую всем, кто не занят на работе в это время, обязательно посетить эту лекцию!"*"

О жизни и деятельности А.А. Андронова имеется обширная литература. По многочисленным свидетельствам, Александр Александрович обладал исключительными человеческими качествами и был безусловным нравственным образцом и авторитетом для окружающих. В Нижнем Новгороде на здании института, где он работал, установлена памятная доска с его барельефом. Но прочнее всего его имя сохраняет название созданной им всемирно известной андроновской научной школы по теории нелинейных колебаний.

Библиографический список

1. *Андронов, А.А.* Предельные циклы Пуанкаре и теория колебаний [Текст] / А.А. Андронов // VI съезд русских физиков, Москва, Н. Новгород, Казань, Саратов (5-16 августа 1928 года). – М.-Л.: Гос. изд-во, 1928. – С. 23-24.
2. *Andronow, A.* Poincaré limit cycles and the theory of self-sustaining oscillations (Les cycles limites de Poincaré et la théorie des oscillations autoentretenues) / A. Andronow // Comptes rendus de l'Académie des Sciences. – 1929. – Vol. 189. P. 559-561.

3. Александр Александрович Андронов (1901-1952) [Текст] / Сер. “Личность в науке”. – Н.Новгород: Изд-во ННГУ. – 2001. – 287 с.
4. *Андронов, А.А.* Грубые системы [Текст] / А.А. Андронов, Л.С. Понтрягин // ДАН СССР. – 1937. – Т. 14. – № 5. – С. 247-250.
5. *Мандельштам, Л.И.* Новые исследования в области нелинейных колебаний [Текст] / Л.И. Мандельштам, А.А. Витт, Н.Д. Папалекси, А.А. Андронов, Г.С. Горелик, С.Э. Хайкин. – М.: Гос. изд-во по вопросам радио, 1936. – 96 с.
6. *Андронов, А.А.* Задача Мизеса в теории прямого регулирования и теория точечных преобразований поверхностей [Текст] / А.А. Андронов, А.Г. Майер // ДАН СССР. – 1944.– Т. 43. – № 2. – С. 58-62.
7. *Андронов, А.А.* Движение нейтрального самолета, снабженного автопилотом, и теория точечных преобразований поверхностей [Текст] / А.А. Андронов, Н.Н. Баутин // ДАН СССР. – 1944. – Т. 43. – № 5. – С. 197-201.
8. *Андронов, А.А.* Качественная теория динамических систем второго порядка [Текст] / А.А. Андронов, Е.А. Леонтович, И.И. Гордон, А.Г. Майер. – М.: Наука. – 1966. – 567 с.
9. *Андронов, А.А.* Теория бифуркаций динамических систем на плоскости [Текст] / А.А. Андронов, Е.А. Леонтович, И.И. Гордон, А.Г. Майер. – М.: Наука. – 1967. – 487 с.
10. *Андронов, А.А.* Нужны решительные меры [Текст] / А.А. Андронов // Вестник высшей школы. – 1950. – № 7. – С. 33-37.
11. Архив РАН. Фонд 1938. Опись 1. Дело 190.
12. *Неймарк, Ю.И.* Сухой остаток [Текст] / Ю.И. Неймарк. – Н.Новгород: Нижегородский гуманитарный центр. – 2000. – 142 с.
13. *Андронов, А.А.* Лаплас [Текст] / А.А. Андронов, Е.А. Андронова. – М.: Госиздат РСФСР Московский рабочий. – 1930. – 192 с.
14. *Андронов, А.А.* Собрание трудов. Л.И. Мандельштам и теория нелинейных колебаний [Текст] / А.А. Андронов. – М.: АН СССР. – 1956. – С. 441-472.
15. *Андронов, А.А.* О работах Д.К. Максвелла, И.А. Вышнеградского и А. Стодолы в области регулирования машин [Текст] / А.А. Андронов, И.Н. Вознесенский / Д.К. Максвелл, И.А. Вышнеградский и Стодола А. Теория автоматического регулирования. – М.-Л.: 1949. – С. 253-301.

Памяти Алексея Николаевича Боголюбова (к 100-летию со дня рождения)

И.К. Зубова

25 марта 2011 г. исполнилось сто лет со дня рождения видного советского математика, механика, историка науки, члена-корреспондента Академии наук Украины Алексея Николаевича Боголюбова (ум. 01.11.2004), которого, несомненно, с любовью вспоминают многие из ныне работающих историков математики. Автору предлагаемой статьи посчастливилось под его руководством обучаться в аспирантуре в 1982-1985 гг.

Два года назад научная общественность широко отметила столетие его старшего брата, академика Николая Николаевича Боголюбова, одного из крупнейших физиков и математиков нашего времени.

В конце прошлого года на 93-м году жизни скончался их младший брат, академик Михаил Николаевич Боголюбов, филолог, востоковед, более 30 лет бывший деканом восточного факультета Санкт-Петербургского университета.

Читая в связи с этими событиями воспоминания их учеников, невольно отмечаешь, что кажется, будто знала лично обоих этих замечательных людей и ученых. Ведь все, что пишут сейчас о них, вызывает в памяти самый теплый отклик, так как живо напоминает Алексея Николаевича. Напоминает потому, что его яркие рассказы о братьях, слышанные в годы аспирантуры, врезались в память навсегда, и потому, что все то, чем запомнились братья Боголюбовы коллегам, ученикам, – глубочайшая эрудиция, высокая интеллигентность, доброе, душевное отношение к ученикам и коллегам – было в огромной степени характерно и для него.

Отец трех сыновей-академиков, Николай Михайлович Боголюбов (1872-1934), родился в Нижегородской губернии, в семье потомственного священника. Окончив Нижегородскую духовную семинарию, получив высшее образование в Московской духовной академии и Берлинском университете, став магистром богословия и преподавателем Нижегородской духовной семинарии, сам он не сразу сделался священнослужителем.

В 1908 г. он женился на выпускнице Нижегородского филиала московской консерватории по классу рояля Ольге Николаевне Люминарской (1881-1965), преподававшей музыку в институте благородных девиц в Нижнем Новгороде. В 1909 г. в семье родился первый сын, Николай, и в том же году Николай Михайлович получил приглашение на место профессора богословия в историко-филологический институт князя Безбородко в г. Нежине (ныне Черниговской области). Для того чтобы принять это приглашение, нужно было получить сан священника, и в сентябре 1909 г. он был рукоположен в иереи, после чего семья переехала в Нежин. Здесь 25 марта 1911 г. родился второй сын, Алексей.

В 1913 г. Н.М. Боголюбов был избран профессором богословия Университета Св. Владимира в Киеве. Через четыре года ему была присуждена степень доктора богословия за работу “Философия религии”. 24 января 1918 года в семье родился третий сын, Михаил. В том же году Алексей Николаевич поступил в гимназию, но проучился там только один год.

Вскоре кафедра богословия в Университете Святого Владимира была ликвидирована. У Николая Михайловича была реальная возможность остаться на преподавательской работе, отказавшись от сана, но это для него было неприемлемо. В 1919 г. он получил место сельского священника в селе Высокая Круча Пирятинского уезда Полтавской губернии и два года служил там, в церкви Святого Иоанна Богослова. Старшие сыновья были приняты соответственно в пятый и седьмой классы семилетней школы, о которой впоследствии вспоминали с большой благодарностью, считая, что ее педагогический коллектив мог бы составить славу лучшей из московских школ. Именно здесь, как писал Алексей Николаевич, началась математическая "карьера" его брата, который за время жизни в селе с помощью замечательных сельских учителей и отца изучил всю школьную математику и начал изучать высшую.

В конце 1921 г. семья возвратилась в Киев. Алексей Николаевич в своих кратких автобиографических очерках не сообщает, при каких обстоятельствах это произошло, но пишет, что отец не мог сразу найти работу. Вероятно, сельская церковь была закрыта.

О том, что Н.Н. Боголюбов 13-ти лет стал студентом, много писалось в прессе. Когда однажды я сказала Алексею Николаевичу, что читала об этом, будучи школьницей, он весело рассмеялся и ответил, что академик Боголюбов студентом никогда не был и что аттестат об окончании семилетки был у него до получения диплома доктора наук единственным документом об образовании. Тогда это, конечно, вызвало только восхищенное удивление, и только существенно позже пришло понимание того, какой непростой была в те годы жизнь семьи священнослужителя...

В Киеве пришлось жить распродажей скромного имущества и случайными заработками родителей. Изредка отцу удавалось заменить кого-либо из приходских священников, мать давала уроки музыки. Лишь в середине 1923 г. отец получил место священника и чин митрофорного протоирея. Дети учились дома, с ними занимались знакомые преподаватели. Николай Николаевич с 1922 г. посещал в университете семинар Д.А. Граве, а затем перешел на кафедру математической физики, которой руководил Н.М. Крылов. Тогда ему и в самом деле было 13-14 лет. 1 июня 1925 г. президиум Укрглавнауки принял решение: "Ввиду феноменальных способностей по математике считать Н.Н. Боголюбова на положении аспиранта научно-исследовательской кафедры математики в Киеве с 18.06.1925 г." Научным руководителем был утвержден Н.М. Крылов.

В том же 1925 г. Николай Михайлович, оставив старшего сына в Киеве, уехал с остальной семьей на родину в Нижний Новгород, где получил место настоятеля Храма Всемилостивейшего Спаса. Младшие братья в Нижнем Новгороде стали учиться в школе. Алексей Николаевич окончил ее в 1928 г., и, как он пишет в автобиографическом очерке, опубликованном в 2001 г. в Киеве, в сборнике, посвященном его 90-летию, "сразу попал в список лишенцев, поскольку советская власть решила, что я как сын священника не должен иметь никаких прав".

В том же году отец был репрессирован, три года провел в заключении, и смог выйти из тюрьмы благодаря хлопотам жены и старшего сына. Николай Николаевич ездил в Москву, сначала к митрополиту Сергию, а затем, по его совету, на прием к Менжинскому, по распоряжению которого отец и был освобожден. Умер Н.М. Боголюбов в 1934 г. В 1998 году на здании Храма Всемилостивейшего Спаса установлена мемориальная доска в память служения протоирея Николая Боголюбова в нем.

После смерти отца мать переехала в Киев к старшему сыну.

О первых годах своей жизни после окончания школы Алексей Николаевич в автобиографическом очерке сообщает только одной фразой: "Все-таки, благодаря добрым людям, работу я получил. Трудился в учхозе Тимирязевской сельскохозяйственной академии, на строительстве моста через Оку, на заводе "Свет шахтера" в Харькове, в УОЦИТ в Харькове, также в Запорожье". Под "добрыми людьми" он, вероятно, в первую очередь подразумевает семью Артоболевских, с которой дружил всю жизнь.

Судьба этой семьи была во многом схожа с семьей Боголюбовых. Отец видных советских ученых в области теории машин и механизмов Сергея Ивановича (1903-1961) и Ивана Ивановича (1905-1977) Артоболевских, протоиерей Иван Алексеевич Артоболевский (1872-1938), с 1911 г. был заведующим кафедрой богословия при Петровской сельскохозяйственной академии (с 1923 г. – Тимирязевская сельскохозяйственная академия, один из ведущих сельскохозяйственных вузов России). Это учебное заведение окончили оба его сына. В марте 1918 г. кафедра богословия в академии была упразднена, но И.А. Артоболевский продолжал служить в храме святых апостолов Петра и Павла при академии, с марта 1918 г. и до закрытия храма в 1927 году он был его настоятелем. Затем был назначен настоятелем Введенского храма в Черкизове.

В августе 1922 г. отец Иоанн был в первый раз арестован. Его обвиняли в контрреволюционной агитации во время проповедей и в организации в Петровской сельскохозяйственной академии кружков христианской молодежи. Он был освобожден через полгода, но в 1933 г. снова арестован и приговорен к трем годам ссылки. Отбыв ее в Вологодской области, он вернулся в Москву, а в 1938 г. был арестован в третий раз и приговорен к расстрелу.

В августе 2000 года протоиерей Иоанн Артоболевский причислен к лику святых Юбилейным Архиерейским Собором Русской Православной Церкви.

Поскольку И.А. Артоболевский и Н.М. Боголюбов – ровесники и оба учились в Московской духовной академии, напрашивается вывод, что не случайно Алексей Николаевич начинал трудовую деятельность в учхозе Тимирязевской сельскохозяйственной академии. Вероятно, тогда он сблизился с братьями Артоболевскими, которые были старше на несколько лет, и к этому времени уже увлеченно занимались теорией машин и механизмов. Возможно, это знакомство в какой-то степени повлияло на его будущий выбор профессии.

Через некоторое время Алексей Николаевич вернулся в Нижний Новгород, где работал на строительстве моста через Оку. Затем он перебрался в Харьков. Только в 1931 г. ему удалось поступить на математический факультет Харьковского университета. Здесь он встретил свою будущую жену Тамару Васильевну Морозову (1911-1998), которая была дочерью учителей. Как и Алексей Николаевич, она в это время вела уже совершенно самостоятельную жизнь.

В 1936 году оба они окончили университет. Тамара Васильевна защитила дипломную работу по геометрии, а Алексей Николаевич – по механике. Он сдал вступительные экзамены в аспирантуру в институте математики и механики при Харьковском университете, но из-за происхождения не был туда принят. В это время он уже работал на должности инженера треста "Укртракторремонт". "По совету моего научного руководителя, проф. В.М. Майзеля, – пишет Алексей Николаевич в автобиографическом очерке,– я поступил на третий курс механического факультета Харьковского машиностроительного института. Одновременно сдавал кандидатские экзамены и написал диссертацию на тему "Синтез механизмов", но не защитил ее за недостатком времени".

Предвоенные годы, и в самом деле, были для него очень насыщенными. В 1937 году ему была поручена организация школы для эвакуированных детей испанских коммунистов, привезенных в это время в Харьков. Алексей Николаевич стал директором этой школы и учителем физики и математики. Он всегда особенно тепло вспоминал своих учеников и вообще эти годы. "Как беззаботно жили мы в это время! – воскликнула однажды Тамара Васильевна. – То есть оба очень много работали, еще и не на одной работе, но жили так весело и беззаботно!" Наверно, у многих людей этого поколения время перед войной запомнилось как беззаботное и счастливое...

Вскоре после начала Великой Отечественной войны детский дом был эвакуирован. Судьба всех работавших в нем преподавателей сложилась очень непросто. Алексей Николаевич рассказывает в том же автобиографическом очерке, что, оставшись на оккупированной территории без работы, он ушел из города на поиски хоть какого-то заработка, и ему удалось найти работу переводчика в Староверовском районном совете. Тамара Васильевна во время оккупации не работала.

В 1944 г. немцы, отступая, забрали с собой большинство местных молодых мужчин, в том числе Алексея Николаевича. В Молдавии он бежал, перейдя линию фронта, а оказавшись на позициях советских войск, был арестован. Следствие не выявило в селе Староверовка никого, кто мог бы сообщить что-то против него, но, тем не менее, его обвинили в антисоветской деятельности и украинском национализме и осудили на 15 лет исправительно-трудовых лагерей и 5 лет лишения политических прав. День Победы стал для него началом отбытия этого срока в лагерях под Норильском.

Разумеется, Алексей Николаевич крайне редко и мало говорил об этих годах. Однажды, в самом начале перестройки, когда многие из нас впервые читали вышедшие из-под запретов романы А.И. Солженицына, он сказал: "Вы теперь прочитали о том, каково было «в круге первом», а я прошел все семь!" В автобиографическом очерке он описал эти годы тоже очень кратко. "Сначала работал на шахте в Кайеркане машинистом подъемной машины. Затем меня перевели в лагерь, обслуживавший строительство большой обогатительной фабрики в самом Норильске. Здесь работал с 1945 по 1953 гг. главным образом, на инженерных должностях..." Недавно на сайте, посвященном Норильлагу, я встретила упоминание об Алексее Николаевиче. По свидетельству одного из бывших заключенных, инженера-механика Боголюбова перевели на работу по специальности после того, как ему поручили переписать для чего-то список фамилий некоторых заключенных, а он спросил, на каком языке это лучше сделать, на французском, испанском или португальском. Из контекста непонятно, была ли это шутка, или вопрос был задан серьезно, т.к. в лагере среди заключенных были иностранцы...

В декабре 1953 г. Алексей Николаевич был освобожден по амнистии и, встретив "старый" Новый год в семейном кругу в Москве, вернулся на Украину. Тремя годами ранее его старший брат с семьей переехал в Москву, где стал работать в математическом институте АН СССР и Московском университете. Мать осталась в Киеве, и с ней стала жить Тамара Васильевна.

Все предыдущие годы (с 1943 г.) она работала в школах и вузах разных городов Украины. Можно отметить, что она высказывалась о том времени несколько чаще и резче, чем Алексей Николаевич. В частности, както рассказывала, что, устроившись на новом месте работы, преподавала только до тех пор, пока кто-либо не задавал ей вопрос о муже. После этого она сразу с работы уходила и уезжала. С 1943 по 1951 годы она работала в Харькове, Черновцах, Черкассах, Ужгороде, Мукачеве... Можно также добавить, что в ее рассказах об этом времени никогда не звучало жалоб на судьбу и всегда, как это ни удивительно, присутствовал юмор. "Сорок лет я работала преподавателем, и за все эти годы ни разу не пошла на лекцию, не подготовившись к ней и не сделав прически!" – говаривала она молодым коллегам.

В 1951 г. Тамара Васильевна, как сказано выше, переехала в Киев, была избрана на должность старшего преподавателя киевского технологического института легкой промышленности и поселилась с Ольгой Николаевной. "Всем, что я умею делать по хозяйству, я обязана свекрови. И баловали же мы вдвоем Алексея Николаевича!" – сказала она однажды. Но, конечно, она не рассказывала, что "баловать" удалось только еще через некоторое время. Он был лишен права проживания в Киеве, поэтому работал около двух лет главным механиком Черкасского областного строительного треста. Жить с семьей Алексей Николаевич смог только в 1955 г. С этого года по 1962 г. он работал в Министерстве высшего и среднего специального образования Украины.

А.Н. и Т.В. Боголюбовы. 80-е годы

В 1962 г. А.Н. Боголюбов защитил кандидатскую диссертацию. Его научным руководителем был И.И. Артоболевский, к тому времени уже крупный ученый в области теории машин и механизмов, лауреат многих премий, с 1946 г. – академик. Тамара Васильевна стала кандидатом физико-математических наук в 1956 г. Она постоянно была в курсе всех общественных и научных дел Алексея Николаевича. Не случайно в предисловиях к большинству своих книг он, наряду с благодарностями рецензентам и соавторам, выражал благодарность ей. Несомненно, с такой же благодарностью стоит вспомнить о ней не только ее непосредственным ученикам, но и ученикам Алексея Николаевича.

После защиты диссертации Алексей Николаевич был принят на должность старшего научного сотрудника отдела истории математики Института математики Академии наук Украинской ССР (в конце 1962 г. отдел был переведен в Институт истории АН УССР). Одновременно с 1956 года он преподавал теорию машин и механизмов и деталей машин на кафедре строительных машин Киевского инженерно-строительного института.

В отделе истории математики, которым руководил академик И.З. Штокало, Алексей Николаевич, как пишет он сам, "принял дела" от своего друга, И.Б. Погребысского, который в это время переехал в Москву, где стал сотрудником Института истории естествознания и техники АН СССР. Эта "приемка дел" означала, что он включился в выполнение двух запланированных Иосифом Бенедиктовичем работ: "Украинской математической библиографии" и "Истории отечественной математики". Второй из этих трудов, планировавшийся первоначально как двухтомный, в процессе работы превратился в четырехтомный. Первый том посвящен истории математики и математического естествознания до XVIII в. включительно, второй – математике XIX в., третий и четвертый – XX в. Этот огромный труд большого коллектива ученых из разных республик Советского Союза, которым в качестве заместителей главного редактора руководили А.Н. Боголюбов и А.П. Юшкевич, занял несколько лет. "Для написания отдельных разделов третьего и четвертого томов, – писал Алексей Николаевич, – мы обращались к математикам, работавшим в разных городах Советского Союза. Иногда приходилось «на ходу» менять авторские коллективы отдельных разделов. Я взял на себя написание очерка о развитии математики в СССР в XX столетии. Очерк был издан в двух частях тиражом 50 экземпляров и выслан на рецензирование специалистам из различных областей математики. После этого с очерком ознакомились В.И. Смирнов и П.С. Александров, и лишь после их правок он был опубликован как первая часть третьего тома". В 1970 г. в издательстве "Наукова думка" в Киеве вышел в свет четвертый том, который пришлось издать в двух книгах. Отдельным томом была издана "История математического образования в СССР".

Одновременно с этой работой А.Н. Боголюбов начал изучать подробно вопросы истории механики машин. Это направление было новым в истории механики. Результатом трехлетней работы стала монография "История механики машин", опубликованная в Киеве в 1964 г., и защита докторской диссертации, научным консультантом которой был И.И. Артоболевский.

В 1969 г. А.Н. Боголюбов по представлению академиков И.И. Артоболевского, В.И. Смирнова, П.С. Александрова, академиков АН УССР И.З. Штокало и А.Д. Коваленко был избран членом-корреспондентом Академии наук УССР.

С 1976 г. Алексей Николаевич, не оставляя преподавательской деятельности в Киевском инженерно-строительном институте, вновь стал сотрудником Института математики АН УССР. Здесь, на улице Репина, 6, по средам проводились заседания его семинара, памятные многим из тех, кто активно работал в области истории математики в 70-е годы. На семинаре в Киеве апробировали результаты своей работы молодые ученые из разных республик и городов. Алексей Николаевич в своем юбилейном очерке 10 лет назад упоминал о том, что подготовил около 25 кандидатов наук и двух докторов, но думаю, что на самом деле число людей, считающих себя его учениками, существенно больше. Он был исключительно внимателен не только по отношению к собственным аспирантам, но и ко всем, кто обращался к нему за отзывом, за консультацией, за любой помощью в работе.

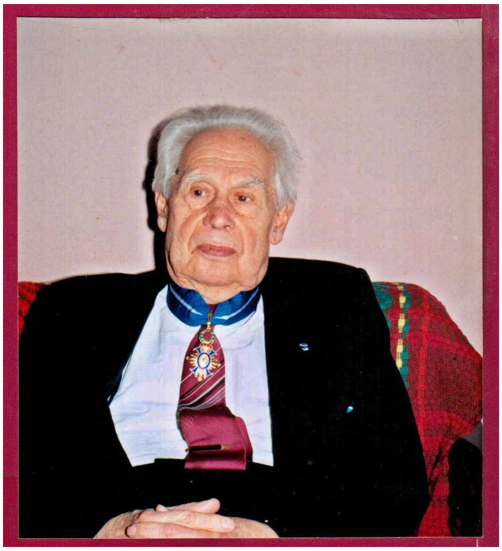
Научная деятельность Алексея Николаевича в течение 1960-1980-х гг. была чрезвычайно активной. Им написано около четырехсот трудов, среди которых много научных биографий. Напомню о тех, которые были опубликованы в серии РАН "Научно-биографическая литература", публикующейся в издательстве "Наука" с 1959 года.

1969 г. – "Августин Августинович Бетанкур (1758-1824)". За изучение трудов этого испанского инженера и ученого, работавшего в России, А.Н. Боголюбов уже в 90- е годы был награжден испанским орденом "за гражданские заслуги". 1971 г. – "Леонид Владимирович Ассур (1878-1920)" (в соавторстве со своим учителем И.И. Артоболевским), о русском механике и инженере, основоположнике теории структуры механизмов. 1973 г. – "Георгий Николаевич Николадзе (1888-1931)",об одном из создателей грузинской математической школы, советском математике и металлурге. 1978 г. – "Гаспар Монж (1746-1818)", научная биография одного из интереснейших ученых XVIII-XIX вв. 1982 г. – "Иван Иванович Артоболевский (1905-1977)", книга о друге и учителе. 1984 г. – "Роберт Гук (1635-1703)". Алексей Николаевич считал, что этот ученый по многим причинам "недооценен" историками. 1978 г. – "Жан Виктор Понселе (1788-1867)", еще одна книга о математике и механике конца XVIII – начала XIX вв. В девяностые годы появилось еще несколько книг о русских и советских ученых. 1991 г. – "Леонид Самуилович Лейбензон (1879-1951)" (в соавторстве с Т.Л. Канделаки). 1997 г. – "Всеволод Иванович Романовский (1879-1954)" (в соавторстве с Г.П. Матвиевской). 1998 г. – "Сергей Николаевич Кожевников (1906-1988)".

Алексей Николаевич входил в коллектив авторов книги "Владимир Иванович Смирнов", изданной в этой серии в 1994 г. и переизданной с дополнениями в 2006 г. (составители Г.П. Матвиевская и Е.П. Ожигова).

В 1987 г. в издательстве "Наукова думка" в Киеве была издана написанная им в соавторстве с В.М. Урбанским научная биография Н.М. Крылова.

В 1983 г. в Киеве был издан биографический справочник "Математики. Механики". Это очень ценное справочное издание, переизданное в 2000 году.



1998 г. А.Н. Боголюбов с орденом "За гражданские заслуги", пожалованным ему королем Испании Хуаном Карлосом

Библиографический список

1. *Боголюбов, А.Н.* Боголюбовы [Текст] / А.Н. Боголюбов // Очерки из истории математики и математического естествознания. – Киев: Институт математики АН Украины, 2001. – С. 86-101.
2. *Боголюбов, А.Н.* Математики. Механики. Биографический справочник [Текст] / А.Н. Боголюбов. – Киев: Наукова думка, 1983. – 638 с.

Работы П.Л. Чебышева по теории механизмов в курсе "История механики" на механико-математическом факультете МГУ им. М.В. Ломоносова

В.Н. Чиненова

Обязательный курс истории механики читается в Московском университете с небольшим перерывом уже более пятидесяти лет. Он завершает общетеоретическую подготовку студентов механико-математического факультета по специальности "Механика".

В разделе, посвященном развитию механики в России, в частности, формированию петербургской школы механиков Остроградского-Чебышева в XIX в., большое внимание уделяется творчеству Пафнутия Львовича Чебышева в области теории механизмов.

Гений Чебышева, как отмечал В.А. Стеклов, представляет собою исключительный образец соединения практики с творческой, обобщающей силой увлеченного мышления. Один из учеников Н.Д. Брашмана, П.Л. Чебышев, создал Петербургскую математическую школу. Он же первым применил к задачам механики машин математические методы и преобразовал ее из науки описательной в науку расчетную. В области математики Чебышеву принадлежат основополагающие результаты по теории чисел, теории вероятностей, интегрированию иррациональных функций и созданию новой теории наилучшего приближения функций. К этой теории ученый пришел, отправляясь от некоторых практических задач теории механизмов. Его вклад в механику определяется прежде всего работами в области механизмов и в меньшей степени – работами по баллистике.

Жизнь Пафнутия Львовича Чебышева небогата внешними событиями. Родился он 26 мая 1821 г. в селе Окатово Боровского уезда Калужской губернии. Первоначальное образование он получил дома. В 1832 г. вся семья переехала в Москву, и П.Л. Чебышев вместе со своим старшим братом, стал готовиться к поступлению в университет. Шестнадцати лет он уже был студентом математического отделения философского факультета Московского университета. Университет П.Л. Чебышев окончил двадцатилетним юношей. Двадцати пяти лет защитил в Московском университете магистерскую диссертацию "Опыт элементарного анализа теории вероятностей" (1846). Через год он принял предложение работать на кафедре Петербургского университета и переселился в Петербург. Здесь началась его педагогическая деятельность, сначала в должности адъюнкта. В 1847 г. после переезда в Петербург П.Л. Чебышев защитил в Петербургском университете диссертацию "Об интегрировании с помощью логарифмов" на право чтения лекций (pro venia legendi) и после утверждения в звании доцента приступил к чтению лекций по алгебре и теории чисел. В 1849 г. он защитил докторскую диссертацию на тему "Теория сравнений", составившую одну из важных глав современной теории чисел. В том же году эта работа была удостоена Демидовской премии.

В 1853 году за свои выдающиеся заслуги в области науки П.Л. Чебышев избирается адъюнктом Петербургской академии наук по кафедре прикладной математики, а в 1859 году – ординарным академиком.

С 1850 г. по 1882 г. он – профессор Петербургского университета. После выхода в отставку П.Л. Чебышев до конца жизни занимался научной работой.

Слава П.Л. Чебышева как крупнейшего ученого-математика была настолько велика, что он был избран почетным членом многих академий, университетов и научных обществ, русских и заграничных. В 1860 г. он был избран членом-корреспондентом Французской академии наук, а в 1847 г. – ее иностранным сочленом (первым русским ученым, ставшим иностранным сочленом Французской академии наук, после Петра Первого). Он был также членом Римской, Болонской, Шведской и Прусской академии наук, Английского королевского общества, почетным членом всех русских университетов и большого числа научных обществ во всем мире.

П.Л. Чебышев скончался в возрасте 73 лет 8 декабря 1894 г.

Одной из незабвенных заслуг Чебышева как учителя русских математиков было то, что он своими работами и указаниями в ученых беседах наводил своих учеников на плодотворные темы для собственных изысканий и обращал их внимание на такие вопросы, занятия которыми всегда приводили к ценным результатам. Например, он предложил Александру Михайловичу Ляпунову (1857-1918) исследовать вопрос о нахождении фигур равновесия вращающейся гравитирующей несжимаемой жидкой массы, близких к эллипсоидальным, найденным до того К. Маклореном и К. Якоби. Над этой темой Ляпунов, можно сказать, работал всю свою жизнь, он занимался исследованием устойчивости как эллипсоидальных фигур, так и открытых им новых фигур для случая однородной жидкости.

Математические исследования П.Л. Чебышева были тесно связаны с его интересами в области практической механики. В 1849-1851 гг. он читал курс практической механики (этот курс он читал также в Александровском лицее).

Во время заграничной командировки в 1852 году (во Францию, Бельгию, Англию и Германию) П.Л. Чебышев познакомился с зарубежными учеными, осмотрел машины и механизмы, находившиеся в музеях этих стран, и машины, действовавшие на фабриках, заводах, мельницах.

Будучи во Франции, Чебышев познакомился с крупнейшими учеными – Ж. Лиувиллем, Ш. Эрмитом, Ж.-А. Серре, Л. Фуко, О. Коши. Чебышев посетил Национальный музей ремесел и искусств. Затем он едет в Англию, где математики Дж. Сильвестр и А. Кэли знакомят его с известным механиком и химиком Грегори. Грегори ездит с Чебышевым по фабрикам, где Чебышев надеялся увидеть в натуре машины, изготовленные руками самого Дж. Уатта. Машин Уатта не нашлось, но удалось увидеть две машины, переделанные Уаттом. Чебышева интересовали причины несоответствия современной теории паровых машин наблюдениям. Сопоставляя размеры составных частей в различных машинах, он получил данные, необходимые ему для исследований по теории параллелограмма Уатта.

Уатт рассматривал различные приборы, превращавшие вращательные движения некоторого звена в другие типы движения. Он заметил, что некоторые точки описывают траектории весьма мало отличающиеся от прямой. Механизм с использованием "параллелограмма Уатта", изображен схематически на рис. 1.

В действии паровой машины Уатта используется кривошипно-шатунный механизм, в котором прямолинейное колебательное движение совершает шарнир C, соединяющий шток, жестко связанный с поршнем и с шатуном CB (и с симметричным ему CJ).

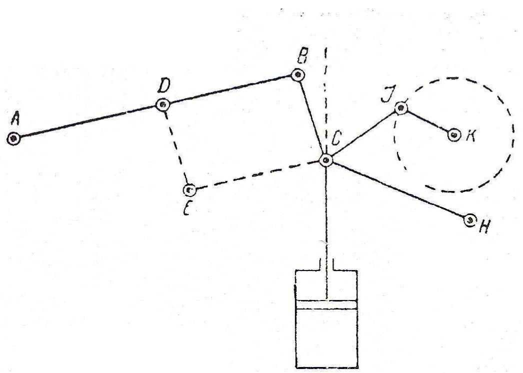


Рис. 1

При этом вводится вспомогательный параллелограмм $DBCE$, назначение которого состоит в усилении жесткости кривошипа AB. Оптимальные размеры сторон параллелограмма Уатт подбирал эмпирически. Отклонения от жесткости любого звена вызывают деформацию штока и приводят к быстрому изнашиванию этих частей машины. Вследствие этого точечный шарнир C вместо прямой описывает некоторую кривую. Чебышев подошел к этому вопросу с научной точки зрения; он задался общим вопросом – аналитически определить длины стержней BC, CH, CJ, DB так, чтобы движение точки C на всем протяжении ее хода отклонялось от прямой линии возможно мало. Существенное требование к этому механизму состоит в том, чтобы конец штока C совершал прямолинейное движение несмотря на боковые усилия.

Идя по такому пути, П.Л. Чебышев пришел к созданию совершенно нового раздела математического анализа, а именно к созданию *теории функций, наименее уклоняющихся от нуля.*

В 1853 г. П.Л. Чебышев представил Петербургской академии наук первую часть своего сочинения "Теория механизмов, известных под названием параллелограммов" (именно в этой работе он ввел ортогональные многочлены, носящие сегодня его имя). Во введении к этой статье автор говорит: "В нашем мемуаре... мы разработали случай, когда отыскивается приближенное выражение функций в виде многочлена, или дали решение такой задачи: "*Найти изменения, которые следует внести в приближенную величину f(x), данную ее разложением по восходящим степеням (x-a) , когда требуется сделать наименьшим предел погрешностей между x=a-h и a+h при h довольно малом*". Решение этой задачи легко доставляет элементы *параллелограммов*, которые удовлетворяют наиболее выгодным условиям для точности хода этого механизма. Но, стараясь решить другие вопросы того же рода, мы убедились, как важно иметь общий метод для решения задач, аналогичных с указанной нами здесь и состоящих в определении выражений, которые между всеми другими того же вида наименее уклоняются от некоторой функции $f(x)$ между двумя данными пределами" (имеется в виду, что ось абсцисс совпадает с осью штока).

Вопрос этот был совершенно новый, и Ж. Бертран в своем знаменитом трактате по дифференциальному исчислению излагает метод Чебышева и называет его *"un miracle d'analyse"* (чудом анализа).

Эту тематику Чебышев продолжил в статьях "Вопросы о наименьших величинах, связанные с приближенным представлением функций", "О функциях, наименее уклоняющихся от нуля" и др.

Пафнутий Львович Чебышев, по праву считается "отцом современной теории механизмов". Улучшенная паровая машина Чебышева, сконструированная им самим, была экспонирована на Всемирной выставке в Филадельфии в 1876 году. (Оригинал этой машины хранится в Музее истории МГТУ им. Н.Э. Баумана.)

П.Л. Чебышев подошел к решению задач теории механизмов как математик и впервые применил математические методы при построении механизмов. Задача о воспроизведении прямой линии шарнирными механизмами ставится в самом общем виде; после этого поднимается вопрос о структуре таких механизмов. Так как механизмы были плоскими, то П.Л. Чебышев и отыскивает условие существования плоского шарнирного механизма.

Так, в работах "О некотором видоизменении коленчатого параллелограмма Уатта" (1861) и "Об одном механизме" (1868) П.Л. Чебышев предложил два новых механизма, преобразующих круговое движение в прямолинейное, а в работе "О параллелограммах" (1869) он уже ставит вопрос об образовании подобных механизмов путем присоединения к четырехзвеннику новых звеньев. Для выяснения возможности построения плоских механизмов с одной степенью свободы Чебышев использовал выведенное им соотношение

$$3m - 2(n + v) = 1,$$

где m – число подвижных звеньев цепи, n и v – число соответственно подвижных и неподвижных шарниров. Так как до соединения звеньев система имела $3m$ степеней свободы, а каждый шарнир отнимает по две степени свободы, то для того, чтобы получить механизм, т.е. систему с одной степенью свободы, должна выполняться указанная зависимость.

Это соотношение явилось *первой структурной формулой* существования плоского шарнирного механизма. В иностранной литературе подобная структурная формула была указана М. Грюблером в 1883 г. (через 14 лет после выполнения работы П.Л. Чебышева). Таким образом, П.Л. Чебышев первым поставил вопрос о структуре этих механизмов и дал исчерпывающее решение.

Только в 1887 г. ученик Чебышева П.О. Сомов обобщил результат и получил формулу существования механизма любого типа, как плоского, так и пространственного. Практическое же применение этой формулы было найдено лишь в 20-е годы XX в.

Будучи уже прославленным математиком, Пафнутий Львович много времени и средств тратил на изготовление механизмов собственного изобретения. Прекрасное знание математики помогло ему конструировать весьма сложные механизмы, и, наоборот, изготовленные им модели способствовали нахождению новых проблем математики, над решением которых трудился он сам и его ученики.

П.Л. Чебышев сконструировал и построил свыше 40 разнообразных моделей шарнирных механизмов и около 80 их модификаций; написал 15 мемуаров о них.

Конструктивные преимущества многих изобретений Чебышева – выдающиеся. Это механизмы с остановками, в которых ведомое звено совершает прерывистое движение, симметричные прямолинейно-направляющие механизмы (“стопоходящая машина”, гребной механизм), многозвенные прямолинейно-направляющие механизмы и др. Интересно, что свой метод синтеза механизмов Чебышев применил также к решению задачи о центробежном регуляторе и построении профилей зубчатых колес.

В мемуаре “Счетная машина с непрерывным движением”, опубликованном во Франции, он описал сконструированную им счетную машину. Единственный экземпляр своего арифмометра П.Л. Чебышев подарил Национальной консерватории искусств и ремесел в Париже.

В области теории механизмов одной из основных заслуг Чебышева является глубокое изучение *симметричных шатунных кривых* (траектории точек, принадлежащих шатуну, носят название шатунных кривых) и их использование в самых различных задачах синтеза шарнирных механизмов. Анализ свойств этих кривых привел Чебышева к постановке ряда задач, относящихся к теории синтеза приближенно-направляющих механизмов, шатунные кривые которых на всем своем протяжении или на некоторых участках приближаются к прямым или дугам окружностей. Сущность такого рода задач заключается в определении размеров звеньев шарнирного механизма, у которого траектория некоторой определенной точки шатуна имеет ряд общих элементов с заданной кривой и, следовательно, может эту заданную кривую заменить на каком-то определенном участке.

В качестве примера рассмотрим конструкцию “стопоходящей” машины, в основе которой используется, так называемый, лямбда-механизм[1]

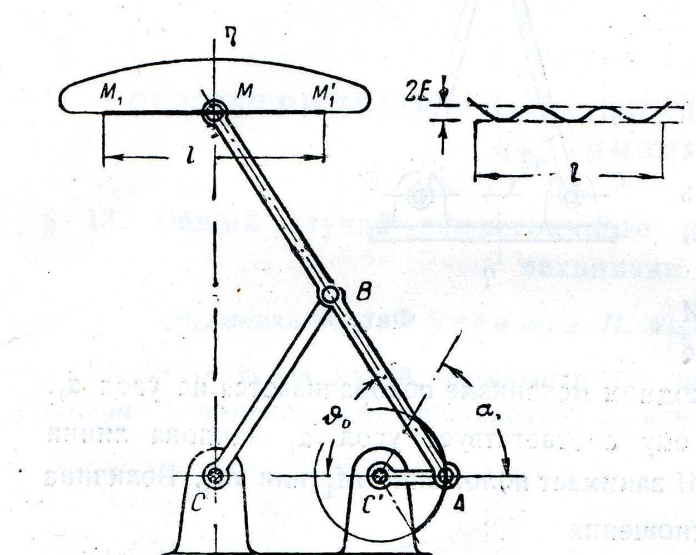


Рис. 2

Рассмотрим схему одного из этих механизмов. Имеем два неподвижных шарнира C и C′ (рис. 2) и три звена – одинаковой длины $CB = BA = MB$.

Из-за своего вида похожего на греческую букву *лямбда*, этот механизм и получил свое название. Незакрепленный шарнир A ведущего звена $C'A$ вращается по окружности, при этом ведомый шарнир M описывает траекторию, похожую на профиль шляпки гриба.

[1] Из-за своего вида похожего на греческую букву λ, этот механизм и получил свое название.

Нижнему краю “шляпки” соответствует ровно половина времени движения ведущего звена окружности (с радиусом $C'A$). При этом нижняя часть траектории точки М очень мало отличается от движения строго по прямой (уклонение от прямой на этом участке составляет доли процента ведущего звена).

Рис. 3

П.Л. Чебышев приделал к лямбда-механизму ногу со стопой, прикрепил к тем же неподвижным осям в противоположной фазе еще одну такую же ногу. Для устойчивости он добавил зеркальную копию уже построенной двуногой части механизма. Дополнительными звеньями согласовал их фазы вращения, а общей платформой соединил оси механизма. Пафнутий Львович воплотил описанный механизм “в дереве и железе” и назвал его “**Переступающий механизм”** (“Стопоходящая машина”). На рис. 3 представлена модель этого механизма[1].

“Переступающий механизм” получил всеобщее одобрение на Всемирной выставке в Париже 1878 года.

На основе лямбда-механизма (лямбдообразных прямил) построен **гребной механизм лодки** (механизм хранится в Политехническом музее). На основе этого механизма были сделаны, как минимум, три различные лодки. Один ученый, увидев эту лодку, воскликнул: “Я в восторге от вашей лодки с ногами, которая пойдет по воде, как лошадь!”

Рис. 4

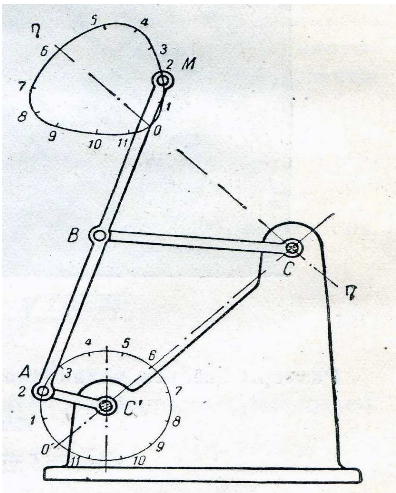


Рис. 5

В Музее истории Санкт-Петербургского университета хранится **самокатное кресло**. Основой его является трехзвенный лямбда-механизм с двумя неподвижными шарнирами. На рис. 4 приведена копия фотоснимка самокатного кресла, снабженного механизмом Чебышева. Кинематическая схема этого механизма дана на рис. 5. Если ведущим звеном сделать шатун АВ и перемещать точку М по ее траектории, то кривошип AC' будет делать полный оборот, что и использовано Чебышевым при конструировании своего самокатного кресла, в котором каждое из двух колес приводится во вращение при помощи лямбда-механизма.

Простые и остроумные по замыслу, и интересные по конструкции механизмы Чебышева (**арифмометр,** центробежный регулятор, **модели самокатного кресла,** “сортировалки”, **лодка с гребным механизмом и “стопоходящая машина)** экспонировались на Чикагской выставке в 1893 г.; они привлекли внимание зрителей и вызвали всеобщее восхищение.

Характеристика ученых заслуг П.Л. Чебышева хорошо выражена в записке академиков А.А. Маркова и Н.Я. Сонина, прочитанной в первом после смерти Чебышева заседании Академии наук: “Труды Чебышева

[1]См. “Механизмы П.Л. Чебышева” на сайте http://tcheb.ru.

носят отпечаток гениальности. Он изобрел новые методы для решения многих трудных вопросов, которые были поставлены давно и оставались нерешенными. Вместе с тем он поставил ряд новых вопросов, над разработкой которых трудился до конца своих дней".

Известный математик Шарль Эрмит заявил, что Чебышев "является гордостью русской науки и одним из величайших математиков Европы", а профессор Стокгольмского университета Миттарг-Леффлер утверждал, что Чебышев – гениальный математик и один из величайших анналистов всех времен.

Именем П.Л. Чебышева названы:

кратер на Луне;

астероид 2010 Чебышев;

математический журнал "Чебышевский Сборник";

суперкомпьютер СКИФ МГУ "ЧЕБЫШЕВ" (http://parallel.ru/cluster/skif_msu.html);

многие объекты в современной математике.

В 1944 Академией наук была учреждена премия имени Чебышева П.Л. "за лучшие исследования в области математики и теории механизмов и машин".

Библиографический список

1. *Крылов, А.Н.* [Текст] / А.Н. Крылов. – Собрание трудов. – М.-Л.: Из-во АН СССР, 1951. – Т. I. – Ч. 2. – С. 116-117.
2. *Чебышев, П.Л.* [Текст] / П.Л. Чебышев. – Полное собрание сочинений. – М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1951. – Т. V.
3. *Чебышев, П.Л.* [Текст] / П.Л. Чебышев. – Избранные труды. М.: Изд-во АН СССР, 1955.

Становление дифференциальной геометрии как учебного предмета в Московском университете в XIX веке

И.В. Игнатушина

В первые годы после организации физико-математического факультета (1804) в Московском университете сложилась благоприятная обстановка для преподавания математики. Наряду с элементарной математикой, вводится курс дифференциального и интегрального исчисления, в котором уделяется внимание различным приложениям, в том числе и к геометрии.

Нашествие Наполеона и пожар 1812 года очень тяжело отразились на жизни Московского университета. Уровень преподавания математики с 1813 по 1825 г. в Московском университете был намного ниже, чем в Харьковском (где высшую математику в то время читал Т.Ф. Осиповский) и Казанском (в котором в то время преподавали И.М. Бартельс, Н.И. Лобачевский и Н.Д. Брашман).

В 20-30-х годах обстановка в Московском университете тоже была неспокойная в связи с начавшимися политическими волнениями. К счастью, на физико-математическом факультете в этот период появились новые деятели такие, как Д.М. Перевощиков, Н.Е. Зернов, Н.Д. Брашман, сумевшие увлечь за собой студентов и поднять уровень преподавания математики [1-5].

Дмитрий Матвеевич Перевощиков (1788-1880) – выпускник Казанского университета, начал свою педагогическую деятельность в Московском университете с 1818 г. [1, 3, 5, 6]. Почти одновременно с ним на кафедру чистой математики пришел выпускник Московского университета Павел Степанович Щепкин (1793-1836). Поначалу в качестве учебного руководства ими был избран "Курс чистой математики" французского математика и педагога Луи Бенжамена Франкера (1773-1849), с дополнением из работ другого французского математика, ученика Г. Монжа, Сильвестра Франсуа Лакруа (1765-1843). Во втором отделе этого курса содержатся элементы дифференциальной геометрии: выводятся формулы касательной и нормали к кривой, подкасательной и поднормали; излагается теория соприкосновения кривых и учение об особых точках; рассматриваются понятия кривизны, асимптоты, развертки плоской кривой; кроме того, здесь имеются некоторые вопросы, касающиеся пространственных кривых и поверхностей. Отдельные части этого курса Д.М. Перевощиков и П.С. Щепкин перевели на русский язык. Но, если П.С. Щепкин остановился на Франкере, то Д.М. Перевощиков подготовил целый ряд руководств по математике, в которых отразил накопленный педагогический опыт. Наиболее популярным из них была "Ручная математическая энциклопедия" (1826-1837) в 13 томах. При ее написании Д.М. Перевощиков использовал различные источники, в том числе работы Л. Эйлера, Г. Монжа, С.Е. Гурьева.

Шестая книга – "Высшая геометрия" (1828) [7] – охватывает аналитическую и дифференциальную геометрию того времени. Следуя Эйлеру, "высшая геометрия" определялась как наука, в которой "предлагаются общие способы для исследования кривых линий и поверхностей" [7, с. 52].

Вся книга состоит из двух отделений: 1. "О кривых линиях на плоскости"; 2. "О поверхностях и кривых линиях в пространстве".

В первом отделении изложены вопросы дифференциальной геометрии на плоскости: касательная, подкасательная, нормаль, кривизна, радиус кривизны, круг кривизны, центр кривизны плоской кривой, заданной в прямоугольных и полярных координатах; “линия центра кривизны” (т.е. эволюта) и ее свойства; порядок соприкосновения кривых; кратные и сопряженные точки; точки перегиба и возврата.

Во втором отделении освещаются вопросы дифференциальной геометрии в пространстве: касательные линии и плоскости к кривым поверхностям и линиям в пространстве; кривизна поверхностей и кривых линий в пространстве.

Следует отметить, что весь изложенный теоретический материал в “Энциклопедии” иллюстрируется специально подобранными примерами.

Учебные руководства Д.М. Перевощикова по своему научному и методическому уровню занимали переходное положение от учебников в стиле Франкера к новым курсам, появившимся впоследствии.

В 1826 г. Д.М. Перевощиков был утвержден профессором по кафедре астрономии. С 1833 г. в течение 15 лет – избирался деканом физико-математического факультета. В 1848 г. он был избран проректором, а затем ректором Московского университета и в течение трех лет находился на этом посту. Уровень преподавания наук при нем значительно повысился. Д.М. Перевощиков подбирал молодые кадры и растил их. Одним из его лучших учеников был Н.Е. Зернов.

Д.М. Перевощикову было поручено представить проект изменения программы преподавания на физико-математических отделениях университетов перед утверждением в 1835 году нового университетского устава. Обсуждение этого проекта прошло во всех университетах страны, и он был принят для исполнения. Д.М. Перевощиков сыграл выдающуюся роль в распространении физико-математических знаний в России XIX в. Студенты высоко ценили его лекции, которые собирали многочисленные аудитории. Его учебные руководства и научные статьи отличались простотой и доступностью изложения. Многие годы Д.М. Перевощиков был членом редакции Ученых записок Московского университета.

В 1851 г. Д.М. Перевощиков вышел в отставку, в 1852 г. переехал в Петербург и в звании адъюнкта приступил к работе в Академии наук. В 1855 г. он был избран академиком и полностью посвятил себя научной работе.

Итак, благодаря П.С. Щепкину и Д.М. Перевощикову уровень преподавания математики в Московском университете приблизился к уровню преподавания в Харьковском и Казанском университетах.

В 1834 г. свою деятельность в Московском университете начал Николай Дмитриевич Брашман (1796-1866).

Н.Д. Брашман – выпускник Венского университета, где его учителем был Иосиф Антонович Литтров (1781-1840), который до приезда в Вену преподавал в Казанском университете. Вероятно, под влиянием рассказов Литтрова о Казанском университете у Брашмана созрела мысль о переезде в Россию [8].

В марте 1825 г. Брашман был назначен адъюнктом математики и астрономии в Казанский университет. В течение девяти лет (с 1825 по 1834 г.) он преподавал поочередно чистую математику, механику и сферическую астрономию. Для Брашмана Казанский университет стал второй школой, здесь он сложился как педагог и как ученый.

В Московский университет Брашман был переведен на должность экстраординарного профессора по кафедре прикладной математики (механики), а в 1835 г. – утвержден ординарным профессором по той же кафедре. Отметим прежде всего, что Брашман оказал немалое влияние на своего нового коллегу Н.Е. Зернова, который почти одновременно с ним начал работать на кафедре чистой математики.

Благодаря Брашману и Зернову преподавание математики и механики в Московском университете достигло уровня лучших зарубежных университетов и высших школ. Руководства и пособия, применявшиеся в передовых высших учебных заведениях, особенно в Парижской Политехнической школе, а также некоторые научные мемуары рекомендовались почти немедленно после выхода их из печати для изучения соответствующих дисциплин. При этом велась активная работа по созданию своих учебных пособий по чистой и прикладной математике, в которых отражались последние достижения науки того времени.

Одним из таких руководств был “Курс аналитической геометрии”, изданный Брашманом в 1836 г. Этот учебник был удостоен Академией наук полной Демидовский премии. Следует отметить, что в курсе своих лекций Брашман, как и Н.И. Лобачевкий, дифференциальную геометрию включал в аналитическую, рассматривая ее как высшую часть аналитической геометрии. Однако в указанном руководстве вопросы дифференциальной геометрии отсутствуют, поскольку Брашман намеривался издать их отдельным курсом [1, с. 477].

Николай Ефимович Зернов (1804-1862) – выпускник Московского университета. В 1827 г. под руководством Д.М. Перевощикова он успешно защитил магистерскую диссертацию “Рассуждение о суточном и годовом движениях Земли”. В 1834 г. Н.Е. Зернов был утвержден адъюнктом университета, сменив на кафедре чистой математики П.С. Щепкина, а в следующем году – в звании экстраординарного профессора. В связи с требованиями нового университетского устава (1836 г.) Зернов защитил в 1837 г. (первым в России) докторскую диссертацию по математике на тему “Рассуждение об интеграции уравнений с частными дифференциалами”. Диссертация Зернова была первым сочинением на русском языке в этой области и широко использовалась в качестве учебного пособия.

С 1834 по 1842 гг. он исполнял обязанности секретаря физико-математического отделения университета. В 1842 г. по представлению Д.М. Перевощикова Зернов был утвержден в звании ординарного профессора. В течение 20 лет он непрерывно руководил кафедрой чистой математики и до конца своих дней был связан с Московским университетом. С 1836-37 учебного года Зернов преподавал в университете все математические курсы. При чтении лекций он непрерывно сокращал раздел элементарной математики и за этот счет увеличивал разделы высшей. Зернов всегда следил за успехами математических наук и использовал все лучшее в своих лекциях и трудах.

В основу коренной перестройки преподавания математики в университете Зернов сначала положил "Ручную математическую энциклопедию" Перевощикова. В дальнейшем он подготовил целый ряд учебников для студентов Московского университета.

Учебник "Дифференциальное исчисление с приложением к геометрии" (1842) [9] Зернов составил как замену "Ручной математической энциклопедии" Перевощикова, которая в начале 40-х годов уже не могла удовлетворять потребностям времени. При подготовке этого курса Зернов использовал работы лучших представителей французской Политехнической школы. По отзыву М.В. Остроградского, Зернову за это сочинение была присуждена половинная Демидовская премия.

В указанном руководстве большое внимание уделяется приложению анализа к геометрии, т.е. дифференциальной геометрии. Вопросы, относящиеся к этому разделу, излагаются в четырех главах (V, IX–XI). В пятой главе Зернов, следуя Монжу, показывает способ нахождения соответствующего дифференциального уравнения для различных поверхностей (цилиндрических, конических, поверхностей вращения и др.). Девятая глава посвящена касательным и нормалям на плоскости, касательным к пространственной кривой, касательной плоскости к кривой поверхности. В десятой главе рассказано о нахождении радиуса кривизны и центра кривизны как плоских, так и пространственных кривых. Здесь же изложены вопросы теории поверхностей. В одиннадцатой главе исследуются различные виды особых точек.

Таким образом, курс Н.Е. Зернова давал ясное представление о дифференциальной геометрии того времени. Он полностью соответствовал учебной программе по дифференциальному и интегральному исчислению, подготовленной Зеровым в конце 40-х годов XIX в. Из программы видно, что дифференциальная геометрия еще не являлась отдельной дисциплиной, а входила в курс математического анализа.

Вопросы дифференциальной геометрии становятся предметом диссертационных исследований, выполненных на физико-математическом отделении. Так, выпускник Московского университета Владимир Драшусов в 1838 г. успешно защитил магистерскую диссертацию на тему "О кривизне поверхностей около каждой их точки" [10].

Общий подъем научной активности по математике в Московском университете нашел выражение в организации в 1866 г. Московского математического общества [11, 12]. Оно выросло из кружка друзей и учеников Н.Д. Брашмана и стало крупным научным центром, вокруг которого группировались ученые России. Основными направлениями его деятельности по математике стали анализ бесконечно малых, дифференциальная геометрия, теория дифференциальных уравнений, теория чисел.

Президентом Московского математического общества был единогласно выбран Н.Д. Брашман. Действительными членами общества могли быть магистры и доктора математических наук, а также все, кто плодотворно занимался наукой, независимо от принадлежности к высшей школе. Например, один из его учредителей Карл Михайлович Петерсон (1828-1881) преподавал в гимназии. Его основные исследования были связаны с изучением свойств кривых и поверхностей, в частности, с вопросами изгибания поверхности на так называемом главном основании [13]. Работы К.М. Петерсона положили, по сути, начало московской школе дифференциальной геометрии, представителями которой являются Болеслав Корнелиевич Млодзеевский (1858-1923), Дмитрий Федорович Егоров (1869-1931), Сергей Павлович Фиников (1883-1964), Сергей Сергеевич Бюшгенс (1882-1963) и др.

С 1885 по 1905 г. на физико-математическом факультете были прочитаны следующие специальные курсы по различным вопросам дифференциальной геометрии [11, с. 146]:

1. Аналитическая теория плоских алгебраических кривых (Б.К. Млодзеевский, 1989-90 уч. г.).
2. Теория линейчатых поверхностей (Б.К. Млодзеевский, 1891-92 уч. г.).
3. Теория минимальных поверхностей (Б.К. Млодзеевский, 1893-94 уч. г.).
4. Теория изгибания поверхностей (Б.К. Млодзеевский, 1895-96 уч. г.).
5. Дифференциальная геометрия поверхностей (Б.К. Млодзеевский, 1897-98 уч. г.).
6. Геометрическая теория уравнений с частными производными первого и второго порядка (Д.Ф. Егоров, 1897-98 уч. г.).
7. Теория алгебраических поверхностей и линий двойной кривизны (А.А. Дмитровский, 1899-1900 уч. г.).
8. Плоские кривые высших порядков (А.А. Дмитровский, 1900-01 уч. г.)

Таким образом, к началу XX в. содержание вопросов по дифференциальной геометрии, излагавшихся в Московском университете, расширилось до такой степени, что возникла необходимость выделения их в отдельный учебный предмет.

В 1909-10 уч. г. Д.Ф. Егоров подготовил курс "Дифференциальная геометрия", в котором он постарался отразить весь накопленный к тому времени опыт [14].

Библиографический список

1. *Лихолетов, И.И.* Из истории преподавания математики в Московском университете (1804-1806 гг.) [Текст] / Н.И. Лихолетов, С.А. Яновская // Историко-математические исследования. – М., 1955. – Вып. VIII. – С. 127-480.

2. *Юшкевич, А.П.* Математика в Московском университете за первые сто лет его существования [Текст] / А.П. Юшкевич // Историко-математические исследования. – М., 1948. – Вып. I. – С. 43-140.
3. *Юшкевич, А.П.* История математики в России [Текст] / А.П. Юшкевич. – М.: Наука, 1968.
4. *Гнеденко, Б.В.* Математика в Московском университете (1755-1933) [Текст] / Б.В. Гнеденко, О.Б. Лупанов, К.А. Рыбников // Математика в Московском университете. – М.: МГУ, 1992. – С. 3-173.
5. История отечественной математики [Текст] / ред. И.З. Штокало. – Киев: Наукова думка, 1967.
6. *Богомолов, Н.В.* Очерки о российских педагогах-математиках [Текст] / Н.В. Богомолов. – М.: Высш. шк., 2006.
7. *Перевощиков, Д.М.* Ручная математическая энциклопедия [Текст] / Д.М. Перевощиков. – М.: Университетская типография, 1828. – Кн. VI.
8. *Лихолетов, И.И.* Николай Дмитриевич Брашман (1796-1866) [Текст] / И.И. Лихолетов, Л.Е. Майстров. – М.: МГУ, 1971.
9. *Зернов, Н.Е.* Дифференциальное исчисление с приложением к геометрии сост. Н. Зерновым, орд. профессором Императорского Московского университета [Текст] / Н.Е. Зернов. – М.: Университетская типография, 1842.
10. *Драшусов, В.* Рассуждение о кривизне поверхностей около каждой их точки. Сочинение Владимира Драшусова (на степень магистра философии) [Текст] / В. Драшусов. – М.: Университетская типография, 1838.
11. *Петрова, С.С.* Из истории преподавания математики в Московском университете с 60-х годов XIX до начала XX в. [Текст] / С.С. Петрова // Историко-математические исследования. – М., 2006. – Вып. 11(46). – С. 130-147.
12. *Васильев, А.М.* Дифференциальная геометрия [Текст] / А.М. Васильев // Математика в Московском университете. – М.: МГУ, 1992. – С. 174-192.
13. *Депман, И.Я.* Карл Михайлович Петерсон и его кандидатская диссертация [Текст] / И.Я. Депман // Историко-математические исследования. – М., 1952. – Вып. V. – С. 134-166.
14. *Колягин, Ю.М.* Дмитрий Федорович Егоров. Путь ученого и христианина [Текст] / Ю.М. Колягин, О.А. Саввина. – М.: ПСТГУ, 2010.

Первые русские учебники по теории вероятностей и математической статистике (из фонда книжных памятников ЯГПУ им. К.Д. Ушинского)

Е.И. Щукин

Фонд книжных памятников ЯГПУ им. К.Д. Ушинского является структурным подразделением библиотеки ЯГПУ им. К.Д. Ушинского (руководитель библиотеки – заслуженный работник культуры Российской Федерации Ю.И. Майоров). Фонд был организован в 1973 году (как отдел редких книг). В настоящее время общий объем Фонда составляет 16000 единиц хранения (при объеме библиотеки в 1300000 единиц хранения). В Фонде собраны отечественные и зарубежные издания XVI-XX вв., обладающие выдающимися духовными, эстетическими, полиграфическими достоинствами, представляющими значимую научную, историческую и культурную ценность. Многие из них сохранились до настоящего времени в небольшом количестве экземпляров.

В этом Фонде удалось отыскать два первых – и по времени издания, и по подходу к рассмотрению поставленных проблем – учебника по теории вероятностей (авторы – Н.Е. Зернов [1] и П.Л. Чебышев [2]). Содержание этих работ будет указано ниже, а пока приведем некоторые данные об авторах.

Н.Е. Зернов (1804-1862) закончил с отличием ("занесен на золотую доску") Ярославскую мужскую гимназию в 1818 году [3, с. 11]; один год проучился в Ярославском Демидовском высших наук училище, затем перешел на учебу в Московский университет, по окончании которого работал в этом университете и к моменту написания руководства [1] уже был первым в России доктором математики, а затем и лауреатом Демидовской премии [4, с. 15]. Его ученик по Московскому университету П.Л. Чебышев (1821-1894) написал для Демидовского лицея – так стало к тому времени называться Демидовское высших наук училище [5, с. 106] – учебник [2]. Позже эта работа была успешно защищена П.Л. Чебышевым как магистерская диссертация по теории вероятностей, оппонентами на защите были Н.Д. Брашман и Н.Е. Зернов [6, с. 259].

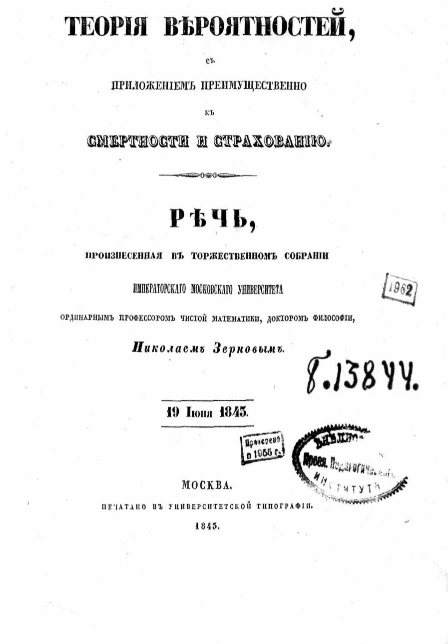
Учебные руководства [1] и [2] следует рассматривать как первые русские учебники по теории вероятностей, хотя по объему они уступают тому учебнику В.Я. Буняковского [7], который долго считался самым первым учебником по теории вероятностей (в России) и до сих пор сохраняет свое значение как одно из лучших руководств по теории вероятностей не только в России, а и во всем научном сообществе (этот учебник также имеется в Фонде книжных памятников ЯГПУ им. К.Д. Ушинского).

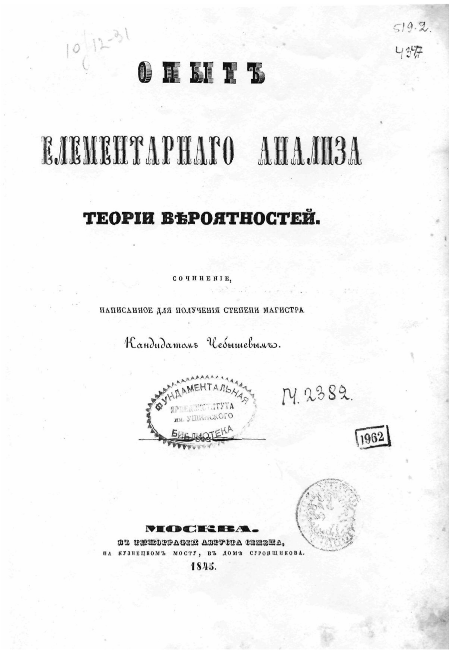
Рассматривая содержание самих учебников Н.Е. Зернова и П.Л. Чебышева, отметим, что они охватывают всю часть классического периода развития теории вероятностей, которая была сформирована к моменту их написания (классическое определение вероятности события; относительная частота события (относительное число!) и статистическое определение вероятности события; теоремы сложения и умножения вероятностей событий; формула и теорема Якова Бернулли; теорема Пуассона). Изложение полученных результатов в учебниках Н.Е. Зернова и П.Л. Чебышева весьма выразительное и элементарное – так, например, у Н.Е. Зернова читаем [1, с. 14]:

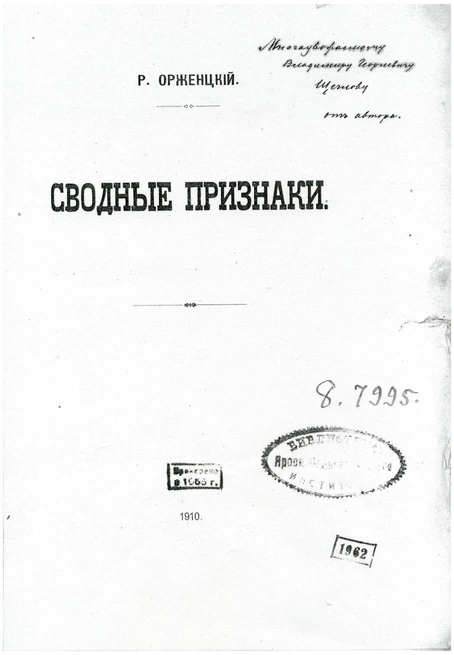
"Яков Бернулли доказал, что всегда можно назначить столь большое число приемов, дабы оно дало сколь угодно близкую к 1 вероятность, что число повторений одного и того же простого события будет иметь к полному числу приемов такое отношение, какое не отойдет от вероятности этого простого события далее желаемых пределов, сколь бы тесны ни были последние."

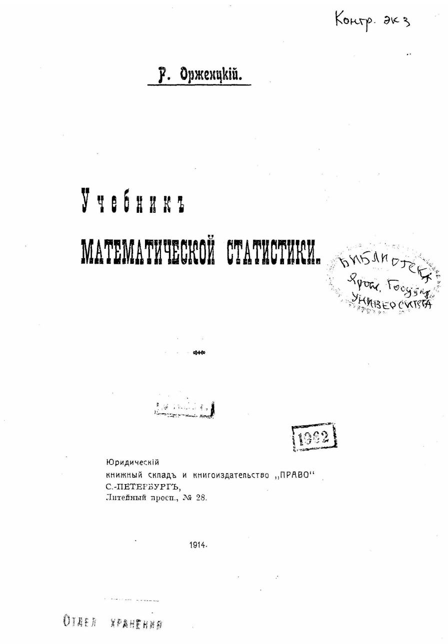
И Н.Е. Зернов, и П.Л. Чебышев ставили своей задачей дать именно элементарное изложение теории вероятностей [2, с. 28]:

"До сих пор элементарные курсы теории вероятностей ограничивались только изложением, более или менее подробным, результатов, полученных посредством высшего (трансцендентного) анализа. Дать возможность поверить все эти заключения анализом строгим и простым, доступным для большей части учащихся, есть большой шаг в способе элементарного изложения теории вероятностей".


ТЕОРІЯ ВѢРОЯТНОСТЕЙ,
съ
приложеніемъ преимущественно
къ
смертности и страхованію.
РѢЧЬ,
произнесенная въ торжественномъ собраніи
Императорскаго Московскаго Университета
ординарнымъ профессоромъ чистой математики, докторомъ философіи,
Николаемъ Зерновымъ.
19 Іюня 1845.
МОСКВА.
Печатано въ Университетской типографіи.
1845.


ОПЫТЪ
ЭЛЕМЕНТАРНАГО АНАЛИЗА
ТЕОРІИ ВѢРОЯТНОСТЕЙ.
Сочиненіе,
написанное для полученія степени магистра
Кандидатомъ Чебышевымъ.
МОСКВА.
Въ типографіи Августа Семена,
на Кузнецкомъ мосту, въ домѣ Сурошникова.
1845.


Р. ОРЖЕНЦКІЙ.
СВОДНЫЕ ПРИЗНАКИ.
1910.


Р. Орженцкій.
Учебникъ
математической статистики.
Юридическій книжный складъ и книгоиздательство „ПРАВО"
С.-ПЕТЕРБУРГЪ,
Литейный просп., № 28.
1914.

Одними из первых русских учебников по математической статистике являются 2 учебника [9, 10] Р.М. Орженцкого (1863-1923), русского статистика и экономиста (подробнее о его жизни и деятельности смотрите [8, с. 481-484]). Первый из этих учебников – "Сводные признаки" – посвящен исследованию средних и относительных величин. Он состоит из трех частей. В первой излагаются основные понятия о сводных признаках;

во второй – преобразование и исследование рядов по способу Пирсона; в третьей – дана попытка объяснить причину сходства статистической правильности общественных явлений с такой же правильностью явлений органической жизни вообще (в этой части рассмотрены: логическое значение сводных признаков; теория вероятностей и свобода воли; объективная причинность и субъективная свобода; объективная целесообразность; дисперсия и полиморфизм целей; объективный характер форм поведения; субституция цели). В "Учебнике математической статистики" рассмотрены: 1) общие понятия; 2) значение теории вероятностей для статистического метода; 3) средние величины; 4) относительные числа; 5) корреляция; 6) функциональная зависимость рядов; 7) мера совпадения. В этом учебнике впервые появляются и сравниваются средняя арифметическая, медиана и мода (в их современном виде).

В заключение приводим титульные листы учебных книг Н.Е. Зернова, П.Л. Чебышева и Р.М. Орженцкого (из Фонда книжных памятников Ярославского государственного педагогического университета имени К.Д. Ушинского).

Библиографический список

1. *Зернов, Н.Е.* Теория вероятностей с приложением преимущественно к смертности и страхованию [Текст]: речь, произнесенная в торжественном собрании Императорского Московского университета 19 июня 1843 / Н.Е. Зернов. – М.: университетская типография, 1843.
2. *Чебышев, П.Л.* Опыт элементарного анализа теории вероятностей [Текст]: сочинение, написанное для получения степени магистра / П.Л. Чебышев. – М.: типография Августа Семена, на Кузнецком мосту, в доме Суровщикова, 1845.
3. *Гушель, Р.З.* Страницы истории школьного дела в Ярославле (XIX-начало XX века) [Текст] / Р.З. Гушель. – Ярославль: Академия 76, 2010.
4. *Щукин, Е.И.* Ярославский университет: Демидовы и Ляпуновы [Текст] / Е.И. Щукин // Человек в контексте эпохи: личность, культура, образование: материалы Всероссийской научной конференции, посвященной 270-летию со дня рождения П.Г. Демидова. – Ярославль, 2008.
5. *Щеглов, В.Г.* Высшее учебное заведение в г. Ярославле имени Демидова в первый век его образования и деятельности (1803-1903) [Текст] / В.Г. Щеглов. – Ярославль: типография губернского правления, 1903.
6. *Щукин, Е.И.* Математика в Ярославском вузе им. П.Г. Демидова в первый век его существования [Текст] / Е.И. Щукин // Математика и физика, экономика и технология и совершенствование их преподавания: материалы конференции "Чтения Ушинского". – Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2009.
7. *Буняковский, В.Я.* Основания математической теории вероятностей [Текст] / В.Я. Буняковский. – СПб.: типография Императорской Академии Наук, 1846.
8. *Щукин, Е.И.* Теория вероятностей и математическая статистика на педагогическом факультете Ярославского (1922-1924) университета (постановка проблемы) [Текст] / Е.И. Щукин // Труды VIII Международных Колмогоровских чтений. – Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2010.
9. *Орженцкий, Р.М.* Сводные признаки [Текст] / Р.М. Орженцкий. – Ярославль: типография губернского правления, 1910.
10. *Орженцкий, Р.М.* Учебник математической статистики [Текст] / Р.М. Орженцкий. – СПб.: юридический книжный склад и книгоиздательство "Право", 1914.

Физико-математический кружок в Ярославле в начале XX века

Р.З. Гушель

В небольших городах, даже губернских, положение человека с высшим образованием во второй половине XIX века иногда бывало не вполне комфортно оттого, что заложенный в вузе интерес к исследовательской работе трудно было реализовать вдали от научных центров. Постепенно это привело к созданию в разных городах различных обществ и кружков.

В Ярославле в 1864 году было учреждено "Общество для исследования Ярославской губернии в естественно-историческом отношении", впоследствии переименованное в "Ярославское естественно-историческое общество". Его членами были чиновники разных ведомств. Для многих из них увлечение отдельными отраслями естествознания и его приложений не имело прямого отношения к их профессиональной деятельности.

К началу XX века в городе появилась потребность в объединении лиц, занимавшихся более узким кругом вопросов.

В 1904 году в Ярославле начал свою работу "КРУЖОК ЛЮБИТЕЛЕЙ АСТРОНОМИИ И ФИЗИКИ", устав которого был утвержден министром народного просвещения Н.П. Зенгером в декабре 1903 года [1, л. 34-37]. Первоначальный проект устава предполагал создание одноименного общества, но в утвержденном варианте появилось название "кружок".

Этот кружок был открыт при мужской гимназии. Он состоял в ведении Министерства народного просвещения. В задачи кружка входило: "а) распространение популярных сведений из области астрономии и физики и наук, находящихся в связи с ними… б) содействие сближению между собою лиц, интересующихся этими науками” [1, л. 34].

Среди инициаторов учреждения кружка были известные в городе учителя А.О. Блажеевич и П.Я. Морозов. Но его членами были не только учителя. В работе кружка участвовали и врачи, и инженеры, и офицеры, и землемеры. Первым председателем кружка стал директор мужской гимназии Н.Г. Высотский, а его товарищем (заместителем) – директор кадетского корпуса генерал-майор А.И. Калишевский. Секретарем был избран С.В. Воронин.

В 1907 году председателем кружка был избран П.Я. Морозов, товарищем председателя – Н.Ф. Нечаев.

Особую активность по развертыванию работы кружка проявил ПАВЕЛ ЯКОВЛЕВИЧ МОРОЗОВ (1852–1911), с 1876 по 1905 год служивший учителем ярославской гимназии. В конце XIX – начале XX века он был одновременно гласным Ярославской городской думы, а осенью 1905 года его избрали членом Городской управы. В течение полугода Павел Яковлевич исправлял должность Городского головы.

П.Я. Морозов, бывший в университете учеником академика Ф.А. Бредихина, серьезно занимался астрономией. В 1902 году в С.-Петербурге вышел его перевод книги американского астронома Ч. Юнга “Уроки астрономии с включением в текст описания созвездий”. Объем книги превышал 350 страниц. Один экземпляр этого издания переводчик подарил библиотеке кружка.

Приведем названия некоторых докладов, сделанных на заседаниях кружка: МОРОЗОВ П.Я. О новейшем взгляде на фигуру земной коры (1904); ВЫШЕСЛАВЦЕВ А.П. Электромагнитные волны (1904); НЕЧАЕВ Н.Ф. О Солнце (1904); ВЫШЕСЛАВЦЕВ А.П. О радии (1905); НЕЧАЕВ Н.Ф. О возмущениях планетных орбит (1907); ФИВЕЙСКИЙ Н.П. О Менделеевском съезде (1908).

С первых же месяцев своей работы кружок пытался установить контакты с кружками и обществами аналогичного профиля в других городах. На первом заседании Совета кружка 5 марта 1904 года было решено: “Об открытии кружка сообщить Нижегородскому кружку любителей физики и астрономии и С.-Петербургскому русскому астрономическому обществу, прося их выслать свои труды для библиотеки кружка” [2, л. 4].

В отчете библиотекаря кружка за 1904 год указывается наличие в фондах как “Известий русского астрономического общества”, так и “Ежегодников” Нижегородского кружка – по три выпуска каждого издания. Выписывал кружок и журналы – как научные, так и научно-популярные.

В 1907 году П.Я. Морозов был назначен инспектором Тульской гимназии и уехал из Ярославля. Около этого же времени покинул город и его младший коллега Николай Федорович НЕЧАЕВ, активно и много выступавший на заседаниях кружка (в 1916 году статский советник Н.Ф. Нечаев состоял преподавателем 10-й московской гимназии [3, стб. 300]). После их отъезда работа кружка продолжалась, но активность его членов заметно упала. В октябре 1908 года было даже высказано предложение о закрытии кружка. Правда, был и альтернативный вариант, а именно: “выработать проект устава физико-математического общества, деятельность которого обняла бы больший круг отдельных наук… Рассмотрение вопросов методического характера физико-математических наук в их элементарном школьном изложении должно быть допущено наравне с учеными докладами” [4, л. 24].

В последующие годы шла работа над уставом нового “ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО КРУЖКА”. Этот устав был утвержден в октябре 1912 года. Состоял кружок также в ведении Министерства народного просвещения.

В конце XIX – начале XX века подобные кружки были созданы и в других городах России, в том числе в Москве, Нижнем Новгороде, Орле, Риге и Новочеркасске. На I Всероссийском съезде преподавателей математики в С.-Петербурге в 1912 году деятельности таких объединений в разных городах Империи было посвящено восемь докладов и сообщений.

К 1912 году в Ярославле появилось немало новых лиц с физико-математическим образованием, которые и стали членами нового кружка. В 1907 году в городе открылось реальное училище, многие учителя которого проявили интерес к кружку. А директор училища НИКОЛАЙ САМСОНОВИЧ СОКОЛОВ был председателем Совета кружка вплоть до 1916 года. В следующем, 1908 году, в городе появился учительский институт, среди преподавателей которого также нашлось немало лиц, принявших участие в работе кружка. Его первое заседание состоялось 5 декабря 1912 года. Тогда же было решено, что все пожелавшие члены кружка любителей астрономии и физики автоматически могли стать членами нового объединения.

На основании §2 принятого устава “задачи кружка составляют: а) распространение сведений из области физико-математических наук; б) общение лиц, интересующихся как этими науками, так и постановкою их преподавания” [5, с. 1].

В §3 устава записано: “Средствами к достижению этих задач служат: а) доклады и сообщения в собраниях кружка, б) организация публичных лекций, чтений и курсов и издание периодического органа, книг и брошюр на основании существующих узаконений, в) устройство в городе Ярославле физического кабинета, обсерватории, метеорологической станции и других вспомогательных учреждений, г) составление библиотек, д) содействие членам кружка в приобретении астрономических инструментов, физических приборов, книг и т.п.” [5, с. 1].

На первом же заседании 5 декабря 1912 года по предложению Н.С. Соколова собрание почтило вставанием память покойных основателя кружка П.Я. Морозова и Городского головы И.А. Вахромеева, оказывавшего кружку активную помощь. Их портреты было решено повесить в помещении кружка.

Приведем темы некоторых докладов по математике, сделанных на заседаниях кружка в разные годы.

СОКОЛОВ Н.С. 1) Один из способов решения неопределенных уравнений (1913), 2) Решение задачи о нахождении члена бинома Ньютона с наибольшим коэффициентом (1913), 3) Задача о равнобедренном треугольнике (Петербургская задача) (1916);

БЛАЖЕЕВИЧ А.О. С.В. Ковалевская (1916);

ЗАЙЦЕВ А.М. 1) О парадоксе Дюбуа (1914), 2) Работы С.В. Ковалевской в области математики и механики (1916);

ИВАНОВ Н.А. 1) О бесконечных множествах (1915), 2) Геометрия Лобачевского (1916);

НИКАНОРОВ В.М. Памяти Н.И. Лобачевского (1916);

ЗВОННИКОВ К.И. Арифметика классической древности (1917).

Из нематематических докладов отметим следующие:

БЛАЖЕЕВИЧ А.О. П.Н. Лебедев и давление света (1912);

СПЕРАНСКИЙ Ф.Л. Английский и американский способы очистки питьевой воды (1913);

ВЫШЕСЛАВЦЕВ А.П. Элементарная теория принципа относительности (1913);

ПОПОВ Н.Я. Цветная фотография (1914);

ДЮШЕН Б.В. Основы электронной теории (1917).

В 1913 году Н.С. Соколов участвовал в работе XIII съезда русских естествоиспытателей и врачей в Тифлисе. Этому съезду он посвятил специальный доклад на одном из заседаний кружка.

Участвовали члены кружка и в работе двух всероссийских съездов преподавателей математики. На Первом съезде в январе 1912 года присутствовали несколько членов кружка, однако специального доклада о работе этого съезда нами в протоколах заседаний кружка пока не обнаружено.

Н.С. Соколов был также делегатом и Второго съезда, состоявшегося через два года. В 1915 году им был сделан на заседании кружка доклад "Вопросы по изменению программ математики, поставленные на последнем съезде преподавателей математики".

Вопросам реформирования школьного математического образования были посвящены и другие сообщения, в том числе доклад В.М. Никанорова "К вопросу об изменении программ математики в средней школе" (1915) и доклад А.И. Богословского "Работа комиссии по пересмотру программ по арифметике" (1916). Два последние сообщения были связаны, скорее всего, с материалами комиссии, работавшей в те годы при министре народного просвещения графе П.Н. Игнатьеве.

В 1916 году А.О. Блажеевичем был сделан на заседании кружка доклад "Работы комиссии по рассмотрению программы по физике, опубликованной в декабрьской книжке Журнала Министерства народного просвещения за 1915 год".

Хотя в уставе физико-математического кружка было прописано "издание периодического органа", своего издания кружок не имел, так что тексты названных докладов не были опубликованы. Возможно, если бы не начавшаяся вскоре война, был бы у кружка свой журнал.

В августе 1913 года на общем собрании кружка было решено ходатайствовать перед министерством о субсидии на устройство обсерватории. Директор гимназии Н.А. Веригин обещал это ходатайство поддержать. В декабре 1914 года из министерства сообщили о выделении 1000 рублей на устройство башни и вышки на здании мужской гимназии и на оборудование музея [6, л. 24]. Однако, хотя деньги и поступили, обсерватория в здании гимназии так и не была построена – в стране уже шла война.

Обратимся к библиотеке кружка и к тем периодическим изданиям, которыми она располагала.

На 1913 год была выписана Книжная летопись, а также следующие журналы: Физическое обозрение, Вестник опытной физики и элементарной математики, Электричество и жизнь, Природа, Математическое образование, La Revue de l'enseignement des sciences и Нижегородский астрономический календарь [6, л. 4].

В 1916 году редакция журнала "Математический вестник" предложила кружку бесплатно высылать ему журналы "за доставление отчетов о деятельности кружка" [7, л. 1]. Предложение было кружком принято. В первом номере этого журнала за 1917 год в отделе "Хроника" были опубликованы материалы из отчета Ярославского физико-математического кружка за 1915/1916 учебный год [7, с. 27].

Из книг по математике, имевшихся в библиотеке кружка, укажем "Новые начала геометрии" Н.И. Лобачевского, "Анализ бесконечно малых" М.Г. Попруженко, "Пособие в преподавании арифметики" Д.Д. Галанина.

В 1916 году на общем собрании кружка обсуждался вопрос об учреждении университета в Ярославле. Было вынесено постановление: "Выразить Комитету (по учреждению университета – Р.Г.) сочувствие и пожелание успехов в его начинаниях, командировать в состав комитета своего представителя и открыть среди членов кружка подписку, дабы хотя и небольшой материальной помощью оказать фактическое содействие делу учреждения университета в Ярославле [8, л. 1]". Представителем в Комитет был избран А.О. Блажеевич.

Выше уже говорилось, что председателем физико-математического кружка со времени его основания был директор Ярославского реального училища Н.С. Соколов. В 1916 году его сменил на этом посту преподаватель кадетского корпуса АДАМ ОКТАВИАНОВИЧ БЛАЖЕЕВИЧ, бывший все предшествовавшие годы членом Совета кружка. Среди лиц, наиболее активно участвовавших в его работе, нужно назвать ярославских учителей А.М. Зайцева, Н.А. Иванова, Г.П. Сергеева и М.В. Яблонева.

Членами Ярославского физико-математического кружка были преимущественно преподаватели ярославских учебных заведений. Но в нем состояли не только учителя. Членом кружка был, в частности, надворный советник, метеоролог Ярославского губернского земства И.Н. Ельчанинов. В 1913 году он выступил здесь с докладом "Метеорологические наблюдения в Ярославской губернии". Участвовали в работе кружка и несколько медиков. Но большинство его членов были учителями. По состоянию на 1 сентября 1913 года в кружке было 39 членов, через три года – 59. После 1917 года работа кружка прекратилась.

Прошло несколько лет.

В 1922 году при Ярославском естественно-историческом обществе была создана ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СЕКЦИЯ. Одним из инициаторов организации этой секции был ярославский учитель, брат поэта Максима Богдановича ПАВЕЛ АДАМОВИЧ БОГДАНОВИЧ.

На первом заседании секции 1 июля 1922 года П.А. Богданович сказал о том, что "необходимость объединения служителей физико-математических наук в Ярославле чувствовалась уже давно... Ранее в Ярославле существовал при мужской гимназии физико-математический кружок, организованный в 1912 году из более старого по времени Общества любителей астрономии и физики, но последний в 1917 году прекратил свое существование.

Явилась мысль воскресить этот кружок путем слияния его с Ярославским естественно-историческим обществом в форме организации физико-математической секции" [9, л. 12-12 об.].

Первым докладом, прочитанным на заседании секции 1 июля 1922 года, был доклад Н.А. Иванова "О некоторых методах дифференциальной геометрии в применении их к многомерной".

Председателем секции был тогда же избран старейший член бывшего физико-математического кружка, преподаватель математики Ярославского университета С.В. Воронин, а секретарем стал П.А. Богданович.

Из бывших членов кружка, помимо С.В. Воронина, в физико-математическую секцию вошли А.О. Блажеевич, Н.А. Иванов, С.Н. Слободской и Б.К. Чачхиани. Но здесь есть уже и новые лица, в том числе преподаватели будущего педагогического института Н.А. Арсеньев, М.В. Гециу, В.Н. Тугаринов и ряд других.

Прерванная событиями 1917 года работа была продолжена в новых исторических условиях.

Библиографический список

1. Государственный архив Ярославской области (ГАЯО). – Ф. 1541. – Оп. 1. – Дело 62.
2. ГАЯО. – Ф. 1541. – Оп. 1. – Дело 61.
3. Вся Москва [Текст]. – М., 1917.
4. ГАЯО. – Ф. 1541. – Оп. 1. – Дело 63.
5. Устав Ярославского физико-математического кружка [Текст]. – Яр., 1912.
6. ГАЯО. – Ф. 1541. – Оп. 1. – Дело 75.
7. Ярославский физико-математический кружок [Текст] // Математический вестник. – 1917. – № 1.
8. ГАЯО. – Ф. 1541. – Оп. 1. – Дело 100.
9. ГАЯО. – Ф. Р-221. – Оп. 1. – Дело 172.

К биографии "Вестника опытной физики и элементарной математики"

В.М. Бусев

В этом году исполняется 125 лет со дня основания первого в России физико-математического научно-популярного журнала "Вестник опытной физики и элементарной математики". Журнал выходил в 1886-1917 гг. 24 раза в год отдельными выпусками по 24 или 32 страницы каждый. За все время издания вышло 674 номера.

Мы хотим кратко рассказать об этом уникальном издании, о его содержании и тех людях, которые неустанным трудом, в подчас очень сложных условиях, создавали журнал. К истории "Вестника опытной физики и элементарной математики" обращались и ранее [1, 2, 6], однако, в силу господствовавших идеологических установок и незнакомства пишущих с архивными материалами, одни факты были искажены, а другие до сих пор остаются неизвестными.

Начало.

"Вестник опытной физики и элементарной математики" имел предшественника, из которого он и вырос: это "Журнал элементарной математики", издававшийся в 1884-1886 годах известным математиком, профессором Университета Св. Владимира **Василием Петровичем Ермаковым** (1845-1922). Из редакционной статьи В.П. Ермакова, опубликованной в первом номере "Журнала элементарной математики", видно, что прежде чем начать издание, редактор обсуждал тематику и направление будущего журнала с разными людьми и под их влиянием окончательно выработал собственные взгляды на цели, задачи и содержание своего детища.

Так, изначально журнал мыслился Ермаковым исключительно как периодически выходящий сборник задач, решения которых предполагалось публиковать в следующем номере. "И только глубокое убеждение в необходимости вообще математической литературы заставило нас уделить задачам сравнительно небольшой отдел", – писал В.П. Ермаков [4]. Не предполагалось публиковать статей педагогического характера, очерков по истории математики, рецензий на вновь выходящие школьные учебники и книги вообще. Название журнала не предусматривало и помещения материалов по физике, хотя в той же редакционной статье говорилось, что подобные материалы приветствуются и будут публиковаться. Основное внимание планировалось уделять вопросам элементарной математики (особенно геометрии) и началам высшей математики. Со временем позиция В.П. Ермакова изменилась, и он решил, в частности, ввести педагогический отдел для обсуждения вопросов преподавания.

В течение двух лет существования журнала В.П. Ермаков приложил немало усилий для его развития и распространения: привлекал для участия в качестве авторов известных ученых, сам писал статьи и предлагал задачи. Одной из мер для распространения журнала и увеличения подписки была возможность получить официальную рекомендацию его для средних учебных заведений у Министерства народного просвещения (МНП), чем Ермаков и воспользовался осенью 1885 г. Номера журнала были переданы в Ученый комитет МНП на рецензию **Ивану Алексеевичу Вышнеградскому** (1831-1895), который обратился к математикам А.Н. Коркину, К.А. Поссе и Ю.В. Сохоцкому с просьбой дать отзыв на выпуски журнала. Все трое отозвались о них весьма положительно. И.А. Вышнеградский согласился с мнением ученых и предложил "рекомендовать оный, как весьма полезное учебное пособие для учителей математики в гимназиях и реальных училищах, а также и для учеников средних учебных заведений Министерства Народного Просвещения" [5, л. 5 об.].

Рекомендация журнала, хотя и была весьма полезною мерой, не сказалась на материальном положении издания (а выпускать журнал было недешево), и с января 1886 г. Ермаков увеличил подписную цену [7, л. 18-20]. Одновременно редактор обратился в МНП с ходатайством о назначении ему пособия на издание журнала. Такое пособие в размере 300 руб. было решено выдать в конце марта, но менее чем через две недели В.П. Ермаков попросил прекратить дело о субсидии на журнал в связи с тем, что он больше не будет его выпускать: "С окончанием второго года издания, т.е. 1-го Июня сего года я прекращаю издание Журнала. Я устал и нуждаюсь в отдыхе. К тому же новый университетский устав налагает на профессора такие обязанности, добросовестное выполнение которых и одновременное ведение Журнала потребовали бы от меня слишком больших усилий" [5, л. 16].

Здесь кончается история "Журнала элементарной математики" и начинается история журнала "Вестник опытной физики и элементарной математики", редактором которого стал **Эразм Корнелиевич Шпачинский** (1848-1912), помощник Ермакова по изданию "Журнала элементарной математики" и одновременно автор почти всех статей по опытной физике[1].

Двенадцать лет борьбы.

В прошлом стипендиат Университета Св. Владимира, затем преподаватель средних учебных заведений, а ныне просто репетитор, Э.К. Шпачинский не прославился к 1886 г. никакими значительными достижениями в области науки или просвещения. Однако из архивных документов хорошо видно, что он не только хотел продолжать выпускать журнал, но и отчетливо понимал, в каком направлении следует его развивать. Важно и то, как он мыслил себе цели и задачи научно-популярного периодического издания: если для В.П. Ермакова журнал был лишь средством связи и обмена знаниями между немногочисленными любителями задач, то для Шпачинского он был средством просвещения учеников и учителей в области физико-математических наук.

Поэтому в ходатайстве о разрешении издавать ему такой журнал он сформулировал программу из 10 пунктов: 1) специальные статьи по всем отделам физики и элементарной математики, 2) извлечения и переводы из других специальных журналов и сочинений как русских, так и иностранных, 3) хроника научных новостей, 4) педагогический отдел, 5) критика, 6) задачи и вопросы по физике и математике, 7) решения задач и ответы, 8) библиографический отдел, 9) смесь и 10) ответы редакции, метеорологические бюллетени и объявления [8, л. 2-2 об.]. Таким образом, программа журнала Ермакова была существенно расширена, а сам журнал ориентирован на более широкую аудиторию потенциальных подписчиков.

Ясно, что регулярное выполнение такой программы не могло состояться без привлечения к участию в журнале многочисленных авторов: ученых, педагогов, любителей науки и математических задач. "Журнал элементарной математики" с трудом справлялся с выполнением программы меньшего объема, причем справлялся во многом благодаря известности в ученых и преподавательских кругах его редактора В.П. Ермакова. Э.К. Шпачинский же не был известен в мире науки и просвещения, эту известность ему еще предстояло приобрести. Но начинать журнал было необходимо, и нашлось вполне естественное решение: объявить, что В.П. Ермаков вовсе не закрывает издание, а передает его, ввиду собственной занятости, своему помощнику по редакции. Журнал остается "почти" таким же, хотя и меняет название. Причем бывший редактор продолжает "идейно" руководить изданием. Так и было сделано[2].

Следующим шагом Шпачинского стало обращение в Ученый комитет МНП с ходатайством о рекомендации журнала в библиотеки средних учебных заведений. Одновременно он обратился к министру народного просвещения с просьбой о назначении ежегодного пособия на содержание журнала в размере 1200 руб. (для сравнения: средняя заработная плата преподавателя гимназии за год составляла 900 руб.). Оба ходатайства были отправлены в МНП в середине ноября 1886 г.

[1]Мы не сомневаемся в том, что именно Шпачинский настоял на включении в программу журнала по математике статей по физике.

[2]Точка зрения, согласно которой В.П. Ермаков "передал" журнал Э.К. Шпачинскому, прочно укоренилась еще до революции и затем неизменно воспроизводилась во всех работах по истории математики и математического образования.

Ни на одно из них Шпачинский не получил ответа и в конце февраля 1887 г. обратился в МНП с повторными просьбами. На этот раз экземпляры журналов были препровождены в Ученый комитет на рецензию **Оресту Даниловичу Хвольсону** (1852-1934), который отозвался о представленных выпусках крайне положительно и предложил удовлетворить ходатайство редактора о назначении ежегодной денежной субсидии [5, л. 26- 27].

В мае Э.К. Шпачинский получил ответ: издание его было рекомендовано “для приобретения в фундаментальные и ученические библиотеки мужских гимназий, прогимназий и реальных училищ, а также для библиотек учительских институтов и семинарий, женских гимназий и городских училищ”. В денежной субсидии отказано, однако “в случае если будут свободные суммы, то в конце текущего года Министерство окажет Вам единовременное пособие на издание названного журнала” [5, л. 28].

В августе 1887 г. Шпачинский отправил в МНП новое ходатайство с просьбой о помощи. В нем он выразил благодарность за внимание, которого удостоился его труд, “направленный к развитию бескорыстной любви к науке в среде обучающегося юношества и к систематическому поднятию уровня физико-математических знаний вообще” [5, л. 31] и сообщил, что продолжает издавать журнал фактически на свои средства (подписка не окупала издание); что дефицит составляет уже более 700 руб.; что журнал востребован и может быть полезен делу народного образования. Это ходатайство было направлено Хвольсону, который высказался за безусловную необходимость сохранения издания и обратил внимание на то, что “Э.К. Шпачинский не имеет своих средств, живет уроками и, вследствие дефицита, сильно задолжал. Продолжать издание, без поддержки, он не в состоянии” [5, л. 33]. В результате в конце января 1888 г. редактору было выдано 145 руб. 43 коп. Чуть позже ему было выдано еще 250 руб.

Удивительно в связи с размером выданной суммы письмо Шпачинского, направленное им попечителю Киевского учебного округа, через которого он получал суммы из МНП. Процитируем часть его письма [5, л. 39-39 об.].

Ваше Превосходительство!

На днях я получил 250 рублей, в дополнение к ранее выданным мне 150 р. единовременного пособия, назначенного Вашим Превосходительством с разрешения Его Высокопревосходительства Г. Министра Народного Просвещения для поддержки редактируемого и издаваемого мною в г. Киеве популярно-научного журнала. Это придает мне смелости обратиться к Вашему Превосходительству лично с просьбою позволить мне засвидетельствовать этим письмом искреннюю благодарность и почтительную признательность за содействие и сочувственное отношение к моему и многочисленных моих сотрудников посильному коллективному труду; без такой нравственной поддержки редакция наша могла бы потерять веру в целесообразность этого труда и правильность тех убеждений и соображений, которые заставили ее придать журналу серьезно-научное направление в ущерб его популярности и распространению в обществе. Не размер выданной в конце второго года существования журнала субсидии (так как ею не покрывается даже половина тех расходов, которые я несу ежегодно на бесплатную рассылку №№моего “Вестника” различным Обществам, библиотекам и всем сотрудникам), но самый факт ее выдачи имеет существенное для нас значение, представляя для будущности нашего издания самую надежную точку опоры в признании за его редакцией солидарности с теми, кто призван руководить делом народного образования в России.

Мы не станем дальше подробно рассказывать о тех многочисленных ходатайствах на имя министра народного просвещения, которые Э.К. Шпачинский отправлял в течение последующих лет и которые нередко оставались без ответа. Содержание их одинаково: редактор напоминает, что уже обращался с просьбой о помощи журналу; указывает, что такой научно-популярный журнал не может себя окупать, если хочет сохранить достойный уровень; что развитие физико-математического образования есть дело государственное; что развитие это необходимо, а журнал востребован, и прекращать его никак нельзя; что редактор не имеет больше возможности издавать журнал на свои средства, и т.д.

К 1890 г. Шпачинский, по всей видимости, понял, что постоянной материальной помощи журналу от МНП не будет, и решил устроиться преподавателем в какое-нибудь среднее учебное заведение Киева или Одессы. В обоих городах все вакансии были заняты (о чем чиновники не сочли нужным его уведомить), и Шпачинский почти полтора года ждал решения своей судьбы и одновременно судьбы “Вестника опытной физики и элементарной математики”. В середине 1891 г. попечитель Одесского учебного округа предложил ему должность помощника столоначальника своей канцелярии. Ученый по духу и государственный деятель по типу мышления, Шпачинский неохотно согласился на эту унизительную для него должность. Тем более, что она была связана с переездом из Киева в Одессу, а это влекло за собой удаление от родного ему центра науки и просвещения – Университета Св. Владимира и Физико-математического общества при этом университете, инициатором создания которого он был. Но, находясь в безвыходном положении, Э.К. Шпачинский согласился, полагая, что вскоре должность преподавателя для него найдется. Таковая нашлась только в 1895 г., и он стал преподавателем математики и физики в Одесском реальном училище.

Одесский период “Вестника”.

Рутинная работа в канцелярии попечителя, удаленность от Киева и по-прежнему нестабильное материальное положение “Вестника опытной физики и элементарной математики” привели к тому, что немолодой уже редактор начал уставать. Однако в отличие от В.П. Ермакова он не был намерен прекращать свое издание, а решил найти помощника, которому со временем смог бы передать журнал. Таким помощником стал студент Новороссийского университета **Владимир Александрович Гернет** (1870-1929).

Процитируем строки из юбилейной статьи, посвященной 25-летию "Вестника": "Будучи химиком по образованию, В.А. Гернет взял на себя издание журнала только после того, как кружок Одесских университетских математиков твердо обещал ему свое содействие. Обязанности редактора взял на себя проф. В.А. Циммерман, но сделал это лишь в качестве официального представителя совместной работы. Фактически только тогда совершился переход журнала от киевской группы математиков к одесской. Под председательством нового редактора состоялось совещание, в котором было выработано заявление новой редакции. В этом совещании приняли участие следующие лица: Е.Л. Буницкий, В.А. Гернет, проф. И.М. Занчевский, прив.-доц. В.Ф. Каган, проф. И.В. Слешинский, прив.-доц. И.Ю. Тимченко и С.О. Шатуновский. Этот круг почти весь и остался фактически вдохновителем одесского физико-математического журнала; впоследствии к нему присоединились ученики этих лиц, посвятившие себя научной работе" [3, с. 270].

С 1902 г. **Вениамин Федорович Каган** (1869-1953) стал вторым редактором журнала, а с 1904 г. и единственным. Под его руководством и при участии перечисленных выше одесских математиков "Вестник", оставаясь структурно практически прежним, претерпел некоторые изменения содержательного характера. Новая редакция ориентировалась в основном на преподавателей средних учебных заведений, что определяло и уровень статей и отчасти их содержание (так, стало больше статей, посвященных современной науке, – например, основаниям геометрии). Некоторое влияние на журнал оказало так называемое международное движение за реформу преподавания математики (попытки внедрения в школьный курс математики идей современной науки математики).

В остальном журнал не изменился. Каждый выпуск включал 2-3 популярных статьи о современных достижениях науки и техники, задачи для учеников и учителей, решения задач. На страницах журнала печатались юбилейные статьи и некрологи, научная хроника: объявления, отчеты о съездах и заседаниях ученых обществ. Редакция вела обширную переписку с читателями, часть которой находила отражение на его страницах.

* * *

Таким образом, в продолжительной истории журнала "Вестник опытной физики и элементарной математики" четко выделяются три периода в зависимости от того, кто издавал и редактировал журнал: В.П. Ермаков, Э.К. Шпачинский или В.Ф. Каган совместно с группой одесских математиков. Каждый период уникален и интересен по-своему. Что удалось редакциям разных периодов и чего они не смогли достичь? В.П. Ермаков сумел сформулировать концепцию научно-популярного журнала и начать его издание, но не нашел сил продолжать выполнение намеченной им программы. Э.К. Шпачинский смог не только достойно продолжить дело своего предшественника, но и значительно развить соображения В.П. Ермакова и претворить их в жизнь. Главное, что ему удалось, – упрочить положение журнала, сделать его чтение в кругу преподавателей насущной необходимостью и тем самым способствовать развитию физико-математического просвещения в России. Однако ему так и не удалось убедить чиновников Министерства народного просвещения в том, что его журнал и все физико-математическое образование есть дело в первую очередь государственное, а не только частных лиц. Одесская редакция смогла сохранить то, что было сделано Э.К. Шпачинским, и обогатить журнал сюжетами из области современной науки математики.

Неоконченная история.

После 1917 г. "Вестник опытной физики и элементарной математики" прекратил свое существование. В советское время журнал изредка упоминался в работах преимущественно исторического характера, ему была посвящена большая статья [2] и даже целая диссертация [6]. Однако широким кругам преподавателей и любителей математики "Вестник" был неизвестен, одной из причин чего была его недоступность (естественное уничтожение экземпляров в личных библиотеках, отсутствие в областных).

Сегодня, когда развиваются новые технологии, связанные в первую очередь с сетью Интернет, появилась возможность сделать выпуски журнала доступными для всех желающих. Мы глубоко убеждены, что современных условиях возрождение "Вестника опытной физики и элементарной математики" в электронной форме является делом чрезвычайно важным. Эта убежденность способствовала объединению усилий ряда лиц по организации в сети Интернет общедоступного архива, который создавался в течение 2009-2011 гг. и ныне доступен по адресу http://vofem.ru.

Выпуски журнала отсканированы в высоком разрешении, позволяющем читать и распечатывать их (а также при необходимости и распознавать). Воспроизведение оригинальных страниц в цвете позволяет максимально приблизить чтение электронных копий к чтению самого журнала (но удовольствия от чтения бумажного журнала это, конечно, не заменит). На сайте имеется возможность читать отдельные статьи выпусков, экспортировать выпуски и статьи в форматы pdf и djvu. Предусмотрены указатель заглавий статей и указатель авторов, воспроизведен рубрикатор журнала. Со временем будет создан тематический рубрикатор и реализован атрибутный поиск статей. Предполагается также издать в бумажном виде тематический указатель статей (с историческим очерком журнала, включая найденные документы).

Проект создается в стенах Математического института им. В.А. Стеклова РАН при участии Научной педагогической библиотеки им. К.Д. Ушинского РАО и поддержке Фонда Дмитрия Зимина "Династия".

Библиографический список

1. *Гушель, Р.З.* "Вестник опытной физики и элементарной математики" – один из предшественников журнала "Математика в школе" [Текст] / Р.З. Гушель // Труды Вторых Колмогоровских чтений. – Ярославль, 2004. – С. 119-127.
2. *Дахия, С.А.* "Журнал элементарной математики" и "Вестник опытной физики и элементарной математики" [Текст] / С.А. Дахия // Историко-математические исследования. – 1956. – Вып. 9. – С. 537-612.
3. К 25-летию "Вестника опытной физики и элементарной математики" [Текст] // Вестн. опытной физики и элементарной математики, 1913. – № 598-600. – С. 257-283.
4. От редакции [Текст] // Журнал элементарной математики, 1885. – Т. 1. – Вып. 1. – С. 4.
5. РГИА. Ф. 733. – Оп. 194. – Д. 611. – Относительно издаваемого Профессором В. Ермаковым "Журнала элементарной математики" [Текст].
6. *Охременко, Д.В.* Развитие математической культуры в России XIX века и роль "Журнала элементарной математики" и "Вестника опытной физики и элементарной математики" в усовершенствовании научно-педагогической культуры учителей математики XIX-XX вв. [Текст]: дис. ... канд. пед. наук. – М., 1973.
7. РГИА. Ф. 776. – Оп. 12. – Д. 16. – По изданию в г. Киеве журнала "Журнал элементарной математики" [Текст].
8. РГИА. Ф. 776. – Оп. 12. – Д. 27. – По ходатайству г. Шпачинского о разрешении ему издавать в г. Киеве журнал "Вестник опытной физики и элементарной математики" [Текст].
9. Э.К. Шпачинский (1848-1912) [Текст] // Вестн. опытной физики и элементарной математики. – 1912. – № 577. – С. 3-8.

Интернационализация математических журналов в конце XIX века: португальский журнал Франсишко Гомеша Тейшейры "Jornal de sciencias mathematicas e astronómicas"

В.И. Харламова, Х.Р. Малонек

В работе обсуждается появление европейских общенаучных журналов, создание математических журналов и журналов по конкретным разделам математики. Анализируется развитие математики в Португалии и история появления португальских научных сообществ и журналов, начиная со второй половины XVIII до начала XX века. На примере журнала *Jornal de sciencias mathematicas e astronómicas* (Журнал математических и астрономических наук), основанного в 1877 году португальским математиком Франсишко Гомешем Тейшейра (Francisco Gomes Teixeira), показана эволюция журнала от научно-информационного до интернационального научного журнала, публикующего математические работы. Показано, как *Jornal de sciencias mathematicas e astronómicas* помог формированию португальского математического сообщества и способствовал интернационализации связей португальских математиков с математиками передовых европейских стран.

Введение

Появление научных журналов, начавшееся в Европе во второй половине XVII века, явилось поворотным пунктом в истории науки. Наступала эпоха Просвещения – одна из ключевых эпох в истории европейской культуры, связанная с развитием научной, философской и общественной мысли. Условия создания первых европейских журналов, в первую очередь, определялись формированием в XVII веке определенной интеллектуальной среды. Это было зарождение интернационального сообщества интеллектуалов, свободных от теологических ограничений, объединенных задачей поиска истины. Потребность в создании устойчивой системы научного общения повлекла за собой усиление научных связей, которые послужили основой почти одновременного создания, как научных журналов, так и некоторых научных обществ.

Особенностью первых журналов была научно-информационная ориентация. Публикация результатов исследований первоначально облекалась в традиционную форму писем. В течение полутора веков, начиная со второй половины XVII века, в научных журналах печатались, главным образом, сведения компилятивного характера, публикации содержали пересказ книг и журналов и выдержки из них, а также хроникальные сообщения. Сплав оригинального и компилятивного был естественным явлением. Лишь в XIX веке научные журналы из средства распространения сведений стали превращаться в инструмент сбора, хранения и распространения научных знаний. Во второй половине XIX века журнальная статья приобрела современную форму. Функции научного журнала уже не ограничиваются распространением информации: публикация оригинальной статьи обеспечивает сохранение интеллектуальной собственности авторов.

Примером перехода от научно-информационной ориентации к современной форме публикаций может служить эволюция португальского математического журнала *Jornal de sciencias mathematicas e astronómicas* (Журнал математических и астрономических наук) созданного Гомешем Тейшейра (Francisco Gomes Teixeira, 1851-1933) в последней четверти XIX века[1]. Мы постараемся показать, как журнал способствовал формированию

[1]Первый Португальский математический журнал *Jornal de sciencias mathematicas e astronymicas* (1877-1902), известный также как *Teixeira Jornal.*

португальского математического сообщества и интернационализации связей португальских математиков с математиками передовых европейских стран.

Первые общенаучные журналы

Математические статьи впервые стали печататься в общих журналах. Интерес представляют: *Journal des savants*, в котором публиковались работы братьев Бернулли (Bernoulli) по исчислению бесконечно малых; *Philosophical Transactions of the Royal Society*, бессмертные открытия Ньютона (Isaac Newton) скоро придали журналу известность и выдвинули на первый план занятия математикой; *Acta eruditorum*, здесь напечатаны многочисленные работы Лейбница (Gottfried Wilhelm von Leibniz) по дифференциальному и интегральному исчислению, изложение содержания “Математических начал натуральной философии” Ньютона, а также статьи Лопиталя (Guillaume François Antoine, marquis de L’Hôpital), братьев Бернулли и других виднейших математиков.

Первый европейский общенаучный журнал *Journal des Savants* (Журнал ученых) появился во Франции 5 января 1665 года по инициативе Жана-Батиста Кольбера[1] (Jean-Baptiste Colbert). Журнал печатается с разной периодичностью с 1665 года до наших дней с перерывом от 1792 до 1816 года.

С опозданием на два месяца 6 марта 1665 года в Англии появился журнал *Philosophical Transactions of the Royal Society* (Философские труды Королевского общества) под редакцией Генри Ольденбурга (Genri Oldenburg). Ольденбург ввел в обиход практику предварительного рецензирования присылаемых рукописей независимыми экспертами. Журнал выходил ежемесячно без перерывов.

В 1682 году Отто Менке (Mencke) предпринял в Лейпциге издание журнала *Acta Eruditorium* (Ученые записки) на латинском языке. В его издании деятельное участие принял Лейбниц. Благодаря статьям Лейбница журнал приобрел огромное значение для математики. Журнал *Acta Eruditorium* просуществовал до 1731 года.

В России первым научным журналом был издаваемый Петербургской Академией наук[2] журнал на латинском языке *Commentarii Academiae scientiarum Imperialis Petropolitanae* (1726-1751). После 1751 года *Commentarii...* под разными названиями публиковались до 1806 года. В изданиях Петербургской АН были помещены 43 работы Д. Бернулли, 473 работы Л. Эйлера (печатались до 1830), а также работы знаменитых русских математиков (М.В. Остроградского 60 работ, В.Я. Буняковского 103 работы, П.Л. Чебышева 50 работ, Е.И. Золотарева 6 работ, А.А. Маркова 51 работа, А.М. Ляпунова 20 работ, В.А. Стеклова 47 работ).

Издания университетов и научных обществ в России отводят значительное место математическим публикациям: *Казанский вестник* (1821-1833) и его продолжение *Ученые записки Казанского университета* (с 1834), в которых впервые опубликованы важнейшие сочинения Н.И. Лобачевского, *Известия Физико-математического общества при Казанском университете* (с 1891), *Ученые записки Императорского Московского университета* (1833-1836), *Ученые записки Московского университета. Отдел физико-математический* (1880-1916), *Ученые записки Московского университета* (с 1933).

Математические журналы

В 1799-1804 годах в Лондоне выпускался математический журнал *The Mathematical Repository* (Математический сборник), в 1806-1833 годах печаталось его продолжение - *New Series of the Mathematical Repository* (новые выпуски Математического сборника) под редакцией Лейбурна (Thomas Leybourn).

В 1810 французский математик Жергонне (Joseph Diaz Gergonne) основал журнал *Annales de mathématiques pures et appliqués*, на который обычно ссылаются, как на журнал Жергонна (*Annales de Gergonne*), журнал выходил до 1831 года.

В 1826 году в Германии математик Крелле (August Leopold Crelle) начинает издавать *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, который до 1855 был известен под именем *Crelles Journal* (журнал Крелле). Уже в первом томе *Crelles Journal* выходят семь статей Абеля (Niels Henrik Abel). С 1836 года во Франции Лиувилль (Joseph Liouville) создает *Journal de mathématiques pures et appliquées* (Журнал чистой и прикладной математики). Лиувилль первым прочитал неопубликованные работы Галуа (Évariste Galois) и осознал их важность, они были опубликованы в журнале в 1846 году. Оба этих журнала существуют и в наши дни. В Англии начинают выходить *The Cambridge (and Dublin) Mathematical Journal* (1839-1854) и журнал *The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics* (1857-1927), основанный известным английским математиком Д. Сильвестером[3] (James Joseph Sylvester). В Италии Б. Тортолини (Barnaba Tortolini) выпускает журнал *Annali di Scienze Matematiche e Fisiche* (1850-1857), который с 1858 года называется *Annali di Matematica Pura e Applicata* и выходит до сих пор.

В Европе и Америке продолжают появляться новые математические журналы: во Франции – *Annales scientifiques de l’Ecole normale supérieure* (с 1864), основан Луи Пастером (Louis Pasteur), в Германии – *Mathematische Annalen* (с 1869), в Португалии – *Jornal de sciencias mathematicas e astronómicas* (1877-1902), в США – *American Journal of Mathematics* (с 1878) и *Annals of mathematics* (с 1884).

[1] По предложению Жан-Батиста Кольбера *Academie des sciences* (Академия наук) была основана в 1666 году Людовиком XIV.

[2] Академия наук основана в 1724 году указом императора Петра I.

[3] Д. Силвестер основал в 1878 году *American Journal of Mathematics,* выходящий до нашего времени.

Во второй половине XIX века образуется ряд математических обществ, издающих математические журналы, выходящие и в настоящее время: *Proceedings of the London Mathematical Society* (с 1865), *Математический сборник* (с 1866)[1], *Bulletin de la Société mathématique de France* (с 1872), *Acta mathematica* (Uppsala-Stockh., с 1882), *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society* (с 1883), *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo* (с 1884), *Bulletin of the American Mathematical Society* (с 1891).

Журналы по конкретным разделам математики возникли уже в XIX веке, первыми отдельными направлениями стали статистика и история математики [1]. Один из старейших журналов – *Journal of the Statistical Society of London* (1838 - 1886), с 1887 по 1947 годы выходил как *Journal of the Royal Statistical Society*[2]. Позже, в США начал публиковаться Journal of the American Statistical Association (с 1888). В Англии выходит журнал по теоретическим вопросам статистики *Biometrika* (с 1901). Журнал научно-исторического содержания выпускается в Италии Балдассаром Бонкомпагни (prince Baldassarre Boncompagni Ludovisi) *Bulletino di Bibliografia e di Storia delle Scienze Mathematiche e Fisiche* (1868-1887). В Германии выходит журнал исторических очерков о математике *Abhandlungen für Geschichte der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwedungen* (1877-1913), а в Швеции – историко-математический журнал *Bibliotheca Mathematica* (1884-1914) издававшийся Энестром (Gustaf Eneström).

Общенаучные журналы в Португалии

В Португалии в 1720 году в Лиссабоне была создана *Academia Real da História Portuguesa* (Королевская Академия португальской истории) просуществовавшая до 1776 года[3]. Академия выпустила 15 томов журнала *Memórias* (Избранное) с работами на исторические темы. Журнал *Memórias* Королевской Академии португальской истории стал первым научным периодическим изданием в Португалии.

Королевская Академия португальской истории стала предтечей учреждения в 1779 году *Academia Real das Ciências de Lisboa* (Королевская Академия наук Лиссабона), которая существует по сей день[4]. Первые публикации по математике появились в первом выпуске за 1780-1788 годы журнала *Memórias* da *Academia Real das Ciências de Lisboa,* опубликованном в 1797 году. К концу XIX века португальская Академия наук опубликовала 38 томов *Memórias*, посвященных математике, физике и естественным наукам [2]. Позже, в 1866 году, под эгидой Академии был создан журнал *Jornal de Sciencias Mathematicas, Physicas e Naturaes*, выходивший регулярно до 1927 года. Основной ориентацией журнала была история естествознания.

Все издания *Memórias* и выпуски *Jornal de Sciencias* выходили с большой задержкой (на несколько лет), что приводило к регулярным проблемам по утрате авторских прав. Научная изолированность Португалии была еще одной причиной потери научного приоритета португальскими математиками, печатавшимися на португальском языке.

В 1852 году в Португалии в Университете Куимбры была основана Академия науки, литературы и искусства – *Instituto de Coimbra*, продолжавшая свое существование до 1982 года. В 1853 году был создан журнал *O Instituto: Revista científica e literária* который выходил до 1981 года, за это время был издан 141 том. Журнал *O Instituto: Revista científica e literária* не был математическим журналом, хотя иногда публиковал статьи преподавателей математики университета, в основном, дидактического характера [3].

Появление первого португальского математического журнала

Современные авторы отмечают [4], что, хотя математические исследования в Португалии на протяжении XVIII-XIX веков были достаточно скромными, даже немногие работы того времени и те оставались неизвестны международному научному сообществу. Причинами этого положения были: 1) публикации только на португальском языке, 2) традиционная изоляция страны, и 3) периферийное положение португальских Университетов и Академии наук [5].

В 1877 году появился первый португальский математический журнал *Jornal de sciencias mathematicas e astronómicas* (Журнал математических и астрономических наук) созданный Франсишко Гомешем Тейшейра (Francisco Gomes Teixeira), впоследствии известный также как *Teixeira Jornal.* Задачи журнала были декларированы в начале первого тома: преодоление математической изоляции Португалии и налаживание прямых контактов с математиками других стран. Журнал печатался за государственный счет [6]. Журнал издавался с разной периодичностью до 1902 года, за это время было опубликовано 15 томов, каждый из которых состоял из нескольких отдельных выпусков. Среди публикаций журнала можно встретить статьи, написанные по-французски, по-итальянски и, конечно, по-португальски. Надо сразу признать, что появление "журнала Тейшейра" дало положительный результат, слабое и разрозненное математическое сообщество Португалии откликнулось на выход журнала новыми публикациями. В последней четверти XIX века, после появления журнала Тейшейра, началась заметная активизация деятельности португальских математиков. Интересен и состав португальских авторов присылавших свои работы. Кроме университетских профессоров математики,

[1] В 1864 году было создано *Московское математическое общество*, с 1866 года выпускающее журнал *Математический сборник.*

[2] *Royal Statistical Society* существует в Великобритании с 1836 года.

[3] В 1936 году была восстановлена под названием *Academia Portuguesa da Histyria.*

[4] С 1910 года, после падения монархии в Португалии, академия стала называться *Academia das Ciкncias de Lisboa* (Лиссабонская Академия наук).

авторами статей и комментариев были школьные учителя, преподаватели политехнических институтов, военные инженеры и преподаватели военных школ.

В журнале кроме самого Гомеша Тейшейра, публиковались португальские математики: Понте Орта (F. da Ponte Horta), Мартинш да Силва (J.A. Martins da Silva), Перейра да Силва (D.L. Pereira da Silva), Бруно Кабедо (J. Bruno de Cabedo), Рудольфо Гимараиш (R. Guimarães).

Многочисленные контакты Гомеша Тейшейра, его переписка с известными математиками и признание его работ позволили привлечь к участию в журнале математиков из многих европейских стран. Участие иностранных математиков в журнале Тейшейра с годами увеличивалось. В первых выпусках журнала появляются публикации Эрмита и Беллавитиса. Затем круг расширяется, в каждом томе журнала появляются новые имена, а некоторые математики публикуются по несколько раз в год. В журнале Тейшейра печатались Эрмит (Ch. Hermite), Валле Пуссен (Ch. De la Vellee Poussin), Беллавитис (G. Bellavitis), Лерх (M. Lerch), Чезаро (E. Cesaro), Виванти (G. Vivanti), Биргер Ханстед (M. Birger Hansted), Докагне (M. Maurice d'Ocagne), Лориа (G. Loria), Лепайж (C. le Paige), Гуцмер (A. Gutzmer), Пирондини (G. Pirondini), Вейер (M. Ed. Weyr), Бассани (M.A. Bassani), Пламеневский (H. Plamenewsky), Пинчерли (S. Pincherle), Лепон (M.H. Le Pont), Марколонго (R. Marcolongo), Дуран Лорига (J.J. Durán Loriga), Бессо (D. Besso), Лемоин (E. Lemoine), Шоут (M.P.H. Schoute), Новарезе (H. Novarese), Сибирани (F. Sibirani).

Этот список авторов, состоявших в переписке с Гомешем Тейшейра, и публиковавших свои работы в его журнале, является лучшим признаком интернационализации журнала. Иностранцы охотно печатались в португальском журнале, а математики в Португалии знакомились с новейшими математическими течениями того времени. Постепенно содержание журнала изменялось. Журнал из научно-информационного превратился в научный журнал, публикующий оригинальные статьи и текущую математическую библиографию.

Кроме научных статей и заметок, в первых выпусках *Jornal de sciencias mathematicas e astronómicas* был представлен раздел математики уровня средней школы. Но этот эксперимент оказался неудачным, и в следующих выпусках журнала печатались только статьи, заметки и комментарии.

В первых томах журнала помещались математические задачи для читателей, а наиболее удачные из присланных решений печатались в последующих выпусках. Решения задач, как правило, присылались португальскими математиками, но некоторые решения тех же задач, короткие и очень изящные, были предложены Эрмитом и Беллавитисом.

Начиная со второго тома, в журнале появляется библиографический раздел, включающий всемирную математическую периодику и книги.

Начиная с 1877 года, Гомеш Тейшейра регулярно посылал библиографию работ португальских математиков в реферативный журнал *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* а с 1894 года в журнал *Le repertoire bibliographique des sciences mathématiques*.

Если подвести итог, то можно утверждать, что задачи журнала *Jornal de sciencias mathematicas e astronómicas* были весьма успешно решены. Были налажены контакты и научная переписка с известными математиками других европейских стран, что приблизило математиков в Португалии к более тесному сотрудничеству с коллегами из других стран. Однако явно видны и трудности. Математическое сообщество Португалии и международное математическое сообщество имели контакты с Гомешем Тейшейра, но не между собой. Все замыкалось на одного человека, без которого стороны не могли бы взаимодействовать. Эти недостатки были частично исправлены после закрытия журнала Тейшейра в 1902 году. В 1905 году Гомеш Тейшейра открывает новый журнал *Annaes Scientificos da Academia Polytechnica do Porto*[1]. Для математиков журнал *Annaes* должен был стать заменой старого *Jornal de sciencias mathematicas e astronómicas*. После 1927 года журнал выходит под новым названием *Anais da Faculdade de Sciências do Port*. В журнале с самого начала большинство статей принадлежит португальским и иностранным математикам. Появляются новые португальские математики: Висент Гонсалвеш (J. Vicente Gonçalves), Альмейда Кошта (A. Almeida Costa), Антонио Монтейро (António Monteiro). Среди уже упомянутых авторов "журнала Тейшейра" в журнале *Annaes* публикуются Аппель (P. Appell), Ландау (E. Landau), Леви-Чивита (M.T. Levi-Civita). Даже после кончины Гомеша Тейшейра в 1933 году журнал и в следующее десятилетие остается основным португальским журналом публикующим, новые математические исследования.

Библиографический список

1. *Neuenschwander, E.* Mathematical journals, Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences (Edited by I. Grattan-Guinness) Routledge, London-New York. – Vol. 2 (1994). – 1533-1539.
2. *Dias Agudo, F.R.* Contribuзго da Academia das Ciкncias de Lisboa para o Desenvolvimento da Ciкncia, "Histyria e Desenvolvimento da Ciкncia em Portugal". – Vol. 2, Acad. Ciкncias de Lisboa (1986). – P. 1301-1340.
3. *Carvalho e Silva, J.* A Faculdade de Matemбtica na Universidade de Coimbra (1772-1911), Pré-pub. Univ. Coimbra, 2000.

[1]Ф. Гомеш Тейшейра с 1879 до 1883 года – профессор Университета Куимбры, в 1883 году он перешел в Политехническую Академию Порто, а с 1911 до 1929 года являлся ректором только что открытого Университета Порто.

4. *Leitго, H.* The Practice of Mathematics in Portugal: Problems and Methods // The Practice of Mathematics in Portugal (The International Meeting, Уbidos, 2000), edited by Luнs Saraiva and Henrique Leitro, Imprensa da Universidade de Coimbra (2004). – P. 1-34.
5. *De Castro Freire, F.* Memoria Historica da Faculdade de Mathematica, Coimbra (1872). – P. 49-50.
6. *De Vilhena, H.* O Professor Doutor Francisco Gomes Teixeira, Lisboa (1936). – P. 119.

Справочник “Ученые вузов Одессы. Математики. Механики”: информационная база и методы поиска

И.Э. Рикун

В последние годы в обществе резко возрос интерес к историко-биографическим исследованиям. Многие библиотеки работают над биобиблиографическими указателями и справочниками, опубликовано значительное количество книг и статей, посвященных деятелям истории, науки, культуры. Взгляд на историю с точки зрения биографистики является весьма плодотворным.

Свой вклад в историко-биографические исследования вносит и Одесская национальная научная библиотека имени М. Горького (ОННБ), которая в 1993 г. начала большую и сложную работу – составление биобиблиографического справочника “Ученые вузов Одессы. Естественные науки”. Составители поставили перед собой задачу ознакомить читателей с разносторонней деятельностью ведущих ученых города, с их основными трудами. Это первая попытка собрать, систематизировать и обобщить сведения о педагогической, научной и общественной деятельности преподавателей высших учебных заведений Одессы за период с 1865 года (год основания Новороссийского университета) до настоящего времени. Справочник состоит из пяти частей: “Геологи. Географы”, “Математики. Механики”, “Химики”, “Физики. Астрономы” и “Биологи”. Собранный материал оказался настолько объемным, что каждую часть пришлось поделить хронологически на два выпуска: 1865-1945; 1946 – наши дни.

За минувшие годы увидели свет восемь справочников из десяти запланированных, в этом году закончена работа над вторым выпуском справочника “Математики. Механики”. В первый выпуск вошли биографии пятидесяти пяти ученых, девятнадцать из них написаны впервые. Из семидесяти двух биографий второго выпуска двадцать восемь составлены впервые, пятнадцать - значительно дополнены и уточнены. Новые сведения и уточнения содержатся почти во всех очерках двух выпусков.

Накопленный опыт обобщен в двух методических пособиях: “Создание биобиблиографических указателей и справочников: информационные ресурсы и методы поиска” и “Использование новых информационных технологий в библиотеке: поиск в Интернете”, ведь в процессе работы стало ясно, что библиографы должны освоить этот богатый источник информации.

Создание биобиблиографических пособий - это исследовательская работа. Она требует научного подхода на всех ее этапах – от составления списка персоналий, поиска информации, проверки найденного материала до написания биографической статьи.

Как создание энциклопедий требует, прежде всего, составления словника, т.е. отбора слов, терминов, имен, которым следует посвятить самостоятельные статьи, так и создание биобиблиографического словаря требует составления списка ученых, которым будут посвящены отдельные статьи. Список этот в процессе работы может дополняться именами ученых, чья деятельность соответствует выработанным критериям отбора персоналий. Например, в справочник “Ученые вузов Одессы” было решено включать тех, кто имел степень доктора наук или звание профессора. Но в отдельных случаях включались и ученые, которые внесли значительный вклад в соответствующую отрасль знаний, но по тем или иным причинам не получили докторской степени или профессорского звания.

Отбор персоналий носит краеведческий характер, в словник включаются ученые, чья жизнь и научная деятельность связаны с Одессой. Сюда входят и те, кто работал здесь всю жизнь либо большую ее часть, и те, которые проработали в Одессе лишь некоторое время, но не менее одного учебного года. Отбирались лишь те ученые, которые преподавали в высших учебных заведениях Одессы, поэтому вне рамок справочника осталась значительная группа ученых, работавших в научно-исследовательских институтах или других научных учреждениях. Главный критерий при отборе персоналий – их вклад в развитие науки и образования Одессы. Поэтому авторы старались отыскать и материалы об эмигрировавших и репрессированных ученых, чьи биографии в силу этого не изучались и не включались в другие справочные издания.

Особенно сложно установить принципы отбора ныне здравствующих деятелей науки и образования, в этом случае следует добиваться объективного подхода к оценке их вклада, особенно тщательно учитывать такие формальные признаки, как должность, звание, членство в академиях и научных обществах, лауреатство и награды.

Возможны два варианта распределения фактического материала: либо сначала даются основные факты биографии, а затем более подробная характеристика творческой деятельности, либо весь материал излагается в хронологической последовательности. В статьях о наиболее выдающихся деятелях целесообразнее принять первый вариант. Именно он был использован при написании статей о выдающихся математиках и механиках А.М. Ляпунове, В.Ф. Кагане, С.И. Шатуновском в справочнике “Математики. Механики” и о выдающихся физиках Л.И. Мандельштаме, Н.Д. Папалекси, Н.Д. Пильчикове, Н.А. Умове в справочнике "Физики. Астрономы". Но в этом же справочнике статьи о физике Н.И. Барбаумове и об астрономе Ф.А. Бабичеве построены по второму варианту.

Объем статьи в биографическом справочнике может варьироваться в зависимости от объема собранного материала. В наибольшей степени это касается биографий, написанных впервые. Здесь особенно важно ввести в научный оборот все найденные факты биографии ученого, подчеркнуть то новое, что он внес в развитие той или иной отрасли знаний.

Оценка научного вклада ученого – одна из наиболее сложных задач, стоящих перед автором биографической статьи. В решении этой задачи большую помощь оказывают научные редакторы и консультанты. Все биобиблиографические работы ОННБ созданы в творческом содружестве с ведущими учеными нашего города. Сотрудничество библиографа и ученого позволяет избежать в пособии фактологических ошибок, ошибок в научной терминологии, в оценке творческого наследия персоналий, их вклада в отечественную и мировую науку.

Невозможно в относительно короткой биографической статье воспроизвести конкретную историческую обстановку, а также конкретный период развития той или иной отрасли, однако совокупность биографий справочника дает такую возможность.

Основной и порой чрезвычайно сложной задачей является проверка фактов биографии. Особенно строгую проверку должны проходить воспоминания самого ученого и людей из его окружения. Могло случиться так, что автору изменила память, и объяснение факта при всем его правдоподобии оказывается неточным или вымышленным, так создается легенда, которая закрепляется в истории науки. Только строгая проверка факта, рассмотрение его во всей совокупности с другими позволяет установить правду истории. Иногда в пересмотре нуждаются и установившиеся оценки, мнения и взгляды.

Часто бывает сложно установить степень достоверности источников, поэтому проверять нужно и сведения, даваемые даже "самыми надежными" источниками, в том числе и энциклопедиями. К тому же биографические статьи, напечатанные в энциклопедиях и словарях, зачастую неполны, в них не упоминается период, интересующий биографа. Например, в биографии физика и геофизика Б.П. Вейнберга, напечатанной в 4-м томе 3-го издания БСЭ, не упоминается о его работе в Новороссийском университете, хотя одесский период в жизни ученого длился почти восемь лет. В биографии физика Г.Г. Де-Метца, которая помещена в 3-м томе 2-го издания Украинской Советской Энциклопедии, отсутствует упоминание о пяти годах его преподавания в Новороссийском университете.

Тщательной проверки требуют названия научных учреждений и учебных заведений. Часто даже самые солидные источники не учитывают исторических изменений в названиях. Так, в биографии математика В.Ф. Кагана, помещенной в справочнике А.Н. Боголюбова "Математики. Механики", утверждается, что в 1904-1923 гг. он работал в Новороссийском (Одесском) университете. При написании статьи не был учтен тот факт, что Новороссийский университет в 1920 г. был ликвидирован и вновь открыт, уже под названием Одесский, в 1933 году.

Большого внимания требуют библиографические списки к статьям. Они состоят из работ ученого и материалов о нем. В статьях об известных персоналиях, которым посвящено значительное количество публикаций, следует приводить основные работы и те, которые либо тематически связаны с краем (в нашем случае с Одессой), либо созданы здесь.

Чем менее известен ученый, тем больше тщательности требуется при составлении его библиографии. В случае, когда биография публикуется впервые, целесообразно привести все найденные работы ученого.

Используемые при составлении библиографии списки, приведенные в различных источниках, должны быть проверены de visu. Например, при создании биобиблиографии М.Г. Крейна за основу были приняты списки литературы к юбилейным статьям к пятидесяти-, шестидесяти-, семидесяти- и восьмидесятилетию ученого, напечатанные в журнале "Успехи математических наук". Но они оказались не только неполными, но и содержали значительное количество ошибок в годах, номерах, страницах и даже названиях публикаций, что потребовало дополнительного поиска и доработки.

Обязательным компонентом справочного пособия является иллюстративный материал. Портреты, сопровождающие статьи, следует размещать однотипно, в одном месте относительно текстового массива, чаще всего в начале статьи. Нежелательно помещать портреты на вкладышах, но иногда это приходится делать по техническим причинам.

Тщательное изучение материалов об ученом, использование сведений, найденных в традиционных источниках, архивах и Интернете, часто позволяет автору ввести в научный оборот неизвестные ранее факты, вернуть истории науки имена заслуживающих этого ученых.

Начинать поиск сведений о персоналиях рациональнее всего с библиотечных каталогов (алфавитного и систематического) и картотек.

В некоторых библиотеках имеются предметные каталоги, построенные в алфавите предметных рубрик. В предметном каталоге ОННБ есть отдельный раздел, где собираются издания, посвященные персоналиям. Если интересующей фамилии ученого в этом разделе нет, следует искать его учителей, учеников, ученых из его окружения, сотрудников тех научных и учебных учреждений, в которых он работал.

Алфавитный каталог рациональнее всего использовать при поиске трудов ученого, а также изданий, ему посвященных.

Кроме каталогов библиотеки имеют различные картотеки. Систематические картотеки журнальных статей (СКС) – ценный источник разыскания публикаций об ученых. Важным является то обстоятельство, что материалы по истории той или иной отрасли знаний, а также о персоналиях не изымаются из картотек каждые пять лет как материалы, содержащиеся в других разделах, а сохраняются бессрочно. Чем старше библиотека, тем старше ее СКС и тем более глубокий ретроспективный поиск персоналий можно осуществить.

ОННБ является обладательницей уникального сводного каталога краеведческой литературы “Одессика”, который включает материалы из книг, статьи из периодических и продолжающихся изданий. Он создан в начале 1920-х годов и состоит из трех основных частей: систематической (161 ящик), топографической (36 ящиков) и персоналий (18 ящиков). В разделе “Персоналии” содержится около 30 000 карточек с информацией о людях, которые внесли свой вклад в историю нашего региона, в том числе и в историю науки.

Авторитетными источниками информации о большинстве опубликованных книг и статей являются издания государственной (национальной) библиографии.

На протяжении многих лет основным источником информации о литературе в области математики, механики, физики, астрономии были реферативные журналы системы изданий ВИНИТИ. Они продолжают издаваться, но, к сожалению, не все библиотеки Украины имеют возможность их покупать. Электронные версии РЖ представляют собой аналог печатной версии и распространяются как отдельный информационный продукт.

Результативный биографический поиск невозможен без глубоких знаний в области библиографического источниковедения и библиографии библиографии.

В числе наиболее полезных источников при биографическом поиске – биографические и biобиблиографические словари ученых, в которых перечням публикаций ученых и спискам литературы о них уделяется значительное место. Еще более подробные данные о трудах отдельных ученых можно найти в посвященных им персональных библиографических указателях. В такие указатели включаются и перечни литературы об ученом. В 1957 г. в ОННБ была основана серия “Ученые Одессы”, посвященная ученым-естественникам, чья педагогическая и научная деятельность связана с Одессой. Каждое пособие включает биографическую справку либо биографический очерк, список трудов ученого, литературу о нем, основные даты жизни и деятельности, вспомогательные указатели. Всего серия насчитывает 45 указателей.

Первыми печатными источниками, к которым следует обратиться в начале работы над биобиблиографическим пособием, являются энциклопедии, словари, справочники. Могут быть полезны справочные издания универсальные и отраслевые, отечественные общие и региональные, зарубежные, современные и старые, относящиеся к данной стране. В каждом новом издании энциклопедии приходится отказываться от ряда статей, посвященных известным когда-то лицам. Так, в Большой Советской Энциклопедии отсутствуют статьи о многих ученых, сведения о которых есть в дореволюционных энциклопедиях. Например, при работе над справочником “Ученые вузов Одессы” статья о математике В.П. Алексееве найдена в словаре С.А. Венгерова, о математике М.А. Андреевском – в Русском биографическом словаре, о математике А.В. Бесселе – в Энциклопедическом словаре Ф.А. Брокгауза и И.А. Ефрона. Следует просматривать также все три издания БСЭ. Так, статья об астрономе И.А. Дюкове содержится во втором издании БСЭ, но отсутствует в третьем.

Невозможно обойтись без изданий по истории физико-математических наук, в частности, по истории Академий наук, научных и учебных заведений, научных обществ, научных съездов.

При поиске очень важно знание научных издательств и научных серий, а также периодики. Юбилейные статьи и некрологи чаще всего можно найти в “Известиях” и “Вестниках” академий наук (но не в “Докладах”), в таких обзорных журналах, как “Успехи математических наук”, “Успехи физических наук”, “Український математичний журнал”, “Український фізичний журнал”. Особого внимания заслуживают издания, посвященные истории науки, такие как “Вопросы истории естествознания и техники”, “История и методология естественных наук”, “Нариси з історії природознавства і техніки”, “Историко-математические исследования”, “Историко-астрономические исследования”, “Історико-математичний збірник”. Хорошие результаты можно получить, используя метод сплошного просмотра таких журналов. При сплошном просмотре велика вероятность найти статьи, посвященные не только конкретным персоналиям, но и тем отраслям науки, в развитие которых они внесли свой вклад, материалы об истории научных и учебных учреждений, в которых они работали, сведения о научном окружении, их учителях и учениках.

Если ученый был известным педагогом, внесшим свой вклад в историю среднего образования, то велика вероятность, что статья о нем могла быть помещена в педагогических журналах “Математика в школі”, “Фізика та астрономія в школі”, “Астрономия в школе”, “Математика в школе”, “Физика в школе”.

Сведения о датах жизни и смерти ученого, о круге его научных интересов подскажут, за какой период и по каким отраслям знаний следует просматривать журналы. Так, некролог механика Я.Б. Шора, который принимал активное участие в разработке научных основ стандартизации, был помещен в журнале “Стандарты и качество”.

Среди научно-популярных журналов статьи о персоналиях систематически печатают, например, “Природа”, “Земля и Вселенная”, “Наука и жизнь”, “Химия и жизнь”.

Знание порядка выхода номеров, системы нумерации, планировки материала, наличия отдельной пагинации разделов, сквозной пагинации номеров в пределах одного тома и т.д. позволяет найти выход в затруднительных ситуациях при поиске в периодических изданиях.

На современном этапе результативную работу в области биографистики обеспечат следующие виды поиска биографических данных: традиционные библиографический и документально-фактографический, поиск в архивах и поиск в Интернете.

Как и всякий исторический источник, архивные документы требуют к себе критического отношения. Прежде всего следует учитывать, что по тем или иным причинам автор документа мог тенденциозно, неточно или неполно осветить известные ему факты. При работе над справочником "Ученые вузов Одессы" составители встречались со случаями, когда ученые в своих личных делах извращали некоторые факты своей биографии либо умалчивали о них. Изменение исторической обстановки может повлиять даже на указание места рождения. Так, в личном деле студента Новороссийского университета (1909-1913) А.С. Турчанинова есть свидетельство о том, что он родился в г. Тавастчус, Финляндия, а в анкетах личных дел профессора математики советских вузов А.С. Турчанинова местом рождения названа Подольская губерния. Очень внимательно следует относиться к написанию имен и отчеств. В силу либо исторических, либо личных причин они могут меняться в течение жизни ученого. Так, еврейские имена и отчества в советское время русифицировались, и выдающийся математик Бениамин Фалькович Каган стал Вениамином Федоровичем. Изменение имени могло произойти и в результате крещения. В студенческом деле будущего известного математика Зейлигера (1883-1887) указано его имя Самуил. По окончании университета он принял православие и получил имя Дмитрий. Различные изменения в именах, отчествах и даже фамилиях при создании биографии ученого указывать нужно обязательно.

Как мы видим, содержащиеся в архивных документах сведения фактического характера должны быть подвергнуты критическому анализу и осмыслению.

В последние годы библиографы стали все шире использовать Интернет. Большинство пособий по Интернету утверждает, что в сети есть все, надо только уметь искать. Это не совсем так. Специфическая информация, которую библиограф не смог найти ни в печатных источниках, ни в архивах, вполне может отсутствовать и в Интернете. Но успех все-таки возможен, ведь Интернет позволяет найти людей, которые обладают необходимой информацией.

У большинства активно работающих ученых есть собственный сайт в Интернете. Сложнее дело обстоит с умершими учеными (речь, конечно, не идет об очень известных – сведения о них есть в традиционных источниках). В этом случае действует правило: чем больше вы знаете о персоналии, тем быстрее найдете разыскиваемые сведения. Если вы нашли сайт ученого, с которым работал тот, кого вы ищете, или сайт учреждения, в котором он работал, успех гарантирован. Сведения о репрессированном математике Т.М. Василишине были найдены на сайте Уфимского авиационного института, где он работал после освобождения из заключения При поиске сведений о физике Марселе Шейне по совместным публикациям библиограф вышел на сайт его ученика, профессора Чикагского университета, а потом, узнав благодаря ему о сыне ученого, профессоре Массачусетского технологического института, вышел на его сайт. С помощью американского математика Дж. Ровняка удалось связаться с дочерью математика Ю.Г. Рабиновича (G.Y. Rainich). Присланные материалы помогли вернуть имя этого замечательного ученого отечественной науке.

Библиограф, накопивший огромный опыт традиционного поиска, выработавший интуицию, умеющий четко формулировать идею, разбивать ее на составные части, знающий об альтернативных вариантах, знающий многое о том, что он ищет, имеет все шансы стать первоклассным пользователем Интернета.

М.Б. Налбандян и история математики в Ростовском государственном (Южном федеральном) университете

Ю.С. Налбандян

2011 год – юбилейный для **Маргариты Бабкеновны Налбандян (1931-2004)**, известного историка математики, с именем которой связаны важные и интересные работы в области истории эллиптических функций. Однако ее научная и педагогическая деятельность не может рассматриваться вне истории Ростовского государственного университета.

1. Как было отмечено в [1], у истоков ростовской историко-математической школы стоял **Дмитрий Дмитриевич Мордухай-Болтовской (1878-1952).** Он на долгие годы определил тематику научных работ в этой области, воспитал у своих учеников интерес к классическим трактатам, подготовил и прокомментировал ряд математических трудов И. Ньютона и "Начала" Евклида. Кроме того, ученый "настойчиво пропагандировал включение истории математики в цикл обязательного материала для изучения в вузах" [2]. Именно благодаря ему курсы по истории науки стали с середины 20-х годов XX века регулярно читаться студентам физмата Ростовского университета. Более того, эти учебные дисциплины, хотя и с перерывами, регулярно присутствуют в учебных планах как физического факультета, так и факультета математики, механики и компьютерных наук современного ЮФУ (см. [1] и заключительную часть данной работы).

В послевоенные годы эстафету историко-математических исследований принял **Семен Ефимович Белозеров (1904-1987).** Выпускник физико-математического отделения педфака Саратовского университета, несколько лет посвятивший партийной работе, он возглавил Ростовский университет в 1938 году. Можно предположить, что его назначение обуславливалось необходимостью укрепить "идеологическую составляющую", ведь предыдущий ректор, математик Николай Андреевич Дернов, был расстрелян по 58-й статье. На данный момент неизвестно, какими научными исследованиями С.Е. Белозеров занимался в Саратове, однако в Ростове-на-Дону он сосредоточился именно на истории математики и в 1939 году под руководством М.Я. Выгодского в числе первых его аспирантов защитил кандидатскую диссертацию "Из истории теории функций комплексного переменного". Этой тематике он посвятил и вышедшую в 1962 году монографию [3]. Кроме того, С.Е. Белозеров заложил основы обстоятельного изучения истории университета [4]. Он всячески содействовал организации историко-математических научных исследований, об этом свидетельствует, например, хранящаяся в личном деле ученого выписка из приказа по Министерству Высшего образования № 153 от 13 декабря 1948 г. "О кафедрах Ростовского Госуниверситета имени В.М. Молотова". Оказывается, планировалось создание кафедры "истории физико-математических наук", которую С.Е. Белозеров должен был возглавить. По не известным на данный момент причинам это решение не было воплощено в жизнь. Тем не менее, ученый систематически читал спецкурс "История и современная теория знаменитых задач древности", постоянно руководил дипломниками и аспирантами, причем многие выбирали для своих исследований близкую ему тематику (например, **Валерий Маркович Кузнецов (1937-2010)** занимался изучением истории теории автоморфных функций).

2. В 1949 году студенткой физмата РГУ стала **Маргарита Бабкеновна Налбандян**. В 1954 году, успешно закончив отделение математики, она уехала по распределению в Джамбул (Казахстан), где в течение года работала учительницей школы № 3 МПС. Затем были Шахтинский пединститут (должность лаборанта и почасовая педагогическая нагрузка) и возвращение в Ростов. В 1958 году М.Б. Налбандян поступает в аспирантуру по истории математики к С.Е. Белозерову, становится его активной помощницей в подготовке материала к монографии [3] и начинает самостоятельные исследования. Первые ее публикации по истории эллиптических функций в России появляются в 1960 году. Как и последующие, они были основаны на многочасовой скрупулезной работе в архивах (Ленинградский государственный исторический архив, Ленинградское и Московское отделения Архива АН, Центральные государственные исторические архивы Ленинграда, УССР, ЭССР, ТатАССР, Москвы, Одессы, Центральный государственный военно-исторический архив Москвы, Архив МГУ).

Защита кандидатской диссертации "Теория эллиптических функций и ее приложения в работах русских математиков XIX века" состоялась в июне 1972 года в Москве, в Институте истории естествознания и техники. В списке литературы насчитывалось почти 400 позиций, а в качестве приложения к исследованию были опубликованы ценные архивные материалы (программы лекций А.В. Бесселя, Г.А. Тиме, Ю.В. Сохоцкого, Н.Н. Алексеева, Н.В. Бугаева, А.В. Васильева, В.П. Максимовича, М.Б. Ващенко-Захарченко, ряд отзывов и рецензий на работы по теории эллиптических функций, фрагменты писем Е.И. Золотарева, А.А. Маркова, Н.В. Бугаева). На основные из 14 опубликованных в период подготовки диссертации статей [5-7] по сей день ссылаются все исследователи, занимающиеся данной тематикой. Сделан был и ряд докладов – на IV Всесоюзном математическом съезде (1961), на Прибалтийской конференции по истории науки (1968), на различных межвузовских конференциях по истории физико-математических наук, на заседаниях годичной конференции Ленинградского отделения национального объединения историков науки, на семинарах по истории математики МГУ.

Часть найденных при подготовке диссертации документов была использована лишь частично или вообще оказалась отложенной "до лучших времен". Так, только в 1999 г. в трудах конференции в польских Крыницах появилась статья [8], посвященная трудам Ю.В. Сохоцкого по теории эллиптических функций и основанная на архивных материалах. Среди того, что хранятся в домашнем архиве и, вероятно, заслуживает публикации – перевод математической переписки между Лежандром и Якоби (Correspondance mathematice entie Legendre et Jacobi // Journal fur die reine und angewandte Mathematik, b.80, 1875; вступление Borchardt), фрагменты эпистолярного наследия В.А. Стеклова (переписка с итальянским математиком Т. Леви-Чивита, письма А. Гурвица из фонда 162 Санкт-Петербургского филиала архива РАН), документы, связанные с деятельностью И.П. Долбни. В папках с материалами о Е.И.Золотареве (из фонда 289 Санкт-Петербургского филиала архива РАН) особое место занимают тетради, присланные Еленой Петровной Ожиговой.

Надо сказать, что многолетняя дружба с Еленой Петровной началась именно в период работы М.Б. Налбандян над диссертацией. Е.П. Ожигова выступала в качестве оппонента, а впоследствии немало помогала и советами, и документами, и просто моральной поддержкой. Ее слова в отзыве о "многолетней и очень добросовестной работе" не были пустой формальностью и сыграли важную роль в тяжелые для Маргариты Бабкеновны 70-е годы (ей пришлось замещать заведующего кафедрой высшей математики и вести тяжелую борьбу за сохранение кафедры - увы, борьбу безрезультатную). Сам отзыв Елены Петровны был более чем скрупулезным, а один из его фрагментов точно характеризует и личность М.Б. Налбандян, и качество ее исследований по истории эллиптических функций: "Автор этой работы – человек постоянно недовольный собой и потому постоянно продолжающий поиски новых материалов, их систематизацию и изучение, выясняющий все новые и новые связи, новые и новые стороны своей любимой темы. В диссертации все сделано "своими руками" – собран новый интересный материал, расшифрованы тексты архивных документов, сделаны переводы документов и работ иностранных авторов (с немецкого, французского, английского, итальянского, латинского языков), осуществлен критический обзор многих источников, проведено сравнение различных методов и их результатов".

3. В 1971 году на XIII Международном Конгрессе по истории науки М.Б. Налбандян выступает с докладом "О некоторых неопубликованных работах Д.Д. Мордухай-Болтовского" [9]. Речь шла о статьях, хранящихся в фондах Санкт-Петербургского филиала архива РАН (в настоящее время имеется и список материалов, рукописи которых находятся в ростовских архивах). В последующие годы именно биография Дмитрия Дмитриевича, его работы, судьбы коллег и учеников стали темой исследований Маргариты Бабкеновны. В "Вопросах истории естествознания и техники" появляется статья [2], подготовленная совместно с учениками Мордухай-

Болтовского, публикуются тезисы докладов на различных конференциях, выходит из печати небольшая монография [10], посвященная истории механико-математического факультета и написанная в соавторстве с ведущими учеными мехмата. Времени на работу в архивах в других городах становится меньше, в том числе в связи с возросшей педагогической нагрузкой, и основное внимание переключается на изучение документов в фондах Государственного Архива Ростовской области. М.Б. Налбандян удается установить хронику событий, связанных с преобразованиями университета, проследить ситуацию с возникновением кафедр на физмате (весьма запутанную в связи с постоянными реорганизациями), обнаружить неизвестные публицистические статьи Д.Д. Мордухай-Болтовского.

В конце 80-х – начале 90-х годов XX века М.Б. Налбандян собрала (в архивах Ростова, Кирова и Воронежа) интересные материалы о трагической судьбе Николая Андреевича Дернова, упомянутого в начале этой статьи. Публикация в 1992 году результатов исследований, посвященных репрессированному ученому, талантливому математику, просветителю и деятелю высшего образования [11, 12], стала первой, восстанавливающей справедливость. Труды В.Б.Помелова [13-15] появились позже. Интересно, что на работу [11] ссылался А.Л. Пелих, автор диссертации "Политика Советского государства по организации и развитию научных исследований: 1917-1991 гг.", представленной в 2007 г. на соискание ученой степени доктора исторических наук[1].

Продолжается обработка собранных архивных документов. В 1992 году в НИИ высшего образования депонирована статья [16], посвященная научно педагогической деятельности И.Я. Депмана в Вятке в 1919-1923 годах. В ней использованы материалы из фонда Пединститута в Вятском областном архиве и особое внимание уделено становлению будущего видного историка математики и воспитателя педагогических кадров в Ленинградском пединституте (ныне РПГУ). В 1994-1995 гг. на основе документов, связанных с деятельностью общества естествоиспытателей, функционировавшего при университете, был сделан ряд докладов на конференциях в Санкт-Петербурге, а впоследствии появилось методическое пособие к курсу "История математики" [17]. М.Б. Налбандян принимает активное участие в организации заседаний Ростовского математического общества, посвященных памяти таких видных ученых как М.Г. Хапланов и К.К. Мокрищев, в работе Международных школ-семинаров по геометрии и анализу памяти Н.В. Ефимова. Часть использованных при этом документов публикуется (например, [18-20]), часть только демонстрируется.

В конце 90-х к М.Б. Налбандян обращаются за помощью в сборе информации о студенческих годах жизни лауреата Ленинской и Государственной премий СССР, директора НИИ-1 Министерства авиационной промышленности (ныне Исследовательский центр имени М.В. Келдыша Российского космического агентства) В.Я. Лихушина (1918-1922). Результатом становится статья [21].

Уже после 2004-го года на основе документов, хранящихся в домашнем архиве, была подготовлена статья [22] о М.Ф. Субботине. Однако значительная часть материалов, связанных как с организационной работой в РГУ (программы курсов, протоколы заседаний, документы о штатном расписании и т.д.), так и с биографиями учившихся и работавших в Ростове Н.М. Несторовича, Б.Я. Левина, В.П. Вельмина, А.Д. Гремяченского, Л.А. Лейферта, М.П. Черняева, И.Р. Брайцева и многих других по-прежнему остается неопубликованной.

4. Отдельного разговора заслуживают документы, связанные с судьбой Дмитрия Дмитриевича Мордухай-Болтовского (в частности, фотографии, учебные программы, письма к коллегам, в Ивановский пединститут, к сыну). Среди них, например, и материалы "Общественного пересмотра научных работников". Стартовала эта кампания после статьи возглавлявшего Главное управление профессионального образования А.Я. Вышинского в "Известиях" (3.01.1930). Будучи членом коллегии Наркомата просвещения РСФСР, он ратовал за "сближение профессорско-преподавательского состава с рабочей общественностью". Призыв начальства потребовал немедленного ответа, и 14.03.1930 г. в ростовской газете "Молот" появляется статья директора университета И.А. Невского: "Общественный пересмотр научных работников имеет целью повышение научной и педагогической подготовленности научных работников, а также замену антисоветски настроенных научных работников, использующих университетскую кафедру для антисоветской пропаганды". Начинается серия общих собраний "научных работников, студентов, рабочих и служащих педфака СКГУ" (протоколы были найдены М.Б. Налбандян в фондах Государственного архива Ростовской области). В мае 1930-го очередь доходит и до профессора Д.Д. Мордухай Болтовского (все цитаты далее приводятся в соответствии с протоколом № 7 от 22 мая 1930 г., ГАРО, фонд. Р-46, опись 1, № 404, лл. 94-96 и оборот).

Выступая с отчетом, ученый признается, что "поставлен в неловкое положение, так как говорить приходится о себе", однако находит достойный выход.

"Буду говорить то, за что меня можно и ругать, и хвалить... Если спросят, сколько у меня научных работ, я не скажу. Это большого значения не имеет, важно качество, характер работы. "Абелевы интегралы" - моя студенческая диссертация. Это работа очень большая, крупная монография, известная всем лицам, занимающимся этим отделом математики. Следующее – "Интегрирование в конечном виде" – вызвало не только сочувствие, но и продолжателей. Больше же всего – 16 лет – я работал над историей математики. Доказать несправедливое отношение к средневековью – была моя мечта. У меня душа философа, ум математика, ум жесткий, характеризующий мое направление... К преподаванию относился с чрезвычайным интересом и любовью. Я вполне справедливо обвинен в непопулярности изложения преподаваемого материала. Нет никакого

[1]http://www.dissercat.com/content/politika-sovetskogo-gosudarstva-po-organizatsii-i-razvitiyu-nauchnykh-issledovanii-1917-1991

сомнения, что ради создания цельного, методологически выдержанного курса, приходится жертвовать частью аудитории. Я был против введения новых методов преподавания в середине года[1]... Теперь я защитник того, чтобы к лекциям не возвращаться".

Обсуждая актуальную для той эпохи тему "выдвиженцев" (так называли рабочих, выдвинутых на ответственные посты или направленных на учебу), Мордухай-Болтовской демонстрирует при этом изрядное чувство юмора: "В настоящее время постоянно приходится видеть: "Кто не работает, тот не ест". Я скажу – я не очень жестокий – что пусть едят, но после того, как поедят работавшие".

В прениях ученому подбрасывали весьма коварные вопросы, и Дмитрию Дмитриевичу пришлось объяснять, что "быть только профессором мало, но быть и старшим товарищем едва ли могу", что "активного участия в революции не принимал, а чувствовал себя, как все остальные", что, "начиная с 1921 года, работал честно, не вредил – всякий же, честно работающий гражданин, уже участвует в социалистическом строительстве"... Он спокойно признавался, что его "философско-религиозные убеждения с марксизмом расходятся", что религией интересуется, но ни в церковной жизни, ни в антирелигиозной работе участия не принимает.

В протоколах можно найти выступления студентов, соглашающихся с тем, что перед ними крупный ученый, но недовольных его аполитичностью и отрицанием новых методов. "Он говорил: "инвалиды вы, не будет из вас толку". Действительно, будут инвалиды, если слушать схоластику, в область которой часто делает экскурсии Д.Д. Мордухай-Болтовской. Выдвиженцы приняты профессором не горячо" (студент III курса Борисов). Видимо, была инициатива отстранить ученого от преподавания, потому что третьекурсник Иоффе возражал "против ходатайства бюро научных работников отвести Дмитрия Дмитриевича от непосредственного преподавания на курсах".

Коллеги вели себя очень осторожно, отмечая методологическую строгость его курсов, заслуги в создании геометрического кабинета и в работе методического коллоквиума, но подчеркивая аполитичность и то, что "высококвалифицированный педагог используется нерационально" (М.П. Черняев).

В заключительном слове Д.Д. Мордухай-Болтовской горько иронизировал: "Ко мне часто обращались студенты с вопросами философского характера. Я отвечал, отвлекался от основной темы. Теперь я буду избегать... Нет сомнения, будут выработаны новые сокращенные программы, будет лучше".

В различных документах, связанных с "общественным пересмотром", в частности, в "Декларации группы научных работников педфака СКГУ" (подписанной многими преподавателями, в том числе переехавшими вместе с Дмитрием Дмитриевичем из Варшавы Д.Н. Горячевым и В.П. Вельминым), имя ученого неоднократно упоминалось в самом негативном аспекте - и как пример владеющих умами неприкрытой религиозности и мистических настроений, и как приверженца лозунга "наука вне политики, и как противника реформы высшей школы. Однако решение Комиссия по пересмотру научных работников принимает вполне благоприятное: "считать все же возможным оставить профессора Мордухай-Болтовского в занимаемой должности как крупного ученого-математика" (протокол № 4 заседания комиссии по пересмотру научных работников СКГУ, ГАРО, фонд Р-46, оп. 1, № 382, л. 14).

Остается заметить по поводу дискуссии о выдвиженцах, что талантливых студентов Д.Д. Мордухай-Болтовской всегда выделял независимо от их статуса. Среди документов, связанных с жизнью выдающегося специалиста по теории целых функций Б.Я. Левина, хранится отзыв профессора об этом "студенте-выдвиженце" (часть материалов была представлена М.Б. Налбандян для выступления Ю.Ф. Коробейника на семинаре в Харькове, посвященном 90-летию со дня рождения Б.Я. Левина, но не публиковалась).

5. Выше подчеркивалось, что у истоков преподавания истории математики в РГУ (ЮФУ) стоял Д.Д. Мордухай-Болтовской. Его дело продолжили готовивший к печати соответствующую монографию Н.А. Дернов и С.Е. Белозеров. Впоследствии курс незаметно выпал из учебной программы; в 80-е годы XX века лишь на некоторых кафедрах, например, на кафедре математического анализа, читались спецкурсы. В 90-е годы вводится факультативный курс "Математика в истории общества" (в рамках гуманитарного комплекса). Заслуга в восстановлении курса истории математики полностью принадлежит Маргарите Бабкеновне Налбандян. Она разрабатывала заново учебную программу, координировала работу библиотеки, подбирала тематику рефератов, учитывающую интересы кафедр, выступала с докладами на различных конференциях. В 2003-м о преподавании истории математики в новых условиях был сделан доклад и в Ярославле на традиционной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения А.Н. Колмогорова (из которой и выросли нынешние Колмогоровские чтения). В последние годы интерес к истории математики возрос, сейчас соответствующие курсы читаются магистрантам всех специальностей мехмата ("история математики", "история прикладной математики и информатики", "история вычислительной техники и информатики") и студентам, получающим дополнительное педагогическое образование. К сожалению, М.Б. Налбандян до этого времени не дожила...

Библиографический список

1. *Налбандян, Ю.С.* История математики в Ростовском университете [Текст] / Ю.С. Налбандян // Труды VIII Международных Колмогоровских чтений. – Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2010. – С. 507-517.

[1]Согласно бригадно-лабораторному методу, объединенные в бригады учащиеся должны самостоятельно работать по выданным преподавателем заданиям. Лекции не читаются, учитель только консультирует и принимает отчеты. Как отмечено в БСЭ, это отрицательно сказывалось на знаниях учащихся, порождало бессистемность и безответственность. Постановлением ЦК ВКП(б) от 25.08.1932 эту практику отменили.

2. *Налбандян, М.Б.* Д.Д.Мордухай-Болтовской (к 100-летию со дня рождения) [Текст] / М.Б. Налбандян, В.Л. Минковский, К.К. Мокрищев, М.Г. Хапланов // Вопросы истории естествознания и техники. – М.: Наука, 1977. – Вып. 3-4 (56-57). – С. 102-103.
3. *Белозеров, С.Е.* Основные этапы развития общей теории аналитических функций [Текст] / С.Е. Белозеров. – Ростов-на-Дону: ИРУ, 1962. – 312 с.
4. *Белозеров, С.Е.* Очерки истории Ростовского университета [Текст] / С.Е. Белозеров. – Ростов-на-Дону: ИРУ, 1959.
5. *Налбандян, М.Б.* Теория эллиптических функций и ее приложения в трудах Е.И. Золотарева [Текст] / М.Б. Налбандян // Историко-математические исследования. – М.: Наука, 1965. – Вып. 16. – С. 191-206.
6. *Налбандян, М.Б.* О некоторых проблемах интегрирования эллиптических дифференциалов в трудах русских математиков XIX века [Текст] / М.Б. Налбандян // История и методология естественных наук. – М.: Изд-во МГУ, 1966. – Вып. V. – С. 96-104.
7. *Налбандян, М.Б.* Теория эллиптических функций и ее приложения в трудах русских математиков XIX века [Текст] / М.Б. Налбандян // Историко-математические исследования. – М.: Наука, 1966. – Вып. 17. – С. 361-369.
8. *Налбандян, М.Б.* Эллиптические функции в работах профессора Ю.В. Сохоцкого [Текст] / М.Б. Налбандян // XXII Szkola Historii Matematyki. Krakow: Wydawnictwo Wydzialu Matematyki Stosowanie Akademii GorniczoHutnicze, 1999. – С. 162-168.
9. *Налбандян, М.Б.* О некоторых неопубликованных работах Д.Д. Мордухай-Болтовского [Текст] / М.Б. Налбандян // XIII Международный конгресс по истории науки. Материалы по истории физико-математических наук. – М.: Наука, 1971. – С. 33.
10. *Коробейник, Ю.Ф.* Механико-математический факультет Ростовского государственного университета (краткий исторический очерк) [Текст] / Ю.Ф. Коробейник, Я.М. Ерусалимский, М.Б. Налбандян, Н.Н. Рожанская. – Ростов-на-Дону: ИРУ, 1989.
11. *Налбандян, М.Б.* Н.А.Дернов (1891-1938) [Текст]: метод. указания к курсу "История математики" / М.Б. Налбандян, Ю.С. Налбандян. – Ростов-на-Дону: УПЛ РГУ, 1992. – 34 с. Электронная версия http://www.math.rsu.ru/mexmat/ma/nalb/PDF/dernov.pdf
12. *Налбандян, М.Б.* Н.А.Дернов (1891-1938). К 100-летию со дня рождения [Текст] / М.Б. Налбандян, Ю.С. Налбандян. – Деп. в НИИ высшего образования, 04.10.1991. – № 632-91. – 32 с.
13. *Помелов, В.Б.* Не плакать, не смеяться, но понимать! [Текст] / В.Б. Помелов // В кн. "Педагоги и психологи Вятского края". – Киров, 1993. – С. 15-22.
14. *Помелов, В.Б.* Н.А. Дернов – первый ректор Вятского государственного педагогического института имени В.И. Ленина [Текст] / В.Б. Помелов // Киров: Вестник ВГПУ, 2001. – № 5. – С. 115-119.
15. *Помелов, В.Б.* Николай Андреевич Дернов [Текст] / В.Б. Помелов // Ректоры ВятГПУ. – Киров, 2004. – С. 24-42.
16. *Налбандян, М.Б.* Научно-педагогическая деятельность И.Я.Депмана [Текст] / М.Б. Налбандян, Ю.С. Налбандян. – Деп. в НИИ высшего образования, 12.08.1992. – № 276-92. – 8 с. Электронная версия http://www.math.rsu.ru/mexmat/ma/nalb/PDF/depman.pdf
17. *Налбандян, М.Б.* Из истории общества естествоиспытателей при Варшавском (Донском, Северо-Кавказском) университете [Текст]: метод. указания к курсу "История математики" / М.Б. Налбандян, Ю.С. Налбандян. – Ростов-на-Дону: УПЛ РГУ, 1995. – 25 с. Электронная версия http://www.math.rsu.ru/mexmat/ma/nalb/PDF/est.pdf
18. *Налбандян, М.Б.* Н.В.Ефимов в Ростовском университете [Текст] / М.Б. Налбандян, Ю.С. Налбандян // Международная школа-семинар по геометрии и анализу памяти Н.В. Ефимова. – Ростов-на-Дону, 1998. – С. 9-11.
19. *Налбандян, М.Б.* Памяти Н.В. Ефимова [Текст] / М.Б. Налбандян // Международная школа-семинар по геометрии и анализу памяти Н.В. Ефимова. – Ростов-на-Дону, 2000. – С. 8-11.
20. *Налбандян, М.Б.* Памятные даты: Д.Д. Мордухай-Болтовской (1876-1952) и М.Г. Хапланов (1902-1977) [Текст] / М.Б. Налбандян, Ю.С. Налбандян // Труды участников Международной школы-семинара по геометрии и анализу памяти Н.В. Ефимова – Ростов-на-Дону, 2002. – С. 11-14.
21. *Налбандян, М.Б.* Валентин Яковлевич Лихушин (1918-1992) [Текст] / М.Б. Налбандян // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. – 1999. – № 3. – С. 109-110.
22. *Налбандян, Ю.С.* М.Ф. Субботин. Начало пути (1910-1918) [Текст] / М.Б. Налбандян, Ю.С. Налбандян // Труды IV Международных Колмогоровских чтений. – Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2006. – С. 306-315.

Преподавание математики в Оренбурге в конце XIX – начале XX века

Г.П. Матвиевская, И.К. Зубова

В Государственном архиве Оренбургской области (ГАОО) хранится много материалов, касающихся деятельности учебных заведений в Оренбурге конца XIX – начала XX вв. Основываясь прежде всего на архивных документах, мы приводим некоторые сведения о преподавании математики в Оренбурге в этот период.

В истории образования в Оренбургском крае особое значение имеет 1865 год, когда из существовавшей прежде Оренбургской губернии с центром в Уфе выделилась Уфимская губерния, а уездный город Оренбург стал губернским. Тогда у него появилось право иметь свою гимназию, тогда как раньше так называемая Оренбургская гимназия, основанная в 1804 г., находилась в Уфе. В Оренбурге мужская гимназия была учреждена в 1868 году.

В 1875 г. Оренбург стал центром вновь созданного Оренбургского учебного округа, который был выделен из обширного Казанского округа. В него входили Оренбургская, Уфимская, Пермская и Вятская губернии, а также Уральская и Тургайская области.

Назначенный на должность попечителя П.А. Лавровский, известный филолог-славист, бывший ректор Варшавского университета, обнаружил в учебных заведениях округа множество "нестроений", из которых главным был недостаток преподавателей. Это объяснялось удаленностью от университетских центров и тем, что "неизвестность жизни в отдаленном крае мало привлекает не только людей способных и даровитых, но и просто сносных" [1].

Однако при ревизии Оренбургской гимназии преподаватели математики не заслужили никаких упреков. Посещавший их уроки окружной инспектор "в общем был доволен их деятельностью" [2]. И в последующие годы по отношению к ним замечаний не высказывалось.

Высокий уровень преподавания математики в гимназии засвидетельствовал, например, учившийся в гимназии с 1875 г. Н. Беккаревич. Он вспоминал впоследствии [3] об оригинальном методе обучения математике, который применял Андрей Алексеевич Мешков (с 1880 г. директор гимназии), добивавшийся очень хороших результатов. Бывший гимназист писал: "Сухой сам по себе предмет в его преподавании становился интересным, и мы охотно занимались им".

Уроки математики и физики в 80-е годы XIX в. вели Михаил Васильевич Голубков (в 1890 г. получивший звание заслуженного преподавателя), Михаил Александрович Зернов и Василий Васильевич Толузаков, долгие годы работавшие в учебных заведениях Оренбурга.

В 1878 г. в Оренбурге было открыто новое среднее учебное заведение – учительский институт, который должен был готовить учителей для открывавшихся в то время в России четырехклассных городских училищ. Преподавателем математики в 1880 г. сюда был назначен Владимир Петрович Якимов, окончивший Казанский университет со степенью кандидата. Его отчет за 1881 г. [4] позволяет составить представление об уровне математического образования, которое давал учительский институт.

В 1886 г. В.П. Якимов был переведен в Екатеринбургскую гимназию, и его заменил выпускник Казанского университета Сергей Иванович Ханжин. После его отъезда в 1892 г. преподавателем математики был назначен Николай Михайлович Морозов, окончивший Киевский (Св. Владимира) университет с дипломом 1-й степени [5]. Когда в 1894 г. Оренбургский учительский институт был преобразован в реальное училище, Н.М. Морозов, как и другие преподаватели, был "прикомандирован" к училищу и успешно работал до 1903 г. Затем он был назначен инспектором Кунгурского технического училища. В 1911 г. Н.М. Морозов вернулся в Оренбург и до 1918 г. был директором гимназии.

С 1891 г. в гимназии преподавал математику Иван Андреевич Кузменко-Кузмицкий, окончивший в этом году Московский университет с дипломом 1-й степени. Среди материалов ГАОО обращают на себя внимание документы, касающиеся этого преподавателя. Из них следует, что с самого начала он был отмечен как отличный работник. Так, в 1893/4 учебном году его имя значится в списках преподавателей Оренбургского учебного округа, "не пропустивших ни одного урока в течение 2-й половины года" [6].

В гимназии И.А. Кузменко-Кузмицкий "заведывал физическим кабинетом и приложил много сил для оснащения его приборами" [7]. Занимался он и популяризацией физических знаний. Об этом 28 октября 1898 г. писала "Оренбургская газета": "Лекция г. Кузменко-Кузмицкого, состоявшаяся 25 сего октября, привлекла много публики и прослушана была с большим интересом. Опыты с X-лучами удались прекрасно. Жаль только, что помещение (один из классов гимназии) выбрано было слишком недостаточно по размерам, почему многим из интересовавшихся не хватило места. Есть основание предполагать, что эта интересная лекция будет повторена". Вторичное чтение лекции состоялось 8 ноября, а сбор пошел "в пользу недостаточных учеников Оренбургской гимназии".

С 1 января 1905 г. И.А. Кузменко-Кузмицкий был назначен на должность инспектора гимназии. О его работе красноречиво свидетельствует выписка из отчета о состоянии гимназии за 1905 г.: "Инспектор преподавал математику в одном классе и физику во всех классах, где этот предмет преподается, и состоял классным наставником VI класса. Ему принадлежит главный надзор за поведением учеников в стенах гимназии, равно как главное наблюдение за сохранением порядка и исправным содержанием воспитанников в пансионе, где он проводил ежедневно не менее 2-х часов и даже более. Инспектор принимал, по поручению педагогического совета, плату за учение и содержание пансионеров и, по возможности, замещал уроки отсутствующих преподавателей. Заведуя физическим кабинетом, он поместил последний, ввиду недостатка места в здании гимназии, в собственной квартире".

Несколько ниже говорится о внеклассных занятиях по физике, которые "проводились в вечерние часы по субботам и состояли в том, что желающие ученики старших классов под руководством инспектора проделывали опыты, требующие вычислений" [8].

С 1 августа 1906 г. И.А. Кузменко-Кузмицкий – "согласно прошению по слабости здоровья" – был уволен с должности инспектора [9]. В это время он был казначеем Общества вспомоществования нуждающимся ученикам Оренбургской гимназии и членом Оренбургского отдела Императорского Российского общества садоводства [10].

6 сентября 1908 г. И.А. Кузменко-Кузмицкий был назначен директором Челябинского реального училища. В Челябинске он оставил о себе добрую память. Он стал одним из инициаторов создания местного научного общества и краеведческого музея, для экспозиций которого предложил использовать здание реального училища [11].

С 27 января 1914 г. И.А. Кузменко-Кузмицкий, заняв должность окружного инспектора Оренбургского учебного округа, вернулся в Оренбург. Во время отсутствия попечителя учебного округа исполнял его обязанности. В 1918 г. он числился преподавателем 2-й мужской гимназии и состоял членом комиссии по разработке программы по математике для I и II ступеней единой школы [12].

Среди математиков, работавших позднее, можно назвать также Михаила Гавриловича Шкамарду, окончившего Московский университет с дипломом первой степени [13].

С 1904 г. преподавателем гимназии стал выпускник Московского университета Александр Онуфриевич Киселев. В 1904 г. он организовал Оренбургские высшие курсы, или Оренбургский вольный университет, просуществовавший, правда, недолго. Наряду с историко-филологическим и юридическим, здесь числился и физико-математический факультет [14].

В Оренбургское реальное училище в 1903 г. преподавателем математики был определен только что окончивший Московский университет с дипломом первой степени Николай Николаевич Шемянов (1877-1959). Этот талантливый педагог организовал математический кружок для учащихся старших классов училища. В 1906 г. под его редакцией начали выходить "Записки" этого кружка, которые и в наши дни привлекают внимание методистов. "Записки математического кружка при Оренбургском реальном училище" продолжали издаваться и после отъезда Н.Н. Шемянова из Оренбурга. В 1909 г. он был переведен во Владимирское реальное училище, и оставался во Владимире до 1930 года, когда переехал в Ярославль. Здесь он работал до 1953 года. Н.Н. Шемянов стал кандидатом педагогических наук, доцентом и заведовал кафедрой элементарной математики Ярославского педагогического института им. К.Д. Ушинского.

В 1910 г. на должность директора Оренбургского реального училища был назначен математик К.А. Торопов (1860-1933). Он закончил в 1883 году физико-математический факультет С.-Петербургского университета, где под руководством профессора К.А. Поссе написал магистерскую диссертацию на тему "Интегрирование алгебраических иррациональных дифференциалов в конечном виде (частный случай)".

Из-за своей "политической неблагонадежности" он не сразу был допущен к преподавательской деятельности, которую начал в 1886 г. в Пермской гимназии. Затем он работал в Красноуфимском промышленном училище (1890-1892 гг.), в Пермском реальном училище (1892-1900 гг.) в Таганрогском техническом училище (1900-1908 гг.), в Белебеевском реальном училище (1908-1910 гг.). Преподавание он совмещал с творческой работой и опубликовал ряд научных статей. В Оренбурге К.А. Торопов работал с 1910 г. до конца жизни и в последние годы был профессором Оренбургского педагогического института.

В реальном училище К.А. Торопов совмещал директорские обязанности с преподаванием математики. Он возродил издание "Записок математического кружка при Оренбургском реальном училище", где опубликовал несколько методических статей. Он был автором нескольких учебников и пособий по математике для средней школы. Еще в 1894 г. в Перми им был опубликован "Краткий курс тригонометрии", в котором излагался оригинальный подход к теме "Решение треугольников". Методика изложения этой темы получила развитие в небольшой книжке "Магический ряд и применение его к решению задач", первое издание которой появилось в Таганроге, когда К.А. Торопов еще работал там, а второе – в Оренбурге в 1911 году. Впоследствии методика, разработанная Тороповым, была включена в курс тригонометрии С.И. Новоселова под названием "Общий принцип Торопова решения треугольников" [15].

Говоря о преподавании математики в Оренбурге в конце XIX – начале XX вв., следует упомянуть и о Дмитрии Васильевиче Агапове, авторе ряда учебных пособий по математике, издававшихся в это время в Оренбурге. В 1908 г. Д.В. Агапов издал библиографический труд под названием "Алфавитный каталог русских книг по математике, вышедших в России с начала книгопечатания до последнего времени" [16]. Имеется в виду период с 1682 по 1908 гг. Это работа, выходящая за рамки учебной литературы и говорящая о широкой математической эрудиции автора. Составитель включил в этот каталог и 25 названий собственных книг, изданных до 1908 года. В первом разделе каталога, названном "Арифметика", содержится девять названий книг Агапова. Во втором – "Алгебра" – пять названий. В третьем – "Геометрия" – также пять названий, в четвертом – "Тригонометрия" – три названия, и в пятом – "Математика элементарная и высшая" – вновь три названия. Большая часть этих книг представляет собой учебники и руководства к решению задач для средних и старших классов и по программе выпускных экзаменов, а также вступительных конкурсных экзаменов в высшие специальные учебные заведения.

Естественно было предположить, что Д.В. Агапов был преподавателем математики. Однако поиски фамилии Д.В. Агапова в адрес-календарях среди фамилий преподавателей учебных заведений Оренбурга до 1900 года никакого результата не дали. Зато в адрес-календарях Оренбургской губернии за 1914 и за 1915 гг. был обнаружен титулярный советник Дмитрий Васильевич Агапов, член Оренбургской губернской контрольной палаты. Остается предположить, что человек, несомненно, имевший как математическое образование, так и определенную склонность к преподаванию математики, по каким-то причинам преподаванием не занимался, оставил в какой-то момент преподавательскую деятельность или, возможно, занимался ею частным образом.

Библиографический список

1. Исторический очерк народного образования в Оренбургском учебном округе за первые 25 лет его существования (1875-1899) [Текст]. – Оренбург, 1901. – Вып. 1. – С. 165.
2. Исторический очерк народного образования в Оренбургском учебном округе за первые 25 лет его существования (1875-1899) [Текст]. – Оренбург, 1901. – Вып. 1. – С. 181.
3. *Беккаревич, Н.* Оренбургская гимназия старого времени [Текст] / Н. Беккаревич // Русская старина. – 1903. – Ноябрь. – С. 401-417.
4. ГАОО. Ф.82. Оп.1. Д.42. Л.17-17об.
5. ГАОО. Ф.82. Оп.1. Д.191.
6. Циркуляры Оренбургского учебного округа [Текст]. – 1894. – № 10-11. – С. 325.
7. ГАОО. Ф.79. Оп.1. Д.32. Л.71.; Д.53. Л.35-35об.
8. ГАОО. Ф.79. Оп.1. Д.98. Л.17 об.
9. ГАОО. Ф.79. Оп.1. Д.98. Л.14.
10. ГАОО. Ф.164. Оп.1. Д.195. Л.89 об.
11. *Боже, В.С.* Школьный мир дореволюционного Челябинска [Текст] / В.С. Боже. – Челябинск: Центр историко-культурного наследия г. Челябинска, 2006. – Т. 2. – 368 с.
12. ГАОО. Ф.82. Оп.1. Д.144. Л.40.
13. ГАОО. Ф.79. Оп.1. Д.406.
14. Обозрение преподавания наук на Оренбургских высших курсах А.О.Киселева [Текст]. – Оренбург, 1907.
15. *Столяров, Н.А.* Константин Александрович Торопов [Текст] / Н.А. Столяров // Математика в школе. – 1955. – № 1. – С. 70.
16. *Агапов, Д.В.* Алфавитный каталог русских книг по математике, вышедших в России с начала книгопечатания до последнего времени. 1682-1908 [Текст] / Д.В. Агапов. – Оренбург: типо-литография Б.А. Бреслина, 1908. – 99 с.

О научно-педагогическом наследии А.Ф. Малинина

С.В. Жаров

В 2010 году исполнилось 175 лет со дня рождения русского методиста и популяризатора математики Александра Федоровича Малинина. Имя А.Ф. Малинина звучало 100 с лишним лет назад наравне с букварем для начальных классов. Известная книга по арифметике в соавторстве с Константином Петровичем Бурениным была настольной книгой для учащихся и учителей в течение многих десятилетий. Следует сразу отметить, что Константин Петрович Буренин был его соратником по педагогическому труду и соавтором 15 учебных пособий. Александр Федорович известен, главным образом, как автор многочисленных и весьма распространенных в свое время учебных пособий, но одновременно он показал большое методическое мастерство и талант популяризатора математических знаний. Можно твердо сказать, что А.Ф. Малинин обучил в России сотни тысяч учеников и создал разнообразную элементарно-математическую литературу.

В 60-е годы XIX века известный русский математик-методист Ф.И. Егоров писал, что “в учебном деле совершается коренной переворот от сухого догматического преподавания к более живому и приноровленному к пониманию учащихся. Между тем, как по отношению к математике, прежде ограничивались изложением одной теории, не всегда во всей своей строгости доступной учащимся, теперь начали обращать внимание на разъяснение теории и самой по себе, и в приложении к решению различных вопросов. Значительная доля в этом перевороте принадлежит Александру Федоровичу и как преподавателю, и как педагогу-писателю” [1].

А.Ф. Малинин первоначальное образование получил в 3-ем московском уездном училище, среднее – в 1-ой московской гимназии, которую окончил в 1850 году с золотой медалью. Успешные занятия в гимназии гуманитарными дисциплинами побуждали А.Ф. Малинина избрать специальностью филологические науки. Но под влиянием профессора Московского университета Дмитрия Матвеевича Перевощикова Малинин поступает на физико-математический факультет университета. По окончании университета в 1854 году с золотой медалью он был назначен старшим преподавателем математики в Тверскую гимназию. Ему было 19 лет. Спустя два года А.Ф. Малинин вернулся в Москву преподавателем 4-й гимназии. В этой гимназии А.Ф. Малинин усилил практические упражнения по математике, составил литографированные записки по арифметике и алгебре, а также устроил хороший для того времени кабинет физики. Приборы кабинета не были экспонатами для посетителей, а действительно применялись на занятиях. Преподавателем 4-й гимназии А.Ф. Малинин проработал 14 лет до 1870 года, а затем был назначен директором Тульской гимназии, где он проявил себя с отличной стороны. По словам Ф.И. Егорова, в гимназии все работали усердно, а более всех работал сам директор.

Но Тула и Тверь ненадолго оторвали А.Ф. Малинина от Москвы. В 1872 году А.Ф. снова вернулся в Москву (и уже больше не покидал ее до самой своей смерти) – на пост директора нового учебного заведения –

Московского учительского института, основателем которого был он сам. Согласно положению от 31 мая 1872 г. началось преобразование уездных училищ в городские. Возник вопрос о подготовке учителей для городских училищ. С этой целью в некоторых наиболее крупных городах России были открыты учительские институты с трехгодичным сроком обучения. Одним их них и был Московский учительский институт.

Разностороннее образование и выдающиеся способности помогли А.Ф. Малинину в короткое время приобрести вполне заслуженную известность одного из лучших преподавателей математики. Но преподавательская деятельность не могла вполне удовлетворить Александра Федоровича и поглотить всю его энергию: он вскоре выступил как педагог-писатель. Его живой разносторонний ум не мирился с узкими рамками современной ему педантической педагогики. А.Ф. Малинин понимал, что для развития науки важно ее широкое распространение среди населения, ее общедоступность. Это легло в основу всей его деятельности.

Учебно-литературная деятельность для А.Ф. Малинина была чуть ли не самой важной и благотворной. Как директора института, его знала вся Москва и Московский учебный округ, а вот как автора многочисленных учебных пособий, в большинстве написанных с К.П. Бурениным, без преувеличения можно сказать, знала вся грамотная Россия. Как писал Ф.И. Егоров, “отличительную особенность книг Александра Федоровича составляет соединение учебника со специально и очень удачно подобранными задачами и упражнениями. Книги его отличаются также особенной доступностью и ясностью для учащихся усвоенной им методы изложения. Для преподавателей его книги важны были в том отношении, что заключали в себе много практических указаний для самого ведения уроков и что многие страницы из его учебников почти непосредственно могли быть переложены в урок” [1].

Учебно-литературную деятельность Александр Федорович начал с “Руководства к прямолинейной тригонометрии” (М., 1862). В предисловии он писал: “Я старался сделать изложение по возможности простым и понятным для учащихся и поэтому избегал неясных определений и выбирал такие доказательства и объяснения, которые приводят к цели скорее и проще” [2]. Надо добавить сжатость, живость и ясность изложения. В 1867 году “Руководство к прямолинейной тригонометрии” было одобрено, по предложению П.Л. Чебышева, Ученым комитетом Министерства народного просвещения в качестве руководства для гимназий.

Рекомендуя руководство, П.Л. Чебышев писал: “По рассмотрении этого сочинения я нашел, что оно отличается и полнотой содержания, и ясностью изложения, а вместе с тем составляет курс тригонометрии объема весьма значительного. При соединении таких достоинств сочинение г-на Малинина представляет очень хорошее руководство для преподавания тригонометрии, а потому я нахожу нужным не только согласиться с мнением попечительского совета Харьковского учебного округа о введении этого курса в пособие для преподавания тригонометрии, но и предложить этот курс тригонометрии для употребления руководством в гимназиях всех округов” [2]. Если учесть строгость, с какой относился П.Л. Чебышев в бытность членом Ученого комитета по математическим наукам к учебникам элементарной математики, представлявшимся на рассмотрение комитета, то станут понятными достоинства этого учебного пособия.

В 1866 году А.Ф. Малинин совместно с К.П.Бурениным опубликовал “Руководство арифметики” и “Собрание арифметических задач”. Этим было положено начало целому ряду отличных для того времени учебников, написанных Александром Федоровичем один за другим в короткое время. По этим руководствам десятки лет училось юношество всей России. К сожалению, эти книги не были одобрены Ученым комитетом в качестве руководств для гимназий, а только в качестве учебных пособий.

Цель издания “Руководства арифметики” авторы видели в том, чтобы “дать учащемуся книгу, которая, содействуя, с одной стороны, развитию логического мышления и представляя науку в систематическом изложении, была бы им совершенно по силам” [2]. Авторы применяли при этом догматический метод изложения при выводе правил и доказательств из немногих простых определений, а каждому определению предпосылали практический пример или задачу, из которого уяснялось новое понятие и само его определение. Авторы старались делать изложение, хотя и научным, но простым и живым, чтобы материал был понятен даже ученику первого класса.

Со стороны изложения “Руководство арифметики” отличалось двумя особенностями: 1) при объяснении каждого действия указывалось его значение и вопросы, которые могли быть решены посредством излагаемого действия; 2) изложение каждого параграфа заканчивалось рядом вопросов, обнимавших все содержание параграфа и иногда требовавших применения выводов параграфа к частным случаям. “Руководство” было напечатано двумя шрифтами: крупным шрифтом – те статьи, которые предназначались для младших классов гимназий, мелким – те статьи, которые изучались при повторении арифметики в старших классах.

Перечислим главы данного учебного пособия: счисление (различные системы счисления); действия с целыми числами; составные именованые числа (величины и их измерение); о делителях (точные делители, признаки делимости, свойства отношения делимости); дроби (происхождение, арифметические действия); десятичные дроби; непрерывные дроби (этот раздел стал факультативным!); отношения; пропорции; тройные правила (тема начальных классов). При этом все изложение материала максимально приближено к ситуациям, которые могут возникнуть в жизни.

В “Собрании арифметических задач” тех же авторов А. Малинина и К. Буренина помещены 2043 задачи, которые следуют последовательно в порядке возрастания трудности. При этом главы задачника названы так же и в том же порядке, как они следуют в учебном пособии. Популярность этих двух книг была такова, что за 22 года с 1866 по 1888 годы вышло 39 изданий общим тиражом более одного миллиона экземпляров. Если сравнить первые издания с последними, то можно заметить значительные исправления. Дело в том, что А.Ф. Малинин учитывал все замечания критиков и новшества математической мысли и вносил изменения в последующие издания, уделяя громадное количество времени на новую корректуру. Даже за несколько часов до смерти автор был занят подготовкой нового издания “Руководства арифметики”.

Несколько меньшим успехом, чем “Арифметика”, пользовалось “Руководство по алгебре и собрание алгебраических задач” (1870) тех же авторов, которое было одобрено Ученым комитетом под руководством П.Л. Чебышева в качестве учебника для гимназий. Большое место в этом сборнике уделено переходу от арифметики к алгебре, при этом дано определение алгебры, как науки, занимающейся составлением общих решений задач и вопросов относительно чисел.

Представляет интерес упомянуть еще об одной книге А.Ф. Малинина – “Задачи для умственных вычислений”, где представлено около трех тысяч задач и примеров на отработку вычислительных навыков по математике. При этом даны примеры как на вычисление (каждый пример проговаривается вслух!), так и в виде практических задач. Приведем несколько простых задач на разнообразные ситуации.

1. Как заплатить 15 копеек одной монетой? 2-мя? 3-мя? 5-ю? 10-ю? 15-ю? (Раньше имела хождение монета в 15 копеек.)
2. Отец дал трем сыновьям полторы дюжины яблок. Сколько досталось каждому?
3. Отец дал во вторник сыну двугривенный (20 копеек). Сын тратил каждый день по 4 копейки на завтрак. Когда он истратит последние деньги?
4. Из 11 лошадей сколько можно запрячь двоек? Троек?
5. Я задумал число; если я вычту из него 7, то выйдет 4. Какое число я задумал?
6. Сколько надо прибавить к утроенному числу 2, чтобы получить 11?
7. Сколько надо вычесть из ушестеренного числа 3, чтобы получить 11?
8. У Маши было 11 яблок; она одно яблоко съела, а остальные поделила поровну между пятью братьями. Сколько получит каждый брат?

Именно задачи, самые разнообразные, интересные составляли главный материал занятий Александра Федоровича с учениками. Приведенные несколько примеров рассчитаны на первоначальное знание арифметических действий над целыми числами. Этот список можно и дальше продолжать, он относится к начальной школе, и подобного рода сборник, адаптированный под современные термины, мог бы стать отличным помощником для учителей начальных классов. Отметим одну особенность пособия – задачи на измерение величин даны в старинных русских мерах, что не свойственно современному преподаванию. Однако такая информация весьма полезна с точки зрения введения элементов историзма с ранних лет обучения, тем более, что до сих пор эти меры измерения бытуют в пословицах и поговорках. Несомненно, что А.Ф. Малинин являлся популяризатором математической науки через разнообразие задачного материала.

Всего Александром Федоровичем Малининым – одним и в сотрудничестве с К.П. Бурениным – составлено 15 учебных книг, из которых многие были премированы министерством народного просвещения.

Приводим перечень этих книг:

1. Руководство тригонометрии.
2. Руководство арифметики.
3. Собрание арифметических задач.
4. Физика и собрание физических задач.
5. Собрание физических задач.
6. Руководство алгебры и собрание алгебраических задач.
7. Курс физики для женских учебных заведений.
8. Начальные основания физики для городских училищ.
9. Собрание задач для умственных вычислений.
10. Руководство геометрии для городских училищ.
11. Руководство геометрии и собрание геометрических задач для гимназий.
12. Курс геометрии для женских учебных заведений.
13. Курс алгебры для женских учебных заведений.
14. Космография и физическая география для гимназий.
15. Курс математической и физической географии для женских учебных заведений.

Распространение книг достигало громадных размеров. Общий тираж всех опубликованных изданий составляет более одного миллиона 600 тысяч экземпляров. Этот успех можно объяснить удачным выбором системы изложения материала, ясностью изложения и еще тем, что А.Ф. Малинин постоянно следил за развитием математической науки и каждый раз при переиздании он учитывал все то новое, что имело несомненную научную ценность.

Таким образом, учебники Александра Федоровича Малинина положили начало особому направлению в преподавании элементарной математики, которое может быть охарактеризовано следующим образом: при изложении того или иного математического материала на уроке или в учебнике не следует отклоняться от научной строгости объяснений и доказательств, но в то же время их следует делать доступными и вполне понятными тому возрасту учеников, которому преподается математика.

Рядом с деятельностью литературно-педагогической надо поставить деятельность А.Ф. Малинина как основателя и первого директора Московского учительского института, которая имела серьезное общественное значение. Следует также отметить пользу, принесенную А.Ф. Малининым в должности первого руководителя публичными чтениями, организованными для учеников начальных и средних школ в Политехническом музее в середине 80-х годов XIX века. К этим чтениям были привлечены лучшие силы Москвы. Чтения собирали многочисленную аудиторию и приняли настолько интересный характер, что многие из них были опубликованы и внесли существенный вклад в научно-популярную литературу.

Особенность Московского учительского института состояла в том, что это было учебное заведение закрытого типа, т.е. преподаватели одновременно исполняли обязанности воспитателей. Другим отличием было то, что при институте существовали дополнительные курсы для учителей уездных училищ, желавших получить звание учителя городского училища и прикомандированных на один год попечителем Московского учебного округа.

Основное направление воспитательной работы А.Ф. Малинин видел в сплочении учащих и учащихся, в создании дружного коллектива учителей и учеников. Он всегда помогал добрым советом в подготовке к экзаменам на звание учителя, а нередко помогал и материально. Что касается обучения в институте, то главной задачей ставилось не только сообщение знаний и навыков, необходимых для будущей профессии, но и развитие стремления к самообразованию, осознание важности учительской деятельности, любовь к профессии.

Под руководством А.Ф. Малинина учительский институт в первые годы своего существования стал лучшим учебным заведением среди подобных в России. Его воспитанники работали не только в Московском учебном округе, но и в других округах. За первые 15 лет существования учительского института из его стен вышло 300 учителей, которые с успехом трудились на педагогическим поприще.

Необыкновенно отзывчивый на всякое полезное дело, Александр Федорович лично руководил (по заранее выработанному им самим плану) устройством отдела Московского учебного округа на всероссийской выставке в 1882 г. и приобрел институту за образцовые труды его воспитанников почетный диплом.

Озабоченный изысканием образовательных средств для воспитанников средних учебных заведений, А.Ф. Малинин устроил при отделе Общества распространения технических знаний общедоступные чтения по разным отраслям знаний.

Среди занятий по устройству этих чтений 16 февраля 1882 г. Александр Федорович скоропостижно скончался – 53-х лет, полный сил и энергии. Памяти А.Ф. Малинина (на 40 день со дня смерти) было посвящено специальное заседание Учебного отдела, на котором многочисленные преподаватели и ученики поделились воспоминаниями об этом замечательном человеке.

В заключение представляется возможным отметить сразу нескольких выдающихся математиков-методистов по начальному обучению арифметике конца XIX века и начала XX века. Кроме Александра Федоровича Малинина упомянем Сергея Александровича Рачинского, который, среди многих других статей, издал пособие “1001 задача для умственного счета”, Семена Ильича Шохор-Троцкого, чья “метода целесообразных задач” вполне применима и в современном преподавании, и комбинационную работу по арифметике Николая Александровича Извольского. Исследование трудов этих ученых подчеркивает ту громадную роль, которая уделялась качественной подготовке учеников по арифметике, чтобы сделать этот раздел математики живым и интересным для детей.

Библиографический список

1. *Егоров, Ф.И.* Александр Федорович Малинин (некролог) [Текст] / Ф.И. Егоров // Вестник опытной физики и элементарной математики. – 1888. – № 45. – С. 203-208.
2. *Прудников, В.Е.* Русские педагоги-математики XVIII-XIX веков [Текст]: пособие для учителей / В.Е. Прудников. – М.: Гос. уч.-пед. изд-во Мин-ва просв-я РСФСР. – 1956. – 640 с.

Компаративная история новейшего математического образования, данная на примере образовательных систем России и Китая

В.К. Жаров

Наступил в истории развития математического образования период, когда вопрос о значении математики как педагогической дисциплины является общим местом. Однако, к сожалению, это утверждение само по себе, как, впрочем, многое в российской действительности, приобретает белесую окраску ненужной ценности. На самом же деле, видимо, стоит напомнить некоторые факты из истории российского математического образования. Самый простой и легко проверяемый факт: примерно из ста тридцати математиков США представленных в Википедии, около 25% представителей российской математической школы. Факт второй: борьба за качество образования, начавшаяся по инициативе Конгресса США с начала семидесятых годов прошлого века, оказалась более-менее успешной только, по признанию президентов США, с притоком учителей математики и естественнонаучных дисциплин из СССР и России. Факт третий: случилось ЕГЭ в России.

Традиционная российская математическая школа имеет более чем восьмисотлетнюю историю. Основное укрепление своих позиций она получила в последние триста лет [1]. Методическая школа отечественной математики развивалась вместе с развитием математики. К основным ценностям этой методической школы можно отнести: соавторство учителя и ученика в поиске методов решения задач; приучение ученика, со времени арифметических задач, к формулировке вопросов к подзадачам конкретной задачи; развитие критического мышления с помощью многих разноуровневых задач, чему способствовали задачники, например [2][1], выдержавший более 100 изданий, или известные книги А.Ф. Малинина и К.П. Буренина, А.П. Киселева, Н.А. Рыбкина и т.д.; вариативность курсов в зависимости от слушателей и учащихся; геометрическо-конструктивное мышление, развиваемое учебниками геометрии до теоретического мышления (от измерительных приемов до инфинитезимальных методов). Конечно, это перечисление не исчерпывает богатый методический арсенал российской математической школы.

"Все познается в сравнении". Для этого рассмотрим сравнение нашего математического образования с китайским математическим образованием. Период сравнения – двадцатый век.

Таблица 1

Китай	**Россия**
1902	1902
Арифметическая подготовка, исключительно начальная, далее первого знакомства со счетными досками и геометрическими фигурами программой ничего не предусматривалось.	Довольно стройная структура подготовки по математике: начальная школа, гимназии, реальные училища, институты, университеты

Почасовое представление китайской программы по математике в 1951 году

Учебный цикл Понедельное количество часов. Разделы	Начальная (ступень) средней школы (классы)						Высшая (ступень) средней школы (классы)					
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Арифметика	4	4										
Алгебра			5	3	2				3	3	2	2
Планиметрия				2	3	5	2	2				
Стереометрия									2	2		
Плоская тригонометрия							3	3				
Аналитическая геометрия на плоскости											3	3

Учебные часы в советской школе по предметам с 5 по 10 класс на 1955-1956 учебный год приведены в табл. 2.

Таблица 2

Предмет	**Классы**					
	5	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Русский язык	9	8	6	5,5	4	4
Арифметика	6	6				
Алгебра, геометрия		6	6	6	3	3
Тригонометрия					3	3

В этом месте стоит читателю обратить внимание на место арифметики в курсе математики средней школы. В тот период этот факт свидетельствовал о понимании значения математического образования в двух государствах. О некотором "развитии" математических программ можно судить по таблицам, предложенным в [4, с. 221-223].

Программа по математике для средних школ Китая 2000 года

(начальная и средняя ступени – девять лет обучения)[2]

Фрагменты объяснительной записки[3].

"Объектом математических исследований являются пространственные формы и количественные отношения. В настоящее время математика находит все более широкое применение. Математика – это инструмент, с

[1]"В этом сборнике задач все упражнения располагались в порядке нарастания трудностей и содержали два варианта упражнений одинаковой сложности, один из которых не имел ответа, что предполагало создать у учеников навыки самопроверки" [3].

[2]См. [5]. Современная средняя школа Китая имеет три ступени: начальная ступень, средняя ступень – девять лет, и, высшая ступень средней школы – три года обучения.

[3]Перевод В.К. Жарова. Мы предлагаем перевод исключительно значимых для нашего исследования фрагментов текста программы. Общий перевод только программы 2000 года занимает свыше 30 страниц, поэтому последние части программы даны в виде плана. Стиль же методической направленности сохраняется для всего текста программы. В некоторых случаях мы сохраняем стиль и пафос текстов подлинника.

помощью которого человек участвует в общественной жизни, с ее помощью изучается производительный труд и учеба, исследуются явления природы.

Ее содержание, методы и язык прошли вглубь естественной и социальной научной области знаний, она стала одной из важнейших частей современной культуры.

Начальная математика является одной из важнейших дисциплин для *бесплатного образования* (курсив здесь и ниже мой – ЖВК). Она является фундаментом для изучения физики, химии, компьютеров, а также участия в социальной жизни и производстве, и одновременно является основой для перехода к другим более высоким ступеням обучения.

Ее изучение способствует развитию характера учащегося и диалектическому мировоззрению.

Обучение математике необходимо развивает умение наблюдать, экспериментировать, сравнивать, прогнозировать, анализировать, синтезировать, обобщать и абстрагировать; также развивает способность применять индукцию, дедукцию, сравнивать и совершать доказательства (рассуждения); умение логически описывать связи в рассуждениях и свою точку зрения; дает возможность с помощью понятий, принципов, идей и основ математики отмечать связи между явлениями; ***точно формулировать характерные мыслительные действия***, ***понимать*** *[предлагаемый в общении]* ***уровень мышления.***

Способность к выполнению арифметических действий дисциплинирует ум и дает знание о законах и правилах математических действий; на основе же математических теорий можно находить рациональные маршруты или пути действия во время поиска решения задач" [5, с. 646].

Алгебра [5, с. 652].

[. . .]

1. Рациональные числа.

1′. Общее представление о рациональных числах.

Рациональные числа. Числовая ось. Взаимно противоположные числа. Абсолютная величина числа. Сравнение больших и малых рациональных чисел.

Основные требования.

(1). Понимать смысл рациональных чисел, уметь применять оценку положительных и отрицательных чисел по форме числа. Классифицировать эти числа.

(2). Иметь представления о числовой оси, взаимно противоположных числах, уметь графически представлять абсолютную величину числа, изображать целые и дробные числа на числовой оси точками (учебными инструментами являются числовая линейка, циркуль); уметь находить рациональные числа, модуль и противоположные данным числам (понимать знак модуля без букв).

(3). Твердо усвоить законы сравнения рациональных чисел, уметь по форме связывать и различать рациональные пары чисел.

2′. Действия с рациональными числами.

Вычитать и прибавлять рациональные числа. Алгебраическая сумма. Закон арифметических действий: способы сложения. Способы умножения и деления рациональных чисел. Обращение чисел. Законы арифметических действий, способы умножения. Возведение в степень рациональных чисел. Смешанные арифметические действия с рациональными числами. Стандартная форма записи чисел. Приближенные числа и проверка верных цифр числа.

Основные требования.

(1). Понимать значение возведения в степень, деления, умножения, вычитания, сложения рациональных чисел; научиться использовать правила и законы арифметических действий с рациональными числами, применять последовательно смешанные арифметические действия с рациональными числами; свободно использовать упрощения в арифметических действиях.

(2). Знать обращение числовых понятий, уметь находить обратные числа и выполнять обратные действия над числами.

(3). Уметь записывать рациональные числа в стандартной форме по степеням десяти.

(4). Иметь понятие о приближении чисел и разрядах цифр в числе, уметь для каждого числа на основании степени определять точно размерность и разряд цифры; использовать приближения чисел, отбрасывая 5 или 4 цифры; уметь применять калькулятор для вычисления каждого числа во второй и третьей степени (а также использовать таблицы в неспециализированных школах). Если в школе нет калькуляторов, то можно использовать таблицы.

(5). Знать способы вычитания, сложения, умножения и деления рациональных чисел, взаимно их обращая.

2. Сложение и вычитание целых выражений.

Алгебраические выражения. Значение алгебраических выражений. Одночлены. Многочлены. Приведение подобных членов. Раскрыть и вводить в скобки множители. Умножение чисел на целое выражение (взятие умножения целого выражения и числа). Способы сложения и вычитания целых выражений.

Основные требования:

(1). Использовать буквы для обозначения рациональных чисел, знать дальнейшее развитие обозначений в математике.

(2). Понимать значения алгебраических выражений, уметь последовательно связывать величины простейшими обозначениями и алгебраическими выражениями, уметь находить алгебраические значения выражений.

(3). Знать связь целых выражений и одночленов со степенью числа; понимать зависимость изменения степени многочлена от повышения или понижения степени каждой буквы этого многочлена.

(4). Уверенно владеть способом группировки, законом раскрытия и взятия в скобки, свободно уметь выполнять арифметические действия с целыми выражениями и числами, а также арифметические действия (сложения и умножения) с целыми выражениями.

(5). В процессе использования числовых таблиц для букв *показать процесс алгебраизации выражений и поиск значений алгебраических выражений*, складывать и вычитать целые выражения, *знать о диалектических связях способов и характеристик или обобщений мыслительных абстракций.*

3. Уравнения первой степени с одной неизвестной.

Равенство. Основные свойства равенств. Решение уравнений. Основные способы решения уравнений первой степени с одной неизвестной. Приложение уравнений первой степени с одной неизвестной.

Основные требования:

(1). Иметь представления о понятиях равенства и уравнения, твердо усвоить основные свойства равенств, уметь проверять каждое число – является ли оно решением уравнения первой степени с одной неизвестной.

(2). Знать определение уравнения первой степени с одной неизвестной, свободно применять основные свойства равенств и законы перестановок для решения уравнений первой степени с одной неизвестной; уметь проверять правильность решения уравнений.

(3). Уметь находить неизвестные и известные величины в простейших задачах, анализировать каждую промежуточную величину; находить необходимо нужные величины в задачах, последовательно связывать их с решением простейших уравнений первой степени с одной неизвестной; *уметь реально использовать смыслы в задачах,* ***контролировать этапы поиска результатов, не являющихся общей теорией.*** *Быть в состоянии обнаруживать математические закономерности в естественной или производственной деятельности, выражающиеся уравнениями с одной неизвестной первой степени, а также* ***формулировать комментарии к правильному решению.***

(4). Научиться на материале линейных уравнений с одной неизвестной производить замены переменной и оценивать рациональность этих действий.

4. Системы уравнений первой степени с двумя неизвестными.

Уравнения первой степени с двумя неизвестными и их множество решений. Система уравнений и ее решения. Решение системы уравнений. Применение способов замены и исключения для решения системы с двумя неизвестными. Системы линейных уравнений с тремя неизвестными и примеры их решения. Приложения систем линейных уравнений.

Основные требования:

(1). Иметь понятие о линейных уравнениях с двумя неизвестными, уметь форму линейного уравнения с двумя неизвестными преобразовывать, используя алгебраические выражения; уметь контролировать каждое решение линейного уравнения с двумя неизвестными.

(2). Иметь представление о системе уравнений и ее решении. Обладать общим пониманием о решении системы уравнений; уметь проверять (пары решений), полученные числа в каждом линейном уравнении системы с двумя неизвестными.

(3). Манипулировать хитроумными способами сложения – вычитания уравнений, линейных систем уравнений с двумя неизвестными; уметь решать системы линейных уравнений с тремя неизвестными.

(4). Быть в состоянии составлять по известному решению промежуточные звенья решения линейных уравнений с двумя или тремя неизвестными. Уметь развивать полученные идеи в повседневной жизни и применять к возможным примерам из производственной деятельности; правильно и точно формулировать вопросы и рассматривать их со всех сторон.

(5). Посредством решения систем уравнений научиться преобразовывать уравнения с тремя неизвестными в уравнения с двумя и из двух – в уравнения с одной неизвестной (способ исключения неизвестных), затем шаг за шагом неизвестные превращать в известные, и после этого формулировать разнообразные вопросы по рациональности упрощения на элементарном уровне.

5. Неравенства первой степени с одной неизвестной и системы неравенств первой степени с одной неизвестной.

1) Неравенство первой степени с одной неизвестной. Основные свойства неравенств. Множество решений неравенств. Неравенства первой степени с одной неизвестной и способы их решения.

Основные требования:

(1). Иметь общее понятие о неравенствах вообще и неравенствах первой степени с одной неизвестной, овладеть основными свойствами неравенств, осмыслить различия и сходства основных свойств неравенств и равенств.

(2). Иметь представление о множестве решений и решении неравенств, различать решение уравнений и их решения. Уметь на числовой прямой обозначать множество решений неравенств.

(3). Уметь применять основные свойства и способ группировки к исследованию неравенств первой степени с одной неизвестной.

2) Системы неравенств первой степени с одной неизвестной.

Неравенства первой степени с одной неизвестной и способы их решения.

Основные требования:

(1). Иметь представления о системе неравенств первой степени с одной неизвестной, множестве ее решений; осмыслить различие и связи между неравенствами первой степени и системами неравенств первой степени с одной неизвестной.

(2). Овладеть различными способами решений систем неравенств первой степени с одной неизвестной, уметь использовать числовые оси для определения решения систем неравенств первой степени с одной неизвестной.

6. Умножение и деление целых выражений.

1) Способы умножения целых выражений.

Способы умножения степеней с общим числовым основанием. Способы умножения одночленов. Умножение квадратов возведением. Умножение квадратов, суммируя. Взаимное перемножение многочлена на одночлен. Способ умножения многочленов. Формулы разности квадратов и полный квадрат.

Основные требования:

(1). Твердо усвоить свойства операций с целыми числовыми степенями (способы умножения степеней с числовыми основаниями, умножение квадратов степеней, умножение квадратов произведений); уметь применять их с хорошими навыками на фоне выполнения арифметических действий.

(2). Твердо усвоить способы взаимного умножения одночлена на одночлен, одночлена на многочлен, многочлена на многочлен; уметь применять их при выполнении арифметических вычислений.

(3). Разумно применять, при выполнении арифметических действий, формулы разности квадратов и полного квадрата.

(4). Посредством законов умножения переходить от возведения в степень числа к многочлену, еще раз разобрать формулы сокращенного умножения, на первых шагах познакомиться с законом осмысления “характерный-простой-характерный”.

1) Деление целых выражений.

Деление числовых степеней с одинаковыми основаниями. Деление одночлена на одночлен. Деление многочлена на многочлен.

Основные требования:

(1). Твердо усвоить свойства действий с делением степеней с одинаковым основанием, уметь использовать их в арифметических вычислениях.

(2). Твердо усвоить законы деления одночлена на одночлен, многочлена на одночлен, уметь применять их в вычислительной практике.

(3). Уметь производить смешанные действия: сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень, а также элементарные сравнения целых выражений, свободно применять и рационально использовать действия с целыми выражениями для арифметических вычислений” [5, с. 656].

Далее в тексте подробно описаны цели, задачи и требования, которым должен научиться ученик, освоив следующие пункты программы. Перевод дан в сокращении.

7. Разложение на множители.

8. Дробные выражения.

9. Извлечение квадратных чисел.

10. Квадратные корни из полных квадратов.

11. Уравнения второй степени с одной неизвестной.

12. Функции и их графики.

13. Начала статистики. [5, с. 662].

Далее следует раздел **Геометрия и основы тригонометрии.**

Он состоит из следующих подразделов:

Вводная записка.

1. Отрезки, углы.
2. Пересечения и параллельность.
3. Треугольники.
4. Четырехугольники.
5. Подобные фигуры.
6. Решение прямоугольных треугольников.
7. Окружность. Круг. [5, с. 671].

Программа по математике средней школы высшей ступени (три года).

Объяснительная записка.

Цели и содержание обучения [5, с. 672-673].

Обязательные темы уроков.

1. Множества. Элементы логики (14 часов).

2. Функции (30 часов).
3. Неравенства (22 часа).
4. Векторы на плоскости (12 часов).
5. Тригонометрия (46 часов).
6. Последовательности (12 часов).
7. Уравнения касательных и окружности (22 часа).
8. Уравнения конических кривых (18 часов).
9. (А) Прямые, поверхности, элементы стереометрии (36 часов).

В программе также есть пункт 9) (В), отличающийся от (А) углубленным изучением темы, для учащихся, подготавливаемых к естественнонаучным специальностям профессиональной деятельности.

10. Перестановки, системы, элементы теории чисел (18 часов).
11. Вероятность (12 часов).
12. Вопросы методов исследований (12 часов). [5, с. 673-680].

Факультативный курс

Первый

1. Статистика (12 часов).
2. Пределы и производные (20 часов).

Второй

1. Теория вероятностей и статистика (14 часов).
2. Пределы (12 часов).
3. Производные и дифференциалы (16 часов).
4. Интегрирование (14 часов).
5. Комплексные числа (16 часов). [5, с. 681-683].

Далее к программе прилагается четвертая часть "Вопросы (проблемы) идей обучения в средней школе" [5, с. 683].

Появление же ЕГЭ в российском математическом образовании в такой форме, которую мы имеем на этот год (2011), повергает в уныние. Были уровни A, B, C, а теперь, дай Бог, чтобы учащиеся решали под видом B задачи из бывшего уровня A, произошло смешение уровней B и C. Было бы не лишним авторам обЕГЭвления математического образования познакомиться с опытом проведения ЕГЭ в Китае, которое проводится там с 1979 года.

Заключение.

1. Содержание математического образование Китая в средней школе переродилось с начала двадцатого века, но методические принципы остались теми же, что и в традиционной китайской математике.

2. Имеет место тенденция российского математического образования к упрощению, изменению традиционной методики.

3. Утверждение "Необходимо менять нашу (советскую) образовательную систему" является заблуждением, в основе которого лежали идеи выдающихся советских математиков. Но они не учитывали в своих намерениях возможностей преподавательской, учительской среды вследствие многих причин.

Библиографический список

1. *Полякова, Т.С.* История математического образования в России [Текст] / Т.С. Полякова. – М.: Изд-во МГУ, 2002.
2. *Шапошников, Н.А.* Методически обработанный сборник алгебраических задач с текстом общих объяснений [Текст] / Н.А. Шапошников, Н.К. Вальцов. – М.: Университетская типография, Страстной бульвар, 1905. – 191 с.
3. *Андронов, И.К.* Полвека развития школьного математического образования в СССР [Текст] / И.К. Андронов. – М.: Просвещение, 1967.
4. *Колягин, Ю.М.* Русская школа и математическое образование [Текст] / Ю.М. Колягин. – М.: Просвещение, 2001.
5. Развитие китайской средней школы в двадцатом веке. Обучение, развитие и связи. Математический свиток (том) [Текст]. – Пекин: Народный университет образования, 2001. – 686 с.

Математическая подготовка инженеров космической отрасли на базе Московского лесотехнического института. Страницы истории (к 50-летию отечественной пилотируемой космонавтики)

К.К. Рыбников, О.К. Чернобровина

У специалистов, интересующихся историей отечественного математического образования название этой статьи может вызвать удивление. Каким образом в высшем учебном заведении, занимающемся подготовкой кадров лесной промышленности уже более 50 лет ведется обучение будущих инженеров, готовящих к полету космические корабли и разрабатывающих программы научных исследований внеземного пространства? Казалось бы, Лес и Космос – диаметрально противоположные сферы деятельности человечества. Однако, полвека назад Московский лесотехнический институт стал регулярно направлять своих специалистов в базовые научные и практические подразделения исследователей космоса, такие, как ЦНИИМАШ, ОАО РКК "Энергия" им. С.П. Королева, НПО ИТ и ЦУП (Центр управления полетами).

В настоящее время в космической отрасли трудится более 300 выпускников Московского государственного университета леса (современное название МЛТИ). Среди них И.Н. Габелко – один из руководителей корпорации "Рособщемаш", И.А. Потапов – генеральный директор НПП "Мера", С.Л. Груздев – генеральный директор компании Alladin и, наконец, В.В. Рюмин – летчик-космонавт СССР, дважды Герой Советского Союза, заместитель генерального конструктора ОАО РКК "Энергия" им. С.П. Королева.

Все это было бы невозможным без создания внутри нашего университета мощной системы математической и инженерно-физической подготовки.

Остановимся на предпосылках и истоках этого процесса, уделяя особое внимание базовой математической подготовке будущих космических инженеров.

Хроника событий (см., например, [1])

В середине 50-х годов прошлого века прорыв в области космических технологий, разрабатываемых в Советском Союзе, оказался столь значительным, что появилась потребность в подготовке большого количества специалистов, готовых немедленно включиться в разработку решения прикладных задач, требующих немедленной технической реализации.

5 января 1957 года Сергей Павлович Королев направил в Президиум Совета министров СССР докладную записку о плане освоения космического пространства. В ней, в частности, содержались предложения о подготовке в вузах кадров для ракетно-космической отрасли. В число институтов, включенных в список таких высших учебных заведений, был и Московский лесотехнический институт. Причин для этого было немало. Во-первых, в МЛТИ был хорошо организован учебный процесс, прежде всего в части постановки фундаментальных курсов. Во-вторых, для преподавания специальных математических и физических дисциплин можно было легко привлечь специалистов из располагающихся рядом в городе Калининграде (ныне Королев) научно-исследовательских подразделений, занимающихся разработкой и эксплуатацией космической техники (РКК "Энергия", ЦУП, ЦНИИМАШ и др.).

Постановление ЦК КПСС и Совета министров СССР, в котором были отражены все предложения С.П. Королева, вышло уже 30 января 1957 года. В соответствии с этим постановлением приказом министра высшего образования СССР В.П. Елютина на МЛТИ была возложена задача подготовки специалистов по специальностям "Математические и счетно-решающие приборы и устройства", "Автоматика и телемеханика", "Приборы управления и контроля химических производств".

Во исполнении этого приказа 19 марта 1959 года в МЛТИ был создан факультет электроники и счетно-решающей техники (ФЭСТ). Соответствующий приказ за №292 по министерству высшего образования подписал заместитель министра С.В. Румянцев. Появились новые кафедры: автоматики и телемеханики (заведующий кафедрой – доцент А.И. Гузенко (до этого он работал в МВТУ)), математики и счетно-решающих приборов и устройств (заведующий кафедрой – доцент Н.В. Трубников (также из МВТУ)) и электроприборостроения (заведующий кафедрой – профессор Иван Васильевич Уткин (Главный конструктор средств телеизмерений НИИ-88).

Деканом ФЭСТа был назначен заведующий кафедрой физики доцент Н.Ф. Гусев. При факультете было создано методическое совещание (приказ по МЛТИ № 236 от 11 апреля 1959 года), которое должно было рассмотреть новые учебные программы, прежде всего по физике и математике.

Одним из шести членов этого совещания был назначен заведующий кафедрой высшей математики, известный советский геометр Николай Владимирович Ефимов.

Ясно, что создание самых удачных и глубоких учебных программ, само по себе, не обеспечивает достижение поставленных целей в подготовке специалистов. Все решают коллективы, и такой коллектив был создан Н.В. Ефимовым [1-3].

Кафедра высшей математики к 1957 году

Коллектив математиков, сложившийся к моменту образования ФЭСТа, был весьма силен и располагал специалистами высокого класса, среди которых был один из лучших отечественных исследователей в области теории функции комплексного переменного Б.А. Фукс, автор известного на всей территории СССР задачника по аналитической геометрии Д.В. Клетеник, а также один из лучших специалистов в теории решения уравнений математической физики Р.С. Хасьминский.

Надо сказать, что под руководством казалось бы чистого теоретика Н.В. Ефимова появились практические прикладные работы, сперва использующие математические модели в области лесного дела, а затем, определяющие технические характеристики в задачах об устойчивости движения [1]. Именно эти результаты явились как бы предчувствием Космоса, как это принято сейчас говорить.

Надо сказать, что кафедра высшей математики в МЛТИ имела глубокие традиции. В довоенный период в институте работали Н.Н. Лузин, О.Ю. Шмидт, С.А. Чаплыгин, А.Ф. Иоффе, а также Д.Е. Меньшов и Н.К. Бари [1].

"Новая волна" (1959 г.)

Реорганизация преподавания математических дисциплин на кафедре была бы невозможной, если бы не приток людей, лично приглашенных С.П. Королевым или его помощниками [1, 4].

Так, ответственным исполнителем научных отчетов на кафедре стал фронтовик, кандидат физико-математических наук К.А. Карачаров, который после ухода в МГУ им. М.В. Ломоносова Н.В. Ефимова какое-то время возглавлял кафедру высшей математики. Одновременно с преподаванием он работал в Конструкторском Бюро С.П. Королева, а ранее имел непосредственное отношение к легендарным исследованиям немецких ракет ФАУ, которые проводились в подмосковном Калининграде. Ведущими лекторами на факультете ЭСТ стали также Г.А. Силин и А.А. Манасян, которые успешно занимались прикладными задачами газовой динамики и теории колебаний.

С практическими исследованиями Г.А. Силина в КБ С.П. Королева связан один довольно интересный эпизод. Однажды группа ученых и инженеров, которую он возглавлял, получила задание дать расчет оптимальной с точки зрения безопасности толщины обшивки первого возвращаемого после полета на Землю космического аппарата. Результаты, приведенные в отчете Г.А. Силина были таковы: толщина стенок аппарата не должна была быть меньше 10 мм. Отчет попал на стол С.П. Королеву. "Что это за странная рекомендация?" - воскликнул он при обсуждении проекта и наложил резолюцию: "Толщина стенок – 10 см." (Как тут не вспомнить известную королевскую резолюцию: "Луна – твердая".)

Полет оказался успешным, аппарат вернулся на Землю. Спустя несколько дней совершенно случайно Г.А. Силин столкнулся в коридоре с М.П. Королевым. "А ну-ка, пойдемте со мной", – сказал он Силину. Они прошли в специальную, хорошо охраняемую комнату, где стоял космический аппарат. Сдернув с него чехол, Королев показал ему повреждение обшивки.

"Повреждения-то оказались не глубже 9 мм", – сказал Генеральный Конструктор [1].

В стенах МГУ леса до сих пор работает с аспирантами лично приглашенный С.П. Королевым на кафедру высшей математики профессор В.А. Шачнев – ведущий специалист в теории катастроф.

Значительное влияние на фундаментальную математическую подготовку, позволяющую ставить перед студентами реальные задачи космических исследований, оказали пришедшие из космических научно-исследовательских институтов известные ученые: Я.В. Малков, О.Н. Новоселов, В.Н. Харченко, В.П. Веденин, Л.А. Позняк, Ю.А. Демьянов, Н.М. Иванов, В.И. Лобачев, В.Г. Домрачев, летчик-космонавт СССР О.Г. Макаров и другие.

Необходимо отметить и то, что сейчас факультет возглавляет обладающий большим опытом работы в космических НИИ профессор А.А. Корольков.

Модернизация программ преподавания математических курсов с учетом требований практических подразделений привела не только к появлению в программах ряда технических специальностей таких новых для своего времени математических дисциплин, как математическая логика, теория алгоритмов, теория графов, теория катастроф и т.д., но и к созданию единого преемственного образовательного цикла, начиная от кафедр высшей математики и физики до кафедр прикладной математики и математического моделирования.

Библиографический список

1. *Рыбников, К.К.* Математики Московского государственного университета леса [Текст]: учеб. пособие / К.К. Рыбников. – М.: ГОУ ВПО МГУЛ, 2009. – 132 с.
2. *Рыбников, А.К.* Николай Владимирович Ефимов. Работа в Московском лесотехническом институте (1943-1957) [Текст] / А.К. Рыбников, К.К. Рыбников // Труды Международной школы-семинара по геометрии и анализу, посвященной 90-летию Н.В. Ефимова. – Абрау-Дюрсо: Лиманчик, 2000. – С. 7-8.
3. *Сабитов, И.Х.* Краткий курс жизни и творчества Николая Владимировича Ефимова (1910-1982) [Текст] / И.Х. Сабитов // Материалы международной конференции "Метрическая геометрия поверхностей и многогранников". – М.: МАКС Пресс, 2010. – 25 с.
4. *Рыбников, К.К.* Сергей Павлович Королев и создание факультета электроники и системотехники. Реорганизация математической подготовки инженеров в МЛТИ [Текст] / К.К. Рыбников, К.Ю. Колесин // Вестник МГУ леса. Лесной вестник. – 2009. – № 6(69). – С. 6-8.

О некоторых принципах построения учебного курса "Дискретная математика" для студентов инженерных специальностей

К.К. Рыбников, О.К. Чернобровина

Курс "Дискретная математика", предлагаемый для студентов инженерно-технических специальностей, занимает, пожалуй, особое место среди большого количества фундаментальных дисциплин, образующих то, что принято называть математическим аппаратом будущего инженера. Дело в том, что, в отличие от классических математических разделов учебной программы, таких как аналитическая геометрия, линейная алгебра и математический анализ, содержащих результаты математической теории в лучшем случае до середины XIX века, дискретная математика достигла наибольшего своего развития во второй половине XX века в связи с появлением математической кибернетики, преломляющей практические проблемы в новые направления математического моделирования, сводящиеся к анализу свойств структур конечного характера. В связи с этим практически каждый раздел дискретного анализа имеет непосредственную практическую интерпретацию, дающую возможность подойти к тому, что в конечном счете является главной целью обучения – сформировать у студента основные навыки построения математических моделей реальных технических процессов.

Каждый, более или менее ответственно относящийся к своей работе, лектор прежде, чем приступить к определению для себя структуры курса, должен обратить внимание на необходимость соблюдения следующих принципов:

1. Лекционный курс должен быть логически стройным, то есть его главы должны иметь четкие структурные связи друг с другом, что позволяет студенту воспринимать курс как единое целое.

2. Необходимо соблюдать преемственность курса относительно всего процесса обучения студента математике. Этот принцип хорошо известен преподавателям. Стоит, например, вспомнить высказывание К.Д. Ушинского: "Для того, чтобы предмет был понятен, он должен быть немного знаком, немного нов".

В нашем случае следует показать существенные связи между понятиями, идеями и методами классической и дискретной математики, поскольку ни в школе, ни в высшем учебном заведении при изучении других математических дисциплин это не делается. В школьном курсе вообще нет понятия дискретной функции. В результате выпускник школы часто пребывает в заблуждении, что все функции – непрерывные.

3. Наконец, при подготовке инженеров необходимо, чтобы практически каждый раздел курса можно было бы сопроводить анализом прикладного характера.

Более того, последнее является практически обязательным для каждого курса, так как студент должен видеть **цель** математического курса, а целью является в данном случае умение предлагать реально применяемые математические модели.

4. Связующей нитью всего курса должна быть одна идея (максимум – две идеи), универсальность и глобальность которой позволяет студенту понять сущность изучаемой теории. Только в этом случае можно рассчитывать на естественное усвоение материала и понимание его прикладного характера. Проще говоря, будущий инженер должен знать, зачем ему нужна математическая теория.

Что же мешает лектору придерживаться этих, довольно очевидных, принципов построения курса?

1. Как правило, в технических вузах изучение дискретной математики предлагается на младших курсах (II, III семестры), когда студенты имеют весьма малый опыт в постижении математического аппарата, да и сам этот аппарат, которым они успели овладеть, недостаточно глубок.

2. Как уже говорилось выше, понятия дискретной математики оказываются абсолютно новыми для студентов.

3. Еще одна трудность заключается в том, что, как справедливо отметил Томас Саати [1], "дискретная математика в отличие от непрерывной не имеет единой теории".

Надо сказать, что существующие в настоящее время общеобразовательные государственные стандарты (ГОС ВПО) не способствуют преодолению этих трудностей.

Так, например, ГОС ВПО для направления подготовки дипломированного специалиста по специальности 653800 – "Стандартизация, сертификация, метрология" для дисциплины "Дискретная математика" выделяются основные разделы: логическое исчисление, теория графов, комбинаторика, теория алгоритмов и сложность вычислений, теория автоматов. На реализацию этой программы выделяется 102 часа, причем предполагается, что будут прочитаны 17 лекций и проведены 17 практических занятий.

Ясно, что прочитать качественный курс, основанный на сформулированных выше принципах, просто невозможно. Одна только теория графов, не говоря уже о теории автоматов, требует практически всего отведенного для лекций времени.

Немногим лучше выглядит ГОС ВПО для направления подготовки 230100(552800) "Информатика и вычислительная техника". Освоить курс дискретной математики предлагается за 140 часов, причем на I курсе (II семестр). По учебным планам на это отводится 17 лекций (34 часа) и 25-26 практических занятий (51 час). Основные разделы при этом определяются следующим перечнем: множества и их спецификации, диаграммы Венна, отношения и свойства отношений, разбиения и отношения эквивалентности, отношение порядка, функции и отображения, операции, основные понятия теории графов, маршруты, циклы, связность, планарные графы, переключательные функции (ПФ), способы задания ПФ, специальные разложения ПФ, неполностью определенные (частные) ПФ, минимизация ПФ и неполностью определенных ПФ, теорема о функциональной полноте, примеры функционально-полных базисов, разрешимые и неразрешимые проблемы, схемы потоков данных.

Надо ли говорить о том, что эти государственные стандарты не соответствуют ни одному из принципов построения лекционного курса, о которых мы говорили выше? Абсолютно не просматривается ни цель курса, ни связи между разделами, ни основные идеи предмета, ни, тем более, выходы на **практическое** математическое моделирование. Кроме того, обилие разнообразных, мало связанных друг с другом направлений дискретного анализа, которые должен изучить в течение одного семестра студент, напоминают пейзаж Слона-живописца из басни С. Михалкова, который изобразил в своей картине все, что может понравиться различным специалистам, в том числе и "мед, на случай, коль Медведь придет".

Авторы предлагают свою версию построения учебного курса для инженерных специальностей. Курс состоит из следующих больших блоков:

1. Основы математической логики. Элементы комбинаторики. Функции, определенные на конечных множествах. Конечные группы, кольца, поля.

2. Дискретные функции и идеи их непрерывной аппроксимации. Табличные функции и методы интерполяции. Метод наименьших квадратов. Подходы к прогнозированию.

3. Связь между множествами решений систем булевых уравнений и множествами $(0,1)$ – точек выпуклых многогранников.

4. Методы целочисленного программирования как основа определения $(0,1)$ – точек выпуклых многогранников.

5. Методы решения экстремальных задач на конечных множествах. Метод ветвей и границ. Линейные и квадратичные задачи о назначениях. Задача о коммивояжере. Основные понятия теории графов и методы целочисленного программирования, применяемые для решения экстремальных задач на графах.

6. Практические приложения. Анализ универсальных узлов преобразований электронных схем и схем функционирования формальных нейронов в нейрокомпьютерных сетях как изучение множества решений системы булевых уравнений (см., например, [2]).

Представляемая программа прошла апробацию в качестве лекционного курса первого из авторов настоящей статьи в МГУ леса на факультете электроники и системотехники в течение восьми лет. Второй из авторов ввел в практику преподавания специальных инженерных дисциплин математические модели предлагаемого курса.

Целью курса является, прежде всего, оснащение будущих инженеров аппаратом анализа экстремальных задач дискретного анализа. Оригинальной частью этого направления является знакомство с моделями полиэдрального характера (п. 6).

Взаимосвязи непрерывного и дискретного математического аппарата определяются п. 2-4.

Авторы статьи полагают, что рассмотрение методов решения экстремальных задач на конечных множествах наряду с эквивалентными интерпретациями узлов электронных схем (п. 5-6), позволят студентам ощутить прикладной характер учебной дисциплины.

Целостность курса также определяется единой идеей анализа дискретных математических объектов – разработкой методов направленного перебора.

Полностью декларируемые авторами положения реализованы в книге [3], получившей как учебное пособие гриф УМО по специальностям 090102 (“Компьютерная безопасность”) и 090106 (“Информационная безопасность телекоммуникационных систем”).

Библиографический список

1. *Саати, Т.* Целочисленные методы оптимизации и связанные с ними экстремальные проблемы [Текст] / Т. Саати. – М.: Мир, 1973. – 302 с.
2. *Рыбников, К.К.* Полиэдральный подход к анализу некоторых узлов преобразований электронных схем. Целочисленные многогранники [Текст] / К.К. Рыбников, О.К. Чернобровина // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 2010. – Т. 17. – Вып. 4. – С. 586-587.
3. *Рыбников, К.К.* Введение в дискретную математику и теорию решения экстремальных задач на конечных множествах [Текст] / К.К. Рыбников. – М.: Гелиос АРВ, 2010. – 320 с.

Технологии реализации профессионально-исторической подготовки учителя математики

В.Е. Пырков

Одной из тенденций развития математического образования является его гуманитаризация, которая в современных реалиях получила официальный статус и документальное оформление своего содержания. Так, в примерных программах по учебным предметам основной школы по стандартам второго поколения образовательная область “математика” призвана предстать перед учеником, прежде всего, как элемент человеческой культуры. С этой целью в содержание программы был введен новый раздел – “Математика в историческом развитии”, призванный реализовать общеинтеллектуальное и общекультурное развитие учащихся.

История науки все шире проникает в учебники математики, но пока не более чем в качестве “исторических комментариев” к изучаемому материалу параграфа. Курс истории математики изучается будущими учителями в педагогических вузах, правда в ничтожно малом объеме. Этого явно недостаточно для реализации положений современной программы по математике и создания в процессе обучения гуманитарного культурно-исторического фона.

Профессионально-историческая подготовка учителя математики способна разрешить не только эту проблему, но и способствовать формированию адекватной исторической памяти и осознанной национальной идентичности. Как отмечает Т.С. Полякова, изучая историю математики и историю математического образования – базовых интегративных курсов профессионально-исторической подготовки учителя математики, будущий специалист будет “в состоянии понять и оценить тот вклад, который внесли отечественные деятели науки и образования в мировой процесс развития той отрасли знаний, которая является определяющей в его специальности" [1, с. 213].

Разрабатываемая нами *система профессионально-исторической подготовки учителя математики*, описанная нами ранее[1], включает в себя следующие компоненты: 1) математико-методологический; 2) историко-математический; 3) историко-методический; 4) историко-педагогический; 5) историко-философский; 6) культурно-исторический; 7) регионально-исторический. Полноценное функционирование этой системы должны обеспечивать интеграционные связи ее структурных компонентов. Рассмотрим соотношение указанных компонентов в профессионально-исторической подготовке учителя математики и степень влияния на их возможное взаимодействие в соответствии со стандартами ГОС ВПО третьего поколения.

Первые три структурных компонента системы профессионально-исторической подготовки учителя математики образуют ее историко-методологический модуль. Его содержание, являясь вариативной частью стандарта, составляет основу профессионально-исторической подготовки и формируются средствами интегративных курсов профессионально-исторической направленности. Они предполагают непосредственное влияние на свое содержание и технологии его реализации, так как специально разрабатывались для достижения целей профессионально-исторической подготовки учителя математики с учетом специфики образовательной области "математика".

Оставшиеся четыре компонента: историко-педагогический, историко-философский, культурно-исторический и регионально-исторический – являются, скорее, общеинтеллектуальным фоном для изучения остальных компонентов. Они формируются в неявном виде в курсах гуманитарного, социального и экономического цикла (базовый: история, философия; вариативный: культурология) и профессионального цикла (базовый: педагогика). Степень влияния на них с ориентацией на специфику профессиональной подготовки учителя математики если и возможна, то в малой степени. Как правило, эти курсы читаются профессионалами-предметниками межфакультетских кафедр, а для достижения планируемого эффекта требуется комплексное знание, сфокусированное сквозь специалиста-математика, специалиста-историка и специалиста-предметника (педагогика, философия, культурология) в одном лице. Влияние это возможно лишь посредством предложений по включению в рассмотрение содержания отдельных аспектов предполагаемого культурно-исторического фона для первых трех компонентов и реализации этих предложений при изучении соответствующих базовых курсов. Заметим, что регионально-исторический компонент, ввиду его особой значимости и мощного воспитательного потенциала [11], рассматривается нами специально как составная часть в содержании историко-математического и историко-методического компонента включением вопросов по развитию математики и математического образования на Дону.

Итак, контролируемому нами влиянию может быть подвержен именно историко-методологический модуль. Опишем используемые образовательные технологии его реализации в процессе профессиональной подготовки учителя математики. В качестве основных мы используем: для организации учебного процесса – технологии модульного и асинхронного обучения; для реализации содержания профессионально-исторической подготовки учителя математики – технологии развития критического мышления, компьютерные технологии обучения и современные средства оценивания результатов обучения. Опишем средства и варианты использования в учебном процессе указанных технологий обучения.

Структура разработанной нами системы профессионально-исторической подготовки учителя математики организована по модульному принципу. На макроуровне профессионально-историческая подготовка учителя математики сама по себе выступает в качестве модуля как организационно-методическая междисциплинарная структура, включающая в себя набор самостоятельных содержательных элементов из разных учебных дисциплин, необходимых для освоения специальности учителя математики и обеспечивающая междисциплинарные связи учебного процесса. Как было обосновано выше, основными учебными дисциплинами профессионально-исторической подготовки учителя математики являются курсы "История математики", "История отечественного школьного математического образования" и "История математики и математического образования в России". Для каждой из них, нами (в соавторстве с Т.С. Поляковой) были разработаны рабочие программы, на модульной основе определяющие учебный процесс и полностью поддерживающие его. При этом использовалось понятие модуля как организационно-методической структурной единицы в рамках одной учебной дисциплины, включающей в себя комплексную цель, логически завершенную единицу учебного материала, сформированную с учетом внутрипредметных и междисциплинарных связей, методические комментарии (с дидактическим сопровождением) и систему контроля.

Приведем, для конкретности, названия модулей, формирующих содержание указанных дисциплин (см. табл. 1).

Структура модулей примерно одинакова. В каждом модуле выделены познавательные и функциональные цели. Реализация познавательных целей должна способствовать формированию системы фундаментальных профессионально значимых для учителя математики исторических знаний. Она обеспечивается содержанием учебного материала, формируемого вокруг базовых понятий учебной дисциплины. Реализация функциональных целей призвана обеспечить формирование специальных профессиональных компетенций будущего учителя математики.

[1] См. подробнее [2-4, 12].

Таблица 1

Учебная дисциплина	**Модули**
“История математики” (бакалавриат)	1. Предмет, основная цель и задачи дисциплины “История математики”, основные периоды развития математики как науки. 2. Математика древних цивилизаций. 3. Математическая культура Древней Греции. 4. Математическая культура средневековой арабской цивилизации. 5. Европейская математика средневековья и эпохи Возрождения. 6. Из истории развития арифметики, алгебры, геометрии, тригонометрии и начал анализа.
“История математики в России” (специалитет)	1. Обзор европейской математики XVII-XVIII вв. 2. Допетровский период развития математики в России. 3. Математика в России XVIII – начала XIX вв. 4. Математика в СССР. Современный период развития отечественной математики. 5. Развитие математики на Дону.
“История отечественного школьного математического образования” (специалитет)[1]	1. Введение в дисциплину. Основные этапы развития отечественного школьного математического образования. 2. Математическое образование от Киевской Руси до конца XVII в. 3. Математическое образование в Российской империи XVIII – начала XX в. 4. Математическое образование в СССР. 5. Современный этап и перспективы развития отечественного математического образования.

Основными преимуществами использования модульной технологии обучения при реализации профессионально-исторической подготовки учителя математики являются:

– возможность “погружения” в исторический период и тематику каждого модуля, обеспечивающая интенсификацию информационно-деятельностного процесса обучения;

– оптимизация работы преподавателя за счет четкого, методически обоснованного согласования всех видов учебного процесса внутри каждого модуля и полного дидактического сопровождения к нему;

– оперативный и эффективный поэтапный контроль усвоения знаний студентов, предусматривающий оптимальность объема контролируемых знаний и умений и исключающий его перегрузку;

– гибкость структуры модульного построения курса, позволяющая индивидуализировать процесс обучения, делающая возможным использование асинхронного обучения и перехода на уровень управляемого самостоятельного обучения.

Использование технологий асинхронного обучения при реализации профессионально-исторической подготовки учителя математики обеспечено:

– возможностью студента сформировать и оформить индивидуальный учебный план;

– возможностью пройти обучение дистанционно, используя ресурс электронного обучения (http://e-learning.rspu.edu.ru), содержащий соответствующие курсы, созданные в среде MOODLE;

– достаточным перечнем читаемых на факультете математики, информатики и физики Педагогического института ЮФУ курсов по выбору профессионально-исторической направленности[2].

В данный момент ведется работа по разработке и созданию системы подкастов, поддерживающих профессионально-историческую подготовку учителя математики на базе мобильных устройств (аудио-лекции, видео-фрагменты, тезисное изложение теоретического материала и его резюме в формате e-book, тестовые приложения и др.).

Компьютерные технологии активно привлекаются для организации как аудиторной, так и самостоятельной работы студентов. В аудиторной работе нами используются компьютерные презентации, сопровождающие лекции; компьютерное тестирование для текущего (по окончании каждого модуля) и итогового контроля; работа со

[1]На уровне магистратуры содержание двух последних курсов объединено в рамках дисциплины “История математики и математического образования в России”.

[2]“История избранных разделов высшей геометрии” (Романов Ю.В.); “История избранных разделов алгебры и теории чисел” (Коршунова Е.А.), “Историко-методологические проблемы основ математического анализа” (Белик Е.В.), “Технология историзации школьного математического образования” (Михайлова И.А.).

специально созданными электронными учебно-методическими пособиями, обеспечивающими профессионально-историческую подготовку учителя математики [13, 8]. К настоящему времени на кафедре геометрии и методики преподавания математики Педагогического института ЮФУ разработаны и используются в образовательном процессе электронные учебно-методические пособия (ЭУМП) "История математики" [5], "История математики в России" и "История отечественного школьного математического образования" [6]. Структура и технология работы с указанными электронными пособиями примерно одинаковы. Они содержат в себе методологическую составляющую, которая включает цели, задачи и место курса; формируемые компетенции, ожидаемые результаты; структуру и содержание модулей; характеристику самостоятельной работы студентов; сведения о разработчиках.

Содержание основных модулей ЭУМП включает в себя: комплексную цель, краткое теоретическое содержание, компьютерную презентацию к циклу лекций, планы семинарских занятий с вопросами для обсуждения и списком литературы для подготовки к ним; видеотеку; материалы для организации, методического обеспечения и контроля самостоятельной работы студентов: бланки кратковременных контрольных работ, темы рефератов, задания для работы с первоисточниками; тесты для рубежного контроля и др.

Каждое пособие содержит в себе электронную библиотеку цифровых копий книг, необходимых для изучения соответствующего курса, но ставших библиографической редкостью, а также блок итогового контроля, включающий итоговый компьютерный тест и программу аттестации по дисциплине.

Самостоятельная работа студентов предполагает использование компьютерных технологий не только при поиске информации в сети интернет для подготовки к семинарским занятиям и составления аннотированного каталога интернет-ресурсов по каждому модулю, но и пополнение этой информации из традиционных источников, например, путем создания персональных страничек в Википедии об известных представителях ростовской математической школы и видных деятелях отечественного математического образования. Компьютерные технологии используются для подбора, оцифровки и обработки иллюстративного материала (графического и видео) для пополнения видеотеки и подготовки презентаций к докладам на семинарских занятиях, а также для создания элементов деловой графики (обобщающих таблиц, схем, диаграмм) и историко-математических постеров.

При реализации профессионально-исторической подготовки учителя математики особую роль мы отводим его самостоятельной работе с текстом, используя при этом приемы технологии развития критического мышления через чтение и письмо. Преимущественно, это задания для самостоятельной домашней работы студента. Чтобы сделать чтение активным процессом, во время которого студент исследует текст для более глубокого его осмысления и формирования собственной версии понимаемого текста мы используем следующие приемы:

– интересные задания, связанные с чтением (поиск ответов на интригующий вопрос. Например, "Кто из представителей французской математической школы тесно общался с императором Наполеоном? Расскажите историю их взаимоотношений", "Какое отношение имеет Петр I к первой книге, напечатанной на русском языке типографским шрифтом? Что это была за книга?");

– требование конспектировать прочитанное (создавать краткие заметки, резюме, "карты памяти", выписать ключевые утверждения, подготовить полновесные конспекты собственными словами и др. Подобные задания разработаны нами по каждому модулю для работы с первоисточниками историко-математических текстов);

– структурирование материала по новому (например, при подготовке рефератов по персоналии требуется составить сводную таблицу основных дат жизни и событий, оказавших влияние на становление ученого и отражающих его основные достижения);

– чтение текстов и просмотр видео с разметкой (прием INSERT);

– чтение текстов "информационных пакетов" с целью представления информации в аудитории (при подготовке к семинарскому занятию);

– чтение текстов для поиска конкретной информации (желательно, чтобы ответы не были явными, чтобы студентам пришлось "покопаться", проанализировать несколько текстов и сопоставить факты из них, в том числе, и в некнижных источниках информации; приветствуется поиск ответов на вопросы в интернете. Для организации подобной работы потребуются качественные вопросы и ситуативные задачи);

– работа с текстами, содержащими ошибки[1] на предмет их комплексного критического осмысления и указания найденных несоответствий.

Проиллюстрируем последние два пункта примерами, представив ниже подобные задания из 3 модуля "Математическая культура Древней Греции" курса "История математики".

Задачи и вопросы к модулю 3

1. Как эллины определяли и как строили эллипс, параболу и гиперболу? Какие их свойства были известны?
2. Почему Евклид не включил описание эллипса, параболы и гиперболы в книгу "Начала"? Кто из античных математиков впервые описал их свойства? Чем еще знаменит этот геометр?

[1] См. подробнее [14].

3. В каких разделах современного школьного курса математики и каким образом изучаются эллипс, парабола и гипербола? Можно ли (и целесообразно ли) заменить этот подход на традиционный – через сечения конусов?
4. В чем состоят "зеркальные" свойства эллипса, параболы и гиперболы? Как они использовались в античном мире, как используются сейчас?
5. Рассмотрите формулы длины окружности и площади круга. Почему одна из них легко переносится на эллипс, а другая нет? Кто впервые выяснил этот факт? Как его доказать?
6. Какие инструменты нужны, чтобы нарисовать на бумаге эллипс, параболу или гиперболу?
7. Каким путем Архимед вычислил площадь треугольника, две стороны которого – прямые, а третья – парабола? Что общего в этом способе с вычислением объема пирамиды?
8. Придумайте геометрическую или механическую задачу на "метод песчинок", в которой придется вычислять сумму кубов первых натуральных чисел. Решал ли Архимед эту задачу?
9. Почему Архимеду удалось вычислить площадь, ограниченную параболой, но не удалось вычислить длину дуги параболы?
10. Позволяет ли "метод песчинок" вычислять число π с любой точностью? С какой точностью знал это число Архимед? Кто из античных ученых нашел более точную оценку и каким способом?
11. Как античные математики выводили формулы суммы первых квадратов или кубов натуральных чисел? Какие иные способы их вывода известны сейчас?
12. Какое свидетельство своих открытий завещал Архимед изобразить на своем надгробии?
13. Где в природе можно наблюдать "спираль Архимеда"? Как она возникает?
14. Какая судьба постигла Александрийский Музей после того, как Египет стал провинцией Рима?
15. Чем отличается расчет объема шара в современном учебнике геометрии от схем Евклида и Архимеда?
16. Какие открытия Эратосфена оказали наибольшее влияние на развитие античной науки?
17. Какая работа содержала более трудные математические расчеты: вычисление диаметра Земли (по Эратосфену) или диаметра Солнца (по Аристарху)?
18. Что было вычислено в первую очередь: длина окружности или площадь круга, поверхность шара или его объем?

Для поиска ответов на эти вопросы студентам предлагаются "информационные пакеты" включающие в себя хрестоматии первоисточников математических текстов и базу данных статей сборника "Историко-математические исследования" [7] с тематическим указателем к ней [9].

Текст с ошибками к модулю 3

Пифагор (текст с ошибками)

День сегодня торжественный: ровно 30 лет назад на широкой приморской равнине у Фермопил фаланга афинян разгромила бесчисленные и беспорядочные орды персов. В тот день олимпийский чемпион в стрельбе из лука – молодой Пифагор добавил к золотому венку еще более ценный трофей: железную корону Ксеркса, которую трусливый царь забыл в своем шатре.

Через год на Форуме перед Парфеноном появилась гранитная статуя юного героя. Сам Перикл произнес торжественную речь и принес жертву Асклепию от имени своего лучшего дружинника, а старый Еврипид сложил оду в честь избранника судьбы.

Можно ли превзойти такую славу? Этот вопрос Пифагор задавал себе не раз и не два, но не сумел найти ответа. Наконец помог советом товарищ по оружию – Сократ, который не уступал Пифагору в доблести, но был куда менее удачлив.

"Пифагор! Нам с тобою надо менять профессию и искать новое счастье в жизни. Я пойду учиться у Парацельса и стану врачом, ты же иди к старому Евклиду и докажи ему, что не только робкие тихони могут достичь вершин геометрии!" – таков был совет мудрого друга. Пифагор последовал ему, и вновь потекли трудные годы в гимназии ...

Евклид был суров: часто повторяя, что "в геометрии нет царских и олимпийских дорог", он признал Пифагора достойным учеником лишь после того, как тот прочел все пять книг "Начал" и составил к ним задачник. Все задачи были тут же решены Пифагором и его новыми друзьями: Диофантом, Платоном, Аристотелем. Все кроме одной: как измерить диагональ в квадрате? Оказалось, что никто в мире – даже мудрые египтяне, даже сам Учитель не умеет этого делать! В тот день Пифагор решил: "Вот новая цель моей жизни! Если я достигну ее, то принесу Гекате небывалую жертву – сто черных коней!"

Пифагор (комментарии к ошибкам в тексте)

- У Фермопил афиняне и прочие греки потерпели поражение от персов.
- Стрельба из лука не входила в программу Олимпийских игр – греки считали этот вид спорта варварским.
- Пифагор, согласно легенде, был олимпийским чемпионом в кулачном бою.
- "орды персов" – бессмыслица; слово "орда" появилось в Европе только в эпоху гуннов, оно взято из тюркского языка.

- Железная корона в Персии появилась при Сасанидах (в III в н.э.); царь Ксеркс был из династии Ахменидов и носил золотую корону.
- Форум был в Риме, в Афинах была Агора.
- Эллины не создавали гранитных статуй, только мраморные.
- Перикл жил позже Греко-персидских войн.
- Еврипид жил еще позже Перикла и гораздо позже Пифагора.
- В эпоху Греко-персидских войн в Элладе уже не было дружин, они существовали в эпоху военной демократии (при Гомере и раньше).
- Асклепий – бог медицины, ему не приносили жертвы в честь военных подвигов.
- Пифагор умер накануне Греко-персидских войн, будучи уже стариком.
- Сократ жил на век позже Пифагора.
- Парацельс – средневековый врач (XVI в.)
- Евклид жил на два века позже Пифагора.
- Греческие геометры не составляли задачников.
- Платон и Аристотель жили на полтора века позже Пифагора, Диофант жил еще позже них.
- Греки приносили в жертву не коней, а быков или баранов.
- Геката – богиня луны и колдовства; жертву в благодарность за научное открытие следовало принести Афине – богине мудрости.

На домашнее чтение ориентированы и вопросы из плана лекции, вынесенные на самостоятельное изучение. При этом, студентам указывается конкретный источник информации и страницы, которые нужно прочитать. Результат этой работы обязательно проверяется в начале следующей лекции пятиминутным бланочным тестированием, включающем 2-3 вопроса на качественное понимание прочитанного текста.

Другими примерами работ по созданию собственных текстов являются:

– написание эссе (при изучении модулей, связанных с современным состоянием и перспективами развития математики и математического образования);

– подготовка рефератов (под рефератом понимается доклад на определенную историко-математическую тему из предложенного списка, либо сформулированную студентом самостоятельно и согласованную с преподавателем, включающий обзор соответствующих литературных и других источников, в том числе, Интернет-ресурсы. Реферат должен включать в себя элементы творческой переработки оригинальных текстов, не повторяя их буквально. Защита реферата проводится на одном из семинарских занятий, зачете или экзамене, в сопровождении электронной презентации, подготовленной студентом);

– разработка конспектов внеклассных занятий или фрагментов уроков с использованием историко-математического материала;

– подготовка текста выступления на семинаре[1].

Так, например, определившись с тематикой выступления на семинарском занятии, студенту рекомендуется:

– отобрать подходящие источники (первоисточники) информации по теме исследования; составить библиографию;

– подобрать соответствующий иллюстративный и видео-материал;

– выполнить анализ содержания отобранных источников, обобщить полученные результаты;

– сформулировать основные положения по теме доклада и сделать выводы;

– продумать возможные варианты и способы представления полученных результатов (стендовый доклад, компьютерная презентация, проблемная дискуссия и др.);

– сформулировать предложения по дальнейшей работе в данной тематике;

– предложить варианты использования представленного материала в процессе обучения математике в школе;

– предложить несколько вопросов для включения в тестирование по теме своего доклада.

Итак, к курсам, реализующим профессионально-историческую подготовку учителя математики, разработана система самостоятельной работы и оценочных средств текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов. К ним относятся:

– серия компьютерных тестов;

– цикл кратковременных (5-минутных) контрольных работ для бланочного тестирования;

– вопросы для самоконтроля к семинарским занятиям;

– тематика рефератов;

– задания для работы с первоисточниками;

– тематика докладов для обсуждения на семинарах;

– тематика уроков математики и внеклассных занятий для разработки их конспектов или фрагментов с использованием историко-математического материала;

– программа зачета;

[1] См. подробнее [10].

– программа экзамена.

Тематика исследовательского коллективного творческого историко-математического проекта формируется в результате совместного обсуждения студентов в первые две недели изучения курса.

Основным оценочным средством текущего контроля успеваемости студента является одно из современных средств оценивания результатов обучения – портфолио. В нем представлены результаты практической деятельности студента по овладению содержанием курса и формированию основных профессиональных и специальных историко-математических компетенций.

В структуру портфолио входят:

– конспекты лекций;

– письменные кратковременные контрольные работы, их результаты и самоанализ студента успешности их написания с ликвидацией пробелов в знаниях;

– распечатки с результатами прохождения компьютерного тестирования по модулям и итогового теста;

– результаты работы с первоисточниками историко-математических и математико-методических текстов;

– реферат и обзор литературы по его тематике;

– материалы докладов по вопросам, обсуждаемым на семинарских занятиях;

– разработки уроков математики и внеклассных занятий по математике на основе историко-математического материала или с использованием историко-генетического метода;

– анализ просмотренного видео с разметкой;

– результаты деятельности в коллективном творческом проекте по дисциплине;

– другие результаты практической деятельности (макет историко-математической газеты, макеты постеров о деятельности выдающихся математиков, компьютерные презентации к семинарским занятиям и т.п.).

По окончании каждого модуля проводится мониторинг портфолио студента, результаты которого учитываются в индивидуальной рейтинговой оценке успешности его деятельности по овладению тем или иным курсом профессионально-исторической направленности.

Использование описанных образовательных технологий, прогрессивных форм организации профессионального образования (асинхронное обучение, управляемое самостоятельное обучение) и активных методов обучения способно не только повысить эффективность учебного процесса до соответствия современному уровню, но и станет образцом их применения в профессиональной деятельности будущих учителей математики.

Библиографический список

1. *Полякова, Т.С.* Роль историко-профессиональной подготовки учителя математики в противодействии фальсификации истории [Текст] / Т.С. Полякова // Профессионально-педагогическая направленность математической подготовки учителя математики в педвузах и университетах в современных условиях: материалы 29-го Всероссийского научного семинара преподавателей математики вузов. – М.: МГПУ, 2010.
2. *Полякова, Т.С.* Историко-методологический компонент подготовки бакалавров и магистров по профилю “математическое образование” [Текст] / Т.С. Полякова, В.Е. Пырков // Современная математика и математическое образование, проблемы истории и философии математики: материалы международной научной конференции. – Тамбов: ТГУ, 2008.
3. *Полякова, Т.С.* Историко-методологический компонент профессиональной подготовки учителя математики [Текст] / Т.С. Полякова, В.Е. Пырков // Тезисы Всероссийского съезда учителей математики в Московском университете. – М.: МГУ, 2010.
4. *Полякова Т.С., Пырков В.Е.* Историко-методологический модуль системы профессионально-исторической подготовки учителя математики в условиях многоуровневого образования университетского типа [Текст] / Т.С. Полякова, В.Е. Пырков // Известия Южного федерального университета. – Ростов-на-Дону: ИПО ПИ ЮФУ, 2008. – № 5.
5. *Полякова, Т.С.* История математики [Электронный ресурс]: электронное учеб. пособие / Т.С. Полякова, В.Е. Пырков // Хроники объединенного фонда электронных ресурсов “наука и образование”, 2009. – № 7.
6. *Полякова, Т.С.* История отечественного школьного математического образования [Электронный ресурс]: электронное учеб. пособие / Т.С. Полякова, В.Е. Пырков // Компьютерные учебные программы и инновации, 2009. – № 2.
7. *Пырков, В.Е.* База данных сборника статей “Историко-математические исследования” [Электронный ресурс] / В.Е. Пырков // Хроники объединенного фонда электронных ресурсов “наука и образование”, 2009. – № 7.
8. *Пырков, В.Е.* Возможности использования электронной базы данных сборника “Историко-математические исследования” в современном математическом образовании [Текст] / В.Е. Пырков // Математика. Информационные технологии. Образование. Межвузовский сборник научных трудов. – Оренбург: ОГУ, 2008.
9. *Пырков, В.Е.* “Историко-математические исследования”: Тематический указатель статей сборника за 1948-2009 годы [Текст] / В.Е. Пырков. – М.: Янус-К, 2011.
10. *Пырков, В.Е.* О семинарских занятиях по истории отечественного школьного математического образования [Текст] / В.Е. Пырков // Тенденции и проблемы развития математического образования: научно-практический сборник / под ред. Н.Г. Дендеберя, С.Г. Манвелова. – Армавир: РИЦ АГПА, 2010. – Вып. 8.

11. *Пырков, В.Е.* Региональный модуль историко-методологической подготовки по профилю "математическое образование" [Текст] / В.Е. Пырков // Материалы региональной научной конференции студентов и молодых ученых вузов Южного федерального округа. – Краснодар: КГУ, 2008.
12. *Пырков, В.Е.* Система профессионально-исторической подготовки учителя математики в условиях многоуровневого образования университетского типа [Текст] / В.Е. Пырков // Труды пятых всероссийских Колмогоровских чтений. – Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2007.
13. *Пырков, В.Е.* Электронный учебно-дидактический комплекс как современное средство реализации профессионально-исторической подготовки учителя математики [Текст] / В.Е. Пырков // Информационные технологии в образовании-2007. Сборник научных трудов VII научно-практической конференции-выставки. – Ростов-на-Дону: Ростиздат, 2007.
14. *Смирнов, С.Г.* Задачник по истории науки. От Фалеса до Ньютона [Текст] / С.Г. Смирнов. – М.: МИРОС-МАИК, 2001.

Сведения об авторах

1. *Аверинцев Михаил Борисович* – кандидат физико-математических наук, доцент МГУ путей сообщения, Москва.
2. *Алябьева Валентина Георгиевна* – кандидат физико-математических наук, доцент Пермского государственного педагогического университета, Пермь.
3. *Афанасьев Владимир Васильевич* – доктор педагогических наук, профессор ЯГПУ, Ярославль.
4. *Бабенко Алена Сергеевна* – ассистент Костромского государственного университета, Кострома.
5. *Барабанов Олег Олегович* – кандидат физико-математических наук, доцент Государственной технологической академии, Ковров.
6. *Безъязычный Вячеслав Феоктистович* – доктор технических наук, профессор Рыбинской государственной авиационной технологической академии, Рыбинск.
7. *Белая Ольга Вадимовна* – старший преподаватель Коми государственного педагогического института, Сыктывкар.
8. *Богун Виталий Викторович* – кандидат педагогических наук, старший преподаватель ЯГПУ, Ярославль.
9. *Большаков Юрий Иванович* – кандидат физико-математических наук, доцент ЯрГУ, Ярославль.
10. *Боровских Алексей Владиславович* – доктор физико-математических наук, профессор МГУ, Москва.
11. *Бородин Александр Васильевич* – кандидат физико-математических наук, доцент ЯГТУ, Ярославль.
12. *Бусев Василий Михайлович* – заведующий отделом Научной педагогической библиотеки имени К.Д. Ушинского, Москва.
13. *Бычков Сергей Николаевич* – доктор философских наук, профессор Московского института открытого образования, Москва.
14. *Василишина Надежда Владимировна* – старший преподаватель Краснодарского краевого института дополнительного профессионального педагогического образования, Краснодар.
15. *Виноградова Ольга Владимировна* – докторант Рыбинской государственной авиационной технологической академии, Рыбинск.
16. *Гильмуллин Мансур Файзрахманович* – кандидат педагогических наук, старший преподаватель Елабужского государственного педагогического института, Елабуга.
17. *Голованов Дмитрий Сергеевич* – кандидат технических наук, старший преподаватель Рыбинской государственной авиационной технологической академии, Рыбинск.
18. *Горбунова Анастасия Владимировна* – аспирантка РУДН, Москва.
19. *Губина Елена Васильевна* – кандидат физико-математических наук, доцент Волжской государственной академии водного транспорта, Н. Новгород.
20. *Гушель Николай Петрович* – кандидат физико-математических наук, доцент Ярославского филиала МИИТ, Ярославль.
21. *Гушель Ревекка Залмановна* – старший преподаватель ЯГПУ, Ярославль.
22. *Дроздов Александр Михайлович* – кандидат педагогических наук, профессор Криворожского государственного педагогического университета, Кривой Рог, Украина.
23. *Дроздов Евгений Александрович* – преподаватель информатики Криворожского государственного педагогического университета, Кривой Рог, Украина.
24. *Дюсуше Ольга Михайловна* – кандидат экономических наук, НИУ "Высшая школа экономики", Москва.
25. *Епифанова Нина Михайловна* – кандидат педагогических наук, доцент ЯГПУ, Ярославль.
26. *Ермакова Светлана Михайловна* – аспирантка ЯГПУ, Ярославль.
27. *Жаров Сергей Викторович* – кандидат физико-математических наук, доцент ЯГПУ, Ярославль.
28. *Жаров Валентин Константинович* – доктор педагогических наук, профессор Российского государственного университета сервиса и туризма, Москва.
29. *Жохов Аркадий Львович* – доктор педагогических наук, профессор ЯГПУ, Ярославль.
30. *Жуленев Сергей Викторович* – кандидат физико-математических наук, доцент МГУ, Москва.
31. *Зверкина Галина Александровна* – кандидат физико-математических наук, доцент МГУ путей сообщения, Москва.
32. *Зубова Елена Александровна* – кандидат педагогических наук, доцент Тюменского нефтегазового университета, Тюмень.
33. *Зубова Инна Каримовна* – кандидат физико-математических наук, доцент Оренбургского государственного университета, Оренбург.
34. *Игнатушина Инесса Васильевна* – кандидат физико-математических наук, старший преподаватель Оренбургского государственного педагогического университета, Оренбург.
35. *Ильина Ирина Петровна* – доцент НИУ "Высшая школа экономики", Москва.
36. *Ильязов Ильдар Фяритович* – аспирант Московского государственного гуманитарного университета, Москва.

37. *Козлов Георгий Евгеньевич* – кандидат физико-математических наук, доцент МЭСИ, Ярославль.
38. *Кордюков Антон Владимирович* – кандидат технических наук, доцент Рыбинской государственной авиационной технологической академии, Рыбинск.
39. *Корикова Тамара Михайловна* – кандидат педагогических наук, доцент ЯГПУ, Ярославль.
40. *Круглов Евгений Валентинович* – кандидат физико-математических наук, доцент Нижегородского государственного университета, Н. Новгород.
41. *Лебедев Алексей Викторович* – кандидат физико-математических наук, доцент МГУ, Москва.
42. *Лунгу Константин Никитович* – кандидат физико-математических наук, доцент МОПУ, Москва.
43. *Malonek Helmuth R.* – профессор, университет Авейро, Португалия.
44. *Малых Алла Ефимовна* – доктор физико-математических наук, профессор Пермского государственного педагогического университета, Пермь.
45. *Матвиевская Галина Павловна* – доктор физико-математических наук, профессор Оренбургского государственного педагогического университета, Оренбург.
46. *Мельников Юрий Борисович* – кандидат физико-математических наук, доцент Уральского государственного педагогического университета, Екатеринбург.
47. *Меньшикова Наталия Аркадьевна* – кандидат педагогических наук, доцент ЯГПУ, Ярославль.
48. *Митенев Юрий Андреевич* – ассистент Вологодского государственного педагогического университета, Вологда.
49. *Митенева Светлана Феодосьевна* – кандидат педагогических наук, доцент Вологодского государственного педагогического университета, Вологда.
50. *Монахов Вадим Макариевич* – академик РАО, доктор педагогических наук, МГГУ, Москва.
51. *Мусаелян Алла Георгиевна* – старший преподаватель МГУ природообустройства, Москва.
52. *Налбандян Юлия Сергеевна* – кандидат физико-математических наук, доцент Южного федерального университета, Ростов-на-Дону.
53. *Насикан Инна Витальевна* – старший преподаватель Армавирской государственной педагогической академии, Армавир.
54. *Новиков Анатолий Иванович* – кандидат экономических наук, доцент Рязанского государственного радиотехнического университета, Рязань.
55. *Острая Ольга Викторовна* – старший преподаватель Оренбургского государственного университета, Оренбург.
56. *Петрова Александра Владиславовна* – студентка, С.-Петербург.
57. *Полотовский Григорий Михайлович* – кандидат физико-математических наук, доцент Нижегородского государственного университета, Н. Новгрод.
58. *Поспелов Михаил Владимирович* – кандидат педагогических наук, доцент Коми государственного педагогического института, Сыктывкар.
59. *Пронин Дионис Игоревич* – ученик школы № 104, С.-Петербург.
60. *Пырков Вячеслав Евгеньевич* – кандидат педагогических наук, старший преподаватель Южного Федерального университета, Ростов-на-Дону.
61. *Размолодин Лев Петрович* – доктор технических наук, профессор ЯГТУ, Ярославль.
62. *Рикун Инна Эмильевна* – главный библиограф Одесской национальной научной библиотеки им. М. Горького, Одесса, Украина.
63. *Рожанская Мариам Михайловна* – доктор исторических наук, профессор, ведущий научный сотрудник ИИЕТ РАН, Москва.
64. *Розаев Алексей Евгеньевич* – ведущий инженер ОАО НПЦ "Недра", Ярославль.
65. *Розов Николай Христович* – член-корреспондент РАО, доктор физико-математических наук, профессор МГУ, Москва.
66. *Ройтенберг Владимир Шлеймович* – кандидат физико-математических наук, доцент ЯГТУ, Ярославль.
67. *Рыбников Константин Константинович* – кандидат физико-математических наук, доцент МГУ леса, Москва.
68. *Савадова Араксия Аркадьевна* – аспирантка Армавирской государственной педагогической академии, Армавир.
69. *Секованов Валерий Сергеевич* – доктор педагогических наук, профессор Костромского государственного университета, Кострома.
70. *Сергиенко Андрей Валентинович* – аспирант ЯрГУ, Ярославль.
71. *Симонов Рэм Александрович* – доктор исторических наук, профессор МГУ печати, Москва.
72. *Синкевич Галина Ивановна* – старший преподаватель С.-Петербургского архитектурно-строительного университета, С.-Петербург.
73. *Смирнов Евгений Иванович* – доктор педагогических наук, профессор ЯГПУ, Ярославль.
74. *Стакина Елена Сафаровна* – ассистент Костромского государственного университета, Кострома.

75. *Степанова Дарья Игоревна* – аспирант ЯрГУ, Ярославль.
76. *Суслова Ирина Васильевна* – старший преподаватель ЯГПУ, Ярославль.
77. *Тестов Владимир Афанасьевич* – доктор педагогических наук, профессор Вологодского государственного педагогического университета, Вологда.
78. *Тихомиров Александр Сергеевич* – доктор физико-математических наук, профессор ЯГПУ, Ярославль.
79. *Тихомиров Владимир Михайлович* – доктор физико-математических наук, профессор МГУ, Москва.
80. *Трофимец Валерий Ярославович* – доктор технических наук, профессор ЯрГУ, Ярославль.
81. *Трофимец Елена Николаевна* – кандидат педагогических наук, доцент ЯГТУ, Ярославль.
82. *Трошина Татьяна Львовна* – кандидат физико-математических наук, доцент ЯГПУ, Ярославль.
83. *Трубников Николай Андреевич* – кандидат медицинских наук, доцент ЯГПУ, Ярославль.
84. *Трубникова Жанна Николаевна* – врач-кардиореаниматолог клинической больницы им. Н.А. Семашко, Ярославль.
85. *Угольникова Ольга Дмитриевна* – кандидат физико-математических наук, доцент Института региональной экономики и управления С.-Петербургского государственного университета сервиса и экономики, С.-Петербург.
86. *Федулов Виталий Михайлович* – аспирант Рыбинской государственной авиационной технологической академии, Рыбинск.
87. *Форкунова Лариса Валентиновна* – аспирант Поморского государственного университета, Архангельск.
88. *Фукалова Ольга Вячеславовна* – старший преподаватель Пермского филиала С.-Петербурского института внешнеэкономических связей, экономики и права, Пермь.
89. *Халилова Светлана Ильдаровна* – аспирантка Пермского государственного педагогического университета, Пермь.
90. *Харламова Вера Ивановна* – профессор, университет Авейро, Португалия.
91. *Чекмарева Елена Андреевна* – аспирант Вологодского научно-координационного центра ЦЭМИ РАН, Вологда.
92. *Чернобровина Ольга Константиновна* – доцент МГУ леса, Москва.
93. *Чиненова Вера Николаевна* – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник МГУ, Москва.
94. *Шабанова Мария Валерьевна* – доктор педагогических наук, профессор, Архангельск.
95. *Ширикова Татьяна Сергеевна* – заместитель директора по учебно-воспитательной работе МОУ ОСОШ, Архангельск.
96. *Шумская Галина Витальевна* – учитель МОУ СОШ № 8, Вологда.
97. *Щукин Евгений Иванович* – кандидат педагогических наук, доцент ЯрГУ, Ярославль.
98. *Яновская Наина Борисовна* – кандидат технических наук, доцент Сибирского государственного индустриального университета, Новокузнецк.
99. *Ястребов Александр Васильевич* – доктор педагогических наук, профессор ЯГПУ, Ярославль.

Научное издание

Труды IX международных Колмогоровских чтений
Сборник статей

Издается в авторской редакции
Компьютерная подготовка оригинал-макета *Т.Л. Трошиной*

Подписано в печать 15.09.2011. Формат 60×92 1/16.
Уч.-изд. л. 39.2 Усл. печ. л. 40,5 Заказ 341 Тираж 150.

Издательство Ярославского государственного педагогического университета имени К.Д.Ушинского (ЯГПУ)
150000, Ярославль, Республиканская ул., 108

Типография ЯГПУ
150000, Ярославль, Которосльная наб., 44
Тел.: (4852) 72-64-05, 32-98-69