МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ГОУ ВПО «ЯРОСЛАВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. К.Д. УШИНСКОГО»
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМ. М.В. ЛОМОНОСОВА

ТРУДЫ

VIII МЕЖДУНАРОДНЫХ КОЛМОГОРОВСКИХ ЧТЕНИЙ

Ярославль
2010

УДК 51; 51:372.8; 51(091)
ББК 22.1 я434
Т 782

Печатается по решению редакционно-издательского совета ЯГПУ имени К. Д. Ушинского

Труды VIII Международных Колмогоровских чтений:
Т 782 сборник статей. – Ярославль : Изд-во ЯГПУ, 2010. – 532 с.

ISBN 978-5-87555-630-2

Начиная с юбилея (100-летия со дня рождения академика А.Н. Колмогорова, 2003 г.), на родине выдающегося математика XX столетия в Ярославле проводятся традиционные Колмогоровские чтения.

Настоящий сборник статей VIII Международных Колмогоровских чтений (2010 г.) так или иначе отражает интересы А.Н. Колмогорова во многих областях математики, теории и методики обучения математике, истории математики и математического образования. Воспоминания учеников и коллег А.Н. Колмогорова содержат новые факты его биографии и аспекты научно-методических интересов ученого.

Сборник будет полезен преподавателям школ и вузов, студентам и всем, кто интересуется математикой, методикой ее преподавания и историей российского образования.

УДК 51; 51:372.8; 51(091)
ББК 22.1 я434

ISBN 978-5-87555-630-2

Оглавление

Глава 1. Пленарные доклады: А.Н. Колмогоров и математика XX столетия 10

Глава 2. Математика в ее многообразии 73

Глава 3. Теория и методика обучения математике в школе и вузе 166

Глава 1

Пленарные доклады: А.Н. Колмогоров и математика XX столетия

Смысл и язык: от Выготского к Колмогорову

М.И. Башмаков

Формирование понятий является одним из центральных вопросов обучения математике. Происходящие изменения в школьном математическом образовании обострили интерес к нему не только в практической плоскости на уровне методики, но и в теоретическом плане.

Обратим внимание на три наиболее заметные переменные, которые начинают влиять на обучение математике в школе:

– происходят сдвиги в признании ценностей математического образования;

– существенно расширяется информационная среда обучения;

– меняются жизненные ориентиры молодого поколения.

В течение последних по крайней мере пятидесяти лет главными целями изучения математики в школе представлялись цели приобретения знаний и овладения навыками их использования, необходимыми для успешной жизни в современном обществе. Глубоко развитая педагогическая деятельностная концепция дала достаточную базу для методического оснащения педагогического процесса, ориентированного на конкретно очерченные результаты обучения.

На сакраментальный вопрос “кому это нужно?”, который школьники все более открыто задают по отношению к большей части классических математических умений (например, умножать столбиком многозначные числа, складывать дроби, решать запутанные уравнения, преобразовывать тригонометрические выражения, возиться с радикалами, проводить сложные геометрические построения и вычисления и т.п.) становится трудно найти убедительный ответ.

Школьник либо становится уверенным, что это никому не нужно, либо не нужно именно ему, либо, на худой конец, он найдет, на какую кнопку нужно будет нажать, если ему это действительно понадобится.

В этой обстановке, на наш взгляд, следует ожидать повышения значимости теоретических математических знаний, их более широкое включение в общий культурно-исторический контекст. Поэтому неудивительно обращение к результатам психологов в области развития мышления подростков и к переосмыслению деятельности крупных математиков по фундаментализации ядра школьной математики. В этом плане фигуры Л.С. Выготского и А.Н. Колмогорова являются наиболее знаковыми.

В тридцатые годы прошлого века Л.С. Выготский и его научная школа получили замечательные результаты по проблеме мышления и речи, по связям между обучением и развитием, по механизмам формирования научных понятий. До сих пор не все из них оказались востребованными практикой, нашли достойное методическое воплощение. Возможно этому препятствовало и то, что большинство выводов было получено на основе анализа психической деятельности детей младшего школьного возраста и оставался открытым вопрос, какие выводы переносятся на более старших школьников, в какой мере и в каких направлениях они нуждаются в корректировке.

Примерно через тринадцать лет после этого А.Н. Колмогоров при участии ряда других выдающихся математиков осуществил долго назревавшую перестройку содержания школьного математического образования. Побочные отрицательные эффекты “колмогоровской реформы” привели к ее неприятию со стороны значительной части научного педагогического сообщества. Это неприятие основывалось, прежде всего, на внешней, можно сказать, языковой стороне процесса. Так, первое яростное наступление на реформу сосредоточилось на предложенной замене привычного “равенства фигур” термином “конгруэнтность”. В то же время глубинная сторона вопроса сохранилась, ее содержательный смысл вполне соответствует новым тенденциям и можно ожидать увеличения его востребованности. Однако это не сможет произойти без существенных сдвигов в методическом обеспечении.

Таким образом, мы хотим поставить задачу методического переосмысления результатов Выготского и Колмогорова.

При попытках перевода результатов Выготского в методическое русло надо помнить, что они были получены для экспериментального исследования тех психических процессов, которые являются необходимым условием формирования научного понятия. Так как при этом отношение понятия, находившегося в поле зрения экспериментаторов, к содержанию обучения имело второстепенное значение, а иногда это понятие и просто “сочинялось”, то нельзя считать применявшуюся методику психологического эксперимента методикой организации учебной работы. В то же время критический разбор различных алгоритмов, используемых для формирования понятия, может помочь разобраться в методических просчетах и включить в практику обучения приемы, позволяющие более полно использовать скрытые психологические ресурсы и в конце концов добиться существенного повышения уровня мыслительной деятельности.

Прежде всего, Выготский критикует способ введения понятия с помощью словесного определения. По его мысли в этом случае мы предъявляем "готовый продукт", игнорируя "процесс, приводящий к образованию данного продукта. В зависимости от этого при определении готовых понятий мы имеем дело не столько с мышлением, сколько с репродукцией готовых знаний, готовых воспринятых определений". Кроме того, "метод определения оперирует почти исключительно словом, забывая, что понятие связано с тем чувственным материалом, из восприятия и переработки которого оно рождается".

Сразу можно отметить, что формальное введение математического понятия в виде слова должно учитывать предшествующий опыт общения с этим словом и, с другой стороны, давать простор для его дальнейшего развития. Так, в начале систематического курса геометрии один учебник 7 класса определяет угол как часть плоскости, ограниченную двумя лучами с общей вершиной, другой учебник как пару таких лучей. Оба учебника игнорируют то, что в детстве мать ставила ученика за провинность в угол, что он видел угол, под которым взлетает самолет или пересекаются улицы. Заставляя пользоваться только "своим" определением, эти учебники немедленно сталкиваются с трудностью объяснения того, что означает угол треугольника или угол между гранями пирамиды.

Не менее остро Выготский критикует метод, рассчитанный на то, что понятие может быть сформировано с помощью цепочки ассоциаций, элементарного накопления конкретного опыта, "подымания вверх по пирамиде понятий, перехода от конкретного к все более и более абстрактному".

Нетрудно привести примеры, когда в школьных учебниках дается словесное определение нового понятия, не оставляющее места для его развития, а лишь предполагающее работу по использованию его свойств. В этом случае, как замечает Выготский, "проблема развития научных понятий целиком исчерпывается проблемой научения знанию и усвоения понятий". Таков, по его мнению, "самый распространенный взгляд, на котором строится теория школьного преподавания и методика отдельных научных дисциплин". И далее следует разбор "несостоятельности этого взгляд... одновременно с теоретической и практической стороны".

В первых изданиях учебников, написанных или отредактированных Колмогоровым, можно найти достаточно много примеров, когда знакомство с новым понятием фактически начинается со словесного определения. Конечно, определенная база для этого имеется, однако методически все начинается как будто с чистого листа.

Несомненной заслугой А.Н. Колмогорова и созданной им методической школы представляется выявление фундаментального ядра школьной математики. Это ядро описано прежде всего с помощью понятий: число, вектор, координаты, отображение, функция и описание ее свойств, производная, интеграл и т.д. Желание дать точные определения этих понятий потребовало развития математического языка.

Достаточно быстро появились две негативных тенденции. Во-первых, изучение языка часто стало самоцелью. Ярким примером этого является длительная борьба за то, как должен быть записан ответ при решении уравнения. Теоретико-множественная точка зрения, которая помогла ясно осознать, что происходит в процессе решения уравнения, свелась к манипулированию словами и значками, заслонив главное – как найти способ решения уравнения.

Во-вторых, свойственное математике точное описание границ применения понятия и языка, с помощью которого оно описано, было воспринято как необходимость выяснения всяких ОДЗ, криминальность пропуска возможных исключений и пограничных ситуаций. Фактически решение задачи нацеливалось не на анализ связанной с ней ситуации, а на анализ того языка, на котором она была записана.

Тексты учебников наводнились всякими оговорками, которые затемняли, отодвигали на второй план смысл, смешивали главное и второстепенное.

Французы, проводившие "языковую реформу математики" еще более последовательно, но видя упомянутую опасность. Например, предложили вместо термина "неотрицательное число" использовать термин "положительное число", включив в его определение возможность обращения в нуль. У нас такая попытка вызвала бурное негодование. К сожалению, не меньшее негодование вызывает и такая мысль, которая мне представляется весьма правильной – смело говорить о положительных числах (как области истинности некоторого высказывания), не обращая внимания без действительной нужды на рассмотрение нуля (или предоставляя такое рассмотрение инициативе учащегося). Нахождение учащимся каких-то исключительных случаев, “ошибок” в учебнике, возможностей более широкого толкования его текста – это важнейший путь развития в процессе формирования понятия, гораздо точнее соответствующий мыслям Выготского.

Одновременно нам представляется несовременным и другой методический прием, основанный на медленном, линейном, “поэтапном” формировании действий, не имеющий впереди “взрывной” точки, выводящей за рамки скупого накапливания опыта, без осознания того нового знания, которое открывает новые возможности. Такой этап в формировании понятия неизбежно связан с языком, словом или символом. Эту двойную роль языка, когда он необходим, чтобы составить плоть содержательной мысли, которая поможет не только удержать ее, но и сделать орудием дальнейшей работы, и в то же время когда язык подменяет и заслоняет смысл и становится мертвым препятствием, Выготский замечательно отметил, приведя поэтические цитаты двух русских поэтов – Мандельштама и Гумилева:

Я слово позабыл, что я хотел сказать,
И мысль бесплотная в чертог теней вернется.

О. Мандельштам

И как пчелы в улье опустелом,
Дурно пахнут мертвые слова.

Н. Гумилев

Этими цитатами мне и хочется закончить свой текст.

Библиографический список

1. *Башмаков, М.И.* Математика 10-11 [Текст]: учеб. пособие / М.И. Башмаков. – М.: Просвещение, 2009.
2. *Башмаков, М.И.* Математика. 10 класс [Текст]: книга для учителя / М.И. Башмаков. – М.: Academia, 2008. – 128 с.
3. *Колмогоров, А.Н.* Алгебра и начала анализа 10-11 класс [Текст] / А.Н. Колмогоров, А.М. Абрамов, Ю.П. Дудницын, Б.М. Ивлев, С.И. Шварцбург. – М.: Просвещение, 2001. – 384 с.

Что же такое “процент”?

А.В. Боровских, Н.Х. Розов

> Пожилая учительница встречает своего бывшего выпускника.
>
> – Володя, я рада тебя видеть. Как ты живешь?
>
> – Все о-кэй, Марьванна. Бизнесом занимаюсь, торгую.
>
> – Да как же ты бизнесом-то занимаешься? Ты в школе даже проценты усвоить не мог!
>
> – А че там усваивать? Покупаю коробку американских сигарет за 17 долларов, а продаю за 19. На эти два процента и живу.

0. Как ни странно, “освоение процентов” оказывается одним из самых проблемных элементов школьного курса математики. Учащиеся и учителя хорошо знают, как мучительно усваивается тема “Проценты”. Абитуриенты к числу трудных заданий вступительных экзаменов всегда относили “задачи на проценты”. Преподаватели вузов с удивлением обнаруживают, что, сталкиваясь с процентами, студенты чувствуют себя весьма неуверенно. Горький смех вызывает та безграмотность, с которой проценты упоминаются подчас в передачах телевидения, в газетных публикациях.

Мы изложим свое видение причин, по которым изучение процентов доставляет школьникам такие трудности.

1. Зачем “проценты” школьному курсу математики? Если смотреть с точки зрения “принципа научности”, то эта тема – вообще посторонняя. Действительно, “процент” не относится к числу важных открытий науки, в математической теории и в ее приложениях он, как таковой, не играет никакой самостоятельной роли, не применяется и не исследуется. Математики без него вполне обходятся. Например, в фундаментальном пятитомном издании “Математическая энциклопедия” (М.: Изд-во “Сов. энциклопедия”, 1977-1985) термин “процент” вообще отсутствует.

Наличие темы “Проценты” в школьном курсе математики определяется не их научным значением, а лишь чисто прагматическими соображениями. Исторически сложилось так, что проценты привычно употребляются в обиходе, в разговоре, в средствах массовой информации для того, чтобы по возможности кратко сообщить количественную информацию о сравнении данных, характеризующих различные ситуации. Они традиционно привлекаются как удобное средство для формального описания (но отнюдь не изучения!) относительного изменения (например, с течением времени) измеряемых величин в технике, экономике, финансовом деле, статистике, социологии, психологии, химии, биологии, фармакологии и др.

Казалось бы, именно в этом ключе и следует говорить о процентах в школе: объяснить их смысл и продемонстрировать их использование. Однако вместо этого в школьной программе по математике предусмотрено “капитальное” изучение процентов, к ним возвращаются несколько раз в основной и в старшей школе, их изложение превращено в отдельный, значительного объема (по числу часов и по количеству задач) раздел, не адекватный их действительному значению.

Из скромного технического способа представления результатов сравнения различных величин процент превратился в грозного стража математического таинства. “Изучению процентов”, решению “задач на проценты” посвящено много методических статей и книжек. В них наводится такой “теоретический лоск”, так подробно излагаются разнообразные “тонкости”, так тщательно классифицируются “типы задач на проценты”, что создается впечатление: раздел “проценты” и в самом деле является отдельной и серьезной главой математики. Между тем, все это не имеет никакого отношения к математической сути дела и порождается всего лишь живучей тенденцией всячески внедрять “наукообразие” в школьную математику.

Не будем отрицать очевидное и констатируем реальный факт: изучение “процентов” в школе действительно сопряжено с серьезными затруднениями. На наш взгляд, эти затруднения связаны вовсе не с арифметическими аспектами “задач на проценты”, а *исключительно с двумя методическими проблемами: во-первых, с обеспечением простого и точного понимания школьниками смысла использования процентов, а во-вторых – с преодолением психологических сложностей свободного и полного понимания учащимися подчас специфических формулировок “задач на проценты”.*

2. Прежде чем говорить о процентах, совершенно необходимо познакомить учеников с гораздо более принципиальными и важными (но, к большому сожалению, отсутствующими в школьной программе) классическими понятиями качественного и количественного сравнения величин, дать школьникам возможность освоить соответствующую стандартную терминологию и свыкнуться с общепринятыми оборотами речи.

Обстоятельное изложение содержания и подробное обсуждение всех соображений по изучению темы “Сравнение величин” потребовало бы чересчур много места и должно стать предметом отдельного рассмотрения. Поэтому мы здесь лишь перечислим некоторые моменты этой темы, которые школьникам следует твердо усвоить.

а) При сравнении двух объектов речь всегда может идти только об их свойстве, качестве *одинаковой природы.* Более того, рассматриваемое свойство каждого из объектов должно получить статус *величины*, которая отождествляется с *положительным числом.*

б) Сравнение может быть *симметричным или асимметричным.* В случае симметричного сравнения оба сравниваемые объекты равноправны (пример вопроса: "Какой из двух данных отрезков имеет большую длину?").

в) В случае асимметричного сравнения из двух сравниваемых объектов должен быть выделен, указан тот, *с которым проводится сравнение.* Числовая характеристика интересующего нас его свойства принимается за базовую величину, как бы за "начало отсчета" и называется *эталоном.* Числовая характеристика интересующего нас свойства другого объекта, *который сравнивается,* называется *вариантой.* Задача сравнения состоит в том, чтобы охарактеризовать различие варианты и эталона.

г) Для ответа на вопрос "*На сколько варианта отличается от эталона?*" необходимо *из варианты вычесть эталон.* В этом состоит *абсолютное сравнение варианты с эталоном.* Результат Δ такого сравнения, называемый *отклонением варианты от эталона,* является *именованным* числом и выражается через принятую единицу измерения. *Модуль* этого числа называется *абсолютным отклонением*; *знак* этого числа "+" или "–" указывает, является варианта *больше* или *меньше* эталона.

д) Для ответа на вопрос "*Во сколько раз варианта отличается от эталона?*" необходимо *варианту разделить на эталон.* В этом состоит *относительное сравнение варианты с эталоном.* Результат λ такого сравнения, называемый *отношением варианты к эталону*, является *отвлеченным* числом и выражается той кратностью или долей, которую составляет варианта от эталона. Это число *положительное*; оно больше *единицы* или меньше, если варианта больше или *меньше* эталона.

е) Для ответа на вопрос "*Во сколько раз отклонение варианты от эталона отличается от эталона?*" необходимо *отклонение разделить на эталон.* В этом состоит *относительное сравнение отклонения с эталоном.* Результат ε такого сравнения, называемый *относительным отклонением варианты от эталона,* является *отвлеченным* числом. *Модуль* этого числа равен кратности или доле, которую составляет абсолютное отклонение от эталона; *знак* этого числа "+" или "–" указывает, является варианта *больше* или *меньше* эталона.

Термин "эталон" (от фр. "étalon" – "эталон") хорошо знаком и означает, в частности, "образец для сравнения". Менее популярен использованный нами термин "варианта" (от лат. "varians" – "изменяющийся"), который надо понимать как “изменившаяся величина”, “величина, отличная от эталона”. Обоснованием введения этого термина может служить то обстоятельство, что часто в приложениях типична ситуация, когда с одним и тем же единым, фиксированным эталоном приходится последовательно сравнивать не одну, а много величин, каждая из которых по-своему отклоняется от эталона.

3. Имеет смысл кратко затронуть (важный и сам по себе) вопрос о различных представлениях чисел.

Основным и общепринятым является десятичный позиционный способ представления чисел. Однако он оказывается мало удобным, когда в приложениях, при измерениях появляются “слишком длинные” или “слишком громоздкие” числа. Психологически человек к числу 29375640173,7492804513385 испытывает антипатию – ни прочитать, ни воспринять, ни тем более запомнить его фактически невозможно. Так как на практике обычно важна не “идеальная точность”, а “удобное приближение”, то в первую очередь роль играют “величина разрядности” числа и его одна или две (реже три) первые значащие цифры – именно эти характеристики числа и выделяют. Например, указанное выше число записывают в форме $29{\cdot}10^9$. В случае именованных чисел этой же цели служат шкалы единиц измерения: так, вместо 0,00000005371902 *км* пишут 0,05 *мм*.

Напомним и известный факт: одно и то же число может записываться с помощью различных обозначений (и в разных ситуациях используется то из них, которое удобнее). Так, число “восемь” изображается символами: 8; VIII; 8,000; 8/1; 7,(9); $\left(\frac{1}{8}\right)^{-1}$; $\log_2 256$ и т.д. При работе в 16-риченой системе счисления привлекаются обозначения для “дополнительных” цифр (помимо обычных десяти), например: $A{=}10$, $B{=}11,\ldots$, $F{=}15$. Для иррациональных чисел принято использовать искусно придуманный значок: $\sqrt{17}$. За отдельными “выдающимися” числами закреплены специальные буквы: π, $\boldsymbol{e}$, ϕ (число Фибоначчи) и др.

4. Перед тем, как непосредственно перейти к введению процентов, рассмотрим, например, такую ситуацию. *Из 864 избирателей за Иванова проголосовали 327 человек. Как охарактеризовать “степень” его успеха, как “далеко” он оказался от “полной победы”?* Речь идет об описании относительного сравнения числа избирателей, отдавших свои голоса Иванову, с общим числом избирателей. Здесь число 864 является эталоном, число 327 служит вариантой. Ясно, что Иванов собрал 327/864-ую долю общего числа голосов. Но как-то уж очень громоздко и необозримо! Можно, конечно, эту обыкновенную дробь сократить: 109/288 или привлечь десятичные дроби: 327/864 = 0,3784722..., однако все эти записи результата выборов тяжеловесны, их сложно запомнить и наглядно представить.

Поскольку "далекие" десятичные знаки в последней дроби особой роли не играют, удобно еще более упростить ответ и сказать, что Иванов набрал без малого 0,38 от числа всех голосов избирателей. Или, что то же самое, 38/100 всех голосов. Эти дроби допускают довольно прозрачную интерпретацию: они означают, что за Иванова проголосовало в среднем почти 38 человек на каждую сотню избирателей. Коротко и легко запоминается!

Таким образом, представление результата относительного сравнения в форме "сколько-то на сотню" оказывается чрезвычайно удобным. Поэтому понятно естественное стремление к стандартизации этой формы, заключающейся в стилизации части дроби "/100" в виде специального символа "%".

Именно, общепринято использовать следующее

Обозначение. *Число* 1/100 = 0,01 *обозначается еще и значком* %, *который называется "процент".*

Если p – действительное число, то выражение $p\%$ (читается: "пэ процентов") представляет собой произведение чисел p и %:

$$p\% = p \cdot \% = p \cdot 0,01 = p \cdot 1/100 = p/100 = p \cdot 10^{-2}. \tag{1}$$

Это обозначение позволяет сформулировать результат упомянутого выше голосования совсем удобно: "Иванов собрал почти 38% голосов".

Слово "процент" (*ударение делается обязательно на букве "е"*) – существительное мужского рода. Оно происходит от латинского "pro centum" – "на сотню".

Полезно иметь в виду, что на Западе широкое распространение получила манера записывать, например, дробь 0,35 в форме ".35", опуская "ноль целых" (и *используя для отделения дробной части точку*, а не принятую у нас запятую). При этом часто вместо 1% используется обозначение ".01".

Учащимся необходимо сообщить, что в русском языке слово "процент" имеет и другое смысловое значение – выражает тот факт, что заемщик (помимо возврата предоставленных ему кредитором денежных средств) должен дополнительно заплатить кредитору за использование этих средств. Об этом говорит, например, объявление: "Банк предоставляет населению кредиты под проценты".

5. К введенному обозначению надо, конечно, привыкнуть, осознать, что в употреблении для числа $1/100 = 0{,}01 = 10^{-2}$ еще и нового значка % нет ничего особо нового и неожиданного. В самом деле, пишем же мы $\pi \approx 3,14 \approx 22/7$. А выражение $p\%$ очень логично понимать как произведение двух чисел p и % с опущенным по традициям алгебры знаком умножения (точка “$\cdot$”).

В частности, $1\% = 1\cdot 1/100 = 1/100 = 0{,}01$ – и мы получаем еще одну новую форму записи дроби 0,01. Так как $100\% = 100 \cdot 1/100 = 1$, то, значит, в виде 100% можно записывать число 1. Справедлив и следующий общий факт: *любое число a можно записать в виде*

$$a = 100 \cdot a \cdot 1/100 = (100a)\%. \tag{2}$$

Если некоторое число a представлено с помощью символа % в виде $(100a)\%$, то говорят, что это *число a выражено в процентах.*

Опыт показывает, что школьники легко принимают обозначение % и спокойно его используют. Скептицизм в отношении трактовки символа % как числа возникает обычно (и довольно часто!) у учителей в связи с вопросом, как с этим “числом %” проводить операции. Ответ: точно так же, как они выполняются, например, с числом π с той лишь (весьма удобной нам) разницей, что в любой момент можно вместо “числа %” подставить его численное точное значение. Ничто не мешает понимать запись $a+$ % как сложение $a+$ 0,01, запись %% как степень $(\%)^2$ и т.д. и проводить, скажем, такие вычисления:

$$42\% + \% - 28\% \cdot 0{,}5\% - 7\cdot 13\% \;/\; 61\% = 43 \cdot \% - 28 \cdot 0{,}5 \cdot (\%)^2 -$$
$$-(7\cdot 13/61) \cdot (\% \;/\; \%) = 43 \cdot 0{,}01 - 28 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}01^2 - 7\cdot 13/61 = \ldots$$

Но почему же это никогда и нигде не делается? Использование символа % в стандартных арифметических вычислениях и алгебраических преобразованиях не доставляет никакого удобства, не дает никаких преимуществ. Поэтому *в арифметике и алгебре в символе % нет никакой необходимости и он там не встречается.*

Проценты традиционно используются ***исключительно*** *как средство записи результата относительного сравнения положительных величин, то есть отношения или относительного отклонения таких величин –* ***и больше нигде***. В этом и только в этом состоит единственное разумное предназначение процентов.

Математика процентов чрезвычайно проста и в общем виде состоит в следующем. Пусть нас интересует возникающее в прикладной проблеме относительное сравнение варианты, обозначаемой $\boldsymbol{m} > 0$, с эталоном, обозначаемым $\boldsymbol{M} > 0$. Результатом такого сравнения является числовое отношение m/M этих двух чисел. Всегда можно построить специального вида пропорцию $m/M = p/100$ и тем самым записать исходное числовое отношение в виде равной ему дроби $p/100$. Если при этом число p

оказывается “удобным”, то есть смысл использовать проценты и выразить результат сравнения величины $\boldsymbol{m}$ с величиной $\boldsymbol{M}$ в форме “$p\%$”. (Совершенно аналогично обстоит дело в случае, когда речь идет об относительном сравнении отклонения с эталоном.)

Таким образом, основная функция процентов – не вычислительная. В современном своем употреблении, взятый сам по себе, “процент” не позволяют ничего подсчитывать, преобразовывать, определять, не является “частью чего-либо”. Проценты являются просто одной из технических, но распространенных форм *представления данных.*

В силу каких же причин привычка использовать проценты для сообщения результата относительного сравнения величин оказалась такой популярной и живучей? Видимо, все дело в интуитивном нежелании людей лишний раз использовать дроби, в стремлении чаще работать с целыми (или по возможности – “короткими”) числами. (Кстати, с этой же целью были введены и многие профессиональные “неметрические” единицы измерения, например, “карат”.)

Как правило, в выражении $p\%$ число p стараются сделать целым (то есть результат сравнения округляется до целого числа процентов), и притом желательно, чтобы оно было не более чем трехзначным. При особой необходимости, конечно, могут добавляться и десятые, и сотые доли процента, например: 135,2% или 0,08%. Однако следует понимать: чем больше десятичных знаков пишется, тем меньше смысла выражать результат сравнения “в процентной форме”, ибо ее удобство как раз и заключается в использовании не слишком “длинных” чисел.

Думающий ученик при знакомстве с процентами может задать нетривиальный вопрос: почему выделяется именно сравнение “столько-то на сотню”, то есть пропорция $m/M = p/100$, и именно для числа $1/100$ “прижилось” специальное обозначение? Ответы на эти вопросы нет смысла искать в математике, поскольку они лежат за ее пределами и состоят в использовании для каждого конкретного случая наиболее удобной формы представления данных.

Люди далеко не всегда используют обязательно сравнение “столько-то на сотню”. Вспомните фразы “из трех бросков два оказываются удачными”, “каждый двадцатый встречный идет в пальто”, “телефон звонит почти ежеминутно” и т. д., которые мы употребляем довольно часто. А ведь это и есть “другие” формы выражения сравнения величин. Например, “восемь попаданий из каждых десяти выстрелов” означает, что результат сравнения варианты (число попаданий) с эталоном (число всех выстрелов) приблизительно равен $8/10=$ 0,8. Здесь очень важно добиться, чтобы учащиеся ясно понимали “усредненный” смысл результата этого сравнения: такой результат вовсе не означает, что из *любых* 10 выстрелов цель *обязательно* будет поражена 8 раз.

Однако, например, для дроби 1/10 специального обозначения не возникло – не сложилось. Наверно, потому, что сравнение “столько-то на десятку” не дает возможности обеспечивать достаточную точность результата сравнения величин, используя “удобные” (“короткие”) числа. Но и дробь 1/100 не является единственной, которая имеет свой персональный символ. Достаточно широко употребляется (прежде всего, в химии, биологии, фармакологии) *специальное обозначение для числа* 1/1000– *значок* $^o/_{oo}$. (Этот значок называется “промилле” с ударением на “и”, а слово происходит от лат. “pro mille” – “на тысячу” и является несклоняемым существительным женского рода).

И еще одно принципиальное замечание. Если *в результате сравнения величин* установлено, что одна из них составляет 0,28 другой, то мы можем выразить этот факт словами “Одна величина составляет 28% от другой”. Однако если *в какой-либо иной ситуации* (в арифметической задаче, при расчетах и т.д.) мы встречаем дробь 0,28, то ее ни в коем случае *нельзя* читать “28 процентов”!

6. Проанализируем, как вводятся проценты в различных учебных пособиях и справочниках (обойдемся при этом без ссылок). Удивительно, но в приводимых там “определениях” наблюдаются непривычные для математики недомолвки и разночтения.

“*Процент – одна сотая часть*”. Коротко и... непонятно. Тут же возникает вопрос: часть чего? Ведь “часть” бывает только “у чего-то целостного”, а ни про какое “целостное” в определении не говорится.

А вот попытка предвосхитить этот вопрос: “*Процент – сотая доля целого, принимаемого за единицу*”. Интересно, читая фразу “В выборах участвовало 62,7% избирателей”, школьник действительно должен представлять себе, что “целое”, т.е. общее число избирателей, равно 1?

“*Одну сотую часть числа (величины) называют процентом этого числа (величины)*”. Пример того, как мы разговариваем с учащимися, считая, что они свободно понимают все наши “взрослые” слова. В самом деле, о каком “числе” идет речь, откуда оно берется? Оно любое – или как-то (кем-то) выбрано? В чем точно разница между словами “число” и “величина” – или это просто синонимы? Учитель с вершин своего образования, видимо, поймет, что и как надо трактовать. Но учебник ведь обращается к ученикам основной школы определенного возраста, которые еще только овладевают нюансами речи.

“*1% от А означает сотую долю некоторого числа А, обычно именованного*”. “*Процентом от любой величины называется ее одна сотая часть*”. Действительно ли школьники 13-15 лет могут четко объяснить сходство и различие между "некоторым числом" и "любой величиной"? Как лучше говорить: "процент числа" или "процент от числа"? Далее, "сотая доля именованного числа" автоматически является числом именованным. Поэтому "1%" в каждом конкретном случае имеет отдельный "именованный" смысл. Значит ли это, что существует много разных "процентов"?

Отметим, что иногда делаются робкие шаги к той трактовке, которую мы предложили выше. В качестве примера приведем цитату (сохраняя стиль оригинала). "Для обозначения *одной сотой числа* употребляется слово *процент*: 1/100 – **процент.** … При записи вместо слова *процент* используют значок %. Например, вместо слов *один процент* пишут: "1%"… 1% – это 1/100 от целого. Целое составляет 100/100." Но сможет ли ученик легко разобраться в этом эклектическом смешении разных подходов, написанном к тому же весьма невнятно?

Рассмотрим еще приведенное в качестве образца решение задачи "Сколько процентов составляет 120 от 250?":

$$(120/250)\cdot 100\% = 0{,}48\cdot 100\% = 48\%.$$

Естественно спросить: а почему, собственно, можно число 0,48 умножить на число 100 и затем приписать к произведению символ %?

Нетрудно заметить, что все эти "определения" при всей их наукообразности упускают самое главное: *процент – это не отдельное понятие, а всего лишь одна из рабочих, технических форм описания, представления отношения величин.*

7. Как же именно используются проценты и какие задачи в связи с этим приходится рассматривать? Отметим сразу, что приведенные выше обозначение (1) и представление (2) позволяют сделать заключение, что, собственно, *"задач на проценты" как таковых вообще не существует.* Любую такую "задачу" можно немедленно переформулировать в виде "обычной" арифметической задачи, в которой значок % уже не участвует, а нужно оперировать только с целыми и дробными числами.

Возьмем для примера задачу из демонстрационного варианта КИМа 2010 г., которая, судя по всему, была рассчитана составителями на проверку знания выпускниками процентов. *Билет на автобус стоит 15 руб. Какое максимальное число билетов можно будет купить на 100 руб. после повышения цены билета на 20%?* Но все необходимое "знание процентов" сводится к тому, что 20% = 1/5. Смысл задачи в том, чтобы правильно понять выражение "после повышения цены билета", т.е. понять, что новая цена билета равна "старая цена + 1/5 от старой цены".

Ситуаций, в которых возникают "задачи на проценты", ***всего две***.

I. *Относительное сравнение с эталоном* $\boldsymbol{M} > 0$ *варианты* $\boldsymbol{m} > 0$. Результат λ такого сравнения – число, получаемое *делением варианты на эталон*:

$$\boldsymbol{m}\ /\boldsymbol{M} = \lambda. \tag{3}$$

Можно сказать, что варианта как бы “измеряется” в “эталонах”, а число λ показывает, “сколько раз” эталон “укладывается” в ней. Здесь уместна аналогия с тем, как мы измеряем длину данного нам отрезка, последовательно откладывая на нем “эталон метра” (и его доли).

Согласно (2), число $\lambda = (100\lambda)\%$. Если для краткости ввести новое число

$$p = 100\lambda, \tag{4}$$

то результат сравнения запишется и в другой, совершенно эквивалентной форме – с помощью символа %:

$$\boldsymbol{m}\ /\boldsymbol{M} = p\%. \tag{5}$$

Формула (5), как и (3), *выражает результат относительного сравнения варианты* $\boldsymbol{m}$ *с эталоном* $\boldsymbol{M}$: она показывает, какую часть (кратность) от эталона $\boldsymbol{M}$ составляет варианта $\boldsymbol{m}$, но, в отличие от (3), ***в процентах***. Число λ (см. (3)) называют *отношением* варианты $\boldsymbol{m}$ к эталону $\boldsymbol{M}$, а выражение $p\%$ (см. (5), (4)) – *процентным отношением* (не путать с числом p!).

Неравенство $p\% > 100\%$ соответствует случаю “варианта больше эталона”, а $p\% < 100\%$ – случаю “варианта меньше эталона”.

Правило. *Чтобы найти процентное отношение* $p\%$ *варианты* $\boldsymbol{m}$ *к эталону* $\boldsymbol{M}$, *надо частное* λ *от деления* $\boldsymbol{m}$на$\boldsymbol{M}$ *умножить на* 100 *и затем поставить справа значок* % (см. (4), (5)). *Если известно процентное отношение* $p\%$ *варианты* $\boldsymbol{m}$ *к эталону* $\boldsymbol{M}$, *то их отношение* λ *получается отбрасыванием значка* % *и делением числа* p *на* 100 (см. (5), (4)).

Ученики должны твердо усвоить: *ключевая фраза “варианта* ***m составляет*** $p\%$ *от эталона* $\boldsymbol{M}$” *математически записывается формулой* (5) *или, что то же самое, в виде*

$$\boldsymbol{m}\ = p\%\boldsymbol{M}\ = (p\boldsymbol{M})/100.$$

Это целесообразно записать на плакате и вывесить в классе.

Отношение варианты m к эталону M:

$$\frac{m}{M}\ = \lambda = (\mathbf{100}\lambda)\% \equiv \boldsymbol{p}\% \quad \textbf{или} \quad \boldsymbol{m} = \boldsymbol{p}\%\ \boldsymbol{M} = \frac{\boldsymbol{pM}}{\mathbf{100}}$$

"Процент" допускает весьма естественную наглядную интерпретацию. Числа λ и $p\%$ являются просто двумя различными эквивалентными формами записи одного и того же результата "измерения" варианты $\boldsymbol{m}$ эталоном $\boldsymbol{M}$. А каков же смысл самого числа p? Ничто не мешает нам ту же самую варианту $\boldsymbol{m}$ "измерять" с помощью другого эталона, например, $1/_{100}\boldsymbol{M}$. (Ведь можно измерять метром, а можно – сантиметром.) Так как "единица измерения" уменьшилась в 100 раз, то результат нового "измерения" увеличится в 100 раз и окажется равным $100\lambda = p$ (см. (4)), т.е. сотая доля эталона $\boldsymbol{M}$ в варианте $\boldsymbol{m}$ "укладывается" pраз. Следовательно, *число p является отношением варианты к сотой доле эталона.*

Легко видеть, что если λ – отношение варианты к эталону (см. (3)), то *число $\lambda\%$ является отношением той же варианты к 100-кратно увеличенному эталону.*

II. *Относительное сравнение с эталоном $\boldsymbol{M} > 0$ отклонения $\Delta = \boldsymbol{m} - \boldsymbol{M}$ варианты $\boldsymbol{m} > 0$ от этого эталона.* Результат ε такого сравнения – число, получаемое *делением отклонения на эталон*:

$$\Delta/\boldsymbol{M} = \varepsilon. \tag{6}$$

(Это число может быть как положительным, так и отрицательным.)

Согласно (2), число $\varepsilon = (100\varepsilon)\%$. Если ввести новое число

$$q = 100\varepsilon, \tag{7}$$

то результат сравнения запишется с помощью символа %:

$$(\boldsymbol{m} - -\boldsymbol{M})/\boldsymbol{M} = q\%. \tag{8}$$

Формула (8), как и (6), *выражает результат относительного сравнения отклонения Δ с эталоном $\boldsymbol{M}$*: она показывает, какую часть (кратность) от эталона $\boldsymbol{M}$ составляет разность $\boldsymbol{m} - \boldsymbol{M}$ между вариантой $\boldsymbol{m}$ и эталоном $\boldsymbol{M}$, но, в отличие от (6), ***в процентах***. Число ε (см. (6)) называют *относительным отклонением* варианты $\boldsymbol{m}$ от эталона $\boldsymbol{M}$, а выражение $q\%$ (см. (8), (7)) – *процентным относительным отклонением* (не путать с числом $q!$).

Неравенство $q\%>0$ соответствует случаю "варианта больше эталона", а $q\% < 0$ – случаю "варианта меньше эталона". На практике обычно предпочитают использовать "проценты без знака": при $q\% < 0$ принято вместо "варианта отличается от эталона на $q\%$" говорить "варианта *меньше* эталона на $|q|\%$", а при $q\%>0$ говорят "варианта *больше* эталона на $q\%$".

Правило. *Чтобы найти процентное относительное отклонение* $q\%$ *варианты* $\boldsymbol{m}$ *от эталона* $\boldsymbol{M}$*, надо частное* ε *от деления* $\boldsymbol{m}-\boldsymbol{M}$ *на* $\boldsymbol{M}$ *умножить на* 100 *и затем поставить справа значок* % (см. (7), (8)). *Если известно процентное относительное отклонение* $q\%$ *варианты* $\boldsymbol{m}$ *от эталона* $\boldsymbol{M}$**,** *то их относительное отклонение* ε *получается отбрасыванием значка* % *и делением числа* q *на* 100 (см. (8), (7)).

Ученики должны твердо усвоить: *ключевая фраза "варианта* $\boldsymbol{m}$ *на* $q\%$ ***отличается*** *от* (***больше***, ***меньше)*** *эталона* $\boldsymbol{M}$*" математически записывается формулой* (8) *или, что то же самое, в виде*

$$\boldsymbol{m} = \boldsymbol{M}\ (1+q\%) = \boldsymbol{M}\ (1+(q/100)),$$

где $q\%>0$ *в случае "больше" и* $q\%<0$ *в случае "меньше".*

Это целесообразно записать на плакате и вывесить в классе.

Относительное отклонение варианты $\boldsymbol{m}$ **от эталона** $\boldsymbol{M}$**:**

$$\frac{\boldsymbol{m}\ \text{-}\ \boldsymbol{M}}{\boldsymbol{M}} = \varepsilon = (\mathbf{100}\varepsilon)\% = \boldsymbol{q\%} \quad \textbf{или} \quad \boldsymbol{m} = \boldsymbol{M}\ (1 + \boldsymbol{q\%}) = \boldsymbol{M}\left(1 + \frac{\boldsymbol{q}}{\boldsymbol{100}}\right)$$

Собственно, освоения содержания этих двух плакатов достаточно, чтобы разобраться в любой "задаче на проценты". Не надо требовать "зазубривать" эти формулы, они постепенно улягутся в процессе свободного использования плакатов. Необходимо лишь подробно обсудить в классе "базисные" типы задач, что и позволит познакомить учащихся с идеями решения фактически всех встречающихся "задач на проценты".

Из-за дефицита места мы лишь перечислим темы главных, на наш взгляд, "базисных задач на проценты":

– Задачи типа "сколько процентов варианта составляет от эталона" и "на сколько процентов варианта отличается от эталона" (изменение цен, расчет платежей и др.).

– Задачи о двух (и больше) заданных в процентах последовательных отклонениях варианты от эталона (проценты по вкладам, расчет пени и др.).

– Задачи "на смеси, сплавы и концентрации", "на усушку" и т.п.

8. Самое сложное и самое важное в каждой конкретной "задаче на проценты" – вовсе не рутинные арифметические действия, а умение выяснить, точно понять, *какая из участвующих в условии величин является эталоном, а какая – вариантой.* И именно этому в первую очередь необходимо терпеливо и настойчиво обучать школьников. Например, они должны легко понимать бессмысленность вопросов типа "На сколько процентов различаются между собой числа 17 и 19?".

К сожалению, нередко встречаются задачи, авторы которых сами весьма смутно осознают суть дела. Вот задача из одного пособия: "В

1992 г. производство упало на 19%, в 1993 г. – в 1,5 раза. На сколько процентов упало производство к концу 1993 г.?”. Как понимать “второе падение”? Имеется ли в виду, что падение в 1992 г. произошло на 19% от неназванного начального уровня отсчета, а за 1993 г. производство снизилось в 1,5 раза от уровня конца 1992 г.? Ведь допустимо и иное толкование: в 1992 г. производство упало на 19% от (неназванного) эталона, а в 1993 г. – в 1,5 раза *от того же* эталона. (Кстати, в статистических таблицах часто берется единый исходный рубеж и приводятся изменения по годам именно *от него*.)

Хорошо известно, что в русском языке (особенно в разговоре) допустима “вольность речи”, когда пропускаются отдельные слова, легко восстанавливаемые по понятной внутренней логике фразы. Этот феномен типичен и для многих “фраз о процентах”, и для формулировок многих “задач на проценты” – и именно он является основным камнем преткновения для значительной части учащихся.

Традиционно тема “Проценты” изучается в 6-7 классах, а в старшей школе к ним возвращаются только походя (если не считать факультативы экономической ориентации). Между тем, *к лексической специфике текста “задач на проценты”, к логическому анализу их формулировок учащиеся основной школы в своей массе еще совершенно не готовы.* Они не знают многих терминов и языковых оборотов, не готовы воспринимать подтекст, не в состоянии восстанавливать недосказанности “взрослой речи”, которую почему-то часто считают возможным использовать учителя и авторы учебников, не владеют в достаточной мере тонкостями стилей письменного языка (прежде всего – формально-бюрократического, характерного для таких задач).

Поэтому учителю математики следует тщательно проводить с учениками лингвистический анализ содержания каждой предложенной задачи, помогать им по смыслу, по контексту разобраться в “фигуре умолчания”, если она содержится в формулировке. Это особо важно, когда в задаче встречаются фразы типа “Цена упала на 27%”, “Скидки до 30%”, “Индекс продаж достиг 91%”, “Уровень безработицы приближается к 15%” и т. д. Особый разговор – о понимании смысла часто сообщаемой информации, “нагруженной” профессиональным жаргоном экономистов, например: “Курс акций просел на 3 пункта”.

Весьма уместно было бы с учениками составить коллекцию и провести филолого-математический анализ расхожих фраз типа “Я уверен в этом на все сто”, “Наши шансы пятьдесят на пятьдесят”, “У него осталось лишь полпроцента надежды” и т.п.

Почему мы так подробно говорим о вещах, казалось бы, относящихся к кругу забот преподавателя русского языка? Потому что решение проблемы четкого понимания математического содержания словесной формулировки задачи не может обеспечить никто, кроме учителей-математиков. Учитель русского языка не в состоянии здесь помочь, ибо профессионально не владеет математическим материалом, программа его занятий подобных вопросов совсем не касается.

Кстати, тема "Проценты" (наряду с некоторыми другими) предоставляет учителю математики хорошую возможность для того, чтобы познакомить школьников с тем, как надо грамотно "читать" числа, дроби и проценты. Иначе кто объяснит ученикам, как правильно прочитать "2,3%": "два целых и три десятые процента", "две целых и три десятых процента", "два целых и три десятые процентов"? К сожалению, научить школьников грамотно склонять числительные нашей школе, видимо, не под силу. Поэтому надо хотя бы объяснить им, что всегда можно "перестроить" фразу так, чтобы числительное потребовалось употребить в именительном падеже.

И еще одна важная проблема, которую следует решать при изучении процентов. Школьникам надо прочно усвоить, что *при сравнении объектов имеет смысл говорить лишь о тех их качествах, которые могут быть объективно выражены реальными числовыми характеристиками.* Только в этом случае имеет смысл использование процентов для выражения результата сравнения.

Здесь математика должна помочь молодежи обезопасить себя от агрессивной рекламы, которая подчас действует на психику своей "красивой научностью", а на самом деле рассчитана на "лохов". Мы имеем в виду прежде всего многочисленную бессмысленную информацию вроде "Шампунь *NN* обеспечивает до 146% блеска волос", "Использование нашей щеточки для ресниц на 72% увеличит выразительность Вашего взгляда", "Эта паста удаляет до 87% пятен на зубах", "100% закрашивает седину" и т.д.

Теоретики школьной методики математики заключили, что тема "Проценты" вполне посильна для учащихся 6-7 классов. В результате школьники получают лишь примитивные и поверхностные знания, имеют место расточительная трата учебного времени и малопроизводительная работа учителей. По нашему мнению, *полноценного освоения темы "Проценты" в основной школе добиться невозможно в силу объективных положений возрастной психологии и уровня общей подготовки учеников.* И если мы хотим сделать эту тему действительно доступной и практически полезной – *ее изучение целесообразно перенести в старшую школу.*

Еще более удачным вариантом было бы перемещение знакомства с процентами в курс экономических знаний. Не надо сходу отклонять обсуждение этого предложения. Позаимствовал же курс информатики понятие “алгоритм”, которое возникло и изучалось математиками еще до рождения самого слова “информатика”. И от этого курс информатики стал только богаче и интереснее.

Ученики на уроках математики сегодня упражняются в решении “текстовых задач на проценты” с надуманными и малоосмысленными ситуациями - вроде той, когда пешеход на 23% увеличил свою скорость на второй половине пути по сравнению с первой. Но попросите их объяснить точный смысл фразы “Инфляция за год составила 7%” – и связный ответ прозвучит очень редко. Только в курсе экономических знаний есть реальная возможность связать проценты с актуальными для современной действительности новыми фундаментальными понятиями, показать школьникам использование процентов в серьезных, затрагивающих всех вопросах, имеющих важное жизнеобеспечивающее значение для людей (экономическая статистика, начисление налогов, накопление вкладов, финансовые пирамиды и др.). Кстати, именно финансовая математика – единственная область, где проценты используются не просто для представления данных, а для каких-то содержательных вычислений.

Библиографический список

1. *Мордкович, А.Г.* Алгебра и начала анализа. 10-11 класс [Текст]: учебник / А.Г. Мордкович. – М.: Мнемозина, 2001. – 335 с.
2. *Мордкович, А.Г.* Алгебра 10-11 класс [Текст]: метод. пособие для учителя / А.Г. Мордкович. – М.: Мнемозина, 2010. – 202 с.

Некоторые аспекты технологизации и информатизации компетентностного подхода к модернизации высшего профессионального образования

В.М. Монахов, Е.В. Бахусова

Введение нового образовательного стандарта в высшей школе, ведущей линией которого является формирование у студентов профессиональной компетентности специалиста, обусловили необходимость разработки идей и принципов проектирования и организации учебного процесса в вузе с учетом современных условий, требований, предъявляемых к результатам освоения основных образовательных программ бакалавриата и магистратуры.

Основной идеей сообщения является *тезис об использовании* уже функционирующих на практике педагогических технологий В.М. Монахова для проектирования учебного процесса вузе с учетом требований компетентностного подхода.

Педагогическая технология – это область знаний о проектировочной деятельности педагога, позволяющая, используя язык процедур проектирования, переводить педагогическую позицию, педагогический замысел, педагогические представления о том или ином педагогическом объекте в форму проекта, который может быть реализован в образовательной практике.

Что принципиально нового для педагогической теории и образовательной практики дает компетентностный подход?

Во-первых, компетентностный подход упрощает и делает более конкретной взаимосвязь границ дидактических условий при проектировании образовательного процесса, и при проектировании управленческого процесса.

Во-вторых, в гносеологическом аспекте компетентностный подход содержательно, продуктивно и **инструментально** связывает такие компоненты методической системы обучения как **цель, содержание, процесс**.

В-третьих, компетентностный подход делает более динамичными и конкретно реагирующими на изменения рынка труда и востребованности в кадрах такие компоненты образовательного процесса, как **цель и содержание**.

В-четвертых, компетентностный подход позволяет содержательно, логично и реально интерпретировать и детализировать общую **цель – профессиональную компетентность как сумму частных компетенций**, выступающих некими компонентами системы.

В-пятых, компетентностный подход может позволить сделать саму методику обучения более конкретной, целесообразной, одновременно усиливая ее **прикладную (профилирующую) направленность**.

В-шестых, компетентностный подход при проектировании учебного процесса по профилирующим предметам может радикально изменить сам процесс конструирования и формулировку микроцелей проекта учебного процесса, сделав обучение более качественным, продуктивным, управляемым.

В-седьмых, фактически конструирование микроцелей с учетом профессиональной компетентности, и частных компетенций выступает **новым дидактическим инструментом**, **реализующим компетентностный подход**. Компетентностный подход переводит фактически все управленческие действия и решения на качественно новый инструментальный уровень, делая **инструментальным сам механизм принятия управленческого решения**.

В-восьмых, компетентностный подход содержит в себе достаточно мощную мотивационную составляющую образовательного процесса.

Инвентаризация современного дидактического инструментария показывает, что для методических разработок компетентностного подхода могут быть использованы такие аспекты, как:

– *технологизация* проектирования;

– удобная *технологическая документалистика*, достаточно адекватно моделирующая три основных педагогических объекта: ***учебный процесс, траекторию и методическую систему обучения (МСО)*** и ее переориентация на решение актуальных проблем современного образования;

– *интеграция* педагогических и информационных технологий – как качественно новый этап информатизации учебного процесса в целом (не формальная иллюстрация педагогических действий с компьютером и его программным обеспечением);

– новые возможности *информатизации управления качеством образовательного процесса* при компетентностном подходе;

– *модернизация* методической системы работы преподавателя в условиях функционирования государственного образовательного стандарта.

Многие решения, реализуемые в образовательной практике, внешне имеют характер точных решений, хотя их принятие носило волевой характер и практика показывает их неадекватность поставленным задачам. Смеем утверждать, что в образовательной практике принимаемые решения должны основываться на методе последовательных приближений, где главным критерием правильности выступает образовательная практика, т. е. корректно поставленный педагогический эксперимент. *В этом ключе педагогические технологии выступают как новый исследовательский инструментарий, который может позволить резко сократить число волюнтаристски принимаемых решений.*

Технология включает *механизм управления*, способствующий *достижению поставленной цели.* Чтобы данный механизм управлял процессом, ведущим к достижению цели, необходимо, прежде всего, *установить численные критерии,* объективно показывающие движение процесса в нужном направлении (т. е. движения к цели), *механизм сравнения текущих результатов с данным значением критерия и выбор дальнейшего направления* процесса: или процесс ведет к цели, или необходимо повторение предыдущего этапа.

Перечислим основные **дидактические идеи технологизации**, учебного процесса в вузе с учетом компетентностного подхода.

1. Принципиальное отличие педагогической технологии от методики заключается в **гарантированности** конечного результата и **процедурности** проектировании учебного процесса.

2. Педагогическая **технология универсальна** для любого учебного заведения, для любой дисциплины, для любого преподавателя, для любой группы, для любого *студента.*

3. Главные принципы педагогической технологии:

- принцип доверия педагогическому профессионализму преподавателя;
- принцип безусловного соблюдения психолого-физиологических норм учебно-познавательной деятельности студента;
- принцип гарантированности образовательной подготовки студента на любом отрезке учебного процесса;
- принцип комфортности студента;
- принцип комфортности профессиональной деятельности преподавателя;
- принцип единства содержательной, процессуальной, мотивационной и управленческой составляющих образовательного процесса.

4. Профессиональная деятельность руководства вуза и ППС состоит из **этапа проектирования** программы развития учебного заведения, модели управления качеством образовательного процесса и самого учебного процесса по всем дисциплинам специальностей вуза и **этапа реализации проекта**.

5. Проектировочная деятельность преподавателя состоит из проектирования системы микроцелей по каждой дисциплине на весь период обучения данной дисциплине, проектирования технологической карты.

6. Главное достоинство педагогической технологии в том, что она ликвидирует основную зону кризиса в высшем образовании – **зону целеполагания.** В ГОС ВПО профессиональная компетентность будущего специалиста интегративно представлена в виде системы частных компетенций, формирование которых происходит через изучение дисциплин специальности. Каждая дисциплина формирует у студентов те или иные частные компетенции. Таким образом, целью изучения каждой дисциплины является формирование у студентов вполне определенного набора частных компетенций.

7. **Технологическая карта**, проектируемая преподавателем на каждую учебную тему, представляет **главные параметры учебного процесса**, обеспечивающие успех обучения и развития студента: *целеполагание*, *диагностика*, *коррекция, дозирование домашних заданий*, *логическая структура учебного процесса.*

8. **Учебная тема – основной объект проектирования** преподавателем учебного процесса. Эмпирически установлены оптимальные границы учебной темы: минимальное число часов 6-8, максимальное –

22 – 24 часа. Именно в такой системе занятий можно продуктивно использовать объективные закономерности учебного процесса, добиваясь оптимального качества обучения.

9. Проектирование технологической карты учебной темы начинается с формулировки **целеполагания – микроцелей**. В одной теме может быть от 2 до 5 микроцелей, они формулируются в виде "Знать...", "Уметь...", "Понимать..." и т.д. При определении содержания микроцели преподаватель должен исходить из требований образовательных стандартов, учитывать формулировки частный компетенций, которые формируются у студентов в процессе изучения дисциплины. На рис. 1 представлена схема формирования профессиональной компетентности специалиста, в которой каждая частная компетенция представлена в виде системы микроцелей дисциплин.

10. **Диагностика** понимается и реализуется как констатация факта достижения или факта недостижения студентом **микроцели**. Диагностика проводится в письменном виде и состоит из четырех заданий: первые два – уровень стандарта (оценка "зачет" или "удовлетворительно"), третье – уровень "хорошо", четвертое задание – уровень "отлично". Содержание диагностики однозначно определяется содержанием микроцели.

11. **Дозирование домашних заданий** предназначено для системной подготовки студентов к успешному выполнению диагностики. Вместе с тем, дозирование предупреждает учебную перегрузку студентов. Именно здесь заключены большие резервы для нормализации общей и учебной нагрузки студентов.

12. Технология формирует у преподавателя новые модельные представления об учебном процессе, на которых основано и обосновано проектирование будущего учебного процесса, и его главной характеристике – логической структуре. **Логическая структура** – это система занятий, разбитых на группы по числу микроцелей. Каждая микроцель предполагает некую группу занятий, в конце которых, во-первых, должна быть достигнута микроцель, во-вторых, это "зона ближайшего развития" студента. Используемый нами термин "зона ближайшего развития" отличается от используемого психологами, она в основном и структурно, и содержательно раскрывает и направляет методическую работу студента. Поле развития – второй уровень логической структуры. Третий уровень логической структуры – понятийное поле, представляющее собой распределенный по занятиям понятийный аппарат темы. Именно здесь имеется большой резерв для оптимизации учебного процесса.

13. Студенты, не прошедшие диагностику, становятся участниками **коррекции**, через которую они выводятся на уровень стандарта.

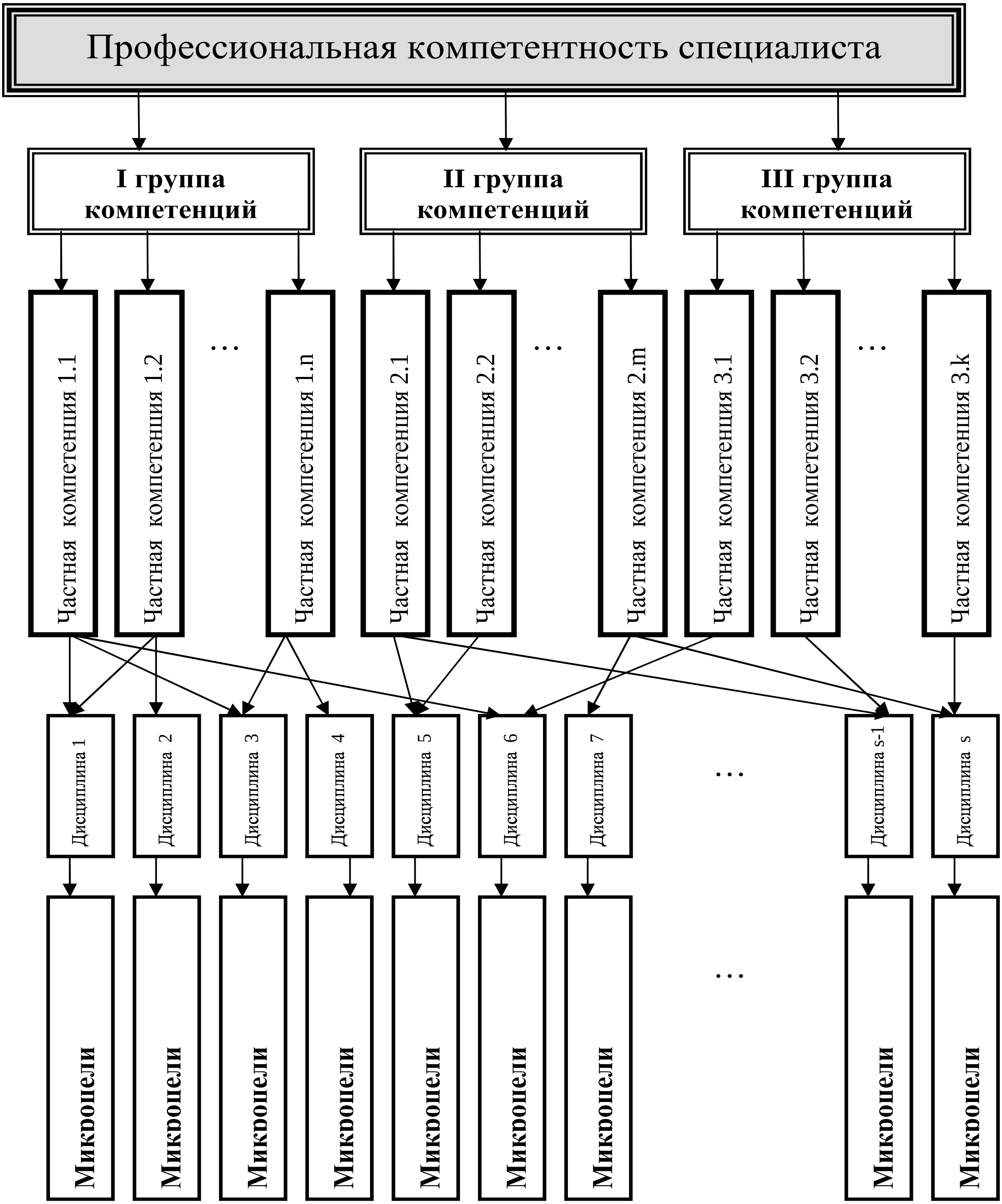


Рис. 1. Схема формирования профессиональной компетентности специалиста

14. Технологизация учебного процесса на стадии проектирования и на стадии реализации представляет новые возможности для целесообразного, объективного и достаточно четкого *управления учебным*

процессом и его качеством по конечным результатам. В технологии управления рассматриваются как **управленческая деятельность**, так и формирование нового **управленческого мышления**.

Опыт внедрения технологии проектирования учебного процесса в отдельные учебные заведения России показал, что освоение преподавателями педагогической технологии Монахова В.М. способствует:

во-первых, профессиональному росту преподавателя, ибо преподаватель становятся соавтором педагогической технологии, разрабатывая проекты учебного процесса в виде технологических карт по учебным темам (ТК);

во-вторых, создавая программы развития по своему предмету, способствуют существенному уточнению и конкретизации методических средств всестороннего развития студентов в своем учебном предмете;

в-третьих, осваивая технологию, преподаватели вовлекают в эту инновационную деятельность и студентов. Студенты, принимая все технологические правила и процедуры построения учебного процесса, в котором им отводится роль активных участников, сознательно выбирают собственную траекторию обучения и тот уровень успешности обучения, который координируется с их собственной целевой установкой.

в-четвертых, по мнению преподавателей, технология эффективно обеспечивает достижение требуемого уровня ЗУНов (знания, умения, навыки), формирует частные компетенции будущего специалиста. Конечным суммарным результатом освоения технологии является совершенствование в целом содержания образования с системным учетом физиолого-гигиенических и психолого-педагогических норм в учебном процессе.

Отметим проблемы, которые возникают при адаптации технологии проектирования учебного процесса к требованиям компетентностного подхода.

1. Необходимо ли ставить весовые коэффициенты перед ключевыми компетенциями? Другими словами, все ли компетенции одинаково значимы в процессе формирования профессиональной компетентности специалиста?

2. Всегда ли справедливо положение, что из сформированности всех ключевых компетенций следует сформированность итоговой профессиональной компетентности студента?

3. Переведя ключевые компетенции на язык микроцелей и распределив микроцели по учебным дисциплинам, можно ли говорить, что положительные оценки по этим микроцелям (компетенциональные оценки) однозначно информируют нас о сформированности данной компетенции?

Из последней проблемы следует список новых проблем:

а) оптимально ли распределение микроцелей по существующему учебному плану профилирующих дисциплин?

б) необходимо ли оптимизировать набор действующих дисциплин? Или требуется введение новых дисциплин, структура которых полностью подчинена логической последовательности формирования компетентности;

в) введение отчетной документации по факту достижения студентами компетенциальных микроцелей;

г) объем и трудность предстоящих методических работ ППС:

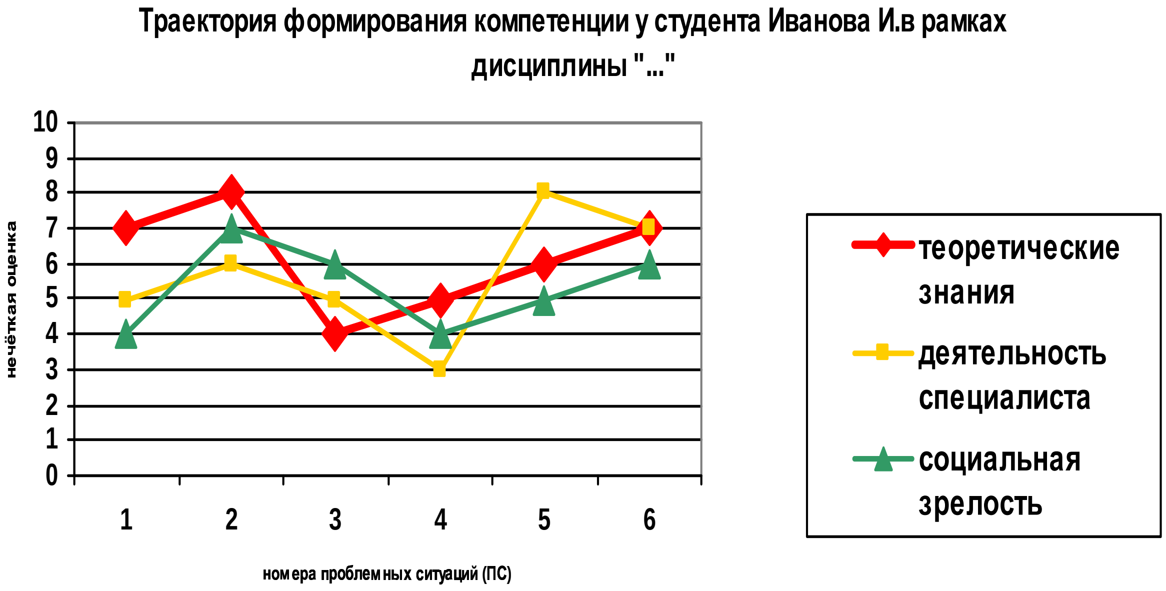
- высококвалифицированных труд перевода содержания компетенций на язык диагностических микроцелей;
- для каждой микроцели создается диагностика, однозначно информирующая о факте достижения микроцели и значит сформированности данной микроцели;
- создание новой редакции и логической структуры учебных программ, целевой установкой которых становится компетенция;
- новая логика выстраивания модулей и УМК, предельно прозрачная и логически стройная система распределения компетенций по учебным дисциплинам;
- органическое соединение традиционного опыта и инновационных моментов.

Оценка сформированности компетенции у будущего специалиста в рамках дисциплины выводится интегрально из оценок диагностик решения студентом проблемных ситуаций ПС1, ПС2,. . . , ПСn. Так как понятие “компетенция” многогранно, а оценка сформированности компетенции носит *нечеткий характер*, предлагаю эту оценку сделать составной, а каждую составляющую оценки оценивать нечетко по 10-ти балльной шкале (уровню “удовлетворительно” будет соответствовать 3-5 баллов, уровню “хорошо” 6-8 баллов, уровню отлично 9-10 баллов). Составные части оценки предлагаю взять из монографии А.А. Вербицкого. На с. 182-185 приведена таблица “Прогностическая компетентностная модель разработки технологий контекстного обучения” в которой представлены “связи групп компетенций учителя и составляющих его профессиональной сферы (*теоретические знания, деятельность будущего учителя* (любого другого специалиста), *социальная зрелость*)”. Эти три составляющие профессиональной сферы специалиста можно взять в качестве 3-х частей оценки за диагностику решения ПСi (а в дальнейшем и оценки сформированности компетенции в рамках дисциплины). Таким образом, за решение каждой проблемной ситуации ПСi студент получит **составную нечеткую оценку** в виде нечеткого множества с элементами:

<<*оценка теоретических знаний* – α1i> ; <*оценка деятельности будущего специалиста* – α2i>; <*оценка социальной зрелости* – α3i>>, где αji натуральное число от 1 до 10 (j-номер проблемной ситуации). Оценки выставляет преподаватель. Смысл нечеткой оценки можно определить по шкале:

1,2	Недостаточный уровень
3	Ниже базового уровня
4,5	Базовый уровень (достаточный)
6,7,8	Выше базового уровня
9,10	Продвинутый уровень

Пример траектории формирования компетенции студента в рамках дисциплины представлен на рисунке:



Каждую траекторию можно свернуть в одну нечеткую оценку сформированности компетенции в рамках дисциплины по формуле: *целая часть от среднего арифметического оценок каждой составляющей:*

$$[\left(\sum_{i=1} \alpha_{ji}\right)\frac{1}{6}]$$

Например, для данного графика итоговая оценка сформированности компетенции имеет вид:

<<оценка теоретических знаний – 6> ; <оценка деятельности будущего специалиста – 5>; <оценка социальной зрелости – 5>>.

Если составляющие части оценки имеют разную значимость для формирования компетентности, то можно ввести весовые коэффициенты для отображения значимости составляющих частей оценки.

Можно прийти к итоговой оценке β, выраженной только одним числом, используя формулу β =min $\{\alpha 1,\alpha 2,\alpha 3\}$=min$\{6;\ 5;5\}$=5 (компетенция сформирована на базовом уровне).

Интегральная оценка сформированности компетентности будущего специалиста выводится из итоговых оценок сформированности компетенции в рамках каждой из дисциплин, отвечающих за данную компетентность по формуле:

$$\min\ \{\beta 1,\beta 2,\ldots,\beta \mathrm{n}\},$$

где n – количество дисциплин, в рамках которых формировалась компетенция.

В результате, для каждого выпускника университета будет получена система оценок, показывающих степень сформированности всех компетенций профессиональной компетентности специалиста. Кроме этого, будут получены результаты, традиционные для педагогической технологии В.М.Монахова.

Нами выдвинута и внедряется в образовательную практику концепция управления качеством образования, в которой управление трактуется как *управленческий процесс*, к проектированию и прогнозированию которого операционально применимы и аппарат технологизации управленческого процесса, и аппарат его информатизации. Естественно, что идеологией этой концепции является интеграция педагогических и информационных технологий. Наш подход призван устранить несоответствие и неадекватность результатов образовательной деятельности образовательным учреждения реалиям информационного общества. Управленческий процесс характеризует непрерывная цепь логически взаимосвязанных функций, обеспечивающая реализацию управленческих функций и их коррекционное воздействие на образовательный процесс. В состав этих функций входят: взаимодействие с внешней средой, политика и планирование качества, повышения квалификации и мотивация преподавательского состава, организация работы по качеству, контроль качества, информация о качестве, принятие управленческих решений и их реализация.

С учетом этого *управление качеством образования* в настоящем сообщении рассматривается, с одной стороны, как процесс целенаправленного воздействия на факторы, определяющие качество образования, с другой стороны, как поиск и фиксация объективных характеристик образовательного процесса и разработка управленческих критериев, на базе которых принимается то или иное управленческое решение.

Технологический подход к информатизации управленческого процесса понимается нами как реализация системных преобразований, состоящих из следующих этапов:

Этап 1. Разработка *модели учебного процесса* и ее технологизация. Построение на этой базе педагогической технологии проектирования учебного процесса по любой дисциплине;

Этап 2. *Интеграция* этой педагогической технологии с информационными технологиями для *автоматизации целого ряда сугубо методических процедур, образующих цепочки управленческой деятельности*;

Этап 3. Разработка *модели методической системы обучения*, которая использует уже готовый проект учебного процесса (технологическая карта). **В этой модели функционирует принципиально иной главный *управленческий критерий* для принятия управленческого решения – *разность между микроцелью*, как деятельностным образцом требований Государственного образовательного стандарта, *и результатом диагностики*, фиксирующей реальный уровень освоения студентом не только содержания микроцели, но и факт сформированности;**

Этап 4. Создание компьютерной системы обработки всех результатов диагностик (индивидуально одним студентом или группы в целом), позволяющей получить **целостную картину качества образовательного процесса**, которая характеризует как уровень и качество общеобразовательной подготовки студента, так и качество профессиональной деятельности преподавателя и качество образовательного процесса в данной группе;

Этап 5. Построение *модели управленческого процесса*, в которой четко определена процедурная последовательность и создан информационный банк допустимых управленческих решений соответствующего уровня.

Этап 6. Построение *модели использования информационных технологий* в управлении качеством образовательного процесса. Анализ состояния качества и продуктивности информационных технологий сегодня показывает, что наблюдается максимальное использование стремительно развивающихся возможностей компьютера на фоне тривиальности и примитивности педагогических идей, лежащих в основе разработок тех или иных информационных технологий.

Предполагаемым результатом (может быть идеальным) интеграции информационных и педагогических технологий нами видится в создании **общенаучного фундаментального инструментария**, адекватно и универсально моделирующего все педагогические и управленческие ситуации образовательного процесса. Сам инструментарий может выполнять принципиально новую функцию по формированию информационного банка ресурсного учебно-методического обеспечения образовательного процесса. Таким образом, дидактической задачей интеграции в нашей трактовке становится формирование **общенаучной технологической культуры математического моделирования как учебного, так и управленческого процессов**, а это уже философия формирования и использования человеческих знаний и ресурсов.

Имеющиеся на сегодняшний день различные подходы к формулировке понятия "*качество образования*" не противоречат друг другу, а лишь отражают тот факт, что наука и практика имеют дело с *многомерным феноменом*. Выше изложенная концепция управления качеством образовательного процесса имеет весьма широкие применения и в качестве примера может быть использовано при создании государственных образовательных стандартов

Библиографический список

1. *Вербицкий, А.А.* Гуманизация и компетентность: контексты интеграции [Текст] / А.А. Вербицкий, О.Г. Ларионова. – М.: МГОПУ, 2006. – 172 с.
2. *Богусловский, М.В.* Генезис гуманистической парадигмы образования в отечественной педагогике начала XX в. [Текст] / М.В. Богуславский // Педагогика. – 2000. – № 4. – С. 63-70.
3. *Монахов, В.М.* Введение в теорию педагогических технологий: Доклад на заседании отделения Философии образования и теоретической педагогики Российской академии образования [Текст] / В.М. Монахов // Школьные технологии. – 2005. – № 3. – С. 4-9.
4. *Равен, Дж.* Педагогическое тестирование: проблемы, заблуждения, перспективы: пер. с англ. [Текст] / Джон Равен. – Изд. 2-е, испр. – М.: Когито-Центр, 2001. – 142 с.
5. *Болотов, В.А.* Компетентностная модель: от идеи к образовательной программе [Текст] / В.А. Болотов, В.В. Сериков // Педагогика. – 2003. – № 10.

Circolo matematico di Palermo и формирование международного математического сообщества в конце XIX – первой трети XX века [1]

С.С. Демидов

1. Международное математическое сотрудничество в последней трети XIX века. В XIX веке математика начала постепенно становиться массовой профессией. Прежде всего она заняла важное место в системе народного образования, которое првращалось в этот период в один из приоритетов внутренней политики развитых государств. Создавались специальные министерства, задачей которых становилось строительство национальной системы народного образования – от начальных училищ вплоть до высших учебных заведений. Эта система, в свою очередь, нуждалась в квалифицированных педагогах – от учителей начальных школ до профессоров университетов. Таким образом возникло целое сообщество профессионалов, занимавшихся обучением математике. Научные же изыскания в области математики и ее приложения к другим наукам, а также к практическим нуждам общественной жизни оставались еще делом сравнительно небольшой группы специалистов, активность которой, однако, к началу XX столетия стала уже заметной. Рост промышленности, прежде всего промышленности военной, приводил к необходимости воспитания специалистов в области прикладной математики, могущих ставить и решать сложные в математическом отношении задачи, необходимые для нужд новой техники. На передний план начали выдвигаться статистические задачи и проблемы вычислительного характера, приводя к организации всякого рода вычислительных и статистических бюро. Действительный размах эта деятельность приобрела лишь в XX столетии – после Первой и, особенно, Второй мировых войн.

Деятельность эта, определявшаяся прежде всего нуждами национального развития и получившая наиболее явственное выражение в наиболее развитых государствах того времени – прежде всего в Германии, Франции, Великобритании, Италии и России – постепенно приобретала международный характер. К ставшим уже традиционными связям на

---

[1] В настоящей статье я использую материалы, найденные в архиве *Circolo* в департаменте математики Палермского университете в июне 2009. Пользуюсь случаем выразить благодарность известному историку математики профессору этого университета Aldo Brigaglia, оказавшему мне при этом помощь и содействие. В части, касающейся истории *Circolo,* я широко использовал материалы из его работ [1, 2].

уровне академий наук и университетов, во второй половине XIX века добавились контакты национальных математических обществ. В 1871 г. в Германии появился первый реферативный математический журнал – "Ежегодник успехов математики" (Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik). В первом его томе были прореферированы статьи по математике и ее приложениям, вышедшие в мире в 1868 году. В 1885 г. Математическое общество Франции выступило с инициативой создания библиографического указателя литературы по математическим наукам. Такой указатель – Répertoire bibliographique des sciences mathématiques – был подготовлен коллективом математиков из 15 стран, возглавляемым А. Пуанкаре, и издан в 1894-1912 гг. В конце века немецкие математики начали издание монументальной "Энциклопедии математических наук" (Encyclopedie der mathematischen Wissenschaften), в работе над которой, наряду с немецкими, приняли участие математики из Австрии, Бельгии, Великобритании, Нидерландов, Норвегии, России, Соединенных штатов северной Америки, Франции и Швеции. Наконец, в 1897 году в нейтральной Швейцарии – в Цюрихе – собрался Первый международный конгресс математиков, а уже через три года – в 1900 – в Париже прошел Второй такой конгресс, на котором со знаменитым докладом "Математические проблемы" выступил Д. Гильберт. Великий математик попытался предугадать будущее развитие математики, выделив проблемы (в печатном тексте их 23), на путях решения которых, сформируется значительная часть математики XX века. Его речь была пронизана оптимизмом, верой в наступающий светлый век – век разума и прогресса, верой в высокое предназначение математической мысли. Математики различных стран стали ощущать себя органической частью единого мирового математического сообщества, в котором предстояло разрушить все границы, в том числе границы языковые. Дж. Пеано вместе со своими учениками и единомышленниками выписывал контуры будущей математической логики и одновременно разрабатывал единый язык – интерлингву – на котором, как в прошлом на древнегреческом, арабском или латыни, должна была, по его мысли, заговорить будущая математика и, шире, вся наука. И не удивительно, что с такой программой выступил итальянец – представитель нации, только вчера пережившей великое возрождение – Рисорджименто (Risorgimento). И также не удивительно, что в другой части уже единой Италии – в сицилийском Палермо – родился другой честолюбивый международный проект – создания международного математического общества.

Здесь следует заметить, что Сицилия и ее главный город Палермо переживали в ту пору период необычайного расцвета. Прежде всего расцвета промышленного – процветали судостроение и судоходство, добыча серы, производство мебели, вина, банковское дело. В 1893 году с большим успехом прошла большая международная выставка. Экономический подъем сопровождался и подъемом культурным. В этой атмосфере воспитывался великий драматург Л. Пиранделло, отец которого, владевший серным рудником, мечтал, что его сын, получив техническое образование, продолжит его дело, но сын избрал иной путь. В 1897 открылся новый оперный театр – Teatro Massimo – в ту пору второй по размерам после парижской Opéra Garnier в мире. Такая атмосфера благоприятствовала всякого рода культурным начинаниям, в том числе, и в области науки. На математической карте Италии Палермо особо не выделялся. Самым заметным математиком в Палермо был Джиован Баттиста Гучча (Giovan Battista Guccia; 1855-1914), который не был крупным ученым, но оказался превосходным организатором, оставившим заметный след в истории математики.

2. Создание *Circolo matematico di Palermo.* Дж. Б. Гучча происходил из богатой и знатной палермской семьи маркизов Ганзариа (Ganzaria). Хотя, как мы уже сказали, он и не был крупным математиком, но обладал достаточной научной квалификацией и математическим вкусом. Ученик и последователь Л. Кремоны, он стал автором более сорока работ, главным образом по кремоновым преобразованиям (см. [3]). Как полагает А. Бригалья [2. P. 183], идея организации математического общества, носящего международный характер, пришла Дж. Б. Гучча летом 1880 года, когда он был послан его учителем в Реймс на съезд Французской ассоциации развития науки (AFAS – Association française pour l'avancement des Sciences). Кремона снабдил молодого ученого рекомендательными письмами к ряду крупных математиков. На самом деле съезды AFAS выходили далеко за рамки национальных научных собраний. Среди участников съезда в Реймсе наряду с известными французскими математиками (Г. Дарбу, Э. Лагерром и др.) присутствовали такие выдающиеся зарубежные математики как британцы Дж. Сильвестер и А. Кэли, бельгиец Э. Каталан.

Уже весной 1884 года в Палермо начал свою работу Математический кружок – *Circolo matematico di Palermo.* Поначалу это было более чем скромное предприятие. Среди 27 его членов только девять были профессиональными математиками, остальные были инженерами и школьными учителями. Для нужд кружка Дж. Гучча выделил часть своего дворца. Дальнейшая деятельность *Circolo* осуществлялась в значительной степени за его счет. Действуя чрезвычайно энергично и используя свои связи как в администрации, так и в академических кругах, Гучча поначалу поставил своею целью превратить кружок, если не официально, то де-факто, в общеитальянское математическое общество. В 1886-

1888 гг. членами *Circolo* стали почти все крупные математики Италии – Дж. Баттальини (с 1886), Э. Бетти, Ф. Бриоски, В. Вольтера, Л. Кремона, Дж. Пеано, К. Сегре, Э. Чезаро (с 1887), Ч. Арцела, Э. Бельтрами, Дж. Веронезе, Ф. Казорати, С. Пинкерле (с 1888). Затем к обществу присоединились Г. Кастельнуово, Ф. Энриквес, Т. Леви-Чивита, Ф. Севери [2, с. 186].

В 1887 г. вышел первый том журнала *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, в котором кроме итальянских математиков (К. Сегре и др.) участвовали также зарубежные ученые – бельгиец Э. Каталан, британец Т.А. Хирст, голландец П.Г. Схоуте (P.H. Schoute). В следующем году появился второй том, где наряду с именами известных итальянских авторов (Э. Бетти, В. Вольтера, Дж. Пеано, того же К. Сегре) мы видим французов Ж. Альфана, Э. де Жонкьера, К. Жордана, россиянина А.П. Старкова. В 1888 г. в *Circolo* был принят новый статус, по которому члены редколлегии журнала избирались членами общества. В результате этих выборов появилась достаточно большая редколлегия, в которую вошли представители крупнейших математических центров Италии. А в 1891 г. к редколлегии присоединился А. Пуанкаре – это был первый иностранный ее член. В 1894 г. к нему присоединился Г. Миттаг-Леффлер, издававший широко известный в Европе математический журнал *Acta Mathematica.*

Успех журнала определялся политикой его редакции, и прежде всего самого Дж. Гучча. Редакция горячо поддерживала новые тенденции в развитии математической мысли. Так именно на страницах *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo* появились первые важные работы Э. Бореля, Г. Вейля, М. Фреше. Здесь в период с 1904 по 1914 гг. были опубликованы 9 фундаментальных работ А. Пуанкаре, в том числе “Пятое дополнение к analysis situs” (1904), “Новые замечания о непрерывных группах” (1908), “О динамике электрона” (1906), “Об одной геометрической теореме” (1912) . Последняя вышла уже через несколько дней после смерти А. Пуанкаре.

При этом руководство *Circolo* при публикации статей и даже при выборе членов редколлегии исходило прежде всего из значимости результатов математика, а не из его официального положения. Важно также отметить, что Дж. Гучча превосходно организовал сам издательский процесс. Использовав опыт ведущих европейских издательств, выпускающих математическую литературу (Gauthier-Villars в Париже, Teubner в Лейпциге), он приобрел лучшую по тем временам печатную технику и замечательно организовал издательский процесс.

В итоге журнал стал одним из наиболее распространенных и читаемых во всем мире. Свидетельством этому служит и история взаимоотношений журнала с российским математическим сообществом (о чем см. ниже).

Документы из архива *Circolo matematico di Palermo* показывают, как Дж. Гучча постепенно реализовывал идею превращения *Circolo* в международную организацию. Первым важным достижением на этом пути стал приобретенный обществом де-факто к началу XX столетия статус "(неофициального) национального математического общества Италии с высокой международной репутацией" [2, с. 181].

3. Амбиции руководителей Circolo и Международный математический конгресс 1908 г. в Риме. Репутация *Circolo* в математическом мире в начале XX века была действительно столь высока, что подготовка IV Международного математического конгресса 1908 года, который было решено на III конгрессе в Гейдельберге проводить в Риме, была поручена двум итальянским организациям – Национальной Академии наук Деи Линчеи в Риме и *Circolo*. Дж. Гучча использовал эту подготовку для реализации своих планов интернационализации *Circolo*. К 1908 г. число иностранных членов *Circolo* возросло до 605 и, что было также очень важно в тогдашней Европе, 78 из них составляли немцы. Чтобы добиться этого в обстановке ставшей традиционной к началу XX века вражды немцев и французов, нужно было проявить чудеса дипломатической эквилибристики, на которую оказался способным Дж. Гучча. Ко времени его смерти – к 1914 году – общество *Circolo* включало 924 члена, то есть было крупнейшим математическим обществом мира. 618 из них были иностранные математики, то есть общество было действительно интернациональным: оно включало 140 математиков из Германии, 140 – из США, 77 – из Австрии, 67 – из Франции, 44 – из России, 29 – из Великобритании. Журнал общества *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo* печатал статьи на итальянском, немецком, французском, английском, испанском, эсперанто и пеановской интерлингве. В 1908 г. был принят новый статус, согласно которому принцип формирования редколлегии кардинально менялся – журнал становился действительно международным. С 1909 г. она состояла из 15 итальянских и 25 иностранных математиков. Из итальянцев мы видим здесь К. Сегре из Турина, Дж. Лориа из Генуи, Т. Леви-Чивиту и Ф. Севери из Падуи, С. Пинкеле и Ф. Энриквеса из Болоньи, Л. Бианки и У. Дини из Пизы. Из Франции – Э. Бореля, Ж. Адамара, Э. Пикара и А. Пуанкаре. Из Германии – Д. Гильберта, К. Каратеодори, Ф. Клейна, Э. Ландау и М. Нетера. Из США – Э. Мура и У. Осгуда, из Швеции – И. Фредгольма и Г. Миттаг-Леффлера. Из Бельгии – Ш. да ла Валле-Пуссена. Из Дании – Г. Цейтена. Российская школа была представлена А.М. Ляпуновым и В.А. Стекловым. Указанные имена – элита мировой математики начала XX века. Ни один другой математический журнал того времени не мог похвастать такой представительной редакционной коллегией.

Рост числа членов *Circolo* и формирование такой представительной редколлегии стали результатом активности Дж. Гучча, проявленной в период подготовки и проведения IV Международного конгресса математиков в Риме. Однако, конгресс этот не стал для *Circolo* и для Дж. Гучча тем триумфом, на который он расчитывал. Итальянские академические круги в достаточно резкой манере указали "провинциальной выскочке" его место. На всех официальных мероприятиях конгресса итальянский академический бомонд вел себя так, словно *Circolo*, выступавший вместе с Национальной Академии наук Деи Линчеи организаторами конгресса, не существовал. Дж. Гучча достаточно болезненно перенес эту демонстрацию силы (см. [2, с. 190-191]).

4. Circolo в драматических событиях XX века. Несмотря на такую позицию итальянских "академических" кругов, *Circolo* продолжало успешную деятельность: вокруг журнала объединилась группа влиятельных математиков из различных стран мира. Чего стоила, к примеру, активность французских коллег, прежде всего, А. Пуанкаре. Но надвигались тяжелые для Европы времена. В 1914 разразилась Первая мировая война. А в конце октября 1914 года умер Дж. Гучча. Когда война завершилась, и в Европе с большим трудом начало восстанавливаться международное научное сотрудничество, *Circolo* стало проявлять большую активность в деле восстановления международного математического сообщества. Когда наиболее антигермански настроенные математики стран-победительниц (Э. Пикар, Ш. де ла Валле-Пуссен и др.) начали массированную атаку, направленную на блокаду математиков Германии и их союзников, руководство *Circolo* в лице преемника Дж. Гучча М. Де Франчи (M. De Franchi) резко выступило против подобной политики. В составе редколлегии *Rendiconti* были сохранены немецкие математики – Д. Гильберт, Ф. Клейн, М. Нетер и Э. Ландау. Журнал сохранил свой подлинно международный характер и еще более укрепил свой престиж. К 30-ым годам журнал вновь стал одним из наиболее влиятельных изданий в математическом мире. К сожалению, и здесь *Circolo* подстерегал новый поворот мировой и национальной истории. В Италии наступала эпоха дуче. В 1931 году по требованию фашистского правительства пришлось изменить устав *Circolo.* По новым правилам число иностранных членов любой национальной ассоциации не должно было превышать половины числа ее итальянских членов (а в *Circolo* иностранные члены составляли две трети). Кроме этого, редактор журнала и члены редколлегии не могли быть избираемы, но назначались властями. В 1938 г.

к этому добавились новые расовые законы: из редколлегии были исключены математики-евреи – Э. Вольтера, Г. Кастельнуово, Ф. Энриквес и Т. Леви-Чивита. Таким образом создание Дж. Гучча было разрушено.

Разумеется, в послевоенное время *Circolo matematico di Palermo* было восстановлено и сегодня это общество и его *Rendiconti* занимают видное место в математической жизни Италии и Европы. Его история – важная страница в истории мировой математики, в истории становления современного математического сообщества. В ней интересно преломляется и история математики отдельных стран, в частности, история математики в нашей стране.

5. Российские математики в Circolo.[1] Первым из россиян членом *Circolo matematico di Palermo* стал математик из Одессы Алексей Петрович Старков. Это случилось в 1888 г., когда во втором томе *Rendiconti* появилась его статья “Об одной задаче вариационного исчисления”.

А.П. Старков фигура в российской математической жизни последней четверти XIX века своеобразная (о нем см. [4]). Его перу принадлежит большое количество работ по различным вопросам математики (прежде всего, математического анализа, алгебры) и ее истории. В 1892 членом *Circolo* стала Евгения Кербедз из Санкт-Петербурга, не оставившая никакого заметного следа в развитии математики.

В 1899 в Общество вступил известный русский математик профессор Казанского университета А.В. Васильев. Если первые два русских члена *Circolo* – результат естественного неуправляемого хода событий, то появление в составе Общества А.В. Васильева можно рассматривать как проявление усилий Дж. Гучча, направленных на превращение *Circolo* в представительную международную ассоциацию: ученик П.Л. Чебышева и К. Вейерштрасса, совсем недавно успешно проведший в Казани празднества по случаю 100-летия Н.И. Лобачевского, ставшие событием

---

[1] Архив *Circolo* хранится в Департаменте математики университета в Палермо. Он сохранился не полностью: часть погибла в результате бомбардировок во время Второй мировой войны. Сохранившаяся часть не разобрана. Материалы хранятся в больших синих архивных папках-коробах. Это переписка руководства *Circolo* с его действительными и потенциальными членами (в основном, по поводу оплаты членских взносов или корректур печатающихся в *Rendiconti* статей), а также с различными организациями по поводу приобретения журнала и др. вопросам, “Заявления о приеме” (Bulletin d”admission) – типографские формы, заполнявшиеся собственноручно вступающими в Общество с двумя подписями членов, поддерживающих кандидата. За одну неделю, которую я провел в Департаменте, я просмотрел менее трети хранящихся там бумаг. Поэтому приводимые мною сведения носят отрывочный неполный характер.

в математической жизни всей Европы – такая фигура была для руководителей *Circolo*, преследовавших амбициозные цели, действительно ценным приобретением. Однако планомерный характер действия Дж. Гучча приобрели в преддверии Международного конгресса математиков 1908 года в Риме.

В 1905 году членом *Circolo* становятся уже два россиянина. Это – автор работ по теории вероятностей и ее приложениям к теории стрельбы профессор Санкт-Петербургской Михайловской артиллерийской академии, где он читал курсы по различным отделам анализа и теории функций комплексного переменного, полковник С.Г. Петрович [5, с. 423], и ученик А.М. Ляпунова и В.А. Стеклова профессор теоретической механики Киевского политехнического института Н.Н. Салтыков. В 1907 году к *Circolo* присоединяются уже крупнейшие деятели Петербургской школы – профессор университета В.А. Стеклов и академик А.М. Ляпунов. В 1909 году оба математика становятся членами редакционной коллегии *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo.*

В 1908 – в год римского Конгресса – членами *Circolo* становятся 6 русских математиков. Это петербуржцы – профессор Морской академии А.Н. Крылов, профессор Технологического института Б.М. Коялович, академик Н.Я. Сонин, профессор университета И.Л. Пташицкий, а также профессор Харьковского университета Д.М. Синцов и приват-доцент Новороссийского университета В.Ф. Каган.

Процесс активного вступления в *Circolo* россиян продолжался вплоть до Первой мировой войны. Так в 1909 году членами Общества становятся петербуржцы академик А.А. Марков, приват-доцент университета И.И. Иванов, выпускник Горного института Н.М. Крылов, выпускник Харьковского университета Г.А. Грузинцев, в 1910 – профессор Петербургского университета Д. Бобылев и профессор Харьковских Высших женских курсов С.Н. Бернштейн. В 1911 году к ним добавились один москвич – готовивший под руководством Д.Ф. Егорова магистерскую диссертацию Н.Н. Лузин, а также целый отряд петербуржцев, оставленных В.А. Стекловым при университете для подготовки к профессорскому званию – Я.Д. Тамаркин, А.А. Фридман, Я.А. Шохат, В.В. Булыгин, В.И. Смирнов, а также оставленный А.А. Марковым для подготовки к профессорскому званию Я.В. Успенский. Если в 1912 к *Circolo* присоединился единственный представитель России – преподаватель Высших женских курсов в Петербурге В.И. Шифф, то в 1913 их было уже пятеро – профессор Киевского политехнического института Н.Б. Делоне, переехавший в Петербург из Одессы Г.М. Фихтенгольц, некий А. Панов (найти какие-либо сведения о нем нам не удалось), приват-доцент Киевского университета А.Д. Билимович, приват-доцент Новороссийского университета Д.А. Крыжановский и московский аэродинамик, организатор известного института в Кучино Д.П. Рябушинский. Еще два россиянина вступили в *Circolo* в первые годы Первой мировой войны – это были москвичи: работавшие тогда над магистерскими диссертациями В.В. Голубев (1914) и И.И. Привалов (1916).

Далее приток новых русских членов в *Circolo* приостановила Первая мировая война и последовавшие за ней в России революция и гражданская война. Возобновился он тогда, когда жизнь научного сообщества в СССР начала налаживаться – во второй половине 20-ых годов. В 1924 году членом Общества становится профессор Московского университета А.Я. Хинчин, в 1925 году – молодая супружеская пара из Ленинграда – ассистент Ленинградского университета Н.Е. Кочин и сотрудница Главной геофизической обсерватории П.Я. Полубаринова, в 1926 – киявляне сотрудники АН УССР М.К. Куренский и М.Ф. Кравчук. Особенно крупное пополнение *Circolo* теперь уже советскими математики случилось в 1927 году. Это были профессор Днепропетровского университета И.Е. Огиевецкий, профессор Московского университета С.П. Фиников, ленинградцы – профессор университета Н.М. Гюнтер, профессор Горного института А.М. Журавский, аспиранты университета И.А. Лаппо-Данилевский и В.А. Тартаковский. Наконец, в 1928 году (список составлен по положению на конец июня 1928 года) появляется имя преподавателя Харьковского технологического института Я.Л. Геронимуса.

Список российских членов *Circolo* весьма представителен: практически все содержащиеся в нем имена (за ничтожным числом исключений!) это известные математики. Он несет, с одной стороны, печать проводимой руководителями *Circolo* политики, направленной на преобразование Общества в международную ассоциацию – резкое увеличение числа российских членов Общества (как и вообще числа его иностранных членов), связанное с проводимым в Риме в 1908 году Международным конгрессом математиков, продолжавшееся вплоть до начала Первой мировой войны и возобновившееся по ее окончании. С другой стороны, он замечательным образом отражает и динамику развития российского математического сообщества рассматриваемого периода. В нем отчетливо проявляются три наиболее активно развивавшихся тогда математических региона Российской империи. Во-первых, Санкт-Петербург со своими ведущими математиками той поры – А.А. Марковым, А.М. Ляпуновым и В.А. Стекловым – и с талантливой молодежью, по большей части принадлежавшей к школе В.А. Стеклова. Во-вторых, Москва – громко заявившая о себе в первом десятилетии XX-го века творчеством Н.Н. Лузина и его учеников. В-третьих, Украина со своим старейшим Харьковским университетом, а также с Киевским университетом, динамичным и открытым новым веяниям Новороссийским университетом, наконец, с совсем молодым Днепропетровским университетом. Большой процент совсем молодых математиков в “российской” части *Circolo* – людей еще только готовящих свою первую диссертацию или совсем недавно ее защитивших, приступивших к разработке новых территорий в математике (как в таких традиционных областях, как математическая физика или обыкновенные дифференциальные уравнения, в случае питерцев, так и в совсем новых, вроде теории функций действительного переменного, в случае москвичей) свидетельствовал о подъеме, который переживали математические исследования в стране.

6. Заключение. Надеждам Дж.Б. Гучча – преобразовать *Circolo* в международную математическую ассоциацию, объединяющую математиков всего мира – реализоваться было не суждено. С высоты нашего времени хорошо видна несбыточность его мечтаний. Этот опыт свидетельствовал, во-первых, о ненадежности выбора любой национальной организации в качестве фундамента такой ассоциации. Во-вторых, он, как мы понимаем сегодня, зная о трагической истории XX-го века, подготовившего невиданные испытания человечеству и научному сообществу, был преждевременным. Потребовалось еще много времени и немало усилий всего мирового математического сообщества, чтобы в ходе длительной и мучительной истории его формирования такая ассоциация была осуществлена в виде нынешнего Международного математического союза (см. [6]). Однако, бесполезным опыт *Circolo* не был – его деятельность, способствовавшая успешному развитию математики как в Италии, так и во всем мире, стала важным этапом в развитии международного сотрудничества математиков, в становлении международных институтов и современного мирового математического сообщества.

Библиографический список

1. *Brigaglia, A., Masotto, G.* Il Circolo matematico di Palermo. Bari: Edizioni Dedalo. 1982.
2. *Brigaglia, A.* The First International Mathematical Community: The *Circolo matematico di Palermo*. In: Parshall K.H., Rice A.C. (Eds.) Mathematics Unbound: The Evolution of an International Mathematical Research Community, 1800-1945. (History of Mathematics. V. 23). Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, London Mathematical Society. 2002. P. 179-200.
3. *De Francis, M.* Giovan Battista Guccia // Rendiconti del Circolo matematico di Palermo. V. 39. 1914. P. 1-10.
4. *Лейбман, Э.Б.* Математическое отделение Новороссийского общества естествоиспытателей (1876-1928) [Текст] / Э.Б. Лейбман //

Историко-математические исследования. – 1961. – Вып. XIV. – С. 441-464.

5. История отечественной математики [Текст] / Под ред. И.З. Штокало. – Киев: Наукова Думка, 1967. – Т. 2.
6. *Lehto, O.* The Formation of the International Mathematical Union. In: Parshall K.H., Rice A.C. (Eds.) Mathematics Unbound: The Evolution of an International Mathematical Research Community, 1800 – 1945. (History of Mathematics. V. 23). Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, London Mathematical Society. 2002. P. 381-398.

Кирику Новгородцу 900 лет: новый взгляд на творчество [1]

Р.А. Симонов

Древнерусскому ученому и религиозному деятелю Кирику Новгородцу (1110-после 1156/1158) в 2010 г. исполняется 900 лет. По-видимому, нет ни одного средневекового русского ученого, которого с б**о**льшим основанием можно считать предшественником научного подхода в исследовании природы времени. В трактате "Учение им же ведати человеку числа всех лет" (1136 г.) Кирик впервые математически изучил цикличность времени [1]. Еще совсем недавно его результаты не вписывались в научные представления. Так, отечественной исторической наукой рубежа XIX и XX вв. "Учение" Кирика характеризовалось как работа, "которая, впрочем, не имеет практического значения ни для истории, ни для чего бы то ни было и написана единственно для бесцельного обнаружения учености" [2, с. 792].

Первоначально историки не могли не только справедливо оценить, но математически выразить и верно интерпретировать расчеты Кирика [3-6]. Кажется, впервые, в середине XIX в., подошел к правильной оценке творчества Кирика видный математик академик В.Я. Буняковский, отметивший уникальность и правильность вычислений Кирика [7]. Однако в истории науки математическая составляющая труда Кирика еще недавно не находила адекватной оценки, что переносилось на состояние древнерусской математики в целом, как недостаточно развитой [8, 9]. Ситуация изменилась, когда были учтены особенности точности записи чисел у Кирика [10-12].

Примерно к концу XX в. не только в нашей стране, но и за рубежом "Учение" Кирика стало признаваться не просто выдающимся произведением, а начало рассматриваться своего рода одной из вершин научного

---

[1] Работа написана при поддержке РГНФ, грант № 09-03-00633а.

средневекового творчества, возвышающейся над общим уровнем культуры Руси. Был поставлен вопрос о несоответствии высокого научного содержания указанного труда Кирика общему интеллектуальному уровню культуры Руси [13]. Сейчас "Учение" рассматривается как "гениальное для своего времени" произведение [14].

В XXI в. творческий потенциал "Учения" был усилен в связи с новейшими взглядами на природу времени. Концепция времени, принятая в современной науке, опирается на взгляды И. Ньютона XVII в. Как показал недавно член-корр. РАН А.Н. Паршин (Отделение математики РАН), они правильны, но не полны. По его мнению, для понимания времени необходимо включить представление о циклах "в устройство космоса в качестве его основы" [15]. Конечно, Кирику до этих тонкостей было далеко. Но вызывает уважение его интуиция, подсказавшая ему необходимость включить циклы в число факторов математического исследования времени.

Циклы – основной предмет математического интереса Кирика. И до него календарные расчеты приурочивались к определенным хронологическим вехам. Так, знаменитые "семитысячники", послужившие ориентиром для Кирика при написании "Учения", включали расчеты на семитысячелетний период [16]. Эти докириковские хронологические вычисления, выражая идею христианской эсхатологии (Конца Света), находились в рамках традиционной космологии [17]. У Кирика несколько другой подход. Он рассматривает хронологию как средство, в какой-то степени освобождающее человека от власти Божественного провидения, как средство, находящееся у него (человека) на службе. По-видимому, поэтому математические расчеты у Кирика в "Учении" привязаны не к эсхатологическому рубежу в семь тысяч лет, а к текущему году его работы над трактатом – 1136 г.

Историки заметили, что трактат Кирика отличается от других средневековых сочинений тем, что не был вставлен "в богословско-символический текст" [18, 19]. При этом в "Учении" богословский аспект замещается указанным гуманистическим отношением к хронологии. Следовательно, выдающееся произведение Кирика, оригинальное по своему содержанию, не было традиционным и по форме. Подобное положение в русской культуре академик Д.С. Лихачев объясняет следующим образом: "Ломка традиционных форм вообще была довольно обычной на Руси. Дело в том, что новая, явившаяся на Русь культура (византийская – Р.С.) была хотя и очень высокой, создав первоклассную "интеллигенцию", но эта культура налегла тонким слоем, слоем хрупким и слабым. Это имело не только дурные последствия, но и хорошие: образование новых форм, появление внетрадиционных произведений было этим очень облегчено. Все более или менее выдающиеся произведения литературы (и науки, как “Учение” Кирика – Р.С.), основанные на глубоких внутренних потребностях, вырываются за пределы традиционных форм” [20, с. 140].

Можно ли Кирика рассматривать предвестником русского Предвозрождения, наступившего в XIV-XV вв.? Во всяком случае, Кирик в “Учении” заявляет себя ученым, отступающим от устоявшегося канона в хронологии, идущим своим индивидуальным путем. Как отмечал Д.С. Лихачев, “Предвозрождение – не Возрождение. Хотя оно и связано с развитием индивидуализма, с эмоциональным развитием человека, с осознанием ценности человеческой личности, но еще не знает прямой секуляризации культуры. Развитие индивидуализма совершается пока в пределах религиозного сознания и связано с ростом индивидуалистического мистицизма” [20, с. 147].

Существует недостаточно известный широкой общественности и мало изученный наукой феномен индивидуалистического мистицизма, выражавшийся в восприятии времени на Руси XV-XVI вв., как своего рода магической сущности, влияющей на события реальной жизни отдельного индивида. В связи с этим взглядом, исход событий мог быть благоприятным, неблагоприятным и нейтральным. Кодирование исходов по указанным качествам производилось, например, с помощью общественных часов, установленных в Московском Кремле в 1404 г. И вспомогательных таблиц, на основе которых все часы суток разделялись на “добрые”, “злые” и “средние”. Причем, каждый день менялись магические качества часов по определенному (недельному) циклу. Таким образом, чтобы судить, является ли данный момент времени благоприятным/неблагоприятным для какого-то события или поступка конкретного лица (отправления в путь, совершения сделки, заключения брака, зачатия ребенка и пр.), нужно было знать час с его магической природой указанного типа и день недели, к которому приурочивалось событие.

Славяно-русские источники, в которых была представлена рассматриваемая магическая концепция достаточно разнообразны, они охватывают период XV-XVII вв. Древнейшим среди них, вероятно, является летописная запись 1404 г. об установке упомянутых башенных часов (“часника”) в Московском Кремле чернецом с Афона “сербином” Лазарем по заказу и повелению Великого князя Московского Василия Дмитриевича (сына Дмитрия Донского). “Часник”, как говорится в летописи, предназначался для “часомерия”, смысл которого не раскрывался. Но после того, как был обнаружен перечень отреченных знаний с “часомерием”, стало возможно его трактовать в сокровенном смысле [21, 22]. Д.С. Лихачев оценивал московские часы 1404 г. как показатель одной из черт Предвозрождения: “Одна из характернейших и существеннейших черт Предвозрождения, а затем, в большей мере, Возрождения – это появление историчности сознания... Мир понимается и воспринимается во времени, и поэтому некий “сербин” устанавливает в Москве первые городские часы...” [20, с. 148-149].

Соответствующие славяно-русские источники представляют собой таблицы, по которым для каждого часа любой даты можно определить его (часа) магическое качество с целью прогнозирования благоприятности/неблагоприятности исхода событий. Эта магическая методика являлась модификацией греческой класссической хрономантии, восходящей к вавилонской традиции. В славяно-русских памятниках XV-XVI вв. представлен вариант хрономантии, который отличается от греческой классической хрономантии. Так, если в последней “неблагоприятными планетами” выступают Сатурн и Марс, то в славяно-русском варианте – Юпитер и Меркурий.

Для указанных отличий славяно-русских магических характеристик часа должна была существовать определенная причина. По мнению М.Б. Левина, она обусловлена спецификой соблюдения постов и разницей отсчета астрологического и церковного времени: “День в астрологии начинается с утра, а в православии с вечера” [23, с. 61]. Часы в древнерусском быту также отсчитывались с утра, из чего можно заключить, что славяно-русские магические характеристики часа учитывали церковную практику, что служит подтверждением приведенных слов Д.С. Лихачева о развитии в период русского Предвозрождения индивидуалистического мистицизма “в пределах религиозного сознания”. Это, с некоторой вероятностью, может служить свидетельством попытки введения Василием Дмитриевичем на Руси в 1404 г. особой службы прогнозирования по часам (“часомерия”) в рамках существовавшей в стране христианской идеологии [24].

Возвращаясь к вопросу о возможности считать Кирика предшественником идей русского Предвозрождения, следует констатировать, что его “Учение” не содержит прямых данных об этом. Но они как будто бы есть в другом произведении Кирика середины XII в. – “Вопрошаниях”. Это сочинение представляет собой собрание актуальных для русского быта XII в. вопросов Кирика с ответами на них архиепископа Новгородского Нифонта и других церковных иерархов. Один из вопросов касался важной для любой семьи ситуации: как избежать рождения ребенка с плохой судьбой. Проблема изложена Кириком достаточно ясно, четко и подробно: “Прочтохъ же іемоу (Нифонту – Р.С.) некоторои заповеди: “оже въ неделю (т.е. воскресенье – Р.С.) и в соуботоу и въ пятокъ лежить человекъ (с женой), а зачнеть детя, боудеть любо тать, любо разбоиникъ, любо блоудникъ, любо трепетивъ[1], а родителма опитемьіа две лета”. А ты книгы годяться съжечи”[2].

Из процитированной Кириком “заповеди” следует: чтобы не зачать “неудачных” детей и заодно избежать церковного наказания, люди должны были следовать простому правилу: не заниматься сексом на протяжении двух недель (точнее 13 дней – чертовой дюжины) три дня в следующем порядке: в воскресенье, субботу и пятницу. Однако новгородская церковь его (правило) не одобряло, что следует из краткой, но суровой рекомендации Нифонта сжигать такие тексты. В историографии обсуждалось указанное правило в трактовке Кирика-Нифонта. Например, Ф.П. Керенский считал, что Кирик “осудил веровавших в счастливые и несчастливые дни по отреченным книгам” [26]. Но это не так: осуждение выразил Нифонт, а Кирик не высказал своего мнения. Хотя сама постановка Кириком указаного вопроса перед Нифонтом, возможно, говорит о том, что он надеялся заручиться его поддержкой в использовании правила, как избежать зачатия “плохого” ребенка.

Новой в суждении Ф.П. Керенского была идея о счастливых и несчастливых днях: прямо о них ни Кирик, ни Нифонт не говорили. Однако Ф.П. Керенский не мог связать эту идею с традицией русской часовой магии, о чем в его время не было известно. Следует учитывать, что часовая магия тесно связана с магией счастливых / несчастливых (“добрых”/”злых”) дней и ночей. Дело в том, что в хрономантии понятие о счастливом / несчастливом (“добром”/”злом”) дне является вторичным по отношению к понятию счастливого / несчастливого (“доброго”/ ”злого”) часа. Это вытекает из того, что сокровенный характер дня / ночи определялся по первому “косому” часу дня / ночи, который отсчитывался с рассвета / заката. “Косой” (переменный) час был равен 1/12 светлой части дня и отдельно 1/12 части ночи. Первый рассветный час (“добрый”/ ”злой”) делал “добрым” или “злым” весь день. Первый закатный (“добрый”/ ”злой”) час делал “доброй” или “злой” всю ночь.

По соответствующим взглядам хрономантии, время по дням недели “управлялось” семью “планетами” (“планетами септенера”): воскресенье Солнцем, понедельник Луной, вторник Марсом, среда Меркури-

---

[1] По-видимому, здесь слово “трепетив” означает ‘ничтожный, всего боящийся человек’. В академическом словаре русского языка слово “трепетный” толкуется, в том числе, как “охваченный страхом, дрожащий от страха, боязливый, робкий”, “исполненный страха, боязни, проникнутый им”; что подкрепляется стихотворным примером: ‘Рой подавленных и трепетных рабов Завидовал житью последних барских псов’ (Н. Некрасов)” [25, с. 406].

[2] Се іесть въпрашаніе Кюриково, іеже въпраша іепископа ноугодьского Нифонта и инехъ // Русская историческая библиотека. Т. 6. СПб., 1880. Стлб. 44.

ем, четверг Юпитером, пятница Венерой, суббота Сатурном. Названия дней недели в некоторых западноевропейских языках сохраняют соответствующее “управление” “планетами септенера”. Так, известный историк науки А.П. Юшкевич по указанному поводу писал: “Например, в английском языке “Sunday” (воскресенье) – день Солнца, “Monday” (понедельник) – день Луны, “Tuesday” (вторник) –день Марса (Марсу соответствовал бог Tiw), “Wednesday” (среда) – день Меркурия (Меркурий –Woden), “Thursday” (четверг) – день Юпитера (Юпитер – Thor), “Friday” (пятница) – день Венеры (Венера – Frig) и “Saturday” – день Сатурна” [27, с. 167, ссылка 1] .

Со времен Клавдия Птолемея (2 век н.э.) “планеты септенера” делились на благоприятные для человеческих дел (Юпитер, Венера) и неблагоприятные (Сатурн, Марс). Остальные три могли быть как теми, так и другими, смотря по обстоятельствам. Причем следует учитывать, что под “управлением” дня имелись в виду не сутки, а именно их светлое время, а ночь имела своего персонального “управителя” [28]:

День недели	**“Управитель” дня**	**“Управитель” ночи**
Воскресенье	Солнце	Юпитер
Понедельник	Луна	Венера
Вторник	Марс	Сатурн
Среда	Меркурий	Солнце
Четверг	Юпитер	Луна
Пятница	Венера	Марс
Суббота	Сатурн	Меркурий

Зачатие “неблагополучного” ребенка, о котором говорится у Кирика, должно, по Птолемею, производиться под “контролем” неблагоприятных Сатурна и Марса. Поскольку акт соития супругов, скорее всего, осуществлялся ночью, то избегать секса они должны были во вторник и пятницу, поскольку Сатурн и Марс “управляли” ночами вторника и пятницы (см. таблицу). Получается, что полного совпадения с процитированной рекомендацией (воскресенье, суббота, пятница) не происходит. Фактически совпадает только один день – пятница. Этого недостаточно, чтобы заключить, что рекомендация, цитированная Кириком, имеет птолемеевскую основу.

Однако в славяно-русской часовой магии, отличающейся от птолемеевской традиции, “неблагоприятными” “планетами септенера” выступают в одном случае Юпитер и Меркурий (“управлявшие” ночами воскресенья и субботы), а в другом – Марс и Меркурий (“управлявшие” ночами пятницы и субботы). Тогда получается полное совпадение дней, в которые предписывалось избегать секса (воскресенье, суббота, пятница). Из этого можно сделать вывод, что процитированные Кириком рекомендации основаны на славяно-русских источниках, отличных от птолемеевских хрономантических данных:

“Планеты септенера”	Птолемей	Славяно-русские	варианты
Сатурн	зло	добро	добро
Юпитер	добро	зло	середина
Марс	зло	середина	зло
Солнце	середина	добро	добро
Венера	добро	добро	добро
Меркурий	середина	зло	зло
Луна	середина	середина	середина

Высказывалось мнение, что отмеченные два славяно-русских отличия есть результат ошибочной перестановки двух соседних показателей в исходном тексте. Вариант первоначально (в исходном тексте) был один, но затем в результате случайной описки он разделился на два подварианта. На основе процитированного фрагмента из “Вопрошаний” Кирика можно предположить, что оба подварианта существовали уже во времена Кирика. А сам фрагмент отражает попытку учета обоих подвариантов. В таком случае становится понятно, почему в нем (фрагменте) рассматриваются три дня недели (воскресенье, суббота, пятница), а не два. Последний случай более бы отвечал природе хрономантии, где со времени Птолемея неблагоприятных (как и благоприятных) было по два дня недели.

Такая трактовка вносит определенные коррективы в понимание истории появления в Московском Кремле башенных часов 1404 г. Большинство источников, относящихся к этому событию, отражает реакцию средневековой общественности Руси на, возможно, введенную (точнее - используемую) практику прогнозирования исхода событий по этим часам. Они (источники) подразделяются на одобрительные, осудительные и нейтральные; имеют форму реплик, обычно кратких, и никогда – развернутых посланий. Процитированный Кириком фрагмент, попавший в “Вопрошания”, является источником, в котором часовая хрономантия представлена неявно, в скрытой форме.

Если согласиться с предложенной трактовкой процитированного фрагмента из “Вопрошаний” Кирика о запрете на секс по опеределенным дням недели, чтобы избежать зачатия “неблагополучного” ребенка, то тогда с определенной вероятностью можно говорить о новых данных о творчестве Кирика Новгородца как предтечи русского Предвозрождения и ятронауки на Руси.

Библиографический список

1. *Симонов, Р.А.* Древнерусская книжность (В свете новейших источников календарно-арифметического характера): учеб. пособие [Текст] / Р.А. Симонов. – М., 1993.
2. *Голубинский, Е.Е.* История русской церкви [Текст] / Е.Е. Голубинский. – М., 1901. – Т. 2. – П/т1.
3. *Митрополит Евгений (Болховитинов).* Сведение о Кирике, предлагавшем вопросы Нифонту, епископу Новгородскому [Текст] / Митрополит Е. Болховитинов// Труды и летописи Общества истории и древностей российских. – М., 1828. – Ч. 4. – Кн. 1.
4. *Хавский, П.В.* Примечания на русские хронологические вычисления. Дополнительная выписка из вычислений Кирика XII в. [Текст] / П.В. Хавский // Чтения Общества истории и древностей российских. – М., 1847. – № 6. – С. 35-39.
5. *Бобынин, В.В.* Состояние математических знаний в России до XVI века [Текст] / В.В. Бобынин // Журнал Министерства народного просвещения. – 1884. – Ч. 232. – Апрель. – С. 187-194.
6. *Ундольский, В.М.* Исследование о значении вруцелета в пасхалии...[Текст] / В.М. Ундольский // Временник Имп. Московского общества истории и древностей российских. – М., 1849. – Кн. 4. – С. 45.
7. *Буняковский, В.Я.* Арифметика [Текст] / В.Я. Буняковский // Энциклопедический словарь, составленный русскими учеными и литераторами. – СПб., 1862. – Т. 5. – Отд. 1. – С. 350-351.
8. *Юшкевич, А.П.* Математика и ее преподавание в России XVII-XIX вв. [Текст] / А.П. Юшкевич // Математика в школе. – 1947. – № 1. – С. 29.
9. История отечественной математики: В 4 т. / отв. ред. И.З. Штокало. – Киев, 1966. – Т. 1. – С. 63.
10. *Юшкевич, А.П.* История математики в России до 1917 г. [Текст] / А.П. Юшкевич. – М., 1968. – С. 20.
11. *Симонов, Р.А.* Об одном разногласии в оценке “Учения” Кирика Новгородца [Текст] / Р.А. Симонов // Вопросы истории естествознания и техники. – 1974. – № 1(46). – С. 41-43.
12. *Симонов, Р.А.* Кирик Новгородец – ученый XII века [Текст] / Р.А. Симонов. – М., 1980. – С. 6-16.
13. *Ryan, W.F.* Astronomy in Church Slavonic: Linguistic Aspects of Cultural Transmission // The Formation of the Slavonic Literary Languages. Columbus, 1985. P. 53-60.

14. *Парфененков, В.О.* Кирик-Новгородец – древнерусский ученый [Текст] / В.О. Парфененков // Петербургские чтения-96 (Материалы энциклопедической библиотеки “Санкт-Петербург-2003”). – СПб., 1996. – С. 343.
15. *Паршин, А.Н.* Средневековая космология и проблема времени [Текст] / А.Н. Паршин // Вестник русского христианского движения. 2004. – № 188. – С. 148.
16. *Турилов, А.А.* О датировке и месте создания календарно-математических текстов – “семитысячников” [Текст] / А.А. Турилов // Естественнонаучные представления Древней Руси. – М., 1988. – С. 27-38.
17. Космологические произведения в книжности Древней Руси: В 2 ч. Ч. 1: Тексты геоцентрической традиции. Ч. 2: Тексты плоскостно-каморной и других космологических традиций [Текст] / изд. подг. В.В. Мильков, С.М. Полянский. – СПб., 2008-2009.
18. *Райнов, Т.И.* Наука в России XI-XVII вв. [Текст] / Т.И. Райнов. – М.-Л., 1940. – С. 105.
19. *Мавродин, В.В.* Научные знания [Текст] / В.В. Мавродин // Советская историография Киевской Руси. – Л., 1978. – С. 257.
20. *Лихачев, Д.С.* О филологии [Текст] / Д.С. Лихачев. – М., 1989.
21. *Мильков, В.В.* Древнерусские апокрифы [Текст] / В.В. Мильков. – СПб., 1999. – С. 349.
22. *Симонов, Р.А.* Часомерие в ряду отреченных знаний [Текст] / Р.А. Симонов // Герменевтика древнерусской литературы. – М., 2008. – Вып. 13. – С. 571-600.
23. *Левин, М.Б.* Лекции по астрологии: Начальный курс [Текст] / М.Б. Левин. – М., 1992. – Ч. 3.
24. *Симонов, Р.А.* О возникновении русской ятронауки в начале XV в. – на столетие раньше, чем считалось [Текст] / Р.А. Симонов // Вопросы истории естествознания и техники. – 2009. – № 2. – С. 64-65.
25. Словарь русского языка: В 4 т.[Текст] / Ин-т русского языка АН СССР. – М., 1984. – Т. 4.
26. *Керенский, Ф.П.* Древнерусские отреченные верования и календарь Брюса [Текст] / Ф.П. Керенский // Журнал Министерства народного просвещения. – 1874. – № 3. – С. 71.
27. *Нейгебауер, О.* Точные наки в древности [Текст] / О. Нейгебауер / под ред. А.П. Юшкевича. – М., 1968.
28. *Bouche-Leclerq, A.* L’astrologie grecque. Paris, 1899. P. 480.

Проблемы использования мультимедиа в математическом образовании

И.А. Новик, Т.С. Жилинская

Эффективность большинства изменений, произошедших в человеческой деятельности за последние годы, объясняется тем, что деятельность человека в Интернет (и вообще в медиасреде) происходит, как правило, посредством контактов с мультимедийными объектами, основными свойствами которых являются *интерактивность*, т.е. возможность взаимодействия и *синергия* форм воздействия и восприятия. В частности, мультимедийным объектом можно считать весь Интернет. Благодаря технологиям массовой *коммуникации* и мультимедиа, деятельность и культура постепенно находят свое отражение в медиасреде – идет процесс их медиатизации: "традиционная культура приобретает новое – "электронное измерение" [1]. В частности, в медиасреду переносится и профессиональная деятельность.

Задачи постиндустриального развития существенно повлияли и на методы профессиональной подготовки будущих учителей математики и информатики. Современный педагог должен владеть новейшими достижениями науки и культуры, уметь пользоваться информационными и коммуникативными технологиями, локальными и глобальными компьютерными сетями, различными мультимедийными программными продуктами. Информационное (постиндустриальное) общество немыслимо без применения наиболее быстрых и эффективных способов генерации и передачи знаний.

Знания и представления современного человека об окружающей действительности сегодня и так формируются не просто под воздействием, но в значительной степени *посредством* медиасреды (для нынешней молодежи она является средством общения, профессиональной и творческой деятельности, инструментом доступа к самой разнообразной информации – социокультурной, профессиональной, личной, учебной). *Интерактивность* позволяет не только привить образовательному ресурсу преимущества быстрого поиска, имевшиеся ранее только у справочника или энциклопедии, но и использовать совершенно новые формы, структуры, методы обучающего воздействия. А потенциально не ограниченные *коммуникационные* возможности медиасреды превращают разрозненные островки дистанционного образования в глобальную сеть E-Learning, которая является одним из инструментов, позволяющих решать острую проблему быстрой передачи знаний.

Действительно, "глобальная паутина" заполнена электронными справочниками, словарями и энциклопедиями. В них можно найти формальные сведения почти на любую тему. Огромное количество авторов размещают в Сети свои материалы, в том числе и учебного характера. Рассылка всевозможных учебных материалов приобрела почти эпидемический характер. Почему же тогда качество математического и естественно-научного образования во всем мире падает? Почему результаты регулярных международных исследований TIMSS (1995, 1999, 2003, 2007), PISA (2000, 2003, 2006), централизованного тестирования в РБ и ЕГЭ в РФ показывают негативную динамику уровня знаний учащихся?

Конечно, массовая коммуникация и мультимедийные среды изменили систему образования, которая с одной стороны интегрируется с "виртуальными школами", с другой - сама виртуализируется с внедрением новых технологий и средств обучения. В идеале "центром сферической модели виртуального образования выступает личностный образовательный потенциал человека, относительно которого и происходит его развитие. Единый центр образования всех людей в такой модели отсутствует, каждый из них развивается и образовывается относительно своей индивидуальной сущности" [2].

Виртуальное образование или E-Learning есть по определению, которое дали специалисты ЮНЕСКО, "обучение с помощью Интернет и мультимедиа". Под этим понимают, в частности, как самостоятельную работу со своевременно доставленными электронными учебными материалами, так и дистанционное взаимодействие с преподавателем или распределенным сообществом, ведущим общую учебную деятельность, а так же дистанционные средства обучения. В общем – это возможность в любое время и в любом месте получить современные знания, находящиеся в любой доступной точке мира.

Однако, если внимательно рассмотреть материалы, как "стационарно" размещенные в Сети, так и рассылаемые по системе E-Learning, то обнаружится, что часто это просто вырезки из известных учебных пособий. Этим материалам иногда придается мультимедийная форма, часто ограниченная простейшей интерактивностью. Но даже и эта простейшая интерактивность искусственно привита оцифрованному печатному учебному материалу. И хотя теперь при встрече с незнакомым словом можно прочитать определение, не тратя слишком много усилий на его поиск, а перейти от оглавления к выбранному параграфу или разделу возможно одним нажатием кнопки, идейно-методически эти материалы не превосходят обычные учебники.

Авторы классических учебников и задачников выросли вне медиасреды и Интернет-общения. За столетия "эпохи Гуттенберга" они до совершенства отшлифовали методику его создания. Но продолжени достоинств одной эпохи могут быть недостатками для следующей. Ориентация на целевую аудиторию, подбор соответствующего материала, формы (естественно, что учебник и задачник – разные вещи) и стиля изложения - приводят к специфичности, ограничивают аудиторию. Последовательность подачи материала (от простого к сложному, от частного к общему и от абстрактного к конкретному) выливается в линейность и отсутствие прямого доступа к ссылочным и справочным материалам. Целостность изложения предметной области практически идентична ее автономности и замкнутости, что приводит к эпизодичности и даже отсутствию изложения даже широко известных связей с другими областями и практическими приложениями. При этом объем издания всегда требует жертвовать наглядностью изложения в пользу строгости.

Перенос учебников в сетевую среду не улучшил качественно ситуацию с обучением. Хороший медиаучебник – это не оцифровка хорошего бумажного учебника, а попытки разработать учебное медиапособие без участия квалифицированных медиапедагогов в лучшем случае приводят к созданию еще одного справочника. Аналогично и тактика разработки методик обучения под имеющееся прикладное ПО также не приносит нужных результатов: “хорошее прикладное ПО” не тождественно “хорошее обучающее ПО”.

По нашему мнению, хороший медиаучебник создадут коллективы, в которых программисты будут программировать, а не разрабатывать методики и концепции обучения. Этим должны заняться педагоги, профессионально работающие посредством медиасреды, представляющие себе преимущества и возможности, предоставляемые коммуникацией, интерактивностью, синергией форм воздействия и восприятия. Ведь современные студенты и школьники — в основном “сетевое поколение”, для которых электронный способ получения информации (в данном случае именно учебной) является нормальной составляющей жизни. Именно для них должен создаваться подобный ресурс.

Основные требования к форме мультимедийного обучающего ресурса в математическом образовании на наш взгляд таковы:

– реализация в форме открытой программной системы: должны быть возможности расширения, дополнения, внедрения в другие программные комплексы, интегрирования с существующими прикладными математическими пакетами, публикации любой части или всего ресурса в Интернет;

– совместимость с существующими системами E-Learning, возможность различных видов занятий: индивидуальных, под руководством педагога, совместных (в паре, в фиксированной группе, в распределенной сети).

Выделим несколько дидактических требований к содержанию ресурса:

1. *Аудиторная универсальность.* Возможность обучения учащихся в широком спектре знаний и способностей. Ресурс должен “разворачивать” материал при необходимости более подробного и детального изучения и “сворачивать” его, если материал известен или усваивается быстро.

2. *Методическая универсальность.* Возможность сочетания различных форм и видов учебных материалов, теоретической и практической части (учебника и задачника), различных методик (примером возможной методики может быть обучение в игре типа “квест”, в которой учащимся необходимо восстановить ход рассуждений, изложенных преподавателем).

3. *Открытость и связность* содержательных областей. Возможность наглядной демонстрации межпредметных связей, связей с другими учебными курсами (для пояснения, уточнения, иллюстрации, закрепления и т.п.).

4. *Когнитивно-визуальное* изложение. Указанные нами выше свойства мультимедийных объектов должны, наконец, позволить осуществить эту мечту.

Мы уверены, что реализация этих принципов возможна. В частности, интерактивный способ подачи материала позволит добиться:

a) *качественного оформления* математического текста, подразумевающего не только изящность шрифтов, но и оперативный доступ ко всем элементам (терминам, символам, фигурам). Это даст возможность “покрутить” и “опросить” каждую геометрическую деталь, любой символ математической формулы и т.п.;

b) *вариативной иллюстративности.* Линейность и последовательность должны сочетаться с интерактивностью (в т.ч. гипертекстом) с единственной целью – наиболее быстрым и эффективным усвоением знаний об изучаемом объекте. Поэтому гипертекстные “дальние ссылки”, переводящие фокус на другие области, должны при любой возможности комбинироваться с “ближними”: контекстными меню и подсказками, иными формами реализации когнитивной визуальности.

Наконец, исчерпывающее тематическое наполнение такого медиаресурса даже в пределах школьной программы представляется задачей белее сложной, чем создание реализующего эту идею ПО. Поэтому, в целях тестирования эффективности и уточнения методик использования, необходимо начать с тех областей, которые наиболее слабо усваиваются учащимися.

В работах ряда исследователей и практиков выделяются следующие педагогические проблемы и негативные аспекты применения мультимедийных средств обучения в системе образования [3]:

Рассеивание внимания. Часто запутанные и сложные способы представления могут стать причиной отвлечения пользователя от изучаемого материала из-за различных несоответствий.

Недостаточная интерактивность. Уровень интерактивного взаимодействия пользователя с мультимедийной программой очень далек от уровня общения между людьми.

Отсутствие выборочной “обратной связи”. Возможности “обратной связи” с пользователем в мультимедийном обучающем приложении, как правило, весьма ограничены. Мультимедийное средство обучения не в состоянии определить индивидуальные потребности или трудности учащихся.

Недостаточные навыки обучаемых и педагогов в использовании средств обучения.

Сложность создания учебных материалов. Создание аудио и видео и графических материалов намного сложнее, чем написание традиционного текста.

Временеемкость. Самостоятельное создание мультимедийной информации и особенно создание мультимедийного средства обучения требует больших временных затрат.

Сложности использования программного и аппаратного обеспечения. Для обеспечения эффективного педагогического использования учебных мультимедийных материалов программное и аппаратное обеспечение должно быть должным образом настроено. При этом мультимедийные средства обучения предъявляют более высокие требования к качеству и ресурсному составу используемых средств информационных и коммуникационных технологий по сравнению с программными средствами обработки текстовой информации.

Таким образом, современные мультимедийные технологии действительно являются важным средством усовершенствования математического образования, могут способствовать формированию творческой активности учащихся. Однако для того, чтобы будущие учителя смогли действительно быстрее и эффективнее обучать своих будущих учеников математике, уже сегодня необходимо не только знакомить их с основными условиями и возможностями использования коммуникационных и мультимедийных сред, но сделать эти среды привычным полем их педагогической деятельности. Тогда идейно-методический прорыв, необходимый для создания ресурса, о котором мы здесь рассуждали, станет возможным.

Библиографический список

1. *Кириллова, Н.Б.* Медиасреда российской модернизации [Текст] / Н.Б. Кириллова. – М.: Академический проект, 2005. – 400 с.
2. *Хуторской, А.В.* О виртуальном образовании [Текст] / А.В. Хуторской // Дистанционное и виртуальное обучение: Дайджест рос. и зарубеж. прессы. – 2000. – № 1. – С. 25-27.
3. *Новик, И.А.* Педагогические проблемы использования мультимедийных средств обучения в системе математического образования [Текст] / И.А. Новик, Н.П. Макарова, Н.В. Бровка // Веснік Магілеўскага дзяржаўнага універсітэта імя А.А. Куляшова. – Серыя С, псіхолага-педагагічныя навукі: педагогіка, псіхалогія. – 2010. – № 1(35). – С. 13-20.
4. *Кириллова, Н.Б.* Медиакультура: от модерна к постмодерну [Текст] / Н.Б. Кириллова. – М.: Академический проект, 2005. – 448 с.

О геометрии и проблемах ее изучения в средней и высшей школе

Е.В. Потоскуев

Великий итальянский ученый Галилео Галилей (1564-1642) говорил: “Геометрия является самым могущественным средством для изощрения наших умственных способностей и дает нам возможность правильно мыслить и рассуждать”.

Что же можно сказать о роли и изучении геометрии в наш, XXI-й век?

Геометрия, как учебный предмет, играет огромную роль в развитии познавательной активности и любознательности, логического мышления и пространственного воображения личности. Изучение геометрии и обучение геометрией формирует не только специальные геометрические знания учащегося, но и играют огромную роль в общем развитии личности, ее умении логически мыслить и доказательно обосновывать истинность утверждений в любой сфере деятельности.

Соприкосновение с геометрией, ее изучение носят познавательный, воспитательный, развивающий и вдохновляющий характер. Уместно вспомнить слова А.С. Пушкина: “Вдохновение нужно в поэзии как в геометрии”.

При изучении геометрии и обучении геометрией происходит духовное развитие личности. В книге И.Ф. Шарыгина “Геометрия. 7-9 кл.”

есть такие слова: “Высшее проявление духа – это разум. Высшее проявление разума – это геометрия. Клетка геометрии – треугольник. Он также неисчерпаем, как и вселенная. Окружность – душа геометрии. Познайте окружность, и вы не только познаете душу геометрии, но и возвысите душу свою”.

Обоснования геометрических комбинаций, которыми учащийся оперирует при доказательстве теорем и решении задач, естественным образом способствуют развитию и повышению культуры его речи в силу такого объективного фактора, как требование корректно обосновывать любое геометрическое утверждение или его отрицание. Поэтому обучение языку геометрии является одной из важнейших целей математического образования, интеллектуального развития творческой личности. Причем, хорошее геометрическое образование, пространственное воображение и логическое мышление необходимы не только математику, но и инженеру, и экономисту, и дизайнеру, и юристу, и программисту, а также специалистам многих и многих других профессий.

Дедуктивный метод изложения геометрии (в сочетании с наглядностью), логическая последовательность геометрических теорем, логика теоретических обоснований, методы и факты геометрических исследований и открытий – все это создает удивительно цельный и гармоничный мир геометрии, способствует эстетическому воспитанию человека.

В основе геометрического образования лежит один из самых нравственных принципов – принцип доказательности. Но именно принцип доказательности должен быть составной частью юриспруденции. А разве не аксиоматический метод, метод постулатов, называемых законами, положен в основу законотворческой деятельности?

Можно с полной уверенностью сказать, что из всех математических дисциплин именно занятие геометрией в наибольшей мере способствует развитию интуиции и воображения, а, следовательно, способствует творческому развитию личности, так как интуиция и воображение – основа любого творчества. Великий французский ученый Анри Пуанкаре (1854-1912) говорил: “Логика доказывает, а интуиция - творит. Быть критиком хорошо, быть творцом - еще лучше... Без нее (интуиции) математик был бы похож на того писателя, который безупречен в правописании, но у которого нет мыслей”.

В различных беседах и выступлениях великий российский академик двадцатого века Андрей Николаевич Колмогоров говорил, что многие его открытия были вызваны к жизни неожиданно возникшей геометрической картинкой. Андрей Николаевич был одним из крупнейших аналитиков и логиков своего времени, но своей геометрической интуицией он всегда гордился.

К сожалению, геометрическое образование в сегодняшней российской средней и высшей педагогической школе не может не вызывать определенную озабоченность и тревогу. Педагогическому сообществу геометров России предстоит решать ряд проблем качественного улучшения геометрического образования учащихся школ и студентов-математиков педагогических вузов. Среди них первостепенными являются *проблемы развития пространственного воображения, графической культуры, логического мышления и умений аргументированно обосновывать возникающие утверждения.*

Обратимся к вопросу развития и становления графической культуры учащихся.

Как известно, интуитивное, живое пространственное воображение в сочетании со строгой логикой мышления – это ключ к изучению геометрии. “Владение геометрией” означает “умение решать геометрические задачи”. Но прежде чем приступить к решению геометрической задачи, необходимо наглядно представить, вообразить, нарисовать фигуры, о которых идет речь в этой задаче. Таким образом, первым и одним из важнейших этапов решения геометрической задачи является построение верного, наглядного чертежа (рисунка) по условию этой задачи. О роли рисунка при решении задачи великий математик Леонард Эйлер (1707-1783) говорил: “*Мой карандаш бывает еще остроумней моей головы*”.

Любому учителю математики известны трудности, которые возникают у начинающих изучать стереометрию из-за неумения правильно, наглядно сделать “удобный” рисунок, “просто” изобразить фигуру, расположенную в пространстве. Еще большую трудность вызывают дополнительные построения на уже построенном изображении. Одной из причин возникновения этих затруднений у решающего задачу является достаточно слабое развитие пространственного воображения или вообще его отсутствие.

Многие педагоги и методисты объясняют это отсутствие тем, что на протяжении трех лет (7-го, 8-го и 9-го классов) все фигуры, рассматриваемые как при изучении теоретического материала планиметрии, так и при решении планиметрических задач, были плоскими, и учащиеся их изображали по форме точно такими, какими они были заданы в условиях задач. При этом все построения осуществлялись с помощью циркуля и линейки. И вдруг, при изучении стереометрии, все резко изменилось.

Учитель чертит куб, говорит, что в основании его лежит квадрат, а сам показывает на параллелограмм с тупым углом и неравными смежными сторонами. Выясняется, что для изображения на плоскости правильного треугольника, расположенного в пространстве, не нужны циркуль и линейка. Что-то совершенно непонятное начинается далее, при решении задач на построение изображений пространственных фигур на плоскости.

Для учащихся становится неожиданным, что существуют совершенно другие правила изображения фигур, расположенных в пространстве. При этом требуется, чтобы построенное изображение было верным, наглядным и полным. И хотя, при строгом подходе к изучению геометрии, рисунок не имеет доказательной силы, даже если он выполнен безупречно, тем не менее, *верно, наглядно и хорошо выполненный рисунок* (*чертеж*) *к задаче – это надежный помощник при ее решении.* С такого изображения-рисунка должно начинаться решение любой геометрической задачи. Но именно при выполнении необходимого "задачного рисунка" и возникают проблемы у учащихся.

Учащиеся на начальном этапе изучения стереометрии затрудняются при изображении фигур по условию задачи, медленно и не всегда "с первого раза" делают хороший рисунок. Опыт подтверждает, что *на первых уроках изучения стереометрии целесообразно и методически оправдано делать чертежи к некоторым задачам самому учителю, одновременно с учениками, или же учениками под непосредственным руководством учителя.*

Очень важным элементом для "задачного рисунка" является его *простота, лаконичность. Ведомый учителем ученик должен научиться изображать* на рисунке только те фигуры (точки, отрезки, окружности и др.), которые "функционируют" при решении данной задачи. Не следует изображать те фигуры, которые "не функционируют", а их наличие делает рисунок перегруженным, в результате чего построенный рисунок не облегчает, а затрудняет решение задачи. На таком рисунке, образно выражаясь, "за деревьями не видно леса".

Вместе с тем, во многих случаях становится недостаточным первоначальное построение фигур, которые заданы в условии задачи. В процессе решения *возникает необходимость дополнительных построений на уже построенном чертеже*: без них решение задачи становится невозможным. Выполнение этих *дополнительных построений – другая, еще большая проблема при решении задач, как планиметрии, так и стереометрии.*

Иногда в результате анализа решения задачи *приходится отказываться от уже построенного изображения и выполнять новый чертеж*, обладающий большей простотой и наглядностью, наиболее верно изображающий расположение фигур в соответствие с условием задачи. В этой связи, *следует вырабатывать умение учащихся быстро выполнять "рабочий, черновой, эскизный рисунок" от руки,* в отличие от рисунка "чистового", аккуратно выполненного при оформлении решения задачи. Такая ситуация часто возникает при решении как планиметрических, так и стереометрических задач. Поэтому умение пользоваться эскизными, черновыми рисунками необходимо вырабатывать у учащихся уже при изучении планиметрии. *Для выработки навыка быстрого изменения рисунка полезны выполнения учащимися домашних "опорных" графических работ по изображению различных конфигураций основных фигур как планиметрических, так и стереометрических.*

Совершенно понятно, что умение строить верный чертеж, обладающий наглядностью и простотой, достигается при решении достаточно большого числа задач различной степени сложности. Только с опытом приходит умение варьирования между эскизом "от руки" и точным рисунком при решении данной задачи, и важно выработать привычку учащихся начинать решение любой геометрической задачи с соответствующего ее условию рисунка (чертежа). (Полезно помнить слова А.С. Пушкина: " ... *И опыт – сын ошибок трудных...*)

Необходимо выработать понимание учащимися того, что аргументированные объяснения шагов первоначального и дополнительного построений изображения фигур составляют своеобразный анализ решения геометрической задачи и "открывают путь" к ее решению: при этих объяснениях устанавливаются необходимые аффинные и метрические взаимосвязи, соотношения между данными и искомыми фигурами.

Случается, что *чертеж, на котором изображена комбинация нескольких фигур, оказывается достаточно сложным, в результате затрудняется процесс решения задачи.* В таком случае полезно строить выносной рисунок (чертеж). А это – проблема другого качества.

Разумеется, можно, и методически оправдано, в качестве иллюстрационного материала использовать готовые чертежи, так называемые "полуфабрикаты" в "рабочих тетрадях". Однако *не следует злоупотреблять "рабочими тетрадями" и интерактивной доской, так как их использование автоматически уничтожает творческую составляющую геометрического мышления*: учащиеся при изучении геометрии перестанут творить, превратятся в "заложников" этих "рабочих тетрадей" и интерактивных досок. К сожалению, наблюдается довольно тревожная картина: внедряются тесты - с выбором ответов без объяснения решений (читай - уничтожения логической составляющей мышления); в “рабочих тетрадях” внедряются рисунки к задачам – для сокращения времени их решения. А на самом деле, внедряется “псевдотворчество”, “псевдоразвитие” пространственного воображения, логического мышления, геометрически грамотной речи и графической культуры. О каком техническом перевооружении в масштабах страны можно говорить при такой методике изучения геометрии?

Полезно помнить слова американского математика А. Нивена: “Математику нельзя изучать, наблюдая, как это делает сосед”. Именно рабочая тетрадь, интерактивная доска играют роль опасного “соседа” при изучении геометрии, поэтому “сотрудничество” с ними должно быть “чутким, внимательным и бережным”. Каждому овощу - свое время. В учебном процессе (подчеркнем, в учебном процессе) учащийся должен все тренировочные процедуры проделывать сам. Следует четко различать учебный процесс и использование компьютерных технологий в производственной, научно-исследовательской практике. (Известна “польза” от неверно организованного введения в обращение микрокалькулятора в начальной школе.)

Другой проблемой, которую приходится решать при изучении геометрии и особенно стереометрии, является выработка умений учащихся *аргументированно обосновывать утверждения, возникающие в ходе решения задачи.*

Опыт работы в классах различной профильной ориентации позволяет сделать вывод о том, что *с самых первых уроков изучения, как планиметрии, так и стереометрии необходимо вырабатывать у учащихся привычку аргументированно обосновывать утверждения, возникающие при решении задачи и доказательстве теоремы.* Если такой привычки учащийся не приобретет на начальном этапе изучения геометрии, то в будущем его решение геометрической задачи будет состоять лишь из одних вычислений, а в записи решения этой задачи будет присутствовать “алгебра и арифметика”, но конструктивно-логическая, собственно геометрическая составляющая решения будет отсутствовать.

Острота проблемы аргументации при решении геометрических задач может быть уменьшена, если *методически разумно использовать “опорные задачи”.* Необходимо уделять особое внимание выработке у учащихся умения решать “опорные” задачи планиметрии и стереометрии, увеличивать “банк” этих задач. Опорные задачи составляют тот рабочий аппарат, пользование которым облегчает и ускоряет процесс решения и оформления решения более сложных задач. Достаточно один раз доказать некоторый "опорный" факт и пользоваться этим фактом в "рабочем порядке" всякий раз, когда с ним "встречаются" при решении очередной задачи. Учащийся, владеющий умением быстро решать "опорные задачи", может анализировать и синтезировать процесс решения содержательной геометрической задачи, предвидя и расчленяя ее на поэтапное решение знакомых ему "опорных задач".

Геометрическое образование должно осуществляться на таком уровне, чтобы выпускник учебного заведения понимал и ощущал повышение приобретенной им геометрической культуры. И помощником в этом учащемуся должен стать учитель математики.

Когда речь идет о необходимой профессионально- геометрической подготовке учителя математики, то под этим понимается не только глубокое и прочное знание учителем всех программных разделов курса школьной геометрии, но также и достаточно высокое владение методикой обучения геометрии, знание методических особенностей и специфики обучения геометрии.

Проблема качественного улучшения геометрической составляющей профессиональной подготовки учителя математики в педагогическом вузе может быть решена или введением единого *обязательного* курса элементарной геометрии, или изучением элементарной геометрии *в виде отдельных "модулей" в общем, объединенном курсе педвузовской геометрии*, "по-клейновски" комментируя разделы элементарной геометрии с точки зрения высшей.

Но, кроме "модульных дополнений", качественному улучшению геометрической составляющей профессионально-педагогической подготовки будущего учителя математики должны способствовать различные спецсеминары и спецкурсы по элементарной геометрии, выполнение студентами курсовых и дипломных работ по элементарной геометрии и методике ее преподавания.

Особое внимание следует уделить решению "интересных и красивых" геометрических задач, задач повышенной сложности, в том числе, олимпиадных задач. Школы испытывают дефицит учителей математики, способных на заниматься подготовкой учащихся к решению олимпиадных задач.

В формировании геометрической составляющей будущего учителя математики и качественном ее усилении важную роль играет профессорско-преподавательский состав кафедр геометрии педвузов. Если в педагогическом вузе преподаватели кафедры геометрии с уважением относятся к школьной геометрии и преподавание вузовской геометрии носит профессионально – педагогическую направленность, то выпускники этого вуза становятся высоко квалифицированными учителями математики, а обучаемые ими учащиеся приобретают глубокие и прочные знания по геометрии, становятся творческими личностями, востребованными в любой сфере интеллектуальной деятельности.

Математик и педагог с мировым именем Д. Пойа (1888-1985) в своей книге [1] говорит о том, что “владение математикой” – “это есть умение решать задачи, причем не только стандартные, но и требующие известной независимости мысли, здравого смысла, оригинальности, изобретательности”. Далее там же: “Учитель обязан хорошо знать то, чему он собирается учить. Он должен показывать учащимся, как решать задачи,…однако, в программе, по которой он занимался когда-то, не уделялось достаточного внимания овладению основным содержанием предмета, а на выработку у будущего учителя умения рассуждать, решать задачи и творчески мыслить и вовсе не обращалось внимания. В этом, как мне кажется, заключается самый главный недостаток современной системы подготовки учителя математики для средней школы”.

Вспоминаются 70-е годы, время перехода на новые программы и учебники по геометрии в средней и высшей школе (педагогическом вузе). Тогда обнаружилась неготовность учителей математики к реализации новых положений программы геометрии (векторы, геометрические преобразования, теория множеств, сечения многогранников). В то время органами управления образования, всеми областными ИУУ проводились серьезные курсы повышения квалификации учителей математики. В настоящий момент, в связи с “загадочными и совершенно непонятными” направленностью, организацией и проведением итоговой аттестации (ГИА и ЕГЭ), наступает тревожная ситуация: многие учителя “теряют” навык правильно излагать теорию курса школьной геометрии, верно, с полной аргументацией решать геометрические задачи. Возникает острая необходимость в проведении курсов повышения квалификации учителей математики по вопросам изучения геометрии.

Библиографический список

1. *Пойа, Д.* Математическое открытие [Текст] / Д. Пойа. – М.: Наука, 1976.

Глава 2

Математика в ее многообразии

О развитии теории минимальных проекторов

В.П. Одинец

Пусть X – линейное нормированное пространство над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$. Говорят, что X – прямая сумма своих подпространств D и B (запись $X = D \oplus B$), если любой элемент $x \in X$ единственным образом представим в виде

$$x = y + z, \text{ где } y \in D, \; z \in B.$$

При этом оказывается, что $D \cap B = \{0\}$. Пусть $X = D \oplus B$. Проектором $P : X \to D$ будем называть такой оператор, что $Px = y$, если $x = y + z$. Можно доказать, что оператор P линеен и непрерывен. Заметим также, что $P^2 = P$, т.е. P идемпотентный оператор.

Если D подпространство в X такое, что существует подпространство $B : X = D \oplus B$, то говорят, что D дополняемо в X. Если не накладывать на B дополнительные условия, то в случае $\dim X > \dim D > 0$ такое подпространство B будет не единственно, т.е. проектор на подпространство не будет единствен.

Пусть D дополняемое подпространство пространства X. Относительной проекционной константой назовем число $\lambda(D, X)$:

$$\lambda(D, X) = \inf_{P: X \to D} \|P\|,$$

где инфимум берется по всем линейным непрерывным проекторам из X на D. Если существует проектор $P_0 : \|P_0\| = \lambda(D, X)$, то проектор P_0 называют проектором с минимальной нормой или просто минимальным проектором. Разумеется, в конечномерном случае, когда $\dim X < +\infty$, любое подпространство является дополняемым и всегда найдется минимальный проектор. Следовательно, для конечномерного случая остается лишь проблема единственности минимального проектора.

Иначе дело обстоит в случае $\dim X = +\infty$. Пусть, например, $X = c_0$ – пространство сходящихся к нулю последовательностей, а $D = f^{-1}(0)$, где $f \in (c_0)^*(\equiv l_1)$ линейный функционал из пространства, сопряженного к c_0. Если $f = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots, \frac{1}{2^{n+1}}, \ldots)$, то оказывается, что

$1 < \lambda(X, D) < 2$, и при этом не существует минимального проектора на D (см. [1]).

В 1963 г. была опубликована работа Дж. Избелла и З. Семадени [2], в которой решалась проблема существования минимального проектора для широкого класса пространств.

Теорема 0. *Пусть D дополняемое подпространство пространства X и D изометрически изоморфно сопряженному пространству некоторого банахова пространства Y. Тогда существует минимальный проектор из X на D. В частности, такой проектор существует, если D рефлексивное подпространство в X.*

А это в свою очередь означает, что на конечномерные подпространства в любом банаховом пространстве всегда существует минимальный проектор. (О других условиях существования минимальных проекторов см., например, в [3, 4, 27].)

Итак, основное внимание в теории минимальных проекторов уделялось с 60-х годов проблеме единственности этих проекторов. При этом оказалось, что существенно различаются условия единственности минимальных проекторов с нормой равной 1 и нормой большей 1. Так еще в 1970 г. Х. Коэн и Ф. Салливан получили в [5] следующий результат:

Теорема 1. *Пусть X гладкое банахово пространство (т.е. в каждой точке границы единичного шара U_X существует единственная опорная гиперплоскость), а D – дополняемое подпространство, на которое существует проектор P_0 с единичной нормой. Тогда этот минимальный проектор единствен.*

Этот результат был усилен автором статьи в 70-е годы (подробнее см. [4]). Тогда же автором были получены следующие два результата 1975 и 1978 годов соответственно.

Теорема 2. *Пусть X равномерно выпуклое банахово пространство. Пусть D – подпространство в X коразмерности 1. Если норма минимального проектора на D строго больше 1, то минимальный проектор единствен. (Напомним, что пространство X называется равномерно выпуклым, если для любых двух последовательностей (x_n) и (y_n):$\|x_n\| = \|y_n\| = 1$ для $\forall n \in \mathbb{N}$ из условия $\lim_{n\to\infty} \|x_n + y_n\| = 2$ следует, что $\lim_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| = 0$ (см. [4]). Напомним также, что равномерно выпуклые пространства всегда рефлексивны.)*

Теорема 3. *Пусть X трехмерное банахово пространство, а D – его двумерное подпространство. Если норма минимального проектора на D строго больше 1, то минимальный проектор единствен. (Для случая $\dim X \geqslant 4$, $\mathrm{codim_X D} = 1$ этот результат в общем случае неверен.)*

Итак, в каком же направлении развивались исследования в теории минимальных проекторов в последнюю четверть века? Прежде всего, от изучения проекторов на подпространства коразмерности 1 перешли к изучению минимальных проекторов на подпространства коразмерности $m \geqslant 2$ (см., например, работы Г. Левицкого [6], М. Баронти и П. Папини [7]).

В то же время (2005 г.) был расширен класс пространств, для которых верен аналог теоремы 3. Оказалось, что на любое двумерное подпространство равномерно выпуклого и гладкого пространства минимальный проектор всегда единствен [8, теорема 1.3]. В частности, Б. Шехтман и Л. Скшипек доказали, что на любое двумерное подпространство в $L_p, 1 < p < +\infty$, минимальный проектор всегда единствен [8, теорема 0.1].

В 1948 г. С.Г. Лозинский доказал [9], что классический проектор Фурье на подпространство тригонометрических полиномов степени $\leqslant n$ из пространства непрерывных 2π-периодических функций является минимальным проектором с нормой > 1. В 1968 г. группе американских и немецких математиков удалось доказать единственность этого минимального проектора [10]. В последующие годы изучались минимальные проекторы на подпространства частичных сумм Фурье-Прайса. Здесь особо следует выделить работы В.В. Локтя (подробнее см. обзор [11]).

Среди нерефлексивных пространств для приложений особую роль играют пространства последовательностей c_0 и l_1. Частично проблемы существования (и единственности, если норма проектора равна 1) минимальных проекторов на подпространства коразмерности 1 этих пространств были решены в работе У. Чини и И. Бляттера [1] в 1974 г., а для пространств $l_\infty^n, l_1^n (n \geqslant 3), c_0, l_1$ полностью решены в работах автора (см., например, [3]).

Другим примером весьма интересных нерефлексивных пространств, важных для функционального анализа, являются пространства Джеймса (см., например, [4]). Для пространств Джеймса (и типа Джеймса) важный результат о единственности минимального проектора с единичной нормой из второго сопряженного к пространству Джеймса на каноническое вложение пространства Джеймса был получен в 1994 г. М.Я. Якубсоном (см. [4]). Позже этот результат был обобщен Г. Левицким [12] и Л. Скшипеком [13].

В 1974 г. Б.С. Цирельсон построил пример бесконечномерного рефлексивного банахова пространства с безусловным базисом $T(\mathfrak{F}, \lambda)$ ($\mathfrak{F}$ – некоторый класс подмножеств множества натуральных чисел $\mathbb{N}$, а $\lambda \in [1, +\infty)$ – некоторая константа, служащая для определения пространства), которое не содержит подпространств, изоморфных $l_p, 1 \leqslant p < \infty$

или c_0 [14] (см. также [4]). В силу теоремы 0 на любое дополняемое подпространство пространства Цирельсона существует минимальный проектор.

В 2001 г. В.П. Одинцом была высказана следующая гипотеза.

***Гипотеза* 1**. *На любое дополняемое подпространство* $D(\dim D \geqslant 2)$ *пространства Цирельсона* $T(\mathfrak{F}, \lambda)$, *где* $\lambda > 1$, *минимальный проектор единствен.*

Пока эта гипотеза остается не доказанной и не опровергнутой.

Напомним, что абсолютной проекционной константой банахова пространства X называется

$$\lambda(X) = \sup_{Y \supset X} \lambda(X, Y),$$

где супремум берется по всем банаховым пространствам, содержащим X. Развитие компьютерной техники позволило в последние годы получить оценки абсолютных проекционных констант для широкого класса пространств. При этом важную роль играет тот факт, что $\lambda(X) = \lambda(X, l_\infty)$ (подробнее см. [4]).

В 1979 г. Ч. Бессага предложил определить для трехмерного банахова пространства величину

$$\beta_3 = \sup_{\dim X = 3} \sup_{Y \subset X} \lambda(Y, X).$$

По аналогии величину

$$\beta_n = \sup_{\dim X = n \geqslant 3} \sup_{Y \subset X} \lambda(Y, X)$$

называют константой Бессаги (см. [4, с. 50]). Точные значения этой константы неизвестны до сих пор. Неизвестна и ее асимптотика.

В 1963 г. Д. Ньюмен и Х. Шапиро в работах [15] и [16] ввели понятие сильной единственности элемента наилучшего приближения. В 1989 г. Г. Левицкий предложил понятие сильной единственности (в смысле Ньюмена и Шапиро) применительно к проекторам[1].

Пусть D дополняемое подпространство банахова пространства X. Пусть существует минимальный проектор P_0 из X на D. Будем говорить, что P_0 сильно единствен, если для любого проектора $P : X \to D$ справедливо неравенство

$$\|P\| \geqslant \|P_0\| + r\|P - P_0\|,$$

---

[1] Другое определение сильной единственности минимального проектора, отличное от предложенного Г. Левицким было дано В.П. Одинцом в работе [17] в 1984 г.

где константа r не зависит от P. Кроме Г. Левицкого, результаты по сильной единственности минимальных проекторов были получены в 2002 г. В.В. Локтем [18] и в 2007 г. В.П. Одинцом и М. Профитом [19, 20].

Еще в 1983 г. Г. Джемисон и А. Пинкус в работе [21] стали изучать минимальные проекторы с условием положительности. В 90-е годы среди работ по минимальным проекторам, сохраняющим конус (аналоги положительных операторов) можно выделить работу [22] Б. Чалмерса и М. Профита 1997 г.

В 1972 г. Г. Данес в работе [23] ввел понятие капли (drop): если C – непустое замкнутое выпуклое множество банахова пространства X и $x \notin C$, то *каплей* назовем множество

$$co(x, C)$$

– выпуклую оболочку множества $\{x\} \cup C$. В 1987 г. С. Ролевич назвал свойством капли следующее свойство непустого замкнутого множества $C \subset X$: для любого непустого замкнутого множества A, отделенного от C существует точка $a \in A$ такая, что $co(a, C) \cap A = \{a\}$.

Результат С. Ролевича [24]: если единичный шар банахова пространства X обладает свойством капли, то это пространство рефлексивно. Это свойство С. Ролевич назвал свойством капли пространства X (см. также [25, 26]).

В силу теоремы 0 на любое дополняемое подпространство D банахова пространства X со свойством капли всегда существует минимальный проектор.

Пока еще неизвестно, можно ли на свойство капли наложить условия, обеспечивающие единственность минимального проектора? Обладает ли пространство Цирельсона свойством капли или нет? Пока неизвестно.

Библиографический список

1. *Blatter, J., Cheney, E.W.* Minimal projections on hyperplanes in sequences spaces // Ann. Math. Pur. Appl. 1974. Vol. 101. – P. 215-227.
2. *Isbell, J., Semadeni, Z.* Projection constants and spaces of continuous functions // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. Vol. 107. – P. 38-48.
3. *Odyniec, W., Lewicki, G.* Minimal projection in Banach spaces // Lecture Notes in Math. Berlin – New York: Springer-Verlag, 1990. – 168 p.
4. *Одинец, В.П.* Проекторы и базисы в нормированных пространствах [Текст] / В.П. Одинец, М.Я. Якубсон. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 152 с.

5. *Cohen, H.B., Sullivan, F.E.* Projecting onto cycles in smooth reflexive Banach spaces // Pacif. J. of Math. Soc. 1970. Vol. 34, №2. – P. 355-364.
6. *Lewicki, G.* Minimal Projections onto Two Dimensional Subspaces of l_∞^4 // J. of Appr. Theory 1997. Vol. 88, №1. – P. 92-108.
7. *Baronti, M., Papini, P.* Norm-one projections onto subspaces of finite codimension in l_1 and c_0 // Period. Math. Hung. 1991. Vol. 22, №3. – P. 161-174.
8. *Shekhtman, B., Skrzypek, L.* Uniqueness of minimal projections onto two-dimensional subspaces // Studia Math. 2005. Vol. 168, №3. – P. 253-268.
9. *Лозинский, С.М.* Об одном классе линейных операций [Текст] / С.М. Лозинский // ДАН СССР. – 1948. – Т. 61. – № 2. – С. 193-195.
10. *Cheney, E.W., Hobby, C.R., Morris, P.D., Schurer, F., Wulbert, D.E.* On the minimal property of the Fourier projections // Bull. Amer. Math. Soc. 1969. Vol. 75., № 1 – P. 51-52.
11. *Одинец, В.П.* О семинаре по геометрии банаховых пространств в 1990-97 гг. [Текст] / В.П. Одинец // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения 2007. – СПб: Изд-во БАН, 2007. – Т. LX. – С. 12-26.
12. *Lewicki, G.* On the uniqueness of minimal projections in spaces of James type // Functiones et approximatio 1997. Vol. 25. – Poznań: UAM – P. 59-64.
13. *Skrzypek, L.* The uniqueness of norm-one projection in the James-type spaces // J. of Appr. Theory 1999. Vol. 100, №1. – P. 73-93.
14. *Цирельсон, Б.С.* Не в любое банахово пространство можно вложить L_p или c_0 [Текст] / Б.С. Цирельсон // Функц. анализ и его прил. – 1974. – Т. 8. – № 2. – С. 57-60.
15. *Newman, D.J., Shapiro, H.S.* Some theorems on Chebychev optimization // Duke Math. J. 1963. Vol. 4. – P. 673-681.
16. *Newman, D.J., Shapiro, H.S.* Approximation by generalized rational functions // On Approximation Theory – Birkhäuser-Verlag, 1964. – P. 245-251.
17. *Одинец, В.П.* О сильной единственности минимальных проекторов в пространствах Банаха [Текст] / В.П. Одинец // Казань: Известия вузов. Математика. – 1984. – № 9. – С. 75-79.
18. *Локоть, В.В.* Константы сильной единственности минимальных проекций на гиперплоскости в пространстве $l_\infty^{(n)}, n \geqslant 3$ [Текст] / В.В. Локоть // Матем. заметки. – 2002. – Т. 72. – № 5. – С. 723-728.
19. *Odyniec, W., Prophet, M.* A lower bound of the strongly unique minimal projection constant of $l_\infty^n, n \geqslant 3$. // J. Appr. Theory 2007. Vol. 145, № 1. – P. 111-121.
20. *Odyniec, W., Prophet, M.* The strong unicity constant and its applications // Warszawa: Banach Center Publications 2007. Vol. 79. – P. 167-172.

21. *Jameson, G.J.O., Pinkus, A.* Positive and Minimal Projections in Function Spaces. // J. Appr. Theory 1983. Vol. 37. – P. 182-195.
22. *Chalmers, B., Prophet, M.* Minimal shape-preserving projections onto π_n. // Numer. Funct. Anal. Optim. 1997. Vol. 18. – P. 507-520.
23. *Danes̃, J.* A geometric theorem useful in nonlinear functional analysis. // Boll. Un. Mat. Ital. 1972. Vol. 6. – P. 369-375.
24. *Rolewicz, S.* On drop property // Studia Math. 1987. Vol. 85. – P. 27-35.
25. *Kutzarova, D.N., Rolewicz, S.* Drop property for convex sets // Arch. Math. 1991. Vol. 56. – P. 501-511.
26. *Pei-Kee, Lin* Some remarks of drop property // Proc. Amer. Math.Soc. 1992. Vol. 115, №2. – P. 441-446.
27. *Randrianantoanina, B.* Norm-one projections in Banach spaces // Taiwanese J.of Math. 2001. Vol.5, №1. – P. 35-95.

Об одном четырехмерном аналоге системы Коши-Римана

В.Е. Балабаев

Рассматривается один класс гармонических отображений в четырехмерном евклидовом пространстве R^4, который тесно связан с голоморфными отображениями. Эти отображения являются четырехмерными гармоническими векторными функциями, зависящими от четырех действительных переменных. Они несущественно отличаются от регулярных кватернионных функций, изученных в [1-6]. Однако, это отличие позволило применить методы теории дифференциальных форм и построить теорию, в которой удалось получить ряд новых результатов.

Пусть $U(x) = (U_1(x), U_2(x), U_3(x), U_4(x))$ – вектор, определенный в области $G \subset R^4$ с кусочно-гладкой границей ∂G и класса $C^{(1,0)}(G); x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ – точка R^4.

Рассмотрим матрицы

$$D(X) = \begin{pmatrix} X_1 & -X_2 & -X_3 & -X_4 \\ X_2 & X_1 & -X_4 & X_3 \\ X_3 & X_4 & X_1 & -X_2 \\ X_4 & -X_3 & X_2 & X_1 \end{pmatrix}; D^*(X) = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \\ -X_2 & X_1 & X_4 & -X_3 \\ -X_3 & -X_4 & X_1 & X_2 \\ -X_4 & X_3 & -X_2 & X_1 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

где $X = (X_1, X_2, X_3, X_4)$.

Пусть вектор U(x) удовлетворяет в области G эллиптической системе

$$D\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) U(x) = 0, \qquad (2)$$

где $\frac{\partial}{\partial x} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}, \frac{\partial}{\partial x_4}\right)$.

Каждая компонента вектора U(x) является гармонической функцией в G.

Для решения системы (2) можно установить принцип максимума модуля, теорему Лиувилля, теорему Вейерштрасса и ряд других.

Если компоненты U_3 и U_4 вектора U тождественно равны нулю в области G, то система (2) превращается в систему Коши-Римана, определяющую голоморфные функции в двумерном комплексном пространстве C^2. Обратно, пусть $U_1 + iU_2$ – любая голоморфная функция двух комплексных переменных $x_1 + ix_2$ и $x_3 + ix_4$ в G, тогда вектор $U\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right) = \left(U_1, U_2, 0, 0\right)$ удовлетворяет системе (2) в G.

Введем следующую матричную дифференциальную форму D(*dx), где $*dx = (*dx_1, *dx_2, *dx_3, *dx_4)$ и * – оператор Ходжа (7). Тогда имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Если вектор U(x) класса* $C^{(0,1)}(G) \cap C^{(0,0)}(G)$, *где* $G \subset\subset R^4$, *то*

$$\int\limits_{\partial G} D(*dx)U(x) = \int\limits_{G} D\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) U(x)dx, \tag{3}$$

где $dx = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4$ *– элемент объема* R^4, *ориентация* ∂G *индуцирована ориентацией G.*

Доказательство формулы (3) основано на применении теоремы Стокса.

Из этой теоремы получаем следующий аналог теоремы Пуанкаре.

Теорема 2. *Если вектор U(x) класса* $C^{(0,1)}(G) \cap C^{(0,0)}(G)$ *удовлетворяет в G системе (2), то для любой области* $\Omega \subset G$ *с кусочно-гладкой границей* $\partial\Omega$

$$\int\limits_{\partial\Omega} D(*dx)U(x) = 0. \tag{4}$$

Замечание. Верно и обратное утверждение – аналог теоремы Морера. Если U(x) класса $C^{(0,0)}(G)$ и для любой области $\Omega \subset\subset G$ с кусочно-гладкой границей

$$\int\limits_{\partial\Omega} D(*dx)U(x) = 0, \tag{5}$$

то U(x) удовлетворяет системе (2) в G.

Введем матричную дифференциальную форму M(t,x) которая играет важную роль при интегрировании:

$$M(t,x) = -D * \left(\frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{1}{|t-x|^2} D(*dt), \tag{6}$$

а также матричный дифференциальный оператор:

$$N(t,x) = -D * \left(\frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{1}{|t-x|^2} D\left(\frac{\partial}{\partial t}\right), \qquad (7)$$

где $|t-x|$ – евклидово расстояние между точками t и x.

Теорема 3. *Пусть* $G^+ << R^4$, *u – вектор класса* $\mathrm{C}^{(1,0)}(G^+) \cap C^{(0,0)}(G^+)$. *Тогда*

$$\frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{\partial G^+} M(t,x)u(t) - \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{G^+} d\left[M(t,x)u(t)\right] = \left\{ \begin{array}{l} u(x), x \in G^+ \\ 0, x \in G^- \end{array} \right., \qquad (8)$$

где d – оператор внешнего дифференцирования формы M(t,x)u(t) по переменным t_1, t_2, t_3, t_4.

Доказательство. Если $x \in G^-$, то форма M(t,x) не является особой и можно применить теорему Стокса. Имеем

$$\int\limits_{\partial G^+} M(t,x)u(t) = \int\limits_{G^+} d\left[M(t,x)u(t)\right] \qquad (9)$$

и формула (8), когда $x \in G^-$, доказана.

Пусть теперь $x \in G^+$, рассмотрим $\overline{G_\xi} = \overline{G^+} \setminus \{|t-x| < \xi\}$. Применим к G_ξ теорему Стокса:

$$\int\limits_{\partial G^+} M(t,x)u(t) - \int\limits_{\{|t-x|=\xi\}} M(t,x)u(t) = \int\limits_{G_\xi} d\left[M(t,x)u(t)\right]. \qquad (10)$$

На сфере $\{|t-x| = \xi\}$, используя непрерывность U(t) в $\overline{G^+}$, имеем

$$\int\limits_{\{|t-x|=\varepsilon\}} M(t,x)u(x) = \frac{2}{\varepsilon 4} \int\limits_{\{|t-x|=\varepsilon\}} D * (t-x) D(*dt) u(x) + \alpha(\varepsilon), \qquad (11)$$

где $\alpha(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0, t - x = (t_1 - x_1, t_2 - x_2, t_3 - x_3, t_4 - x_4)$. К интегралу справа (2) применим снова теорему Стокса:

$$\int\limits_{\{|t-x|=\varepsilon\}} M(t,x)u(x) = \frac{8u(x)}{\varepsilon^4} \int\limits_{\{|t-x|<\varepsilon\}} dt + \alpha(\varepsilon). \qquad (12)$$

Воспользуемся формулой объема шара радиуса ε в R^4:

$$V = \frac{\pi\varepsilon^4}{2}$$

Теперь из (12) получаем

$$\int\limits_{\{|t-x|=\varepsilon\}} M(t,x)u(x) = 4\pi^2 u(x) + \alpha(\varepsilon). \tag{13}$$

Устремляя $\varepsilon \to 0$ в (10), получим, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{G_\varepsilon} d[M(t,x)u(t)] \tag{14}$$

существует и равен

$$\int\limits_{\partial G^+} M(t,x)u(t) - 4\pi^2 u(x).$$

Но так как u(t) класса C$^{(1,0)}(G^+) \cap C^{(0,0)}(G^+)$, то интеграл

$$\int\limits_{G^+} d[M(t,x)u(t)]$$

существует и равен пределу (14), как интеграл со слабой особенностью.

В итоге, из (10) и (13) при $\varepsilon \to 0$ получим формулу

$$\frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{\partial G^+} M(t,x)u(t) - \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{G^+} d[M(t,x)u(t)] = u(x), x \in G^+. \tag{15}$$

Из (9) и (15) следует (8).

Замечание. В условиях теоремы 3 формулу 8 можно уточнить

$$\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{\partial G^+} M(t,x)u(t) + \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{G^+} D * \left(\frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{1}{|t-x|^2} D\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) u\,(t)\,dt = \begin{cases} u(x), x \in G^+; \\ 0, x \in G^-. \end{cases} \tag{16}$$

В самом деле, прямой подсчет показывает, что

$$d[M(t,x)u(t)] = -D * \left(\frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{1}{|t-x|^2} D\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) u\,(t)\,dt. \tag{17}$$

Учитывая (7), формулу (16) можно записать в виде:

$$\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{\partial G^+} M(t,x)u(t) - \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{G^+} N(t,x)u(t)dt = \left\{ \begin{array}{l} u(x), x \in G^+ \\ 0, x \in G^- \end{array} \right. . \qquad (18)$$

Замечание. Формула (18) может быть обобщена и на неограниченные области. Пусть $u(x) \in C^{(1,0)}\left(G^-\right) \cap C^{(0,0)}\left(G^-\right), u(x) \to 0$ при $x \to \infty$. Тогда при тех же предположениях на G и ∂G^+ можно доказать формулу

$$\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{\partial G^+} M(t,x)u(t) + \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{G^-} N(t,x)u(t)dt = \left\{ \begin{array}{l} 0, x \in G^+ \\ -u(x), x \in G^- \end{array} \right. , \qquad (19)$$

где ∂G^+ – граница G, ориентация которой индуцирована ориентацией G, являющиеся замкнутой ограниченной кусочно-гладкой поверхностью. Интеграл по G^- понимается как несобственный интеграл по неограниченной области G^-.

Из формулы (16) получаем интегральное представление для решения системы (2).

Теорема 4. *Пусть U(x) класса* $C^{(1,0)}\left(G^-\right) \cap C^{(0,0)}\left(G^-\right)$ *удовлетворяет системе (2) в* $G^+ \subset\subset R^4$, *тогда*

$$\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{\partial G^+} M(t,x)u(t) = \left\{ \begin{array}{l} u(x), x \in G^+ \\ 0, x \in G^- \end{array} \right. . \qquad (20)$$

Замечание. Интегральное представление (20) может быть распространено и на ограниченной области. Пусть $u(x) \to 0$ при $|x| \to \infty$, класса $C^{(1,0)}\left(G^-\right) \cap C^{(0,0)}\left(G^-\right)$ и удовлетворяет в G^- системе (2), тогда при тех же предположениях на G^+и∂G^- справедлива формула

$$\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{\partial G^+} M(t,x)u(t) = \left\{ \begin{array}{l} 0, x \in G^+ \\ -u(x), x \in G^- \end{array} \right. \qquad (21)$$

Формула (21) следует из формулы (19), так как в этом случае второй интеграл в (19) равен нулю.

Теорема 5. *Если* $\phi(x)$ *– вектор класса* $C^{(1,0)}\left(G^+\right) \operatorname{sup} p\varphi \subset G^+$, *область* $G^+ \subset\subset R^4$, *то*

$$-\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{G^-} N(t,x)\varphi(t)dt = \left\{ \begin{array}{l} \varphi(x), x \in G^+ \\ 0, x \in G^- \end{array} \right. \qquad (22)$$

Формула (22) следует из (18), так как в условиях теоремы первый интеграл в (18) равен нулю.

Рассмотрим граничные свойства решений системы (2), используя то, что

$$D\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)D*\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)=\Delta E,$$

где Δ – оператор Лапласа в R4, а E – единичная матрица.

Теорема 6. *Пусть вектор u(x) класса* $C^{(0,0)}\left(\partial G\right),\partial G$ *– кусочно-гладкая граница области* $G^{+}\subset\subset R^{4}$. *Тогда интеграл*

$$U(x)=\frac{1}{4\pi^{2}}\int\limits_{\partial G+}M(t,x)u(t) \tag{23}$$

удовлетворяет системе (2) всюду в $R^{4}\backslash\partial G$ *и обращается в нуль на бесконечности.*

При стремлении x к точке $t\in\partial G$ интеграл (23) перестает существовать в смысле Римана. В этом случае естественным образом вводится понятие главного значения сингулярного интеграла в смысле Коши. Обозначим его так же, как и обычный интеграл

$$\frac{1}{4\pi^{2}}\int\limits_{\partial G}M(t,\tau)u(t),\tau\in\partial G. \tag{24}$$

Можно показать, что если U(t) класса $C^{(0,h)}\left(\partial G\right),\partial G-$ замкнутая гладкая поверхность, то главное значение сингулярного интеграла по Коши (24) существует.

Используя методы А.В. Бицадзе (2), можно установить формулы для скачка интеграла (23).

Теорема 7. *Если u(t) класса* $C^{(0,h)}\left(\partial G\right),\partial G-$ *замкнутая гладкая поверхность Ляпунова, то*

$$U^{+}\left(\tau\right)=\frac{1}{2}u\left(\tau\right)+\frac{1}{4\pi^{2}}\int\limits_{\partial G}M(t,\tau)u(t),\tau\in\partial G, \tag{25}$$

$$U^{-}\left(\tau\right)=-\frac{1}{2}u\left(\tau\right)+\frac{1}{4\pi^{2}}\int\limits_{\partial G}M(t,\tau)u(t),\tau\in\partial G, \tag{26}$$

где через $U^{\pm}\left(\tau\right)$ *обозначены предельные значения интеграла (23), когда точка* $x\in G^{\pm}$ *стремится к точке* $\tau\in\partial G$.

Замечание. Из формул (25) и (26) следуют формулы

$$U^+(\tau) - U^-(\tau) = u(\tau), \tag{27}$$

$$U^+(\tau) + U^-(\tau) = \frac{1}{2\pi^2} \int\limits_{\partial G} M(t,\tau) u(t). \tag{28}$$

Рассмотрим вопросы продолжения с границы для решений системы (2).

Теорема 8. *Для того, чтобы заданный на замкнутой ориентированной гладкой поверхности Ляпунова ∂G^+вектор $u(t)$ класса $C^{(0,h)}\left(\partial G^+\right)$ был граничным значением вектора, удовлетворяющего (2) в G^+ и в случае , когда G^+ бесконечна, обращающегося в нуль на бесконечности, необходимо и достаточно выполнения условия*

$$\frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{\partial G^+} M(t,x) u(t) = 0 \quad x \in G^-. \tag{29}$$

Доказательство следует из формул (25), (26) и теоремы 6.

Следствие. Условие (29) эквивалентно условию

$$-\frac{1}{2} u(\tau) + \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{\partial G^+} M(t,x) u(t) = 0 \ \text{ для всех } \ \tau \in G^+. \tag{30}$$

Замечание. Условия, аналогичные (29) и (30), имеют место, если заменить G^+ на G^-.

Для сингулярных интегралов с матричными ядрами справедлива следующая формула перестановки сингулярных интегралов.

Теорема 9. *Пусть $u(s,\ t)$ – вектор класса $C^{(0,h)}\left(\partial G\right)$ как по S, так и по t, $\partial G-$ та же, что и в теореме 7. Тогда имеет место формула*

$$\int\limits_{\partial G_t} M(t,\tau) \int\limits_{\partial G_s} M(s,t) u(s,t) = 4\pi^4 u(\tau,\tau) + \int\limits_{\partial G_s} \left(\int\limits_{\partial G_t} M(t,\tau) M(s,t) u(s,t) \right), \tag{31}$$

где ∂G_t и ∂G_s, стоящие под знаками интегралов, указывают на то, что интегрирование производится по t и s.

Доказательство формулы (31) использует формулы (25), (26) и интегральное представление (20).

Для двумерных сингулярных интегралов аналогичные формулы были получены А.В. Бицадзе [2].

Формулы (25) и (26) позволяют получить решение следующей системы сингулярных интегральных уравнений.

$$\frac{1}{2\pi^2}\int\limits_{\partial G} M(t,\tau)g(t) = f(\tau), \tau \in \partial G, \tag{32}$$

где ∂G – та же, что и в теореме 7, f(t) – заданный на ∂G вектор класса $C^{(0,h)}\left(\partial G\right)$. Можно показать, что единственным решением системы уравнений (32) в классе векторов, удовлетворяющих условию Гельдера на является вектор

$$g(\tau) = \frac{1}{2\pi^2}\int\limits_{\partial G} M(t,\tau)f(t), \tag{33}$$

т.е. соотношения (32) и (33) обращают друг друга. Формулы (32) и (33) являются аналогами формул обращения А.В. Бицадзе для системы сингулярных уравнений (2).

Применим формулы (32) и (33) для решения системы сингулярных интегральных уравнений с ядром $M\left(t,\tau\right)$. Введем сингулярный интегральный оператор

$$I\left[\varphi\right]\left(\tau\right) = \frac{1}{2\pi^2}\int\limits_{\partial G} M(t,\tau)\varphi(t), \tag{34}$$

где $\varphi(t)$ – вектор класса $C^{(0,h)}\left(\partial G\right)$, ∂G – та же, что и в теореме 7. Рассмотрим следующую систему сингулярных интегральных уравнений

$$\alpha\varphi\left(\tau\right) + bI\left[\varphi\right]\left(\tau\right) = f\left(\tau\right), \tag{35}$$

где f(t) – заданный на ∂G вектор класса $C^{(0,h)}\left(\partial G\right)$, a и b – вещественные постоянные.

Можно доказать, что при условии

$$\mathrm{a}^2 \neq b^2 \tag{36}$$

решение системы (35) единственно в классе векторов, удовлетворяющих условию Гельдера на ∂G и выражается формулой

$$\varphi\left(\tau\right) = \frac{1}{a^2-b^2}\left(af\left(\tau\right) - bI\left[f\right]\left(\tau\right)\right). \tag{37}$$

При а $= 0, b = 1$ получаем формулу обращения

$$\varphi(\tau) = I[f](\tau) \tag{38}$$

системы сингулярных интегральных уравнений

$$I[\varphi](\tau) = f(\tau). \tag{39}$$

Подставив в (39) вместо $\varphi(\tau)$ его выражение из (38), получим частный случай формулы перестановки сингулярных интегралов:

$$\int\limits_{\partial G_t} M(t,\tau) \int\limits_{\partial G_s} M(s,t) f(s) = 4\pi^4 f(\tau). \tag{40}$$

Отметим, что сингулярный интегральный оператор I, участвующий в (35), не является вполне непрерывным, так как $I^2 = E$ – тождественный оператор, который вполне непрерывен в бесконечномерных пространствах.

Замечание. Если а$^2 = b^2$, то система уравнений (35) может иметь бесконечно много решений. Например, решениями системы уравнений

$$\varphi(\tau) - I[f](\tau) = 0$$

будут граничные значения векторов, удовлетворяющих системе (2) в области G^+. Аналогично, для системы

$$\varphi(\tau) + I[f](\tau) = 0$$

решениями будут граничные значения векторов, удовлетворяющих системе (2) в G^- и обращающиеся в нуль на бесконечности.

Рассмотрим следующую краевую задачу: найти вектор ф(x), удовлетворяющий системе (2) в $R^4 \backslash \partial G$ и краевому условию и на ∂G

$$a\Phi^+(\tau) - b\Phi^-(\tau) = f(\tau), \tag{41}$$

где $f(\tau)$ – вектор класса $C^{(0,h)}(\partial G)$, а и b – вещественные постоянные, а также обращающемуся в нуль на бесконечности.

Из доказанного выше следует, что решение задачи (41) дается интегралом

$$\Phi(x) = \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{\partial G} M(t,x)\varphi(t), \tag{42}$$

где

$$\varphi(t) = \frac{1}{ab}\left[\frac{a+b}{2} f(t) - \frac{a-b}{2} I[f](t)\right] \tag{43}$$

при условии $ab \neq 0$.

Библиографический список

1. *Moisil, G.* Sur les quaternions monogenes. Bull. Sci. Math. II, 55 (1931). P. 168-174.
2. *Бицадзе, А.В.* Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка [Текст] / А.В. Бицадзе. – М.: Наука, 1966. – 204 с.
3. *Виноградов, В.С.* Исследование граничных задач для эллиптических систем первого порядка [Текст] / В.С. Виноградов // Матем. заметки. – 1973. – Т. 14. – № 2. – С. 291-301.
4. *Fueter, R.* Vorlesungen uber reguklare Funktionen einer Quaternionenvariablen. C.R. Congres int. Math, Oslo, 1937, 1. P. 75-91.
5. *Мухамед-Насер.* Гиперголоморфные функции [Текст] / Мухамед-Насер // Сиб. матем. журн. – 1971. – Т. 12. – № 6. – С. 1327-1340.
6. *Балабаев, В.Е.* Кватернионный аналог системы Коши-Римана в четырехмерном пространстве и некоторые его приложения [Текст] / В.Е. Балабаев // Докл. АН СССР. – 1974. – Т. 214. – № 3. – С. 489-491.
7. *Дубровин, Б.А.* Современная геометрия. Методы и приложения [Текст] / Б.А. Дубровин, С.П. Новиков, А.Т. Фоменко. – М.: Наука, 1986. – 760 с.

Преткновение биологики

Н.А. Трубников, Д.И. Степанова, Ж.Н. Трубникова

> *“…совершенно непонятно каким образом нейрофизиология сможет … объяснить почему 2 и 2 составляют 4…”*
>
> *Ж. Пиаже*

Граница между точным и неточным знанием совпадает с границей между живым и неживым. С одной стороны космоплан и интернет, с другой вич и террор. Успех ремонта мерседеса часто не доходит до физической теории, успех ремонта больных человека, природы и общества часто доходит. Но то, что там обнаруживается, настолько далеко от работающих физических теорий, что оставляет без ответов огромный и кровоточащий узел фатальных проблем, несуразностей и потерь не только в медицине или в экологии, но во всех био-, антропо-включающих областях жизнедеятельности, от социологии, юристики и политэкономики до педагогики и личной жизни.

Инфракаркасом теорий является логика. Сочетание доходящей до контрпримеров дисперсии биосистем с присущим разуму необходимым для образования понятий обобщением на практике рождает его парадоксальный модус – кондукцию: $\rho\alpha_1,\ \rho\alpha_2,\ \ldots, \exists ? \neg \rho \mathrm{x}\ |||\ \Rightarrow\ \forall\ \rho \mathrm{x}$ ($\exists ?$ – существуют как прецеденты), который ослабляет как транспортацию истины в умозаключениях так и кумуляцию ее в понятиях в результате чего мы имеем огромный недоосмысляемый фактификат в самых судьбоносных сферах жизнедеятельности.

Непосредственно в биологии теория жизни – это теория биосистем, широко известная своей недостаточностью, если не отсутствием [12]. Но человек принадлежит к животному миру и этот аспект не выбросишь даже из упомянутой квазибиологии, а из методологии, мимо которой не проходила ни одна интеллектуальная революция в естествознании, тем более, ибо, когда какое-либо дело не получается, встает вопрос, так ли его пытаются сделать. Это и будет поиск необходимой для решения корректной постановки основной проблемы биологии (ОПБ), в сакраментальной формулировке “что такое жизнь”, открывший путь поиска неудач и построения “на пути к теоретической биологии” ее, если хотите, прелюдии – биогностики, логический профиль которой намечен в этой статье.

Что же, собственно, мы хотим иметь в качестве решения ОПБ? А чтобы так, например, как в механике или электродинамике, построить адэкватную биофактификату теорию с аналогичными небиофизике уровнями глубины объяснения и точности предсказания как теоретическую базу создания практически надежных (с таким же минимумом риска и максимумом успеха), но уже не инженерных, а терапевтических, социокультурных, политэкономических и т.п. проектов. Например, можно остановиться на следующей формулировке: создание семантически беспрецедентной теории с индуктивной логикой, непротиворечивой и достаточной для (примерные дизъюнкты): 1) объяснения, прогноза и решения отобранного узла кровоточащих проблем; 2) синтеза жизни из неживых компонент.

Подводная скала, препятствующая реализации искомой гностической техники обнаруживается при анализе концептогенеза на решающих этапах когнитивного процесса. Фундаментальной считается та часть науки, которая обустраивается, начиная с фундамента, а не эксплуатирует чужие верхушки, не видя из чего они растут. Биолог же склонен искать фундамент науки в молекулярно-физиологических, а в конце концов, в биофизических механизмах. Это ситуация курицы и яйца – аспекты *дополнительны* (в смысле Н. Бора [3]) друг другу, находясь в отношениях эмерджентного интеракционизма: биология $\rightarrow$ эпистемология $\vee$ биология ← эпистемология. Но "...дилемма изначальности первичных данностей "быть" и "знать" неразрешима. Здесь "что" и "как" приходят вместе" (В. Мейерхольд), и вначале, так звучит это здесь, стоит факт" [8].

Теоретическая биология всегда затоптывается на корню, потому и находится в перманентно зачаточном состоянии [9]. Причин – море. Теоретиков не любят. А в биологии особенно. Похоже шлейф пресловутой генетикоцидной сессии ВАСХНИЛ заставляет биологическое сознание забывать, что "факты – воздух науки" (И.П. Павлов), но "не сама наука", какой являются "формулы" (А.И. Кикоин). Жизнь касается всего и потому специалисты по ней все, а первое, на чем покупаются рецензенты, выбрасывая ее теории в философию – это ревизия методологии, с которой, как и неклассические физики, не может не начаться неклассическая биология.

Рассмотрим же указанную дизъюнкцию наподобие системы коммутирующих переменных в квантовой механике. Инновации, рождающиеся в хрупком, кипящем слое науки, угрожают уютным амбициям и предрассудкам и страх этих потерь застилает глаза. Но рискнем.

Биология исчерпала кредит доверия. Объявленный биологическим после триумфов в генетике, XX век с пеленой войны в глазах чаще ставил жизнь на грань уничтожения, чем пытался понять тайну ее существования как узловую проблему науки, вовлекающую в ее юрисдикцию многочисленные "что" и "как", от механизма действия лекарств до организации человеческого счастья.

Резюме неудач с теорбиологией вынуждено признать невозможность замкнуть любые биорепрезентативные группы утверждений в рамках присущих физике критериев истины. Оскомина от проколов классицизма здесь тем более указывает на тот же идеологический undeground, который оплодотворил физику и математику.

Проблема жизни – старая проблема. Если "наука – это ее история" (И. Гете), то история неоккультных подходов к этой проблеме пережила механистические, химические, термодинамические, редуктивистские, эволюционистские, квантовомеханические и кибернетические отображения. Фонтан открытий XX века оживил надежды создать биологическую теорию по степени эксппланарности (проницательности) и прогностичности не уступающую механике или электродинамике.

Но и сейчас, в дебюте XXI века, несмотря на достижения генетики и медицины, контраст между ними и тупиковым состоянием биологической теории нарастает. И, как бы предопределив эту безысходность, черту, делающую основную проблему биологии (ОПБ) еще и вечной проблемой, подвел Н. Бор: "существование жизни следует рассматривать как основной постулат биологии, не подлежащий дальнейшему анализу".

В чем же причина роковых и видимо глубокозначимых неудач с созданием точной теории, позволившей бы не только ремонтировать больных не хуже мерседесов, превращая патологическое течение жизней в нормальный биогенез, но и алгоритмизировать поиск и следование стратегии “ нормы жизни”, предотвращающей влетание человечества из одного перекоса в другой, потакая своим страстям и, стремясь в отпущенное ему время, урвать максимум в номической темноте порохового погреба экосферы?

Что в условиях подобной недоумности может обнадежить прогноз и обезопасить поведение? Каким образом культура жизни будет оказываться не пижонством снобов или утешением странников, но принципиальным организатором жизнеустройства и заботой граждан? Столько голов веками морочила эта загадочность жизни, столько гениальных страниц написано о ней, столько трудов и крови потеряно и все зря?

Порядок сознания. Биогност

“Наше знание возникает. . . ” 1) как “. . . взаимодействие между тем, кто воспринимает и воспринимаемым объектом”, 2) “. . . из двух источников, первый. . . предмет дается. . . , а второй. . . он мыслится. . . ”. “Разум организует восприятия и эти организации являются представлениями о. . . ” (И. Кант, цит. по [6, с. 392]) природных объектах б. То есть при 1) Тез$_{\text{БГ}}$ (биогностики): card Б = card Г, (Б (биос) – то, что присуще всем биосистемам, Г – когнитрон, card – организационная сложность объекта б, отражаемая в первом приближении мощностью множества компонентов и связей объекта или высказываний, если речь идет о теории) и 2) представлении Г как биогноста Бх или Б(х), где аргументное место х$\subseteq$S (объектив сознания), имеем:

биогнозис: Бх как фактограф Б$^{\Phi}$х: б + Б$^{\Phi}$х — λхБ$^{\Phi}$х(б)$\rightarrow$ Ф,

как версификатор Б$^{\text{Т}}$х: Ф + Б$^{\text{Т}}$х — λхБ$^{\text{Т}}$х(Ф)$\rightarrow$Т.

Здесь биогност Бх проявляется как эффектор, экстенсионал которого – пара <б,Бб>, Бб (результат исследования б) = σ (сигнатура) = Ф(фактификат б) $\vee$ Т (теория б), а интенсионал – λхБх ($\equiv$ Бх, как функция х (Барендрегт, 1985)). Этап фактографии “предмет дается”: экстенсионал <б,Ф>, интенсионал λхБ$^{\Phi}$х, этап версификации “он мыслится”: экстенсионал <б,Т>, интенсионал λхБ$^{\text{Т}}$х. В результате приватизируются обе “медали” знания – признаковая перцептируемая Ф (синдром фактов, которым засвечен объект б в объективе S сознания, фактура объекта) и знаковая понятая Т (теория объекта б, интерпретированная и семантически “истиннизированная” на Ф), являющие по отношению к б его сигнатуру со следующими реквизитами.

ω(истинность) = card Ф / card Т. Это семантическая истинность, но собственность Т, наряду с непротиворечивостью, это синтаксический аспект ω, который при репрезентативном фактификате определяется скалярностью и силой секвенций (дукций), логически связывающих Ф в Т с удачно подобранным и/или изобретенным концептификатом. Интегритет “внешнего оправдания” и “внутреннего совершенства” (А. Эйнштейн) обеспечивает как бы понятнопрогнозность сигнатуры $\sigma = <$ФТ$>$, познающей б.

η(неопределенность) = card Ф / card Т. Неопределенность отражает семантический аспект сигнатуры σ.

r (репрезентативность) = card Ф/card Б. Это требует углубления биогностических комментариев.

1) Биос Б в человеке жизнедействует как биогност Бх, т.е. как биоэффектор λхБх с экстенсионалом $<\Delta$,S$>$, где областью определения является включающая Б природа $\Delta =$ б$_1$, б$_2, \ldots$ с ее финитными б$'$ и трансфинитными б$''$, б$'''$ объектами, оказывающимися на аргументном месте x (объектив Бх) в качестве аргументов; а областью значений является зеркало (сознание, событие) S $= \sigma_1, \sigma_2, \ldots$ как сигнификат с прейскурантом Бб$' = \sigma' = <$Ф$'$,Т$'>$, Бб$'' = \sigma'' = <$Ф$''$,Т$''>$, Бб$''' = \sigma''' = <$Ф$'''$,Т$'''>$. В объектив биогноста могут попасть в качестве объектов природы и сам биогност как механизм сотворения (синтаксический потенциал сознания – спс) S и даже я-субъект сотворения с их Б-максикардинальностью, всегда находящиеся за кадром S в подсознании D (ближний трансъектив, зазеркалье). Сотворенные Бб$''' = \sigma''' = <$Ф$'''$,Т$'''>$, а это, несомненно, они (см. далее), имманентно функционируют как понятые инструменты сотворения S. Вместе с накопленным багажом сигнатур, выступающим в роли контекста апперцепции фокусируемого объектива, они метапозиционируются как адъектив p (закулисье) зеркала сознания, S = px. В биогнозисе трансфинитные D и p, оба с card = Б работают как целое, образуя предикат Б биогноста Бх, так что Dpx = DS = БS = Бх = б$_n$. В итоге Тез$_{\text{БГ}}$ расширяется до card Б = card Бх = card S. Содержание и кардинальность адъектива способны обогащаться, но они всегда биопрезентативны.

2) Дело в том, что любое познание – это в то же время познание жизни. Вплоть до Б. Любое познание природы – это всегда в некоторой и разной мере познание живой природы. Так что репрезентативность природных б в Ф сигнатурах σ по сути есть биопрезентативность, ибо что бы не аккумулировал объект б, биос Б, через который происходит его задание и анализ в фокусе x объектива S, он всегда включает в его существе, лимитированно проявляемом как раз в биогнозисе. Однако, если при объективации признаки Б максимально элиминируются, то на аргументном месте оказывается нерепрезентативный, т.е. небиопрезентативный объект б$'$ (деферент), если элиминация лишь эллиптичная и

сохраняет себетождественность, имеем полупрезентативный референт $б''$ (инферент), элиминации нет – конферент $б'''$ биопрезентативен и это Б. В итоге, являясь фактически биорепрезентативностью r может оцениваться долей использованного пространства S: r = card Ф / card S = card Ф / card Б как относительной оценкой уровня сложноорганизованности б. Отсюда ω :: 1/ r (1/r-нерепрезентативность).

Этот процесс биоэлиминации связан с тем, что стремление к истине, называемое часто стремлением к объективности, т.е. к десубъективности, действительно облегчается десубъективацией: "…умеренно удовлетворительная картина мира получена дорогой ценой изъятия из этой картины нас самих и отступления назад, в позицию ненаблюдаемых наблюдателей" (Э. Шредингер, цит. по [10, с. 33]), без чего "…исследователь не будет знать, какая часть…наблюдений вызвана им самим и какая относится к…интересующей его системе" [2, с. 671]. "Физика есть стремление осознать сущее как нечто…независимое от восприятия" [12, с. 229] и "…в объективном описании…представление о…субъекте…не находит…места…" [3, с. 110].

Таким образом, зеркало сознания S представляет область перемещающихся подпространств – объектива x (зона фиксации б) и адъектива p, являющегося объективированной частью субъектива, содержащей "видимые метасредства анализа б" и выделенной субъективом для обработки гостей, поселившихся в части или оккупировавших весь его гостиный двор S. Но, если размеры p, как отмечено, неизменны, то x меняется в результате подстановки в него биогнозированного из б фактификата, он расширяется и при характерной для $б'''$ Б-сложноорганизованности фактификат-объекта S вытесняет Б. со сцены за кулисы в адъектив (осваиваемая часть) и зазеркалье (неосваиваемая часть). Возникает аутореферентная ситуация Б.Б с логически слабой T''', умеренной ω''' и драматически заметной η'''.

Однако, эта прямая десубъективация не дает ожидаемого искателями истины облегчения их поиску, ибо переллельно и адэкватно такой эпистолярной десубъективации (эдс) растет биопрезентативность (r) задаваемого Ф, которая в силу $\text{Тез}_{\text{БГ}}$ функционируя как фактуальная субъективация (фс) также параллельно и адэкватно на столько же понижает растущую ω и повышает снижающуюся η.

Поэтому наблюдающиеся рост ω и соответствующее снижение вызваны по сути дебиогностизацией (дбг) как суммарным действием описанных десубъективации и субъективации, проявляющимся следующим образом. При $б'$ эдс высокая, фс низкая – дбг низкая – ω высокая, η низкая. При $б'''$ все наоборот: эдс низкая, фс высокая – дбг высокая - ω низкая, η высокая. При $б''$ везде промежуточные значения. В дальнейшем десубъективация интерпретируется более точно как дебиогностизация.

Характерные для Бх межпараметрические отношения, давно фиксируемые метанаукой выступают как признаки небезграничности познавательных возможностей биогноста: 1) *Достигаемость* наибольшей истинности ω обратно пропорциональна организационной сложности объектов – card. 2) *Ёмкость*, насыщаемость вместимости S, лимитируется уровнем той же сложноорганизованности объектов. 3) *Равносложность* S и Б, ибо Тез$_1$: “…мы принадлежим к животному миру…” [3, с. 45] и посредством его очков (Бх) досотворяем рельефы бытия природы, презентируя их как онтические объекты б в S сознания и проживая как акты перцепции, фактографии в Ф и версификации в Т. “Если бы я не носил в себе мир, я был бы слепцом со здоровыми глазами” (И. Гете). Самые богатые б, задаваемые в S, это несомненно биообъекты (точнее квазибиообъекты, то есть все системы, включающие Б и потому равносложные с ним).

Сочленения типа Бх, Бб, БS, ББ представляют аттрибутации (здесь мета-об-аттрибутации), в которых из любой пары, выбранных в них смежных знаков левый метазнак обозначает метапокрытие по отношению к правому обзнаку, что обозначает, что метамножество кардинально мажорирует обмножество: card мета $>$ card об, где, как уже отмечено, card означает организационную сложность объекта, отражаемую в первом приближении мощностью множества компонентов и связей Ф или высказываний, если речь идет о теории.

Например, биогнозис, текущий с участием языка и имеющий целью создание теории, использует такие ресурсы как понятия, суждения, язык, высказывания, логика,… и в качестве элементов сотворяемой теории Т и как средства ее сотворения, принадлежащие метатеории Т. В металогике установлено, что реализация этого процесса возможна при условии погружения Т в Т$^{\text{м}}$, т.е. перевыражения Т в Т$^{\text{м}}$ и достаточности лингвистических ресурсов Т$^{\text{м}}$ для построения и анализа Т, ввиду чего необходимо, чтобы card Т$^{\text{м}}$ $>$ card Т. (Карри, 1969).

Но это метапревосходство в биогнозисе касается всех об-мета-эффекторов, где в аттрибутациях мета система слева, обсистема – справа и card метасистемы card $>$ обсистемы, т.е., например, в БSб card Б $>$ cardS $>$ cardб.

При инвентаризации сознания различимы следующие объекты б, их сигнатуры σ, референты Ф, биопрезентативности r, логики Т, энтропии H $= \log \eta$, уровни собственно неопределенности η и типы практики.

1. Аподиктивные б$^{\square}$

б$'$(деакт), σ' (аналитика)$=<$Ф$'$,Т$'>$, Ф$'$ $= \neg$Б – бионерепрезентативный деферент, r$' = \varepsilon$ (“до эпсилон” (А. Тарски)), Т$'$ – дедуктика с дедукцией $\forall$x ρx $| \Rightarrow \rho\alpha$, опирающейся при интерпретации на полную индукцию

$\rho\alpha 1$, $\rho\alpha 2$,…,$\rho\alpha$n $|\Rightarrow \forall$x ρx и с $\omega' = 1$, $\eta' = 1$, H = 0, депракции $|\rightarrow$ как абсолютно надежные практические действия.

2. Ассертивные (контингентные) ф$^{\diamondsuit}$: 0,01; 0,05 $\leqq\omega^{\diamondsuit}\leqq 1 - 2^{-1000}$, 10^{-300}.

2.1. б$''$(инакт), действительные акты, σ'' (эллиптика)) = <Ф$''$,Т$''$>, Ф$''$= Б+ – полубиорепрезентативный инферент, 0<r$''$<1–ε, Т$''$-индуктика с индукцией $\rho\alpha 1\bullet\rho\alpha 2\bullet\ldots || \Rightarrow \forall$x ρx и с $\omega'' = 1 - 2^{-1000}$, 10^{-300}, $\eta'' =$ l (логон как минимум η небиофизических систем, рекапитулянт b (см. далее)), H$''$ = l (логонт как минимум H небиофизических систем, рекапитулянт b (см. далее)), инпракции $|\rightarrow$как практически надежные действия.

2.2. б$^{\#}$ (рейакт), репраксивные акты с 0,01, 0,05 $\leqq\omega^{\#}\leqq 1$ – 0,01, 0,05:

2.2.1. б$'''$(конакт), вероятностные акты, σ'''(биогностика)=<Ф$'''$,Т$'''$>, Ф$'''$= Б – биорепрезентативный конферент, r$'''$ = 1- ε; Т$'''$ – кондуктика с кондукцией $\rho\alpha_1$, $\rho\alpha_2$,…, $\exists?\neg\rho$x $||| \Rightarrow \forall$ ρx ($\exists?$ – существуют как прецеденты) и с ω'''= 1 – 0,01, 0,05, η''' = b (бион, непреодолимый минимум неопределенности биосистем) , H$'''$=b (бионт, непреодолимый минимум биотолерантности), конпракции, иначе, репракции $||| \rightarrow$ как вынужденно-терпимо-приемлемо надежные действия.

2.2.2. б$^{\equiv}$(преакт), прецедентные акты, прецеденты с $\omega^{\equiv}$= 0,01, 0,05.

3. Невозможные ф$^{\neg}$

3.1. б$^{=}$ (наноакт), физически невозможный акт с $\omega^{=} = 2^{-1000}$, 10^{-300};

3.2. б$^{-}$ (нонакт), логически невозможный акт с $\omega^{-} = 0$.

4. Стохастические б$^{\sim}$ (суакты, супракции, рулетки, игры), беспорядочные действия с равновероятностью $0 \leqq\omega^{\sim}\leqq 1$.

На $\omega^{\sim}$ рассчитаны игровые автоматы казино, на $\omega^{=}$ – проекты аквапарков, для которых принцип практической невозможности маловероятных (ω = 0,01 – 0,05) событий заменяется принципом физической невозможности математически нановероятных событий.

Преткновение биологии. Бионеразрешимость

Выдающиеся прорывы в фундаментальной науке всегда требуют ревизии ее фундамента, провоцируемой необходимостью объяснений под грузом накапливающихся фактов и проблем и невозможностью объяснения на базе устоявшихся парадигм в концептологии и методологии. Квантовая и релятивистская метафизики сами намекают, что в биологии копать надо еще глубже: "…мы обращали внимание на то, что мы ЗНАЕМ, чем на то, что МЫ знаем, игнорируя, что сами являемся частью вселенной и…всякий отчет о ней…является в силу этого неизбежно антропоцентрическим" [7, с. 24], но "специалист по атомной физике должен …примириться с тем …, что…объектом исследования служит уже не сама природа, а изучение природы человеком" [3, с. 30], ибо факт, что

“…то, что мы наблюдаем –…не сама природа, а природа в том виде, в каком она выявляется благодаря нашему способу постановки вопросов” [4, с. 33] еще не мешал строить и в неклассической физике достаточно (индуктивно) точные теории.

Однако, если “альфой и омегой…“физического объяснения”…должен быть отказ от объяснения нашей собственной сознательной деятельности” [3, с. 134], то подобная, обеспечившая точность физике десубъективация не проходит в биологии, т.к. то обстоятельство, что в физике и “биологии…вопросы формулируются биологическим видом человек” [3, с. 81], физика в качестве Б изгоняет из Ф, а у биологии Ф – это и есть сам Б. Поэтому необходимого для создания точной теории биогностического метапревосходства (метамажорирование объекта) субъектива Б. над объективом $\text{S}\supset\Phi$, имеющего место в случаях $\text{БФ}'$ и $\text{БФ}''$, когда card Б $>$ Φ' и card Б $>$ Φ'' в случае $\Phi =$ Б не бывает, ибо card Ф $=$ card Б и в эффекторе БS в силу Тез$_1$ возникает ситуация ауторефе-рентности ББ, когда card S $=$ card Б $=$ card Б. со всеми вытекающими антиномиями в логи-ке, диагональностями в математике, неопределенностями в физике и прецедентами в био-логии и квазибиологии. Ауторефедентность сигнатуры $\sigma''' =$ ББ закрывает возможность создания индуктивной биологии или биофизики как способа разрешения ОПБ.

Если идею информации J использовать для оценки уровней организации, то, принимая за нехватку J информационную энтропию H, физикализируемую у Л. Больцмана как $\text{S} = \text{k} \log \text{W}$, а при неравновероятности $\text{S} = -\,\text{k}\Sigma\text{p} \log \text{p} = \text{kH}^{\text{Б}} = -\,\text{k}\int\int\int \text{vp} \log \text{vp}\,\text{du}\,\text{dv}\,\text{dw}$ ($\text{p} = 1/\text{W}$, p, W (термодинамическая) – вероятности, du, dv, dw – скорости молекул в ячейке объема v, $\text{H}^{\text{Б}}$ – H-функция Больцмана), получаем для $\text{J}^{\text{Б}} = \Sigma\pi \log \text{p}$. То же у К. Шеннона: энтропия (информационная) $\text{H}^{\text{ш}} = -\,\text{p}\Sigma\text{p} \log \text{p}$ и $\text{J}^{\text{ш}} = \text{p}\ \Sigma\text{p} \log$. При равновероятности и, $\text{H}^{\text{Б}}$, $\text{H}^{\text{ш}}$ и, соответственно, $\text{J}^{\text{Б}}$ и $\text{J}^{\text{ш}}$ превращаются в $\text{H} = -\log \text{p}$ и $\text{J} = \log \text{p}$ [8], что совпадает с мерой Хартли [13].

В этой традиции, считая $\Delta \nearrow_{\lambda\Delta\text{T}} \Phi \nearrow_{\lambda\Phi\text{T}} \text{T}$ переходом H – J и, приняв $\text{T} = \text{T}''$ с ее η'' за удовлетворительный исход биогнозиса Б получим:

$\text{J}_{\Phi} = \log \text{card}\ \Phi \equiv$ мера фактической информации σ;

$\text{J}_{\text{T}} = \log \text{card}\ \text{T} \equiv$ мера концептуальной информации σ;

$\text{J}_{\text{Б}} = \log \text{card}\text{Б} \equiv$ мера полной информации σ.

Тогда

H_{σ} (энтропия σ) $= \log \text{card}\ \Phi - \log \text{card}\ \text{T} = \log \text{card}\ \Phi\ /\ \text{card}\text{T} = \log \eta$

H^{Δ}(скрытая энтропия σ) $= \log \text{card Б} - \log \text{card}\ \Phi = \log \text{card Б}\ /\text{card}\ \Phi = \log \eta^{\Delta}$(скрытая η σ).

Следовательно,

H(полная энтропия σ) $=$ H $+$ H$^{\Delta}$$=$ log card Ф – log card Т $+$ log card Б – log card Ф $=$ log card Ф / card Т $+$ log card Б / card Ф $=$ log (card Ф / card Т $\times$ card Б / card Ф $=$ log $\eta \times \eta^{\Delta}$ $=$ log η^{o}, т.е. $\eta = \eta$ x $\eta^{\Delta} = \eta/$ r, ибо $\eta^{\Delta} = 1$ / r. Но $\eta \geq$b, откуда для

Ax$_b$: $\eta/$ r $\geqq$b,

– удел, объединяющий разнообразные ущемления человеческого тщеславия от принципа Карно и теорем Геделя и Тарского до неразгадываемой загадочности жизни.

Информация о мире, доступная, благодаря жизни, я-познавателю, никогда не превысит информацию о жизни, обеспечивающей доступную, но всегда меньше ее. Знание, приходящееся не единицу доступного, включает знание жизни лишь до той грани, за которой лежит знание о ее существе, обеспечившем эту доступность. Знание не включает существо жизни, дающей его.

Терминология

Эффектор – в некотором роде физикализация понятия “функция”. БS (Бх, Бб, Sх, Sб).

- мета (левый знак) – об (правый знак) – аттрибутации, card мета $>$ card об.

\ – теоретико-множественное вычитание.

λ –оператор функциональной абстракции [2].

$\vee$ – логический союз дизъюнкция.

Экстенсионал (сингулярной функции) – множество пар <прообраз, образ>.

Интенсионал – смысл, истолкование, содержание.

Версификация – сотворение под Ф теории Т $=$ <Алфавит, Язык, Логика, Семантика>.

$\eta/$r $\geqq$ b – действительно, для б$'$: η'=1, r$'$ $=$ ε (очень малое число), η'/r$'$=1/ε $=$ очень большое число; для б$''$: η''=l (liml $=$ ε), r$''$$<$ 1, η''/r$''$ $=$ l / $<$ 1 $=$ большое число; для б$'''$: η'''=b, r$'''$=1, η''' / r$'''$ $=$ b / 1. То есть $\eta/$ r $=$ очень большое число $\div$ b, или $\eta/$ r $\geqq$ b.

Библиографический список

1. *Барендрегт, Х.* Ламбда – исчисление. Его синтаксис и семантика [Текст] / Х. Барендрегт; перевод с англ. – М: Мир, 1985. – 606 с.
2. *Бом, Д.* Квантовая теория [Текст] / Д. Бом; перевод с англ. – М: Гос. издат. физ.-мат. литературы, 1961. – 728 с.
3. *Бор, Н.* Атомная физика и человеческое познание [Текст] / Н. Бор; перевод с англ. – М.: ИЛ, 1961. – 152 с.
4. *Гейзенберг, В.* Физика и философия [Текст] / В. Гейзенберг; перевод с нем. – М.: ИЛ, 1968. – 202 с.

5. *Карри, Х.* Основания математической логики [Текст] / Х. Карри; перевод с англ. – М: Мир, 1969. – 568 с.
6. *Клайн, М.* Математика. Утрата определенности [Текст] / М. Клайн; перевод с англ., под ред. И.М. Яглома. – М: Мир, 1984. – 447 с.
7. *Рассел, Б.* Человеческое познание. Его сфера и границы [Текст] / Б. Рассел; перевод с англ. И.В. Воробьева. – М.: ИЛ, 1957. – 555 с.
8. *Трубников, Н.А.* Ars био гностика in grosso modo [Текст] / Н.А. Трубников, И.А. Трубникова, Д.И. Степанова, Ж.Н. Трубникова. – Ярославль: РМАТ, 2001. – 137 с.
9. *Трубников, Н.А.* Биогностика в основаниях фармакологии [Текст] / Н.А. Трубников. – Деп. в ВИНИТИ № 499. – 1991. – 439 с.
10. *Уоддингтон, К.Х.* Основные биологические концепции [Текст] / К.Х. Уоддингтон // На пути к теоретической биологии 1 Пролегомены; перевод с англ. – М.: Мир, 1970 – 182 с.
11. *Хоменков, А.С.* Возможна ли теоретическая биология? [Электронный ресурс]. – Режим доступа. – www.ucheba.ru/refer.ats 6219.html (дата обращения 12.010.09).
12. *Эйнштейн, А.* Собрание научных трудов [Текст] / А. Эйнштейн. – М.: Наука, 1967. – Т. 4. – 599 с.
13. *Яглом, А.М.* Вероятность и информация [Текст] / А.М. Яглом, И.М. Яглом. – М.: Наука, 1973. – 511 с.

О приближении одного класса максимально-нелинейных булевых функций почти аффинными функциями[1]

В.Б. Алексеев, Р.Р. Омаров

Одним из криптографических параметров булевых функций является *нелинейность*, характеризующая “удаленность” данной функции от всех аффинных (“простых”) функций. Обзор имеющихся результатов о нелинейности (с указанием имеющихся публикаций) можно найти в книге [1], где нелинейности посвящена отдельная глава.

Пусть n – любое натуральное число. Через V_n будем обозначать векторное пространство наборов длины n с компонентами из $\{0, 1\}$ с операцией $\oplus$ покоординатного сложения векторов по модулю 2.

Определение. Пусть f, g – булевы функции от n переменных, то есть $f : V_n \to \{0, 1\}$ и $g : V_n \to \{0, 1\}$. *Расстояние* $dist(f, g)$ от булевой функции f до булевой функции g определяется как число наборов, на которых значения функций f и g различаются. *Расстоянием от* f *до*

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 09-01-00701-а и 10-01-00475-а).

множества булевых функций M называется величина $dist(f, M) = \min_{g \in M} dist(f, g)$.

Определение. Пусть $x \in V_n$, $y \in V_n$. Через $\langle x, y\rangle$ будем обозначать *скалярное произведение* x и y: $\langle x, y\rangle = x_1y_1 \oplus \ldots \oplus x_ny_n$ (здесь $\oplus$ – это сложение по модулю 2).

Определение. Булева функция f от n переменных называется *аффинной*, если существуют $a = (a_1, \ldots, a_n) \in V_n$ и $c \in \{0, 1\}$ такие, что $g(x) = \langle a, x\rangle \oplus c = a_1x_1 \oplus \ldots \oplus a_nx_n \oplus c$. Множество всех аффинных булевых функций от n переменных будем обозначать A_n.

Определение. Расстояние $dist(f, A_n)$ от булевой функции $f(x)$ от n переменных до множества A_n аффинных булевых функций называется *нелинейностью* функции $f(x)$ и обозначается через N_f.

Лемма 1 [1, с. 234]. *Для любой булевой функции $f(x)$ от n переменных справедливо неравенство $N_f \leq 2^{n-1} - 2^{n/2-1}$. Для четных n эта оценка достижима.*

Определение. Булевы функции $f(x)$ от $2n$ переменных, для которых $N_f = 2^{2n-1} - 2^{n-1}$, называют *максимально-нелинейными* функциями (этот класс называют также классом *бент-функций*).

Определение. Пусть $x \in V_n$, $y \in V_n$. *Класс Мэйорана–Мак-Фарланда* определяется как множество всех булевых функций $f(x, y)$ от $2n$ переменных вида $f(x, y) = \langle\pi(y), x\rangle \oplus \Phi(y)$, где π – произвольная подстановка на множестве V_n, а $\Phi(y)$ – произвольная булева функция.

Лемма 2 [1, с. 243]. *Для любой функции f от $2n$ переменных из класса Мэйорана–Мак-Фарланда выполняется равенство $dist(f, A_{2n}) = 2^{2n-1} - 2^{n-1}$ (то есть все они максимально-нелинейные).*

В [2] мы исследовали вопрос о том, что происходит с расстоянием до класса приближающих функций, если этот класс немного расширяется.

Определение. Через AE_n будем обозначать класс всех почти аффинных булевых функций $g(x)$ от n переменных, а именно, функций вида $g(x) = \langle a, x\rangle \oplus c \oplus x_{i_1} \cdot \ldots \cdot x_{i_k}$, где $a \in V_n$, $c \in \{0, 1\}$ и $\{i_1, \ldots, i_k\}$ – произвольное подмножество (возможно, пустое) множества $\{1, \ldots, n\}$.

Оказывается, что при переходе от класса A_{2n} к классу AE_{2n} для всех функций из класса Мэйорана–Мак-Фарланда расстояние до класса уменьшается, причем по-разному (то есть в классе Мэйорана–Мак-Фарланда есть "более стойкие" и "менее стойкие" функции). А именно, в статье [2] нами доказана следующая теорема.

Теорема 1 [2]. *Для всех функций $f(x, y) = \langle\pi(y), x\rangle \oplus \Phi(y)$ из класса Мэйорана–Мак-Фарланда от $2n$ переменных при всех $n \geq 2$ выполняются неравенства:*

$$2^{2n-1} - 3 \cdot 2^{n-1} + 2 \leq dist(f, AE_{2n}) \leq 2^{2n-1} - 2 \cdot 2^{n-1},$$

и обе границы достижимы. (*При $n = 1$ $dist(f, AE_{2n}) = 0$ для всех f.*)

Легко заметить, что, в отличие от класса A_n, класс AE_n не является замкнутым относительно невырожденных аффинных преобразований. Поэтому больший интерес представляет исследование расстояния от функций класса Мэйорана–Мак-Фарланда до класса, содержащего все функции из AE_n, а таже все функции, аффинно эквивалентные им. В частности, интересно, сохраняются ли полученные для AE_n оценки?

Определение. Через $\widetilde{AE_n}$ будем обозначать класс всех функций, аффинно эквивалентных функциям из класса AE_n, а именно, функций вида $g(Ax \oplus d)$, где $g \in AE_n$, $d \in V_n$, $A = (a_{ij})$ – произвольная невырожденная матрица размера $n \times n$ над полем из двух элементов $\{0, 1\}$. Класс $\widetilde{AE_n}$ состоит из функций вида $h(x) = \langle a, x\rangle \oplus c \oplus L_1(x) \cdot \ldots \cdot L_r(x)$, где $L_1(x)$, ..., $L_r(x)$ – произвольные аффинные функции.

Так как $AE_n \subseteq \widetilde{AE_n}$, то для любой булевой функции от n переменных выполняется неравенство

$$dist(f, \widetilde{AE_n}) \leq dist(f, AE_n). \tag{1}$$

Оказывается, что переход от класса AE_{2n} к классу $\widetilde{AE_{2n}}$ не изменяет оценок, приведенных в теореме 1. А именно, верна следующая теорема.

Теорема 2. *Для всех функций* $f(x, y) = \langle \pi(y), x\rangle \oplus \Phi(y)$ *из класса Мэйорана–Мак-Фарланда от* $2n$ *переменных при всех* $n \geq 2$ *выполняются неравенства:*

$$2^{2n-1} - 3 \cdot 2^{n-1} + 2 \leq dist(f, \widetilde{AE_{2n}}) \leq 2^{2n-1} - 2 \cdot 2^{n-1},$$

и обе границы достижимы. (При $n = 1$ $dist(f, \widetilde{AE_{2n}}) = 0$ *для всех* f*).*

Так как класс $\widetilde{AE_{2n}}$ инвариантен относительно аффинных преобразований, то справедливо следующее утверждение.

Следствие. *Утверждение теоремы 2 верно и для всех функций, аффинно эквивалентных функциям из класса Мэйорана–Мак-Фарланда (все они максимально-нелинейные).*

Мы рассмотрим в данной работе только верхнюю оценку в теореме 2. То, что она выполняется, вытекает из теоремы 1 и неравенства (1). Нам остается доказать, что эта оценка неулучшаема (достижима). Это вытекает из следующей теоремы.

Теорема 3. *Для функции* $f(x, y) = \langle x, y\rangle = x_1y_1 \oplus \ldots \oplus x_ny_n$ *из класса Мэйорана–Мак-Фарланда от* $2n$ *переменных выполняется равенство:*

$$dist(\langle x, y\rangle, \widetilde{AE_{2n}}) = 2^{2n-1} - 2 \cdot 2^{n-1}.$$

Доказательство. Так как функция $\langle x, y\rangle$ входит в класс Мэйорана–Мак-Фарланда (при $\pi(y) = y$ и $\Phi(y) = 0$), то из теоремы 1 вытекает неравенство:

$$dist(\langle x, y\rangle, \widetilde{AE}_{2n}) \le 2^{2n-1} - 2 \cdot 2^{n-1}. \tag{2}$$

Докажем, что для любой функции $h(x, y) \in \widetilde{AE}_{2n}$ выполняется неравенство:

$$dist(\langle x, y\rangle, h(x, y)) \ge 2^{2n-1} - 2 \cdot 2^{n-1}. \tag{3}$$

Определение. *Весом* булевой функции $f(x_1, \ldots, x_k)$ называют число наборов длины k из 0 и 1, на которых функция f равна 1. Этот вес мы будем обозначать $wt_k(f)$.

Поскольку

$$dist(\langle x, y\rangle, h(x, y)) = wt_{2n}(\langle x, y\rangle \oplus h(x, y)),$$

то неравенство (3) будет вытекать из следующей теоремы.

Теорема 4. *Для любой функции* $f(x, y) = \langle x, y\rangle \oplus \langle a, x\rangle \oplus \langle b, y\rangle \oplus c \oplus L_1(x, y) \cdot \ldots \cdot L_r(x, y)$, *где* $x \in V_n$, $y \in V_n$, $a \in V_n$, $b \in V_n$, $c \in V_1$, L_1, ..., L_r *– аффинные функции, выполняется неравенство:*

$$wt_{2n}(f(x, y)) \ge 2^{2n-1} - 2 \cdot 2^{n-1}.$$

Доказательство. Пусть $f_1(x, y) = \langle x, y\rangle \oplus \langle a, x\rangle \oplus \langle b, y\rangle \oplus c$. Тогда

$$wt_{2n}(f_1(x, y)) = \sum_{\beta \in V_n} wt_n(f_1(x, \beta)).$$

Так как $f_1(x, \beta) = \langle a \oplus \beta, x\rangle \oplus \langle b, \beta\rangle \oplus c$, то при $\beta \ne a$ $f_1(x, \beta)$ – аффинная функция, не равная константе. Известно, что вес такой функции равен половине общего числа наборов. Следовательно, при $\beta \ne a$ $wt_n(f_1(x, \beta)) = 2^{n-1}$. При $\beta = a$ $f_1(x, a) = \langle a, b\rangle \oplus c$ и $wt_n(f_1(x, a)) = 2^{n-1} + 2^{n-1} sg(\langle a, b\rangle \oplus c)$, где $sg(1) = +1$, $sg(0) = -1$. Получаем, что

$$wt_{2n}(f_1(x, y)) = 2^{n-1} \cdot 2^n + 2^{n-1} sg(\langle a, b\rangle \oplus c) = 2^{2n-1} + 2^{n-1} sg(\langle a, b\rangle \oplus c).$$

Пусть $f_2(x, y) = L_1(x, y) \cdot \ldots \cdot L_r(x, y)$. Если $f_2(x, y) \equiv 0$, то

$$wt_{2n}(f(x, y)) = wt_{2n}(f_1(x, y)) \ge 2^{2n-1} - 2^{n-1} > 2^{2n-1} - 2 \cdot 2^{n-1}.$$

Далее считаем, что $f_2(x, y)$ не равно тождественно 0. Если $L_r(x, y) = p_1 L_1(x, y) \oplus \ldots \oplus p_{r-1} L_{r-1}(x, y) \oplus p_r$, где $p_1, \ldots, p_r \in V_1$, то, подставляя это выражение вместо $L_r(x, y)$ в $L_1(x, y) \cdot \ldots \cdot L_{r-1}(x, y) \cdot L_r(x, y)$, получим

$(p_1 \oplus \ldots \oplus p_{r-1} \oplus p_r)(L_1(x,y) \cdot \ldots \cdot L_{r-1}(x,y)) = L_1(x,y) \cdot \ldots \cdot L_{r-1}(x,y)$, (так как $f_2(x,y)$ не равно тождественно 0), то есть $L_r(x,y)$ можно вычеркнуть, не изменяя $f_2(x,y)$. Поэтому далее считаем, что никакая линейная комбинация $L_1(x,y), \ldots, L_r(x,y)$ (кроме вырожденной) не является константой. Пусть $L_i(x,y) = \langle A_i, x\rangle \oplus \langle B_i, y\rangle \oplus c_i$. Тогда получаем, что система векторов $(A_i, B_i) \in V_{2n}$, $i = \overline{1, r}$ имеет ранг r и вес $wt_{2n}(f_2(x,y))$ равен числу решений линейной системы

$$S : \begin{cases} \langle A_1, x\rangle \oplus \langle B_1, y\rangle \oplus c_1 & = 1 \\ \cdots \\ \langle A_r, x\rangle \oplus \langle B_r, y\rangle \oplus c_r & = 1. \end{cases}$$

Отсюда $wt_{2n}(f_2(x,y)) = 2^{2n-r}$. Так как $f(x,y)) = f_1(x,y) \oplus f_2(x,y)$, то

$$wt_{2n}(f(x,y)) = wt_{2n}(f_1(x,y)) + wt_{2n}(f_2(x,y)) - 2wt_{2n}(f_1(x,y) \cdot f_2(x,y)).$$

Последний вес равен числу решений системы:

$$S' : \begin{cases} \langle A_1, x\rangle & = \langle B_1, y\rangle \oplus d_1 \\ \cdots \\ \langle A_r, x\rangle & = \langle B_r, y\rangle \oplus d_r \\ \langle y, x\rangle \oplus \langle a, x\rangle & = \langle b, y\rangle \oplus c \oplus 1, \end{cases}$$

где $d_i = c_i \oplus 1$ при $i = \overline{1, r}$. Без ограничения общности будем считать, что векторы A_1, ..., A_k линейно независимы, а A_{k+1}, ..., A_r являются их линейными комбинациями. Тогда систему S' можно представить как объединение двух систем:

$$S_1 : \begin{cases} \langle A_1, x\rangle & = \langle B_1, y\rangle \oplus d_1 \\ \cdots \\ \langle A_k, x\rangle & = \langle B_k, y\rangle \oplus d_k \\ \langle y \oplus a, x\rangle & = \langle b, y\rangle \oplus c \oplus 1, \end{cases} \quad S_2 : \begin{cases} 0 & = \langle B'_{k+1}, y\rangle \oplus d'_{k+1} \\ \cdots \\ 0 & = \langle B'_r, y\rangle \oplus d'_r \end{cases}$$

причем векторы $B'_{k+1}, \ldots, B'_r$ линейно независимы. Пусть $t(S_2)$ – число решений (по y) системы S_2. Тогда $t(S_2) = 2^{n-(r-k))}$ и все решения образуют линейное многообразие $V'_n \subseteq V_n$ размерности $n-(r-k))$. Пусть $\beta \in V'_n$ и S_β – линейная система (относительно x), которая получается при подстановке β вместо y в систему S_1. Тогда $t(S) = \sum_{\beta \in V'_n} t(S_\beta)$, где $t(S)$ и $t(S_\beta)$ – число решений системы S (в $V_n \times V_n$) и S_β (в V_n). Если $\beta \oplus a$ линейно независимо от A_1, ..., A_k, то $t(S_\beta) = 2^{n-(k+1))}$. В противном случае $\beta \oplus a = \alpha_1 A_1 \oplus \ldots \oplus \alpha_k A_k$. В этом случае прибавим к последнему уравнению в S_β первое, умноженное на α_1, и второе, умноженное на α_2, и т.д. и k-ое, умноженное на α_k. Тогда последнее уравнение примет вид: $0 = C$, где $C = \langle \alpha_1 B_1 \oplus \ldots \oplus \alpha_k B_k \oplus b, \beta \rangle \oplus \alpha_1 d_1 \oplus \ldots \oplus \alpha_k d_k \oplus c \oplus 1$. При этом $t(S_\beta) = 0$ (если $C = 1$) или $t(S_\beta) = 2^{n-k}$ (если $C = 0$), то есть

$$t(S_\beta) = 2^{n-(k+1)} - 2^{n-(k+1)} sg(C).$$

Получаем, что

$$t(S) = \sum_{\beta \in V_n'} t(S_\beta) = 2^{n-(r-k)} \cdot 2^{n-(k+1)} - 2^{n-(k+1)} \cdot D,$$

где

$$D = \sum_{\beta \in V_n', \beta = a \oplus \alpha_1 A_1 \oplus \ldots \oplus \alpha_k A_k} sg(C).$$

Отсюда

$$wt_{2n}(f(x,y)) = wt_{2n}(f_1(x,y)) + wt_{2n}(f_2(x,y)) - 2wt_{2n}(f_1(x,y) \cdot f_2(x,y))$$

$$= 2^{2n-1} + 2^{n-1} sg(\langle a, b \rangle \oplus c) + 2^{n-k} \cdot D.$$

Если $\langle a, b \rangle \oplus c = 1$, то $wt_{2n}(f(x,y)) = 2^{2n-1} + 2^{n-1} + 2^{n-k} \cdot D \geq 2^{2n-1} + 2^{n-1} - 2^n = 2^{2n-1} - 2^{n-1}$. Пусть далее $\langle a, b \rangle \oplus c = 0$. Подставляя $\beta = a \oplus \alpha_1 A_1 \oplus \ldots \oplus \alpha_k A_k$ в систему S_2 вместо y, получим линейную систему относительно $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$. У нее число решений либо 2^k, либо $\leq 2^{k-1}$. Если число решений $\leq 2^{k-1}$, то в D слагаемых $\leq 2^{k-1}$ и $D \geq -2^{k-1}$. Отсюда $wt_{2n}(f(x,y)) \geq 2^{2n-1} - 2^{n-1} - 2^{n-1} = 2^{2n-1} - 2 \cdot 2^{n-1}$. В противном случае, в D суммирование идет по всем 2^k наборам $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$. Подставляя в C $\beta = a \oplus \alpha_1 A_1 \oplus \ldots \oplus \alpha_k A_k$ и раскрывая скалярное произведение, видим, что C есть булевская функция $C(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ степени ≤ 2, причем $C(0, \ldots, 0) = \langle a, b \rangle \oplus c \oplus 1 = 1$. Тогда функция $C(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ принимает значение 1 не менее чем на 2^{k-2} наборах (см.[1], стр.201). Отсюда $D \geq (+1) \cdot 2^{k-2} - 1 \cdot (2^k - 2^{k-2}) = -2^{k-1}$ и

$$wt_{2n}(f(x,y)) \geq 2^{2n-1} - 2^{n-1} + 2^{n-k} \cdot (-1) \cdot 2^{k-1} = 2^{2n-1} - 2 \cdot 2^{n-1}.$$

Теорема 4 доказана. Таким образом, доказано неравенство (3), которое вместе с неравенством (2) завершает доказательство теоремы 3.

Библиографический список

1. *Логачев, О.А.* Булевы функции в теории кодирования и криптологии [Текст] / О.А. Логачев, А.А. Сальников, В.В. Ященко. – М.: Изд-во МЦНМО, 2004.

2. *Алексеев ,В.Б.* Исследование одного параметра булевых функций, близкого к нелинейности [Текст] / В.Б. Алексеев, Р.Р. Омаров // Научные ведомости Белгородского государственного университета. – № 15(70). – Вып. 12/1. – С. 81-87.

Развитие турбулентности по Ландау в модели мультипликатор-аксельратор

А.Н. Куликов

Введение. Постановка задачи. Интересующие нас математические модели базируются на идеях Хэррода и Кейнса и изложены в монографиях [1, 2]. Пусть D – некоторый экономический регион, где ограниченная область $D \subset R^2(R^1)$, а ∂D – ее граница. Обозначим, [1, 2] через $Y = Y(t,x),\ I = I(t,x), T = T(t,x),\ (x \in D)$ соответственно национальный доход, инвестиции, и активное торговое сальдо. Скорости изменения этих величин определяются из системы дифференциальных уравнений

$$\dot{Y} = I - aY + d_1\Delta Y,\ \dot{I} = b\dot{Y} - I + F,\ T = d_2\Delta Y - T, \qquad (1)$$

которая известна в литературе, посвященной математическому моделированию макроэкономических процессов, по названию мультипликатор – акселлератор [1,2]. Здесь точка – частная производная по t, Δ – оператор Лапласа, a, b, d_1, d_2 – положительные (иногда неотрицательные) постоянные. В качестве нелинейности $F = F(Y, \dot{Y})$ выбирались различные функции (функционалы). Так в работах [1,2,3] $F(Y) = -c(\dot{Y})^3$, $c = const > 0$. В работах [4,5,6] нелинейное слагаемое (1) имеет вид $F(\dot{Y}) = -c\dot{Y}\int_D(\dot{Y})dx$, а в работе [7] – $F(Y,\dot{Y}) = -cY\dfrac{d}{dt}(\displaystyle\int_D Y^2dx)$. Экономический смысл перехода к нелинейностям второго и третьего типа состоит в том, что замедление инвестиций зависит не только от $\dot{Y}$в данной точке региона, но и от интегральных характеристик дохода во всем регионе. Последнее предположение достаточно разумно с точки зрения экономических представлений о динамике макроэкономических процессов. Для удобства анализа системы (1) исключим из нее I, T, В результате приходим к выводу, что Y – решение уравнения

$$\ddot{Y} + (a+1-b)\dot{Y} + aY - d_1\Delta\dot{Y} = (d_1+d_2)\Delta Y - F. \qquad (2)$$

Естественно, уравнение (2) при любом выборе F следует дополнить условиями на границе области D. Далее для обозначения анализа, будем считать, что $Y = Y(t,x) = Y(t,x_1,x_2)$ зависит лишь от одной пространственной переменной x_1, а индекс “1” далее будем опускать.

Итак, рассмотрим три следующие краевые задачи, которые ниже в перенормированном виде можно записать в следующем виде

$$u_{tt} - \varepsilon u_t - \varepsilon\nu u_{xxt} - \sigma^2\Delta u + u = -\varepsilon(u_t)^3, \tag{3}$$

$$u_{tt} - \varepsilon u_t - \varepsilon\nu u_{xxt} - \sigma^2\Delta u + u = -\varepsilon(u_t)\int\limits_0^\pi (u_t)^2 dx, \tag{4}$$

$$u_{tt} - \varepsilon u_t - \varepsilon\nu u_{xxt} - \sigma^2\Delta u + u = -\varepsilon u\frac{d}{dt}\int\limits_0^\pi u^2 dx. \tag{5}$$

Во всех случаях будем считать, что $x \in [0,\pi]$ и рассматривать эти три уравнения с одинаковыми краевыми условиями

$$u(t,0) = u(t,\pi) = 0. \tag{6}$$

Для перенормировки следует положить

$$t = \alpha t_1,\ x = \beta x_1,\ Y = \varepsilon^{\frac{1}{2}}\gamma u$$

и опустить индекс “1” у переменных t_1, x_1. В случае уравнений (3), (4)

$$\alpha = a^{-1/2},\ \varepsilon = (a+1-b)a^{-1/2},\ \sigma^2 = (d_1+d_2)(a\beta^2)^{-1},$$

$$\varepsilon\nu = d_1(a^{1/2}\beta^2)^{-1},\ \gamma^2 = (c\beta)^{-1}a^{-1/2}.$$

Для получения уравнения (5) последнюю постоянную выберем иначе: $\gamma^2 = (c\beta)^{-1}a^{1/2}$. Постоянная β выбирается из тех соображений, чтобы $x_1 \in [0,\pi]$, если $x \in [0,l]$. Малость коэффициента при u_{xxt} обеспечивается предположением о том, что $d_1 \ll 1$. Во многих работах полагают $d_1 = 0$ (см. обсуждение этого вопроса в [1, 2]).

Краевая задача (3),(6) была рассмотрена в работе [3], а краевая задача (4), (6) – в работах [5,6]. Изучению краевой задачи (5), (6) посвящена работа [7]. Здесь более детально остановимся на рассмотрении нелинейной краевой задачи (5), (6). Изучению всех трех краевых задач базируется на сочетании метода нормальных форм с асимптотическим методом Крылова-Боголюбова – метода квазинормальных форм [8, 9].

1. Квазинормальная форма. Краевую задача (5), (6) при $\varepsilon = 0$ имеет счетное семейство решений

$$E_n(t,x) = \exp(i\sigma_n t)e_n(x),\ \overline{E_n}(t,x) = \exp(-i\sigma_n t)e_n(x),$$

где $\sigma_n = \sqrt{\sigma^2 n^2 + 1}$, $n = 1, 2, \dots$, $e_n(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \sin nx$. Семейство функций $\{e_n(x)\}$ образуют полную ортонормированную систему в $L_2(0, \pi)$. При $\varepsilon \neq 0$ решения краевой задачи (5), (6) будем искать, следуя бесконечномерному аналогу метода Крылова – Боголюбова, в следующем виде

$$u(t, s, x, \varepsilon) = u_0(t, s, x) + \varepsilon u_1(t, s, x) + o(\varepsilon), \tag{7}$$

где $s = \varepsilon t$ – "медленное" время, функции $u_0(t, s, x), u_1(t, x, s)$ удовлетворяют краевым условиям (6) и принадлежат при всех рассматриваемых ε фазовому пространству (пространству начальных условий) решений данной краевой задачи. В нашем случае в качестве фазового пространства естественно выбрать

$$H = \overset{\circ}{W}{}_2^2 \times \overset{\circ}{W}{}_2^1, \ W_2^p = W_2^p[0, \pi],$$

а $\overset{\circ}{W}{}_2^2$ $(\overset{\circ}{W}{}_2^1)$ – подпространство, соболевского пространства W_2^2 (W_2^1), состоящее из функций, удовлетворяющих краевым условиям (6).

Подставляя (7) в уравнение (5), для u_0, u_1 получаем краевые задачи следующего вида

$$u_{0tt} - \sigma^2 u_{0xx} + u_0 = 0, \ u_0(t, s, 0) = u_0(t, s, \pi) = 0, \tag{8}$$

$$u_{1tt} - \sigma^2 u_{1xx} + u_1 = F(t, x, s), \ u_1(t, s, 0) = u_1(t, s, \pi) = 0, \tag{9}$$

Здесь

$$F(t, s, x) = -2\frac{\partial^2 u_0}{\partial t \partial s} + \nu \frac{\partial u_0}{\partial t} - u_0 \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_0^\pi (u_0)^2 dx,$$

$$u_0 = u_0(t, s, x) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t, s) e_n(x), \ v_n = v_n(t, s) =$$
$$= z_n(s) \exp(i\sigma_n t) + \overline{z_n}(s) \exp(-i\sigma_n t).$$

Пусть

$$u_1(t, s, x) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t, s) e_n(x), \ F(t, s, x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t, s) e_n(x).$$

Тогда $F_n(t, s) = -2\dfrac{\partial^2 v_n}{\partial t \partial s} + \nu \dfrac{\partial v_n}{\partial t} - \nu n^2 \dfrac{\partial v_n}{\partial t} - v_n V$, $V = \dfrac{\partial}{\partial t} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} v_n^2$, а функции $w_n = w_n(t, s)$ – решения счетного семейства обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\ddot{w}_n + \sigma_n^2 w_n = F_n, \ n = 1, 2, \dots. \tag{10}$$

Здесь точкой обозначаем частную производную по t, далее штрихом будем обозначать производную по вспомогательной переменной s.

Из условий разрешимости уравнения с номером n системы дифференциальных уравнений (10) в классе квазипериодических функций переменного t

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_{-T}^{T}F_n(t,s)\exp(\pm i\sigma_n t)dt=0$$

получаем систему уравнений для определения $z_n=z_n(s),\ n\in N:$

$$z_n'=\frac{1}{2}z_n[(1-\nu n^2)-|z_n|^2], \tag{11}$$

которую принято называть квазинормальной формой [6]. Особенность данного случая состоит в том, что каждое из уравнений системы (11) не зависит от остальных, что связано со спецификой выбора нелинейности в уравнении (5). Система дифференциальных уравнений (11) имеет нулевое состояние равновесия. Это состояние равновесия асимптотически устойчиво, если ν таково, что при всех натуральных n выполнены неравенства $1-\nu n^2<0$ $(\nu>1)$. При $\nu<1$ оно неустойчиво.

2. Ненулевые состояния равновесия квазинормальной формы. Для их нахождения сделаем замену

$$z_n(s)=\rho_n(s)\exp(i\varphi(s)),\ \rho_n(s)\geq 0.$$

После этого система (11) перепишется в следующем виде

$$\rho_n'=\frac{1}{2}\rho_n[1-\nu n^2-\rho_n^2],\ \varphi_n'=0,\ n\in N. \tag{12}$$

Следовательно, $\varphi(s)=\beta_n\in R$. Каждое из уравнений системы (12) для определения $\rho_n(s)$ имеет состояние равновесия $\rho_n=0$ или $\rho_n=(1-\nu n^2)^{1/2}$, если конечно $1-\nu n^2>0$.

Положим $\rho_n(s)=a_n^{1/2}(s),\ a_n(s)\geq 0$. Для $a_n(s)$ получим замкнутую подсистему

$$a_n'=a_n[1-\nu n^2-a_n]. \tag{13}$$

Каждое уравнение системы (13) может быть рассмотрено отдельно. В частности, уравнение с номером $k\in N$ имеет асимптотически устойчивое ненулевое состояние равновесия $a_k(s)=\nu_k=1-\nu k^2$, если $1-\nu k^2>0$. Введем в рассмотрение систему полуинтервалов $I_p:\ \nu\in I_p$, если выполнены неравенства $(p+1)^{-2}\leq\nu<p^{-2}$. При данных ν систему дифференциальных уравнений (13) можно разделить на две подсистемы

$$a_k'=(1-\nu k^2)a_k-a_k^2,\ k=1,2,\ldots,p, \tag{14}$$

$$a'_m = (1 - \nu m^2)a_m - a_m^2, \ m = p+1, p+2, \dots, . \qquad (15)$$

Лемма 1. $\lim\limits_{s\to\infty} a_m(s) = 0$, *если* $m = p+1, p+2, \dots$.

Действительно, при данных m выполнено неравенство $1 - \nu m^2 \le 0$. Следовательно $a'_m < 0$ при $a_m \ne 0$.

Лемма 2. *Каждое из уравнений системы (14), кроме нулевого неустойчивого состояния равновесия имеет ненулевое состояние равновесия* $\nu_k = 1 - \nu k^2$, *если* $1 - \nu k^2 > 0$. *Более того справедливо предельное равенство* $\lim\limits_{s\to\infty} a_k(s) = \nu_k$.

Обозначим через S_l состояния равновесия системы (14), имеющие l ненулевых координат. Так S_0 – нулевое состояние равновесия, S_1 состояние равновесия имеющее одну ненулевую координату. Наконец S_p – состояние равновесия, все координаты которого отличны от 0. Состояния равновесия всей системы (14), (15) будем также обозначать $S_l = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p, \alpha_{p+1}, \dots)$. Здесь $\alpha_j = \nu_j$ или $\alpha_j = 0$, если $j = 1, \dots, p$, а $\alpha_m = 0$, если $m = p+1, p+2, \dots$.

Лемма 3.*Состояния равновесия* S_p *асимптотически устойчиво. Все остальные состояния равновесия неустойчивы (седловые).*

Доказательство леммы 3 – элементарное следствие предыдущих лемм.

При уменьшении ν ситуация несколько меняется. Если $\nu \in I_{p+1}$, то асимптотически устойчивым становится состояние равновесия S_{p+1}, а остальные и в том числе S_p – неустойчивы.

Возвратимся теперь к рассмотрению системы дифференциальных уравнений (11) при $\nu \in I_p$. Состоянию равновесия системы (14), (15) S_l $(l = 1, \dots, p)$ соответствует инвариантный тор $T'_l : z_k = \sqrt{\alpha_k}\exp(i\varphi_k)$, $k = 1, 2, \dots$. Здесь α_k – соответствующая координата состояния равновесия $\varphi_k \in R$. Этот тор имеет размерность l, так как $\alpha_m = 0$, если $m = p+1, p+2, \dots$.

Теорема 1.*Существует* $\varepsilon_0 > 0$ *что при* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ *и* $\nu \in I_p$ *краевая задача (5), (6) имеет инвариантный тор* $T_l(\varepsilon)$ *размерности* l, *который соответствует состоянию равновесия* S_l *системы (14), (15) (тору* T'_l *системы (11)).*

Тор $T_l(\varepsilon)$ *асимптотически устойчив, если состояния равновесия* S_l *асимптотически устойчиво и он неустойчив, если* S_l *– неустойчиво.*

Решения на инвариантном торе $T_p(\varepsilon)$ *задаются асимптотической формулой*

$$u(t, x, \varepsilon) = \sum_{j=1}^{p} 2\sqrt{\nu_j}\cos(\sigma_j t + \varphi_j)e_j + O(\varepsilon). \qquad (16)$$

На торах меньшей размерности решения могут быть заданы формулой аналогичной формуле (16).

Доказательство теоремы базируется на результатах изложенных в учебном пособии [8] (см. также ссылки из этого пособия). Отметим, что из теоремы вытекает, что для краевой задачи (5), (6) реализуется известный сценарий Ландау перехода к турбулентности. Пусть сначала $\nu \in I_p$. При уменьшении значений ν до таких, что $\nu \in I_{p+1}$ тор $T_p(\varepsilon)$ теряет устойчивость, но рождается новый устойчивый тор $T_{p+1}(\varepsilon)$. Дальнейшее уменьшение ν приводит к рождению тора размерности $p+2$ и так далее. Можно указать такое ν, что устойчивым окажется тор сколь угодно большой размерности. В ситуации обшего положения такой тор $T_p(\varepsilon)$ будет нерезонасным [8]. Последнее означает, что собственные частоты σ_j несоизмеримы. Стандартный подсчет показывает, что норма решений (16) с увеличеним p растет. Речь здесь конечно идет о норме в $H = \overset{\circ}{W}{}_2^2 \times \overset{\circ}{W}{}_2^1$. Действительно,

$$||u||^2_{W_2^1} = 4\sum_{j=1}^{p} n^2 \nu_j \cos^2(\sigma_j t + \varphi_j) \to \infty$$

в ситуации общего положения, т.е. даже в норме пространства W_2^1 норма решения возрастает. Возрастает норма решения и в пространстве W_2^2 и, следовательно, в пространстве $C^1 = C^1[0,\pi]$. Переходя на язык физики последние замечания означают, что имеет место "градиентная катастрофа".

3. Нормальные формы для других краевых задач. Исследование аттракторов краевых задач (3), (6) и (4), (6) также базируется на анализе соответствующей нормальной формы. Так, например, при рассмотрении краевой задачи (4), (6) в [5] было показано, что нормальная (квазинормальная) форма в данном случае имеет следующий вид

$$z'_n = [1 - \nu n^2 - (3|z_n|^2 + 2\sum_{k=1, k\neq n}^{\infty} |z_k|^2)]z_n,$$

где, как и ранее, $z_n = z_n(s),\ s = \varepsilon t,\ n \in N$.

Анализ этой бесконечной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с последующим их приложением к исследованию краевой задачи (4), (5) показал, что и в данном случае с уменьшением ν реализуется сценарий Ландау перехода к турбулентности [5].

Иная ситуация имеет место, если обратиться к рассмотрению краевой задачи (3), (6). Нормальная форма для краевой задачи (3), (6) была получена в работе [3] и после перенормировок может быть записана в следующем виде

$$z'_n = [1 - \nu n^2 - 3|z_n|^2 - 4 \sum_{k=1,k\neq n}^{\infty} |z_k|^2] z_n, \ n \in N.$$

Эта система дифференциальных уравнений была достаточно подробно проанализирована в работе [3] при $\nu = 0$. Оказалось, что в данной ситуации лишь состояния равновесия S_1 с одной ненулевой компонентой асимптотически устойчивы, а остальные с необходимостью неустойчивы. Состояниям равновесия соответствуют циклы краевой задачи (3), (6), а остальным неустойчивым состояниям равновесиям – неустойчивые торы. Последнее замечание означает, что для краевой задачи (3), (6) при $\nu = 0$ аттракторами могут быть лишь циклы.

Уместно здесь отметить, что при $\nu = 0$ при рассмотрении краевой задачи (5), (6) приходим к следующей нормальной форме

$$a'_n = a_n(1 - a_n), \tag{17}$$

которую можно интерпретировать как частный случай системы дифференциальных уравнений (12). Если ограничиться сначала лишь формальным изучением данной системы, то она имеет нулевое состояние равновесия S_0, которое неустойчиво, а также состояния равновесия $S_m = \{\nu_j\}, j = 1, 2, \dots$, где лишь конечное число компонент отлично от 0 и, наконец, S_∞, где уже бесконечное число компонент отлично от 0. Так, например, $S_* = (1, 1, \dots, 1, \dots)$. Ясно, что последнему состоянию равновесия не соответствует какое – либо решение в классическом его понимании, так как ряд при определении уже первого слагаемого суммы (7) будет расходиться. Действительно, в данном случае этот ряд приобретает следующий вид

$$u_0(t, s, x) = u_0(t, x) = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} \cos(\sigma_k t + \varphi_k) \sin kx.$$

Аналогичное замечание справедливо и для остальных состояний равновесия S_∞. Если ограничиться рассмотрением совокупности состояний равновесия S_m, т.е. тех которые имеют лишь конечное число ненулевых компонент, то справедливо утверждение.

Теорема 2. *Существует такое $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(m) > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ состоянию равновесия S_m соответствует седловой инвариантный тор $T_m(\varepsilon)$ размерности m.*

Теорема 2 может быть доказана с использованием методики изложенной в учебном пособии [7]. Вместе с тем необходимо подчеркнуть, что при $\nu = 0$ решения краевой задачи (3), (6) в фазовом пространстве порождает группу нелинейных эволюционных операторов (а не полугруппу как в случае $\nu \neq 0$). При доказательстве теоремы 2 это свойство решений играет принципиальную роль.

Библиографический список

1. *Пу, Т.* Нелинейная экономическая динамика [Текст] / Т. Пу. – Ижевск: Из-во “Удмуртский университет”, 2000. – 200 с.
2. *Занг, В.Б.* Синергетическая экономика. Время и перемены в нелинейной экономической теории [Текст] / В.Б. Занг. – М.: Мир, 1999. – 335 с.
3. *Косарева, Е.С.* Об одной нелинейной краевой задаче, моделирующей экономические циклы [Текст] / Е.С. Косарева, А.Н. Куликов // Моделирование и анализ информационных систем. – 2003. – Т. 10. – № 2. – С. 18-21.
4. *Коршунова, Е.В.* Пространственно неоднородные торы в модели мультипликатор – аксельратор [Текст] / Е.В. Коршунова, А.Н. Куликов // Моделирование и анализ информационных систем. – 2008. – Т. 15. – № 1. – С. 45-50.
5. *Колесов, А.Ю.* Развитие турбулентности по Ландау в модели мультипликатор – аксельратор [Текст] / А.Ю. Колесов, А.Н. Куликов, Н.Х. Розов // Доклады РАН. – 2008. – Т. 420. – № 6. – С. 739-743.
6. *Колесов, А.Ю.* Математические аспекты теории развития турбулентности по Ландау [Текст] / А.Ю. Колесов, Н.Х. Розов, В.А. Садовничий // УМН. – 2008. – Т. 63. – Вып. 2. – С. 21-84.
7. *Колесов, А.Ю.* Инвариантные торы нелинейных эволюционных уравнений: учеб. пособие [Текст] / А.Ю. Колесов, А.Н. Куликов. – Ярославль, 2003. – 107 с.
8. *Брур, Х.В.* Структуры в динамике. Конечно-мерные детерминированные системы [Текст] / Х.В. Брур, Ф. Дюмортье, С. ван Стрин, Ф. Такенс. – Москва-Ижевск. – Ин-т. компьютерных исследований, 2003. – 336 с.

Бифуркации плоских бегущих волн слабодиссипативного варианта уравнения Гинзбурга-Ландау

А.Н. Куликов, Д.А. Куликов

Для уравнения, название которого приведено в заглавии, рассмотрена периодическая краевая задача в случае n независимых пространственных переменных. У данной краевой задачи существует счетное семейство периодических по временной переменной плоских бегущих волн.

Исследована устойчивость и их локальные бифуркации при смене устойчивости. Показано, что от каждой из них могут бифурцировать инвариантные торы размерности $2, \ldots, n+1$. Приведены асимптотические формулы для решений на инвариантных торах, а также условия устойчивости бифурцирующих торов. Показано, что, начиная с $n = 3$, возможна докритическая (жесткая) бифуркация инвариантных торов.

Введение. Уравнение

$$iu_t = d\Delta u + cu|u|^2 \tag{1}$$

часто называют кубическим (нелинейным) уравнением Шредингера. Здесь $u = u(t, x)$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $d, c, \in \mathbb{R}$, а $\Delta u = \sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}$ – оператор Лапласа. Обычно $d > 0$, а знак постоянной c произволен. Данное уравнение возникает во многих задачах нелинейной оптики и гидродинамики [1 – 3]. В случаях, когда необходимо учитывать диссипативные процессы это уравнение нуждается в обобщении. Простейшим таким обобщением служит уравнение

$$u_t = u - (1 + ic)u|u|^2 - id\Delta u. \tag{2}$$

Это уравнение можно интерпретировать как частный случай известного уравнения Гинзбурга – Ландау (Курамото - Цузуки) $u_t = u - (1 + ic)u|u|^2 + (d_1 - id)\Delta u$, в котором отсутствует диффузионный член ($d_1 = 0$). Такая ситуация характерна для лазерных резонаторов и других нелинейных оптических пространственных сред, поскольку световые лучи обладают поперечной дифракцией, но не диффузией. Уравнение (2) встречается в теории гидродинамической устойчивости [4], где служит одним из обобщений классического уравнения Ландау и используется при изучении слабонелинейных эффектов. Уравнение (2), как и во многих работах, имеющих физические приложения [5,6], будем рассматривать вместе с периодическими краевыми условиями

$$u(t, x + 2\pi e_j) = u(t, x), \tag{3}$$

где $j = 1, \ldots, n, e_j = (e_{j1}, \ldots, e_{jn})$, $e_{js} = \delta_{js}$ – символ Кронекера ($\delta_{js} = 0, j \neq s, \delta_{jj} = 1$). Более того, именно в работе [5] рассмотрен вариант, когда $x \in \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Краевая задача (2), (3) имеет счетное семейство периодических решений

$$u_k(t, x) = \exp(i\sigma_k t + i(k, x)) \tag{4}$$

где $k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n,\ x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ \sigma_n = -c + d(k,k)$, а через $(\cdot,\cdot)$ обозначается скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$. Особую роль играет периодическое решение (4), если вектор $k = 0$ $(k_j = 0)$. Пространственно однородное решение $u_0(t) = \exp(-ict)$ называют часто термодинамической ветвью, а иногда циклом Андронова – Хопфа (ЦАХ).

В работе предполагается изучить устойчивость решений (4), а также рассмотреть их локальные бифуркации при смене ими устойчивости. Устойчивость будем понимать в смысле нормы фазового пространства решений (пространства начальных условий) краевой задачи (2), (3). В качестве такового можно выбрать $\mathbb{H}_2^l$, если $l > n/2$. Здесь функция $f(x) \in \mathbb{H}_2^l$, имеет период 2π по каждой из переменной, а также $f(x) \in \mathbb{W}_2^l(D),\ D = \{x \in \mathbb{R}^n, -\pi < x_j < \pi, j = 1, \dots, n\}$. Через $\mathbb{W}_2^l(D)$ – обозначается пространство Соболева [7]. Если $u(0,x) = f(x) \in \mathbb{H}_2^l$, то задача Коши локально разрешима [8,9].

1. Условия устойчивости бегущих волн. Изучение этого вопроса, а также их локальных бифуркаций облегчает принцип самоподобия [10], суть которого заключается в следующем. В уравнении (2) выполним замену

$$u(t,x) = v(t, x + 2dtk)\exp(id(k,k)t + i(x,k)), \tag{5}$$

где $k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n, x \in \mathbb{R}^n$. Замена (5) переводит уравнение (2) в то же самое уравнение для $v(t,x)$. Поэтому для функции $v(t,x)$, удовлетворяющей краевой задаче

$$v_t = v - (1 + ic)v|v|^2 - id\Delta v, \tag{6}$$

$$v(t, x + 2\pi e_j) = v(t,x) \tag{7}$$

достаточно рассмотреть вопрос о структуре окрестности однородного периодического решения (ЦАХ) $v_0(t) = \exp(-ict)$.

Положим

$$v(t,x) = \exp(-ict)(1 + w(t,x)). \tag{8}$$

Функция $w(t,x)$ безусловно удовлетворяет условиям периодичности (7). Для $w(t,x)$ получаем следующее дифференциальное уравнение

$$w_t = Aw - (1 + ic)(2w\overline{w} + w^2 + w^2\overline{w}). \tag{9}$$

Здесь $Aw = -(1 + ic)(w + \overline{w}) - id\Delta w$. Для исследования устойчивости нулевого решения краевой задачи (9), (7) в линейном приближении следует изучить спектр дифференциального оператора A. Пусть

$Af = \lambda f$, где $f(x)$ – комплекснозначная периодическая функция. Положим $f_1 = Ref, f_2 = Imf$, что позволяет для определения собственных значений сформулировать краевую задачу в $\mathbb{R}^2$:

$$AF = \lambda F,\ F = F(x) = colon(f_1(x), f_2(x)),$$

$$AF = colon(-2f_1 + d\Delta f_2, -2cf_1 - d\Delta f_1).$$

Компоненты вектор – функции $F(x)$ имеют период 2π по каждой из переменных $x_j (j = 1, \dots, n)$. Собственные функции A следует искать в следующем виде $F_k(x) = a\exp(i(k, x))$, где $k = (k_1, \dots, k_n), a = colon(a_1, a_2)$. Учитывая, что $\Delta F_k(x) = -(k, k)F_k(x)$, после элементарных преобразований задача сводится к нахождению собственных значений счетного семейства матриц

$$A_k = \begin{pmatrix} -2 & -d(k,k) \\ d(k,k) - 2c & 0 \end{pmatrix}.$$

Соответствующее характеристическое уравнение имеет вид $\lambda^2 + 2\lambda + q_k = 0$, где $q_k = d(k, k)(d(k, k) - 2c)$. Обозначим через $\lambda_{kj} (j = 1, 2)$ собственные значения матрицы A_k. Ясно, что $\lambda_{01} = 0,\ \lambda_{02} = -2$ при всех рассматриваемых значениях c и d. Равенство одного из этих собственных чисел является следствием того, что линеаризация производилась на цикле $v_0(t) = \exp(-ict)$ краевой задачи (6), (7). Пусть теперь вектор $k \neq 0$. Если при таких k справедливо неравенство $q_k > 0$, то $Re\lambda_{kj} < 0$ и нулевое решение краевой задачи (6), (7) устойчиво и, следовательно, устойчив ЦАХ (орбитально асимптотически устойчив). Если существует такой $k_* \neq 0$, что $q_{k_*} < 0$, то этот цикл неустойчив. Критический случай в задаче об устойчивости ЦАХ выделяется следующими условиями: $q_{k_*} = 0$ при некоторых $k_* \in \mathbb{Z}^n$, а при остальных k справедливо неравенство $q_k > 0$. Отсюда немедленно вытекает справедливость утверждения.

Лемма 1. *Критический случай в задаче об устойчивости ЦАХ реализуется при $d = 2c$.*

Действительно $\min\limits_{k \neq 0}(d(k, k) - 2c) = d - 2c,\ k \in \mathbb{Z}^n$.

Возвратимся к комплексному варианту записи оператора A. Итак, пусть $Af = -(1 + ic)(f + \overline{f}) - id\Delta f$.

Лемма 2. *При $d = 2c$ оператор A имеет нулевое собственное число кратности $2n + 1$, которому отвечают собственные функции*

$$e_0(x) = i,\ e_j(x) = (-c + i)\cos x_j,\ h_j(x) = (-c + i)\sin x_j,\ j = 1, 2, \dots, n.$$

Рассмотрим теперь тот же оператор A, но определенный на достаточно гладких функциях, удовлетворяющих однородным условиям Неймана

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}\bigg|_{x_j=0} = \frac{\partial f}{\partial x_j}\bigg|_{x_j=\pi} = 0. \tag{10}$$

В этом случае он будет иметь нулевое собственное значение кратности $n+1$. В этом случае собственными функциями останутся $e_0(x), e_j(x), j = 1,\dots,n$. В обоих случаях, остальные собственные значения оператора A лежат в полуплоскости комплексной плоскости, выделяемой неравенством $Re\lambda \le -\gamma_0 < 0$. Стандартный анализ характеристических уравнений для матриц A_k позволяет вычислить величину $\gamma_0 : \gamma_0 = 1-\sqrt{1-8c^2}$, если $c \in (0;\sqrt{2}/4]$ и $\gamma_0 = 1$ при $c \ge \sqrt{2}/4$.

Введем в рассмотрение линейное неоднородное уравнение

$$Af(x) = g(x), \tag{11}$$

где $f(x)$ удовлетворяет краевым условиям (10), $g(x) = g_k \prod\limits_{s=1}^{n} \cos k_s x_s$, g_k- комплексная постоянная. Будем различать три случая: 1) $k = 0$; 2) $(k,k) = 1$; 3) $(k,k) \ge 2$.

Лемма 3.*В первом случае краевая задача (11),(10) разрешима, если* $Img_0 = cReg_0$, *во - втором – при выполнении равенства* $Img_{k_*} = 0$, $(k_*,k_*) = 1$. *Наконец, в третьем случае данная краевая задача разрешима при всех* $g_k \in C$.

2. Нормальная форма вспомогательной краевой задачи. Прежде чем изучать бифуркации ЦАХ краевой задачи (6),(7) рассмотрим вспомогательную краевую задачу при $d = 2c - \varepsilon$ $(|\varepsilon| < \varepsilon_0)$:

$$v_t = v - (1+ic)v|v|^2 - i(2c-\varepsilon)\Delta v, \tag{12}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x_j}|_{x_j=0} = \frac{\partial v}{\partial x_j}|_{x_j=\pi} = 0,\ j = 1,\dots,n. \tag{13}$$

Здесь $x = (x_1,\dots,x_n) \in D_1 = \{x \in \mathbb{R}^n, x_j \in [0,\pi]\}$. Краевая задача (12), (13) также имеет пространственно однородный цикл $v_0(t,x) = \exp(-ict)$, который устойчив при $\varepsilon < 0$ и теряет устойчивость при $\varepsilon > 0$. Введем в рассмотрение линейный дифференциальный оператор $A(\varepsilon)f = Af + i\varepsilon\Delta f,\ f = f(x)$. При всех ε у него есть собственное число $\lambda_0(\varepsilon) = i$, которому отвечает собственная функция $e_0(x) = i$. Кроме того у $A(\varepsilon)$ есть собственное число $\lambda_1(\varepsilon) = c\varepsilon + o(\varepsilon)$ кратности n. Соответствующие собственные функции $e_j(x,\varepsilon) = (-c+i)\cos x_j + 0.5\varepsilon(1+c^2)\cos x_j + o(\varepsilon),\ j = 1,\dots,n$. Остальные собственные значения оператора $A(\varepsilon)$ лежат в полуплоскости $Re\lambda \le -\gamma_0/2 < 0$, если $\varepsilon \in (-\varepsilon_0,\varepsilon_0)$, а положительная постоянная ε_0 достаточно мала. Оператор $A(\varepsilon)$ в $\mathbb{L}_2(D_1)$ порождает полугруппу класса (C_0) [11]. Положим $v(t,x) = \exp(-ict + i\varphi)(1 + w(t,x))$.

В окрестности нулевого решения, вновь полученной краевой задачи для $w(t,x)$, существует локально инвариантное центральное многообразие $M_{n+1}(\varepsilon)$ размерности $n+1$. Все решения из достаточно малого шара, не принадлежащие $M_{n+1}(\varepsilon)$, с течением времени с экспоненциальной скоростью приближаются к нему. Решения на нем описываются системой из $n+1$ обыкновенного дифференциального уравнения - нормальной формы.

Будем считать, что

$$w(t,x) = w(\eta,x),\ \eta = \eta(t) = (\eta_1(t),\dots,\eta_n(t)),\ \varphi = \varphi(t),$$

где действительные функции $\eta_j(t), \varphi(t)$ - решения системы дифференциальных уравнений

$$\dot{\varphi} = G(\eta,\varphi,\varepsilon),\ \dot{\eta}_j = G_j(\eta,\varphi,\varepsilon),\ j = 1,\dots,n. \tag{14}$$

Здесь $G(\eta,\varphi,\varepsilon), G_j(\eta,\varphi,\varepsilon)$ – достаточно гладкие по совокупности переменных функции, если $\varphi \in \mathbb{R}$, $||\eta||_{\mathbb{R}^n} \leq \eta_0$, $\eta_0 = const > 0$, $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$. По переменной φ они имеют период 2π. Функция $w(t,x)$ удовлетворяет уравнению

$$w_t + i\dot{\varphi}(1+w) = A(\varepsilon)w - (1+ic)(2w\overline{w} + w^2 + w^2\overline{w}). \tag{15}$$

С учетом системы (14) уравнение (15) можно переписать в следующей форме

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial w}{\partial \eta_j} G_j + iG(1+w) = A(\varepsilon)w - (1+ic)(2w\overline{w} + w^2 + w^2\overline{w}). \tag{16}$$

В свою очередь, решения уравнения (16) будем искать в виде суммы

$$w(\eta,x) = w_1(\eta,x) + w_2(\eta,x) + w_3(\eta,x) + \varepsilon w_0(\eta,x) + \psi(\eta,x,\varepsilon), \tag{17}$$

где $w_1(\eta,x), w_0(\eta,x)$ – линейные формы относительно η :

$$w_1(\eta,x) = \sum_{j=1}^{n} w_{1j}(x)\eta_j,\ w_0(\eta,x) = \sum_{j=1}^{n} w_{0j}(x)\eta_j,$$

функции $w_2(\eta,x), w_3(\eta,x)$ – квадратичная и кубическая формы соответственно относительно $\eta = (\eta_1,\dots,\eta_n)$. Наконец, через $\psi(\eta,x,\varepsilon)$ обозначена функция, имеющая более высокий порядок малости по совокупности переменных $\varepsilon, \eta_1,\dots,\eta_n$, т.е. для этой функции справедлива оценка

$||\psi||_{\mathbb{H}_2^l} \leq M\{\varepsilon^2||\eta||_{\mathbb{R}^n} + \varepsilon||\eta||^2_{\mathbb{R}^n} + ||\eta||^4_{\mathbb{R}^n}\}$ с некоторой универсальной положительной постоянной $M = M(r)$.

Пусть $G(\eta,\varphi,0) = G_0(\eta) + \ldots,\ G_j(\eta,\varphi,0) = \eta_j G_{j0}(\eta) + \ldots$, где точками обозначены слагаемые более высокого порядка малости. Положим

$$G_0(\eta) = \sum_{s=1}^{n} \beta_s \eta_s^2,\ G_{j0}(\eta) = \sum_{s=1}^{n} g_{js}\eta_s^2,\ j = 1,\ldots,n.$$

В силу симметрии задачи справедливы равенства $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_n = \beta,\ g_{11} = \ldots = g_{nn} = -b,\ g_{js} = -a$ для любых j,s, если $j \neq s$. Для определения коэффициентов нормальной формы, выпишем краевые задачи для определения функций $w_1(\eta,x), w_2(\eta,x), w_3(\eta,x), w_0(\eta,x)$. Подставим сумму (17) в уравнение (16). Так для определения w_1 получим следующую краевую задачу:

$$Aw_1 = 0, \quad \left.\frac{\partial w_1}{\partial x_j}\right|_{x_j=0} = \left.\frac{\partial w_1}{\partial x_j}\right|_{x_j=\pi} = 0,\ j = 1,\ldots,n.$$

Откуда $w_1 = w_1(\eta,x) = (-c+i)\sum_{j=1}^{n}\eta_j\cos x_j$. Для функций, w_0, w_2, w_3 получим уже неоднородные уравнения

$$Aw_2 = i\beta(\eta,\eta) + (1+ic)(2w_1\overline{w}_1 + w_1^2),$$

$$Aw_3 = i\beta(\eta,\eta)w_1 + (1+ic)(2w_1\overline{w}_2 + 2\overline{w}_1 w_2 + 2w_1w_2 + w_1^2\overline{w}_1) + \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial w_j}{\partial x_j}G_{j0}(\eta)\eta_j,$$

$$Aw_0 = \alpha w_1 - i\Delta w_1,$$

где w_2, w_3, w_0 удовлетворяют однородным краевым условиям Неймана. Из условий разрешимости кравых задач для $w_2(t,x), w_3(t,x), w_0(t,x)$ находим, что

$$\alpha = c,\ \beta = c(c^2+1),\ a = 4c^2(1-c^2),\ b = (30c^4 - 9c^2 + 1)/6.$$

Явный вид функций $w_3(t,x), w_0(t,x)$ не понадобится, а $w_2(t,x)$ можно и следует выбрать в следующем виде

$$w_2(\eta,x) = -\frac{1}{4}(1+ic)(1+5c^2)(\eta,\eta) + (\frac{3c^2-1}{12} - i\frac{9c^2+1}{24c})\sum_{j=1}^{n}\eta_j^2\cos 2x_j +$$

$$+(3c^2 - 1 - 4ci)\sum_{j=1,s=1,j\neq s}^{n}\eta_j\eta_s\cos x_j\cos x_s.$$

Итак, нормальная форма приобретает вид

$$\dot{\varphi} = \beta(\eta, \eta), \ \dot{\eta}_j = \eta_j[\varepsilon c - b\eta_j^2 - a \sum_{s=1, s\neq j}^{n} \eta_s^2]. \tag{18}$$

Правые части выписаны с точностью до слагаемых, допускающих оценку $M\{\varepsilon||\eta||^2_{\mathbb{R}^n} + \varepsilon^2||\eta||_{\mathbb{R}^n} + ||\eta||^4_{\mathbb{R}^n}\}$. Систему (18) иногда называют "укороченной"нормальной формой или квазинормальной формой.

3. Анализ нормальной формы. Пусть $\varepsilon \neq 0$. Положим $\eta_j = |\varepsilon|^{1/2}c^{1/2}\rho_j^{1/2}$, считая, что $\eta_j \geq 0$. После замены времени $\tau = 2c|\varepsilon|t$ система дифференциальных уравнений (18) преобразуется в следующую

$$\varphi' = \frac{\beta}{2}\sum_{j=1}^{n} \rho_j, \ \rho_j' = \rho_j[\gamma - b\rho_j - a \sum_{s=1, s\neq j}^{n} \rho_s]. \tag{19}$$

Здесь $\varphi = \varphi(\tau), \rho_j = \rho_j(\tau)$, штрихом обозначена производная по τ, $\gamma = sign(\varepsilon)$. Правые части системы (19) теперь выписаны с точностью по $|\varepsilon|^{1/2}$. Основную роль для дальнейшего анализа играет замкнутая подсистема для амплитудных переменных ρ_j $(j = 1, \dots, n)$:

$$\rho_j' = \rho_j[\gamma - b\rho_j - a \sum_{s=1, s\neq j}^{n} \rho_s]. \tag{20}$$

Система дифференциальных уравнений (20) имеет нулевое состояние равновесия. Оно асимптотически устойчиво при $\gamma < 0$ и неустойчиво при $\gamma > 0$. Ненулевые состояния равновесия $\rho_j(\tau) = \nu_j$, $\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_n \neq 0$ будем обозначать через S_m, где m – число положительных компонент. Опять же в силу симметрии задачи, без нарушения общности, можно считать, что у состояния равновесия S_m первые m компонент больше нуля, а остальные $n - m$ равны 0, если, конечно, $m \leq n$. Итак $S_1 = (\nu_1, 0, \dots, 0)$, $S_2 = (\nu_1, \nu_2, 0, \dots, 0), \dots, S_m = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_m, 0, \dots, 0), \dots$, $S_n(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n)$. Для определения $\nu_j > 0$ – координат состояния равновесия получаем систему линейных алгебраических уравнений

$$b\nu_1 + a\sum_{j=2}^{m} \nu_j = \gamma, \ a\nu_1 + b\nu_2 + a\sum_{j=3}^{m} \nu_j = \gamma, \dots, a\sum_{j=1}^{m-1} \nu_j + b\nu_m = \gamma,$$

при анализе которой будем предполагать, что $a \neq b$. Иначе $c \neq c_1, c \neq c_2$, где c_1, c_2 положительные корни уравнения $54c^4 - 33c^2 + 1 = 0$. Оказалось, что $c_1^2 \approx 0.032$, $c_2^2 \approx 0.579$. В таком случае для решений справедливы равенства $\nu_1 = \nu_2 = \dots \nu_m = \Theta_m$, где Θ_m корень уравнения

$$Q_m\Theta_m = \gamma, Q_m = b + (m-1)a = ((54 - 24m)c^4 + (24m - 33)c^2 + \ 1)/6,$$

$$m = 1, \dots, n.$$

При всех рассматриваемых c справедливы неравенства $Q_1 > 0, Q_2 > 0$, а начиная с $m = 3$ величина Q_m может менять знак. Оказывается, что при $c \in (0, c_m)$ имеем $Q_m > 0$, а при $c \in (c_m, \infty)$ справедливо неравенство $Q_m < 0$. Здесь

$$c_m^2 = 0.5(q_m + \sqrt{q_m^2 + p_m}),\ q_m = 1 + 21(24m - 54)^{-1},\ p_m = 4(24m - 54)^{-1},$$

$$m = 3, 4, \dots.$$

Отметим также, что $c_m > 1$, $\lim\limits_{m\to\infty} c_m = 1$, $c_{m+1} < c_m, c_3 \approx 1.48, c_4 \approx 1.23, c_5 \approx 1.14, \dots$.

Лемма 3. *Пусть $c \in (0, c_m), m \geq 3$ состояние равновесия $S_m = (\Theta_m, \dots, \Theta_m, 0, \dots, 0)$ существует при $\gamma > 0$, а при $c \in (c_m, \infty)$ оно существует, если $\gamma < 0$. Если $m = 1, 2$ то состояния равновесия S_1, S_2 существуют при $\gamma > 0$.* Перейдем к вопросу об устойчивости S_m.

Лемма 4. *Пусть $a \neq b$ $(c \neq c_1, c_2)$. Состояние равновесия S_1 асимптотически устойчиво, если $b < a$ $(c \in (c_1, c_2))$ и неустойчиво, если $b > a$ $(c \in (0, c_1) \cup (c_2, \infty))$.*

Пусть $B = \{b_{js}\}, j, s = 1, \dots, n$ – матрица линеаризованная на S_1 системы дифференциальных уравнений (20). Оказалось, что $b_{11} = -b\Theta_1$, $b_{12} = \dots = b_{1n} = -a\Theta_1$, $b_{js} = 0, j \neq s, b_{jj} = (b - a)\Theta_1, j = 2, \dots, n, s = 1, \dots, n$. Собственные значения матрицы B, как нетрудно проверить, равны $\lambda_1 = -b\Theta_1 < 0, \lambda_2 = (b - a)\Theta_1$ – собственные значения кратности $n - 1$. Напомним, что $\Theta_1 = \gamma/b$, а $b > 0$.

Лемма 5. *Пусть $\gamma > 0, a \neq b$. Состояние равновесия S_n асимптотически устойчиво, если $b > a$ и неустойчиво, если $b < a$.*

Пусть $\gamma < 0$. Тогда S_n – неустойчиво при любом выборе c.

В этом случае матрица линеаризованной на состоянии равновесия S_n системы (20) имеет вид

$$\begin{pmatrix} -b\Theta_n & -a\Theta_n & \dots & -a\Theta_n \\ & & \dots & \\ -a\Theta_n & -a\Theta_n & \dots & -b\Theta_n \end{pmatrix},$$

собственные числа которой $\lambda_1 = -(b + (n-1)a)\Theta_n = -\gamma, \lambda_2 = (a - b)\Theta_n$ – кратности $n - 1$.

Лемма 6._Пусть_ $m = 2, 3, \dots, n-1$. _Состояния равновесия_ S_m _всегда седловые._

Как в случае двух предыдущих лемм задача сводится к определению спектра матрицы линеаризованной на S_m системы (20). Стандартные вычисления показывают, что у этой матрицы два собственных числа: $\lambda_1 = (b-a)\Theta_m$ и $\lambda_2 = (a-b)\Theta_m$. Первое имеет кратность $n-m$, а второе - m.

Замечание._Пусть_ $a = b$ $(c = c_1, c = c_2, \gamma > 0.)$ _Тогда система дифференциальных уравнений (20) имеет инвариантную плоскость_ $\sum\limits_{j=1}^{n} \rho_j = \gamma/b$ _составленную из состояний равновесия. Линеаризация на любом на них приводит к матрице одно собственное отрицательно, а второе_ $\lambda_2 = 0$ _кратности_ $n-1$.

Подчеркнем, что система (20) может иметь C_n^m состояний S_m с m положительными компонентами.

4. Основной результат. Возвратимся к рассмотрению основной краевой задачи (2), (3) при $d = 2c - \varepsilon$. Каждое решение задачи (12), (13) может быть достроенно до решений краевой задачи (2), (3). Действительно, пусть $v(t,x) = v(t, x_1, \dots, x_n)$ решение (12), (13). Выделим одну из пространственных переменных $x_j \in [0, \pi]$. Относительно этой переменной доопределим на отрезок $[-\pi, 0]$ по четности $(v(t, x_1, \dots, -x_j, \dots, x_n) = v(t, x_1, \dots, x_j, \dots, x_n))$, а затем по периодичности с периодом 2π продолжим его на всю ось x_j $(v(t, x_1, \dots, x_j + 2\pi, \dots, x_n) = v(t, x_1, \dots, x_j, \dots, x_n))$. Уместно отметить, что нужную гладкость при переопределении по четности обеспечивают как раз однородные условия Неймана. Пусть $u(t,x) = u(t, x_1, \dots, x_n)$ таким образом построенное решение задачи (2), (3). Но тогда ее решением будет и следующая функция $u(t + \alpha_0, x_1 + \alpha_1, \dots, x_n + \alpha_n)$, где $\alpha_0, \alpha, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Наконец, принцип самоподобия, важную часть которого выражает замена (4),позволяет заключить, что решениями краевой задачи (2), (3) будут и еще раз измененная функция $u(t,x) : u = u(t + \alpha_0, x_1 + 2dk_1t + \alpha_1, \dots, x_n + 2dk_nt + \alpha_n) \exp(i(k,k)t + i(k,x))$. Поэтому каждое из решений (17) трансформируется в счетное семейство решений краевой задачи (2), (3) (см. [14 – 16]):

$$u(t,x,\varepsilon) = \exp\{i[-c + |\varepsilon|\beta \sum_{j=1}^{n} \xi_j^2 + (2c - \varepsilon)(k,k)]t + i(k,x) + i\varphi_0\}\times$$

$$\times\Big\{1 + |\varepsilon|^{\frac{1}{2}}(-c+i)\sum_{j=1}^{n} \xi_j \cos(x_j + 4ck_jt + \varphi_j) + |\varepsilon|\Big[-\frac{(1+5c^2)(1+ic)}{4}\sum_{j=1}^{n} \xi_j^2 +$$

$$+(\frac{3c^2-1}{12}-i\frac{9c^2+1}{24c})\sum_{j=1}^{n}\xi_j^2\cos(2x_j+8ck_jt+2\varphi_j)+(3c^2-1-4ci)\times$$

$$\times\sum_{j=1,m=1,m\neq j}^{n}\xi_j\xi_m\cos(x_j+4ck_jt+\varphi_j)\cos(x_m+4ck_mt+\varphi_m)\Big]\Big\}+o(\varepsilon),\quad(21)$$

где $\xi=(\xi_1,\dots,\xi_n)$ один из наборов, порожденный координатами состояния равновесия $S_m,\varphi_j\in R,k=(k_1,\dots,k_n)\in\mathbb{Z}^n$.

Теорема. *Существует такое* $\varepsilon_0>0$, *что при* $|\varepsilon|<\varepsilon_0$ *каждому ненулевому состоянию равновесия* S_l *нормальной формы (20) соответствует тор* $T_{l+1}(\varepsilon)$ *размерности* $l+1$ *краевой задачи (2), (3). Решения на каждом из них определяются асимптотической формулой (21).*

Двумерные торы $T_2(\varepsilon)$ асимптотически устойчивы, если $b<a$ и неустойчивы, если $b>a$. Торы $T_{n+1}(\varepsilon)$ асимптотически устойчивы, если $b>a$ и неустойчивы, если $b<a$. Торы $T_m(\varepsilon)$ $(m=3,\dots,n)$ при всех рассматриваемых значениях параметров седловые.

Подчеркнем еще раз, что для торов $T_2(\varepsilon),T_3(\varepsilon)$ характерны послекритические бифуркации $(\varepsilon>0)$ при любом выборе c. Если, $m\geq 3$, то выбор c влияет на характер бифуркаций торов $T_m(\varepsilon)$. Если $c>c_m$ (величина c_m определялась в предыдущем разделе), то торы $T_m(\varepsilon)$ бифурцируют от соответствующей бегущей волны при $\varepsilon<0$. Возможность докритической (жесткой) бифуркации может иметь место, если $x\in\mathbb{R}^n,n\geq 3$. Существует гипотеза, что вопрос о возможности жесткой бифуркации многочастотных колебаний связан с вопросом развития "жесткой турбулентности"[4-5].

Библиографический список

1. *Скотт, Э.* Волны в активных и нелинейных средах в приложении к электродинамике [Текст] / Э. Скотт. – М., 1977.
2. *Уизем, Дж.* Линейные и нелинейные волны [Текст] / Дж. Уизем. – М., 1977.
3. *Ланда, П.С.* Нелинейные колебания волны [Текст] / П.С. Ланда. – М., 1997.
4. *Дразин, Ф.* Введение в теорию гидродинамической устойчивости [Текст] / Ф. Дразин. – М., 2005.
5. *Bartuccelli, M., Constantin, P., Doering, G.R., Gibbon, J.D., Gisselfalt, M.* On the possibility of soft and hard turbulence in the complex Ginzburg-Landau equation // Phisika D. 1990. V. 44. № 3. P. 421-444.
6. *Shreur, J., Malomed, B.A.* Stable and chaotic solutions of the Ginzburg-Landau equation with periodic boundary conditions // Phisika D. 2002. V. 161. № 3. P. 102-115.

7. *Соболев, С.Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике [Текст] / С.Л. Соболев. – Л., 1950.
8. *Хэссард, Б.* Теория и приложения бифуркации рождения цикла [Текст] / Б. Хэссард, Н. Казаринов, И. Вэн. – М., 1985.
9. *Якубов, С.Я.* Разрешимость задачи Коши для абстрактных гиперболических уравнений второго порядка и их приложения [Текст] / С.Я. Якубов // Труды Московского математического общества. – 1970. – Т. 23. – С. 37-60.
10. *Колесов, А.Ю.* Цилиндрические бегущие волны обобщенного кубического уравнения Шредингера [Текст] / А.Ю. Колесов, А.Н. Куликов, Н.Х. Розов // Доклады РАН. – 2006. – Вып. 73. – № 1. – С. 125-129.
11. *Крейн, С.Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве [Текст] / С.Г. Крейн. – М., 1967.
12. *Марсден, Дж.* Бифуркация рождения цикла и ее приложения [Текст] / Дж. Марсден, М. Мак-Кракен. – М., 1980.
13. *Куликов, А.Н.* О гладких инвариантных многообразиях полугруппы нелинейных операторов в банаховом пространстве [Текст] / А.Н. Куликов // Исследования по устойчивости и теории колебаний. – Ярославль, 1976. – С. 67-85.
14. *Колесов, А.Ю.* Инвариантные торы одного класса точечных отображений: принцип кольца [Текст] / А.Ю. Колесов, А.Н. Куликов, Н.Х. Розов // Дифференц. уравнения. – 2003. – Т. 39. – № 5. – С. 584-601.
15. *Колесов, А.Ю.* Инвариантные торы одного класса точечных отображений: сохранение инвариантного тора при возмущениях [Текст] / А.Ю. Колесов, А.Н. Куликов, Н.Х. Розов // Дифференц. уравнения. – 2003. – Т. 39. – № 6. – С. 738-753.
16. *Колесов, А.Ю.* Инвариантные торы нелинейных эволюционных уравнений: учеб. пособие [Текст] / А.Ю. Колесов, А.Н. Куликов. – Ярославль, 2003. – 107 с.

Гиперрациональные числа и функции гиперрационального аргумента и их применение для измерения длин отрезков и площадей плоских фигур

Ю.Н. Ловягин

Гиперрациональные числа

Основы теория гиперрациональных чисел заложены в работах [1-5]. Идеи моделирования вещественных чисел восходят к А. Г. Драгалину [1].

Теория гиперрациональных чисел является расширением формализованной теории чисел. Соответствующий язык и аксиомы заимствованы из [7]. Вместо формализованных доказательств мы применяем систему естественного вывода, основанную на исчислении секвенций, изложенном в [7].

Построение гиперрациональных чисел на основе гипернатуральных мы проводим по схеме, изложенной в [8]. Принципиальным отличием настоящего изложения является то, что в отличие от [8] в нем основой является формализованная теория чисел, а не модели ее в рамках аксиоматической теории множеств. Тем самым оказывается возможным обосновать как дифференциальное и интегральное исчисление, а так же теорию измерения величин в рамках более слабой аксиоматической системы.

Введем основные понятия:

1. Теория гиперрациональных чисел обозначается $\mathfrak{HQ}$. Язык теории гиперрациональных чисел содержит предикатные символы для равенства, порядка, функциональные символы для сложения и умножения, константные символы для нуля и единицы. Если некоторое утверждение φ доказуемо в $\mathfrak{HQ}$, то мы пишем $^* \vdash \varphi$.
2. Среди гиперрациональных чисел имеются рациональные, гипернатуральные, натуральные, целые и гиперцелые числа.
3. Гиперрациональные числа образуют упорядоченное поле.
4. Существует гиперрациональное число ε такое, что для любого натурального числа n $|\varepsilon| < \frac{1}{n+1}$. Такие числа называются бесконечно малыми.
5. В поле гиперрациональных чисел имеется подкольцо конечных чисел, то есть таких чисел x, что при некотором натуральном n $|x| \leq n$. Бесконечно малые числа образуют идеал в кольце конечных чисел.
6. Числа, которые не являются конечными, называются бесконечно большими.
7. Отношение $p \approx q$ тогда и только тогда, когда число $p - q$ является бесконечно малым, является эквивалентностью, согласованной с предикатными и функциональными символами $\mathfrak{HQ}$. Числа, связанные этим отношением называются бесконечно близкими. Монадой μ называется класс всех гиперрациональных чисел бесконечно близких какому-то гиперрациональному числу. Если p – гиперрациональное число, то $\mu(p)$ – монада числа p.
8. Если p и q – различные рациональные числа, то их монады не имеют общих элементов.
9. Среди гипернатуральных чисел существуют бесконечно большие, которые будем называть бесконечными натуральными числами.

Гиперрациональные функции и множества

Определение 1. Пусть φ – формула $\mathfrak{H}\mathfrak{Q}$ с единственной свободной переменной. Будем говорить, что φ определяет множество гиперрациональных чисел E, если E является классом всех тех и только тех гиперрациональных чисел p, для которых $^* \vdash \varphi$. Будем обозначать $E = \{p : \varphi(x)\}$. Иными словами, $p \in E$ тогда и только тогда, когда $^* \vdash \varphi(p)$.

Определение 2. Пусть χ – формула $\mathfrak{H}\mathfrak{Q}$ с двумя свободными переменными. Будем говорить, что формула χ определяет функцию f, если $^* \vdash \forall p_1 \forall p_2 \forall q\,(\chi(p_1, q) \,\&\, \chi(p_2, q) \supset p_1 = p_2)$.

Определение 3. Область определения функции f есть множество $\mathrm{dom} f = \{p : \exists q \chi(p, q)\}$. Множество значений функции f есть множество $\mathrm{rng} f = \{q : \exists p \chi(p, q)\}$. Для $p \in \mathrm{dom} f$ то единственное гиперрациональное число $q \in \mathrm{rng} f$, для которого $^* \vdash \chi(p, q)$ называется значением функции f на аргументе p и обозначается $f(p)$.

Определение 4. Множество E называется подмножеством множества F, если из $p \in E$ следует $p \in F$. Пишем $E \subset F$.

Определение 5. Функцию f назовем непрерывной на множестве $E \subset \mathrm{dom} f$, если для всех $p, q \in E$ из $p \approx q$ следует $f(p) \approx f(q)$.

Определение 6. Функцию f назовем дифференцируемой на множестве $E \subset \mathrm{dom} f$, если для монады $\mu(p)$ каждой точки $p \in E$ существует конечное гиперрациональное число a такое, что при $q_1, q_2 \approx p$ имеет место $f(q_1) - f(q_2) \approx a \cdot (q_1 - q_2) + \alpha(\mu(p)) \cdot (q_1 - q_2)$ при $\alpha(\mu(p)) \approx 0$.

Любое число $\sigma \approx a$ называется производной функции f в монаде $\mu(p)$.

Теория непрерывных и дифференцируемых функций систематически изложена в [1, 3, 2, 5]. Отметим, что для функций гиперрационального аргумента сохраняются почти все основные свойства непрерывных и дифференцируемых функций, только равенство заменяется на бесконечную близость.

В [3] изложена теория интегрирования для функций гиперрационального аргумента на основе теории моделей. Однако, все результаты могут быть легко передоказаны в рамках теории $\mathfrak{H}\mathfrak{Q}$.

Измерение длин отрезков

Основой для измерения длин отрезов и других кривых является теорема, доказанная в [8] для теоретико-множественного подхода (см. также [9]).

Теорема 1. *Пусть для каждого гипернатурального числа n задано конечное гиперрациональное число q_n. Пусть, далее, для всех гипернатуральных n $q_{n+1} \geq q_n$. Предположим так же, что существует натуральное число m такое, что при любом гипернатуральном числе n*

$q_n \leq m$. *Тогда для всех бесконечно больших гипернатуральных* u *и* v $q_u \approx q_v$.

Пусть дан некоторый отрезок ϖ, который мы принимаем за *единицу длины.* В связи с этим *измерить* длину некоторого отрезка означает *сравнить* его с отрезком ϖ, то есть узнать, сколько раз ϖ "укладывается"в измеряемом отрезке. Известно, что эта задача неразрешима, если за основу измерения взяты рациональные числа. Мы же покажем ее разрешимость с помощью гиперрациональных чисел. Идеи измерения отрезков гиперрациональными числами изложены в [9].

Будем откладывать отрезок ϖ, начиная с начальной точки измеряемого отрезка. Предположим, что он отложился целиком ровно n раз. В этом случае будем считать длину отрезка равной n. Если же после n-кратного откладывания отрезка ϖ измеряемый отрезок не исчерпался, но $n+1$-е откладывание уже перекрывает измеряемый отрезок, то мы говорим, что длина отрезка заключена между n и $n+1$, то есть считаем $n < L < n+1$. Далее делим отрезок ϖ на 10 равных частей и с $\frac{1}{10}$-й частью отрезка ϖ поступаем так же как и с целым, укладывая его в оставшуюся после n-кратного покрытия измеряемого отрезка единичным. Если десятая часть ϖ уложилась ровно n_1 раз, то мы считаем $L = n + \frac{n_1}{10}$. Если же сложилась ситуация, когда $\frac{1}{10}\varpi$ не укладывается целое количество раз, то мы получаем $n + \frac{n_1}{10} < L < n + \frac{n_1+1}{10}$. И так далее. Ясно, что дальше мы укладываем в остаток отрезок $\frac{1}{100}\varpi$, $\frac{1}{1000}\varpi, \ldots$. Таким образом, построена последовательность рациональных чисел $p_m = n + \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{100} + \cdots + \frac{n_m}{10^m}$, где n_k принимает одно из значений 0, 1 ,2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 или 9.

Ясно, что эта последовательность ограничена сверху числом $n+1$ и возрастает. Применяем к ней принцип переноса и получаем, что для каждого гипернатурального u определено гиперрациональное число p_u и при этом все условия теоремы 1 выполняются и, следовательно, для всех бесконечно больших гипернатуральных t и s $p_t \approx p_s$.

Определение 7. Определим длину отрезка правилом $L :\approx p_w$ при любом бесконечно большом гипернатуральном w. Длину отрезка A будем обозначать L_A.

Таким образом, каждому отрезку сопоставляется конечное (положительное) определенное с точностью до бесконечно малых гиперрациональное число. При этом имеет место

Теорема 2. *Пусть* A *и* B *– два отрезка и пусть* $A + B$ *– их геометрическая сумма. Тогда* $L_{A+B} \approx L_A + L_B$.

Определение 8. Пусть P и Q – две точки на плоскости. Определим функцию ϱ правилом $\varrho(P, Q) :\approx L_A$, где A – отрезок, соединяющий точки P и Q. Число $\varrho(P, Q)$ назовем дистанцией между точками P и Q, а саму функцию ϱ будем называть дистантирующей.

Теорема 3. *Для любых точек P, Q и R справедливо:*

1. *Если $P = Q$, то $\varrho(P,Q) = 0$.*
2. *Если $\varrho(P,Q) \approx 0$, то $P = Q$.*
3. *$\varrho(P,Q) \approx \varrho(Q,P)$.*
4. *$\varrho(P,Q) \leq \varrho(P,R) + \varrho(R,Q)$.*

Определение 9. Пусть P – точка плоскости, $r > 0$ – конечное гиперрациональное число. Обозначим $D(P,r)$ – класс всех точек плоскости, удовлетворяющих неравенству $\varrho(Q,P) < r$. $D(P,r)$ назовем кругом с центром в точке P радиуса r.

Теорема 4. *Пусть $r > 0$ – конечное гиперрациональное число, не являющееся бесконечно малым. Тогда существует рациональное число $p > 0$ такое, что для всех точек круга $D(P,r)$ имеет место неравенство $\varrho(Q,P) < p$.*

Теорема 5. *Пусть (P_n) – последовательность точек плоскости и P – некоторая точка (на плоскости). Тогда для того, чтобы имело место $P_n \longrightarrow P$ в естественной топологии, необходимо и достаточно, чтобы при всех бесконечных натуральных n $P_n = P$.*

Приведенные теоремы показывают, что дистантирующая функция выполняет роль метрики на плоскости и порождает естественную топологию.

В этой связи представляется интересным вопрос об исследовании множеств, снабженных дистантирующей функцией.

Измерение площадей плоских фигур

Определение 10. Пусть Φ – компактное (в естественной топологии) множество на эвклидовой плоскости. Будем называть Φ фигурой.

В силу ограниченности Φ существуют прямые параллельные l_1 и l_2 такие, что Φ целиком расположена в полосе между ними.

Рассмотрим прямую l параллельную l_1 и пересекающую фигуру Φ. По условию, налагаемую на фигуру, сечение Φ прямой l представляет собой отрезок. Обозначмм его длину через $F(x)$, где x – расстояние от прямой l до прямой l_1. Ежели сечение пусто, что считаем, что $F(x) = 0$.

Определение 11. Фигуру Φ будем называть квадрируемой, если функция F принимает конечные значения на некотором сегменте $[a,b]$, определяемом расстоянием между прямыми l_1 и l_2 и интегрируема на этом сегменте. Площадью фигуры Φ назовем $\int\limits_a^b F$.

Теорема 6. *Квадрируемость фигуры не зависит от выбора прямых l_1 и l_2, то есть если S_1 и S_2 – площадь фигуры Φ, вычисленная двумя разными способами, то $S_1 \approx S_2$.*

Теорема 7. *Если фигура разбита на непересекающиеся подфигуры, то площадь фигуры бесконечно близка к сумме площадей ее частей.*

Отметим, что аналогичная идея осуществима и для измерения объемов компактных множеств в трехмерном пространстве. Причем можно либо развить теорию двумерного интегрирования, либо применить конструкцию интегрирования "площади поперечного сечения".

Преддифференциалы функций гиперрационального аргумента

Определение 12. Пусть f – такая функция, что для некоторого конечного гиперрационального числа $p \in \mathrm{dom} f$ при некоторых $q \approx p$ $q \in \mathrm{dom} f$. Рассмотрим $A \approx \frac{f(p)-f(q)}{p-q}$ при некотором $q \approx p$, $q \in \mathrm{dom} f$. Если число A конечно, то будем его называть касательным направлением в точке p, определенным q. Класс всех касательных направлений в точке p, определенным всевозможными числами из $\mu(p)$, принадлежащими области определения функции f, назовем преддифференциалом функции f в точке p и будем обозначать $\partial_p f$.

Касательное направление функции f в точке p, определенным q будем обозначать $D_q f(p)$.

Отметим, что $D_q f(p) \approx D_p f(q)$ при $p \approx q$, $p, q \in \mathrm{dom} f$.

Очевидно, что имеет место

Теорема 8. *Функция f дифференцируема в монаде $\mu(p)$ тогда и только тогда, когда при всех $q_1, q_2 \approx p$ $D_{q_1} f(p) \approx D_{q_2} f(p)$.*

Легко понять, что в условиях теоремы преддифференциал функции f в точке p состоит из всех гиперрациональных чисел бесконечно близких к производной функции f в точке p. Таким образом, понятие преддифференциала является обобщением понятия дифференциала. Однако, возможны ситуации, когда преддифференциал не исчерпывается некоторой монадой.

Отметим, что понятие касательного направления аналогично понятию производного числа Дини [10].

Теорема 9. *Для любой функции f такой, что в некоторой конечной точке $p \in \mathrm{dom} f$ $\partial_p f \neq \emptyset$ и любого конечного числа α $\partial_p(\alpha f) \approx \alpha \partial_p f$.*

Теорема 10. *Для любой точки $p \in \mathrm{dom} f \cap \mathrm{dom} g$ если существуют касательные направления $D_q f(p)$ и $D_q g(p)$, то существует $D_q(f+g)(p) \approx D_q f(p) + D_q g(p)$.*

Библиографический список

1. *Сегаль, И.Ф.* Доказательство равномерной непрерывности функций на гиперрациональных числах в аксиоматике арифметики [Текст] /

И.Ф. Сегаль, Н.К. Косовский, А.В. Тишков // Логики конечнозначных предикатов на основе неравенств: учеб. пособие. – СПб.: Издательство С.-Петерб. университета, 2000. – 268 с. – С. 232-241.

2. *Праздникова, Е.В.* Моделирование вещественного анализа в рамках аксиоматики для гипернатуральных чисел [Текст] / Е.В. Праздникова // Вестник Сыктывкарского университета. – 2007. – Сер. 1. – Вып. 7. – С. 41-66.
3. *Ловягин, Ю.Н.* Гиперрациональные числа как основа математического анализа [Текст] / Ю.Н. Ловягин // Вестник Сыктывкарского университета. – 2007. – Сер. 1. – Вып. 7. – С. 17-34.
4. *Ловягин, Ю.Н.* Элементарные функции на множестве комплексных гиперрациональных чисел [Текст] / Ю.Н. Ловягин, Е.В. Праздникова // Вестник Сыктывкарского универстета. – 2009. – Сер. 1. – Вып. 9. – С. 30-42.
5. *Ловягин, Ю.Н.* Элементарные функции в аксиоматическом нестандартном анализе [Текст] / Ю.Н. Ловягин, Е.В. Праздникова // Математика. Информатика. Технологический подход к обуче-нию в вузе и школе: Материалы всероссийской научно-практической конференции, Курган. – 2009.
6. *Драгалин, А.Г.* Конструктивная теория доказательств и нестандартный анализ [Текст] / А.Г. Драгалин. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 544 с.
7. *Косовский, Н.К.* Логики конечнозначных предикатов на основе неравенств: учеб. пособие [Текст] / Н.К. Косовский, А.В. Тишков. – СПб.: Издательство С.-Петерб. университета, 2000. – 268 с.
8. *Ловягин, Ю.Н.* Исчисление бесконечно малых Г.В. Лейбница или Введение в нестандартный анализ А. Робинсона [Текст] / Ю.Н. Ловягин. – Сыктывкар: Сыкт. лесной ин-т, 2001. – 167 с.
9. *Ловягин, Ю.Н.* Гиперрациональные числа как основа измерений и вычислений [Текст] / Ю.Н. Ловягин.
10. *Натансон, И.П.* Теория функций вещественной переменной [Текст] / И.П. Натансон. – М.: ГОСТЕХИЗДАТ, 1957. – 552 с.

Формализованный язык для описания теории комплексных гиперрациональных чисел и функций

Е.В. Праздникова

Гиперарифметика

Рассмотрим формализованную теорию чисел, язык которой в своей сигнатуре содержит знаки для предиката равенства, двухместных функциональных символов для сложения и умножения, и символ для унарного функционального символа следования. Последний будем обозначать штрихом $'$, а для остальных знаков сигнатуры используем стандартные обозначения. Для термов и формул языка используется инфиксная запись. Константа ноль обозначается естественным образом. Формулы, не содержащие свободных переменных именуются утверждениями.

Специальными аксиомами, именуемыми в дальнейшем аксиомами арифметики, являются

$$\forall x \neg \left(x' = 0\right);$$

$$\forall x \forall y \left(x' = y' \supset x = y\right);$$

$$\forall x \left(x + 0 = 0\right);$$

$$\forall x \forall y \left(x + y' = (x + y)'\right);$$

$$\forall x \left(x \cdot 0 = 0\right);$$

$$\forall x \forall y \left(x \cdot y' = x \cdot y + x\right);$$

$$\varphi\left(0\right) \& \forall x \left(\varphi\left(x\right) \supset \varphi\left(x'\right)\right) \supset \forall x \varphi\left(x\right) \text{ для любой формулы } \varphi.$$

Определение 1. Теорию, содержащую аксиомы арифметики, а так же аксиомы равенства и согласования с равенством, назовем арифметикой и будем обозначать $\mathfrak{A}$.

Термы $0,\ 1 = 0',\ 2 = 1',\ \ldots$ называют натуральными числами.

Введем в сигнатуру арифметики предикатные символы

$$x \leq y \equiv \exists z \left(x + z = y\right);$$

$$x < y \equiv x \leq y \& \neg \left(x = y\right).$$

Легко проверяется, что предикат $\leq$ является предикатом порядка – рефлексивен, симметричен и транзитивен. таким образом $<$ – есть предикат строгого порядка.

Расширим теперь сигнатуру арифметики путем добавления нового константного символа Ω. К аксиомам арифметики добавим набор аксиом

$$0 < \Omega,\ 1 < \Omega,\ 2 < \Omega,\ \ldots$$

Определение 2. Расширенную теорию называют гиперарифметикой и обозначают $\mathfrak{H}\mathfrak{A}$.

Справедлива легко доказываемая теорема:

Теорема 1. *$\mathfrak{H}\mathfrak{A}$ является консервативным расширением $\mathfrak{A}$.*

Нетрудно понять, что терм Ω и образуемые на его основе посредством сложения и умножения термы являются числами, которые строго превосходят все натуральные числа, то есть являются бесконечно большими числами.

Определение 3. Такие числа будем называть бесконечными натуральными числами. Все конечные и бесконечные натуральные числа будем называть гипернатуральными числами.

Для выделения конечных чисел среди натуральных введем соответствующий одноместный предикатный символ $\mathbb{N}$. Таким образом, $\mathbb{N}\,(x)$ означает, что x – конечное гипернатуральное число, или просто натуральное число.

Отметим, что вводимый предикат “быть натуральным числом” является по отношению к гиперарифметике внешним и не может быть выражен в ней.

Гиперрациональные числа

В этом параграфе рассматриваются тройки гипернатуральных чисел. Для этого к сигнатуре теории $\mathfrak{H}\mathfrak{A}$ добавляется трехместный предикатный символ $\mathbb{HQ}$ и аксиома

$$\forall x \forall y \forall x \mathbb{Q}\,(xyz)\,.$$

Содержательно эта аксиома означает, что тройка гипернатуральных чисел определяет некоторое новое число, которое будем называть гиперрациональным.

Для построения теории гиперрациональных чисел вводятся функциональные символы для сложения и умножения, а так же предикатный символ равенства гиперрациональных чисел. Сохраняя для них прежние обозначения, определим

Определение 4.

$$xyz = uvw \equiv xw + x + vz + v = yw + y + uz + u;$$

$$xyz \cdot uvw = xu + yv\; yu + xv\; zw + z + w;$$

$$xyz + uvw = xw + x + uz + u\; yw + y + vz + v\; zw + z + w.$$

В [2] доказана теорема:

Теорема 2.

1. *Введенный двухместный предикат является предикатом равенства для троек гипернатуральных чисел.*
2. *Для функциональных символов сложения и умножения троек гипернатуральных чисел выполнены аксиомы согласования с введенным предикатом равенства.*

Там же доказано, что гиперрациональные числа образуют поле.

Условимся тройки гипернатуральных чисел обозначать буквами p, q, r и тому подобными. Кванторная приставка $\forall x \forall y \forall z$ сокращается до записи $\forall p$, точнее примем следующее сокращение: будем писать $\forall p \varphi$ вместо $\forall x \forall y \forall z \left(\mathbb{HQ}\left(xyz\right) \supset \varphi\right)$. Аналогично вместо $\exists x \exists y \exists z \left(hq\left(xyz\right) \& \varphi\right)$ пишем $\exists p \varphi$.

Введем в рассмотрения специальные предикатные символы, описывающие свойства гиперрациональных чисел.

Определение 5.

1. Число p является гипернатуральным: $\mathbb{HN}\left(p\right) \equiv \exists x \left(p = x00\right)$.
2. Число p является натуральным: $\mathbb{N}\left(p\right) \equiv \mathbb{HN}\left(p\right) \& \mathbb{N}\left(x\right)$.
3. Число p является положительным: $p \geq 0 \equiv x \geq y$.
4. Число p – строго положительно: $p > 0 \equiv p \geq 0 \& \neg\left(p = 0\right)$.
5. $p \geq q \equiv p - q \geq 0$, $p > q \equiv p \geq q \& \neg\left(p = q\right)$.
6. Число p является бесконечно малым: $p \approx 0 \equiv \forall n \left(\mathbb{N}\left(n\right) \supset \left(\neg\left(n = 0\right) \supset |p| < \frac{1}{n}\right)\right)$.
7. Числа p и q бесконечно близки: $p \approx q \equiv p - q \approx 0$.
8. Число p является рациональным: $\mathbb{Q}\left(p\right) \equiv \forall q \left(q \approx p \supset q = p\right)$.
9. Число p является конечным: $fin\left(p\right) \equiv \exists n \left(\mathbb{N}\left(n\right) \& |p| \leq n\right)$.
10. Число p является бесконечно большим: $infin\left(p\right) \equiv \neg\left(fin\left(p\right)\right)$.

Отметим, что понятия рационального, натурального, конечного, бесконечно малого, бесконечно большого гиперрационального числа являются внешними.

В [2] доказано

Теорема 3.

$$\forall p \forall q \left(\mathbb{HN}\left(p\right) \& \mathbb{HN}\left(q\right) \supset \mathbb{HN}\left(p+q\right) \& \mathbb{HN}\left(pq\right)\right),$$

причем сумма и произведение, вычисленное как гиперрациональное и как гипернатуральное число совпадают.

Там же доказаны основные свойства конечных и бесконечно малых чисел, аналогичные свойствам предела числовой последовательности. В частности, произведение конечного и бесконечно малого чисел бесконечно мало.

Теорема 4. *Сумма и произведение гиперрациональных чисел определены корректно относительно отношения бесконечной близости: если* $p_1 \approx q_1$ *и* $p_2 \approx q_2$, *то* $p_1 + p_2 \approx q_1 + q_2$ *и* $p_1 \cdot p_2 \approx q_1 \cdot q_2$.

В работе [2] доказано так же, что гиперрациональные числа образуют упорядоченное поле.

Таким образом соотношение между гиперрациональными и гипернатуральными числами точно такое же как таковое между натуральными и рациональными числами. Более того, можно легко доказать, что теория гиперрациональных чисел является консервативными расширением теории рациональных чисел. Следовательно, все то, что доказуемо для рациональных чисел доказуемо и для гиперрациональных. С другой стороны, наличие свойства "быть бесконечно малым" дает возможность рассматривать конечные гиперрациональные числа как "сколь угодно точные" приближения к числам вещественным. Некоторые приложения этого к элементарному математическому анализу имеются в [4, 2, 3]. В указанных работах показано, как гиперрациональные числа моделируют числа вещественные. Идея такого моделирования восходит к А.Г. Драгалину [1]. Тем самым числа гиперрациональные могут вполне заменить вещественные числа.

Комплексные гиперрациональные числа

Добавим к сигнатуре теории гиперрациональных чисел предикатный символ $\mathbb{HC}$, содержательно означающий, что пара (p, q) гиперрациональных чисел определяет комплексное гиперрациональное число. К аксиомам теории $\mathbb{HQ}$ добавим аксиому

$$\forall p \forall q \mathbb{HC}(p, q).$$

В дальнейшем как и выше используем сокращение $\forall pq\varphi$ для $\forall p \forall q \, (\mathbb{HC}\,(p, q) \supset \varphi)$ и $\exists pq\varphi$ для $\exists p \exists q \, (\mathbb{HC}\,(p, q) \,\&\varphi)$.

Определение 6. Пару гиперрациональных чисел назовем комплексным гипер-ра-цио-наль-ным числом.

Для удобства пару (p, q) такую, что $\mathbb{HC}\,(p, q)$ будем обозначать буквами z, w и подобными. Пишем так же $z = (p, q)$ вместо $\mathbb{HC}(p, q)$.

Определение 7. Комплесные гиперрациональные числа $z = (p, q)$ и $w = (x, y)$ равны между собой, если $p = x \,\&\, q = y$. Записываем это отношение как $z = w$

Определение 8. Предикат $\mathbb{HQ}$ определяет гиперрациональное число z вида $(p, 0)$, т.е. $\mathbb{HQ}(z) \equiv \exists p \, z = (p, 0)$.

Определение 9. Суммой комплексных гиперрациональных чисел $z = (p, q)$ и $w = (x, y)$ будем называть комплексное гиперрациональное число s вида $s = (p + x, q + y)$.

Произведением комплексных гиперрациональных чисел $z = (p, q)$ и $w = (x, y)$ будем называть комплексное гиперрациональное число u вида $u = (px - qy, py + qx)$.

Теорема 5. *Сумма и произведение комплексных гиперрациональных чисел определены корректно:*
если $z_1 = w_1$ *и* $z_2 = w_2$, *то* $z_1 + z_2 = w_1 + w_2$ *и* $z_1 \cdot z_2 = w_1 \cdot w_2$.

Теорема 6. *Введенный предикат есть предикат равенства. То есть верны аксиомы равенства и согласованности с равенством.*

Доказательство.

Теорема 7. *Комплексные гиперрациональные числа образуют поле.*

Определение 10. Назовем комплексное число вида $(0,1)$ мнимой единицей и будем обозначать $i=(0,1)$.

Для любого гиперрационально числа p можно определить комплексное гиперрациональное число $(p,0)$.

Теорема 8.

$$\forall z\forall w\left(\exists p\exists q(z=(p,0)\&w=(q,0)\supset(z=w\equiv p=q))\right).$$

Теорема 9.

$$\forall z\forall w\left(\exists p\exists q(z=(p,0)\&w=(q,0)\supset(z+w=p+q)\&(z\cdot w=p\cdot q))\right).$$

Теоремы 8 и 9 показывают, что операции над комплексными гиперрациональными числами являются продолжением соответствующих операций над гиперрациональными числами.

Замечание 1. Заметим, что любое комплексное гиперрациональное число $z=(p,q)$ можно представить в виде $z=(p,0)+(0,q)=(p,0)+q\cdot(0,1)=p+iq$. Таким образом, комплексное гиперрациональное число $z=(p,q)$ определяет число вида $z=p+iq$.

Определение 11. Запись комплексного гиперрационального числа z в виде $p+iq$ называют алгебраичекой формой записи.

Определение 12. Пусть $z=p+iq$. Гиперрациональные числа p и q назовем гиперрациональной и мнимой частями комплексного гиперрационального числа z. Гиперрациональную часть будем обозначать как Hqz,а мнимую — Imz.

Замечание 2. Таким образом, в веденных обозначениях с комплексными гиперрациональными числами можно оперировать как с многочленами относительно i, учитывая, что $i^2=-1$.

Определение 13. Модулем комлексного гиперрационального числа $z=(p,q)$ назовем $\sqrt{p^2+q^2}$. Будем обозначать его $|z|$.

Определение 14. Комплексное гиперрациональное число z будем называть конечным, если его модуль - конечное гиперрациональное число.

Определение 15. Комплексное гиперрациональное число z будем называть бесконечно большим, если $|z|$ - бесконечно большое гиперрациональное число.

Определение 16. Комплексное гиперрациональное число z будем называть бесконечно малым (и обозначать как $z \approx 0$), если $|z|$ - бесконечно малое гиперрациональное число.

Утверждение 1. *Для любого комплексного гиперрационального числа* $z = (p, q)$ $|z| \approx 0$ *тогда и только тогда, когда* $p \approx 0 \,\&\, q \approx 0$.

Теорема 10. *Для комплексных гиперрациональных чисел верны следующие утверждения:*

1. *Произведение бесконечно большого на конечное дает бесконечно большое.*
2. *Сумма и произведение бесконечно малых является бесконечно малыми.*
3. *Произведение конечного на бесконечно малое дает бесконечно малое.*
4. *Сумма и произведение конечных чисел является конечным числом.*
5. *Отношение конечных чисел конечно, если знаменатель не бесконечно мал.*

Определение 17. Комплексные гиперрациональные числа z и w будем называть бесконечно близкими (и обозначать $z \approx w$), если $z - w \approx 0$.

Утверждение 2. *Для любых комплексных гиперрациональных чисел* $z = (p, q)$ *и* $w = (x, y)$*верно* $z \approx w$ *тогда и только тогда, когда* $p \approx x \,\&\, q \approx y$.

Теорема 11. *Для любых комплексных гиперрациональных чисел* z, w *и* v

1. $\forall z (z \approx z)$;
2. $\forall z \forall w (z \approx w \supset w \approx z)$;
3. $\forall z \forall w \forall v (z \approx w \& w \approx v \supset z \approx w)$.

Введем теперь в рассмотрение формализованный язык исчисления предикатов в сигнатуру которого включим предикатный символ для равенства комплексных гиперрациональных чисел, функциональные символы для их сложения и умножения, константы для единица, нуля и мнимой единицы.

Определение 18. Теорию, описывающую свойства комплексных гиперрациональных чисел, будем обозначать $\mathbb{HC}$. Если формула φ доказуема в $\mathbb{HC}$, то мы будем писать $^* \vdash \varphi$.

Отметим, что в том же языке можно рассматривать и обычную теорию комплексных рациональных чисел. Доказуемость формул в этой теории обозначается $\vdash \varphi$.

Комплексные гиперрациональные функции

Определение 19. Пусть ϕ — формула в языке для комплексных гиперрациональных чисел с единственной свободной переменной. Класс всех комплексных гиперрациональных чисел z таких, что $^* \vdash \phi(z)$. будем называть множеством (комплексных гиперрациональных чисел).

Определение 20. φ — формула с двумя свободными переменными для комплексных гиперрациональных чисел. И $^* \vdash \forall x(\exists y\, \varphi(x,y) \supset (\exists u\, \varphi(x,u) \supset u = y))$, то говорят, что φ определяет функцию комплексного гиперрационального аргумента.

Функции будем обозначать f, g и т.д.

Область определения функции φ - это класс всех комплексных гиперрациональных чисел x, таких что $^* \vdash \exists y\, \varphi(x,y)$. В этом случаеи записываем $y = f(x)$. Говорим, что функция φ определена в точке x и пишем $\exists f(x)$, если $^* \vdash \exists y(\varphi(x,y) \& y = f(x))$

Библиографический список

1. *Драгалин, А.Г.* Конструктивная теория доказательств и нестандартный анализ [Текст] / А.Г. Драгалин. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 544 с.
2. *Праздникова, Е.В.* Моделирование вещественного анализа в рамках аксиоматики для гипернатуральных чисел [Текст] / Е.В. Праздникова // Вестник сыктывкарского университета. – 2008. – Сер. 1.
3. *Ловягин, Ю.Н.* Гиперрациональные числа как основа математического анализа [Текст] / Ю.Н. Ловягин // Вестник сыктывкарского университета. – 2008. – Сер. 1.
4. *Сегаль, И.Ф.* Доказательство равномерной непрерывности функций на гиперрациональных числах в аксиоматике арифметики [Текст] / И.Ф. Сегаль, Н.К. Косовский, А.В. Тишков // Логики конечнозначных предикатов на основе неравенств: учеб. пособие. – СПб.: Издательство С.-Петерб. университета, 2000. – 268 с. – С. 232-241.

О бифуркациях особой точки типа “центр” динамической системы на плоскости

В.Ш. Ройтенберг

Рассматривается семейство дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = X(x, \mu), \tag{1}$$

определенных в некоторой окрестности точки $0 \in R^2$, зависящих от параметра $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$, меняющегося в окрестности точки $0 \in R^3$, и имеющих при всех μ особую точку $x = 0$. Будем предполагать, что $X \in C^{\infty}$ и при $\mu = 0$ особая точка является центром с корнями характеристического уравнения $\pm i\omega_0$, $\omega_0 \neq 0$. Так, в частности, будет, если при $\mu = 0$ (1) является гамильтоновой системой с гамильтонианом $H = \omega_0(x_1^2 + x_2^2)/2 + o(x_1^2 + x_2^2)$.

Мы опишем бифуркационную диаграмму для семейств общего положения. Условия, задающие такие семейства, можно выписать явно через частные производные $\partial^{m+n+l} X_i(0,0)/\partial x_1^m \partial x_2^n \partial \mu_j^l$, $0 \leq m + n \leq 5$, $0 \leq l \leq 1$, $j = 1, 2, 3$.

Отметим, что бифуркации центра в двухпараметрических семействах общего положения рассматривались в работе [1].

Приведем уравнение к нормальной форме Пуанкаре, следуя обозначениям из книги [2]. Будем считать, что матрица $\partial X(0,\mu)/\partial x$ имеет канонический вид: $\begin{pmatrix} \alpha(\mu) & -\omega(\mu) \\ \omega(\mu) & \alpha(\mu) \end{pmatrix}$, где $\alpha(0) = 0$, $\omega(0) = \omega_0$. Положив $z = x_1 + ix_2$, запишем (1) в виде

$$\dot{z} = \lambda(\mu)z + \sum_{2 \leq i+j \leq 7} g_{ij}(\mu)\frac{z^i \bar{z}^j}{i!j!} + G(z, \bar{z}, \mu), \tag{2}$$

где $\lambda(\mu) = \alpha(\mu) + i\omega(\mu)$, α, ω, g_{ij} и G – функции класса C^{∞}, $G(z, \bar{z}, \mu) = O(|z|^8)$. Сделав в (2) нормализующую замену переменных $z = \xi + \sum\limits_{2 \leq i+j \leq 8} \chi_{ij}(\mu)\frac{\xi^i \bar{\xi}^j}{i!j!}$, получим нормальную форму уравнения

$$\dot{\xi} = \lambda(\mu)\xi + \sum_{j=1}^{3} c_j(\mu)\xi\,|\xi|^{2j} + F(\xi, \bar{\xi}, \mu) \tag{3}$$

где c_1, c_2, c_3 и F – функции класса C^{∞}, $F(\xi, \bar{\xi}, \mu) = O(|\xi|^8)$. В [2] приведены выражения для $c_1(\mu)$ через $\lambda(\mu)$ и $g_{ij}(\mu)(i + j = 2)$, а также для $c_2(\mu)$, при условии, что $\alpha(\mu) = 0$, через $\lambda(\mu)$ и $g_{ij}(\mu)$ $(i + j \leq 5)$.

Перейдем в уравнении (3) к полярным координатам (ρ, φ), положив $\xi = \rho e^{i\varphi}$, и исключим время t. Получим уравнение

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = (\alpha(\mu)\rho + \sum_{j=1}^{3} a_j(\mu)\rho^{2j+1} + R_1(\rho, \varphi, \mu))(\omega(\mu) + \sum_{j=1}^{3} b_j(\mu)\rho^{2j} + R_2(\rho, \varphi, \mu))^{-1},$$

где $a_i = a_i(\mu) = Rec_i(\mu)$, $b_i = b_i(\mu) = Imc_i(\mu)$ $(i = 1, 2, 3)$, R_1 и R_2 – такие C^{∞}-функции на $[0, \nu) \times R/Z \times (-\nu, \nu)^3$ при достаточно малом

$\nu > 0$, что $R_1(\rho,\varphi,\mu) = O(\rho^9)$, $R_2(\rho,\varphi,\mu) = O(\rho^8)$. Это уравнение можно переписать в виде

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \sum_{j=1}^{4} m_j(\mu)\rho^{2j-1} + R(\rho,\varphi,\mu), \tag{4}$$

где $R \in C^\infty([0,\nu)\times R/Z\times(-\nu,\nu)^3)$ при достаточно малом $\nu > 0$, $R(\rho,\varphi,\mu) = O(\rho^9)$, $m_j \in C^\infty$,

$$m_1(\mu) = m_1 = \frac{\alpha}{\omega}, \quad m_2(\mu) = m_2 = \frac{\omega a_1 - \alpha b_1}{\omega^2}, \tag{5}$$

$$m_3(\mu) = m_3 = \frac{\alpha b_1^2 - \alpha\omega b_2 + a_2\omega^2}{\omega^3}.$$

Сделаем теперь в уравнении (4) замену $r = \rho^2$. Получим уравнение

$$\frac{dr}{d\varphi} = 2m_1(\mu)r + 2m_2(\mu)r^2 + 2m_3(\mu)r^3 + \bar{R}(r,\varphi,\mu),$$

где $\bar{R} \in C^4([0,\nu)\times R/Z\times(-\nu,\nu)^3)$ при достаточно малом $\nu > 0$, $\bar{R}(0,\varphi,\mu) = \bar{R}'_r(0,\varphi,\mu) = \bar{R}''_{rr}(0,\varphi,\mu) = \bar{R}'''_{rrr}(0,\varphi,\mu) = 0$. Пусть $r = r(\varphi,u,\mu)$ – его решение, удовлетворяющее начальному условию $r(0,u,\mu) = u$. Тогда $P(\cdot,\mu) = r(2\pi,\cdot,\mu)$ – функция последования (отображение Пуанкаре) на дуге $\varphi = 0$. Обозначим

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\mu) = \partial P(0,\mu)/\partial u - 1 \quad \varepsilon_n = \varepsilon_n(\mu) = \frac{1}{n!}\partial^n P(0,\mu)/\partial u^n \quad n = 2,\ 3.$$

Используя уравнения в вариациях, получаем

$$\varepsilon_1 = e^{4\pi m_1} - 1 = 4\pi m_1 + o(m_1), \varepsilon_2 = m_2(e^{8\pi m_1} - e^{4\pi m_1})/m_1 = m_2(4\pi + O(m_1)),$$

$$\varepsilon_3 = m_2^2(e^{12\pi m_1} - 2e^{8\pi m_1} + e^{4\pi m_1})/m_1^2 + m_3^{(}e^{6\pi m_1} - e^{2\pi m_1})/m_1 =$$
$$= m_2^2(16\pi^2 + O(m_1)) + m_3(4\pi + O(m_1)).$$

Так как при $\mu = 0$ особая точка – центр, то $\varepsilon_1(0) = \varepsilon_2(0) = \varepsilon_3(0) = 0$, а потому $m_1(0) = m_2(0) = m_3(0) = 0$ и

$$\partial\varepsilon_i(0)/\partial\mu_j = 4\pi\,\partial m_i(0)/\partial\mu_j. \tag{6}$$

Теорема. *Пусть* $\det(\partial\varepsilon_i(0)/\partial\mu_j) \neq 0$. *Тогда существуют окрестность* U *особой точки, числа* $\delta > 0$, $\bar{k} > 0$ и C^1*-функция* γ : $(-\bar{k},\,0)\times(-\delta,\delta) \to (0,\bar{k})$, *для которой* $\lim\limits_{u\to -0}\gamma(u,v) = \lim\limits_{u\to -0}\gamma'_u(u,v) = 0$, *со следующими свойствами. При значениях параметров μ принадлежащих множеству $M = \{\mu : |\varepsilon_i(\mu)| < \delta,\ i = 1,2,3\}$ уравнение (1) имеет в U единственную особую точку $x = 0$, являющуюся в случае $\varepsilon_1 < 0(\varepsilon_1 > 0)$ устойчивым (неустойчивым) грубым фокусом, в случае $\varepsilon_1 = 0, \varepsilon_2 < 0$ $(\varepsilon_2 > 0)$ устойчивым (неустойчивым) двукратным фокусом, в случае $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0, \varepsilon_3 < 0$ $(\varepsilon_3 > 0)$ устойчивым (неустойчивым) трехкратным фокусом, и либо имеет в U не более двух замкнутых траекторий и они грубые, либо имеет единственную замкнутую траекторию – двойной цикл, а соответствующие значения параметров μ образуют двумерное C^1-подмногообразие B_** в M, *граница которого (в топологии M) состоит из точек, для которых или $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ или уравнение (1) не имеет замкнутых траекторий в U. Обозначим*

$$\begin{aligned}
M_1 &= \{\mu \in M : \ |\varepsilon_2/\varepsilon_1| \le 1,\ |\varepsilon_3/\varepsilon_1| \le 1\},\\
M_2 &= \{\mu \in M : \ |\varepsilon_1/\varepsilon_2| \le 1,\ |\varepsilon_3/\varepsilon_2| \le 1\}\\
k_i &= k_i(\mu) \ = \ \varepsilon_i(\mu)/\varepsilon_3(\mu)\,(i = 1,2),\\
M_3 &= \{\mu \in M : \ |k_1| < \bar{k},\ |k_2| < \bar{k}\}.
\end{aligned}$$

При $\mu \in M_1$, а также при $\mu \in M_2$, $\varepsilon_1/\varepsilon_2 \ge 0$ уравнение не имеет замкнутых траекторий в U, при $\mu \in M_2$, $\varepsilon_1/\varepsilon_2 < 0$ уравнение имеет не более одной замкнутой траектории (устойчивой, если $\varepsilon_1 > 0$ и неустойчивой, если $\varepsilon_1 < 0$), при $\mu \in M_3$ уравнение имеет только следующие замкнутые траектории: двойной цикл, если μ из $B_* \cap M_3 = \{\mu : k_1 = \gamma(k_2, \varepsilon_3)\}$, два грубых цикла, если $0 < k_1 < \gamma(k_2, \varepsilon_3)$, один грубый цикл, если $k_1 < 0$ или $k_1 = 0$, $k_2 < 0$, устойчивый (неустойчивый) для $\varepsilon_3 < 0(\varepsilon_3 > 0)$.

Замечание 1. Количество замкнутых траекторий в U при всех $\mu \in M$ нельзя точно указать в связи с нелокальным характером рассматриваемых бифуркаций – при изменении μ замкнутые траектории могут просто выходить из U.

Замечание 2. Из формул (5) и (6) следует, что условие $\det(\partial\varepsilon_i(0)/\partial\mu_j) \ne 0$ равносильно условию $\det(\partial a_i(0)/\partial\mu_j) \ne 0$, где для единообразия обозначено $a_0 := \alpha$. Хотя у нас нет формул для нахождения при любых μ коэффициента $a_2(\mu)$, а потому и производной $\partial a_2(0)/\partial\mu_j = 0$, тем ни менее мы можем проверить условие $\det(\partial a_i(0)/\partial\mu_j) \ne 0$, имея производные $\partial^{m_1+m_2+l}X_i^{(}0,0)/\partial x_1^{m_1}\partial x_2^{m_2}\partial\mu_j^l$ при $0 \le m_1 + m_2 \le 5$, $0 \le l \le 1$. Действительно, если $\partial a_0(0)/\partial\mu_j = \partial\alpha(0)/\partial\mu_j = 0$ при всех $j = 1,2,3$, то $\det(\partial a_i(0)/\partial\mu_j) = 0$. Если же одна из этих производных, например, $\partial\alpha(0)/\partial\mu_1 \ne 0$, то сделав замену параметров $\bar{\mu}_1 = \alpha(\mu)$, $\bar{\mu}_2 = \mu_2$, $\bar{\mu}_3 = \mu_3$, получим выражение определителя

$$\det(\partial a_i(0)/\partial\bar{\mu}_j) = (\partial a_1(0)/\partial\bar{\mu}_2)(\partial a_2(0)/\partial\bar{\mu}_3) - (\partial a_1(0)/\partial\bar{\mu}_3)(\partial a_2(0)/\partial\bar{\mu}_2)$$

через те производные, которые можно вычислить.

Пример (гармонический осциллятор с малым нелинейным “трением”)

$$\dot{x} = -y, \quad \dot{y} = x + 2\mu_1 y + \mu_2 y^3 + \mu_3 y^5.$$

Корни характеристического уравнения: $\lambda, \bar{\lambda} = \mu_1 \pm \sqrt{1-\mu_1^2}\, i$. Сделав замену $x = -\mu_1 u - \sqrt{1-\mu_1^2}\, v$, $y = u$, $u + iv = z$, получим уравнение

$$\dot{z} = \lambda z + (\mu_2 + o(|\mu|))(z+\bar{z})^3/8 + (\mu_3 + o(|\mu|))(z+\bar{z})^5/32.$$

Записав его в виде (2), по формулам (5.8) и (5.12) из [2, с. 40-41] находим

$$c_1(\mu) = 3\mu_2/8 + o(|\mu|), \quad c_2(\mu) = 5\mu_2/16 + o(|\mu|).$$

Из формул (5) и (6) получаем $\varepsilon_i = k_i \mu_i + o(|\mu|)$, $(i = 1, 2, 3)$, $k_1 = 4\pi$, $k_2 = 3\pi/2$, $k_3 = 5\pi/4$. Поэтому условия теоремы выполняются и имеет место описанная там бифуркационная диаграмма.

Библиографический список

1. *Ройтенберг, В.Ш.* О бифуркациях центра [Текст] / В.Ш. Ройтенберг // Совершенствование структуры и содержания физико-математического образования: материалы конференции “Чтения Ушинского”. – Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2004. – С. 23-24.
2. *Хэссард, Б.* Теория и приложения бифуркации рождения цикла [Текст] / Б. Хэссард, Н. Казаринов, И. Вэн. – М.: Мир, 1985.

Об асимптотических разложениях в ЦТП

В.Н. Соболев

Пусть X_1, $X_2, ...$ – независимые одинаково распределенные случайные величины с нулевым средним $\mathrm{M}X_1 = 0$ и единичной дисперсией $\mathrm{D}X_1 = 1$. Далее предполагается, что все используемые в дальнейшем моменты $\mathrm{M}X_1^k$ и $\mathrm{M}\,|X_1|^k$ существуют. Обозначим через P общее распределение этих случайных величин, через P_n – распределение нормированной суммы $(X_1 + ... + X_n)\, n^{-\frac{1}{2}}$, где n – натуральное число. Пусть $F(x)$ и $F_n(x)$ – функции распределения, а $f\,(t)$ и $f_n\,(t)$ – характеристические функции распределений P и P_n соответственно. Через $p_n\,(x)$ обозначим плотность распределения $F_n(x)$. Для функции распределения стандартного нормального закона с плотностью $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ используем обозначение $\Phi(x)$.

Необходимость изучения асимптотических разложений в ЦПТ связана с тем, что сама ЦПТ, в которой распределение P_n аппроксимируется нормальным законом, имеет довольно малую точность. Так, например, для того, чтобы самая известная оценка точности апроксимации в ЦПТ, теорема Бэрри-Эссена гарантировала точность аппроксимации порядка 10^{-3} число слагаемых в нормированных суммах должно быть более 160 тысяч [3, с. 71].

Ограничения, которые налагаются на распределение P при построении асимптотических разложений, запишем в виде следующего условия

Условие 1. Пусть у распределения P с нулевым средним и единичной дисперсией существует конечный момент порядка $m+2$, где m – целое число, $m \geqslant 2$. Пусть существует число $\nu > 0$ такое, что для характеристической функции $f(t)$ распределения P выполняется условие $\int_{-\infty}^{\infty} |f\,(t)|^{\nu}\,dt < \infty$. Пусть неотрицательная четная функция $\mu\,(t) \leqslant 1$ и число $T > 0$ таковы, что $|f\,(t)| \leqslant \mu\,(t)$ и $e^{-\frac{t^2}{2}} \leqslant \mu\,(t)$ при $|t| \leqslant T$.

В 2009 г. вышла монография В.В. Сенатова [3], в которой предложены новые подходы для построения асимптотических разложений, некоторые из которых были использованы при построении рассматриваемых ниже асимптотических разложениях.

Определим многочлены Чебышева-Эрмита $H_k(x)$ с помощью формулы

$$H_k(x) = (-1)^k \frac{\varphi^{(k)}\,(x)}{\varphi\,(x)}\,, k = 0, 1, 2, .. \tag{1}$$

и нормированные моменты Чебышева-Эрмита распределения P как

$$\theta_k = \frac{1}{k!}\int_{-\infty}^{\infty} H_k(x)P(dx)\,, k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Также введем величины

$$\Theta_{s,l} = \sum_{t_1+\ldots+t_s=l} \theta_{t_1}...\theta_{t_s}\,,\ s = 1, 2, ..., m-1\,,\ l = 3s, ..., m-1+2s\,, \tag{2}$$

где суммирование ведется по наборам неотрицательных целых чисел t_1,...,t_s таким, что $t_1 + ... + t_s = l$ и $t_j \geqslant 3$, $j = 1, ..., m-1$, и

$$\|\Theta_{s,l}\| = \sum_{t_1+\ldots+t_s=l} |\theta_{t_1}...\theta_{t_s}|\,, \tag{3}$$

где суммирование ведется по тем же наборам неотрицательных целых чисел t_1,...,t_s, что и в ((2)). Величины $\|\Theta_{0,j}\|$ для $j = 0, 1, 2, ..$ определяются по формуле $\|\Theta_{0,j}\| = \delta_{0,j}$, где $\delta_{0,j}$ символ Кронекера, равный 1, если нижние индексы совпадают, и нулю во всех остальных случаях.

В теореме 1 используется идеальная метрика $\zeta_3 = \zeta_3(P, \Phi)$, которая определяется следующим образом

$$\zeta_3(P, \Phi) = \sup \left\{ \left| \int_{-\infty}^{\infty} u(x) \left(P(dx) - \Phi(dx) \right) \right| \,:\, u \in \mathfrak{F}_3 \right\},$$

где $\mathfrak{F}_3$ – множество комплекснозначных дважды дифференцируемых функций $u(x)$, $-\infty < x < \infty$, таких что, $\left| u^{(2)}(x) - u^{(2)}(y) \right| \leqslant |x - y|$ для любых действительных x и y. Идеальные метрики ζ_s, $s > 0$, введены В.М. Золотаревым (см., например, [1, с. 83]).

Теорема 1. *При выполнении условия* 1, *наложенного на распределение P, для любого $n \geqslant \max(\nu, m+1)$ при все действительных x*

$$p_n(x) = \varphi(x) + \sum_{s=1}^{m-1} C_n^s \sum_{l=3s}^{m-1+2s} \frac{\Theta_{s,l}}{n^{l/2}} H_l(x) \varphi(x) + R \,, \tag{4}$$

где

$$|R| \leqslant \frac{1}{n^{m/2}} \Bigg(\left\| \theta_{m+2} \right\| B_{m+2,n-1} + \left\| \theta_{m+3}^{(m+1)} \right\| \frac{B_{m+3,n-1}}{\sqrt{n}} +$$

$$+ \sum_{s=2}^{m-1} \frac{1}{s!} \sum_{l=3}^{m+2-s} \left\| \Theta_{s-1,m-1+2s-l} \right\| \Big[\left\| \theta_{l+1} \right\| B_{m+2s,n-1} +$$

$$+ \left\| \theta_{l+2}^{(l)} \right\| \frac{B_{m+2s+1,n-1}}{\sqrt{n}} \Big] +$$

$$+ \sum_{s=1}^{m-1} \frac{1}{(s+1)!} \left\| \Theta_{s,m-1+2s} \right\| \zeta_3 B_{m+2s+2,n-1} \Bigg) +$$

$$+ \frac{\sqrt{n}}{\pi} \alpha^{n-\nu}(T) \int_T^{\infty} |f(t)|^{\nu} dt + \frac{1}{T\sqrt{n}} e^{-T^2 n/2} + \sum_{s=1}^{m-1} C_n^s \sum_{l=3s}^{m-1+2s} \frac{|\Theta_{s,l}|}{n^{l/2}} L_l(T\sqrt{n}) \,.$$

При $m = 2$ сумму по $2 \leqslant s \leqslant m-1$ в оценке величины R следует опустить. Для остаточной части разложения также справедлива оценка

$$|R| \leqslant \frac{1}{n^{m/2}} \Bigg(\sum_{s=1}^{m} \frac{1}{s!} \sum_{l=2}^{m+2-s} \left\| \Theta_{s-1,m-1+2s-l} \right\| \Big[\left\| \theta_{l+1} \right\| B_{m+2s,n-1} +$$

$$+ \left\| \theta_{l+2}^{(l)} \right\| \frac{B_{m+2s+1,n-1}}{\sqrt{n}} \Big] \Bigg) +$$

$$+\frac{\sqrt{n}}{\pi}\alpha^{n-\nu}\left(T\right)\int_{T}^{\infty}\left|f\left(t\right)\right|^{\nu}dt+\frac{1}{T\sqrt{n}}e^{-T^{2}n/2}+\sum_{s=1}^{m-1}C_{n}^{s}\sum_{l=3s}^{m-1+2s}\frac{|\Theta_{s,l}|}{n^{l/2}}L_{l}(T\sqrt{n}),$$

в которой $\|\Theta_{0,j}\|=\delta_{0,j}$ *для* $j=0,1,2,...$

При построении асимптотических разложений в ЦТП часто используются разложения вида Грама-Шарлье [3, с. 197]. Разложения ((4)) можно записать в виде разложений Грама-Шарлье с явной оценкой остатка.

Теорема 2. *Разложение, представленное в теореме* 1, *можно записать в виде разложения Грама-Шарлье*

$$p_{n}(x)=\varphi(x)+\sum_{l=3}^{m+1}\theta_{l}(P_{n})H_{l}(x)\varphi(x)+$$

$$+\sum_{l=m+2,\,l\neq 3m-4}^{3m-3}\widehat{\theta}_{l}^{(m+1)}(P_{n})H_{l}(x)\varphi(x)+R,$$

где величина R *– та же, что и в утверждении теоремы 4, а усеченные квазимоменты Чебышева-Эрмита* $\widehat{\theta}_{l}^{(m+1)}(P_{n})$ *находятся по формуле*

$$\widehat{\theta}_{l}^{(m+1)}(P_{n})=\frac{n!}{n^{l/2}}\sum\frac{1}{(n-(k_{3}+...+k_{m+1}))!}\frac{\theta_{3}^{k_{3}}}{k_{3}!}\cdots\frac{\theta_{l}^{k_{m+1}}}{k_{m+1}!},$$

в которой суммирование ведется по всем таким наборам неотрицательных целых чисел $k_{3},...,k_{m+1}$, *что* $3k_{3}+...+(m+1)\,k_{m+1}=l$ *и* $k_{3}+...+k_{m+1}\geqslant\frac{l-m+1}{2}$.

Разложения вида ((4)) позволяют получать разложения вида Эджворта-Крамера

$$p_{n}(x)=\varphi(x)+\sum_{j=1}^{m-1}\frac{K_{j}(x)}{n^{j/2}}\varphi(x)+R \tag{5}$$

с явной оценкой остатка. Так, например, справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Многочлены* $K_{j}(x)$, $j=1,2,...,m-1$, *участвующие в разложении Эджворта-Крамера ((5)), допускают представление*

$$K_{j}(x)=\sum_{k=0}^{[\frac{j-1}{3}]}\sum_{l=1}^{j-3k}c_{k+l,l}\Theta_{k+l,\,j+2l}H_{j+2l}(x)\,.$$

Коэффициенты $c_{s,k}$ *находятся по формуле* $c_{s,k} = \frac{(-1)^{s-k}}{k!} \sum\limits_{j_1+\ldots+j_k=s} \frac{1}{j_1 \cdots j_k}$, *где суммирование ведется по всевозможным наборам натуральных чисел* $j_1, \ldots, j_k$, *таким что* $j_1 + \ldots + j_k = s$.

Впервые явные формулы для $K_j(x)$ в терминах семиинвариантах получены В.В. Петровым в [2]. Отметим, что коэффициенты $c_{s,k}$ являются коэффициентами в разложении $C_n^s = \sum\limits_{k=1}^{s} c_{s,k} n^k$, по степеням n, где C_n^s – число сочетаний из n по s.

Библиографический список

1. *Золотарев, В.М.* Современная теория суммирования независимых случайных величин [Текст] / В.М. Золотарев. – М.: Наука, 1986.
2. *Петров, В.В.* О некоторых полиномах, встречающихся в теории вероятностей [Текст] / В.В. Петров. – Л.: Вестник ЛГУ, 1962. – 19. – С. 150-153.
3. *Сенатов, В.В.* Центральная предельная теорема: Точность аппроксимации и асимптотические разложения [Текст] / В.В. Сенатов. – М.: Книжный дом "Либроком", 2009.

К воросу о применении преобразований Лапласа к анализу переходных процессов в радиотехнических цепях

В.Н. Станевко

При подготовке специалистов в вузе по радиотехническим специальностям на этапе изучения радиотехнических дисциплин, таких как “Основы теории цепей”, “Основы радиоэлектроники и связи” и аналогичных им обязательным для изучения является раздел “Переходные процессы в радиотехнических цепях”. В радиотехнических цепях переходные процессы имеют большое значение. В ряде случаев они являются аварийными режимами, а в ряде радиотехнических устройств они являются необходимым условием их функционирования. Поэтому к вопросу разработки методов анализа переходных процессов в радиотехнических цепях уделяется определенное внимание.

Изучение этих вопросов в вузе осуществляется на примере цепей первого порядка (рис. 1) и на примере цепей второго порядка (рис. 2).

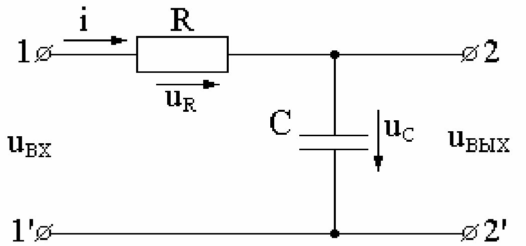


Рис. 1 Цепь первого порядка

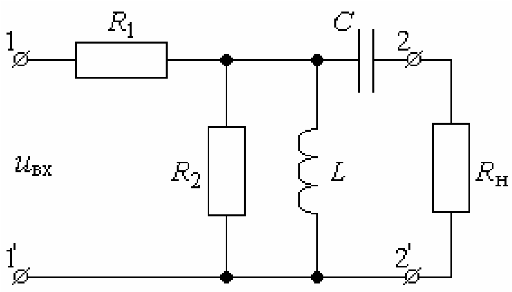


Рис. 2 Цепь второго порядка

Анализ переходного процесса в этих цепях происходит путем изучения поведения напряжения на выходе схемы при входном напряжении в виде ступенчатой функции:

$$u_{\text{вх}}(t) = U_{\text{m}} \cdot 1(t)$$

где $1\,(t) = \eta(t) = \begin{cases} 0, t < 0 \\ 1, t \geq 0 \end{cases}$ – единичная ступенчатая функция.

Классический метод анализа состоит в записи необходимого количества исходных уравнений по законам Кирхгофа и их объединения методом последовательного исключения. В результате чего получают обобщенное дифференциальное уравнение, связывающее выходное напряжение с входным напряжением. Решение этого уравнения с учетом начальных условий описывает поведение выходного напряжения от момента коммутации до установившегося режима. С помощью графически представленного напряжения в функции от времени определяется время переходного процесса, постоянная времени цепи. На рис. 3 показан вид переходного процесса в цепи первого порядка (рис. 1). На рис. 4 показаны возможные виды переходных процессов в цепи второго порядка (рис. 2). При малой добротности цепи переходные процесс происходит по кривой 1, а при большой добротности переходный процесс происходит по кривой 2.

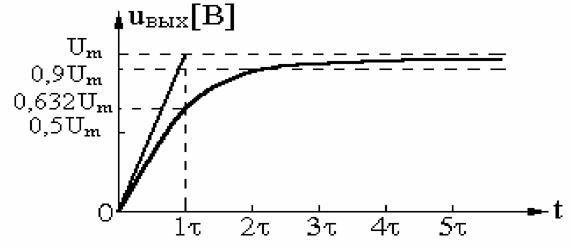


Рис. 3 График переходного процесса
В цепи первого порядка (рис.1)

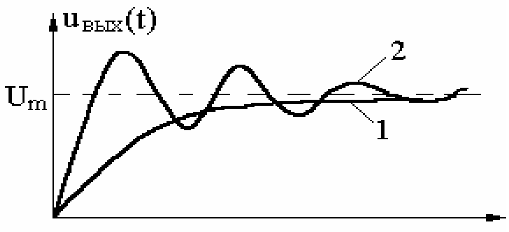


Рис. 4 Графики переходных процессов цепи второго порядка

Как было отмечено, один из способов анализа переходных процессов состоит в получении обобщенного дифференциального уравнения, связывающего входной сигнал с выходным, и решении этого уравнения известными аналитическими или численными методами.

Процесс анализа переходных процессов несколько упрощается при использовании преобразований Лапласа. Типовая последовательность применения преобразований Лапласа состоит в получении сначала обобщенного дифференциального уравнения схемы, затем в преобразовании его по Лапласу, нахождении искомой величины в операторной форме (изображение искомой величины) и, наконец, в определении оригинала по найденному изображению с помощью обратного преобразования Лапласа – с помощью таблиц или вычетов. Однако в обоих случаях необходимо получить обобщенное дифференциальное уравнение, что не всегда просто. Приведем пример. Для, далеко не самой сложной цепи, представленной на рис.2 исходные уравнения имеют вид:

$$\begin{aligned}
&i_1 = i_2 + i_L + i_{\text{Н}}\\
&u_{\text{Вх}} = i_1 \cdot R_1 + i_2 \cdot R_2\\
&0 = L\tfrac{di_L}{dt} - i_2 \cdot R_2\\
&0 = -L\tfrac{di_L}{dt} + \tfrac{1}{C}\int i_{\text{Н}} dt + i_{\text{Н}} \cdot R_{\text{Н}}
\end{aligned}$$

Как видим, в системе уравнений присутствуют дифференциальное и интегральное уравнения, что создает определенные сложности у студента и инженера конструкторского бюро при получении обобщенного уравнения. Поэтапно объединяя исходные уравнения, будет получено обобщенное уравнение, которое имеет вид:

$$u_{\text{Вх}} = A\int\left(\int u_{\text{Н}} dt\right) dt + B\int u_{\text{Н}} dt + C \cdot u_{\text{Н}}$$

В операторной форме это уравнение принимает вид:

$$P^2 U_{\text{Вх}}(p) = (\alpha \cdot P^2 + \beta \cdot P + \gamma) \cdot U_{\text{Н}}(p)$$

Трудности, связанные с получением обобщенного уравнения можно избежать, если полученные уравнения с помощью законов Кирхгофа преобразовать по Лапласу. В этом случае все уравнения становятся алгебраическими и процесс получения обобщенного уравнения в операторной форме не вызывает труда. Так, система уравнений, полученная по законам Кирхгофа в операторной форме, имеет вид:

$$\begin{aligned}
&I_1(p) = I_2(p) + I_L(p) + I_{\text{Н}}(p)\\
&U_{\text{Вх}}(p) = I_1(p) \cdot R_1 + I_2(p) \cdot R_2\\
&0 = Lp \cdot I_L(p) - I_2(p) \cdot R_2\\
&0 = -Lp \cdot I_L(p) + \tfrac{1}{Cp} I_{\text{Н}}(p) + I_{\text{Н}}(P) \cdot R_{\text{Н}}
\end{aligned}$$

Сравнивая эту систему уравнений с выше представленной, видно, что данная система проще. Это облегчает процесс получения уравнения сразу в операторной форме и снижает вероятность получения ошибок в процессе вычислений. Совершенно очевидно, что результатом вычислений будет такое же уравнение в операторной форме.

От необходимости обобщения дифференциальных и интегральных уравнений свободен метод, когда исходная схема представляется в операторной форме. Этот метод позволяет расширить диапазон применяемых методов анализа цепи. Однако он не приемлем для анализа активных цепей, т.е. цепей, содержащих усилительные элементы или там необходимо использовать схемы замещения этих элементов, в чем не всегда есть необходимость.

Проблемы вычисления остаточной поверхности для решения геологических задач

Н. Зайб, Й. Кляй

Введение

Анализ морфологических структур необходим для решения многих геологических задач. На сегодняшний день накоплен огромный опыт распознавания форм рельефа и их интерпретации для реконструкции различных геологических процессов. Современный рельеф, как правило, является отражением нескольких наложенных геологических процессов. Выделение отдельных форм рельефа и их взаимное положение помогает разобраться с периодичностью геологического развития региона. Соответственно конкретные геологической задачи подразумевают выделение отдельных рельефных форм. Это выделение контуров и структурные позиции изучаемых объектов их взаимное расположение и масштабность проявления, а также некоторые физико географические особенности, например, оценка эрозионных процессов, которые в свою очередь указывают на тектонические изменения региона. В одних случаях это выделение регионального рельефа, в других требуется выделение локальных форм С развитием матричных электронных моделей высотных поверхностей и компьютерных технологий, появились также новые возможности анализа. Возможность работы с абсолютными и относительными величинами высот позволяет не только качественно оценить объекты, но так же дать количественную оценку некоторых процессов. Три описанные ниже примера, демонстрируют возможность использования анализа рельефа для решения геологически задач. Общим в них является нахождение фоновой - региональной поверхности, которая одновременно дает информацию о региональном рельефе или относительно которой возможны вычисления резидуальной (остаточной) поверхности для обособления локальных форм.

1. Вычисление “Энергии рельефа” на примере Тянь-Шаньских гор

Как известно Тянь-Шаньский регион находится в стадии активного горообразования и рельеф гор является отражением тектонических процесов происходящих в регионе. Оценка неоднородности рельефа, его текстуры, относительной разницы эрозионных врезов дают возможность на ряду с другими методами охарактеризовать тектонические особенности региона (Sobel et al, 2005; Bubank, 2002).

В своей работе Марк (Mark 1975) описывает три высотные характеристики рельефа (рис. 1):

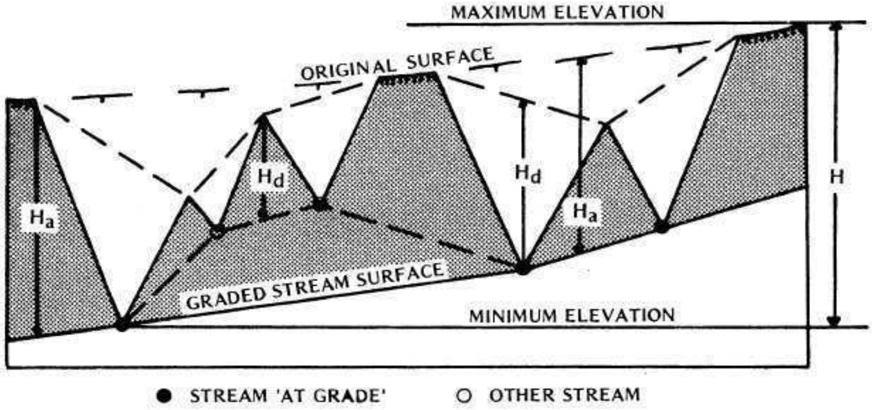


Рис. 1. Абстрактный топографический профиль показывающий вариации измерений рельефа

H – энергия рельефа (Reliefenergie) – величина между минимальным и максимальным значением рельефа в каком либо произвольно ограниченном пространстве;

Ha – досигаемый рельеф (available relief) – вертикальное расстояние между предполагаемой поверхностью выравнивания и поверхностью соединяющей смежные русла;

Hd – дренажный рельеф (drainage relief) – вертикальное расстояние между смежными водоразделом и рекой.

На практике мы часто не можем с достаточной точностью разделить эти три понятия. Степень генерализации выборки речной сети и водоразделов размывает точное определение термина “дренажный рельеф”. Если водораздел совпадает с поверхностью выравнивания, то в этом случае “дренажный рельеф” равен “досягаемому рельефу”. Если мы рассматриваем “энергию рельефа” на площади между смежными рекой и водоразделом то“энергия рельефа” будет равна “дренажному рельефу”. Поэтому далее мы будем говорить об “энергии рельефа”, как об объединяющем термине описывающем неоднородность рельефа - его текстуру и являющимся вертикальным расстоянием между водоразделом и смежной рекой.

Как видно из рисунка, нам необходимо найти разницу между сглаженной верхней, соединяющей вершины и хребты, и нижней, соединяющей речные долины, поверхностей. Но казалось бы на первый взгляд простая задача нахождения сглаженной поверхности имеет определенные трудности. Сразу отпадает возможность применить стандартные математические функции, такие как “Median”, “Low Pass” фильтры, Фурье анализ или полином. Все они дают региональный фон, но не позволяют контролировать краевые отметки высот. Остается применение сглаживающей поверхности построенной по точкам перегиба. Т.е. необходимо найти экстремальные точки иначе вторую производную от поверхности и разделить полученные экстремальные значения по их позиции в рельефе. Такая функция реализована в пакете программ ENVI. Алгоритм использованный в модуле “Topographic Fiatures” ENVI для вычисления каналов и хребтов был описан Вудом (Wood, 1986). Другой вариант выбора граничных отметок высот, возможен как результат вычисления поверхностей от построенной в ArcMap (ArcScript: Galang, 2005) речной сети с заданным порогом водосбора. Причем для выделения хребтов возможно использование построения речной сети на основе инвертированного рельефа (Чернова и др. 2005).

На этапе отбора вершин, хребтов, ям и долин важно корректно выбрать порог сглаживания т.е. ограничение выбора хребтов и речных долин на основе их масштабных характеристик. Интерполяция высотных отметок была проведена пакетом программой ArcMap.

В результате получена количественная оценка перепада высот для Тянь-Шаньского региона, которая может быть показана в цвете. Анализ и сопоставление полученных данных с данными предшествующих работ позволяют подчеркнуть активные тектонические зоны.

Сглаженная поверхность рельефа неожиданно подчеркивает и объединяет ряд долин и фрагменты разломов в крупные дугообразные структуры на западе региона, а восточной и южной части региона выделились структуры северо западного направления (рис. 2).

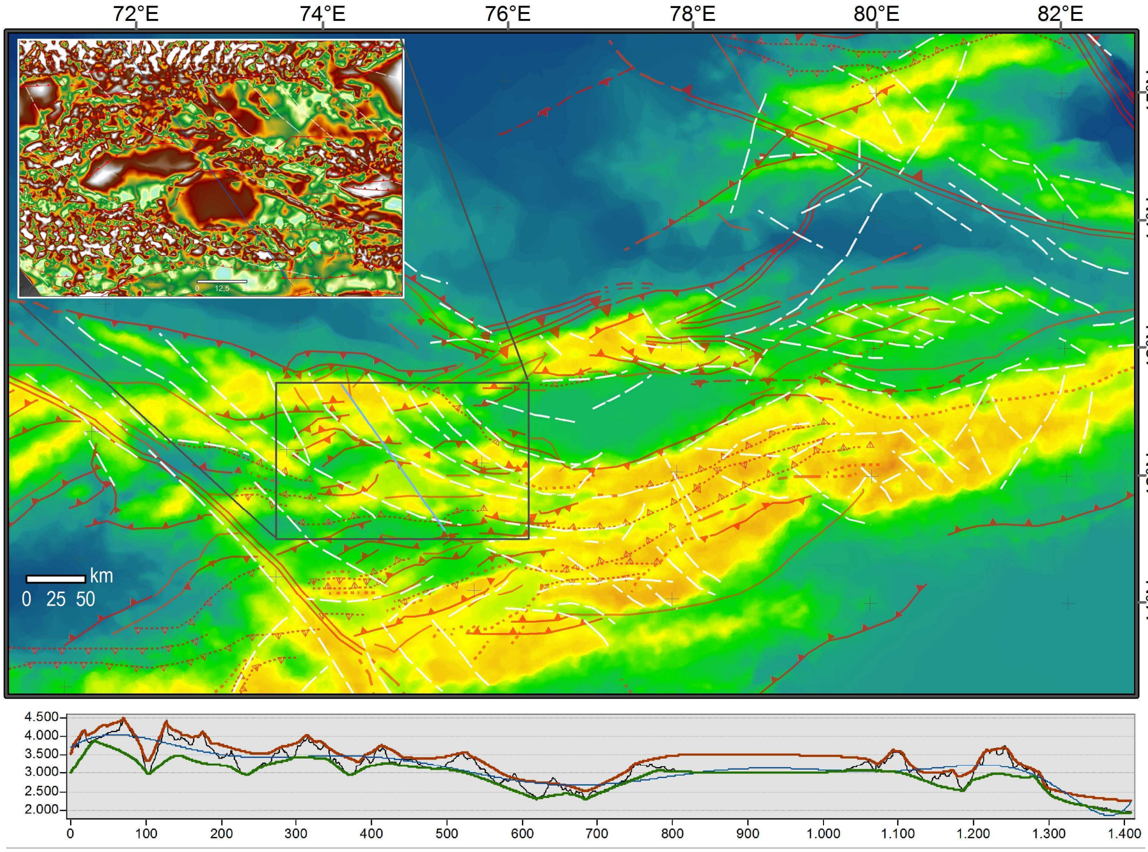


Рис. 2. Поверхность, полученная в результате интерполяции значений вершин ЦМР методом ближайшего соседа с наложенной системой активных разломов – красные линии (Laverov et al., 2005). Пунктирными линиями показаны линименты, интерпретированные по топографическому градиенту сглаженной поверхности, предположительно отвечающих глубинным сдвиговым разломам. На графике показаны профили поверхности рельефа, сглаженных поверхностей построенных по хребтам и рекам. Для сравнения дан профиль полинома ЦМР. В верхнем левом углу фрагмент карты “Энергии рельефа”

Такие региональные структуры можно интерпретировать, как отражение проявленных глубинных процессов на поверхности современного рельефа.

2. Картирование предгорной поверхности выравнивания и речных террас предгорий Алтын-Эмель (Тянь-Шань)

Фрагменты поверхность выравнивания предгорий Алтын-Эмель и речные террасы находится на полого наклоненном в результате тектонического поднятия склоне. Анализ абсолютных высот не дает возможность сопоставить позиции плоскостей выравнивания относительно друг друга, особенно если эти поверхности не соприкасаются и лежат в относительном отдалении друг от друга. В этой задаче необходимо было найти поверхность относительно которой можно было бы оценить положение денудационных поверхностей. Поверхность соединяющая русла рек выше четвертого порядка (базисная поверхность), была принята за нулевой отсчет для вычисления положения остальных поверхностей. В этом случае мы получили разноуровневые поверхности, высота которых измеряется относительно нулевой поверхности. Это дало возможность построить карту отражающую все поверхности выравнивания и их относительное друг друга положение. Такая карта дает возможность оценить историческое развитие рельефа региона и в сопоставлении с другими данными оценить его тектоническую активность. Однако в описанном построении остаточной поверхности мы не можем учесть позиции самих русел относительно друг друга. Для этого нужно было выбрать нулевую плоскость совпадающую с наклоном склона и лежащую в пределах высот региона. Для построения такой поверхности была выбрана плоскость одной и хорошо проявленных террас, относительно которой был вычислен остаточный рельеф. Полученная поверхность хорошо отражает разницу высот восточной и западной части региона. Различие развития террас левого и правого бортов реки Борохудзы, позволяет предположить наличие скрытого разлома вдоль реки Борохудзы (рис. 3). Расчеты производились в пакете программ ArcMap. Для построения речной сети использовался ArcScript: “Automated Stream Order from a DEM” (Galang 2005).

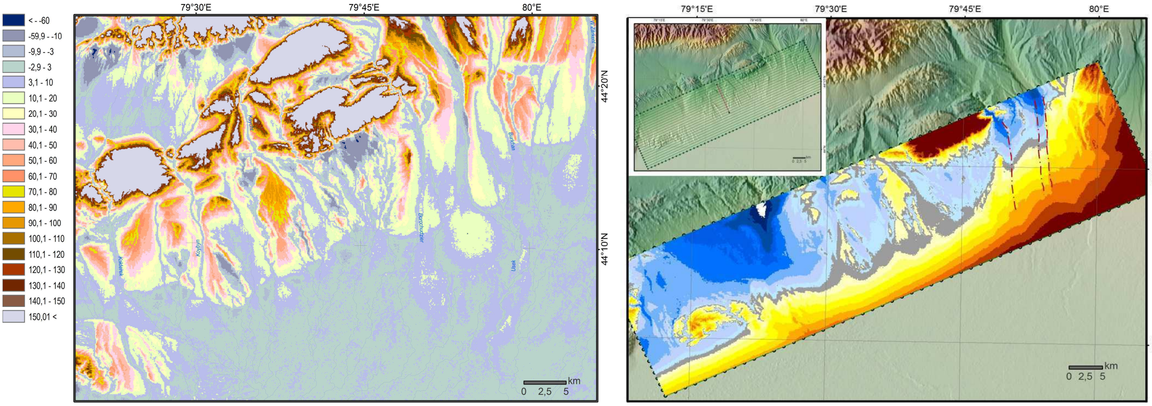


Рис. 3. Слева: карта высотного положения рельефа относительно поверхности речного вреза. С права: поверхность предгорья Катутау относительно поверхности хорошо сохранившейся террасы

3. Выделение конусовидных локальных форм мааров, на примере вулканического поля Западного Айфеля

Молодой вулканизм Айфеля сохранил в рельефе характерные чашеобразные формы величиной от 100 до 1000 м в диаметре, по которым возможно было откартировать известные на сегодня маары (Büchel, 1994). Однако активное поднятие региона, нивелировало многие формы мааров, а некоторые были изменены в результате речной эрозии. Такие, претерпевшие изменения маары плохо различимы в рельефе. Почвенный слой и растительность дополнительно осложняют их картирование. Появление ЦМР (цифровой модеоли рельефа) с высоким разрешением позволило прересмотреть структуру ландшафта.

В данной задаче было необходимо выделить локальные понижения рельефа чашеобразной формы. В начале была построена сглаживающая поверхность по хребтам, но в отличие от задачи с горами, пики и хребты на ребрах мааров сопоставимы по масштабу с хребтами внутри ложбины и при вычислении локального рельефа внутренние хребты создавали помехи для выделения реликтовых форм мааров. Что бы отфильтровать внутренние хребты и пики мы построили нижнюю поверхность рельефа экстраполированную на точках каналов (рис. 4).

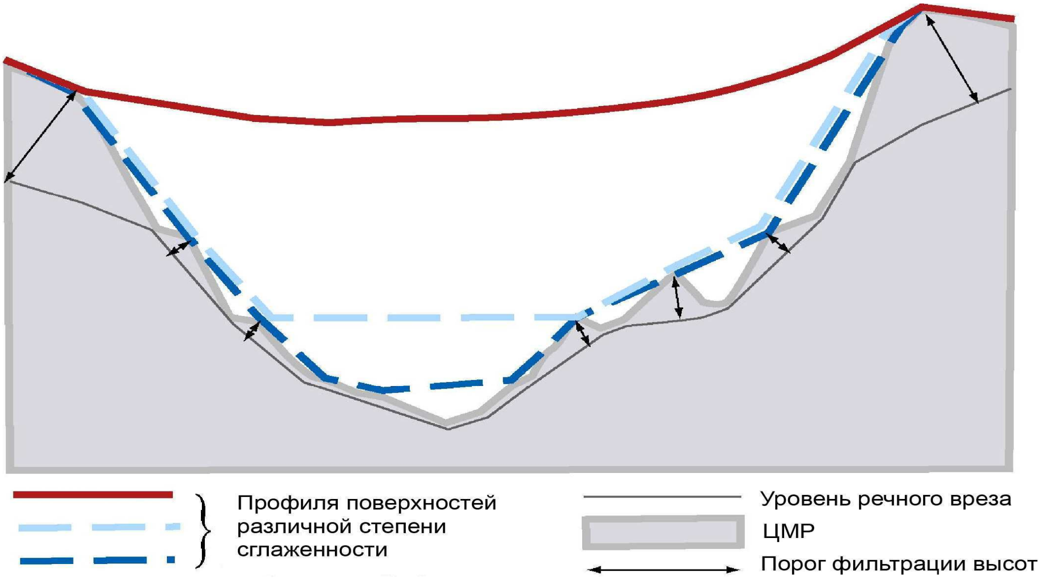


Рис. 4. Ландшафтный профиль маара с профилями сглаженных поверхностей

Вертикальное расстояние от этой поверхности до хребтов дает возможность фильтровать нижние отметки т.е. хребты лежащие ниже определенного уровня от поверхности каналов. Такой подход позволяет с наибольшей точностью восстановить остаточную форму понижений. Дальнейшая их фильтрация по характерным для мааров морфологическим признакам, позволила выделить места предполагаемых скрытых структур вулканизма (рис. 5).

Отдельные выделенные формы были заверены полевыми наблюдениями. По результатам измерений магнитного поля, было подтверждено наличие трех вулканических тел в местах выделенных структур (Seib et.al 2008).

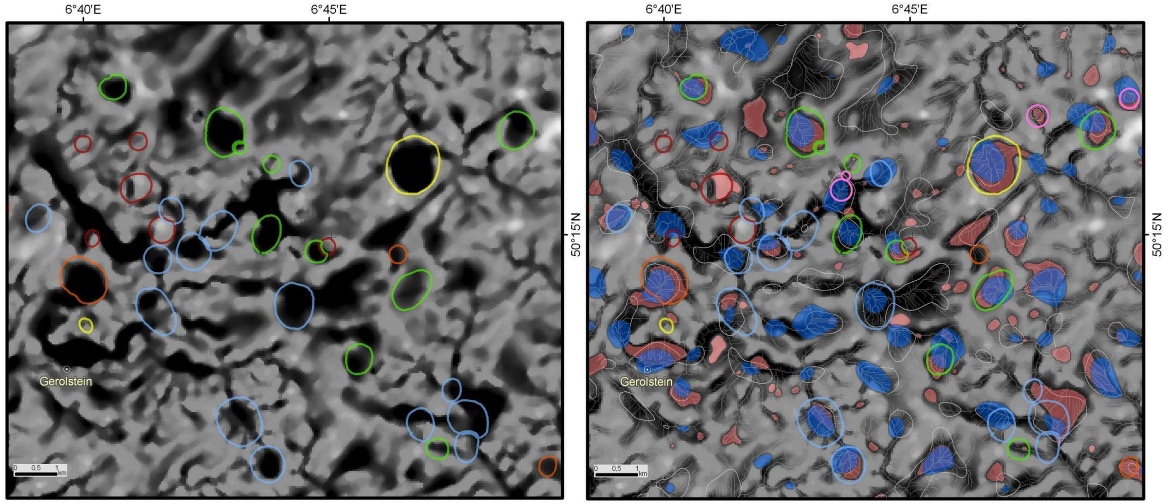


Рис. 5. Слева: поверхность остаточного рельефа с контурами откартированных мааров. Справа: наложена выборка контуров изометричной формы посчитанных на основе остаточной поверхности (красный), выборка плотности слияний рек более трех про 600 $м^2$ имеющая изометричную форму(синий) и контур плотности линиментов речной сети > 7 про 500 $м^2$

Заключение

В работе показаны эффективность использования электронных поверхностей ландшафта для решения геологических задач, а так же вариации расчетов резидуального рельефа в зависимости от геологических особенностей региона. Приведенные методы позволяют так же лучше визуализировать геологические ситуации и давать сравнительные оценки изучаемых объектов. Предложенный метод фильтрации высот позволяет гибко варьировать сглаживанием поверхности в зависимости от поставленной задачи. В результате расчетов получена дополнительная информация о современных изменениях рельефа Тянь-Шаня, предварительно откартированны и позиционированы фрагменты денудационных поверхностей региона Алтын-Эмель. Получена информация позволяющая выделить крупные разлом долготного простирания вдоль реки Борохудзыр, а так же выделены структуры подобные откартированным структурам проявленного вулканизма региона Айфель (Западная Германия). Три заверенные структуры, подтверждают наличие не окартированных мааров.

Библиографический список

1. *Büchel, G.* Maars of the Westeifel, Germany. - In: Negendank, J.F.W. & Zolitschka, B. (Hrsg.): Paleolimnology of European maar lakes. – Lect. Notes Earth Sci., 49: 1-13, Berlin (Springer), 1993.
2. *Büchel, G.* (ed.) Vulkanologische Karte der West- und Hocheifel 1:50.000, Koblenz (Landesvermessungsamt Rheinland-Pfalz), 1994.
3. *Burbank, D.W.* Rates of erosion and their implications for exhumation. Mineralogical Magazine 66(1): 25-52, 2002.
4. *Galang, J.* 2005. http://arcscripts.esri.com/details.asp?dbid=13836
5. *Laverov, N.P., Aitmatov, I.T., Bakirov, A.B., Fridman, A.M., Leonov, Y.G., Zeigarnik, V.A., Makarov, V.I., Novikov, A.M., Shchelochkov, G.G.* Recent geodynamics of areas of intracontinental collision mountain building (central Asia): Moscow, Scientific world, 2005. 400 p.
6. *Mark, D.M.* Geomorphometric parameters: A review and evaluation: Geografiska Annaler, series A, 1975. V. 3. P. 165-177.
7. *Seib, N., Kley, J., Torizin, E., Zander, I., Goepel, A., Bčhel, G.* Identifikation vulkanischer Formen in einem digitalen Geländemodell (DGM) der Westeifel. Z dt. Ges. Geowiss., 159/4, 2008. P. 657-670.
8. *Sobel, E.R., Oskin, M., Burbank, D., Mikolaichuk, A.* Exhumation of basement-cored uplifts: Example of the Kyrgyz Range quantified with apatite fission track thermochronology. Tectonics 25(2), 2006.
9. *Wood, J.D.* The geomorphological characterisation of digital elevation models. PhD Thesis, University of Leicester, UK, 1996. http://www.soi.city.ac.uk/ jwo/phd
10. *Чернова, И.Ю.* Обнаружение и исследование зон новейших движений земной коры инструментами ARCREVIEW ГИС [Текст] / И.Ю. Чернова, Д.И. Хасанов, И.Я. Жарков, Р.Р. Бильданов, Т.С. Каширина. – Выпуск № 1 (32). – 2005. http://www.dataplus.ru/Arcrev/Number_32/6_kora.htm

Условия сходимости почти всюду преобразований и интегралов Фурье функций из пространства L^2

С.В. Зотиков

Пусть $\Phi = (\varphi_т)_{т=0}^{\infty}$ и Ψ= $(\psi_т)_{т=0}^{\infty}$ – две произвольные ортонормированные на [0;1[системы (о.н.с.), все функции которых с периодом 1 продолжены на правую числовую полуось $\mathbf{R}_0$. Скрещенным произведением о.н.с. Φ на о.н.с. Ψ называется функция К$_{\Phi\Psi}$, определяемая на $\mathbf{R}_0\times$ $\mathbf{R}_0$ соотношением: К$_{\Phi\Psi}(x, y)$ =$\varphi_{[y]}(x)\psi_{[x]}(y)$, где $[x]$ – целая часть числа $x \in$ $\mathbf{R}_0$ (см. [1]). Эта функция является континуальным аналогом и о.н.с. Φ и о.н.с. Ψ.

Если Φ и Ψ – ограниченные о.н.с., то их скрещенное произведение К$_{\Phi\Psi}$ порождает для всякой функции $f \in L^1(0;\infty)$ интегральные преобразования вида

$$\hat{f}(y) = \int\limits_0^{\infty} f(x)\overline{K_{\Phi\Psi}(x,y)dx},\ y \in R_0 \ \text{ и } \ f^*(x) = \int\limits_0^{\infty} f(y)\,K_{\Phi\Psi}(x,y)dy,\ x \in R_0,$$

которые являются аналогами классического преобразования Фурье в пространстве L и которые мы называем соответственно $^\wedge$- и *-преобразованиями Фурье по отношению к К$_{\Phi\Psi}$ функции $f \in L^1(0;\infty)$. Очевидно, что преобразование $\hat{f}$ является континуальным аналогом коэффициентов Фурье интегрируемой функции f по о.н.с. Φ, а преобразование f^* является континуальным аналогом коэффициентов Фурье той же функции по о.н.с Ψ. Обычным образом определяются для $f \in L^1(0;\infty)$ ее $^\wedge$-интеграл Фурье и *-интеграл Фурье по отношению к К$_{\Phi\Psi}$.

В работе [2] доказано, что произвольное скрещенное произведение К$_{\Phi\Psi}$ для всякой функции $f \in L^2(0;\infty)$ порождает интегральные преобразования вида

$$\hat{f}(y) \overset{L^2}{=} \int\limits_0^{\infty} f(x)\overline{K_{\varphi\psi}(x,y)}dx,\ y \in R_0 \ \text{ и } \ f^*(x) \overset{L^2}{=} \int\limits_0^{\infty} f(y)K_{\varphi\psi}(x,y)dy,\ x \in R_0, \tag{1}$$

которые являются аналогами классического преобразования Фурье в пространстве L^2 и которые мы называем соответственно $^\wedge$- и *-преобразованиями Фурье по отношению к К$_{\Phi\Psi}$ функции $f \in L^2(0;\infty)$. Интегралы $\int\limits_0^{\infty} \hat{f}(\mathrm{y})K_{\varphi\psi}(x,y)d\mathrm{y}$ и $\int\limits_0^{\infty} f^*(x)\overline{K_{\varphi\psi}(x,y)}\,dx$ мы называем $^\wedge$-интегралом Фурье и *-интегралом Фурье по отношению к К$_{\Phi\Psi}$ функции $f \in L^2(0;\infty)$.

Каждый из них понимается как предел в метрике $L^2(0;\infty)$ последовательностей соответствующих частных интегралов.

В статье [2] показано, что, если функция $f \in L^1(0;\infty) \cap L^2(0;\infty)$, а о.н.с. Φ и о.н.с. Ψ таковы, что определены преобразования Фурье по отношению к $\mathrm{K}_{\Phi\Psi}$ функции f в пространстве $L^1(0;\infty)$, то они эквивалентны соответствующим преобразованиям Фурье этой функции в пространстве $L^2(0;\infty)$. Далее будем рассматривать лишь функции из пространства $L^2(0;\infty)$. Для таких функций нами установлены определенные достаточные условия сходимости почти всюду на $\boldsymbol{R}_0$ интегралов в формулах (1) к соответствующим функциям (см., например, [5]). Сформулируем еще одно условие такой сходимости. Имеет место

Теорема 1. *Пусть* Φ *и* Ψ *– произвольные о.н.с., а* $\mathrm{K}_{\Phi\Psi}$ *– их скрещенное произведение. Если функция* $f \in L^2(0;\infty)$ *такова, что* $\sum\limits_{\text{т}=0}^{\infty}\sqrt{\int\limits_{\text{т}}^{\text{т}+1}|f|^2}$ $<\infty$*, то для ее преобразований Фурье по отношению к* $\mathrm{K}_{\Phi\Psi}$ *в пространстве* $L^2(0;\infty)$ *справедливы равенства:*

$$\hat{f}(y) \overset{\text{пв}}{=} \int\limits_0^\infty f(x)\overline{K_{\varphi\psi}(x,y)}dx \quad \text{и} \quad f^*(x) \overset{\text{п.в.}}{=} \int\limits_0^\infty f(y)K_{\varphi\psi}(x,y)dy. \tag{2}$$

Доказательство. Покажем, что при условиях теоремы 1 интеграл $\int\limits_0^\infty f(x)\overline{K_{\varphi\psi}(x,y)}\,dx$ абсолютно сходится почти всюду на $\boldsymbol{R}_0$. Пусть m – произвольное натуральное число. Убедимся в справедливости неравенства

$$\int\limits_m^{m+1} dy \int\limits_0^\infty |f(x)\overline{K}_{\Phi\Psi}(x,y)|dx < \infty. \tag{3}$$

Используя свойство σ-аддитивности интеграла Лебега и определение скрещенного произведения $\mathrm{K}_{\Phi\Psi}$, имеем

$$\int\limits_m^{m+1} dy \int\limits_0^\infty |f(x)\,\overline{K}_{\Phi\Psi}(x,y)|dx = \int\limits_m^{m+1} dy \sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_n^{n+1} |f(x)||\varphi_{[y]}(x)||\psi_{[x]}(y)|dx.$$

Так как положительные ряды можно почленно интегрировать, то, применяя неравенство Коши для интегралов, с учетом нормированности системы Ψ получаем

$$\int\limits_m^{m+1} dy \int\limits_0^\infty |f(x)\,\overline{K}_{\Phi\Psi}(x,y)|dx \le \sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_n^{n+1} |f(x)||\varphi_m(x)|dx.$$

Применим еще раз неравенство Коши для интегралов и используем нормированность системы Φ. Тогда

$$\int\limits_{m}^{m+1} dy \int\limits_{0}^{\infty} |f(x)\,\overline{K}_{\Phi\Psi}(x,y)|dx \leq \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\int\limits_{n}^{n+1} |f|^2}.$$

Отсюда ввиду условия теоремы 1 выводим неравенство (3). Из неравенства (3) в силу теоремы Фубини следует, что для почти всех $y \in [m, m{+}1[$ сходится интеграл $\int\limits_{0}^{\infty} |f(x)\overline{K_{\Phi\Psi}}(x,y)|dx$. Поскольку число m выбиралось произвольным, то для $\forall m \in \boldsymbol{N}$ почти всюду на $[m, m{+}1[$ абсолютно сходится интеграл $\int\limits_{0}^{\infty} f(x)\overline{K_{\varphi\psi}(x,y)}\,dx$, а, следовательно, этот интеграл абсолютно сходится почти всюду и на множестве $\bigcup\limits_{m=0}^{\infty}[m, m+1[= \boldsymbol{R}_0$. Так как рассматриваемый интеграл сходится в метрике $L^2(0,\,\infty)$ к функции $\hat{f}$ (см. (1)) и сходится почти всюду на $\boldsymbol{R}_0$, то этот интеграл сходится почти всюду именно к функции $\hat{f}$, т.е. справедливо первое из соотношений (2). Аналогично доказывается справедливость второго из соотношений (2).

Далее рассмотрим вопрос о сходимости почти всюду интегралов Фурье по отношению к $\mathrm{K}_{\Phi\Psi}$ функций из пространства $L^2(0,\,\infty)$ и о представлении таких функций их интегралами Фурье.

Из конъюнкции доказанной теоремы 1 и теоремы 3 из статьи [3] следует

Теорема 2. *Если функция $f \in L^2(0;\infty)$ такова, что $\sum\limits_{\text{т}=0}^{\infty}\sqrt{\int\limits_{\text{т}}^{\text{т}+1}|f|^2} <\infty$, а о.н.с. Φ такова, что ряд Фурье по о.н.с. Φ любого сужения $f_m = f|_{[m,m+1[}$, $m = 0, 1, 2, \ldots$ п.в. сходится (к f_m), то при любой о.н.с. Ψ-интеграл Фурье функции f по отношению к $\mathrm{K}_{\Phi\Psi}$ сходится п.в. на $\boldsymbol{R}_0$ (к* $\boldsymbol{f}$ *).*

Из теоремы 2 можно вывести соответствующие утверждения для континуальных аналогов некоторых известных ортонормированных систем функций. Например, справедлива

Теорема 3. *Если* Х *– система Хаара, а функция $f \in L^2(0;\infty)$ такова, что $\sum\limits_{\text{т}=0}^{\infty}\sqrt{\int\limits_{\text{т}}^{\text{т}+1}|f|^2}<\infty$, то при любой о.н.с. Ψ функция f п.в. представа-*

вима своим интегралом Фурье-Хаара, т.е. $\boldsymbol{f}\,(x) \overset{n.b.}{=} \int\limits_0^\infty \hat{f}\,(y)\, K_{\mathrm{X}\Psi}(x,y)dy$*,* *где* $\hat{f}(y) \overset{L^2}{=} \int\limits_0^\infty f(x)\,\overline{K}_{\mathrm{X}\Psi}(x,y)dx$ *– преобразование Фурье-Хаара функции* f*.*

Теперь сформулируем условия сходимости почти всюду интегралов Фурье по отношению к скрещенному произведению $\mathrm{K}_{\Phi\Psi}$ для функций из пространства $L^2(0,\,\infty)$ в терминах их преобразований Фурье.

Теорема 4. *Пусть о.н.с.* Φ *и* Ψ *и функция* $f \in L^2(0;\infty)$ *таковы, что для* $^\wedge$*-преобразования Фурье функции* f *по отношению к* $\mathrm{K}_{\Phi\Psi}$ *выполняется соотношение* $\sum\limits_{\text{т}=0}^{\infty}\sqrt{\int\limits_{\text{т}}^{\text{т}+1}|\hat{f}\,|^2}<\infty$*. Тогда почти всюду на* $\boldsymbol{R}_0$ *сходится* $^\wedge$*-интеграл Фурье функции* f*. Если к тому же* Φ *– полная о.н.с., то имеет место представление* $f(x) \overset{\text{пв}}{=} \int\limits_0^\infty \hat{f}(\mathrm{y})K_{\varphi\psi}(x,y)d\mathrm{y}$*.*

Доказательство. При условии теоремы 4 в силу теоремы 1 почти всюду на $\boldsymbol{R}_0$ сходится $^\wedge$-интеграл Фурье функции f по отношению к $\mathrm{K}_{\Phi\Psi}$ и выполняется равенство: $(\hat{f})^*(x) \overset{\text{пв}}{=} \int\limits_0^\infty \hat{f}(\mathrm{y})K_{\varphi\psi}(x,y)d\mathrm{y}$. Если при этом Φ – полная о.н.с., то в силу утверждения 6 из работы [4] имеем: $(\hat{f})^* = f$, а потому справедливо представление $f(x) \overset{\text{пв}}{=} \int\limits_0^\infty \hat{f}(\mathrm{y})K_{\varphi\psi}(x,y)d\mathrm{y}$.

Аналогично доказывается с использованием утверждения 7 из [4]

Теорема 5. *Пусть о.н.с.* Φ *и* Ψ *и функция* $f \in L^2(0;\infty)$ *таковы, что для* **-преобразования Фурье функции* f *по отношению к* $\mathrm{K}_{\Phi\Psi}$ *выполняется соотношение* $\sum\limits_{\text{т}=0}^{\infty}\sqrt{\int\limits_{\text{т}}^{\text{т}+1}|f^*|^2}<\infty$*. Тогда п.в. на* $\boldsymbol{R}_0$ *сходится* **-интеграл Фурье функции* f*. Если о.н.с.* Ψ *еще и полна, то справедливо представление:* $f(y) \overset{\text{пв}}{=} \int\limits_0^\infty f^*(x)\overline{K_{\varphi\psi}(x,y)}\,dx$*.*

Из теоремы 4 выводится

Теорема 6. *Если* X *– система Хаара, а о.н.с.* Ψ *и функция* $f \in L^2(0;\infty)$ *таковы, что для преобразования Фурье-Хаара* $\hat{f}$ *выполняется соотношение* $\sum\limits_{\text{т}=0}^{\infty}\sqrt{\int\limits_{\text{т}}^{\text{т}+1}|\hat{f}\,|^2}<\infty$*, то функция* f *п.в. на* $\boldsymbol{R}_0$ *представима своим интегралом Фурье-Хаара, т.е.* $\boldsymbol{f}(x) \overset{n.b.}{=} \int\limits_0^\infty \hat{f}(y)K_{\mathrm{X}\Psi}(x,y)dy$*.*

Библиографический список

1. *Виленкин, Н.Я.* О скрещенных произведениях ортонормированных систем [Текст] / Н.Я. Виленкин, С.В. Зотиков. – Матем. заметки, 1973. – Т. 13. – № 3. – С. 469-480.
2. *Зотиков, С.В.* Определение преобразования и интеграла Фурье по отношению к скрещенному произведению ортонормированных систем функций в пространстве L^2 [Текст] / С.В. Зотиков // Применение функционального анализа в теории приближений. – КГУ, Калинин, 1988. – С. 26-32.
3. *Зотиков, С.В.* О представлении функций из пространства L^2 их интегралами Фурье [Текст] / С.В. Зотиков // Труды третьих Колмогоровских чтений. – Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2005. – С. 184-194.
4. *Зотиков, С.В.* О континуальных аналогах тождества Бесселя и некоторых их следствиях [Текст] / С.В. Зотиков // Материалы научной конференции “Некоторые актуальные проблемы соврем. математики и матем. образования”. Герценовские чтения. – Санкт-Петербург, 2007. – С. 109-114.
5. *Зотиков, С.В.* О континуальном аналоге теоремы Меньшова-Радемахера [Текст] / С.В. Зотиков // Труды шестых международных Колмогоровских чтений. – Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2008. – С. 198-204.

Статистические методы распознавания языка закодированного текста

В.М. Агарев, Г.А. Зверкина

С началом становления теоретических основ математической статистики и теории вероятностей многие ученые пытались применить статистические методы для анализа текстов. Одним из первых исследователей, применивших математические методы к анализу литературного текста, стал Н.А. Морозов (1854-1946), опубликовавший в 1915 году статью “Лингвистические спектры: средство для отличения плагиатов от истинных произведений того или иного известного автора. Стилеметрический этюд” [1]. Он предложил методику подсчета частотности использования служебных частиц речи различными писателями для установления признаков их индивидуального стиля: “все оригинальные авторы отличаются своим складом речи, даже и в том случае, когда мы сравниваем их с писателями того же самого поколения. Мы, русские, легко отличаем, например, склад речи Гоголя от склада речи Пушкина или

Тургенева. В английской литературе склад речи Теккерея совсем не похож на склад речи Диккенса, и в них обоих чувствуется еще большее различие от склада речи Киплинга или Бретгарта" [2]. Результаты подсчета были представлены в виде графиков, названных ученым "лингвистическими спектрами".

Результаты наблюдений Н.А. Морозова подверглись критике со стороны А.А. Маркова (1856-1922), выпустившего еще в 1913 году статью "Пример статистического исследования над текстом "Евгения Онегина", иллюстрирующий связь испытаний в цепь", где был проведен анализ распределения гласных и согласных среди первых 20000 букв романа в стихах "Евгений Онегин". В своем докладе на заседании Отделения Физико-математических наук и статье "Об одном применении статистического метода" (1916 г.) Марков опроверг выводы Морозова на основании собственного статистического изучения книг русских писателей. По мнению Морозова, только "значительное расширение поля исследования (подсчет не 5 тысяч, а сотен тысяч слов) может придать заключениям некоторую степень основательности" [3].

Бурное развитие компьютерных технологий позволило автоматизировать процесс работы. В 1979 году математик Г. Хетсо предложил оригинальную методику атрибуции литературных сочинений на основе следующих семи параметров: средняя длина слова в буквах, вычисляемая на основании выборок размером 500 текстовых слов; общее распределение длины слова; средняя длина предложения в словах, вычисляемая на основании выборок размером в 30 предложений; общее распределение длины предложения; лексический спектр текста на уровне словаря; лексический спектр текста на уровне текста; индекс разнообразия лексики [4]. С помощью данной методики он провел исследование ряда анонимных статей в журналах "Время" и "Эпоха" с целью выяснения их принадлежности перу Ф.М. Достоевского, а также компьютерный анализ произведений М.А. Шолохова и романа "Тихий Дон", подтвердивший его авторство.

Использование точных методов позволило расширить диапазон исследований. Так, например, В. Фукс предпринял попытку формализованного анализа стилевых характеристик библейских текстов. Определив матрицу частот переходов для синтаксических классов слов в каждом изучаемом источнике, В. Фукс обратился к показателям индекса различия, значения которого показали, в частности, что фрагменты "Евангелия от Иоанна" обладают большим сходством и сильно отличаются от "Апокалипсиса"; "Деяния апостолов" обнаруживают внутреннее единство, а "Евангелие от Луки" – несколько меньшее сходство. Фуксу удалось четко различить стилевые особенности всех четырех канонических евангелических текстов [5].

Идеи исследователей начала XX века, в частности, А.А. Маркова, нашли продолжение в современных методиках. Например, Д.В. Хмелев изложил свой подход к определению авторства текстов, написанных на естественном языке (независимо от того, на каком именно), в работе "Распознавание автора текста с использованием цепей А.А. Маркова". Его метод основывается на формальной математической модели последовательности букв (и любых других элементов) текста как реализации цепи Маркова. По тем произведениям писателя, которые достоверно им созданы, вычисляется матрица переходных частот употребления пар элементов (букв, грамматических классов слов и т.п.). Она служит оценкой матрицы вероятности перехода из элемента в элемент. Матрица переходных частот строится для каждого автора. Создателем анонимного текста можно считать того, у которого вычисленная оценка вероятности больше (т.е. используется принцип максимального правдоподобия). Такой метод продемонстрировал достаточную точность.

Так, использование такой простой единицы, как пара подряд идущих в тексте букв, дает более точные результаты, чем использование некоторых других языковых категорий, например, одиночных грамматических классы слов и их пар. Вполне возможно, что в буквенных парных структурах в преобразованном и, конечно, в неполном виде отображаются полные структуры морфем словоформ текста – префиксальные, корневые, суффиксальные и флективные. Тем самым, довольно большой объем словоизменительной и словообразовательной информации о структуре русских слов оказывается отображенным в статистике парной встречаемости букв, что и определяет довольно высокий уровень эффективности использования этой статистики для определения авторства текста.

Однако такое морфологическое исследование текстов по специфическим особенностям графики языка возможно лишь в том случае, когда уже известен язык исследуемого текста или хотя бы языковая группа, к которой он принадлежит.

В настоящей работе основной акцент делается не на определение авторства или стиля, а на определения языка зашифрованного текста.

Предполагается, что имеется текст на неизвестном языке, записанных неизвестными символами (перекодированный в другой набор символов). В этом случае слова (наборы символов, отделенные друг от друга пробелами или служебными знаками) могут рассматриваться как последовательность испытаний. Для сравнения языка двух текстов (последовательностей испытаний) после стандартной статистической обработки проверялась гипотеза о совпадении распределения двух выборок – двух наборов слов с помощью критериев Фишера, Стьюдента и χ^2. Выбирались тексты различных жанров на различных и одинаковых языках, а так же на языках одной или различных языковых групп.

Ставился вопрос о том, можно ли по статистическим характеристикам зашифрованного текста определить его язык или языковую группу.

В исследованиях различных текстов и групп текстов в первой половине XX века эмпирически было установлено, что частоты используемых в тексте слов соответствуют закону Ципфа (1902-1950). Этот закон утверждает, что график упорядоченных по частоте в порядке ее убывания количеств слов текста, написанного на неискусственном языке, убывает по кривой, напоминающей гиперболу; первоначально для аппроксимации этой кривой была предложена функция $r(x) = \frac{C}{x}$. Позднее Б.Мандельброт предложил более широкий класс функций для этой аппроксимации: $r(x) = \frac{C}{x^\alpha}$. Однако аппроксимация такими кривыми экспериментальных кривых недостаточно точна; более того, тексты на разных языках и даже тексты разных жанров (например, научные и художественные) дают кривые, различие которых весьма существенно.

На приведенных ниже графиках зависимости количества включений слова в текст от частоты его обнаружения в тексте мы видим, что линии для текстов на разных языках имеют существенные отличия, и для каждого из них необходимо подбирать собственные параметры С и α, что, впрочем, не даст достаточно хорошего совпадения экспериментального графика и теоретической кривой. При этом их общее свойство – быстрое убывание количества включений слова в текст – у искусственного языка C++ не наблюдается.

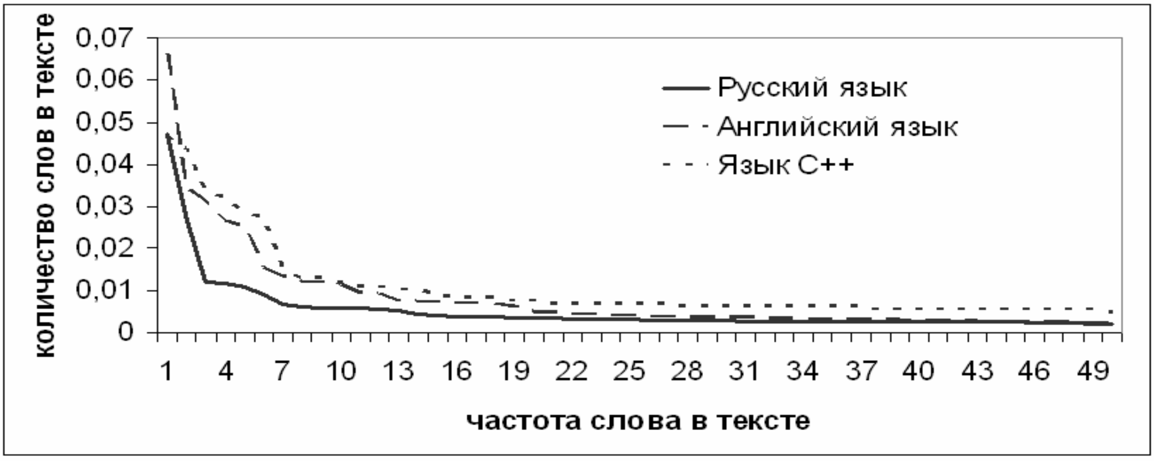


Рис. 1

Поэтому естественно попытаться по различиям в этих графиках определить, написаны ли тексты на одном языке, на разных языках, или принадлежат ли они одной и той же языковой группе.

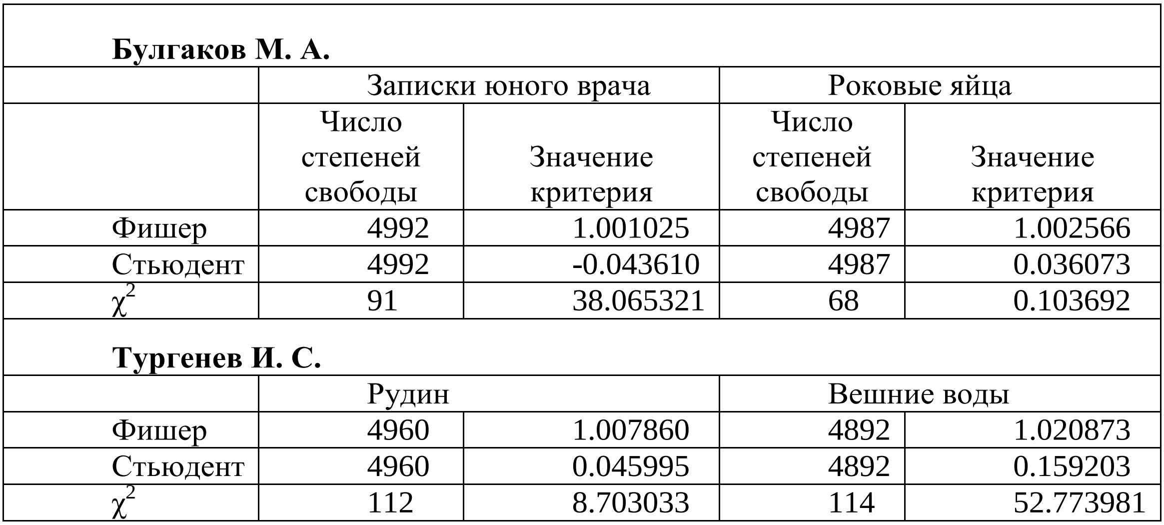
Для такой статистической проверки выбирались тексты различного по типу содержания (беллетристика, научная и справочная литература). Поскольку количество исследуемых различных слов в рассмотренных текстах было достаточно велико, применялись различные методы уменьшения размера статистической выборки при проверке гипотезы о совпадении или различии языка текстов. Например, для статистического анализа выбирались слова с частотой больше 0,002, а остальные либо не учитывались вовсе, либо учитывались как одно слово.

Для проверки статистических гипотез использовались стандартные формулы для критерия Фишера, Стьюдента и χ^2:

$$F=\frac{\left(\frac{RSS_1-RSS_2}{g}\right)}{\left(\frac{RSS_1}{n-k-1}\right)},\quad t=\frac{|M_1-M_2|}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{N_1}-\frac{\sigma_2^2}{N_2}}},\quad \chi^2=\sum_{j=1}^{k}\frac{(n_j-E_j)^2}{E_j}.$$

Для проверки вопроса о сходстве или различии языка текста все слова двух текстов можно объединить в один и проверить гипотезу об однородности получено выборки, или же можно сравнивать частотные характеристики двух выборок.

Ряд результатов приведен в нижеследующих таблицах.



Булгаков М. А.				
	Записки юного врача		Роковые яйца	
	Число степеней свободы	Значение критерия	Число степеней свободы	Значение критерия
Фишер	4992	1.001025	4987	1.002566
Стьюдент	4992	-0.043610	4987	0.036073
χ^2	91	38.065321	68	0.103692
Тургенев И. С.				
	Рудин		Вешние воды	
Фишер	4960	1.007860	4892	1.020873
Стьюдент	4960	0.045995	4892	0.159203
χ^2	112	8.703033	114	52.773981

Ernest Hemingway				
	Across the River and Into the Trees		The Sun Also Rises	
Фишер	4703	1.163133	4862	1.117307
Стьюдент	4703	-0.109887	4862	-0.071836
χ^2	179	4267.538498	189	2731.985675
Jack London				
	Before Adam		The Call of the Wild	
Фишер	4987	1.634580	4884	1.698785
Стьюдент	4987	0.450492	4884	0.572966
χ^2	135	0.01	121	0.01

Friedrich Nietzsche				
	Götzen-Dämmerung		Die Geburt der Tragödie	
Фишер	4892	1,564828	4912	1,597435
Стьюдент	4892	0,860522	4912	0,773051
χ^2	128	2669,673291	110	3190,905231
Franz Kafka				
	Ein Hungerkünstler		Ein Landarzt	
Фишер	4998	1,59823	4987	1,56482
Стьюдент	4998	0,738902	4987	0,923872
χ^2	97	37,337284	83	76,823904

Предложенный метод определения языка текста по его статистическим характеристикам применим в ситуации, когда текст на неизвестном языке зашифрован простым шифром, т.е. каждому символу зашифрованного текста соответствует одна и та же буква (имеется взаимно однозначное соответствие символов зашифрованного и оригинального текста) – такие ситуации часто встречаются при сбоях электронных кодировок текста.

Этот метод позволяет с высокой степень доверия определить схожесть структуры текста на русском, белорусском и украинском языках (их частотные характеристики практически идентичны), а вот отличие текста на русском и чешском языках представленный метод определяет достаточно уверенно.

Удалось четко статистически разделять языки романо-германской (при этом итальянский и французский языки различаются с более низким уровнем доверия, чем, например, английский и немецкий), славянской и угро-финской групп. Также уровень доверия при принятии гипотезы об одном языке в текстах разных жанров ниже, чем в текстах одного типа, и, тем более, в текстах одного автора.

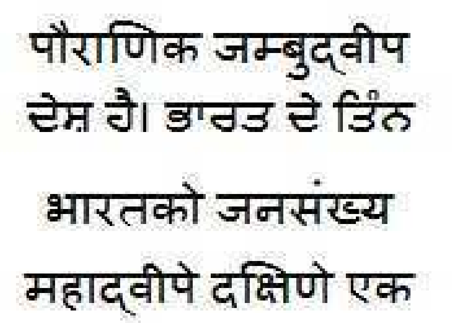
Однако при статистическом сравнении языков различных текстов часто возникают проблемы, связанные со спецификой национальной графики. (Естественно, при посимвольном сравнении, которое в данном случае не рассматривается, значение национальной графики существенно выше.) Используя же только анализ частоты слов в текстах, удалось распознать языковую группу для текстов ряда языков, использующих буквы с дополнительными символами (в чешском U с кружком (u s kroužkem), â латышском гласные с макроном (garumzime), в литовском гласные с огоньком (nosine) и E с точкой, и тому подобное). Поскольку в предложенном методе не важно, из каких букв состоят слова, а учитывается только частота слов, удается различать языки, которые при посимвольном сравнении практически не различимы:

– английский, нидерландский, суахили, гавайский;

– чешский, словацкий;

– кантонский, китайский, мандарин;

При этом визуальное сравнение ряда текстов в национальной графике не дает удовлетворительного результата, например:



पौराणिक जम्बुद्वीप

ਦੇਸ਼ ਹੈ। ਭਾਰਤ ਦੇ ਤਿੰਨ

भारतको जनसंख्य

महाद्वीपे दक्षिणे एक

Рис. 2

Все четыре строчки написаны на абсолютно разных языках. В данном случае посимвольного алгоритма сравнения данных языков недостаточно. А даже простое визуальное сравнение графиков типа представленных на рис. 1, сразу показывает отличие структуры текстов на этих языках.

Если же в латинице мы имеем дело с электронным текстом (например переписка по электронной почте), то определение языка по кодировке так же имеет свою погрешность в связи с упомянутой уже национальной графикой. К примеру пользователь писал немецкий текст на английской раскладке, а умляуты в таких случаях они пишут как сочетания “*oe*” “*ae*”, или вообще без указания умляутов – “*e*” “*a*”.

Еще одна проблема заключается в смешивании языков. Текст может содержать включения других языков. Если автор текста писал на не родном языке или плохо знакомом ему языке, то есть существует вероятность грубых грамматических ошибок и неправильно построенных предложений. В первом случае надо определить оба языка и выбрать основной (процентное содержание которого в тексте доминирует), во втором увеличивается погрешность, которая может отразиться на итоговых результатах (стандартные статистические критерии проверки однородности выборки здесь также могут дать вполне удовлетворительный результат). Понятно, что текст для статистического анализа должен быть достаточно большим.

Итак, сравнение частот слов в тексте избавляет нас от многих проблем, связанных с распознаванием языка текста или группы языков, к которому он принадлежит, с помощью морфологического анализа или учета частоты используемых символов.

Можно составить примерный алгоритм определения языка от наиболее простых случаев до довольно спорных. Начинать исследование текста следует с определения группы языка, для этого подойдет алгоритм подсчета частоты слов и, в необходимых случаях, определения уникальных символов. Для определения языка внутри группы уже нужно исследовать морфологические признаки языка. Но данной задачей мы в настоящей работе не занимались. В каждом языке есть свои падежи и характерные им окончания. Т.е. не нужно хранить целые словари по каждому языку, достаточно только окончаний – а их не так много – и некие правила, как определить окончания. В наиболее сложных ситуациях необходим анализ не только падежей, но и всего предложения, т.е. надо определить, к каким частям речи принадлежит слово – тут замечу, что не обязательно определить все 100% слов – и дальше можно рассмотреть уже структуру предложения.

Библиографический список

1. *Морозов, Н.А.* Лингвистические спектры: средство для отличения плагиатов от истинных произведений того или иного известного автора. Стилеметрический этюд [Текст] / Н.А. Морозов // Известия отд. русского языка и словесности Императорской академии наук, 1915. – Т. 20. – Кн. 4.
2. *Морозов, Н.А.* Новое орудие объективного исследования древних документов [Текст] / Н.А. Морозов // http://www.textology.ru
3. *Марков, А.А.* Об одном применении статистического метода [Текст] / А.А. Марков // http://www.textology.ru
4. *Хетсо, Г.* Стиль и норма [Текст] / Г. Хетсо // Лингвистика текста и стилистика: Учен. зап. Тартуского гос. ун-та. – Тарту, 1981. – Вып. 585.
5. *Фукс, В.* По всем правилам искусства (точные методы в исследованиях литературы, музыки и изобразительного искусства [Текст] / В. Фукс // Искусство и ЭВМ. – Гл. VI. – М., 1975.

Глава 3

Теория и методика обучения математике в школе и вузе

Подготовка учителя математики в условиях информационного общества

В.А. Тестов

Российское образование находится в сложном периоде реформ и модернизации. Современный мир наполнен различными кризисами, катастрофами, войнами и эпидемиями. Необходимым условием для того, чтобы развитие человечества не пошло по пути самоуничтожения, для предотвращения новых цивилизационных кризисов является интеллектуальное и нравственное воспитание молодежи на достаточно высоком уровне.

Сегодня мы являемся свидетелями и участниками формирования нового типа общества, характер и содержание которого можно обозначить как "информационное общество". Становится очевидным, что становление нового типа общества требует и новой системы образования, радикального обновления его целей и содержания, внедрения в обучение новых информационных технологий. В российском образовании в этом направлении был сделан ряд шагов, происходит процесс информатизации школ и вузов.

В связи с широким распространением информационных технологий на повестку дня встал вопрос о роли и месте учителя в новых технологиях. Порой высказывается точка зрения, что роль учителя с развитием информационных технологий в современном мире уменьшилась, что теперь главное в обучении – это применение инновационных информационных технологий, а учителем может быть чуть ли не любой выпускник вуза. Причем предпочтительнее, если это будет выпускник не педагогического вуза, к которым вдруг появились большие претензии.

Да, действительно, в сфере образования информационные технологии занимают все больше места, у школьников сегодня настолько широкое поле для получения информации, что 15-20 минут, которыми располагает учитель на уроке для изложения нового материала, могут некоторым показаться пустой формальностью, данью традиции.

Широкое распространение новых информационных технологий несомненно облегчило доступ каждому человеку, в том числе школьникам и студентам к самой современной информации, но вместе с тем привело к тому, что человек наряду с действительно нужной и полезной информацией получает много совершенно бесполезной, искаженной и даже ложной информации, так называемых "информационных шумов", "информационных отходов". Переход к "информационному обществу" несет в себе не только позитивные возможности, но и мало учитываемые негативные тенденции.

Главная задача современной школы состоит не в том, чтобы нашпинговать выпускников различной информацией, а в том чтобы раскрыть способности каждого ученика, воспитать личность, готовую к жизни в высокотехнологичном, конкурентном мире. Школьное обучение должно способствовать личностному росту так, чтобы выпускники могли самостоятельно ставить и достигать серьезные цели, уметь реагировать на разные жизненные ситуации.

Учитель по-прежнему остается центральным звеном процесса обучения, с двумя важнейшими функциями поддержки мотивации, содействия формированию познавательных потребностей и модификации процесса обучения класса или конкретного ученика. Электронная образовательная среда способствует формированию его новой роли. В такой высокоинформативной среде учитель и ученик равны в доступе к информации, содержанию обучения, поэтому учитель уже не может быть главным или единственным источником фактов, идей, принципов и другой информации. Его новую роль можно охарактеризовать как наставничество. Он поводырь, который вводит учащихся в образовательное пространство, в мир знания и мир незнания, он творец, зодчий мировоззрения детей.

В настоящее время информационные технологии создают принципиально новые возможности для работы учителя, для организации учебного процесса, для реализации известных дидактических принципов. В частности, хорошо известно насколько важен в обучении принцип наглядности. Однако также хорошо известно насколько он трудоемок в реализации, а самое главное – ограничен в применении при изложении теоретических знаний. Совершенно новые возможности дают нам в этом плане информационные технологии, позволяющие наглядно представлять скрытые от непосредственного восприятия сущностные законы и закономерности познаваемого. Различного рода электронные визуализаторы сегодня активно используются в области физики и химии, но все еще не могут в должной мере "войти" в классную комнату и студенческую аудиторию [3].

В традиционных методах обучения очень трудно реализовать и другой важнейший принцип дидактики – принцип доступности и посильной трудности. Учитель должен уметь дозировать степень трудности заданий, чтобы они оказались в “зоне ближайшего развития” ученика. Непосильная задача может привести к разочарованию в своих силах и даже стрессу, легкая – не способствует развитию способностей. Выход подсказывают новые информационные технологии. Современные программы позволяют генерировать задачи возрастающей сложности (трудности). При должной мотивации ученик, работая с такой программой, сам будет отбирать задачи, требующие от него умственного напряжения. Таким образом, информационные технологии открывают принципиально новые горизонты в реализации как данного принципа так и ряда других дидактических принципов.

С другой стороны, в последнее время многие вузы обнаружили, что интеллектуальный уровень выпускников школ стал стремительно падать. Во многом этот факт объясняется хаотичностью информации, получаемой современным молодым человеком из разных источников. Как отмечает И.М. Ильинский, “что касается молодых людей, то они попадают в своего рода ножницы, когда знания, получаемые от учителя, из учебника, перекрываются потоком хаотичной информации, идущей, прежде всего, от Интернета и СМИ. Причем эта информация, не имеющая структурно-содержательной логической связи, подаваемая не системно, а бисерно, не просто не вписывается в рамки стационарного образования, но представляет собой качественно иной тип” [2].

Образование, несмотря на все реформы и модернизации, основывается на живом человеческом общении ученика с учителем. Отсутствие такового негативно сказывается на развитии эмоциональной сферы ребенка и в итоге – на эффективности обучения. Никакие супертехнологии не могут заменить педагога в интеллектуальном и нравственном воспитании подрастающего поколения. Как известно, нет лучшего способа научить людей чему-нибудь, как на личном примере пробудить в них высокие душевные и познавательные качества и помочь их развитию.

Ратуя за индивидуальную траекторию обучения, организации которой служит персональный компьютер, мы забываем, что рост интеллекта происходит в процессе общения между людьми. В диалоге происходит интеллектуальное взаимодействие между учениками. Опытные учителя, как правило, владеют приемами диалогового обучения. Основным и исходным компонентом диалогового обучения, кроме хорошего владения материалом, является умение ставить вопросы. Без вопросов невозможно усвоение новых знаний, обмен мыслями между людьми. Все истины современной науки есть не что иное, как с трудом обретенные ответы на когда-то стоявшие перед наукой вопросы. В прямом противоречии с общепринятым мнением наукой, еще со времен Платона, было осознано, что зачастую вопрос труднее ответа.

Непревзойденным примером диалога являются “Диалоги о математике” известного венгерского математика А. Реньи. В этой книге автор не поучает читателя, не стремиться вложить в него уже готовые собственные мысли, а как бы беседует с ним. В результате читатель сам становится как бы участником диалога – предмет изложения перестает быть для него чем-то навязываемым извне, и обсуждаемые проблемы воспринимаются уже как собственные. Такую диалогичность изложения важно организовать в новых учебных материалах по математике, особенно электронных.

Восприятие нового материала, как известно, не должно сводиться только к зрительному восприятию информации, необходимо задействовать и слуховой и кинестетический каналы. Известно, что люди сильно различаются по тому, какой сенсорный канал в них является преобладающим: выделяются визуалы, аудиалы и кинестетики. Учителя математики много делают на уроке, чтобы все они имели равные возможности для восприятия материала. Компьютерное же обучение, как правило, отдает предпочтение визуалам, дискриминируя остальных.

Знания – это не просто информация, это, прежде всего, осознанная и систематизированная информация. При получении знаний ученик сталкивается с проблемой понимания. Эта проблема наиболее ярко проявляется при обучении математике и, как показывает опыт, с ней ученик без диалога с учителем справиться не может, даже при использовании самых современных информационных технологий.

Очень важным для обретения понимания является и этап воспроизведения. У многих учащихся понимание достигается только после того, как они проговорят учебный материал. Именно этим можно объяснить давно замеченную педагогами эффективность работы учащихся в парах. Однако при компьютерном обучении этот этап чаще всего выпадает. Ответы на вопросы теста никак нельзя назвать воспроизведением. По этой же причине устные экзамены приносят гораздо больше пользы, чем тестирование.

В связи с происходящими изменениями в процессе и технологиях обучения в настоящее время особенно вырос интерес к качеству подготовки учителя, к его профессиональной компетентности. Каким должен быть учитель в эпоху информационного общества, кто может работать учителем, какие вузы должны готовить учителей – все эти вопросы вновь стали обсуждаться на самом высоком уровне.

Главная причина критики в адрес педагогических вузов состоит в том, что во многих из них низок уровень развития науки, очень мало работает крупных ученых, мал вклад педагогических вузов в получение нового знания. В результате выпускник, не участвуя в научном поиске, обучаясь в режиме воспроизводства старого знания, не несет новаторский импульс в школу. В этом отношении многие классические университеты обладают лучшей научной базой и лучше финансируются.

Но есть много других условий для качественной подготовки учителя, которым педагогические вузы соответствуют в гораздо большей степени.

Во-первых, вузу необходимо иметь специалистов не только в области фундаментальных наук, но и в области педагогики, психологии, методики, образовательных технологий. Учитель должен не только знать свой предмет, но и владеть современными методиками, образовательными технологиями, иначе он не сможет работать эффективно. Преподавать учат только в педагогических вузах.

Во-вторых, очень важно, чтобы в вузе, где готовят педагогов, была создана особая образовательная среда – среда, направленная на человека. В классическом университете студента учат видеть, например, в математике будущий предмет его профессиональной деятельности. А вот в педагогическом вузе математика служит совсем другим задачам, она становится инструментом для развития личности студента, для его профессионально-педагогических качеств, для овладения компетенциями учителя математики. А это предполагает совсем иной подход к самому процессу обучения будущих учителей. Но на этот момент даже в наиболее продвинутых классических университетах обращается мало внимания.

В-третьих, очень важно, чтобы в вузе, где готовят учителей, очень хорошо знали саму систему школьного образования, ее проблемы. Готовить учителя можно только хорошо зная и понимая, что его ждет. Необходима интеграция между вузом и системой образования. К сожалению, большинство непедагогических вузов слабо взаимодействует со школами.

В подготовке учителей математики отечественное образование имело несомненные успехи. Вместе с тем надо признать, что в последние годы качество подготовки учителя математики в большинстве вузов снизилось. Этому способствовало несколько факторов: если раньше многие вузы производили профориентацию и целенаправленный отбор абитуриентов на учительские специальности еще задолго до вступительных экзаменов, то потом введение ЕГЭ, падение престижа учительской профессии, демографическая яма привели к тому, что набор на учительские специальности стал осуществляться по остаточному принципу.

Особенно страдают физико-математические специальности: чтобы изучить математику или физику и достичь понимания, студенту необходимо затратить усилия, зачастую большие, чем при изучении других предметов. Выпускники школ предпочитают поступать на более легкие и новомодные специальности. Мы долгие годы гордились своим физико-математическим образованием, но теперь в силу политики министерства образования (сокращения числа часов, снижения стандартов, введения ЕГЭ, прекращение финансирования кружков в школах и т.п.) уровень физико-математического образования в нашей стране сильно упал.

Все задачи, стоящие перед современным образованием, может решить только хорошо подготовленный учитель, владеющий всеми необходимыми компетенциями. Поэтому модернизацию образования необходимо начинать с совершенствования педагогического образования. Никакие реорганизации и объединения вузов, закупка дорогостоящей техники не могут решить проблему подготовки учителей. Об этом хорошо сказал почти полтора века назад крупный русский писатель и мыслитель Ф.М. Достоевский: “Деньгами вы, например, настроите школ, но учителей сейчас не наделаете. Учитель – это штука тонкая; народный, национальный учитель вырабатывается веками, держится преданиями, бесчисленным опытом... Люди, люди – это самое главное. Люди дороже даже денег. Людей ни на каком рынке не купишь и никакими деньгами, потому что они не продаются и не покупаются, а опять-таки только веками выделываются...” [1].

Библиографический список

1. *Достоевский, Ф.М.* Дневник писателя (1873). Полное собрание сочинений [Текст]. В 30 т. Т. 21. / Ф.М. Достоевский. – Л., 1980.
2. *Ильинский, И.М.* Понимание как цель образования [Текст] / И.М. Ильинский, П.С. Гуревич // Знание. Понимание. Умение. Научный журнал Московского гуманитарного университета. – 2006. – № 1. – С. 5-15.
3. *Шадриков, В.Д.* Информационные технологии в образовании: плюсы и минусы [Текст] / В.Д. Шадриков, И.С. Шемет // Высшее образование в России. – 2009. – № 11. – С. 61-65.

Методика реализации УДЕ в обучении математике как национально-регионального компонента Республики Калмыкия

Б.П. Эрдниев, А.А. Алжеева

В лекции по математике включались старинные примеры и задачи из книги [1]. Эти примеры и задачи вызвали естественный интерес студентов своей национальной формой. Внимание студентов обращалось на выбор числовых параметров, когда условие задачи читалось на двух языках. Совершенно неожиданным было то, что в пособие были включены задачи из [2], которые сопровождались ответом заданным полным числовым выражением или формулой. Этот учебник был написан в Казани для всех монгольских народов: халха-монголов, бурят-монголов и калмыков. Эта дидактическая традиция применялась в школах Монголии в начале XX века. Программы для начальных и средних школ того времени были составлены по образцу программ русских школ с учетом специфики монгольской действительности.

Запись ответа числовым выражением не была представлена в наиболее известных российских учебниках, как в царской России, так и в первых советских учебниках. Но следует отметить, что на окраинах Российского государства в большей степени применялись прогрессивные методы преподавания, так как учителя должны были самостоятельно составлять задачи из примеров окружающей действительности. Числовой ответ в этом случае имел обобщенный математический смысл. В настоящее время в современных учебниках этот прием очень часто используется в систематизации задач, ответ которых выражается одним числовым выражением.

Надо отметить, что в трудных задачах и в задачах на 4-5 действий требуется большая изобретательность, логическое мышление учащихся.

Приведем пример.

В зале на 20 скамейках (двух- и пяти- местных) надо посадить 73 ученика. Сколько требуется 2-х и 5-местных скамеек?

Во-первых: 73 – сакральное число монголов, у калмыков соседнее число – 72. У монголов это “плохое” число, так как оно не кратно ни 2 и 3, ни 3 и 4, поэтому оно в паре с “худл” – 73 небылицы. Калмыки как народ, сформировавшийся из военных сословий – дербетов (четыре – квадрат – каре) и торгудов – охранники государственной казны и ханской ставки выбрали 72 как символ системного качества, в котором можно выделить более мелкие подразделения единицы по 2, 3, 4, 6, 12 и т.д.

Ответ: $(73-2{\cdot}20){\cdot}(5-2) = 11$ пятиместных и $20-11 = 9$ двухместных.

Но запись ответа поразительна по своей сложности и полностью соответствует тексту задачи Я.И. Перельмана по известному рассказу “Репетитор” А.П. Чехова. Я.И. Перельман дает собственно решение, используя русские счеты. Таким образом, А.П. Чехов заметил тот факт, что материальные средства счета, в данном случае русские счеты, позволили персонажу рассказа – отцу Пети вспомнить довольно сложный алгоритм решения системы линейных уравнений. Для гуманитарных специальностей этот рассказ А.П. Чехова и научно-художественный текст Я.И. Перельман приобретают качество профессиональной компетентности. Мы решаем задачу о скамейках с параллельной записью в двух столбцах.

Отметим, что если 5 поставить параметр 4, а вместо 73 поставить 72, то это станет знаменитой итальянской (китайской) задачей “О павлинах и кроликах”: число голов – 72, а ног – 20.

$$\left.\begin{array}{l}\begin{cases}2x+5y=73\\x+y=20\end{cases}\\\hline\end{array}\right| *2$$

$2x+2y=40$

$3y=73-40=33$

$y=33:3=11$

(5-местные скамейки)

Ответ: $(73-2\cdot 20):(5-2)=11$

$$\left.\begin{array}{r}2x+5y=73\\x+y=20\\5x+5y=100\end{array}\right| *5$$

$3x=100-73=27$

$x=27:3=9$

(2-местные скамейки)

Ответ: $(20\cdot 5-73):(5-2)=9$

Проверка $11+9=20$

Новая задача получена сокращением текста предыдущей задачи: 73 ученика надо усадить на 2-х и 5-и местных скамейках. Сколько существует различных вариантов? Таким образом, мы даем представление о комбинаторике.

Равенство $2\cdot 5=5\cdot 2$ означает на пяти двухместных скамейках сидит столько же, сколько на двух 5-и местных. Поэтому, остальные решения можно получить из начального по правилам двух арифметических прогрессий с разностями $d_1=5$ и $d_2=-2$.

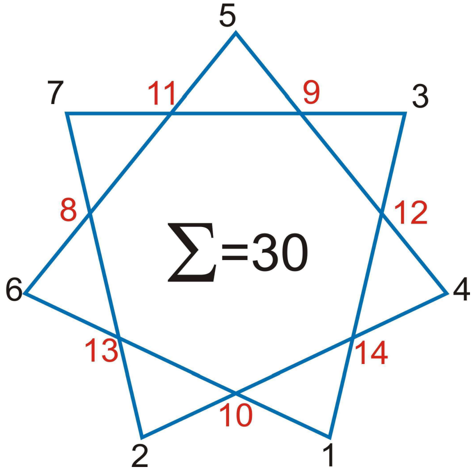
N	**x**	**y**
N_1	4	13
N_2	9	11
N_3	14	9
N_4	19	7
N_5	24	5
N_6	29	7
N_7	34	1

Итак, всего семь решений.

И в этой же задаче есть монгольская версия “така-тула”:

$$\begin{cases}2x+4y=100 \ \text{ног}\\x+y=49 \ \text{голов}\end{cases} \qquad x=48, \quad y=1.$$

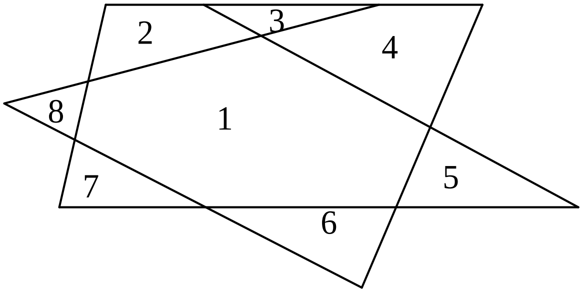
Сакральные числа – $100=10\cdot 10$ и $49=7\cdot 7$. Символом УДЕ в XXI веке вполне можно взять семиконечную звезду, которая олицетворяет закон “удивительной” семерки. Отметим, что в китайских хрониках, 2000 лет тому назад, зафиксирована вспышка сверхновой звезды с оптическим размером близким Луне. Эту звезду ранние христиане называли Звездой Вифлеема. Но, в отличие от звезд Пифагора и Давида (пятиконечные и шестиконечные звезды) – изображение семиконечной звезды не используется в христианских цивилизациях.



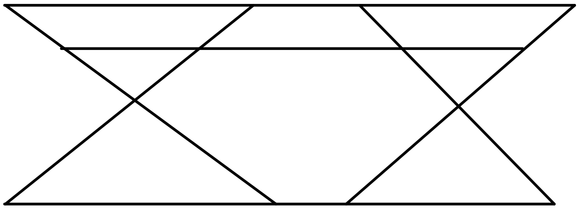
Так же, как и пятиконечная звезда, она уникурсальна, т.е. вычерчивается без отрыва руки от листа бумаги и без возвращений. 7 – треугольников 1 – семиугольник. Теорема Эйлера: a+b-c=1, где a – число граней, b – число вершин, c – число ребер. $(7 + 1) + 14 - 7 \cdot 3 = 1$.

Для 5, 6, 7-конечных звезд на каждой из 10, 12, 14 сторон находится ровно по 4 вершины. Впервые проблему существования других фигур с таким же расположением вершин как у звезд поставил Генри Дьюдени (XIX век). Он нашел для звезды Пифагора четыре новых решения, пятое решение предложил знаменитый ученый Мартин Гарднер (XX век). Для шестиконечной звезды два новых решения дал Б.А. Кордемский в [3], еще два новых решения дал ученик 4 класса г. Ставрополь Батыр Эрдниев (1957 г.). Для семиконечной звезды Вифлеема два решения дали студенты II курса МО Борис Бастаева и Байрта Инджиева. Вопрос о существовании других решений остается открытым.

В каждом ряду по 4 вершины:



1 – шестиугольник; 2, 4 – четырехугольников; 3, 5, 6, 7, 8 – треугольников. Фигуры не уникурсальны. a+b-c=1 (теорема Эйлера). $(5 + 3) + 14 - 21 = 1$, где $21 = 7 \cdot 3$.



1 – шестиугольник, 3 – четырехугольников, 4 – треугольников, 21 ребро; $10 + 12 - 21 = 1$.

М. Гарднер подсчитал и доказал, что всего существует точно 72 различных варианта расположения 7 цифр на внешних вершинах и семи чисел 8, 9,...,14 на внутренних, чтобы по каждому ряду была постоянная сумма = 30.

История развития математических знаний и их современное цифровое представление предполагает усиление роли классической теории чисел в создании более сложных моделей математики, когда под “элементаризмом” понимается “прозрачность” логической структуры. В нашем понимании, ключевым эстетическим потенциалом образовательной среды является 7-цветная мозаика.

В практике построения математических таблиц обычно используют 2-3 цвета: красный – нечетные, синие – нечетные числа; в таблице простых чисел числа пары чисел близнецов окрашены белым цветом, одиночные – черным. Существуют таблицы изображающие числа кратные 3 желтым (третьим цветом), кратные 9 – зеленым, кратные 5 нечетные числа - оранжевым. Это связано с изучением темы “Признаки делимости на 3, 5 и 9”.

Всю элементарную математику философы считают одной большой теоремой Пифагора. Поэтому создание цветовой модели Пифагоровых триад является ключом к классической математике. Но для этого необходимо было классифицировать целочисленные Пифагоровы триады по признакам делимости параметров на 4, 3, 5 с выделением простых чисел Пифагора $p = 4k + 1$, простых чисел Ферма $q = 4k + 3$, составных чисел Диафанта.

Мы предлагаем числа, кратные 2, но некратные 4, окрасить голубым цветом. Числа, кратные 4, – синим. Числа, кратные 8, 16, 32, – более насыщенными оттенками синего цвета. Числа, кратные 3, – желтым цветом. Числа, кратные 9, – желто-зеленым. Числа, кратные 27, 81 и т.д., – насыщенными оттенками зеленого цвета. Числа, кратные 5, – красным цветом. Числа, кратные простым числам Пифагора (13, 17, 29,..., 97,...), – оранжевым. Числа, кратные числам Ферма (7, 11, 19, 23,..., 83,...), – фиолетовым. Числа Диафанта (65, 85, 221,...) – лиловым. Составные числа Ферма (45, 117,...) – двуцветные.

В предлагаемой матричной модели номера строк и столбцов всегда нечетные числа: $\Sigma = m + n$ – номер строки, $\delta = m - n$ – номер столбца, где $c = m^2 + n^2$ (гипотенуза), $b = m^2 - n^2$ (сопряженный катет), $a = 2mn$ (четный катет), НОД$(m, n) = 1$ (m, n – разной четности).

Триады могут быть воспроизведены на гранях кубиков. На трех гранях кубика – гипотенуза и катеты. На четвертой грани – угловые компоненты треугольника. На пятой и шестой – тригонометрические характеристики: синусы и тангенсы, соотнесенные с таблицей Брадиса. Каждое число имеет свой номер.

В принципе мы составили эстетически полноценную таблицу умножения Пифагора с системным оператором корректировки – формулами Пифагоровых триад. Причем каждое число в своем множестве имеет свой порядковый номер.

Нумерация	1	2	3	4	5	...
Простые Пифагора	5	13	17	29	37	...
Простые Ферма	3	7	11	19	23	...
Составные Диофанта	65	85	145	185	221	...
Составные Ферма	45	117	...	...	...	...

Библиографический список

1. *Дугарджапова, Л.Д.* Математика монгольских народов в школе [Текст] / Л.Д. Дугарджапова. – Улан-Батор, 2008.
2. *Попов, А.В.* Арифметика [Текст] / А.В. Попов. – Казань, 1837.
3. *Кордемский, Б.А.* Математическая смекалка [Текст] / Б.А. Кордемский. – М., 1958. – 577 с.

Особенности когнитивно-визуального подхода к обучению математике в школе

В.А. Далингер

Успешность ученика в учебном процессе напрямую зависит от используемой учителем методики, технологии обучения.

Анализ школьной практики обучения учащихся математике показывает, что основной упор учителя делают на логическое мышление, то есть на работу левого полушария головного мозга: иначе говоря, в обучении имеет место “левополушарный крен”. По исследованиям же психологов известно, что до 80% информации человек получает через зрительный канал. Что же касается математики, то уместно привести здесь слова великого К. Гаусса: “Математика – наука не столько для ушей, сколько для глаз”.

Школьные методики развивают главным образом левое полушарие, игнорируя вторую половину умственных возможностей ребенка. Представители нейропедагогики (наука о дифференцированном подходе к обучению с учетом психофизиологических и нейропсихологических особенностей ученика и учителя) так характеризуют проблемы, связанные с организацией процесса обучения с учетом специфики работы левого и правого полушарий головного мозга человека.

Н.Н. Трауготт (Россия): “Надо предостеречь школу от левополушарного обучения. Это воспитывает людей не способных к реальным действиям в реальной ситуации”.

Т.П. Хризман (Россия): “Исчезают правополушарники – генераторы идей. Вопрос стоит серьезно: надо спасать нацию”.

Б. Самплс (США): “Мы обнаружили, что если реализуются функции правого полушария, то неизбежно произойдет развитие качеств, связанных с левым полушарием”.

И. Соньер (Франция): “Обучая левое полушарие, вы обучаете только левое полушарие. Обучая правое полушарие, вы обучаете весь мозг!”

В отечественной психологической литературе особенность процесса восприятия характеризуется ведущей сенсорной системой, в соответствии с чем выделяют правополушарных учащихся (визуалы, кинестетики) и левополушарных учащихся (аудиалы).

Ученые говорят о разграничении полушарий по типу решаемых задач (речевые, вербальные – пространственные, образные) и по способу обработки поступающей информации. Такое деление условно, так как речь идет не о последовательной работе полушарий, а об их относительной активности при решении той или иной задачи.

Учителя проводят поиск активных методов обучения, которые адекватны целям развивающего обучения. В этом процессе проницательный учитель спрашивает не “что с моим учеником?”, а “что блокирует способности моего ученика к обучению?”

Чаще всего учитель основывается на своих собственных предпочтениях в сфере преподавания и когда эти предпочтения не совпадают с учебными предпочтениями учащихся, возникает конфликт стилей. Бетти Лу Ливер отмечает, что “ориентированная на ученика система преподавания, требующая от ученика внимательного отношения к стилям обучения, выходит за рамки метода, за рамки учебника, за рамки классной комнаты и даже за рамки учителя, так как ориентирована на источник успеха или неуспеха в обучении – на самого учащегося” [1, с. 7].

Итак, встает проблема: “Как сделать обучение математике таким, чтобы оно строилось на сбалансированной работе и левого, и правого полушарий головного мозга, то есть на разумном сочетании логического и наглядно-образного мышления?”

В контексте рассматриваемой проблемы интересно высказывание Б.М. Владимирского, отмечающего, что “учить надо не лучше. Учить надо иначе... Вновь возникающие специализированные языки приводят к новым схемам понимания, менее связанным с речью, но в большей мере ориентированным на зрительные образы, форму и цвет” [2, с. 4].

Мы предлагаем строить процесс обучения математике на основе когнитивно-визуального (зрительно-познавательного) подхода к формированию знаний, умений и навыков, что позволяет максимально использовать потенциальные возможности визуального мышления. Одно из основных положений данного подхода – широкое и целенаправленное использование познавательной функции наглядности. Реализация когнитивно-визуального подхода в процессе обучения учащихся математике позволяет сконструировать визуальную учебную среду – совокупность условий обучения, в которых акцент ставится на использование резервов визуального мышления учащегося. Эти условия предполагают наличие как традиционных наглядных средств, так и специальных средств и приемов, позволяющих активизировать работу зрения.

Одним из достоинств когнитивно-визуального подхода является то, что он учитывает индивидуальные особенности учащихся и, в частности, особенности работы левого и правого полушарий головного мозга. Сегодня вопрос о функциональной асимметрии полушарий головного мозга и особенно учет этой асимметрии в практике обучения математике становится еще более актуальным.

Проблема рационального использования двух качественно различных сфер человеческого мышления и есть отражение общих проблем, стоящих перед школьным математическим образованием; обучение математике должно в равной степени использовать качественно различные сферы человеческого мышления. А.Г. Мордкович провозглашает два лозунга, относящихся к обучению школьной математике: “Меньше схоластики, меньше формализма, меньше жестких моделей, меньше опоры на левое полушарие мозга! Больше геометрических иллюстраций, больше наглядности, больше правдоподобных рассуждений, больше мягких моделей, больше опоры на правое полушарие головного мозга!” [6, с. 4].

А.Л. Сиротюк отмечает: “До сих пор многие специалисты переоценивают роль левого полушария и логического мышления в становлении мыслительной деятельности ребенка. А такая продукция правого полушария, как интуиция, ритм, создание образов и др., в современной школе, к сожалению не ценится. Школьные методики развивают главным образом левое полушарие, игнорируя вторую половину умственных возможностей ребенка. Однако известно, что именно правое полушарие связано с развитием творческого мышления ребенка” [7, с. 223].

Современные психолого-педагогические исследования проблемы формирования и развития визуального мышления учащихся концентрируются вокруг следующих вопросов: операции и закономерности невербального мышления; проблемы зрительного восприятия; механизмы, характеристические особенности визуального мышления; динамика формирования математического образа; проблемы передачи информации и распознавание образа; психофизиологические механизмы восприятия информации доминантным и субдоминантным полушариями головного мозга.

Проблема реализации принципа наглядности в обучении математике может получить принципиально новое решение, если удастся найти такое методическое обеспечение деятельности ученика, которое позволит включить функции его визуального мышления для получения продуктивных результатов в овладении математическими понятиями, для усиления развивающей функции математики. Использование наглядных образов в обучении может превратиться из вспомогательного, иллюстрирующего приема в ведущее, продуктивное методическое средство, способствующее математическому развитию учащихся. Язык образов является основным средством наглядности при изучении математики, позволяющий осознанно оперировать с понятиями и умозаключениями, закреплять и “оживлять” их в памяти.

Проблема формирования и развития визуального мышления учащихся является, несомненно, актуальной и требует для своего разрешения как общих подходов, так и выхода за рамки “чистой дидактики”, учета современных достижений не только психологии, педагогики, философии математики, но и психофизиологии, поэтому создание общей теории формирования и развития визуального мышления учащихся вызывает необходимость конструирования учебной деятельности школьников на более широкой теоретической основе, нежели это принято в настоящее время.

Невозможно обойтись без наглядности при оперировании абстрактными математическими объектами. Известный математик Д. Гильберт по этому поводу писал: “В математике, как и вообще в научных исследованиях, встречаются две тенденции: тенденция к абстракции – она пытается выработать логическую точку зрения на основе различного материала и привести весь этот материал в систематическую связь – и другая тенденция, тенденция к наглядности, которая в противоположность этому стремится к живому пониманию объектов и их внутренних отношений” (цит. по [5, с. 33]).

В реализации когнитивно-визуального подхода к обучению математике большую роль играют визуализированные задачи.

Визуализированной назовем задачу, в которой образ явно или неявно задействован в условии, ответе, задает метод решения задачи, создает опору каждому этапу решения задачи либо явно или неявно сопутствует на определенных этапах ее решения. Предназначение визуализированных задач – формирование визуального образа, который помогает разрешать возникающие проблемы. Визуализированные задачи позволяют передать информацию об учебных возможностях, определенных особенностях умственной деятельности учащихся и тем самым служат инструментарием для диагностики учебных и личностно значимых качеств, а также являются одним из основных инструментов реализации когнитивно-визуального подхода к обучению математике. (Обстоятельный разговор об использовании визуализированных задач читатель найдет в наших работах [3, 4].)

Классифицируя визуализированные задачи по их функциям в процессе обучения, мы выделяем следующие группы задач:

- предварительные дидактические визуализированные задачи;
- последующие дидактические визуализированные задачи;
- визуализированные задачи с развивающими функциями;
- познавательные визуализированные задачи;
- визуализированные задачи с прикладными функциями.

Задачи с дидактическими функциями используются для подготовки школьников к введению нового материала и при его закреплении: они отрабатывают прямое применение изученной теории. Познавательные задачи преследуют цель отработать и углубить основное содержание изучаемого материала. Решение таких задач доводится у каждого учащегося до навыка. Задачи с познавательными функциями задают уровень усвоения той или иной темы школьного курса математики. Задачи с развивающей функцией – это те, решение которых требует определенных знаний и умений, явно не предусмотренных программой. Эти задачи, в первую очередь, направлены на развитие мышления учащихся, но их решение у всех школьников не должно доводиться до навыка.

Конечно, визуализация не снимает проблемы обучения школьников навыкам дедуктивного мышления, но целенаправленное и систематическое подключение резервов визуального мышления при работе со специально подобранным материалом для формирования навыков дедуктивного вывода бесспорно помогает этому. Активность визуального мышления ученика в процессе доказательства будет способствовать формированию эвристических приемов и повышению уровня логической строгости.

Использование визуализированных задач поднимает важную проблему обучения в средней школе – проблему организации поисковой учебной деятельности учащихся. Особый вид поиска – визуальный поиск, важнейшим инструментом которого является “воспитанное и организованное” зрение.

Визуальный поиск – это процесс порождения новых образов, новых визуальных форм, несущих конкретную визуально-логическую нагрузку и делающих видимым значение искомого объекта или его свойства. Исходной позицией такого процесса являются запас готовых, известных учащемуся визуальных образов, структура и элементы информации, визуально обозримые связи между ними. Визуализированные задачи служат средством формирования навыков визуального поиска.

Библиографический список

1. *Ливер, Б.Л.* Обучение всего класса [Текст] / Б.Л. Ливер. – М: Новая школа, 1995. – 48 с.
2. *Владимирский, Б.М.* Компьютерные учебники: анализ конструкции и психофизиологические требования информатики [Текст] / Б.М. Владимирский // Компьютерные инструменты в образовании. – 2000. – № 1. – С. 3-8.
3. *Далингер, В.А.* Формирование визуального мышления у учащихся в процессе обучения математике [Текст] / В.А. Далингер. – Омск: Изд-во ОмГПУ, 1999. – 157 с.
4. *Далингер, В.А.* Теоретические основы когнитивно-визуального подхода к обучению математике: монография [Текст] / В.А. Далингер. – Омск: Изд-во, ОмГПУ, 2006. – 144 с.
5. *Жуковский, В.И.*Визуальное мышление в структуре научного познания [Текст] / В.И. Жуковский, Д.В. Пивоваров, Р.Ю. Рахматуллин. – Красноярск: Изд-во Краснояр. ун-та, 1988. – 178 с.
6. *Мордкович, А.Г.* Методические проблемы изучения элементов математического анализа в общеобразовательной школе [Текст] / А.Г. Мордкович // Математика в школе, 2002. – № 9. – С. 2-12.
7. *Сиротюк, А.Л.* Нейропсихологическое и психофизиологическое сопровождение обучения [Текст] / А.Л. Сиротюк. – М.: ТЦ Сфера, 2003. – 288 с.

О соотношении квалификаций и компетенций в системе образования

В.А. Кузнецова, В.С. Сенашенко, В.С. Кузнецов

Широко распространена и настойчиво пропагандируется точка зрения, согласно которой компетентностный подход выступает в настоящее время едва ли не как единственный, определяющий особенности современного высшего образования и обеспечивающий достаточную профессиональную подготовку выпускника. Однако для нашей отечественной высшей школы он в действительности не является принципиально новым, хотя некоторые элементы новизны отрицать нельзя. Отечественное высшее образование всегда было профессиональным, и одной из функций вуза была подготовка к профессии. В дипломе указывалась, и ныне указывается присвоенная выпускнику **квалификация как уровень подготовленности, степень годности к какому-либо виду труда** [1]. В нашей высшей школе в течение многих лет составлялись и действовали квалификационные характеристики и модели специалиста, в которых прописывались требования к знаниям, умениям и навыкам выпускника вуза, к его личностным качествам и нравственным ценностям. Пожалуй, это в значительной степени отличало нашу школу от западной, где вузы, как правило, реализуют образовательные программы **высшего образования и формируют прежде всего умение учиться,** в том числе – **учиться самостоятельно**, а вопрос приобретения конкретной профессии выходит за рамки высшей школы и решается через различные структуры: фирмы, корпорации и т.д. при трудоустройстве или на начальном этапе профессиональной деятельности. При этом обучающемуся может быть присвоена определенная квалификация – **официальное признание (в виде сертификата)** освоения компетенций, соответствующих требованиям к выполнению трудовой деятельности в рамках конкретной профессии. Когда же от западной высшей школы потребовалась “профессионализация выпускника”, обеспечивающая его конкурентоспособность на рынке труда, что называется “со студенческой скамьи”, тогда возникла необходимость введения компетентностного подхода и освоения компетенций уже в период освоения образовательной программы вуза. Советская школа решила эту задачу еще в 30-е годы прошлого столетия, правда в условиях планового народного хозяйства.

В отечественном понимании **квалификация – это свойство человека, отражающее уровень его подготовленности к выполнению конкретных функций в рамках определенного вида трудовой деятельности.** Известны конкретизации понятия “квалификация” применительно к разным сферам деятельности (квалификация преподавателя, инженера, токаря и т.д.). Под **квалификацией выпускника учебного заведения** понимаются **“отраженные в документе об образовании уровень и вид профессиональной подготовленности выпускника учебного заведения к выполнению определенной профессиональной деятельности и продолжению профессионального образования на следующей более высокой ступени”** [2].

В условиях рыночной экономики проблема “профессионализации выпускника” становится весьма нетривиальной, так как **по существу речь идет об изменении формы участия работодателей в решении вопросов** профессионального образования. У “новых” работодателей свои интересы, ориентированные большей частью на прибыли (зачастую – “сиюминутной”, скорейшей), в том числе, и при решении кадровых проблем. Образовательное же сообщество озабочено не только созданием новых механизмов взаимодействия сферы образования с рынком труда, но и созданием условий для роста образовательного и научного потенциала, как самой сферы образования, так, по большому счету, и общества в целом. Но для нынешнего работодателя решение проблемы развития системы образования в новых социально-экономических условиях в обозримом ими будущем не сулит желаемой прибыли. Потому проблема профессионализации для них носит во многом прагматический характер. С позиции образовательного сообщества больший упор на профессионализацию может быть разумным шагом в том плане, что он способствует повышению “социального веса” не только отдельных вузов, но в целом и всей образовательной системы, поскольку не секрет, что наши некоторые вузы не всегда соответствуют изменившимся запросам практики.

Уже первым этапом обращения к компетентностному подходу должно было бы стать формирование согласованного глоссария основных понятий “компетенция”, “компетентность”, их современное толкование, увязывание с известными, например, “квалификация”, “профессия”, “знание” и т.д., то есть с отечественной образовательной лексикой. Отсутствие устоявшихся определений несущих конструкций инструментального обеспечения современной образовательной модели деструктивным образом сказывается на системе образования и может свести на нет эффективность новых Федеральных образовательных стандартов. Эта опасность усиливается чрезвычайной заформализованностью введения компетентностного подхода и новых стандартов, принимающей в вузах угрожающий характер.

Обратимся к определению понятий компетенции и компетентности в классических словарях русского языка: “**Компетентность – это осведомленность, авторитетность”, а компетенция рассматривается “в двух вариантах значения: как круг вопросов, в которых данное лицо обладает авторитетностью, познанием, опытом; и как круг полномочий, область подлежащих чьему-либо ведению вопросов”** [3]. Современное понимание термина “компетенция” приведем в формулировке, представленной в макете Федерального Госстандарта ВПО: “**Компетенция – способность применять знания,**

умения и личностные качества для успешной деятельности в определенной области”. Таким образом, в исходном смысле компетенция выступает как свойство человека, связанное с его авторитетностью, то есть оценкой во внешней социальной среде, с опытом, следовательно, это свойство человека в принципе не может быть проверяемо на этапе завершения образования.

В определении квалификации ключевую роль играют слова “уровень” и “степень”. Для выпускника вуза предполагается, что его квалификация и в образовательном, и в профессиональном аспекте соответствует уровню высшей школы. Чтобы получить определенную квалификацию, необходимо обладать соответствующими знаниями, умениями, навыками и личностными качествами. Следовательно, содержательная часть квалификаций определяется компетенциями, компонентами которых выступают знания, умения, личностные качества и способность к их применению. Между тем, понятие квалификации постепенно уходит из образования. Достаточно вспомнить, что в некоторых направлениях в утвержденном Перечне направлений оно отсутствует, содержится лишь фраза о присвоении степени, тем самым компетенции фактически замещают квалификацию специалиста.

Часто говорят, что компетентностный подход предполагает перенос основного внимания с качества содержания обучения и качества учебного процесса на качество результатов обучения и освоения образовательных программ, выраженное в компетенциях. С позиций этого подхода предполагается строить содержание образовательных программ следующим образом: **сначала определяются компетенции** (причем сформулированные, зачастую, так, что в них нельзя увидеть глубину и широту охвата изучаемого материала, степень фундаментальности его освоения), представленные в профессиональном стандарте (предполагается, что к этой работе привлекаются работодатели), а **затем на основании компетенций формируется основная образовательно-профессиональная программа**. Но очевидно, что набор требований к специалистам и запросов для решения краткосрочных, среднесрочных и долгосрочных стратегических практических задач различны, а, следовательно, должны различаться и соответствующие компетенции, но такое разграничение, естественно, отсутствует, а компетенции сформулированы абстрактно или отражают реалии лишь сегодняшнего дня. Однако высшее университетское образование предназначено осуществлять опережающую функцию. Значит, превалирование компетентностного подхода над традиционным может нанести ущерб фундаментальности нашего высшего образования, когда от выпускника потребуется только способность применять методы без знания того, почему их надо применять. По существу, задачи высшей школы в таком случае сводятся к задачам подготовки исполнителей, пользователей чьими-то результатами. По ряду причин, в основном носящих экономический характер и не зависящих от образовательного сообщества, качество нашего образования (как среднего, так и высшего) значительно снизилось, и формальное применение компетентностного подхода с ориентацией на подготовку исполнителей может завести отечественное образование совсем в тупик.

В настоящее время возникло **противоречие между теоретически обоснованной концепцией обеспечения в бакалавриате лишь профессионально ориентированного высшего образования и настойчиво продвигаемой парадигмой обеспечения в бакалавриате высшего профессионального образования.** Но достаточно очевидно, что полноценного специалиста в бакалавриате получить не удастся, а тогда у реформаторов от образования возникает идея – заменить квалификацию на набор зачастую трудно диагностируемых компетенций, обеспечивающих профессиональное образование. Для работодателей нужна как раз подготовленность к профессии, причем в большинстве случаев это может быть выпускник, обладающий компетенциями на уровне пользователя. Например, известны случаи, когда даже руководители департамента образования говорят, что для работы в школе их вполне устроит выпускник классического университета, не проходивший никакой педагогической подготовки (без изучения психолого-педагогических дисциплин, прохождения педагогической практики, подготовки и защиты квалификационной работы).

Итак, имеются два взгляда на бакалавра: в первом случае бакалавр – **человек, подготовленный к профессии, но все-таки получивший ущербную по сравнению со специалистом подготовку.** Нам представляется, что такое понимание вполне соответствует **прикладному** бакалавриату, к реализации которого, в соответствии с Программой развития образования на 2009-2012 годы, будут привлечены отдельные средние профессиональные учебные заведения (нынешние колледжи и техникумы). Здесь при формировании основной профессиональной программы уместно применить компетентностный подход. Последний важен также при формировании новых основных программ, возникающих в силу изменившихся потребностей практики.

При второй точке зрения **бакалавриат это высшее, но не профессиональное, а лишь профессионально-ориентированное образование.** Однако здесь тоже возникают вопросы: так, например, если бакалавриат только высшее образование, то магистратура должна обеспечивать профессионализацию, но тогда зачем в ней такие трудоемкие общеобразовательные курсы, как иностранный язык, философия? При этом заметим, что и после окончания магистратуры знание иностранного языка у наших выпускников находится на весьма низком уровне. Далее, удаление из бакалавриата профессиональной подготовки превращает вузовское обучение в основном в “общеобразовательное”. А при масштабном переходе на двухуровневую систему, когда бакалавриат для подавляющего большинства обучающихся станет завершающим этапом образования, его общеобразовательный характер приведет к снижению роли вузов, вынесению профессиональной подготовки за пределы высшей школы. А куда? В наши слабые Учреждения дополнительного образования? И еще: при окончании бакалавриата обязательно ли присвоение квалификации или достаточно присвоения академической степени, определяемой соответствующим набором компетенций выпускника? Следовательно, есть масса проблем для разрешения при любом взгляде на бакалавриат.

Говоря о модели образования, ориентированной на достижение определенных результатов, нельзя не упомянуть еще об одном термине – “понимание”. В последние годы он в качестве рабочего уходит как из средней, так и из высшей школы. Между тем этот факт становится уже социально значимым негативным явлением [4]. Не останавливаясь подробно на этом вопросе, в качестве иллюстрации одного из подходов к содержанию целей обучения приведем лишь один пример из статьи, опубликованной в солидном журнале “Высшее образование в России”(№ 3, 2010 г.). Автор (со ссылкой на В.И. Байденко) пишет: “ В соответствии с компетентностным подходом учебные цели формулируются через результаты обучения, выраженные в терминах деятельности обучающегося, причем в таких, которые преподаватель может надежно измерить. В структуре цели обязательно должно быть “действие”, которое выражается любым глаголом действия: “описать”, “перечислить”, “вычислить”, “проанализировать”, “определить”, “установить” и т.д., так как глаголы, обозначающие знания (“знать”, “понимать”, “усвоить”, “иметь представление” и др.), ориентируют не на конечные, а на промежуточные результаты процесса”. Далее указывается, что не очень понятно, в чем может быть выражен показатель “знание” [5].

В заключение еще раз подчеркнем, что в настоящее время речь идет в сущности о формировании новой образовательной модели, ориентированной на результаты обучения, в которой в качестве одного из средств инструментального обеспечения выступают компетенции, предназначенные для контроля результатов, а квалификация – как итоговое фиксирование достижения необходимого уровня результатов.

Библиографический список

1. Новый энциклопедический словарь, РИПОЛ классик, Большая Росс. Энциклопедия [Текст]. – М.: 2006. С. 497.
2. Словарь согласованных терминов и определений в области образования государств-участников содружества независимых государств [Текст] / под науч. ред. Н.А. Селезневой. – М., 2004.
3. Толковый словарь русского языка [Текст] / под ред. Д.Н. Ушакова. – М.: ФГИЗ, 1935. – Т. 1. – С. 1427.
4. *Кузнецов, В.С.* Культура математического мышления как социально-значимое явление [Текст] / В.С. Кузнецов, В.А. Кузнецова, В.С. Сенашенко // Мат-лы междун. научной конф. "Современные проблемы анализа и преподавания математики". – М.: МГУ им. М.В. Ломоносова, 2010. – С. 119-120.
5. *Шестак, Н.В.* Профессиональное образование и компетентностный подход [Текст] / Н.В. Шестак // Высшее образование в России. – 2010. – № 3. – С. 38-43.

Применение лабораторного практикума в рамках элективного курса при изучении элементов фрактальной геометрии

В.С. Секованов, Д.П. Миронкин

В данной статье рассматривается методика применения лабораторного практикума при изучении элементов фрактальной геометрии в профильных математических классах средней общеобразовательной школы.

Программы современной школы насыщены учебными дисциплинами различного характера и достаточно жестко ограничены по времени. Темп же нашей жизни требует от школы развития творческого потенциала каждого школьника. Это приводит к тому, что возникают многочисленные противоречия, решить которые в рамках существовавших учебных планов уже достаточно сложно. В связи с этим возникла и развилась идея профильного образования старшеклассников, предполагающая дифференциацию школьников по интересам, склонностям.

При реализации профильного обучения в школе перед администрацией и учителями возникает ряд взаимосвязанных задач. Их можно разделить на 4 группы.

Первая группа — содержательно-методологическая: каким быть содержанию профильного обучения по предмету; каковы методологические основы, идеи, реализуемые через содержание профильного курса; как усилить практическую направленность обучения.

Вторая группа — организационная: как организовать отбор учащихся; построение учебных планов для различных профилей; как выявить и учитывать особенности обучения предмету в непрофильных классах; каково сочетание и взаимодействие профильного предмета с другими учебными дисциплинами.

Третья группа — методическая: как организовать эффективное обучение профильному курсу, какие главные идеи выделять и реализовывать; каково должно быть соотношение различных видов, форм, методов и средств обучения.

Четвертая группа задач связана с обучаемым — как развивать креативность учащегося в процессе профильного обучения и повысить его мотивацию его предмету.

Самой сложной и малоисследованной проблем является четвертая группа. Эффективность профильного обучения связывается с глубиной изучаемого материала. Решить эту задачу можно двумя способами. *Первый способ*: за счет увеличения числа часов на изучение предмета. В современных условиях такой подход неприемлем в связи с перегрузкой школьников. *Второй способ*: интенсификация обучения. Одним из вариантов интенсификации учебного процесса может быть применение в элективном курсе лабораторного практикума.

Богатые возможности для проведения лабораторного практикума дает изучение молодого направления современной математики – фрактальной геометрии. При изучении фрактальной геометрии в рамках лабораторного практикума происходит интеграция между различными дисциплинами. Кроме того, лабораторный практикум, как форма организации обучения, способствует формированию умений и навыков обучаемых планировать свою деятельность и осуществлять самоконтроль, эффективно формирует познавательные интересы, вооружает учащихся разнообразными способами творческой деятельности.

Проведение лабораторного практикума по фрактальной геометрии, сочетая традиционные технологии обучения с информационно-коммуникационными технологиями, позволит организовать различные виды творческой математической деятельности, эффективно развивать креативность обучаемых, усиливать их мотивацию к математике.

Фрактальные множества позволяют эффективно моделировать объекты как живой, так и неживой природы. Фрактальная геометрия находит широкое применение в различных отраслях деятельности человека. Покажем достоинства молодого и быстро развивающегося направления современной математики в ходе выполнения лабораторного практикума, связанного с алгебраическими фракталами. Рассмотрим методику проведения одной лабораторной работы, посвященной построению заполняющих множеств Жюлиа и множества Мандельброта.

Цель работы:

- организовать творческую математическую деятельность учащихся;
- организовать творческую алгоритмическую деятельность учащихся;
- организовать информационную деятельность учащихся;
- организовать художественную деятельность учащихся.

При создании алгебраических множеств Жюлиа и множества Мандельброта используется алгебраическое выражение вида:

$$Z_{n+1} = Z_n^2 + C, \tag{1}$$

где Z_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ и C – комплексные числа. Если выбрать некоторым образом число Z_0, то по формулам (1) можно построить его орбиту, т.е. последовательность $\{Z_n\}$, $n = 0, 1, 2, ...$

Выделим в выражении (1) действительную и мнимую части:

$$\begin{aligned} X_{i+1} &= X_i^2 - Y_i^2 + a, \\ Y_{i+1} &= 2 \cdot X_i \cdot Y_i + b. \end{aligned} \tag{2}$$

Рассмотрим сначала построение заполняющих множеств Жюлиа. Под заполняющим множеством Жюлиа мы будем понимать те и только те точки комплексной плоскости, орбиты которых ограничены. Алгоритм построения этих множеств достаточно прост. По столбцам рассматривается каждая точка (пиксель) монитора и по формулам (2) проводится 20 итераций. Именно после двадцатой итерации орбита точки стабилизируется и становится ясно, принадлежит ли исследуемая точка заполняющему множеству Жюлиа или не принадлежит. Если после двадцатой итерации $|z_n| < 2$, то рассматриваемая точка (пиксель) закрашивается в черный цвет. В противном случае данная точка пропускается и рассматривается следующая. На рис. 1 приведено заполняющее множество Жюлиа при С $= 0,24251 + 0,8271i$.

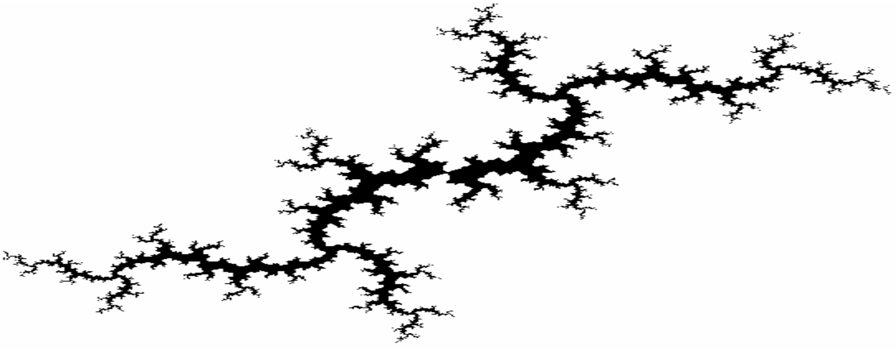


Рис. 1. Заполняющее множество Жюлиа для функции $f(z) = z^2 + 0,24251 + 0,8271i$

При построении множеств Жюлиа целесообразно организовать в рамках лабораторного практикума тетрадную форму обучения, базирующуюся на четырех видах творческой деятельности: математической, алгоритмической, информационной и художественной, поскольку множества Жюлиа являются сложными математическими объектами, не поддающиеся построению без компьютера, являются одними из самых красивых математических объектов и история их создания чрезвычайно интересна. Математическая деятельность включает в себя изучение свойств комплексных чисел, исследование заполняющего множества Жюлиа для функции $\mathrm{f(z)=z}^2$. В состав алгоритмической деятельности входит написание компьютерной программы для построения заполняющих множеств Жюлиа. Информационная деятельность включает в себя поиск информации в Интернете, изучение истории создания заполняющих множеств Жюлиа. Поскольку множества Жюлиа являются одними из самых красивых математических объектов, то с помощью их можно создавать красочные картины, что позволяет организовать художественную деятельность школьников. В рамках тетрады виды творческой деятельности для каждого ученика целесообразно менять. При такой форме обучения в рамках лабораторного практикума учащийся выступает в роли математика, программиста, экспериментатора, художника и историка. Тетрадная форма обучения фрактальной геометрии нацелена на развитие креативности учащихся и способствует повышению их мотивации к математике и информатике.

Теперь опишем алгоритм построения множества Мандельброта. Под множеством Мандельброта для функции $f(z) = z^2 + c$ мы будем понимать множество тех точек $c \in \mathrm{C}$, для которых орбита точки 0 ограничена.

Алгоритм построения множества Мандельброта также достаточно прост. Рассматривается каждая точка $c \in \mathrm{C}$ (пиксель) монитора и по формулам (2) проводится 20 итераций точки 0. Именно после двадцатой итерации орбита точки стабилизируется и становится ясно, принадлежит ли исследуемая точка $c \in \mathrm{C}$ множеству Мандельброта или не принадлежит. Если после двадцатой итерации $|z_n| < 2$, то рассматриваемая точка (пиксель) закрашивается в черный цвет. В противном случае данная точка пропускается и рассматривается следующая. На рис. 2 приведено множество Мандельброта.

При построении множества Мандельброта также целесообразно организовать тетрадную форму обучения, базирующуюся на четырех видах творческой деятельности: математической, алгоритмической, информационной и художественной, поскольку множество Мандельброта является сложнейшим математическими объектом, не поддается построению без использования компьютера, является красивым математическим объектом и его история создания чрезвычайно интересна.

Множество Мандельброта имеет тесную связь с заполняющими множествами Жюлиа. Школьникам целесообразно провести компьютерные эксперименты, подтверждающие данный тезис.

На рис. 3 стрелки указывают, какие множества Жюлиа соответствуют выделенным точкам $c \in$ C, находящимся в множестве Мандельброта.

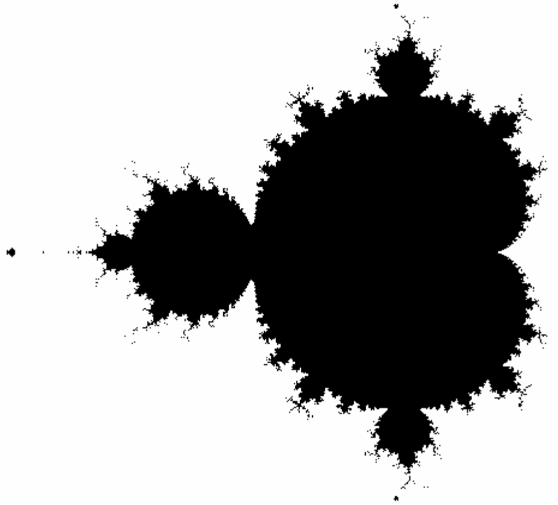


Рис. 2. Множество Мандельброта

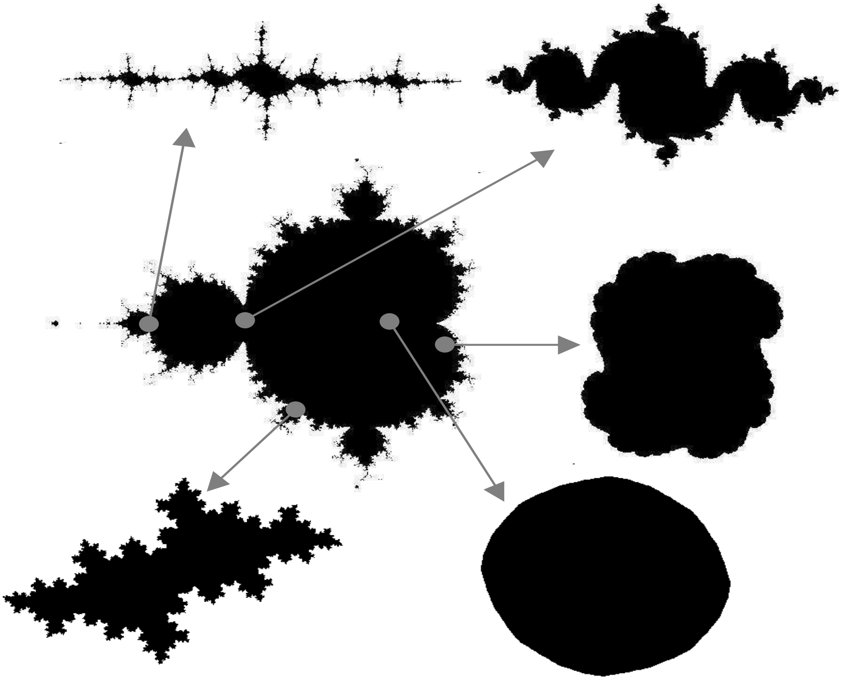


Рис. 3. Множество Мандельброта и соответствующие связные заполняющие множества Жюлиа

На рис. 4 стрелки указывают, какие множества Жюлиа соответствуют выделенным точкам, находящимся за пределами множества Мандельброта.

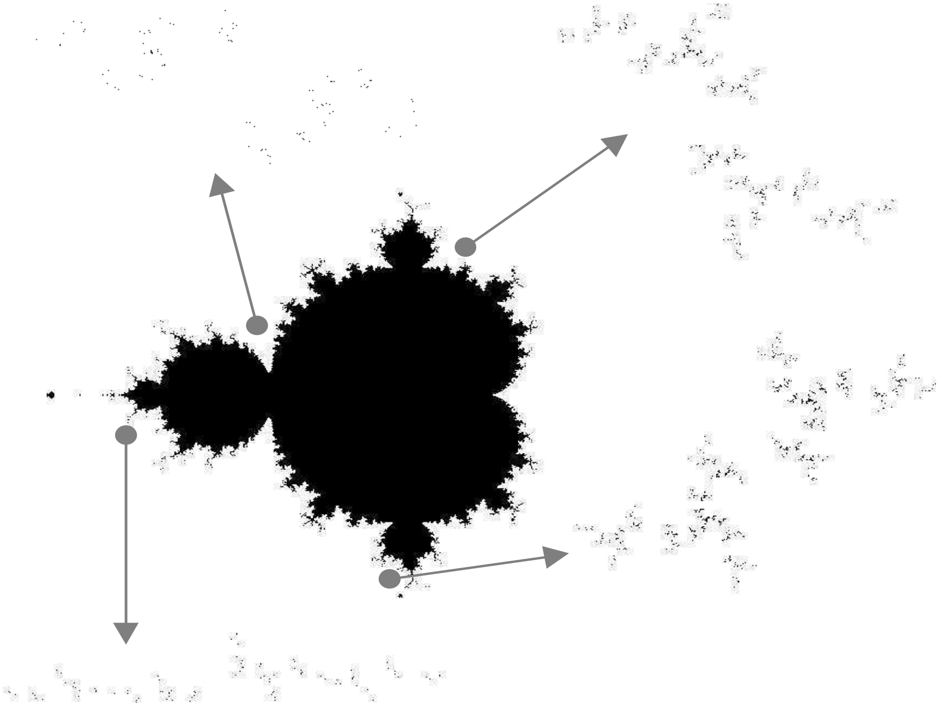


Рис. 4. Множество Мандельброта и соответствующие вполне несвязные множества Жюлиа

Множество Мандельброта связно. Связность множества Мандельброта означает, что ни одна из его частей не отделена от основного тела, но все они связаны вместе исключительно тонкими линиями. Однако маршрут по этому множеству не будет похож ни на одну земную дорогу. Если последовательно увеличивать практически любую из ветвей, окружающих множество Мандельброта, то видны будут, лишь цепочки крошечных черных островков, которые кажутся не связанными друг с другом. Конечно, мы найдем цепочки более мелких островков между крупными островами, однако непрерывная дорога встречается редко или вообще не обнаруживается ни при каком увеличении. Мельчайшая деталь границы, показанная в трех разных вариантах раскраски, дает представление об изумительной системе мостов, необходимой для обеспечения связности.

Благодаря своему бесконечно сложному строению "кружева"границы множества Мандельброта имеют фрактальную размерность, не совпадающую с размерностью топологической.

Упражнение № 1. Применение программы Fractal Explorer для изучения особенностей множества Мандельброта.

Цель упражнения: пользуясь готовой программой убедиться в том, что множество Мандельброта имеет определенные свойства самоподобия.

Изучение фрактальности границ.

Пользуясь программой Fractal Explorer, Вы можете путешествовать по множеству Мандельброта, увеличивая его отдельные фрагменты. Для увеличения нажмите левую кнопку мыши и обведите выбранную область. Многократно повторяя данное действие, можно добиться значительного увеличения.

Убедитесь в бесконечно детализированной природе границ множества Мандельброта. Наблюдения запишите в тетрадь.

Проделайте аналогичные действия с черно-белым изображением множества Мандельброта. Оцените роль цвета.

Сравните результаты наблюдений различных объектов.

Изучение самоподобия множества.

Пользуясь программой Fractal Explorer, найдите копии множества Мандельброта на различных участках. Рассмотрите иглоподобные антенны, многократно их увеличивая. Попробуйте найти лейтмотивы самоподобных структур. Результаты наблюдений опишите.

Сделайте выводы. Что представляет в описательном плане множество Мандельброта? Сравните свойства множества Мандельброта со свойствами геометрических фракталов (множеством Кантора, кривой Коха, коврами Серпинского).

Упражнение № 2. Используя блок-схему (рис. 5), постройте заполняющие множества Жюлиа на экране монитора, записав алгоритм их построения на определенном языке программирования (бейсик, паскаль, C++).

Использование лабораторного практикума при изучении фрактальных множеств и применение в его рамках тетрадной формы обучения способствует решению одной из главных задач обучения – формированию креативности учащихся.

Библиографический список

1. *Морозов, А.Д.* Введение в теорию фракталов [Текст] / А.Д. Морозов.— Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. – 160 с.
2. *Секованов, В.С.* Формирование креативной личности студента вуза при обучении математике на основе новых информационных технологий [Текст] / В.С. Секованов. — Кострома, 2004. – 231 с.
3. *Секованов, В.С.* Элементы теории фрактальных множеств [Текст] / В.С. Секованов. – Кострома, 2010. – 180 с.

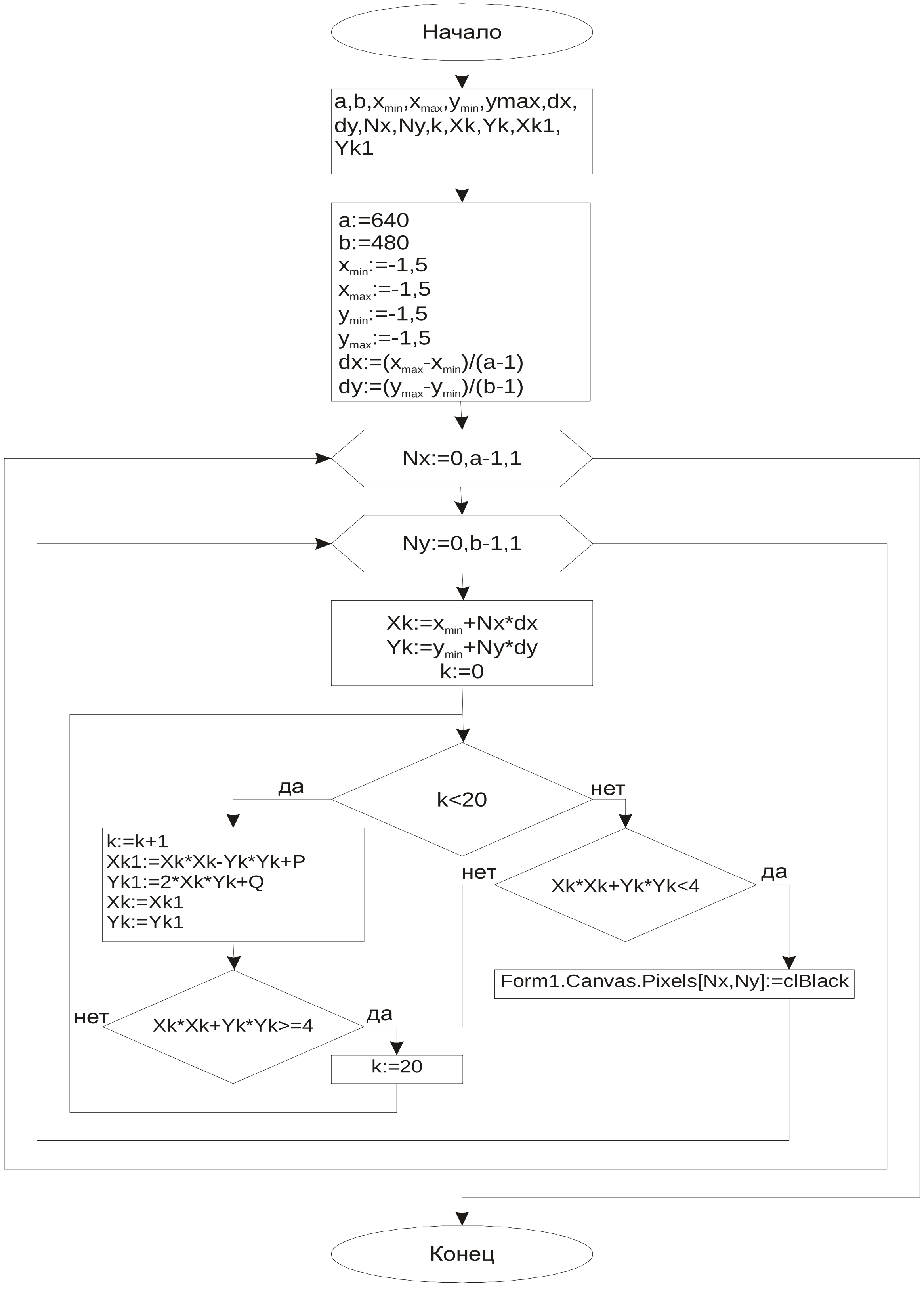


Рис. 5. Блок-схема построения множества Жюлиа

Интеграция инновационных и традиционных подходов в процессе изучения методических дисциплин

Н.Д. Кучугурова

Методические дисциплины на завершающем этапе подготовки учителя играют основную роль, поэтому они в интеграции с информационными и коммуникационными технологиями (ИКТ) должны стать мощным средством повышения качества образования. Интенсификация внедрения ИКТ в учебный процесс связана с интеграцией инновационных и традиционных подходов.

Сегодня под инновацией понимают превращение новых знаний в методику образовательного процесса, в технологии, отвечающие требованиям общества. Большинство отечественных авторов следуют за А.И. Пригожиным, который определяет нововведение, как "...форму управляемого развития, как целенаправленное изменение, которое привносит в среду новые, относительно стабильные элементы [Пригожин А.И., 1989].

Инновации в вузе мы видим как введение нового в цели, содержание, методы и формы обучения и воспитания, в организацию совместной деятельности преподавателей и учащихся, и, как результат, – изменения в стиле профессионального педагогического мышления. На современном этапе основная масса инноваций связана с применением ИКТ.

Инновационные механизмы должны обеспечить создание творческой атмосферы при изучении теории и методики обучения математике и информатике, возможность интегрировать новые технологии с традиционными на основе ИКТ. Это позволит разнообразить используемые приемы, средства и методы изучения методических дисциплин, будет способствовать мобильности освоения новых технологий и формирования методической компетентности.

Следовательно, инновации – это прямой путь интеграции инновационных и традиционных подходов и основной инструментарий улучшения качества образования. Как показал наш опыт, применение интегрированных технологий на основе ИКТ способствует формированию навыков самостоятельной исследовательской деятельности, формированию творческого и критического мышления.

Наибольшее распространение в вузе при использовании традиционных форм, таких как лекция, практические занятия, семинары и др., получила презентация, являющаяся средством активизации учебного процесса, о преимуществах которой уже немало написано. Мы постараемся осветить инновационные, на наш взгляд, формы и методы, которые реже используются в учебном процессе высшей школы.

Например, кроме интерактивной лекции, мы также применяем лекцию-беседу, лекция-интервью и лекцию-дискуссию. При проведении *лекции-беседы* по курсу теории и методики обучения математике мы анализируем содержание математического материала, обсуждаем элементы методики введения материала, различные подходы к его изучению, возможности использования электронных образовательных ресурсов и т.п., а как элемент инновации – демонстрируем фрагменты уроков с применением выделенных цифровых образовательных ресурсов (ЦОР). Причем фрагменты уроков подбираются не только преподавателем, но и студентами (при прохождении практики, при использовании материалов как “Фестиваль открытых уроков”, “Копилка методических идей” и т.д.).

Лекция-интервью мы рекомендуем проводить непосредственно в школе, где учителя математики, информатики и других предметов дают интервью по использованию инновационных методов обучения, при этом студенты тоже являются активными участниками как при постановке вопросов, так и при обсуждении использования опыта, его интеграции с вузовскими дисциплинами. Этот метод является эффективным для формирования профессиональных умений, т.к. студенты стараются сразу применить полученные знания при прохождении практики и осознают необходимость непрерывного самосовершенствования.

К проведению *лекции-дискуссии* привлекаем студентов, аспирантов и учителей школ, которым предварительно предлагается разработать методику изучения какой-либо темы из школьного курса математики (одну и ту же для всех, но с использованием различных учебников, разнообразных технологий и обязательно с использованием ИКТ). Разработанный материал можно продемонстрировать в форме видеофрагмента (особенно, если он был уже апробирован в школе) или непосредственно перед аудиторией.

При этом советуем соблюдать условия, разработанные А.А. Вербицким:

- “преподаватель входит в контакт со студентами не как “законодатель”, а как собеседник, пришедший на лекцию “поделиться” с ними своим личностным содержанием;
- преподаватель не только признает право студента на собственное суждение, но и заинтересован в нем;
- новое знание должно быть истинным не только в силу авторитета преподавателя, ученого или автора учебника, но и в силу доказательства его истинности системой рассуждений;
- материал лекции включает обсуждение разных точек зрения на решение учебных проблем, воспроизводит логику развития науки, ее со-

держания, показывает способы разрешения объективных противоречий в истории науки;

• коммуникация со студентами строится таким образом, чтобы подвести к самостоятельным выводам, сделать соучастниками процесса подготовки, поиска, нахождения решения, разрешения противоречий...;

• преподаватель ставит вопросы к вводимому материалу и отвечает на них, порождает вопросы у студентов и стимулирует самостоятельный поиск ответов на них по ходу лекции, в конечном итоге он добивается того, что студент думает совместно с ним” [1, с. 27].

На лекции каждый участник отстаивает свой методический подход, привлекая на свою сторону оппонентов из зала. При подведении итогов наиболее эффективной считается методика того автора, который “набрал” больше оппонентов. Все разработанные материалы студентам рекомендуется поместить в свою методическую копилку.

Большое значение мы придаем *проблемному диалогу*, который может проводиться как в традиционном режиме на семинарских занятиях, так и дистанционно. При подготовке к диалогу преподаватель должен умело подобрать проблемы, продумать четкую формулировку вопросов, которыми он будет стимулировать участие студентов в диалоге. В качестве инноваций мы также используем видеофрагменты со школьных уроков математики, элементы электронных учебников, видеозаписи или презентации с научных семинаров по решению каких-либо методических проблем (в частности, разные методы и приемы решения задач с параметрами, несколько методов решения геометрических задач, заданий части “С” из ЕГЭ и т.п.).

Для подготовки диалога также могут привлекаться и студенты, которые сами выбирают какую-либо проблему. Например, студенты предлагали рассмотреть различные задания, содержащие знак модуля, решения более сложных текстовых задач, особенности изучения отдельных вопросов для профильных классов и т.д.

Популярными у студентов являются инновационные *методические мастерские,* в которых они принимают активное участие. Здесь осуществляется знакомство с новыми технологиями, особенностями их внедрения в учебный процесс как школы, так и вуза, рассматриваются возможности предметной интеграции на основе инновационных технологий. Отчет о работе методических мастерских проводится в форме *методического театра*, когда каждый участник получает “свою роль”, которую он должен “сыграть” в определенной ситуации. Ситуации подбираются заранее и сопровождаются инструкциями, в которых излагается позиция данного лица. Более сложные ситуации предлагаются некоторым студентам или группе студентов заранее, а наиболее простые – непосредственно на занятии.

Также отчет может проходить в форме *деловой игры*, которая обычно проводится в конце семестра, занимает более длительное время и, как правило, заменяет зачет. Вернее сказать, что зачет проводится в форме деловой игры, но обязательно с использованием ИКТ, иногда с непосредственным выходом в Интернет для аргументации различных ситуаций и обоснования актуальности рассматриваемых вопросов, а также для разрешения отдельных спорных моментов.

Все перечисленные формы активно используются при изучении методических дисциплин, способствуют динамичности, его новизне, большей индивидуализации и дифференциации, вариативности учебной деятельности и, в частности, целенаправленной интеграции различных видов деятельности, что позволяет по-новому организовать взаимодействие всех субъектов обучения.

Таким образом, интеграция инновационных и традиционных подходов позволяет интенсифицировать учебный процесс, более качественно подойти к раскрытию той или иной темы, проблемы, вопроса в процессе обучения, творчески применить новые открывающиеся возможности ИКТ, что способствует повышению качества подготовки учителей математики и информатики.

Библиографический список

1. *Вербицкий, А.А.* Человек в контексте речи: формы и методы активного обучения [Текст] / А.А. Вербицкий. – М.: Знание, 1990. – 64 с.
2. *Герасимов, А.М.* Инновационный подход в построении обучения (Концептуально-технологический аспект) [Текст] / А.М. Герасимов, И.П. Логинов. – М.: АПКиПРО, 2001. – 64 с.
3. *Коржуев, А.В.* Традиции и инновации в высшем профессиональном образовании [Текст] / А.В. Коржуев, В.А. Попков. – М.: МГУ, 2003. – 272 с.
4. *Краевский, В.В.* Инновации и традиции – два полюса мира образования [Электронный ресурс] / В.В. Краевский // Интернет-журнал "Эйдос", 2003. – Режим доступа: http://www.eidos.ru/journal/2003/0711-01.htm.
5. *Уваров, А.Ю.* Кластерная модель преобразований школы в условиях информатизации образования. Информатизация как процесс преобразований школы. Модели процесса информатизации школы [Текст] / А.Ю. Уваров. – М.: МИОО, 2008. – 311 с.

Об оценке логической грамотности математической речи студентов педагогического вуза

И.Л. Тимофеева, И.Е. Сергеева

I. Проблема формирования *логической грамотности* математической речи студентов первого курса математического факультета педвуза – будущих учителей математики – заслуживает особого внимания, поскольку студенты при изучении математических дисциплин часто испытывают трудности именно *логического* характера. Например, студенты очень часто испытывают трудности и допускают ошибки в процессе преобразования отрицания предложений; переставляют разноименные кванторы в предложении, не понимая, что это ведет к изменению смысла предложения; не умеют правильно использовать термины “необходимо”, “достаточно” и т. д. Это свидетельствует о *низком уровне* логической грамотности большинства первокурсников [1], что заметно затрудняет изучение математических дисциплин.

Таким образом, возникает необходимость в целенаправленной и систематической логической подготовке студентов первого курса математического факультета педвуза к изучению математических дисциплин. Именно такая подготовка осуществляется на математическом факультете МПГУ во *Вводном курсе математики* (ВКМ) с обновленным логически-ориентированным содержанием [2].

II. Под *логической грамотностью математической речи* студентов понимаем знание студентами логических норм математического языка, соблюдение этих норм, умение корректно использовать логические средства и термины математического языка в соответствии с целями и содержанием устной и письменной речи.

Логические нормы математического языка (и языка обучения математике) представляют собой правила использования логических средств этого языка, соблюдение которых обеспечивает точность выражения мысли и однозначность понимания смысла математических выражений, предложений и определений.

Не претендуя на полноту описания, выделим следующие группы логических норм математического языка [3]:

1. Нормы логического *конструирования* математических предложений (с помощью логических союзов и кванторных слов) и определений.

2. Нормы *преобразования* математических предложений: нормы перехода к равносильному предложению; нормы модификации формулировки теоремы, в частности, нормы перехода от безусловной формы теоремы к условной, нормы опускания и восстановления кванторов в

формулировках теорем (нормы перехода к равно-доказуемому утверждению).

3. Нормы *использования логических символов* для записи математических предложений и определений.

III. Перечислим наиболее важные *логические умения*, необходимые студентам при изучении математических дисциплин, а также в будущей педагогической деятельности:

– умение распознавать, следует ли одно предложение из другого и равносильны ли предложения;

– умение преобразовывать отрицание предложений, в частности, для опровержения общих предложений;

– умение переходить от безусловной формы теоремы к условной форме и наоборот;

– умение записывать предложения (теоремы) с помощью логических символов;

– умение строить для данного предложения обратное, противоположное и контрапозитивное ему предложения;

– умение оперировать понятиями “необходимое условие”, “достаточное условие”;

– умение сформулировать определение известного математического понятия, записывать его с помощью логических символов, преобразовывать отрицание определяющего условия этого определения.

Перечисленные логические умения мы относим к умениям, которыми в первую очередь должен обладать логически грамотный студент (будущий учитель математики), и по сформированности именно этих умений мы и оцениваем уровень логической грамотности студентов.

Формирование этих логических умений мы считаем первоочередной задачей ВКМ. Целенаправленное формирование перечисленных умений в курсе ВКМ осуществляется посредством решения специально разработанных *логико-ориентированных задач.*

IV. Для оценки логической грамотности математической речи студентов используем их письменные работы, содержащие задачи, направленные на проверку сформированности перечисленных логических умений.

На математическом факультете МПГУ мы используем следующие типы оценивания логической грамотности математической речи студентов:

1) стартовое оценивание в начале изучения ВКМ;

2) текущее оценивание в процессе изучения ВКМ;

3) оценивание по окончании изучения ВКМ;

4) первое отсроченное оценивание (спустя три месяца после изучения ВКМ);

5) второе отсроченное оценивание (спустя два года после изучения ВКМ).

Уровень логической грамотности математической речи студентов определяем на основе анализа результатов диагностических работ. Каждая такая работа содержит 10 заданий, проверяющих сформированность перечисленных выше логических умений, и оценивается в 10 баллов (по 1 баллу за каждое задание). Для каждого студента по каждой работе вычисляется сумма набранных им за каждое задание баллов, колеблющаяся от 0 до 10. Если студент набирает от 0 до 5 баллов включительно, то это расценивается как низкий уровень логической грамотности, от 5 до 8 включительно – как средний уровень, от 8 до 10 включительно – как высокий уровень логической грамотности. Полученный суммарный балл рассматривается как индивидуальный показатель уровня логической грамотности студента, выраженный в баллах. Таким образом, у каждого студента имеется 5 индивидуальных оценок уровня его логической грамотности в баллах, позволяющих проследить в течение двух лет за изменением уровня логической грамотности как отдельного студента, так и всей группы в целом.

Отметим, что формирование и оценка логической грамотности математической речи студентов невозможна без формирования и оценки их *математической* грамотности. Однако при оценке логической грамотности мы стараемся свести математическую сложность задач к минимуму. Для каждой диагностической работы математический материал подбирается следующим образом: для стартовой диагностической работы – хорошо знакомый студентам материал школьного курса математики, для текущих диагностических работ – изучаемый (текущий) материал вузовских математических дисциплин, наконец, для отсроченных диагностических работ – изученный ранее материал вузовских математических дисциплин.

V. Приведем примерное содержание стартовой диагностической работы.

1. По теме “Равносильность и следование” предлагались задачи следующих типов:

Выясните и обоснуйте ответ:

а) является ли неравенство $x \leq 2$ следствием неравенства $x^2 \leq 4$;

б) является ли неравенство $x^2 \leq 4$ следствием неравенства $x \leq 2$;

в) верно ли, что $x \leq 2$ тогда и только тогда, когда $x^2 \leq 4$.

2. По теме “Необходимые и достаточные условия” предлагались задачи следующих типов:

а) Сформулируйте теорему о *достаточном* условии того, чтобы четырехугольник являлся параллелограммом.

б) Выясните, *необходимо* ли чтобы график функции был симметричным относительно оси ординат для того, чтобы функция являлась четной.

в) Выясните, *достаточно* ли чтобы график функции был симметричным относительно оси ординат для того, чтобы функция являлась четной.

3. По теме “Обратное предложение” предлагалась задача следующего типа:

Запишите утверждение, обратное утверждению “Диагонали любого прямоугольника равны”. Выясните, верно ли построенное предложение.

4. По теме “Определение” предлагались задачи следующих типов:

а) Сформулируйте определение четной функции.

б) Докажите, используя определение четной функции, что:

1) функция $f(x) = (x + 1)^4 + (x - 1)^4$ является четной;

2) функция $f(x) = x^4 - 4x + 5$ не является четной.

VI. Приведем примерное содержание текущей диагностической работы. Эта работа содержит 10 логико-ориентированных задач, аналогичных тем, которые предлагаются при изучении ВКМ.

1. По теме “Равносильность и следование” предлагалась задача следующего типа:

Для пары предложений $x > 3$ и $|\,x\,| > 3$ с действительной переменной выясните:

а) равносильны ли они;

б) является ли какое-нибудь из предложений следствием другого. Ответ обоснуйте.

2. По теме “Необходимые и достаточные условия” предлагалась задача следующего типа:

Для предложения

“Для того чтобы n М 18, *необходимо* (*но недостаточно*), чтобы ...”
из условий: n М 9, n М 2 и n М 9, n М 36, n М 6

выберите то условие, вставив которое вместо многоточия, получим справедливое утверждение. Ответ обоснуйте.

3. По теме “Обратное предложение” предлагалась задача следующего типа:

Запишите предложение, обратное предложению “Всякая сходящаяся последовательность ограничена”, и укажите, является ли оно теоремой.

4. По теме “Определение” предлагалась задача следующего типа:

Запишите определение *ограниченной снизу последовательности* на естественном языке и с помощью логических символов и преобразуйте отрицание определяющего условия этого определения.

VII. Приведем примерное содержание второй отсроченной диагностической работы.

1. По теме “Равносильность и следование” предлагались задачи следующих типов:

Выясните и обоснуйте ответ:

а) является ли предложение $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ следствием предложения $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$;

б) является ли предложение $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$ следствием предложения $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$;

в) выясните, верно ли, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$.

2. По теме “Необходимые и достаточные условия” предлагались задачи следующих типов:

а) Сформулируйте теорему о *необходимом* условии сходимости числового ряда.

б) Выясните, *достаточно* ли чтобы числовая последовательность была сходящейся для того, чтобы она была ограниченной.

в) Выясните, *необходимо* ли чтобы числовая последовательность была сходящейся для того, чтобы она была ограниченной.

3. По теме “Обратное предложение” предлагалась задача следующего типа:

Запишите утверждение, обратное утверждению “Всякое числовое множество, имеющее наибольший элемент, ограничено сверху”. Выясните, верно ли построенное предложение.

4. По теме “Определение” предлагались задачи следующих типов:

а) Сформулируйте определение функции, непрерывной в точке.

б) Докажите, используя определение функции, непрерывной в точке, что:

1) функция $f(x) = \sqrt{x+4}$ является непрерывной в точке $x = 5$;

2) функция $\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ не является непрерывной в точке $x = 0$.

VIII. Для оценки различий между уровнями логической грамотности математической речи студентов контрольной группы (КГ, 45 человек) и экспериментальной группы (ЭГ, 47 человек) использовался критерий Манна-Уитни.

При анализе результатов *стартовой* оценки логической грамотности с помощью этого критерия было выявлено отсутствие статистически значимых различий между уровнями логической грамотности студентов КГ и ЭГ.

При анализе результатов *отсроченной* оценки логической грамотности с помощью этого критерия было выявлено наличие статистически значимых различий между уровнями логической грамотности студентов КГ и ЭГ.

При сопоставлении результатов стартовой оценки логической грамотности студентов ЭГ и КГ с результатами отсроченной оценки логической грамотности студентов этих же групп также использовался критерий Манна-Уитни. Это сопоставление показало, что уровень логической грамотности студентов ЭГ повысился по сравнению со стартовым уровнем, а уровень логической грамотности студентов КГ практически не изменился по сравнению со стартовым уровнем (изменения не являются статистически значимыми).

Для выявления значимых различий между уровнями логической грамотности математической речи студентов ЭГ и КГ использовался также критерий Фишера (подтвердилась гипотеза: доля студентов, справившихся с задачами, в ЭГ существенно *больше*, чем в КГ, особенно это характерно для тех задач, при решении которых требуется преобразовать отрицание).

Таким образом, можно сделать следующие выводы:

1) уровень логической грамотности математической речи студентов ЭГ по сравнению со стартовым уровнем *повысился*;

2) между стартовым и отсроченным уровнями логической грамотности математической речи студентов КГ значимых изменений *не выявлено*;

3) наблюдается активный рост уровня логической грамотности в процессе ее *целенаправленного* формирования в рамках ВКМ у студентов ЭГ, и незначительный – после изучения этого курса; 4) *согласованность* результатов двух статистических критериев позволяет говорить о достоверности полученных результатов.

IX. Сложность оценки логической грамотности заключается в том, что логическая грамотность – *комплексная* (*интегральная*) *качественная характеристика* математической деятельности учащегося (в частности, математической речи). Как можно оценить интегральную характеристику в целом? Вероятно, только по каким-то определенным параметрам. Таким образом, пока можем говорить только о частичной (*локальной*) оценке логической грамотности, которая является *количественно-качественной* оценкой. Однако на основе анализа диссертационных исследований, в которых затрагиваются вопросы оценивания математической культуры, в частности культуры математической речи, авторы останавливаются именно на такой оценке (например, [4]).

X. Таким образом, экспериментально подтверждено, что эффективность формирования логической грамотности математической речи студентов существенно возрастает, если это формирование происходит целенаправленно, в деятельностной форме посредством решения специально разработанных логико-ориентированных задач.

Библиографический список

1. *Никольская, И.Л.* Привитие логической грамотности при обучении математике [Текст]: дисс. ...канд. пед. наук / И.Л. Никольская. – М., 1973. – 185 с.
2. *Тимофеева, И.Л.* О содержании “Вводного курса математики” в Московском педагогическом государственном университете [Текст] / И.Л. Тимофеева, И.Е. Сергеева // Труды V Колмогоровских чтений. – Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2007. – С. 158-164.
3. *Тимофеева, И.Л.* О формировании логической культуры речи будущих учителей математики [Текст] / И.Л. Тимофеева // Математическое образование: концепции, методики, технологии: Сб. трудов по материалам II Международной научной конференции “Математика. Образование. Культура” – Тольятти: ТГУ, 2007. – Ч. 3. – С. 348-353.
4. *Шармин, Д.В.* Формирование культуры математической речи учащихся в процессе обучения алгебре и началам анализа [Текст] /: дисс. ...канд. пед. наук / Д.В. Шармин. – Омск, 2005. – 209 с.

Проблемы организации олимпиады по методике математики

И.Е. Малова

Можно выделить следующие проблемы организации олимпиады по методике обучения математике:

1) каким должно быть *содержание* олимпиадных заданий, чтобы оно способствовало реализации следующих целей: повышение интереса к изучению методики; повышение продуктивности методической подготовки студентов; выявление талантливых студентов в области методики обучения математике;

2) каковы *критерии оценивания* выполнения олимпиадных заданий в ситуации вариативности методических решений;

3) как *организовать* проведение олимпиады, чтобы она удовлетворяла принципу массовости.

Кафедра методики обучения математике и информационных технологий Брянского государственного университета имени И.Г. Петровского определила тему олимпиады по методике “Конструирование и анализ урока по математике”, что позволило обеспечить и массовость участия, и возможность достижения целей олимпиады.

Олимпиада проводилась в два тура: заочный тур (оцениванию подвергались отчетные конспекты студентов по итогам педагогической практики); очный тур (в нем участвовали студенты, рекомендованные комиссией по результатам заочного тура).

Для оценивания отчетных конспектов студентов была предложена следующая схема рецензии:

РЕЦЕНЗИЯ НА РАБОТУ УЧАСТНИКА ЗАОЧНОГО ТУРА ОЛИМПИАДЫ ПО СОВРЕМЕННЫМ МЕТОДИКАМ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

ФИО студента ____________________

Курс, специальность ____________________

Тема урока ____________________

Класс обучения ____________________

Тип урока ____________________

Анализ постановки и достижения целей урока

№	Перечень образовательных целей	Соответствие формулировки требованиям	Обеспечение достижения целей в ходе урока	Отражение результата достижения целей в итогах урока

Математические ошибки: ____________________

Методические ошибки: ____________________

Проявление творчества: ____________________

Рекомендации к участию в очном туре ____________________

Рецензент ____________ Дата проверки ____________

Как видно из схемы рецензии, основное внимание в анализе конспектов уделено постановке и достижению целей урока, поскольку, как известно, от продуманности целей и процесса их достижения зависит результат обучения. Для совершенствования процесса методической подготовки выделены разделы о математических и методических ошибках студентов. Раздел о проявлении творчества позволяет оценить соответствующие склонности студента.

К формулировке целей предъявляются два требования: цель должна быть конкретной (указан результат); в формулировке цели представлено математическое содержание. Проверить точность постановки цели можно следующим образом. Если по формулировке цели можно поставить итоговый вопрос, на который можно дать развернутый ответ (а не просто “да” или “нет”), то цель содержит конкретный результат.

Например. По формулировке “ Научить применять формулу суммы первых членов арифметической прогрессии” возможен итоговый вопрос: “Научились применять формулу суммы первых членов арифметической прогрессии?”, что предполагает односложный ответ. Если цель сформулировать так: “Выделить ситуации применения формулы суммы первых членов арифметической прогрессии и соответствующие им способы ее применения”, то итоговыми вопросами станут: “Каковы ситуации применения формулы суммы первых членов арифметической прогрессии?”, “Как решают задачи в соответствующих ситуациях?”.

На итоговые вопросы в конспекте должны быть представлены ответы, что дает учителю возможность заранее отшлифовать математическую речь и в течение урока обеспечивать овладение учащимися соответствующими выводами.

В рецензировании работ заочного тура принимали участие все руководители педагогической практики, что способствовало не только обмену мнениями, но и выработке единых требований к конспектам уроков на педагогической практике.

Для организации очного тура был выбран видеоурок, и по анализу урока было предложены следующие задания.

Задания для очного тура олимпиады по методике математики

1. Составьте план просмотренного урока.

2. Каким методом введено основное определение? Как была организована работа с определением? Почему учитель так организовал эту работу?

3. Какие виды заданий рассматривались на уроке? Какие способы их решения были предложены?

4. Столкнулись ли учащиеся с математическими затруднениями? Какими? Почему?

5. На какие вопросы в связи с темой учащиеся должны знать ответ? Каков ответ?

6. Оцените особенность методической системы учителя в данном уроке. Какие дидактические средства предложил учитель? Почему учитель использовал то или иное средство?

Представленное задание дает возможность:

– выявить уровень умения ставить цели и оценивать путь их достижения:

– выявить уровень владения базовыми методиками;

– выявить уровень понимания причин математических затруднений учащихся и их взаимосвязь с методическими действиями учителя;

– выявить уровень направленности методических решений на достижение значимых для учащихся результатов;

– обогатить студентов особенностями методической системы учителя.

Представим критерии оценивания задания очного тура.

Оценивание каждого пункта составленного студентами плана урока (задание 1) осуществлялось по следующим критериям:

– указание цели этапа – 0,3 балла;

– указание математического содержания – 0,4 балла;

– указание способа организации этапа – 0,3 балла.

Таким образом, студенты за правильно выделенный этап урока получали 1 балл. Выделить в уроке соответствующий этап помогает прием “От. . . до. . . ” определения места в уроке анализируемого этапа, в котором указывается начало этапа и его завершение. Общее количество баллов за задание 1 определялось числом этапов урока.

Оценивание этапа введения определения (задание 2) осуществлялось по следующим критериям:

– правильно определен метод введения определения – 0,5 балла;

– правильно раскрыта организация работы с определением – 0,5 балла;

– правильно обоснована организация учителем деятельности учащихся – 1 балл.

Таким образом, студенты за правильное выполнение задания 2 получали 2 балла.

Оценивание выделенных видов задач и способов их решения (задание 3) осуществлялось по следующим критериям:

– есть попытка сгруппировать задачи в виды – 1 балл;

– для базовых заданий способы решения представлены в виде последовательности действий – 1 балл за каждый способ;

– для заданий на применение базовых знаний и умений обращается внимание на анализ условия и поиск способа решения – 1 балл.

Оценивание выявленных математических затруднений учащихся (задание 4) осуществлялось по следующим критериям:

– затруднения вызваны определенным этапом работы над задачей – 1 балл;

– затруднения связаны с сутью задания – 1 балл;

– затруднения связаны с определенным шагом выполнения заданий – 1 балл на все шаги, вызвавшие затруднения у учащихся.

Оценивание итоговых вопросов (задание 5) осуществлялось по следующим критериям:

– формулирование вопросов, выводящих учащихся на обобщение – 1 балл на все обобщающие вопросы, которые должны были быть заданными на итогах;

– формулирование таких вопросов, которые отражают главные итоги урока – 1 балл на все главные вопросы;

– даны четкие ответы на главные вопросы – 1 балл на максимальное число правильных ответов, что определяет долю балла на 1 ответ.

Поощрительный балл давался за вопросы-ответы, связанные с преодолением математических затруднений учащихся.

Оценивание дидактических средств (задание 6) осуществлялось по следующим критериям: за правильное обоснование выбранного учителем дидактического средства – 1 балл.

При подведении итогов олимпиады студенты высказали пожелание об укрупнении заданий с целью уменьшения их количества и о добавлении задания-эссе, в котором они могли бы высказать свое мнение о просмотренном уроке, о методической системе учителя и прочее.

В перспективе кафедра планирует организацию аналогичной олимпиады по методике обучения информатике.

Библиографический список

1. *Малова, И.Е.* Теория и методика обучения математике в средней школе [Текст]: учеб. пособие для студентов вузов / И.Е. Малова. – М.: Владос, 2009. – 445 с.
2. *Малова, И.Е.* Теория и методика обучения математике в средней школе / Г.А. Яцковская, И.Е. Малова, Н.А. Малинникова, С.К. Горохова. – М.: Владос, 2009. – 448 с.

Постановка задачи дидактического проектирования информационно-аналитических технологий обучения на основе карты восприятия математических дисциплин

Е.Н. Трофимец

Требование обеспечить хорошую математическую подготовку выпускников экономических специальностей вузов, для которых математика является инструментом профессиональной деятельности, приходит в противоречие с уменьшающимся количеством часов, отведенных на изучение математики. В такой ситуации преподаватель обычно вынужден вести обучение на уровне алгоритмов, пренебрегая содержательной стороной математики, возможностями ее развития вширь и вглубь, уделяя основное время на выработку умений и навыков решения типичных примеров. Понятно, что подобное “изучение” математики не способствует развитию интереса к предмету и создает проблемы математического образования студентов-экономистов.

В образовательном процессе подготовки менеджеров будущий выпускник вуза изучает довольно широкий перечень учебных дисциплин. При этом, с одной стороны, наблюдается расширение масштабов и углубление научного познания, находящие отражение в современных учебных программах, а, с другой стороны, этот процесс зачастую сопровождается усилением разобщенности и ослаблением связей между изучаемыми предметами, что в определенной степени ведет к снижению мотивации изучения непрофильных дисциплин. Проведем анализ сложившейся ситуации проведем на основе построения *карты восприятия учебных дисциплин* (рис. 1).

В предлагаемой карте восприятия учебных дисциплин ось ординат отражает сложность самостоятельного освоения дисциплины обучаемым. Смещение акцента именно на самостоятельное освоение позволяет повысить достоверность суждения обучаемого об объективной сложности дисциплины, которая по причинам субъективного характера может не совпадать со сложностью сдачи экзамена (зачета) по данной дисциплине.

Предлагается три градации сложности дисциплины:

- низкая сложность – легкоусваиваемая дисциплина (подавляющее большинство дидактических единиц дисциплины усваиваются достаточно легко на интуитивно-понятном уровне);
- средняя сложность – среднеусваиваемая дисциплина (для усвоения определенной части дидактических единиц дисциплины требуется их углубленное осмысление, базирующееся на активизации абстрактного мышления);

Карта восприятия дисциплины

низкая	Низкозначимая, легкоусваиваемая	Среднезначимая, легкоусваиваемая	Высокозначимая, легкоусваиваемая
средняя	Низкозначимая, среднеусваиваемая	Среднезначимая, среднеусваиваемая	Высокозначимая, среднеусваиваемая
высокая	Низкозначимая, трудноусваиваемая	Среднезначимая, трудноусваиваемая	Высокозначимая, трудноусваиваемая
	низкая	средняя	высокая

Рис. 1. Карта восприятия учебных дисциплин

- высокая сложность – трудноусваиваемая дисциплина (значительная часть дидактических единиц дисциплины требует углубленного осмысления и понимания, базируется на абстрактном категорийном аппарате и требует для усвоения существенных мыслительных усилий).

Ось абсцисс отражает профессиональную значимость дисциплины, т.е. степень возможности ее использования в будущей профессиональной деятельности.

Предлагается три градации профессиональной значимости дисциплины (с точки зрения обучаемого):

- низкая значимость – низкозначимая (неважная) дисциплина (дидактические единицы дисциплины не имеют прямой связи с будущей профессиональной деятельностью);
- средняя значимость – среднезначимая (относительно важная) дисциплина (часть дидактических единиц дисциплины имеют прямую связь с будущей профессиональной деятельностью);

- высокая значимость – высокозначимая (важная) дисциплина (подавляющее большинство дидактических единиц дисциплины имеют прямую связь с будущей профессиональной деятельностью).

Рассмотрим предложенную карту восприятия дисциплины в рамках компетентностного подхода, являющегося на современном этапе развития системы высшего профессионального образования одним из доминирующих подходов к обучению.

В настоящее время сложились различные взгляды на роль, место и сущность компетентностного подхода. Одно из наиболее конструктивных определений компетенции дано в работе Э.Ф. Зеера, где под компетенцией понимается способность применять знания, умения и личностные качества для успешной деятельности в определенной области. При этом различают два типа компетенций: *общекультурные* и *профессиональные*.

Опираясь на приведенное определение компетенции и выделенные ее типы, можно констатировать, что в таблице восприятия дисциплины компетентностный подход находит свое прямое отражение в профессиональной значимости дисциплины (ось абсцисс). При этом высокозначимые дисциплины формируют профессиональные компетенции, низкозначимые – общекультурные компетенции, среднезначимые дисциплины занимают промежуточное положение.

Как показывает образовательная практика, обучаемые в наибольшей степени мотивированы на изучение высокозначимых для профессиональной деятельности дисциплин, поэтому преподаватели данных дисциплин (как правило, это специальные и часть общепрофессиональных дисциплин) избавлены от необходимости поддержания у обучаемых высокого уровня мотивации. Для преподавателей низкозначимых дисциплин (как правило, это общие гуманитарные, математические и естественнонаучные дисциплины) проблема формирования и поддержания мотивации у обучаемых является одной из ключевых. Исключение, пожалуй, составляют ситуации, когда обучаемый в силу своих природных склонностей (или хобби) проявляет самостоятельный интерес к изучению дисциплины. В других ситуациях преподаватель должен проявить высокое педагогическое мастерство, чтобы заинтересовать обучаемых.

Острота проблемы формирования и поддержания мотивации обучаемых при изучении низкозначимых дисциплин существенно различается в зависимости от сложности усвоения дисциплины. Так, для легкоусваиваемых дисциплин острота указанной проблемы снижается, так как обучаемые не затрачивают существенных усилий для усвоения дидактических единиц дисциплины. Поэтому тезис о том, что изучаемая дисциплина важна для формирования общей культуры обучаемого, не входит во внутреннее противоречие с его мотивационной установкой. Противоположное явление наблюдается при изучении трудноусваиваемых дисциплин, когда для усвоения дидактических единиц со стороны обучаемого требуются значительные умственные усилия. В этом случае возникает внутреннее противоречие между мотивационной установкой обучаемого и затрачиваемыми усилиями, что находит свое проявление в высказываниях типа: “зачем она (дисциплина) мне нужна, было бы значительно полезнее потратить время и силы на изучение другой дисциплины”.

На основе более детального анализа дисциплины в разрезе дидактических единиц можно построить их *индивидуальные карты восприятия* (например: карты восприятия дифференциалов, интегралов, рядов, дифференциальных уравнений, векторного поля, линейного программирования и т.д.).

Наиболее благоприятную карту восприятия для менеджеров имеет линейное программирование (ЛП), так в процессе изучения данной дидактической единицы не составляет большого труда привести многочисленные примеры практического использования методов ЛП в будущей профессиональной деятельности менеджера. Самую неблагоприятную карту восприятия имеют векторное поле и ряды, что также имеет объяснение – достаточно трудно привести яркие, убедительные примеры использования данных дидактических единиц в будущей профессиональной деятельности менеджера. В этом случае для повышения мотивации обучаемых преподавателю приходится опираться, прежде всего, на тезисы необходимости математики для формирования логического мышления менеджера: “математика – гимнастика ума”, “математикой заниматься ...” и т.п.

Таким образом, можно констатировать, что математика воспринимается большинством студентов-менеджеров только как дисциплина, формирующая общекультурные, а не профессиональные компетентности. Но даже в том случае, когда для ряда дидактических единиц (как правило, это дидактические единицы из раздела “исследование операций”) удается установить их прямую связь с будущей профессиональной деятельностью, по-прежнему для многих студентов они не являются профессионально значимыми. Данное обстоятельство объясняется несколькими соображениями. Во-первых, сталкиваясь с реальной деятельностью в экономической сфере (непосредственные жизненные наблюдения, общение с родственниками, знакомыми и др.), студенты, как правило, не встречают примеров практического применения математических методов для решения задач экономики. Во-вторых, математические методы являются достаточно наукоемкими и сложными, поэтому, если даже студент и видит потенциальную возможность их применения в будущей профессиональной деятельности, тем не менее, профессиональная значимость математических методов по-прежнему остается невысокой из-за сложности их практического применения. Поэтому процесс обучения студентов-менеджеров будет более эффективен, если содержание и структура дисциплин будут формироваться на основе интегративного подхода.

Интегративное представление информации в силу ее сжатия, концентрации, обобщения выступает эффективным инструментом рационализации запоминания и понимания. Данный уровень обязывает рассматривать объекты и явления реальной действительности в их взаимосвязи и взаимообусловленности. В этих условиях кардинальным образом меняется взгляд на внутри- и межпредметные связи. В целом ряде случаев, например, математика должна стать не источником, а потребителем знаний, предложенных на занятиях по общепрофессиональным дисциплинам, опираться на представления, сформированные при изучении этих дисциплин.

Интеграция является одним из перспективных инновационных приемов, способных решить многие проблемы современного предметно-разобщенного профессионального образования. Представление о предметоцентризме не противостоит интеграции, а развитие системы профессионального образования не идет по пути ограничения или замены одного принципа другим. Процесс обучения происходит в границах отдельного предмета именно потому, что он представляет собой интегрированную систему. Предметоцентризм и интеграция – это два диалектически взаимосвязанных положения, обусловливающих друг друга. Практически предметоцентризм представляет собой внешнюю форму внутрипредметной интеграции. Современные тенденции развития системы профессионального образования предполагают использование интеграции в качестве одного из перспективных инновационных приемов, но при этом важно понимать, что этот процесс может и должен происходить не от предметно-целостного образования к интеграционному, а от внутрипредметной интеграции к межпредметной. Такой переход предполагает не замену, а дополнение одного положения другим.

При этом изучение математических дисциплин призвано раскрыть не только содержание собственно математических знаний, но и установить тесные интегративные связи со специальными дисциплинами, особенно с теми, изучение которых сопровождается решением профессионально-ориентированных задач с использованием наукоемких экономико-математических моделей и методов.

Дидактическая эффективность ряда учебных дисциплин математического цикла (в частности, таких дисциплин, как “Высшая математика”, “Теория вероятностей”, “Математическая статистика”, “Эконометрика”) может быть повышена путем внедрения в образовательный процесс инновационных методов обучения, отличных от традиционных форм обучения, которые, в основном, направлены на механическое запоминание информации. Традиционные формы обучения должны дополняться новыми инновационными технологиями, разработанными в соответствии с интерактивными формами обучения, что позволит повысить качественный уровень подготовки студентов, поддерживая и направляя их интеллектуальный потенциал. Одной из таких технологий, на наш взгляд, является технология компьютерного моделирования, которая позволяет органично синтезировать знания по экономике, математике, информационным технологиям и обладает значительным дидактическим потенциалом в формировании информационно-аналитической компетентности студентов экономических вузов.

Особенность информационно-аналитических технологий обучения состоит в том, что наряду с информационной составляющей в них доминирующую роль играет математическая составляющая, которая является ключевой компонентой инструментальных методов решения сложных аналитических задач экономического характера. Таким образом, информационно-аналитические технологии обучения в образовательном процессе студентов-экономистов реализуют парадигму интегративного обучения, проявляющегося в тезисе “математика помогает экономике, информатика помогает математике”.

Проектирование информационно-аналитических технологий обучения студентов-экономистов подчиняется общим принципам проектирования компьютерных систем учебного назначения, основополагающими из которых являются: принцип целостности; принцип воспроизводимости; принцип нелинейности педагогических структур; принцип адаптации процесса обучения к личности обучаемого; принцип потенциальной избыточности информации.

Наряду с общими принципами проектирования компьютерных систем учебного назначения, процессу дидактического проектирования информационно-аналитических технологий присущи специфические черты, среди которых можно выделить следующие:

- априорная дидактическая система информационно-аналитической подготовки специалистов экономического профиля должна ориентироваться на концептуальную модель научно-методического аппарата решения профессионально-ориентированных экономических задач;
- элементы реальной дидактической системы информационно-аналитической подготовки специалистов экономического профиля должны соответствовать способам, методам и моделям обработки экономической информации, доминирующим в профессиональной деятельности;
- процесс построения и анализа однотипных моделей экономических систем должен основываться на общих методологических подходах и принципах;
- используемое учебно-методическое программное обеспечение должно быть ориентировано на обучаемых, не имеющих специальной математической подготовки, главной задачей которых является понимание только основополагающих идей и принципов, реализованных в изучаемых экономико-математических моделях и методах.

Таким образом, одним из начальных этапов дидактического проектирования системы информационно-аналитической подготовки специалистов экономического профиля является построение концептуальной модели научно-методического аппарата решения профессионально-ориентированных экономических задач (ПОЭЗ). Исходя из логики проектирования, построение такой модели должно начинаться с выявления существенных признаков ПОЭЗ, на основании которых они могли бы быть классифицированы и тем самым определены опорные направления для синтеза самой модели. Принимая во главу тот факт, что научно-методический аппарат решения ПОЭЗ является формальной конструкцией, особое внимание было обращено на формальные признаки профессионально-ориентированных экономических задач. Наиболее конструктивными формальными признаками ПОЭЗ, являются, на наш взгляд, признаки, сложившиеся в современной теории принятия решений.

Библиографический список

1. *Трофимец, Е.Н.* Роль интегративной функции математики при подготовке специалистов экономического профиля [Текст] / Е.Н. Трофимец // Математика и математическое образование. Теория и практика. – Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2002. – С. 56. – Вып. 3.
2. *Трофимец, Е.Н.* Интеграция экономических процессов средствами математического анализа [Текст] / Е.Н. Трофимец // в сб. “Учитель-ученик: проблемы, поиски, находки”. – Саратов: Изд-во “Научная книга”, 2003. – С. 40-43.

Методика изучения основных математических принципов и методов в курсе геометрии школы им. А.Н. Колмогорова

М.Е. Колоскова

Ситуация в современной массовой школе такова, что несмотря на то, что именно геометрия обладает самым большим развивающим потенциалом, именно геометрическая деятельность исторически является первичной интеллектуальной деятельностью человека в целом и каждого человека в отдельности, знания учащихся по геометрии, владение приемами геометрической деятельности, понимание геометрических методов познания мира с каждым годом снижаются. Основными причинами трудностей обучения школьников геометрии и быстрого забывания ими изученного материала является отсутствие на уроках живого интереса учеников к предмету, недостаток самостоятельной и творческой деятельности, преобладание репродуктивных методов обучения, а также слабое понимание внутрипредметных, межпредметных связей и связи изучаемого предмета с реальной жизнью.

Кроме вышеперечисленных проблем, связанных с обучением школьников геометрии, современное общество требует изменений в процессе обучения математике в целом, переосмысления базовых теоретических знаний и практических умений, необходимых для адекватной ориентации в ситуации быстрого роста научно-технического прогресса и информатизации общества. Изменения также связаны с ориентацией процесса обучения на общекультурное, социально-нравственное и профессиональное развитие личности учащегося, создание благоприятных условий для активного освоения человеком способов познавательной деятельности и обеспечения тем самым его самореализации и развития. В “Концепции модернизации образования” подчеркивается, что “школа должна давать не только информацию, но и способы работы с ней. Школьники должны научиться учиться, то есть самостоятельно приобретать новые знания.”

Таким образом, в настоящих условиях наиболее важное образовательное значение имеют не приобретенные теоретические знания, а опыт средства познания математики. Этот факт также отмечается рядом ведущих специалистов в области методики преподавания математики: В.А. Гусевым, В.В. Давыдовым, Г.В. Дорофеевым, А.Л. Жоховым, А.Г. Мордковичем, Г.И. Саранцевым и др.

Ввиду всего вышесказанного мы считаем целесообразным ввести в курс изучения геометрии восемь основных математических принципов и методов, а именно:

- метод математической индукции;
- принцип Дирихле;

- метод включения-исключения;
- принцип исключенного третьего;
- принцип суперпозиции;
- метод Декарта;
- принцип двойственности;
- принцип непрерывности.

Поскольку данные методы являются общезначимыми, имеют применения в различных областях математики и способствуют осознанию школьниками единства математики, формированию научного мировоззрения и повышению их математической культуры.

Данная статья посвящена основным положениям методики изучения вышеперечисленных математических принципов и методов в курсе геометрии в школе им. А.Н. Колмогорова.

Общая методика изучения указанных выше принципов и методов представляет собой совокупность следующих компонентов:

1) частные методики изучения каждого принципа;

2) методы оценки уровня полученных знаний, умений и навыков в процессе изучения каждого вышеуказанного принципа или метода;

3) последовательность изучения вышеперечисленных принципов и методов, а именно место, каждого из них в программе курса геометрии.

1. Общий вид частной методики изучения определенного принципа или метода. Каждая частная методика изучения перечисленных выше математических принципов и методов предполагает наличие *теоретической части* и *списка задач.*

Теоретическая часть состоит из формулировки и исторических сведений об изучаемом принципе или методе.

Список задач состоит из задач, выбираемых в соответствии с определенными принципами отбора.

При выборе задач для списка по каждой теме в школе им. А.Н. Колмогорова мы руководствуемся следующими принципами, которые были выработаны в соответствии с основными целями обучения, принципами отбора содержания обучения и основными дидактическими принципами обучения в нашей школе:

1. *Принцип системности* заключается в том, что задачи списка должны находиться в определенной логической последовательности, образовывая систему. То есть список задач должен содержать:

- базовые задачи, решением которых, в сущности, является доказательство изучаемого принципа или метода, или в основе решения которых лежит прямое применение изучаемого принципа или метода;

- тренировочные задачи (задачи на усвоение и закрепление изучаемого принципа или метода);
- задачи, в которых в процессе решения происходит сведение к уже известным результатам или основным приемом решения которых является алгоритм, уже примененных в предыдущих задачах;
- задачи-обобщения;
- задачи-вариации, которые получены из предыдущей задачи посредством изменения какого-либо условия при сохранении остальных;
- задачи на связь различных математических принципов и методов между собой.

2. *Принцип доступности*, заключающийся в том, что учебная деятельность ученика должна быть посильной ему и находиться, как указывал Л.С. Выготский, в “зоне его ближайшего развития”. С целью реализации данного принципа некоторые сложные задачи не включаются в исходной формулировке в список задач, а разбиваются на подзадачи, решив которые учащийся самостоятельно приходит к решению всей задачи в целом.

3. *Принцип полноты*, состоящий в том, что в список задач должны быть включены задачи, дающие максимально полное представление обо всех возможных применениях изучаемого принципа и его вариаций к задачам различного типа (на вычисление, доказательство, построение и т.д.).

4. *Принцип научности,* в соответствии с которым в списки задач включаются задачи исследовательского характера, нацеленные на более углубленное изучение темы, на развитие эвристических навыков и интереса к началу научно-исследовательской деятельности.

5. *Принцип развития творческой деятельности*, заключающийся в том, что в списки задач включаются задачи, направленные на развитие творческой деятельности, то есть задачи, предполагающие творческое применение какого-либо утверждения или, например, выбор параметра таким образом, чтобы он смог попасть под условие задачи и привести к нужному результату при применении соответствующего принципа или метода; задачи, требующие проявления эвристических навыков и т.д.

6. *Принцип развития устойчивого интереса* – в списки включаются задачи, направленные на формирование и повышение интереса к изучению геометрии, то есть задачи с красивыми рисунками и чертежами, выполняемые учащимися, задачи и теоремы, сыгравшие важную роль в истории развития математики, задачи, иллюстрирующие эстетическую красоту науки математики и соответствующих принципов и методов.

7. *Принцип единства математики,* в соответствии с которым в списки задач включаются задачи иллюстрирующие связи различных областей математики между собой.

8. *Принцип непрерывности обучения* – включение задач, показывающих связь между школьной и вузовской математикой.

Рассмотрим, в качестве примера, частную методику изучения метода математической индукции.

Методика изучения метода математической индукции

В школе им. А.Н. Колмогорова на изучение принципа математической индукции в курсе геометрии выделяется одна лекция, содержание которой составляет формулировка и исторические сведения о методе математической индукции, а также доказательство следующего утверждения, известного, как задача Успенского.

Для любого треугольника ABC, у которого углы $\angle CAB = \alpha$, $\angle CBA = \beta$, *имеют место неравенства:*

$$\frac{AC}{AB} > \frac{\beta}{\alpha+\beta}, \quad \frac{BC}{BA} > \frac{\alpha}{\alpha+\beta}.$$

Выбор именно этой задачи объясняется тем, что она является интересным, но достаточно сложным примером применения метода математической индукции в геометрии. Обратим внимание на то, что в условии задачи вообще отсутствует какой-либо натуральный параметр. Поэтому прежде, чем доказывать утверждение методом математической индукции сначала нужно найти параметр, по которому можно будет провести индукцию. С этой целью решение задачи в общем случае разбивается на два частных случая (отметим, что таким образом в этой задаче используется еще и *принцип суперпозиции*), а именно случай, когда указанные в условии углы соизмеримы, и случай, когда они не являются соизмеримыми. Затем в случае соизмеримых углов нужно ввести два параметра и провести индукцию по их сумме. В случае несоизмеримых углов задача решается с учетом результата, полученного при решении задачи в первом случае, используя *принцип непрерывности.* Кроме того, данная задача также имеет три следствия, два из которых носят геометрический характер и одно является утверждением математического анализа, что, в свою очередь, иллюстрирует единство науки математики.

Разработанный нами список задач условно можно разделить на два крупных блока. Первый блок связан с основными алгебраическими задачами, которые решаются методом математической индукции, второй блок посвящен применению метода математической индукции в геометрии. Остановимся более подробно на структуре каждого блока. Первый блок состоит из задач, выбранных в соответствии с перечисленными выше принципами отбора и иллюстрирующих следующие варианты применения ММИ:

- обнаружение гипотезы и последующее ее доказательство методом математической индукции;
- доказательство тождеств методом математической индукции;
- доказательство неравенств методом математической индукции (в том числе доказательство неравенства Коши);
- решение задач на делимость с помощью метода математической индукции;
- решение задач на реккурентные последовательности, с помощью метода математической индукции;
- решение методом математической индукции задач, в условиях которых имеется более одного натурального параметра.

Второй блок задач связан с применением метода математической индукции для решения геометрических задач и иллюстрирует следующие варианты использования ММИ в геометрии:

- геометрические задачи на вычисление (Например, вычислить сторону a_{2^n} правильного 2^n-угольника, вписанного в окружность радиуса R);
- геометрические задачи на доказательство по индукции (в частности задачи о раскрасках карт. Например, несколько прямых делят плоскость на части. Доказать, что полученную карту можно правильно раскрасить в белый и черный цвет, то есть так, чтобы соседние части, имеющие общий отрезок границы, были разного цвета (как на рисунке при $n = 4$).
- задачи на построение (Например, на плоскости даны $2n+1$ точек, построить $(2n+1)$-угольник, для которого эти точки являются серединами сторон);
- задачи на геометрическое место точек, решаемые с помощью метода математической индукции (например, доказать, что в четырехугольнике, который можно описать около круга, середины диагоналей лежат на одной прямой с центром круга);
- примеры стереометрических задач, решаемых с помощью применения метода математической индукции (например, на сколько частей делят пространство n плоскостей, проходящих через одну точку, если никакие три не имеют общей прямой?).

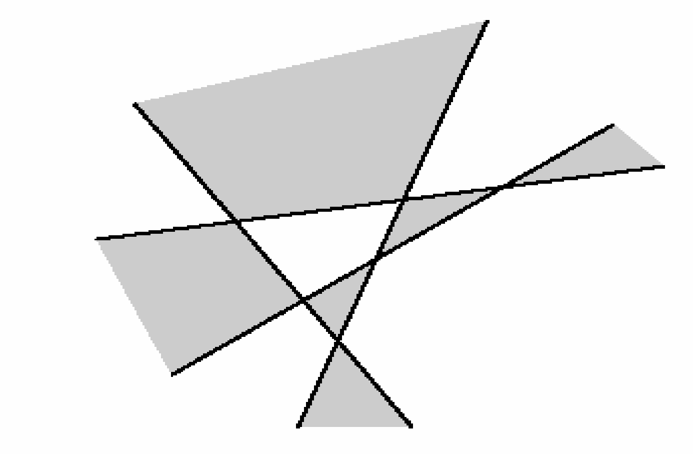


Рис. 1. Двуцветная раскраска

3. Методы оценки уровня полученных знаний, умений и навыков в процессе изучения каждого вышеуказанного принципа или метода.

Для оценки уровня полученных знаний, умений и навыков в процессе изучения каждого из вышеперечисленных принципов и методов нами используются следующие методы:

- *коллоквиумы* (то есть ученикам в начале изучения соответствующего принципа или метода выдается список задач, решения которых по окончанию изучения темы они должны будут полностью сдать преподавателю в форме беседы). Отметим, что коллоквиумы могут проводиться не обязательно отдельно по каждому принципу, иногда более целесообразно объединить несколько изученных принципов в один коллоквиум; в том случае, если изучаемый материал не представлял для учеников большой сложности.
- *контрольные работы*;
- *практикумы.*

Отметим, что в школе им. А.Н. Колмогорова наибольшее предпочтение отдается таким методам контроля, как коллоквиумы и практикумы, поскольку помимо контролирующей, они также содержат в себе обучающую составляющую, что позволяет более эффективно использовать учебное время.

Перейдем к последнему компоненту общей методики изучения основных математических принципов и методов, а именно к вопросу последовательности их изучения.

4. *Последовательность изучения вышеперечисленных принципов и методов.*

Поскольку перечисленные выше принципы имеют широкое применение не только в геометрии, но и в таких разделах школьной математики, как алгебра и математический анализ, в нашей школе мы считаем необходимым проводить изучение данных принципов не только в курсе геометрии, но и параллельно в курсах алгебры и математического анализа с целью реализации межпредметных связей и понимания школьниками принципа единства математики.

Программы по геометрии в школе им. А.Н. Колмогорова отличаются от программ большинства других школ тем, что в 10-м классе школьники занимаются в основном повторением и расширением уже имеющихся у них знаний, умений и навыков планиметрии. Поэтому, учитывая то, что уроки алгебры и математического анализа в нашей школе начинаются с изучения школьниками метода математической индукции, принципа Дирихле, принципа включения-исключения, последовательностей, функций и их пределов и т.д., мы считаем целесообразным закончить первую четверть геометрического курса блоком, состоящим из следующих тем: метод математической индукции в геометрии, принцип Дирихле в геометрии, принцип включения исключения в геометрии, принцип исключенного третьего, принцип суперпозиции и принцип непрерывности, так как, на наш взгляд, это способствует:

- освоению школьниками важных методов решений многих задач из разных областей математики, в частности планиметрии, в том числе задач олимпиадного характера;
- систематизации имеющихся у них к данному моменту знаний по планиметрии;
- установлению межпредметных связей;
- умению самостоятельно добывать знания;
- воспитанию научного мировоззрения и т.д.

Так как в большинстве школ в 10-м классе уже начинается курс стереометрии, то, возможно, было бы полезным закончить изучением вышеперечисленных принципов курс планиметрии в девятом классе, что кроме вышеперечисленных целей также способствовало бы повторению и закреплению изученного материала.

Другим возможным вариантом является изучение вышеперечисленных принципов в рамках некоторых определенных школьной программой тем. Так, например, *принцип математической индукции* можно включить в изучение тем, посвященных изучению многоугольников (на примере задач, касающихся вычисления стороны правильного k-угольника, вписанного в окружность, определения суммы углов простого многоугольника, определения количества непересекающихся диагоналей выпуклого k-угольника и т.д.), прямых и окружностей, задач на построение и геометрическое место точек. *Принцип суперпозиции* используется во многих геометрических задачах на различные темы. В частности с принципом суперпозиции все школьники сталкиваются при изучении теоремы об угле, вписанном в окружность. Принцип включения-исключения можно было бы включить в изучение темы, посвященной площадям (на примере задач об оценки площади пересечения различных объектов), при этом на наш взгляд, особый интерес здесь представляет задача о “заплатках на кафтане”, которая звучит следующим образом:

На кафтане площади 1 имеются 5 заплат. Докажите, что если площадь каждой заплаты не меньше 1/2, то найдутся две заплаты, площадь общей части которых не меньше 1/5,
и при решении которой, метод включения-исключения приходится применять несколько раз.

Обратим также внимание на то, что если курсы алгебры и математического анализа в школе не предусматривают изучения каких-то из вышеперечисленных принципов и методов, имеющих широкое применение в алгебре и математическом анализе (такие как метод математической индукции, принцип Дирихле, принцип включения-исключения и т.д.), мы рекомендуем включить (при изучении данных принципов и методов в курсе геометрии) некоторые наиболее важные задачи из алгебры и математического анализа, иллюстрирующие применение данных методов или принципов и в других разделах математики, с целью улучшения результатов обучения.

Метод Декарта в школе им. А.Н. Колмогорова обычно включается в раздел программы *Преобразование плоскости. Геометрическое место точек.* В большинстве общеобразовательных школ, на наш взгляд, изучение метода Декарта (или метода геометрических мест) целесообразно включить (если он еще не был включен) в изучение темы Метод координат, поскольку эти два метода тесно связаны между собой.

Принцип двойственности является основным принципом проективной геометрии и естественным образом включается программу в разделе проективная геометрия. Заметим, что с принципом двойственности учащиеся также сталкиваются при изучении алгебры множеств на уроках алгебры, на чем стоит акцентировать внимание учеников. Учитывая то, что проективная геометрия не входит в список обязательных тем государственного стандарта и не во всех школах занимаются ее изучением, в этом случае мы предлагаем познакомить школьников с принципом двойственности в геометрии на уроках стереометрии при изучении темы многогранники на примере двойственных многогранников.

Итак, мы описали последовательность изучения основных математических методов и принципов в курсе геометрии 10-го класса школы имени А.Н. Колмогорова. В 11 классе мы также продолжаем изучение данных методов и принципов на примере задач разных разделов стереометрии. Так, например, к принципу непрерывности мы возвращаемся при изучении сферической геометрии и объемов тел, к принципу двойственности при изучении двойственных многогранников, к методу Декарта при изучении метода геометрических мест пространства. Подтверждая, тем самым, общезначимость и важность изучаемых нами принципов и методов. Не смотря на то, что на изучение отдельно каждого принципа или метода часы программы в 11 классе уже не отводятся, но, по возможности, в изучаемую тему мы включаем задачи по этой теме, которые наиболее просто решаются при помощи уже известных школьникам принципов и методов.

В заключение своей статьи я хотела бы отметить, что изучение отдельных математических принципов и методов в курсах алгебры, математического анализа и, в меньшей степени, в курсе геометрии ведется в школе им. А.Н. Колмогорова уже давно. Систематизированное же параллельное изучение перечисленных в начале статьи принципов и методов в курсах алгебры, математического анализа и геометрии в соответствии с предложенной выше методикой, мы осуществляем только в течение нескольких последних лет. И можем отметить следующие результаты:

- повышение уровня понимания теоретического материала;
- повышение уровня успеваемости и эффективности обучения;
- развитие способностей учащихся самостоятельно овладевать требуемыми знаниями, умениями и навыками;
- развитие навыков творческой деятельности;
- развитие интереса к изучению математики и геометрии в частности.

Библиографический список

1. *Колмогоров, А.Н.* Математика – наука и профессия [Текст] / А.Н. Колмогоров. – М.: Наука, 1988.
2. *Пойа, Д.* Математическое открытие [Текст] / Д. Пойа. – М.: Наука, 1976.
3. *Пойа, Д.* Математика и правдоподобные рассуждения [Текст] / Д. Пойа. – М.: Наука, 1975.
4. *Клейн, Ф.* Лекции о развитии математики в XIX столетии [Текст] / Ф. Клейн. – М.: Наука, 1989.
5. Явление чрезвычайное. Книга о Колмогорове [Текст]. – М.: ФАЗИС, МИРОС, 1999.
6. *Вавилов, В.В.* Школа математического творчества [Текст] / В.В. Вавилов. – М.: РОХОС, 2004.

7. Концепция модернизации российского образования на период до 2010 года [Электронный ресурс]. http://archive.kremlin.ru/text/docs/2002/04/57884.shtml.
8. *Головина, Л.И.* Индукция в геометрии [Текст] / Л.И. Головина, И.М. Яглом. – М.: Наука, 1961.

Задачи геометрии многомерных пространств в среде Mathematica

Т.В. Капустина

Задачи практического содержания, относящиеся к геометрии многомерных пространств, связаны, как правило, с большим количеством громоздких вычислений. Современные программные средства, такие как компьютерная система Mathematica, позволяют легко справиться с подобными трудностями. В настоящей заметке рассмотрим примеры задач, решение которых либо использует только встроенные функции среды Mathematica, либо основано на программировании в этой среде.

Некоторые задачи аналитической геометрии многомерных пространств

1. Задача о проверке принадлежности k точек одной p-плоскости и об определении размерности p этой плоскости

Следует выбрать одну из точек за начальную и составить векторы отрезков, соединяющих эту точку с остальными. Затем привести матрицу, составленную из координат этих векторов, к псевдотреугольному виду (встроенная функция **RowReduce**) и сделать вывод относительно ее ранга. Ранг матрицы равен размерности p-плоскости, натянутой на совокупность данных точек.

```
a = {2, 1, –2, 0}
    {2, 1, –2, 0}
b = {1, –3, –3, 1}
    {1, –3, –3, 1}
c = {4, 9, 0, –2}
    {4, 9, 0, –2}
mm = {b – a, c – a}
    {{–1, –4, –1, 1}, {2, 8, 2, –2}}
RowReduce[mm]
    {{1, 4, 1, –1}, {0, 0, 0, 0}}
```

Вывод: данные три точки принадлежат 1-плоскости, то есть прямой.

2. Задача о взаимном расположении p-плоскостей в аффинном пространстве

Пусть даны 3-плоскость и 2-плоскость в 5-мерном аффинном пространстве:

$$\begin{cases} x^1 = 1 + 2\lambda^1 - 3\mu^1 + \nu^1, \\ x^2 = 1 + \lambda^1 - \mu^1 - 2\nu^1, \\ x^3 = 2 - \lambda^1 + 2\mu^1, \\ x^4 = 1 + \lambda^1 + 2\mu^1, \\ x^5 = 3\lambda^1 - \mu^1 + 5\nu^1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x^1 = 2 - \lambda^2 + \mu^2, \\ x^2 = 4 + 2\lambda^2 - \mu^2, \\ x^3 = 3\lambda^2 + \mu^2, \\ x^4 = 2 + \lambda^2 + 2\mu^2, \\ x5 = 1 + \lambda^2 + \mu^2. \end{cases}$$

Требуется определить их взаимное расположение.

```
Solve[{1 + 2 λ1 – 3 μ1 + ν1 == 2 – λ2 + μ2, 1 + λ1 – μ1 – 2 ν1
== 4 + 2 λ2 – μ2, 2 – λ1 + 2 μ1 == 3 λ2 + μ2, 1 + λ1+2 μ1 ==
2 +λ2 + 2 μ2, 3 λ1 – μ1 + 5 ν1 == 1 + λ2 + μ2}, {λ1, μ1, ν1, λ2,
μ2}]
{{λ1 -> 530/303, μ1 -> 130/303, ν1 -> -179/303, λ2 -> 37/303, μ2 ->
75/101}}
```

Вывод: имеют одну общую точку. Ее координаты:

```
{1 + 2 λ1 – 3 μ1 + ν1, 1 + λ1 – μ1 – 2 ν1, 2 – λ1 + 2 μ1, 1 + λ1
+ 2 μ1, 3 λ1 – μ1 + 5 ν1} /. {λ1 –> 530/303, μ1 –> 130/ 303, ν1
–> –179/303}
    {794/303, 1061/303, 112/101, 1093/303, 565/303}
```

В частности, если требуется найти пересечение нескольких гиперплоскостей, то решается система общих уравнений этих гиперплоскостей. В ответе будет либо пустое множество (нет ни одной общей точки этих плоскостей), либо список координат их единственной общей точки, либо множество решений со свободными неизвестными (в таком случае их следует брать за параметры, и получатся параметрические уравнения p-плоскости, по которой пересекаются данные гиперплоскости). Рассмотрим реализацию этого алгоритма на двух примерах.

1) Выяснить взаимное расположение трех гиперплоскостей $2x^1 + 3x^2 - x^3 + x^4 - 1 = 0$, $x^1 - 2x^2 + x^3 - x^4 + 3 = 0$, $x^1 + 12x^2 - 5x^3 + 5x^4 - 8 = 0$.

```
Solve[{2 x1 + 3 x2 – x3 + x4 – 1 == 0, x1 – 2 x2 + x3 – x4 + 3
== 0, x1 + 12 x2 – 5 x3 + 5 x4 – 8 == 0}, {x1, x2, x3, x4}]
    { }
```

Вывод: данные гиперплоскости не имеют общей точки.

Действительно, если рассмотреть расширенную матрицу данной системы линейных уравнений

$$(m_i^j) = \left\{ \begin{array}{ccccc} 2 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 12 & -5 & 5 & 8 \end{array} \right\}$$

и преобразовать ее, приведя к псевдотреугольному виду, то получим:

```
m = {{2, 3, –1, 1, 1}, {1, –2, 1, –1, –3}, {1, 12, –5, 6, 8}}
    {{2, 3, –1, 1, 1}, {1, –2, 1, –1, –3}, {1, 12, –5, 5, 8}}
RowReduce[m]
    {{1, 0, 1/7, –1/7, 0}, {0, 1, –3/7, 3/7, 0}, {0, 0, 0, 0, 1}}
```

Так как ранг основной матрицы равен 2 (количество ее ненулевых строк), а ранг расширенной матрицы равен 3, то система несовместна.

2) Выяснить взаимное расположение трех гиперплоскостей $2x^1 + 3x^2 - x^3 + x^4 - 1 = 0$, $x^1 - 2x^2 + x^3 - x^4 + 3 = 0$, $x^1 + 12x^2 - 5x^3 + 6x^4 - 8 = 0$.

```
Solve[{2 x1 + 3 x2 – x3 + x4 – 1 == 0, x1 – 2 x2 + x3 – x4 + 3
== 0, x1 + 12 x2 – 5 x3 + 6 x4 – 8 == 0}, {x1, x2, x3, x4}]
    {{x1 –> –10/7 – x3/7, x2 –> 16/7 + (3 x3)/7, x4 –> –3}}
```

Вывод: данные гиперплоскоскости пересекаются по прямой

$$\left\{ \begin{array}{l} x^1 = -\frac{10}{7} - \frac{1}{7}u, \\ x^2 = \frac{16}{7} + \frac{3}{7}u, \\ x^3 = \ u, \\ x^4 = -3. \end{array} \right.$$

3. Вычисление расстояния от точки до прямой

Искомое расстояние будет расстоянием от данной точки до точки пересечения данной прямой с гиперплоскостью, проведенной через данную точку, нормальным ковектором которой является направляющий вектор данной прямой.

```
a = {1, 1, 0, –2, 3, 4}
    {1, 1, 0, –2, 3, 4}
l = {3 – u, 1 – 5 u, 2 + 4 u, –5, 4 + u, 7 + 2 u}
    {3 – u, 1 – 5 u, 2 + 4 u, –5, 4 + u, 7 + 2 u}
pp = –(x1 – 1) – 5 (x2 – 1) + 4 x3 + 0 (x4 + 2) + (x5 – 3) +
2 (x6 – 4)
    -2 - x1 - 5 (-1 + x2) + 4 x3 + x5 + 2 (-4 + x6)
```

Expand[pp /. {x1 –> 3 – u, x2 –> 1 – 5 u, x3 –> 2 + 4 u, x4 –> -5, x5 –> 4 + u, x6 –> 7 + 2 u}]

13 + 47 u

Solve[% == 0, u]

$\{\{u \text{ -> } -\frac{13}{47}\}\}$

m = l /. u –> –13/47

$$\left\{\frac{154}{47}, \frac{112}{47}, \frac{42}{47}, \text{-}5, \frac{175}{47}, \frac{303}{47}\right\}$$

Sqrt[(m - a).(m - a)]

$10\ \sqrt{\frac{11}{47}}$

Ответ: $10\sqrt{\frac{11}{47}}$

4. Задача о нахождении центра описанной гиперсферы

Требуется найти центр сферы, описанной около симплекса, имеющего $n + 1$ вершину (в n-мерном евклидовом пространстве).

Задаем точки координатами их радиус-векторов (в данном примере пространство четырехмерное, т. е. $n = 4$):

a = {0, 0, 1, 1}
{0, 0, 1, 1}

b = {-1, 1, 0, 0}
{-1, 1, 0, 0}

c = {2, 1, 0, -1}
{2, 1, 0, -1}

d = {1, 1, 2, 3}
{1, 1, 2, 3}

e = {-2, 1, 3, -1}
{-2, 1, 3, -1}

Искомый центр:

x = {x1, x2, x3, x4}
{x1, x2, x3, x4}

Составляем уравнения равенства расстояний от искомой точки до данных точек. Используется встроенная функция **Apply**, которая заменяет заголовок **List** (список), на **Plus** (сумма). Полученная система уравнений решается с помощью встроенной функции **Solve**:

Solve[{Apply[Plus, (x – a)^2] == Apply[Plus, (x – b)^2], Apply[Plus, (x – a)^2] == Apply[Plus, (x – c)^2], Apply[Plus, (x – a)^2] == Apply[Plus, (x – d)^2], Apply[Plus, (x – a)^2] == Apply[Plus, (x – e)^2]}, x]

$$\{\{\mathrm{x1} \text{ -> } \frac{57}{82}, \mathrm{x2} \text{ -> } \frac{263}{82}, \mathrm{x3} \text{ -> } \frac{199}{82}, \mathrm{x4} \text{ -> } \frac{7}{82}\}\}$$

Ответ: $\left(\frac{57}{82}, \frac{263}{82}, \frac{199}{82}, \frac{7}{82}\right)$.

Некоторые задачи дифференциальной геометрии многомерных пространств

Автоматизация вычислений (как численных, так и символьных) в среде Mathematica особенно эффективно достигается с помощью программирования на языке Mathematica. Будем использовать функциональное программирование, характерное тем, что программа составляется по шагам с использованием объекта “шаблон” (обобщение понятия “переменная величина”). Каждый шаг задает некоторую внешнюю функцию среды Mathematica, причем новые функции, как правило, составляются с использованием предыдущих.

Приведем программу (точнее, связанную последовательность программ в функциональном стиле) для вычисления символов Кристоффеля, ковариантной производной тензора, для вычисления координат тензора кривизны и координат тензора Риччи пространства Вейля ([3, с. 153]). К сожалению, составить программу, предполагая размерность пространства произвольной, весьма затруднительно. Поэтому для простоты рассмотрим случай, когда размерность пространства равна 3. Эта же программа без труда может быть адаптирована для случая другого (но конкретного) значения размерности.

Обозначим через x список координат произвольной точки рассматриваемого дифференцируемого многообразия. Введение этой строчки будет необходимым стартом запуска нашей программы. В этой строчке не только содержатся обозначения координат, которые будут использоваться во всех без исключения последующих программах-однострочниках, но из нее также будет понятно, какова размерность рассматриваемого пространства. Входные ячейки будем печатать полужирным шрифтом, выходные (если они есть) — светлым.

x := {x1, x2, x3}

(Здесь выходной ячейки нет, поскольку используется отложенное присвоение.)

Значение размерности пространства:

n := Length[x]

Общий вид метрики (в конкретных примерах эту матрицу нужно будет именовать и вводить в правой части выражения координат поля метрического тензора g_{ij}, который предполагается симметричным):

```
g[x1_, x2_, x3_] :=
   {{g11[x1, x2, x3], g12[x1, x2, x3], g13[x1, x2, x3]},
   {g21[x1, x2, x3], g22[x1, x2, x3], g23[x1, x2, x3]},
   {g31[x1, x2, x3], g32[x1, x2, x3], g33[x1, x2, x3]}}
```

Обратная матрица (тензора, обратного основному):

```
gg[g_][x1_, x2_, x3_] := Inverse[g[x1, x2, x3]]
```

Коэффициенты связности $\Gamma^k_{ij} = \dfrac{1}{2}\, g^{ks}(\partial_i g_{sj} + \partial_j g_{is} - \partial_s g_{ij})$ метрики g_{ij}:

```
cristoffel[i_, j_, k_][g_][x1_, x2_, x3_] :=
   1/2* Simplify[Sum[gg[g][x1, x2, x3][[k, t]]*
  (D[g[x1, x2, x3][[t, j]], x[[i]]] + D[g[x1, x2, x3][[i, t]], x[[j]]] -
   D[g[x1, x2, x3][[i, j]], x[[t]]]), t, n]]
```

Проверим, как работает программа, взяв метрику трехмерного пространства Лобачевского 4:

```
gl[x1_, x2_, x3_] :=
   {{1/x3^2, 0, 0}, {0, 1/x3^2, 0}, {0, 0, 1/x3^2}}
```

Обратная матрица:

```
gg[gl][x1, x2, x3]
{{x3^2, 0, 0}, {0, x3^2, 0}, {0, 0, x3^2}}
```

Значение Γ^3_{33}:

```
cristoffel[3, 3, 3][gl][x1, x2, x3]
-1/x3
```

Значения всех коэффициентов связности метрики пространства Лобачевского:

```
Table[cristoffel[i, j, k][gl][x1, x2, x3], {i, n}, {j, n}, {k, n}]
{{{0, 0, 1/x3}, {0, 0, 0}, {-1/x3, 0, 0}}, {{0, 0, 0}, {0, 0, 1/x3},
   {0, -1/x3, 0}}, {{-1/x3, 0, 0}, {0, -1/x3, 0}, {0, 0, -1/x3}}}
```

Ковариантное дифференцирование тензора произвольной валентности запрограммировать крайне проблематично, поэтому остановимся на тензоре типа $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$:

```
a[x1_, x2_, x3_] :=
   {{{a111[x1, x2, x3], a112[x1, x2, x3], a113[x1, x2, x3]},
   {a121[x1, x2, x3], a122[x1, x2, x3], a123[x1, x2, x3]},
    {a131[x1, x2, x3], a132[x1, x2, x3], a133[x1, x2, x3]}},
   {{a211[x1, x2, x3], a212[x1, x2, x3], a213[x1, x2, x3]},
   {a221[x1, x2, x3], a222[x1, x2, x3], a223[x1, x2, x3]},
```

```
   {a231[x1, x2, x3], a232[x1, x2, x3], a233[x1, x2, x3]}},
   {{a311[x1, x2, x3], a312[x1, x2, x3], a313[x1, x2, x3]},
   {a321[x1, x2, x3], a322[x1, x2, x3], a323[x1, x2, x3]},
   {a331[x1, x2, x3], a332[x1, x2, x3], a333[x1, x2, x3]}}}
```

Ковариантная производная тензора такой валентности:

```
nabla[k_][i_, j_, p_][g_][a_][x1_, x2_, x3_] :=
   D[a[x1, x2, x3][[i, j, p]], x[[k]]] -
  Sum[cristoffel[k, i, s][g][x1, x2, x3] a[x1, x2, x3][[s, j, p]], {s, n}]-
  Sum[cristoffel[k, j, s][g][x1, x2, x3] a[x1, x2, x3][[i, s, p]], {s, n}]+
   Sum[cristoffel[k, s, p][g][x1, x2, x3] a[x1, x2, x3][[i, j, s]], {s, n}]
```

Введем тензор b_{ij}^{p} его координатами и найдем ковариантную производную $\nabla_k b_{ij}^{p}$:

```
b[x1_, x2_, x3_] := {{{x1, x2, x1 x2}, {x2, x1, x3}, {x3, 0, 0}},
   {{x1 + x2, x3, 1}, {x3^2, x1, x2}, {0, x3, x3^3}},
   {{x1 + x3, x2 + x3, 0}, {2 x1, 2 x2, 3 x3}, {0, 0, x3}}}
```

Значение $\nabla_3 b_{23}^{3}$:

```
nabla[3][2, 3, 3][gl][b][x1, x2, x3]
4 x3^2
```

Все компоненты тензора $\nabla_k b_{ij}^{p}$:

```
Table[nabla[k][i, j, p][gl][b][x1, x2, x3], {k, n}, {i, n}, {j, n}, {p,
n}]
{{{{-(x1 x2)/x3 - (x1 + x3)/x3, -(x2 + x3)/x3, x2 + x1/x3},
   {-1 - (2 x1)/x3, 1 - (2 x2)/x3, -3 + x2/x3}, {x1/x3, x2/x3, (x1 x2)/x3}},
   {{1 - 1/x3, -1, (x1 + x2)/x3 - x3^2}, {-x2/x3, 1, x3},
   {(x1 + x2)/x3 - x3^2, 1, 1/x3}}, {{1 + x1/x3, x2/x3, -1 + (x1 x2)/x3 +
   (x1 + x3)/x3}, {-1 + x2/x3, x1/x3, 1 + (2 x1)/x3},
   {(x1 + x3)/x3, (x2 + x3)/x3, 0}}}, {{{0, 1 - (x1 x2)/x3, x1 + x2/x3},
   {0, -1, x1/x3}, {x2/x3, x1/x3, 1}},
   {{1 - (x1 + x3)/x3, -1/x3 - (x2 + x3)/x3, 1},
   {-(2 x1)/x3, -1 - (3 x2)/x3, -2 + x1/x3 - x3^2},
   {x3, x1/x3 - x3^2, x2/x3}}, {{(x1 + x2)/x3, 2, 1/x3 + (x2 + x3)/x3},
   {x3, -1 + x1/x3, -1 + (3 x2)/x3},
   {(2 x1)/x3, (2 x2)/x3, 3 + x3^2}}}, {{{x1/x3, x2/x3, (x1 x2)/x3},
   {x2/x3, x1/x3, 2}, {2, 0, 0}}, {{(x1 + x2)/x3, 2, 1/x3},
   {3 x3, x1/x3, x2/x3}, {0, 2, 4 x3^2}},
   {{1 + (x1 + x3)/x3, 1 + (x2 + x3)/x3, 0},
   {(2 x1)/x3, (2 x2)/x3, 6}, {0, 0, 2}}}}
```

Тензор кривизны $R_{rsk\cdot}^{\ \ \ \ i}$ объекта связности Γ_{ij}^{k} запрограммируем следующим образом:

```
rcurvarure[r_, s_, k_, i_][g_][x1_, x2_, x3_] :=
   D[cristoffel[s, k, i][g][x1, x2, x3], x[[r]]] -
```

```
D[cristoffel[r, k, i][g][x1, x2, x3], x[[s]]] +
Sum[cristoffel[r, m, i][g][x1, x2, x3]*
cristoffel[s, k, m][g][x1, x2, x3], {m, n}] -
Sum[cristoffel[s, m, i][g][x1, x2, x3] *
cristoffel[r, k, m][g][x1, x2, x3], {m, n}]
```

Выведем на печать все компоненты тензора кривизны метрики пространства Лобачевского:

```
Table[rcurvarure[r, s, k, i][gl][x1, x2, x3], {r, n}, {s, n},
   {k, n}, {i, n}]
{{{{0, 0, 0}, {0, 0, 0}, {0, 0, 0}}, {{0, 1/x3^2, 0}, {-1/x3^2, 0, 0},
   {0, 0, 0}}, {{0, 0, 1/x3^2}, {0, 0, 0}, {-1/x3^2, 0, 0}}},
   {{{0, -1/x3^2, 0}, {1/x3^2, 0, 0}, {0, 0, 0}},
   {{0, 0, 0}, {0, 0, 0}, {0, 0, 0}}, {{0, 0, 0}, {0, 0, 1/x3^2},
   {0, -1/x3^2, 0}}}, {{{0, 0, -1/x3^2}, {0, 0, 0}, {1/x3^2, 0, 0}},
   {{0, 0, 0}, {0, 0, -1/x3^2}, {0, 1/x3^2, 0}},
   {{0, 0, 0}, {0, 0, 0}, {0, 0, 0}}}}
```

Программа для тензора Риччи:

```
ric[i_, j_][g_][x1_, x2_, x3_] :=
   Sum[rcurvarure[k, i, j, k][g][x1, x2, x3], {k, n}]
```

Тензор Риччи пространства Лобачевского:

```
Table[ric[i, j][gl][x1, x2, x3], {i, n}, {j, n}]
{{-2/x3^2, 0, 0}, {0, -2/x3^2, 0}, {0, 0, -2/x3^2}}
```

Аналогичным образом можно программировать другие объекты геометрии дифференцируемых многообразий: тензор кручения, проективные параметры Томаса и т. п. Можно рассматривать и решать уравнения соответствий связностей и метрик (геодезического, конформного и др.)

Библиографический список

1. *Воробьев, Е.М.* Введение в систему символьных, графических и численных вычислений “Математика-5” [Текст] / Е.М. Воробьев. – М.: Диалог-МИФИ, 2005. – 368 с.
2. *Капустина, Т.В.* Компьютерная система Mathematica 3.0 для пользователей [Текст] / Т.В. Капустина. – М.: СОЛОН-Р, 1999. – 240 с.
3. *Норден, А.П.* Пространства аффинной связности [Текст] / А.П. Норден. – М.: Наука, 1976. – 432 с.
4. *Широков, П.А.* Интерпретация и метрика квадратичных геометрий. Ч. I. Интерпретация неевклидовых геометрий [Текст] / П.А. Широков // В сб.: Избранные работы по геометрии. – Казань: Изд-во КГУ, 1966. – С. 77.
5. *Gray, A.* Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica. 2nd ed/ – CRC Press, 1997.

Поиск решения геометрической задачи “на построение” как использование исследовательских стратегий

Ю.Б. Мельников

Внедрение в образование современной системы менеджмента качества требует использования эффективного и объективного механизма контроля. В качестве важнейшего из таких механизмов призван стать Единый государственный экзамен. К сожалению, его внедрение в качестве фактически единственной оценки уровня обученности в настоящий момент сопровождается постепенным “вымыванием” из практики изучения школьного курса математики целых классов задач. В частности, это относится к задачам “на доказательство” и “на построение”. Одной из причин этого явления является убежденность некоторых “чрезмерно прагматичных” людей в ненужности соответствующих знаний и умений в практической деятельности подавляющего большинства людей.

Однако в последние десятилетия все более значимым становится взгляд на математику как на компонент современной культуры [1, 4], как на одну из основ мировоззрения [3], как на инструмент для развития творческого потенциала [2] и др. В частности, математика обладает неоспоримым потенциалом как инструмент исследования в различных областях человеческой деятельности и, с другой стороны, как средство обучения исследовательской деятельности. Одной из важнейших проблем обучения исследовательской деятельности является выбор системы управления этой деятельностью. По нашему мнению, в качестве одного из инструментов управления целесообразно рассматривать ***стратегии деятельности***, где *стратегия* понимается как *механизм создания плана деятельности.* Не следует отождествлять стратегию и использование стратегии, схематически изображенное на рис. 1.

В частности, в использовании стратегии ведущим является субъективный фактор: даже при применении менее эффективной стратегии компетентный исполнитель может получить более удачный план, чем менее квалифицированный исполнитель, пусть даже использующий более эффективную стратегию.

Для достаточно простых стратегий обучение применению стратегии можно осуществлять без детального изучения обучаемыми самой стратегии. Для обучения использованию более сложных стратегий можно применить алгебраический подход, который состоит, во-первых, в выделении системы базовых стратегий (своеобразной “системы порождающих”) и, во-вторых, в комбинировании этих базовых стратегий для получения требуемого плана действий (применения “алгебраических операций”).

Рис. 1. Схема процесса использования стратегии

По-видимому, большинство видов исследовательской деятельности удовлетворяет следующим пяти постулатам.

I. Постулат исследовательской цели: *целью исследования является либо построение, корректировка, обогащение или редуцирование модели объекта, существование которого постулируется до начала исследования (объект может быть идеальным), либо доказательство существования или несуществования исследуемого объекта.*

Мы будем считать, что постулат исследовательской цели выполняется даже в случае, когда к началу исследования изучаемый объект существует лишь виртуально. Такая ситуация складывается, например, в ходе проектирования некоторого объекта, когда изучение свойств проектируемого объекта происходит еще до того, как он будет реально построен.

II. Постулат полимодельности: *всякий рассматриваемый объект: 1) является моделью, компонентой или элементом какой-либо компоненты некоторой модели; 2) может быть описан совокупностью моделей, в том числе существенно различных, но обладающих определенным, заранее оговоренным уровнем адекватности.*

III. Постулат алгебраичности: *описание объекта, представленное в типовой, стандартной форме для деятельности в данной области, носит алгебраический характер, т.е. сводится к представлению его с помощью набора типовых базовых объектов (моделей) и системы типовых преобразований объектов.*

IV. Постулат характеристичности: *всякий класс объектов одной природы определятся набором отличительных характеристик и диапазоном предельных значений этих характеристик.*

V. Постулат целенаправленности: *ведущим фактором исследовательской деятельности является динамическая система целей, формирующаяся и развивающаяся в процессе исследования.*

Можно доказать (в работе [6] это сделано для несколько измененной системы постулатов), что в этом случае применение любой исследовательской стратегии, не использующей инсайт (озарение), можно представить как комбинирование ***семи базовых исследовательских стратегий***: 1) стратегии приоритетного изучения “экстремальных” ситуаций; 2) стратегии поиска аналогии; 3) стратегии предвкушения (предполагается, что искомый объект уже построен, найден, получен, затем на основании его анализа строится план деятельности, например, построения объекта, решения задачи); 4) стратегии перехода от изучения одного объекта к исследованию системы объектов; 5) стратегии построения модели; 6) стратегии обогащения и редуцирования модели; 7) стратегии смены ролей и приоритетов. Подробное описание этих стратегий приведено в [6].

Нетрудно убедиться, что деятельность субъекта, решающего геометрическую задачу “на построение” удовлетворяет перечисленным выше пяти постулатам, поэтому использование стратегии поиска решения такой задачи можно представить в виде комбинации реализаций семи перечисленных базовых исследовательских стратегий.

Например, рассмотрим задачу “провести через точку A касательную к окружности с центром в точке O радиуса R” (см. рис. 2а).

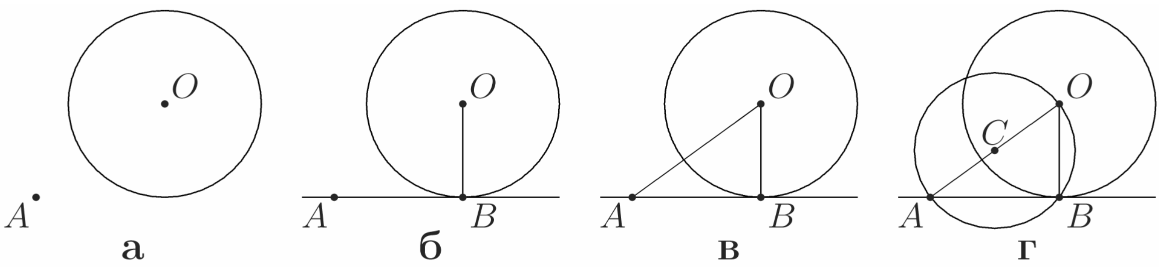


Рис. 2

В соответствии с постулатом целенаправленности обучаемому в первую очередь следует уяснить цель: в данном случае цель состоит в получении *описания процесса построения прямой.* Для этого естественно применить стратегию построения модели. Базовая модель построения прямой состоит в проведении этой прямой через две точки (все остальные способы в конечном итоге сводятся к данному построению). Одна из точек нам известна – это точка A, следовательно, необходимо построить вторую точку на искомой прямой. Из определения касательной следует, что наиболее перспективной является точка B касания прямой и окружности, см. рис. 2б. Отметим, что проведение радиуса OB следует интерпретировать, как результат применения стратегии обогащения модели. Для получения процедуры построения точки B следует применить стратегию построения модели. В плоскости существует единственный типовой способ: получение точки как пересечения двух линий. Непосредственное построение радиуса OB затруднительно (поскольку искомая прямая AB пока не построена). К данному моменту сложились условия, благоприятные для применения стратегии смены ролей и приоритетов и стратегии обогащения и редуцирования модели. В результате применения этих стратегий получаем, что следует отрезок OB включить в геометрическую фигуру, лучше всего – в треугольник. Итогом очевидного построения является рис. 2в. С прямоугольным треугольником связаны следующие типовые ассоциации: теорема Пифагора, тригонометрия, площадь треугольника, описанная окружность [5, с. 183-184]. Последняя ассоциация приводит к построению, изображенному на рис. 2г. Мы опустим описание применения исследовательских стратегий для построения окружности, диаметром которой служит фиксированный отрезок. Таким образом, данный пример подтверждает утверждение о том, что поиск решения задачи “на построение” можно представить как результат использования базовых исследовательских стратегий (в [6] это утверждение доказано для более общего случая).

Ясно, что для успешного применения исследовательских стратегий следует для каждой из них описать условия, когда применение данной стратегии является наиболее перспективным, многообещающим (для достижения цели). Кроме того, сложной задачей является создание методики обучения применению этих стратегий. Однако эта методическая задача представляется нам актуальной, поскольку в случае ее успешного решения решение геометрических задач “на построение” можно будет использовать для развития основных компетенций, необходимых для исследовательской деятельности.

Библиографический список

1. *Артебякина, О.В.* Формирование математической культуры у студентов педагогических вузов [Текст]: дис. ...канд. пед. наук / О.В. Артебякина. – Челябинск, 1999. – 162 с.
2. *Афанасьев, В.В.* Формирование творческой активности студентов в процессе решения математических задач [Текст]: монография / В.В. Афанасьев. – Ярославль: Изд-во ЯГПУ им. К.Д. Ушинского, 1996. – 168 с.
3. *Жохов, А.Л.* Мировоззрение: становление, развитие, воспитание через образование и культуру [Текст]: монография / А.Л. Жохов. – Архангельск: ННОУ “Институт управления”. – Ярославль: Ярославский филиал ИУ, 2007. – 348 с.
4. *Икрамов, Дж.* Развитие математической культуры школьников (языковой аспект) [Текст]: дис. ...докт. пед. наук / Дж. Икрамов. – Сырдарья, 1983. – 330 с.
5. *Мельников, Ю.Б.* Математическое моделирование: структура, алгебра моделей, обучение построению математических моделей [Текст]: монография / Ю.Б. Мельников. – Екатеринбург: Уральское изд-во, 2004. – 384 с.
6. *Мельников, Ю.Б.* Методологический инструментарий управления исследовательской деятельностью обучаемых [Текст] / Ю.Б. Мельников, К.С. Поторочина // Образование и наука. – 2008. – № 2(14). – С. 3-10.

Система методической подготовки учителя математики для современной школы

С.Ф. Митенева

Реформирование общеобразовательной школы предполагает потребность общества в учителе-профессионале с творческим, научно-педагогическим мышлением. В связи с этим особенно актуальной в профессиональной подготовке учителя математики является его методическая подготовка.

Учебно-воспитательный процесс, организуемый учителем по своему предмету, состоит из двух связанных между собой компонентов: урочных и внеурочных занятий. Причем доля внеурочных занятий (внеклассных, факультативных, внешкольных) по математике значительно возросла в учебно-воспитательной работе учителя. Поэтому подготовку учителя к организации и проведению внеурочных занятий по своему предмету со школьниками необходимо рассматривать как одну из важнейших задач системы методической подготовки учителя математики.

Внеурочные занятия по математике для школьников постоянно развиваются, обогащаются и нуждаются во все более квалифицированном руководстве со стороны учителя.

В деятельности учащихся на внеурочных занятиях по математике должна преобладать творческая деятельность над воспроизводящей. На этих занятиях более, чем на уроках, возможно использование частично-поискового и исследовательского методов обучения, что требует от учителя владения соответствующими методами преподавания, высокого мастерства.

Кроме этого, довольно сложное содержание изучаемого на внеурочных занятиях теоретического и практического материала по различным разделам математики также предъявляет к подготовке учителя дополнительные высокие требования по дидактической обработке этого материала.

Следовательно, организация и проведение различных форм внеурочных занятий по математике в силу специфики этих занятий вызывают необходимость дать будущему учителю наряду с разносторонней математической подготовкой специальную методическую подготовку.

Система методической подготовки учителя математики в условиях высшей школы включает три основных блока: теоретический, исследовательский и практический. Эти блоки связаны между собой по содержанию и способам реализации. Каждый из них представляет в свою очередь систему взаимосвязанных форм и видов занятий, направленных на формирование у будущего учителя знаний, умений и навыков руководства познавательной деятельностью учащихся на урочных и внеурочных занятиях.

Блок теоретической подготовки включает курс преподавания математики, а также различные спецкурсы и спецсеминары.

В каждом звене теоретической подготовки необходимо уделять большое внимание вопросам организации исследовательской работы студентов над проблемами внеурочных занятий по математике в тесной связи с практической работой в школе. Также при изучении курса методики преподавания математики необходимо специально выделять время на ознакомление студентов с некоторыми методологическими вопросами организации педагогических исследований, методами и приемами исследования в области преподавания математики, типами экспериментов и методикой их проведения.

Блок исследовательской подготовки включает выполнение рефератов, курсовых и дипломных работ по методике преподавания математики, проведение педагогических экспериментов, накопление, анализ и обобщение новых в научном отношении фактов и материалов, подготовка докладов к спецсеминарам, к научным конференциям и другие формы работы.

При вовлечении студентов в исследовательскую работу необходимо обращать внимание на важные проблемы, требующие своего исследования, особенно в связи с введением в среднюю школу новых программ. Естественным продолжением теоретических занятий, посвященных вопросам организации исследований, является ознакомление студентов с тематикой курсовых работ по методике преподавания математики. При этом целесообразна взаимосвязь тематики курсовых работ по содержанию для того, чтобы ее выполнение было существенной частью подготовительной работы над дипломной работой.

Блок практической подготовки учителя включает в себя связь со школами, организацию и проведение педагогической практики, проведение систематических дополнительных занятий с учащимися.

Для организации взаимосвязи исследовательской и практической подготовки студентов необходима постоянная связь со школами не только в период педагогических практик.

Под влиянием системы методической подготовки, связывающей исследовательскую и практическую подготовку в единый учебно-воспитательный процесс, у будущих учителей интенсивно формируются познавательные интересы и сами способы познания. У них появляется потребность в работе над специальной психолого-педагогической и методической литературой. Опираясь на известный им опыт учителей-практиков и свой небольшой опыт работы с учащимися, студенты стараются использовать теоретические знания для решения конкретных педагогических задач по руководству познавательной деятельностью учащихся на внеурочных занятиях.

В результате выпускники вуза смогут творчески реализовать новые программы, разработать и провести факультативные курсы, различные формы внеклассных занятий. Кроме того, тесная связь со школами в процессе обучения студентов поможет молодым учителям сравнительно быстро адаптироваться к условиям работы в школе, успешно преодолеть естественные трудности первых лет своей педагогической деятельности.

Таким образом, основными требованиями, предъявляемыми к методической подготовке будущих учителей математики, являются:

– хорошее знание учебного предмета (свободное владение математическим материалом, позволяющее преподавать в школах различных профилей);

– знание истории развития математики и математического образования;

– умение организовать процесс обучения на основе учета индивидуальных особенностей учащихся;

– овладение элементами самостоятельной научно-исследовательской работы;

– обладание методической “интуицией” (быстрая ориентация учителя в нестандартных ситуациях, умение прогнозировать возможные затруднения школьников по определенной теме и т.п.).

Библиографический список

1. *Митенева, С.Ф.* Исследовательские задания в обучении математике [Текст] / С.Ф. Митенева // в сб. “Труды VII Международных Колмогоровских чтений”. – Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2009. – С. 288-290.

Рабочая тетрадь по высшей математике как составная часть современного учебно-педагогического комплекса пособий для студентов

О.Р. Воронцова, С.Ф. Катержина, О.Б. Садовская

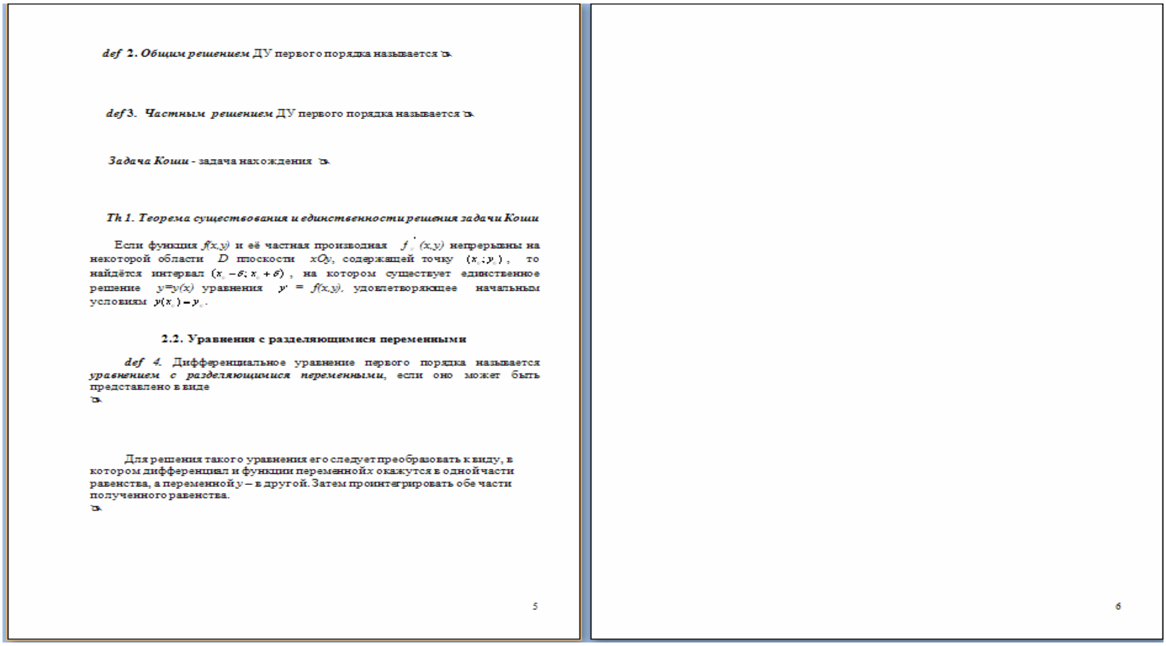
Учебно-педагогический комплекс пособий включает в себя следующие виды изданий: учебник, учебное пособие, методическое пособие, хрестоматия, практикум, рабочая тетрадь, задачник, репертуарный сборник, решебник, сборник партитур, учебный справочник, учебный словарь, учебно-методический комплекс, учебное электронное издание. В своей работе мы применяем один из видов вышеперечисленных изданий – рабочую тетрадь. По мнению большинства авторов, рабочая тетрадь – издание, ориентированное на организацию выполнения студентами различных заданий и призванное отразить на своих страницах результаты их работы. Авторы разработали свой вариант тетради, специфику которой мы рассмотрим в этой статье.

В настоящее время в вузе за лекциями сохраняется организующая и направляющая роль в учебном процессе, в них освещается основной программный материал. Лекция (lectio – чтение) – систематическое устное изложение преподавателем учебного материала, в основном теоретического характера. Надо стремиться к тому, чтобы студенты и поняли лектора, и записали то, что он им рассказал. Ч. Дарвин писал: “По-моему, лекции не имеют по сравнению с чтением никаких преимуществ, а во многом уступают ему” [1]. На традиционных лекциях среднестатистический студент, в основном, занимается списыванием с доски, да к тому же с ошибками, вызванными тем, что чего-то недослышал или чего-то не увидел. Внимание студентов в процессе лекции раздваивается между их познавательной деятельностью и конспектированием. В конспект студента попадают только материалы, воспринятые студентом или продиктованные преподавателем, а также схемы и формулы, записанные им на доске. Качество и полнота информации, попадающей в конспект студента, конечно, невысокие. Эти недостатки легко устраняются с помощью одного из видов учебных пособий – тематических рабочих тетрадей, позволяющих интенсифицировать и индивидуализировать учебный процесс. Рабочая тетрадь ориентирована на одну учебную тему и позволяет в кратчайшие сроки изучить учебный материал.

Разработанные авторами рабочие тетради представляют собой готовый раздаточный материал с напечатанной левой страницей при свободной правой. На левой странице изложены основные теоретические положения, а на правой – во время лекции студенты записывают доказательства, комментарии, решения типовых и прикладных задач. Элементами рабочей тетради являются: теоретический и практический материал, структурно-тематические карты, демо-версии самостоятельных и контрольных работ, задачи для самостоятельной работы и ответы к ним, глоссарий.

Теоретический материал излагается на левых страницах тетради с окнами, предусмотренных для самостоятельного заполнения студентами. Основные элементы – формулировки теорем, определения и необходимые соединительные предложения, уже напечатаны. И студент должен в ходе лекции под руководством преподавателя записать доказательства теорем, выводы и другую важную информацию. Пример такой страницы представлен на рис. 1.

Правые страницы тетради предназначены для решения примеров по соответствующей теории левой страницы. Здесь же обсуждаются и иллюстрируются прикладные моменты изучаемого теоретического материала. Пример такой страницы представлен на рис. 2.



def* 2. *Общим решением ДУ первого порядка называется

def* 3. *Частным решением ДУ первого порядка называется

Задача Коши - задача нахождения

Th 1. Теорема существования и единственности решения задачи Коши

Если функция $f(x,y)$ и её частная производная $f'_y(x,y)$ непрерывны на некоторой области D плоскости xOy, содержащей точку $(x_0;y_0)$, то найдётся интервал $(x_0-\delta; x_0+\delta)$, на котором существует единственное решение $y=y(x)$ уравнения $y' = f(x,y)$, удовлетворяющее начальным условиям $y(x_0)=y_0$.

2.2. Уравнения с разделяющимися переменными

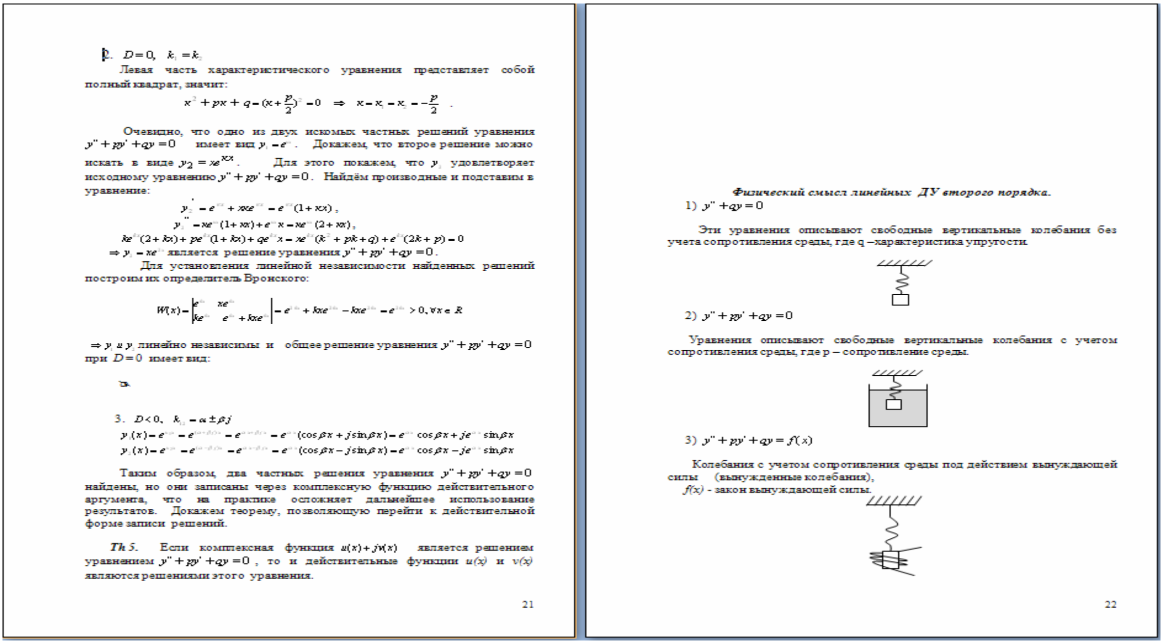
def* 4.** Дифференциальное уравнение первого порядка называется ***уравнением с разделяющимися переменными, если оно может быть представлено в виде

Для решения такого уравнения его следует преобразовать к виду, в котором дифференциал и функции переменной *x* окажутся в одной части равенства, а переменной *y* – в другой. Затем проинтегрировать обе части полученного равенства.

5

6

Рис. 1. Страницы из рабочей тетради по теме “Дифференциальные уравнения”



2. $D=0,\quad k_1=k_2$

Левая часть характеристического уравнения представляет собой полный квадрат, значит:

$$x^2+px+q=(x+\frac{p}{2})^2=0 \quad\Rightarrow\quad x=x_1=x_2=-\frac{p}{2}\ .$$

Очевидно, что одно из двух искомых частных решений уравнения $y''+py'+qy=0$ имеет вид $y_1=e^{kx}$. Докажем, что второе решение можно искать в виде $y_2=xe^{kx}$. Для этого покажем, что y_2 удовлетворяет исходному уравнению $y''+py'+qy=0$. Найдём производные и подставим в уравнение:

$$y_2'=e^{kx}+xke^{kx}=e^{kx}(1+kx),$$

$$y_2''=ke^{kx}(1+kx)+e^{kx}k=ke^{kx}(2+kx),$$

$$ke^{kx}(2+kx)+pe^{kx}(1+kx)+qe^{kx}x=xe^{kx}(k^2+pk+q)+e^{kx}(2k+p)=0$$

$\Rightarrow y_2=xe^{kx}$ является решение уравнения $y''+py'+qy=0$.

Для установления линейной независимости найденных решений построим их определитель Вронского:

$$W(x)=\begin{vmatrix} e^{kx} & xe^{kx} \\ ke^{kx} & e^{kx}+kxe^{kx} \end{vmatrix}=e^{2kx}+kxe^{2kx}-kxe^{2kx}=e^{2kx}>0, \forall x\in R$$

$\Rightarrow y_1$ и y_2 линейно независимы и общее решение уравнения $y''+py'+qy=0$ при $D=0$ имеет вид:

3. $D<0,\quad k_{1,2}=\alpha\pm\beta j$

$$y_1(x)=e^{k_1x}=e^{(\alpha+\beta j)x}=e^{\alpha x+\beta jx}=e^{\alpha x}(\cos\beta x+j\sin\beta x)=e^{\alpha x}\cos\beta x+je^{\alpha x}\sin\beta x$$

$$y_2(x)=e^{k_2x}=e^{(\alpha-\beta j)x}=e^{\alpha x-\beta jx}=e^{\alpha x}(\cos\beta x-j\sin\beta x)=e^{\alpha x}\cos\beta x-je^{\alpha x}\sin\beta x$$

Таким образом, два частных решения уравнения $y''+py'+qy=0$ найдены, но они записаны через комплексную функцию действительного аргумента, что на практике осложняет дальнейшее использование результатов. Докажем теорему, позволяющую перейти к действительной форме записи решений.

Th 5. Если комплексная функция $u(x)+jv(x)$ является решением уравнением $y''+py'+qy=0$, то и действительные функции $u(x)$ и $v(x)$ являются решениями этого уравнения.

21

Физический смысл линейных ДУ второго порядка.

1) $y''+qy=0$

Эти уравнения описывают свободные вертикальные колебания без учета сопротивления среды, где q –характеристика упругости.

2) $y''+py'+qy=0$

Уравнения описывают свободные вертикальные колебания с учетом сопротивления среды, где p – сопротивление среды.

3) $y''+py'+qy=f(x)$

Колебания с учетом сопротивления среды под действием вынуждающей силы (вынужденные колебания),

$f(x)$ - закон вынуждающей силы.

22

Рис. 2. Страницы из рабочей тетради по теме “Дифференциальные уравнения”

Одним из элементов рабочей тетради являются структурно-тематические карты (СТК). СТК – система элементов рассуждения, обозначенных геометрическими фигурами (прямоугольник, овал, ромб и т.д.) с вложенным математическим текстом (блок), содержащим главное на этом этапе познания. Согласно существующим между блоками логическим связям, они соединяются стрелками, направление которых показывает переход от предыдущих компонент схемы к последующим по двум принципам: или от простого к сложному или обратно – от общего к частному. Многообразие возможных форм применения СТК, например, в виде игр “заполни ячейку”, “расставь стрелки”, найди логическую ошибку, и т.п., способствует повышению заинтересованности обучающихся и более глубокому осмыслению ими изучаемого материала. Пример такой страницы представлен на рис. 3.

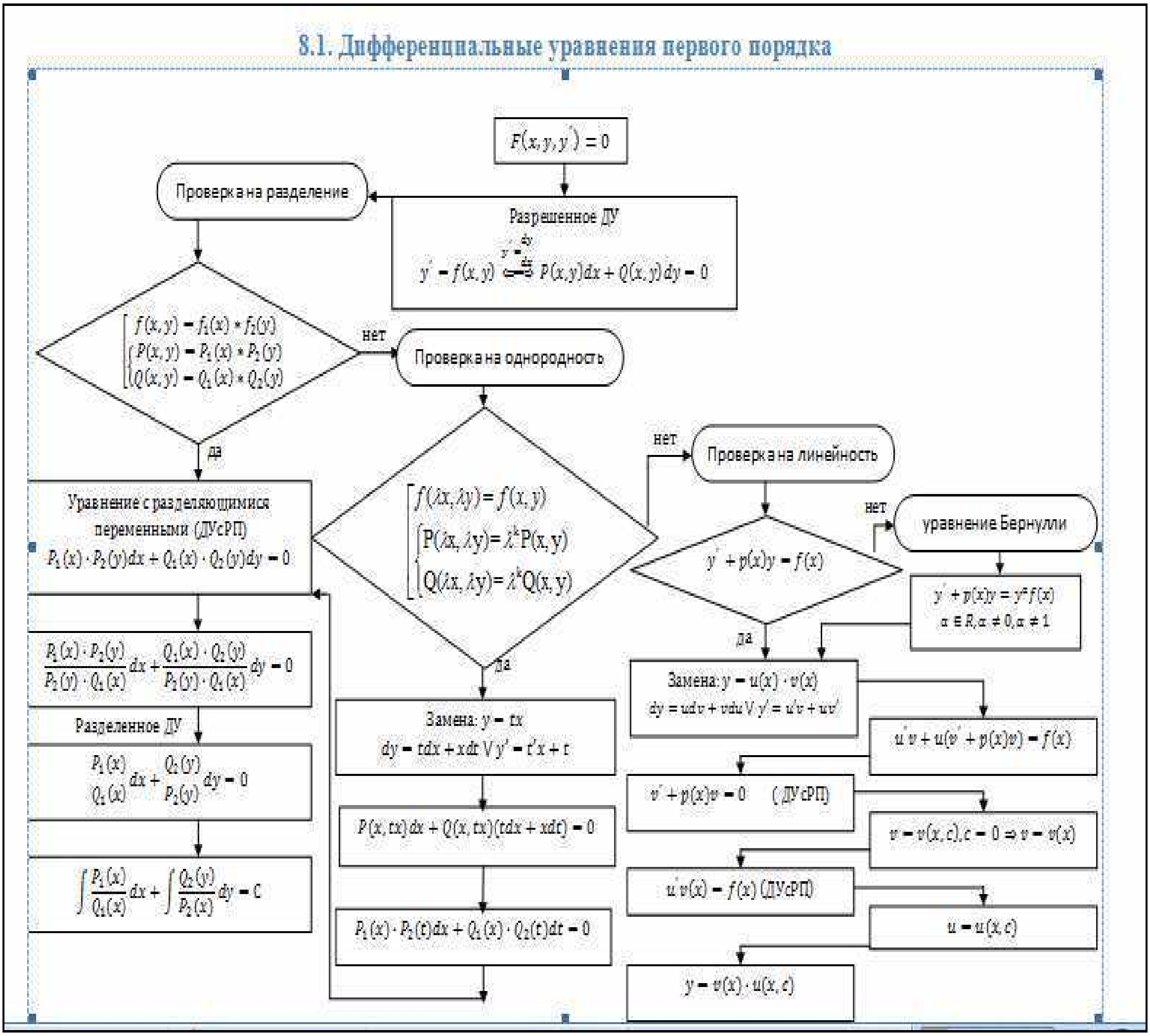


Рис. 3. СТК из рабочей тетради “Дифференциальные уравнения”

Авторы разработали рабочие тетради по темам: “Элементы линейной алгебры”, “Дифференциальные уравнения”, “Элементы теории вероятностей”. Базой исследования были студенты первого курса специальностей “Автоматизации технологических процессов и производств”, “САПР”, “Информационные системы и технологии”, “Информационные технологии в дизайне”, “Защита в чрезвычайных ситуациях”, “Безопасность технологических процессов и производств”, “Технология художественной обработки металлов” Костромского государственного технологического университета в количестве 230 человек.

“Плюсами” использования рабочих тетрадей в учебном процессе являются:

1. Интенсификация лекционных занятий – повышение качества знаний за меньшее время.
2. Сведение к минимуму ошибок в лекциях.
3. Рабочая тетрадь остается у студента и он всегда может ей воспользоваться.
4. Решение проблемы дифференциации обучения через многоуровневость теоретического материала и задач.
5. Повышение заинтересованности к познавательной деятельности.
6. Рабочая тетрадь – средство увеличения самостоятельности и активности студентов.
7. Отмечено улучшение результатов по итогам промежуточной аттестации.
8. 90% студентов положительно оценивают нововведение.

К “минусам” использования рабочих тетрадей мы относим большую работу для преподавателя, т.к. весь материал должен быть создан, напечатан, растиражирован и распространен.

Таким образом, разработанный раздаточный материал в виде рабочих тетрадей для лекций и семинаров по математике как часть современного комплекса учебно-методических пособий обеспечивает не только выигрыш во времени, но и в качестве усвоения учебного материала.

Библиографический список

1. Информационные технологии в инженерном образовании [Текст] / под ред. С.В. Коршунова, В.Н. Гузненкова. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2007. – 432 с.
2. *Воронцова, О.Р.* Элементы линейной алгебры – рабочая тетрадь [Текст] / О.Р. Воронцова, С.Ф. Катержина. – Кострома: Изд-во Костром. гос. технол. ун-та, 2009.
3. *Воронцова, О.Р.* Дифференциальные уравнения – рабочая тетрадь [Текст] / О.Р. Воронцова, О.Б. Садовская, С.Ф. Катержина. – Кострома: Изд-во Костром. гос. технол. ун-та, 2010.

Особенности историко-математической подготовки учителя математики в современных условиях

М.Ф. Гильмуллин

В современные учебные планы, программы и учебники все шире проникает история науки и культуры. В частности, в “Примерной программе основного общего образования. Математика” в содержание основного общего образования включен методологический раздел “Математика в историческом развитии”, что связано с реализацией целей общекультурного развития учащихся [2]. Его содержание разворачивается в содержательно-методическую линию, способствующую созданию гуманитарного фона изучения математики. Раздел предназначен для формирования представлений о математике как части человеческой культуры, для создания культурно-исторической среды обучения. Хотя на него не выделяется специальных уроков, усвоение его не контролируется, все же его содержание органично присутствует в учебном процессе. Организация этого процесса возлагается на учителя математики. Поэтому историко-математическая линия должна стать одной из содержательно-методических линий профессиональной подготовки будущего учителя математики.

К настоящему времени накоплен значительный научно-методический материал по многим вопросам изучения и применения истории математики на различных ступенях образования, как школьного, так и вузовского. Различным вопросам историко-математической подготовки, преподавания курса истории математики посвящен ряд диссертационных исследований: Т.С. Поляковой, С.В. Белобородовой, Н.А. Буровой, А.Е. Томиловой и др. Накоплен большой опыт по формированию умений использовать исторический материал в рамках различных математических и методических курсов и спецкурсов (И.Н. Власова, Ю.А. Дробышев, А.Л. Жохов, Р.А. Майер, А.Е. Малых, Н.И. Мерлина и др.).

Несмотря на достигнутые успехи и полученные положительные результаты, приходится констатировать, что в практике подготовки будущих учителей истории математики отводится все еще несущественное место, и она не отвечает специфике педагогического вуза. Не решены основные *методические* вопросы: ради чего, что конкретно и на каком уровне должен усвоить будущий учитель математики из почти необъятного объема сведений по истории развития математической культуры (включая и математическое образование).

На наш взгляд, основная проблема традиционного опыта обучения истории математики в педагогическом вузе состоит в том, что она рассматривается как дисциплина, изучающая саму математику в ее историческом измерении, то есть она оказывается в ряду дисциплин практически математических. По нашему представлению, такой направленностью курса затушевывается его специфика для педагогической профессии.

Известно, что функции профессионала, в нашем случае учителя математики, обеспечиваются системой сформированных у него профессионально ориентированных – профессионально важных (ПВК) и профессионально значимых (ПЗК) качеств его личности. Именно на их формирование, на каком-то начальном уровне, и должно быть направлено обучение любой дисциплине в педагогическом вузе. История математики не должна быть исключением.

Ядро профессиональной культуры будущего учителя математики определяется ценностями, выработанными в профессии и математической культуре, соответствующими им установками, общепедагогическими и методическими основами обучения математике, знанием основных математических объектов "элементарной" математики и умениями оперировать ими. В этом случае имеет смысл пользоваться уточненным термином *математико-методическая культура* учителя, обозначающего специфический вид культуры такого профессионала.

Для выделения профессионально ориентированных качеств, которые могут быть сформированы в процессе обучения истории математики, мы пользуемся термином "Исторический компонент математико-методической культуры учителя математики". Этот компонент, как и культура профессионала в целом, рассматривается нами как своеобразный идеал (модель результата) в историко-математической подготовке студента.

Под "профессиональной культурой" нами понимается взаимопроникновение и взаимное дополнение результатов трех процессов: *ознакомление* со сведениями из соответствующей области профессиональных знаний (результат процесса – "информированность" и "владение" знаниями на уровне средств профессиональной деятельности); *совершенствование операционных основ* и средств профессиональной деятельности (результат процесса – "способы учебной деятельности"); "*диалогизирование*", "диалог культур" (результат процесса – "взаимопонимание", "содуховность", "способность к диалогу культур"). "*Срез*" математико-методической культуры будущего профессионала обосновывает целесообразность использования основного понятия: "*исторический компонент математико-методической культуры* (*ИКМК*) *будущего учителя математики*" и позволяет выделить его структурные *составляющие*: *содержательно-знаниевую, деятельностно-операционную, диалогово-рефлексивную.*

Содержательно-знаниевая составляющая выполняет *образовательную функцию* в историко-математической подготовке будущего учителя математики и наполняется сведениями об отдельных исторических фактах, закономерностях развития математической культуры или ее отдельных содержательно-методических линий, о средствах познания математики. Критерием ее сформированности является владение знаниями по истории математики и методами математического познания на уровне средств учебной деятельности, а в будущем – и обучения математике.

Основная функция *деятельностно-операционной* составляющей ИКМК – *результативная*: способствовать формированию у студентов *профессиональных умений* и *навыков* – усваивать профессионально-значимые историко-математические знания на уровне познавательных, трудовых и иных действий, которые обеспечивают эффективную реализацию функций профессионала.

Диалогово-рефлексивная (собственно культурологическая) составляющая реализует *ценностно-ориентационную и координирующую* функции. Критерием ее сформированности являются понимание целесообразности диалога различных культур и положительный настрой на его использование в своей профессиональной деятельности. Одним из показателей сформированности ее элементов является желание включаться в диалог культур и поддерживать его, а также наличие у студента представлений об уровне своей математико-методической культуры.

Содержательная характеристика *первой* составляющей дается как совокупность профессионально ориентированных качеств владения историко-математическими знаниями:

– *объектные* (аналитико-синтетические): выявлять и знать характеристики математических объектов: истоки; персоналии, хронотоп; трудности в понимании и применении объекта и т.п.;

– *методологические:* знать происхождение и применение общих и математических методов в познании и обучении;

– *отечествоведческие:* знать и использовать в познании историю развития отечественной, регионально-национальной математики и образования;

– *образовательные:* знать истоки развития математического образования, историю возникновения дисциплин школьного курса математики, историю возникновения и развития содержательно-методических линий.

Вторая составляющая определяется как совокупность следующих групп профессиональных умений и навыков:

– *целеполагающие:* ставить цели использования исторических материалов в обучении;

– *источниковедческие и аналитико-синтетические:* работать с источниками; анализировать их; адаптировать историко-математический материал к условиям обучения; изучать опыт использования исторического материала;

– *организационно-конструктивные:* выстраивать модели и фрагменты уроков с использованием выявленных исторических фактов, учебных материалов; организовывать учебно-исследовательскую работу учащихся;

– *содержательно-генетические:* исследовать происхождение ключевых понятий, уметь составлять таблицы значимых этапов развития математики; формулировать вопросы о происхождении понятий;

– *содержательно-методические:* потребность регулярно просматривать новую литературу историко-математической и методической направленности; исследовать происхождение содержательно-методических линий школьного курса математики;

– *мотивационно-развивающие:* осознавать необходимость использования исторических фактов в обучении математике как стимул профессиональной деятельности; переосмысление историко-математических знаний.

В *третьей* составляющей выделяются следующие группы качеств:

– *ценностно-ориентационные:* определять личностную смысловую и (или) методическую ценность изучаемых исторических фактов (ради чего?), выявлять и осознавать их значимость для решения образовательных задач;

– *культурдиалогические:* стремление к пониманию действий людей, важность коммуникации в профессии; умение включаться в диалог культур, создавать собственные произведения математико-методической культуры, оценивать их;

– *рефлексивно-оценочные и развивающие:* умение диагностировать и оценивать результаты профессиональной деятельности; создавать условия для саморазвития учащихся;

– *прогнозирующие, транслирующие*: стремление и умение осуществлять прогноз от применения выявленных средств и методов в измененных или каких-то новых условиях; умение осуществлять перенос приобретенных знаний и действий на новые ситуации, способность конструировать их.

Все отмеченные группы качеств определяют лишь тот идеал, к которому надо стремиться при обучении истории математики. Опыт показывает, что ряд из этих качеств может быть сформирован у будущего учителя математики на соответствующем уровне. Под *формированием* ИКМК понимается процесс наполнения личного опыта учебной или начальной профессиональной (квазипрофессиональной) деятельности студента отдельными, хотя и взаимосвязанными качествами или их группами.

Анализ целей и задач обучения истории математики с выше намеченных позиций направленности педагогического образования на формирование личностных качеств, составляющих основу математико-методической культуры учителя математики, позволяет выделить основные противоречия в сложившейся системе историко-математической подготовки будущего учителя математики. Ими являются противоречия между:

– современными требованиями к уровню сформированности профессионально ориентированных качеств (ценностей, установок, знаний, умений) будущих учителей математики в их историческом аспекте и ограниченностью возможностей по их формированию в сложившейся системе обучения истории математики;

– богатейшим потенциалом истории математики в формировании основ математико-методической культуры будущего учителя, и неразработанностью единой методической линии обучения данному курсу для этой цели;

– потребностью и возможностью использовать *учебные ситуации профессионального развития* (УСПР), соответствующие им *учебные историко-методические задачи* (УИМЗ) и элементы диалога культур как механизмы формирования исторического компонента математико-методической культуры будущих учителей математики, и недостаточной разработанностью возможностей и методики их актуализации и применения при обучении истории математики.

Теоретической основой построения нашей авторской методической системы является комплексно-интегративный подход (А.Л. Жохов, В.А. Мазилов и др.) с выделенными в нем аспектами системного, деятельностного и культурологического подходов [1].

Обучение истории математики в педагогическом вузе необходимо и возможно подчинить формированию ИКМК будущего учителя математики. Подготовка студентов педагогического вуза при обучении истории математики к выполнению ряда профессионально ориентированных действий с использованием фактов из истории математики будет эффективной, если:

– процесс обучения истории математики будет осуществляться с опорой на дидактическую модель под управлением методической системы обучения истории математики, все компоненты которой подчинены основной направленности процесса (цель как проект результата обучения – совокупность формируемых качеств ИКМК; содержание обучения истории математики как система историко- и математико-методических знаний и умений студентов; взаимодействующая пара “преподаватель-студент”; учебные материалы по истории математики как совокупность различного рода произведений культуры и др.);

– в основу учебной деятельности студентов будут положены процессы разрешения УСПР, решения УИМЗ и различные формы диалога культур (как диалог в парах преподаватель-студент, студент-студент, учитель-ученик, студент-практикант и ученик; между математикой как наукой и математическим образованием и др.);

– будет реализован комплексно-интегративный подход к организации процесса обучения истории математики, обеспечивающий для каждого студента возможности формирования и развития опыта его профессионально значимой деятельности (дидактические средства, акты творческой деятельности, презентация результатов личного опыта, групповые и индивидуальные формы самостоятельной учебной деятельности и др.).

Библиографический список

1. *Жохов, А.Л.* Мировоззрение: становление, развитие, воспитание через образование и культуру: Монография [Текст] / А.Л. Жохов. – Архангельск: ННОУ. – Институт управления: Ярославль: Ярославский филиал ИУ, 2007. – 348 с.
2. Примерная программа основного общего образования. Математика: Проект [Текст] // Математика. – 2009. – № 16. – С. 37-48.

Изучение устойчивости решений дифференциальных уравнений как средство повышения математической культуры студентов

А.С. Безручко

Теория дифференциальных уравнений является одним из самых больших разделов математики, занимающим почетное место в современной науке. Она представляет собой богатый содержанием быстро развивающийся раздел математики, тесно связанный с другими ее разделами и приложениями.

Новые усовершенствования и открытия в приложениях и в других областях математики являются движущей силой развития теории дифференциальных уравнений. Кроме того, вместе с ней подлежат развитию и ее разделы, многие из которых в настоящее время стали самостоятельными науками.

Изучение особых точек и особых решений дифференциальных уравнений имеет большое значение, как для прикладных задач, так и для дальнейшего изучения теории дифференциальных уравнений. В частности, исследование поведения семейства интегральных кривых в окрестности особой точки, составляет один из разделов качественной теории дифференциальных уравнений и играет важную роль в вопросах устойчивости движения.

Одной из особых точек, которая имеет несколько разновидностей, является узел. В зависимости от дифференциального уравнения и корней характеристического уравнения он может быть просто узлом, вырожденным или дикритическим узлом. На построение дикритического и простого узла не влияет направление движения. При построении вырожденного узла в зависимости от направления движения, поведения интегральных кривых меняется. Исходя из этого, построение вырожденного узла является более сложной задачей и может вызвать затруднения. Приведем пример, в котором поведения интегральных кривых, вблизи вырожденного узла в большей степени будет завесить от устойчивости и направления движения.

Пример. Найдите и исследуйте особые точки следующих дифференциальных уравнений и сопоставьте интегральные кривые каждого дифференциального уравнения с рисунками 1-4.

$$y' = \frac{-2x + y}{-3x + 2y}, \quad y' = \frac{2x - 3y}{x - 2y}, \quad y' = \frac{x + y}{3x - y}, \quad y' = \frac{-x + 3y}{x + y}.$$

Решение:

1. $y' = \frac{-2x+y}{-3x+2y}$.

Это уравнение с дробно линейной правой частью, которое имеет единственную особую точку $x = 0, y = 0$. Так как именно в этой точке правая часть уравнения обращается в неопределенность “ноль на ноль” Исследуем эту особую точку. Составим характеристическое уравнения и решим его

$$\begin{vmatrix} -3 - \lambda 2 \\ -21 - \lambda \end{vmatrix} = 0, (-3-\lambda)(1-\lambda)+4 = 0, \lambda^2+2\lambda+1 = 0, (\lambda+1)^2 = 0, \lambda_1 = \lambda_2 = -1.$$

Так как, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = -1$ следовательно, особая точка – вырожденный узел.

Найдем решение, которое изображается прямой, проходящей через особую точку. Эта прямая будет направлена вдоль собственного вектора матрицы $\begin{pmatrix} -32 \\ -21 \end{pmatrix}$ составленной из коэффициентов нашего уравнения.

Остальные кривые будут касаться этой прямой вблизи особой точки. По определению собственного вектора, этот вектор таков, что он должен удовлетворять следующему условию:

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} ab \\ cd \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-\lambda)x_1 + bx_2 = 0, \\ cx_1 + (d-\lambda)x_2 = 0. \end{cases} .$$

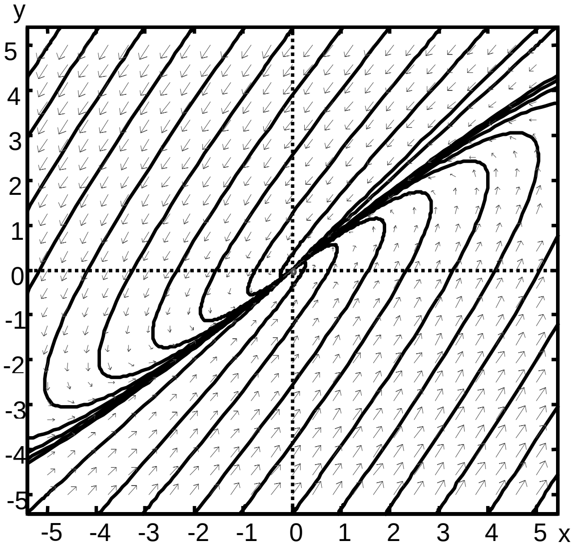


Рис.1

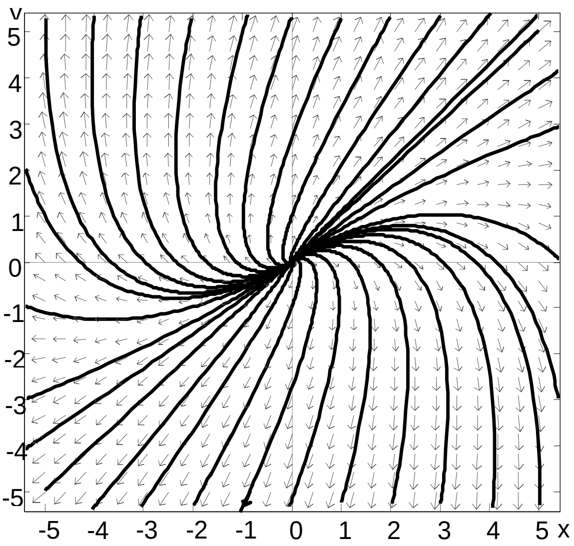


Рис.2

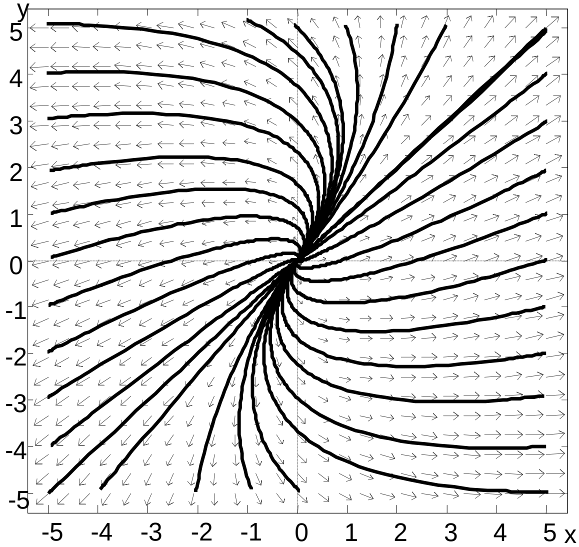


Рис.3

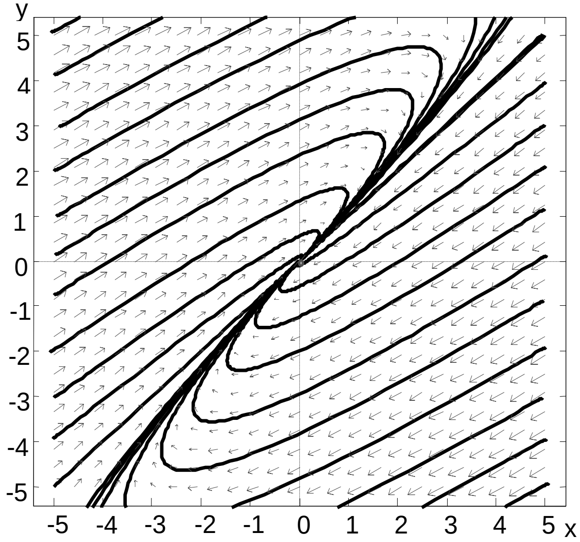


Рис.4

Следовательно, для $\lambda = -1$ имеем $\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 = 0, \\ -2x_1 + 2x_2 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \text{x}_1 = \text{x}_2.$ Данному значению λ будет соответствовать собственный вектор $(1,1)$, а искомая прямая проходящая через особую точку будет направлена вдоль него.

При исследовании поведение интегральных кривых вблизи вырожденного узла встает вопрос о направлении движения. Воспользуемся тем, что интегральные кривые дифференциального уравнения $\frac{dy}{dx} = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ совпадают с траекториями системы $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = Q(x,y), \\ \frac{dy}{dt} = P(x,y); \end{cases}$. Перейдем от дифференциального уравнения к системе $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -3x + 2y, \\ \frac{dy}{dt} = -2x + y. \end{cases}$

Исследуем вопрос о направлении траекторий движения данной системы. Строим в любой точки, например $(1,0)$ вектор скорости $\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$. В силу справедливости данной систем он равен$(-3x + 2y, -2x + y)$. В точке $(1,0)$ получаем вектор $(-3,-2)$. Следовательно, убыванию t соответствует движение по траекториям часовой стрелки. Так как $\lambda < 0$ то особая точка буде асимптотически устойчива.

Используя полученные данные, схематически построим интегральные кривые на координатной плоскости (рис. 5).

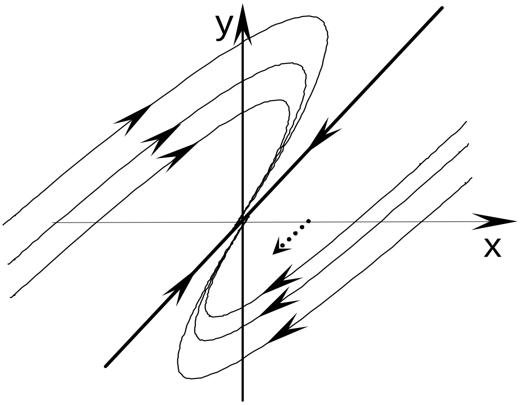


Рис. 5

Точками обозначен вектор скорости. Сопоставляя наш схематический рисунок с приведенными семействами интегральных кривых, делаем вывод о том, что данному дифференциальному уравнению соответствует рис. 4.

2. $y' = \frac{2x-3y}{x-2y}$.

Это уравнение с дробно линейной правой частью, которое имеет единственную особую точку $x = 0, y = 0$. Так как именно в этой точке правая часть уравнения обращается в неопределенность “ноль на ноль” Исследуем эту особую точку

Составим характеристическое уравнения и решим его

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda-2 \\ 2-3-\lambda \end{vmatrix} = 0, (1-\lambda)(-3-\lambda)+4 = 0, \lambda^2+2\lambda+1 = 0, (\lambda+1)^2 = 0, \lambda_1 = \lambda_2 = -1.$$

Так как $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = -1$ следовательно особая точка – вырожденный узел.

Найдем решение, которое изображается прямой, проходящей через особую точку. Эта прямая будет направлена вдоль собственного вектора матрицы $\begin{pmatrix} 1-2 \\ 2-3 \end{pmatrix}$ составленной из коэффициентов нашего уравнения. Используя выше приведенное определения собственного вектора получим систему для $\lambda = -1$ имеем $\left\{ \begin{array}{l} 2x_1 - 2x_2 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 = 0; \end{array} \right. \Leftrightarrow \mathrm{x}_1 = \mathrm{x}_2$. Данному значению λ будет соответствовать собственный вектор $(1, 1)$.

Исследуем вопрос о направлении движения. Перейдем от дифференциального уравнения к системе $\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = x - 2y, \\ \frac{dy}{dt} = 2x - 3y. \end{array} \right.$. Строим в точке $(1, 0)$ вектор скорости $\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$. В силу справедливости данной систем он равен$(x - 2y, 2x - 3y)$. В точке $(1, 0)$ получаем вектор $(1, 2)$. Следовательно, убыванию t соответствует движение против траекторий часовой стрелки. Так как $\lambda < 0$ то особая точка буде асимптотически устойчива.

Используя полученные данные, схематически построим интегральные кривые на координатной плоскости (рис. 6).

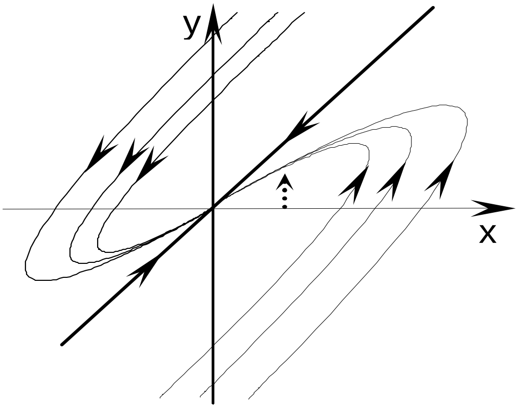


Рис. 6

Сопоставляя наш схематический рисунок с приведенными семействами интегральных кривых, делаем вывод о том, что данному дифференциальному уравнению соответствует рис. 1.

3. $\mathrm{y}' = \frac{\mathrm{x}+\mathrm{y}}{3\mathrm{x}-\mathrm{y}}$

Это уравнение имеет единственную особую точку $\mathrm{x} = 0, \mathrm{y} = 0$. Так как именно в этой точке правая часть уравнения обращается в неопределенность “ноль на ноль” Исследуем эту особую точку

Составим характеристическое уравнения и решим его

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda-1 \\ 11-\lambda \end{vmatrix} = 0, (3–\lambda)(1–\lambda)+1 = 0, \lambda^2-4\lambda+4 = 0, (\lambda-2)^2 = 0, \lambda_1 = \lambda_2 = 2.$$

Так как $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = 2$, следовательно особая точка – вырожденный узел.

Найдем решение, которое изображается прямой, проходящей через особую точку. Эта прямая будет направлена вдоль собственного вектора матрицы $\begin{pmatrix} 3-1 \\ 11 \end{pmatrix}$ составленной из коэффициентов нашего уравнения. Используя выше приведенное определения собственного вектора получим систему для $\lambda = 2$ имеем $\begin{cases} x_1 - x_2 = 0, \\ x_1 - x_2 = 0; \end{cases}$ $\Leftrightarrow \mathrm{x}_1 = \mathrm{x}_2$. Данному значению λ будет соответствовать собственный вектор $(1, 1)$.

Исследуем вопрос о направлении движения. Перейдем от дифференциального уравнения к системе $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - y, \\ \frac{dy}{dt} = x + y. \end{cases}$ Строим в точке $(1, 0)$ вектор скорости $\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$. В силу справедливости данной систем он равен $(3x - y, x + y)$. В точке $(1, 0)$ получаем вектор $(3, 1)$. Следовательно, убыванию t соответствует движение против траекторий часовой стрелки. Так как $\lambda > 0$ то особая точка буде асимптотически не устойчива.

Используя полученные данные, схематически построим интегральные кривые на координатной плоскости (рис. 7).

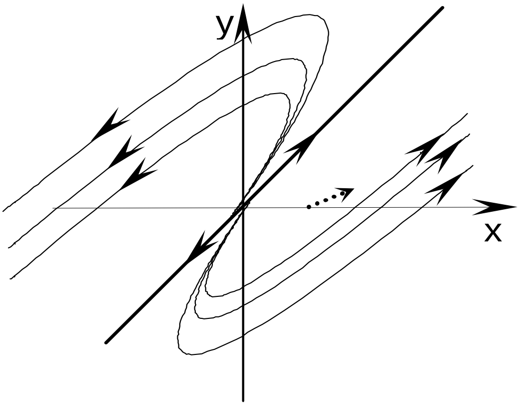


Рис. 7

Сопоставляя наш схематический рисунок с приведенными семействами интегральных кривых, делаем вывод о том, что данному дифференциальному уравнению соответствует рис. 3.

4. $y' = \frac{-x+3y}{x+y}$.

Это уравнение имеет единственную особую точку $x = 0, y = 0$. Так как именно в этой точке правая часть уравнения обращается в неопределенность “ноль на ноль” Исследуем эту особую точку

Составим характеристическое уравнения и решим его

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda 1 \\ -13-\lambda \end{vmatrix} = 0, (1-\lambda)(3-\lambda)+1 = 0, \lambda^2-4\lambda+4 = 0, (\lambda-2)^2 = 0, \lambda_1 = \lambda_2 = 2.$$

Так как $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = 2$, следовательно, особая точка – вырожденный узел.

Найдем решение, которое изображается прямой, проходящей через особую точку. Эта прямая будет направлена вдоль собственного вектора матрицы $\begin{pmatrix} 11 \\ -13 \end{pmatrix}$ составленной из коэффициентов нашего уравнения. Используя определения собственного вектора получим систему для $\lambda = 2$ имеем $\begin{cases} -x_1 + x_2 = 0, \\ -x_1 + x_2 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow x_1 = x_2$. Данному значению λ будет соответствовать собственный вектор $(1, 1)$.

Исследуем вопрос о направлении движения. Перейдем от дифференциального уравнения к системе $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y, \\ \frac{dy}{dt} = -x + 3y. \end{cases}$ Строим в точке $(1, 0)$ вектор скорости $\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$. В силу справедливости данной систем он равен$(x + y, -x + 3y)$. В точке $(1, 0)$ получаем вектор $(1, -1)$. Следовательно, убыванию t соответствует движение по траекториям часовой стрелки. Так как $\lambda > 0$ то особая точка буде асимптотически не устойчива.

Используя полученные данные, схематически построим интегральные кривые на координатной плоскости (рис. 8).

Сопоставляя наш схематический рисунок с приведенными семействами интегральных кривых, делаем вывод о том, что данному дифференциальному уравнению соответствует рис. 2.

В данном примере проведено исследование четырех дифференциальных уравнений. У которых одинаковы координаты особых точек и собственные векторы. Различия состоят в устойчивости и направлении движения. Вследствие чего для учащихся наглядно видна важность учета устойчивости точки и направления движения. Данный пример также позволяет увидеть истинное поведения семейства интегральных кривых, которое может отличаться от сделанного эскиза.

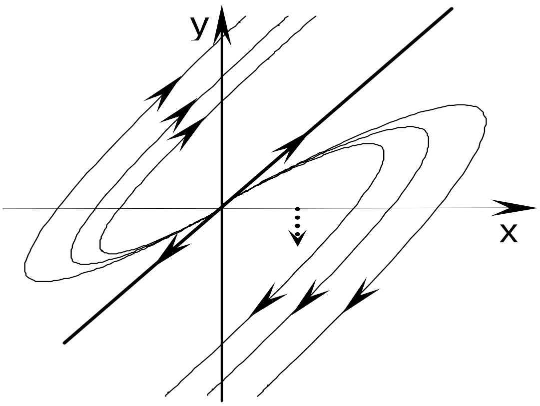


Рис. 8

Библиографический список

1. *Пушкарь, Е.А.* Дифференциальные уравнения в задачах и примерах: Учебно-методическое пособие [Текст] / Е.А. Пушкарь. – М.: МГИУ, 2007. – 158 с.
2. *Чебан, Д.Н.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Руководство к решению задач: Учебное пособие [Текст] / Д.Н. Чебан. – Кишинев: Молдавский госуниверситет, 2001.

Анализ качества тестов по контролю остаточных знаний

Е.А. Голикова

В связи с аттестацией вузов, ценрализованный тестовый контроль остаточных знаний (ФЭПО) проводится повсеместно. Понятно, что для внутренних потребностей вуза необходима аналогичная тестовая система.

На протяжении ряда лет на кафедре Вычислительных методов и уравнений математической физики УГТУ-УПИ на базе Центра тестирования создавался банк тестовых задач по контролю остаточных знаний студентов. Задания банка охватывают все общематематические курсы, читаемые на радиотехническом и физико-техническом факультетах в первые два года обучения. Отметим здесь, что на этих факультетах доказательный аппарат математики (по классификации Ю.Б. Мельникова – см. [4, 5]) изучается достаточно подробно, но тестовый контроль этой части труден, а главное, по специфике проверки остаточных знаний, вряд ли нужен. Однако, понятийный и вычислительный аппараты математики проконтролировать в тестах и нужно и возможно.

В соответствии с требованиями "Стандартов качества програмно-дидактических тестовых материалов" в тестах присутствуют (в определенной пропорции) задачи открытого и закрытого типов, задачи на соответствие и упорядочение; сведено к минимуму количество задач-клонов; задачи разбиты по уровню сложности; составлена спецификация.

Следующий этап в работе над тестовой системой – оценка ее качества. Считается (см. [1-3, 7]), что основными критериями качества теста являются: содержательная и эмпирическая валидность, надежность и дифференцированность.

Содержательная валидность (репрезентативность) подразумевает полный охват материала в соответствии с целями тестирования. Поскольку цель – проверка остаточных знаний, задачи составлялись по всем общематематическим курсам, читаемым кафедрой на физико-техническом и радиотехническом факультетах. В результате получилось около 900 задач по 14 разделам математики (дидактическим единицам). По каждому разделу авторский набор задач подвергался экспертной оценке. Более того, автор этих строк достаточно хорошо знакома с банком задач, предлагаемых ФЭПО а также математическими кафедрами УГТУ-УПИ для контроля остаточных знаний, и, следует заметить, что, практически независимо друг от друга, математики составляют близкие по содержанию задачи. Конечно, это естественно для такого детерминированного языка как математика, но, с другой стороны, мы имеем подтверждение репрезентативности нашего теста.

Эмпирическая валидность – совокупность характеристик валидности теста, полученных с помощью сравнительного статистического анализа [3]. За коэффициент валидности теста принимают коэффициент корреляции результатов тестовых измерений и критерия.

Надежность теста – это характеристика методики, отражающая точность педагогических измерений, а также устойчивость результатов теста к действию посторонних случайных факторов [2, 3]. Статистической характеристикой надежности теста служит коэффициент надежности.

Дифференцированность теста – способность заданий различать тестируемых. Статистическая характеристика этого свойства - коэффициент корреляции между ответами на конкретные задания и на тест в целом [3].

Итак, основные качественные характеристики теста оцениваются, в частности, различными коэффициентами корреляции, вычисленными по статистическим данным, собранным в результате пробного тестирования. Возможны также и другие статистические характеризации качества теста. Однако, важно оптимально соотнести сложность статистической обработки результатов с ее надежностью и быстротой. То есть обеспечить эффективность теста в соответствии с целями тестирования. Целью создания нашей тестовой системы был контроль остаточных знаний после годичного (или двухгодичного) изучения математики на физико-техническом и радиотехническом факультетах УГТУ-УПИ. Такие локальные цели оправдывают локальный характер пробного тестирования. В частности, статистическая обработка с оценкой качественных параметров теста проводилась для выборки из 59 студентов физико-технического факультета. Отметим, что в среднем объем выборки для подобных исследований составляет 30-100 [1]. В нашем случае объем выборки 59 вполне достаточен для применения статистических методов с одной стороны, а с другой стороны позволяет проводить тщательный содержательный анализ причин статистических отклонений.

В тестировании участвовали 2 группы студентов – 25 человек с первого и 34 – со второго курсов. Для оценки эмпирической валидности теста в качестве критерия были взяты средние оценки (по пятибальной системе) студентов за последние 4 экзамена по математическим курсам, полученные в течение двух сессий. После вычисления среднего балла теста, выяснилось, что, по сравнению с экзаменационным, на первом курсе он повысился на 0,14, а на втором – упал на 0,2. Такое колебание можно считать несущественным. Однако, для нескольких студентов изменеие балла составило 2-3 единицы. Таких оказалось 8 (из 59). В этих случаях был проведен анализ задач, не решенных (или слишком успешно решенных) студентами. Чрезмерно сложные задачи были удалены из банка. Кроме того, эти 8 сомнительных единиц выборки были удалены. Объем выборки сократился до 51, но при этом статистические показатели более адекватно отражали качество теста. Вычисленный коэффициент эмпирической валидности 0,57 можно считать удовлетворительным [3, 7], учитывая небольшой объем выборки и значительное тематическое разнообразие заданий.

Оценка надежности теста может проводиться разными способами. Считается [1, 2], что лучше проводить ретест, то есть повторное тестирование тех же людей по тем же тестам, а затем сравнивать результаты. Однако в нашем случае это невозможно. Во-первых, в тестовой системе АСТ КТЕ, в которой создавались тесты, выбор задач идет автоматически случайно из заданного раздела, поэтому гарантировать абсолютно те же вопросы невозможно. Кроме того, организационно не целесообразно тестировать два студенческих потока еще раз. Поэтому использовалось вычисление коэффициента надежности параллельных форм теста [1, 3]. Вычисление коэффициента надежности проводилось отдельно для двух групп 1-го и 2-го курсов. Сначала тест, состоящий из 34 вопросов разбили на 2 части (в каждой группе) и вычислили коэффициенты корреляции r решенных заданий. Затем вычислили коэффициент Спирмена-Брауна:

$$\rho = \frac{2r}{1+r}.$$

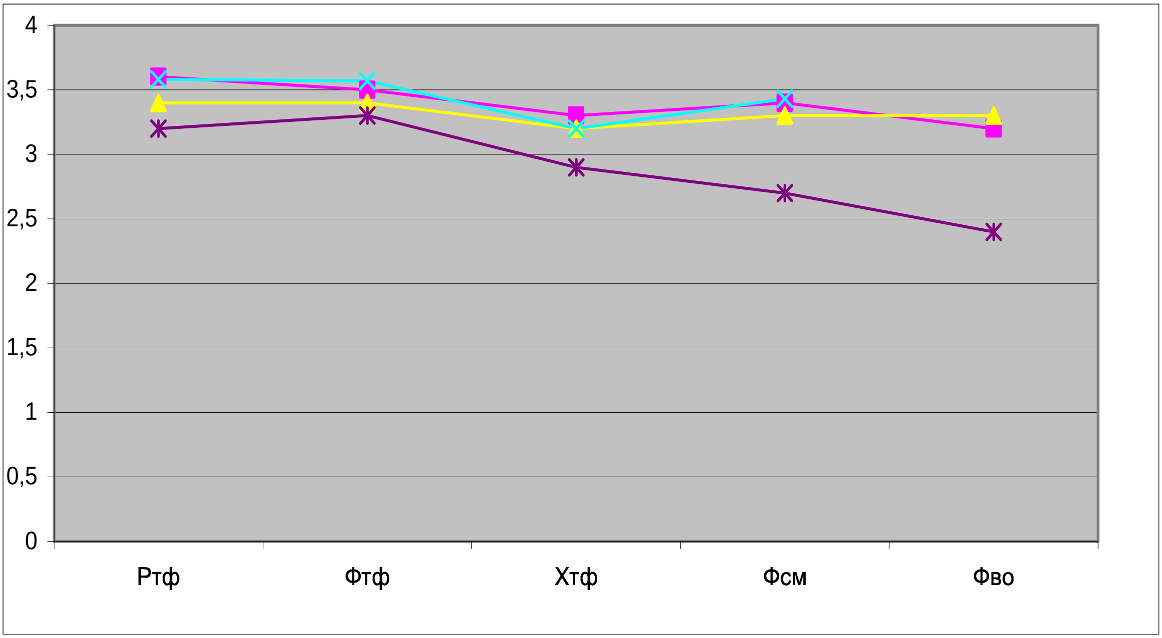
Для 1-го курса получили 0,5, для второго 0,6. Другой способ оценки надежности расщепленного теста основан на формуле Рюлона:

$$\rho = 1 - \frac{s_d^2}{s^2},$$

s_d^2 – дисперсия суммарных баллов, s_d^2 – дисперсия разностей между результатами каждого студента по обеим половинам теста. Для первого курса получили 0,55 для второго 0,58. Для таких коэффициентов 95%-ый доверительный интервал для количества решенных задач (из 34 предложенных) имеет радиус 0,5-0,7 (используется формула $t(p,n)s\sqrt{1-\rho}$, где $t(p,n)$ статистика Стьюдента). Понятно, что при переводе количества решенных задач в пятибальную систему такой разброс сказывается мало. Кроме того, довольно сильно влияет на надежность теста количество заданий (чем больше заданий тем надежнее тест), разнообразие задач (чем разнообразнее, тем меньше надежность) и трудность (математика считается в принципе более сложным предметом, а трудность понижает надежность) [7] и поэтому идеальных показателей 0,8-0,9 вряд ли возможно добиться. С этой точки зрения надежность теста можно считать удовлетворительной (ненадежным считается тест с коэффициентом меньше 0,5).

Оценка дифференцированности теста проводится по 100%-но решенным и 100%-но нерешенным задачам. В идеале нужно убрать и те и другие. Однако, в силу специфики системы АСТ КТЕ, тест на втором курсе по сохранности остаточных знаний составляется практически по всем дидактическим единицам (а это 14 разделов) и состоит для каждого студента из 34 задач, выбираемых в разделе случайно. Таким образом, для 59 студентов было задействовано 690 задач. Могло получиться, что задача решалась одним или двумя студентами и они ее не решили, что не является показателем сложности. Тем не менее, были проанализированы нерешенные задачи и некоторые были удалены. Коэффициент корреляции между ответами на конкретные задания и на тест в целом в данной ситуации считать не имеет смысла.

Всегда полезно сравнить испытуемый тест с другими или оценить его с помощью дополнительных критериев [6]. В нашем случае проводилось сравнение среднего балла для различных факультетов, полученного при тестироовании на остаточные знания, со средним баллом тех же факультетов по сессиям.

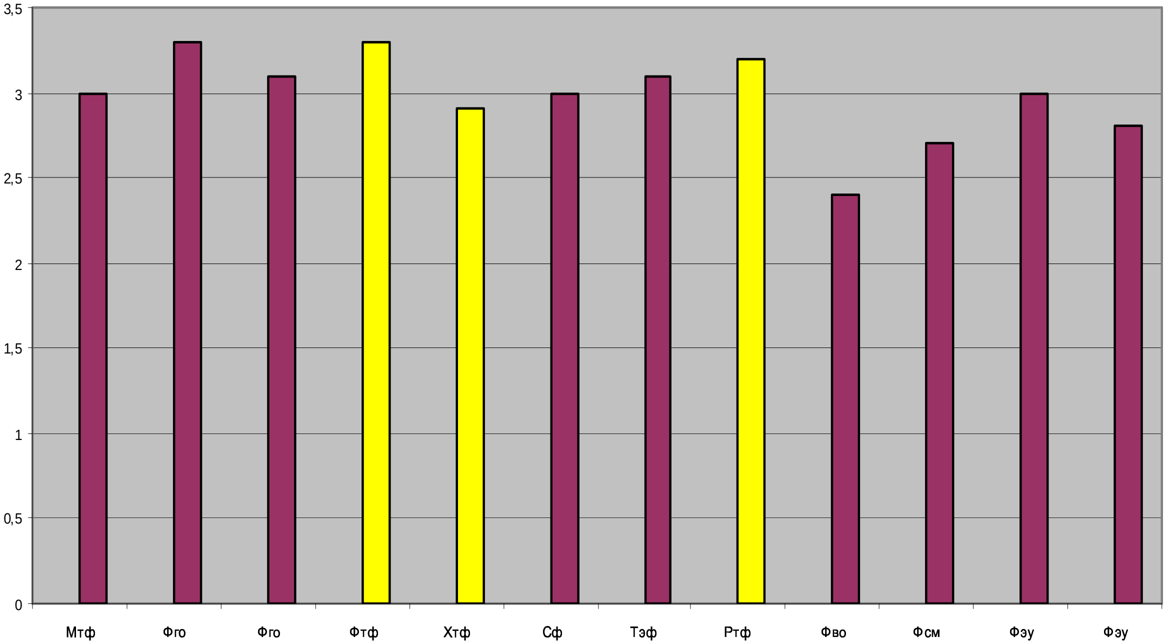


Нижняя из линий отражает результаты теста, а верхние – результаты сессий: ■ – зимняя сессия 2007-2008, ▲ – летняя сессия 2007-2008, × – зимняя сессия 2008-2009.

По графикам видно, что традиционно сильные факультеты Ртф и Фтф также лучше выглядят и в тестировании. А что касается традиционно слабых (с точки зрения математики) факультетов Фсм и Фво, то средняя тройка в сессии упала до двойки при тестировании. Но это говорит лишь об объективности теста. Заметим, что Ртф, Фтф и Хтф тестировались по нашим, т.е. специально для сильных факультетов составленным тестам, а Фсм и Фво по другим, более простым тестам. На следующей диаграмме сравнивются разультаты тестирования по нашим тестам (светлого цвета для Ртф, Фтф, Хтф) с результатами тестирования на других факультетах по другим тестам.

Распределенеие по оценкам вполне соответствует традиционному распределению для успеваемости по математике в УГТУ-УПИ (ныне в Федеральном университете). Подобное сравнение еще раз подтверждает действенность (валидность) теста.

В заключение хотелось бы отметить, что некоторые предлагаемые тестологами методики оценки качества тестов для конкретной ситуации могут выглядеть слишком трудоемкими. На практике приходится выбирать из нескольких методик эффективные, в том числе и менее затратные, для данного типа тестирования. Однако, соотнесение полученных статистических параметров с моголетними наблюдениями позволяет, с достаточной степенью строгости, судить о качестве предлагаемого теста.



Библиографический список

1. *Аванесов, В.С.* Композиция тестовых заданий: учеб. книга [Текст] / В.С. Аванесов. – М.: Адепт, 1998. – 217 с.
2. *Анастази, А.* Психологическое тестирование [Текст]. Кн. 1 / А. Анастази. – М.: Педагогика, 1982. – 320 с.
3. *Дюк, В.А.* Компьютерная психодиагностика: монография [Текст] / В.А. Дюк. – Санкт-Петербург: “Братство”, 1994. – 364 с.
4. *Мельников, Ю.Б.* Математическое моделирование:структура, алгебра моделей, обучение построению математических моделей: монография [Текст] / Ю.Б. Мельников. – Екатеринбург: Уральское издательство, 2004. – 384 с.
5. *Мельников, Ю.Б.*, Мельникова Н.В., Мельникова Ю.Ю. Модели математики и их использование в учебном процессе [Текст] / Ю.Б. Мельников, Н.В. Мельникова, Ю.Ю. Мельникова // Материалы областной научно-практической конференции “Информационно-математические технологии в экономие, технике и образовании”. – Екатеринбург: ГОУ ВПО “Уральск.гос.тех.ун-т-УПИ”, – 2005. – 74 с.
6. *Матвиевская, Е.Г.* Педагогические измерения. Опыт и проблемы исследования [Текст] / Е.Г. Матвиевская // Теоретический журнал CREDO NEW/www.credonew.ru
7. *Подласый, И.П.* Тестирование в учебном процессе: его история и возможности [Текст] / И.П. Подласый // Элитариум: Центр дистанционного образования/ www.elitarium.ru

О проблеме преемственности математического образования дошкольников и младших школьников

Е.Р. Гурбатова

В основу современной концепции развития образования положена идея гуманизации, согласно которой на первый план выдвигается личность ребенка. Отвечающая этой идее цель образования – оказание ребенку помощи в развитии способностей к самоопределению и самореализации, к самостоятельному принятию решений в различных, в том числе учебных, ситуациях, доведению их до исполнения и анализа собственной деятельности. Эта цель достижима посредством развивающего обучения, превращающего учащегося в активного участника поиска решения учебных задач, т.е. субъекта учебной деятельности, и к этому ребенок должен быть подготовлен. Этому способствует следование *онтогенетическому подходу*, характеризующемуся тем, что обучение математике выстраивается как “процесс движения от обыденных, диффузных представлений к строгим понятиям как их продуктивным моделям” [5].

Особенность обучения математике, состоит, в частности, в том, что уже на начальных стадиях оно должно опираться, прежде всего, на определенный уровень развития допонятийных форм мышления ребенка и на знаково-символические средства, лежащие в основе организации учебной деятельности, моделирования изучаемого содержания, развития семиотической функции мышления. Их освоение требует определенного уровня развития таких механизмов мышления, как анализ, синтез, абстрагирование, обобщение и др., развития их взаимодействий. Психолого-педагогические исследования показывают, что наличие знаний математических фактов само по себе не определяет успешности обучения. Этот вывод убедительно обоснован в работах А.В. Белошистой. Ею показано, что успешность обучения в школе предопределяется, прежде всего, уровнем развития у ребенка соответствующих психических механизмов и мыслительных операций. Фактически, в этом и заключается суть проблемы готовности дошкольников к обучению в школе.

Преемственность между дошкольным и начальным звеном рассматривается на современном этапе как одно из условий непрерывного образования. Авторы ряда программ ДОУ видят решение проблемы преемственности в более раннем изучении программы 1 класса и сводят цели непрерывного образования к формированию уже в дошкольном детстве узко-предметных знаний, умений и навыков. В этом случае преемственность между дошкольным и младшим школьным возрастом определяется не тем, развиты ли у будущего школьника качества, необходимые для осуществления новой деятельности, сформированы ли предпосылки для этого, а наличием или отсутствием у него определенных знаний по определенным предметам. Данный подход к подготовке дошкольников к обучению в школе предполагает дальнейшее обучение в 1 классе по традиционной программе, а не по программам развивающего обучения. Реализация же современных целей образования возможна путем развивающего обучения.

Обучение математике в начальном звене осуществляется по разным программам, одни из которых в своем подходе соответствуют традиционному подходу к обучению (учебники М.И. Моро, С.И. Волковой, С.В. Степановой и др.), другие – системам развивающему обучения Л.В. Занкова (учебники И.И. Аргинской), и Д.Б. Эльконина-В.В. Давыдова (учебники Э.И. Александровой, С.Ф. Горбова и др.).

Наиболее радикальной из сегодняшних систем развивающего обучения, на наш взгляд, является система Д.Б. Эльконина-В.В. Давыдова. Она направлена на раннее формирование понятийных структур через введение принципиально нового содержания, требующего от ребенка, говоря словами Д.Б. Эльконина, "новых, более высоких форм мысли". Развивающее обучение по Д.Б. Эльконину-В.В. Давыдову [8] сводит процесс мышления к мышлению в понятиях и именно вокруг него выстраивает логику учебного процесса.

Современная начальная школа предъявляет к умственному развитию ребенка, поступающего в первый класс, такие требования, которые напрямую связаны с качеством умственной деятельности, с наличием у будущего школьника непростого запаса представлений, именуемого "кругозором" и выражающегося в педагогическом требовании учета уровня общего интеллектуального развития.

Сегодня имеется несколько разных вариантов решения проблемы преемственности, сложившихся в практике обучения математике дошкольников и младших школьников.

Первый вариант направлен на предметную подготовку ребенка к школе. Он ориентирован на содержание программы начального образования и школьные приемы обучения. Обучение дошкольников при таком подходе определяется не объективными законами развития ребенка, а содержанием образовательной системы и последующего звена. Этот вариант реализуется в математических блоках "Типовой программы", программ "Развитие", "Детство" и "Радуга".

Второй вариант связан с идеями самоценности дошкольного детства. Ориентиры и границы содержания обучения задает специфика возрастного развития детей. Предполагается построение обучения в "зоне ближайшего развития", но объем этой "зоны", ее границы весьма неопределенны и могут широко варьироваться как в зависимости от индивидуальных особенностей ребенка, так и в зависимости от возможностей работающих с ним взрослых. Характеризуются программы этого вида и тем, что образовательный процесс оформляется единственно в виде дидактических игр. Все это не способствует формированию у ребенка понимания (осознания) роли учения как самостоятельного и самоценного процесса. Этот вариант представлен в математическом блоке программы "Школа 2000".

Третий вариант направлен на самоактуализацию личности в продуктивной познавательной деятельности, обеспечивающей ее (личности) саморазвитие, проявление индивидуальных способностей и формирование умения учиться как ведущего новообразования. Сформированность умения учиться предполагает наличие полноценной учебной мотивации (желания учиться) и развитой учебной самодеятельности (самоорганизации, самоконтроля, анализа и рефлексии, умения планировать свою деятельность). Самыми учитываемыми позициями при разработке такого подхода должны стать положения о формировании поисковой деятельности, учебной самостоятельности, о развитии креативности, "мыслительной самостоятельности", т.е. умения мыслить и действовать самостоятельно" [1].

Предлагаемый нами подход к обучению дошкольников математике [2] представляет синтез двух подходов: "вероятностного" подхода в духе А.М. Лобока [6] и подхода в духе системы развивающего обучения Д.Б. Эльконина–В.В. Давыдова [8]. Обучение в духе А.М. Лобока – это обучение, при котором происходит стимулирование развития высших психических и психофизических функций, значимых для обучения и общего развития ребенка, а также формирование основных компонентов учебной деятельности, таких как мотивация, познавательный интерес, учебная самостоятельность, самоконтроль и др. Содержание обучения по А.М. Лобоку носит преимущественно геометрический характер. Искомой "модельной реальностью" является обыкновенная тетрадь в клетку, с помощью которой достаточно просто моделировать математические объекты различной степени сложности, принимая за единицу квадратики разной величины. Процесс обучения и развития дошкольника построен преимущественно с опорой на наглядно-действенное и наглядно-образное мышление, а развитие словесно-логического мышления носит сопутствующий характер (сопровождает непосредственную деятельность с вещевыми и графическими моделями). "При ведущем сенсомоторном восприятии в основе распознавания лежит объединение в комплекс тактильных, зрительных и кинестетических ощущений: при этом модель понятия должна быть воспринимаема всеми чувствами.

В этом случае познавательная деятельность ребенка адекватна уровню развития его интеллекта” [6].

По мере “созревания” наглядно-образного мышления моделирующая деятельность ребенка в процессе обучения постепенно включает и более абстрактные способы моделирования – схематический, графический. Для предлагаемого подхода существенно многообразие используемых на занятиях знаковых средств, но с выделением и более частым использованием одной из форм схематизации. “Действие наглядного моделирования в его полном составе формируется в результате интериоризации и слияния внешних действий, их превращения во внутренние. Соответственно, построение и использование внешних моделей преобразуется в построение и использование функционально идентичной ей внутренней модели – модельные представления” [7]. “Процесс приобщения учащихся к полимоделированию, пронизываемый многократным и многосторонним использованием такой формы моделирования, которая могла бы претендовать на роль универсальной формы (такой, как использование графов или геометрических образов в духе А.М. Лобока), позволял бы использовать возможности, несомые как полимоделированием, так и мономоделированием. Такой процесс должен основываться на наращивании учащимися непосредственного, “наивного” опыта, на широкой вариативности в постановках задач и способах их решения и, вместе с тем, на формировании содержательных “сгустков”, или основательно “обживаемых” “центров”, долженствующих играть роль источников концептуальных и “технических” идей, роль источников эвристической подпитки” [4].

Вероятностный подход А.М. Лобока к обучению математике младших школьников, (а нами на практике установлено, что вероятностный подход применим и необходим в обучении дошкольников), способствует развитию поисковой деятельности, креативности, познавательной мотивации. Именно поиск является универсальным психологическим механизмом саморазвития и самообновления ребенка, что делает его субъектом деятельности. Обучение, в основе которого действие по образцу или шаблону, представленное в части программ ДОУ и школьных программ, не дает возможности ребенку реализовать себя как субъекта деятельности, так как он лишен необходимой для развития поисковой деятельности.

С системой обучения первоклассников математике по А.М. Лобоку [7] данную программу роднит направленность на развитие допонятийных форм мышления. Вместе с тем, наш подход отличается от подхода А.М. Лобока тем, что обучение направлено и на развитие понятийного мышления. Более того, оно направлено на формирование и развитие теоретического уровня мышления (в смысле В.В. Давыдова [3]). Это роднит наш подход с системой развивающего обучения Д.Б. Эльконина-В.В. Давыдова [8]. Вместе с тем, наш подход отличается от последней “пронизыванием” обучения развитием допонятийных форм мышления и активными и многосторонними их взаимодействиями с формирующейся и развивающейся понятийной формой мышления.

Взаимодействие допонятийных форм с понятийными формами способствует и развитию допонятийных форм мышления, которые рассматриваются не только как средство формирования и развития понятийной формы. Более того, они рассматриваются как самоценные. Допонятийное мышление, мышление в комплексах “вовсе не снимается, не преодолевается “более высокой” понятийной формой мышления, а сохраняет самостоятельную интеллектуальную ценность и находится в сложном диалоге с понятийным уровнем” [5]. Органика взаимодействия средств обучения, поставляемых системой А.М.Лобока и системой Д.Б. Эльконина–В.В. Давыдова, создает не только возможность успешного обучения в начальной школе, но и, более того, создает возможность реализации этого уже на дошкольном уровне. “В действительности развитие допонятийных структур у современного старшего дошкольника, как правило доведено до такого “внутреннего предела”, который позволяет развивать у него понятийное мышление и начинать его восхождение к теоретическому уровню мышления посредством активного и органичного взаимодействия понятийного и допонятийного мышления (приводящего и к отдалению “внутреннего предела” развития допонятийных структур)” [5].

Такой подход обеспечивает преемственность дошкольного и начального школьного обучения.

Библиографический список

1. *Белошистая, А.В.* Современные программы математического образования дошкольников [Текст] / А.В. Белошистая. – Ростов на Дону, “Феникс”, 2004.
2. *Гурбатова, Е.Р.* Программа предшкольного математического образования: учебно-методическое пособие [Текст] / Е.Р. Гурбатова. – Иваново, 2006.
3. *Давыдов, В.В.* Проблемы развивающего обучения [Текст] / В.В. Давыдов. – М., 1986.
4. *Когаловский, С.Р.* О ведущих планах обучения математике [Текст] / С.Р. Когаловский // Педагогика. – 2006. –№ 1.
5. *Когаловский, С.Р.* Поиски метода и методы поиска (онтогенетический подход к обучению математике) [Текст] / С.Р. Когаловский. – Шуя, 2006.

6. *Лобок, А.М.* Другая математика [Текст] / А.М. Лобок // Школьные технологии. – 1998. –№ 6.
7. Проблема формирования познавательных способностей в дошкольном возрасте (на материалах овладения действиями пространственного моделирования) [Текст] / Под ред. Л.А. Венгер. – М., 1980.
8. Программы общеобразовательных учреждений. Начальные классы по системе Д.Б. Эльконина–В.В. Давыдова [Текст]. – М.: Просвещение, 1998.

Нахождение наибольших и наименьших значений величин при изучении стереометрии

Т.М. Корикова, И.В. Суслова

Эффективность обучения математике обосновано принято оценивать по умению обучающихся решать задачи, поэтому стержневой дидактической целью процесса обучения является их решение. Деятельность по решению стереометрических задач способствует развитию пространственных представлений и логической строгости мышления учащихся. Стереометрические задачи обладают как содержательностью, так и конструктивностью, действительно, при решении любой стереометрической задачи первоначально необходимо разобраться с геометрической конфигурацией заданной в условии, выполнить рисунок, установить необходимые связи между данными и искомыми элементами с использованием чертежа.

Основную трудность при решении новых типов математических задач как для студентов, так и для школьников составляет проблема вызова – неизвестна идея решения. *Под идеей задачи имеются ввиду не заданные прямо промежуточные стратегические и тактические цели, которые нужно поставить и достигнуть, чтобы осуществить решение.*

Опыт работы подтверждает, что работа с новыми типами задач обеспечивает действенную стимуляцию мыслительной деятельности учащихся, способствующую формированию умения искать подход к их решению. О.А. Иванов в своей работе “Элементарная математика” выделяет три аспекта мышления, которым необходимо уделять внимание, выстраивая работу с учащимися (студентами), направленную на обучение поиску решения задач:

– индуктивный аспект: нужно учить искать подход к решению задачи, объясняя, что такое “идея решения”;

– дедуктивный аспект – умение рассуждать;

– формально логический аспект: убедить в необходимости доказательств, научить видеть и исправлять логические ошибки и пробелы.

Мы разделяем мнение автора в том, что сформированности умения выделять основную идею задачи помогут специально сконструированные наборы задач, при решении которых работа по поиску выхода из затруднения требует активной мыслительной деятельности (используются все указанные аспекты мышления).

К данной статье речь пойдет о задачах, которые нечасто встречаются в школьных учебниках стереометрии. Это задачи на нахождение наибольших и наименьших значений геометрических величин. Выбор темы объясняется тем что, во-первых, эти задачи интересны как для математики, так и для ее приложений, во-вторых, при их решении используются знания из различных разделов школьной математики, как алгебры так и геометрии, наконец, в процессе работы над ними активно используется воображение, конструктивные навыки, интуиция, логической мышление, разнообразны методы решения, что заставляет обосновано подходить к выбору метода для каждой конкретной задачи.

Цель статьи – выделить наиболее востребованные при изучении стереометрии методы решения задач на нахождение наибольших и наименьших значений величин, обосновать возможные подходы по выделению основных идей на конкретных примерах.

Для нахождения наибольших и наименьших величин в пространственных геометрических фигурах можно выделить следующие методы:

– метод оценки

a) с использованием геометрических и алгебраических неравенств,

b) с использованием свойств монотонности или ограниченности тригонометрических функций;

– выделение отрезка, длина которого является кратчайшим расстоянием между фигурами;

– применение производной.

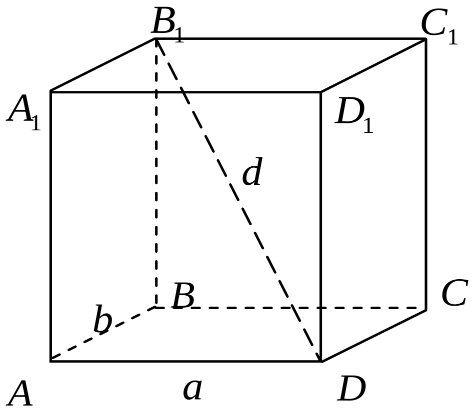
– метод развертки.

Рассмотрим решение задач указанными методами.

Метод оценки

Задача 1. Длина диагонали прямоугольного параллелепипеда равна d. Какую наибольшую величину может иметь объем параллелепипеда?

Решение. Пусть длины ребер параллелепипеда a, b и c, тогда $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$ и $V = abc$.



Воспользуемся алгебраическим тождеством $x^2 + y^2 \geq 2xy$:

$$\left.\begin{array}{l} a^2 + b^2 \geq 2ab, \\ b^2 + c^2 \geq 2bc, \\ c^2 + a^2 \geq 2ac \end{array}\right| \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac.$$

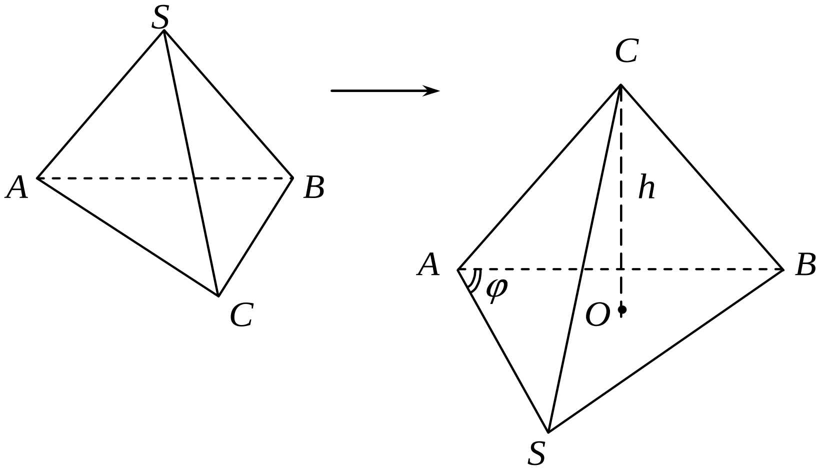
Это позволяет сделать следующую оценку: $d^2 \geq ab + bc + ac$.

Применив неравенство сравнения трех неотрицательных величин $\frac{x+y+z}{3} \geq 3 \cdot \sqrt{x \cdot y \cdot z}$, получаем: $ab + bc + ac \geq 3 \cdot \sqrt[3]{ab \cdot bc \cdot ac}$.

Значит, $d^2 \geq 3 \cdot \sqrt[3]{a^2 \cdot b^2 \cdot c^2} = 3 \cdot \sqrt[3]{(a \cdot b \cdot c)^2} = 3 \cdot \sqrt[3]{V^2}$.

Откуда $V \leq \frac{d^3}{3\sqrt{3}}$, следовательно, $V_{\max} = \frac{d^3}{3\sqrt{3}}$.

Задача 2. Найдите наибольшее значение объема пирамиды $SABC$ при следующих ограничениях: $SA \leq 4$, $SB \geq 7$, $SC \geq 9$, $AB = 5$, $BC \leq 6$, $AC \leq 8$.



Решение.

Величина объема пирамиды зависит от площади ее основания и высоты. Оценим каждую из этих величин.

Примем за основание пирамиды грань SAB.

$$V_{CASB} = \frac{1}{3} S_{\Delta ASB} \cdot h.$$

Так как длина перпендикуляра к плоскости меньше любой наклонной, проведенной из той же точки, то высота пирамиды меньше ее бокового ребра. Поэтому, учитывая условие $BC \leq 6$, получаем: $h \leq BC \leq 6$.

Для оценки площади треугольника ASB оценим значение $\sin\varphi$ ($\varphi = \angle SAB$). Используя теорему косинусов, найдем и оценим $\cos\varphi$:

$$\cos\varphi = \frac{SA^2 + AB^2 - SB^2}{2 \cdot SA \cdot SB} \leq \frac{16 + 25 - 49}{2 \cdot 4 \cdot 5} = -\frac{1}{5}.$$

Из этого следует, что $\varphi > \frac{\pi}{2}$ и $\sin\varphi \leq \sqrt{1 - \frac{1}{25}} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$. Тогда $S_{\Delta ASB} = \frac{1}{2} \cdot SA \cdot AB \cdot \sin\varphi \leq \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 \cdot \frac{2\sqrt{6}}{5} = 4\sqrt{6}$.

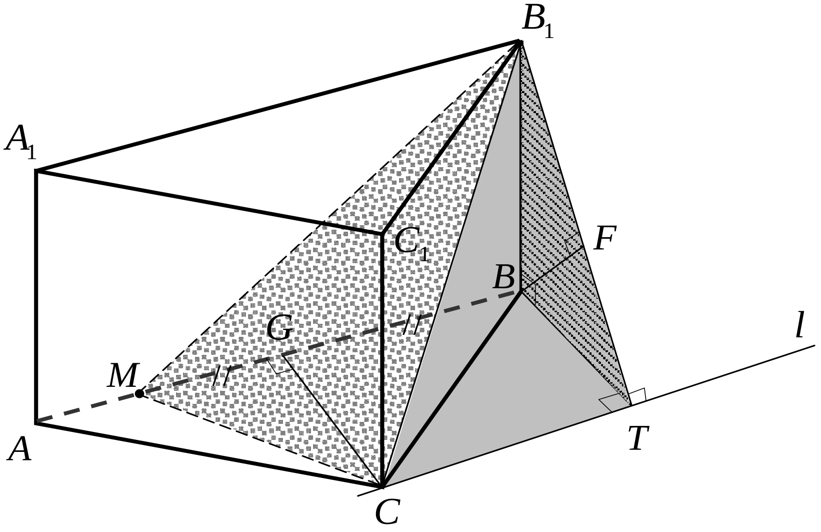
Итак, $V_{CASB} = \frac{1}{3} S_{\Delta ASB} \cdot h \leq \frac{1}{3} \cdot 4\sqrt{6} \cdot 6 = 8\sqrt{6}$. Отсюда делаем вывод: $V_{\max} = 8\sqrt{6}$.

Замечание. В частном случае, при условии $CB \perp (ASB)$, наибольший объем пирамиды имеет то же значение.

Метод, основанный на выделении отрезка, длина которого является кратчайшим расстоянием между фигурами

Задача 3. Через точку, лежащую на одной из сторон основания правильной треугольной призмы, и диагональ боковой грани, не пересекающую эту сторону, проведена плоскость. Какую наименьшую плоскость может иметь сечение призмы этой плоскостью, если высота призмы равна 2, а сторона основания – 4?

Решение.



Обозначим высоту треугольника B_1MC, проведенную из вершины M – h_m.

$$S_{\text{сеч}} = S_{\Delta B_1MC} = \frac{1}{2} \cdot B_1C \cdot h_m.$$

Длина отрезка B_1C фиксирована, а h_m будет наименьшей, если высота будет общим перпендикуляром к прямым AB и B_1C, так как AB и B_1C являются скрещивающимися прямыми

$$h_{m\ \min} = \rho\,(AB,\ B_1C)\,, \quad M \in [AB]\,.$$

Для нахождения расстояния между скрещивающимися прямыми достаточно найти расстояние от прямой AB до некоторой плоскости α, содержащей прямую B_1C и параллельной AB, то есть $\rho\,(AB,\ B_1C) = \rho\,(AB,\ \alpha) = \rho\,(B,\ \alpha)$, где $B_1C \subset \alpha$, $\alpha || AB$.

Необходимо построить плоскость α и отрезок, длина которого будет равна расстоянию от точки B до плоскости α, а значит и наименьшему значению высоты h_m.

I. Построение

1. $l : C \in l$, $l || AB$. B_1C и l задают плоскость α, $\alpha || AB$.

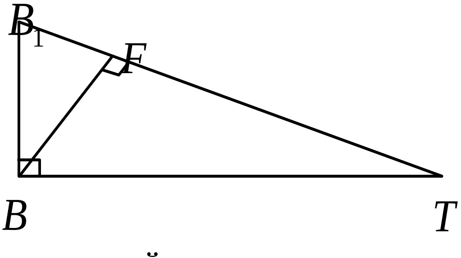
2. $(ABC) : BT \perp \alpha$; $\alpha = (B_1CT)$. По теореме о трех перпендикулярах $B_1T \perp l$. Тогда $l \perp (B_1BT)$.

3. $(B_1BT) : BF \perp B_1T$. Так как $l \perp (B_1BT)$ и $BF \subset (B_1BT)$, то $BF \perp l$ и, следовательно, $BF \perp \alpha$. Учитывая, что B_1C лежит в плоскости α, делаем вывод:

$$BF = \rho\,(B,\ \alpha) = \rho\,(AB,\ B_1C) = h_{m\ \min}.$$

II. Вычисление длины BF

CG – медиана, высота и биссектриса правильного треугольника ABC. CG и TB параллельны. $CG = TB = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$, $B_1T = \sqrt{BB_1^2 + BT^2} = 4$.



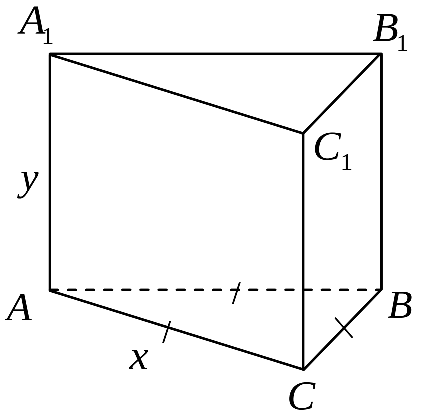
Используя метод площадей и выразив двумя способами площадь треугольника B_1BT, получаем равенство: $B_1T \cdot BF = BB_1 \cdot BT$, откуда $BF = \sqrt{3}$ и $h_{m\ \min} = \sqrt{3}$.

Итак, $S_{\Delta B_1MC\ \min} = \frac{1}{2} \cdot B_1C \cdot h_{m\ \min} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2^2 + 4^2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{15}$.

Метод, основанный на применении производной

Задача 4. Среди всех правильных треугольных призм, имеющих заданный объем V, найти призму с наименьшей суммой длин всех ее ребер и определить длину стороны основания этой призмы.

Решение.



Пусть $ABCA_1B_1C_1$ – искомая правильная призма. Введем обозначения: $AB = x$, $AA_1 = y$, f – сумма длин всех ребер призмы.

$$f = 6x + 3y.$$

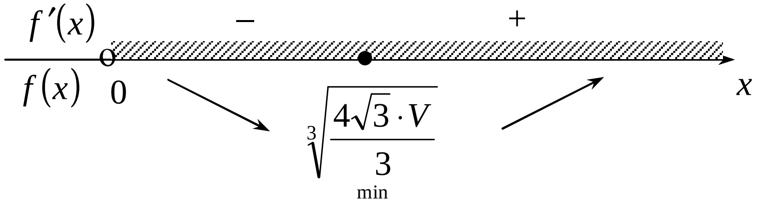
Найдем значения x, при которых f принимает наименьшее значение.

$$\left.\begin{array}{l} V_{ABCA_1B_1C_1} = \frac{1}{2}x^2 \cdot \sin 60^\circ \cdot y, \\ V_{ABCA_1B_1C_1} = V \end{array}\right| \Rightarrow \frac{x^2 \cdot \sqrt{3}}{4} y = V, \quad \text{откуда} \quad y = \frac{4V}{x^2 \cdot \sqrt{3}}.$$

Задача сводится к нахождению наименьшего значения функции $f(x) = 6x + \frac{3 \cdot 4V}{x^2 \cdot \sqrt{3}} = 6x + \frac{4\sqrt{3} \cdot V}{x^2}$. Исследуем функцию $f(x)$ на интервале $(0;\ +\infty)$ с помощью производной

$$f'(x) = 6 - \frac{8\sqrt{3} \cdot V}{x^3}.$$

Из уравнения $f'(x) = 0$ получаем критическую точку $x = \sqrt[3]{\frac{4\sqrt{3} \cdot V}{3}}$ и устанавливаем, что эта точка минимума.



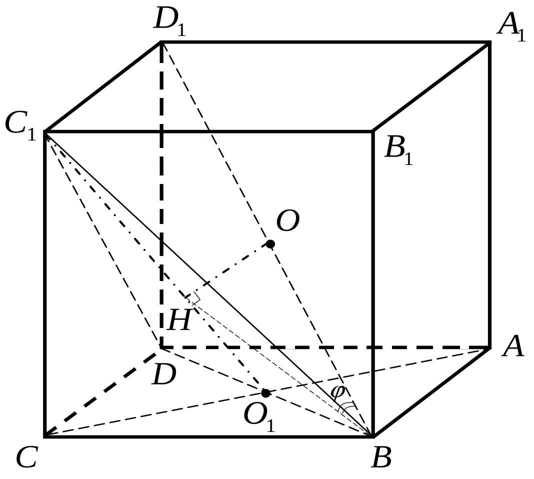
$$\underset{x>0}{f\left(x\right)_{\min}} = f\left(\sqrt[3]{\frac{4\sqrt{3}\cdot V}{3}}\right).$$

Следовательно, сторона основания искомой призмы равна $\underset{\min}{\sqrt[3]{\frac{4\sqrt{3}\cdot V}{3}}}$, а боковое ребро – $\frac{4\cdot V}{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{\frac{16\cdot V^2}{3}}}$.

При работе со следующей задачей можно использовать как метод оценки, так и метод, основанный на применении производной.

Задача 5. Пусть основанием прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является квадрат $ABCD$. Найдите наибольшую возможную величину угла между прямой BD_1 и плоскостью BDC_1.

Решение.



Для нахождения угла между прямой и плоскостью можно использовать два метода – координатный и синтетический.

Координатный метод

Пусть измерения прямоугольного параллелепипеда – $CD = CB = 1$, $CC_1 = m$.

Введем систему координат так, что $C\,(0,\,0,\,0)$, $B\,(1,\,0,\,0)$, $D\,(0,\,1,\,0)$, $C_1\,(0,\,0,\,m)$, $D_1\,(0,\,1,\,m)$.

Запишем уравнение плоскости (BDC_1):

$$ax + by + cz = 0 \quad (\alpha).$$

$$\begin{array}{l} B\in\alpha \;\Rightarrow \\ D\in\alpha \;\Rightarrow \\ C_1\in\alpha \Rightarrow \end{array} \left\{\begin{array}{l} a+d=0; \\ b+d=0; \\ mc+d=0; \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} a=-d, \\ b=-d, \\ c=-\frac{d}{m}; \end{array}\right. \quad x+y+\frac{1}{m}z-1=0.$$

Отсюда вектор $\vec{n}\left(1;\,1;\,\frac{1}{m}\right)$ перпендикулярен плоскости (BDC_1).

Вектор BD_1 имеет координаты $(-1;\ 1;\ m)$.

Обозначим угол между BD_1 и плоскостью (BDC_1) через φ.

Тогда $\sin\varphi = \cos\angle\left(\overrightarrow{n},\ \overrightarrow{BD_1}\right) = \frac{\left|\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{BD_1}\right|}{\left|\overrightarrow{n}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BD_1}\right|}$.

$$\sin\varphi = \frac{|-1+1+1|}{\sqrt{2+\frac{1}{m^2}}\cdot\sqrt{2+m^2}} = \frac{m}{\sqrt{2m^2+1}\cdot\sqrt{2+m^2}}.$$

Для нахождения наибольшего значения величины угла φ можно воспользоваться либо методом оценки, либо методом производной.

а) *Метод оценки*

Поскольку дробь $\frac{m}{\sqrt{2m^2+1}\cdot\sqrt{2+m^2}} = \sin\varphi$ содержит радикалы, оценим значение квадрата обратной величины, т.е. $\frac{1}{\sin^2\varphi} = \frac{\left(2m^2+1\right)\cdot\left(2+m^2\right)}{m^2} = \frac{5m^2+2+2m^4}{m^2}$ или $\frac{1}{\sin^2\varphi} = \frac{2}{m^2} + 2m^2 + 5$.

$\sin\varphi$ принимает наибольшее значение, когда выражение $\frac{2}{m^2} + 2m^2$ имеет минимум.

$$\frac{2}{m^2} + 2m^2 \geq 2\cdot\sqrt{\frac{2}{m^2}\cdot 2m^2} = 4.$$

Наименьшее значение $\frac{2}{m^2} + 2m^2$ равно 4, отсюда $\frac{1}{\sin^2\varphi} \geq 9$. Значит $\sin^2\varphi \leq \frac{1}{9}$, $\sin\varphi$ принимает наибольшее значение, когда имеет место равенство, значит $\sin\varphi = \frac{1}{3}$.

б) *Применение производной*

$$\sin\varphi = \frac{m}{\sqrt{2m^2+1}\cdot\sqrt{2+m^2}}.$$

Функция $y = \sin\varphi$ – возрастающая. Найдем, при каком значении $m \sin\varphi$ принимает наибольшее значение.

$$y' = \frac{2-2m^4}{(2m^4+5m^2+2)^{\frac{3}{2}}}; \quad y' = 0 \text{ при } m = \pm 1.$$

При $m = 1$ $\sin\varphi$ принимает наибольшее значение, равное $\frac{1}{3}$, значит $\varphi = \arcsin\frac{1}{3}$.

Синтетический метод (геометрический)

I способ

1. Построение угла между прямой BD_1 и плоскостью (BDC_1).

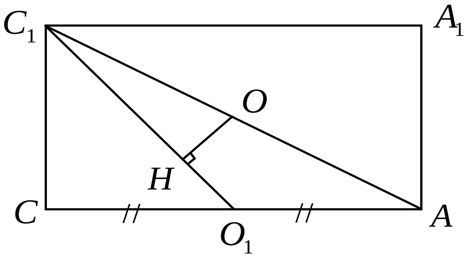
Найдем проекцию BD_1 на плоскость (BDC_1).

$BD \cap AC = O_1$, значит, $(BDC_1) \cap (ACC_1) = C_1O_1$.

$BD_1 \cap C_1A = O$, $OH \perp C_1O_1$, тогда BH– проекция BO на плоскость (BDC_1); $\angle OBH = \angle(BD_1, (BDC_1))$.

2. Вычисление

Для нахождения значения OH используем выносной чертеж диагонального сечения.



$$S_{\Delta O_1C_1A} = \frac{1}{2}S_{\Delta ACC_1} = \frac{1}{4}\sqrt{2}\cdot m,$$

$$S_{\Delta C_1O_1O} = \frac{1}{2}S_{\Delta AO_1C_1} = \frac{1}{8}\sqrt{2}\cdot m.$$

С другой стороны $S_{\Delta C_1O_1O} = \frac{1}{2}C_1O_1 \cdot OH$.

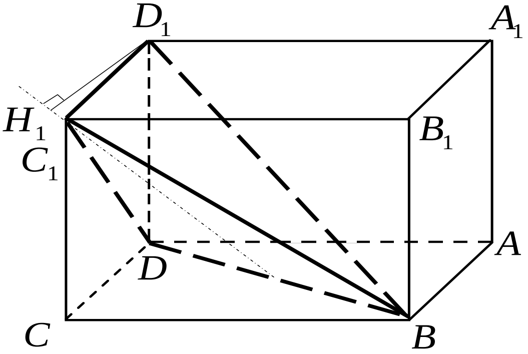
Отсюда $OH = \frac{2\cdot S_{\Delta O_1C_1O}}{C_1O_1} \Rightarrow OH = \frac{m}{2\sqrt{2m^2+1}}$.

$$\sin\varphi = \sin\angle OBH = \frac{m}{\sqrt{2m^2+1}\cdot\sqrt{2+m^2}}.$$

Далее рассуждения ведем аналогично случаю 1.

II способ

Выделим тетраэдр D_1BDC_1.



$V_{BDD_1C_1} = \frac{1}{3}S_{\Delta DD_1C_1}\cdot BC = \frac{m}{6}$. С другой стороны $V_{BDD_1C_1} = \frac{1}{3}S_{\Delta BDC_1}\cdot D_1H_1$, где $D_1H_1 \perp (BDC_1)$.

$D_1H_1 = BD_1 \cdot \sin\varphi$, φ – угол между прямой BD_1 и плоскостью (BDC_1).

$$S_{\Delta BDC_1} = \frac{1}{2}BD\cdot C_1O_1, \quad S_{\Delta BDC_1} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{m^2+\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2m^2+1}}{2};$$

$$V_{BDD_1C_1} = \frac{1}{6} \cdot \sqrt{2m^2+1} \cdot \sqrt{2+m^2} \cdot \sin\varphi;$$

$$\frac{m}{6} = \frac{1}{6} \cdot \sqrt{2m^2+1} \cdot \sqrt{2+m^2} \cdot \sin\varphi;$$

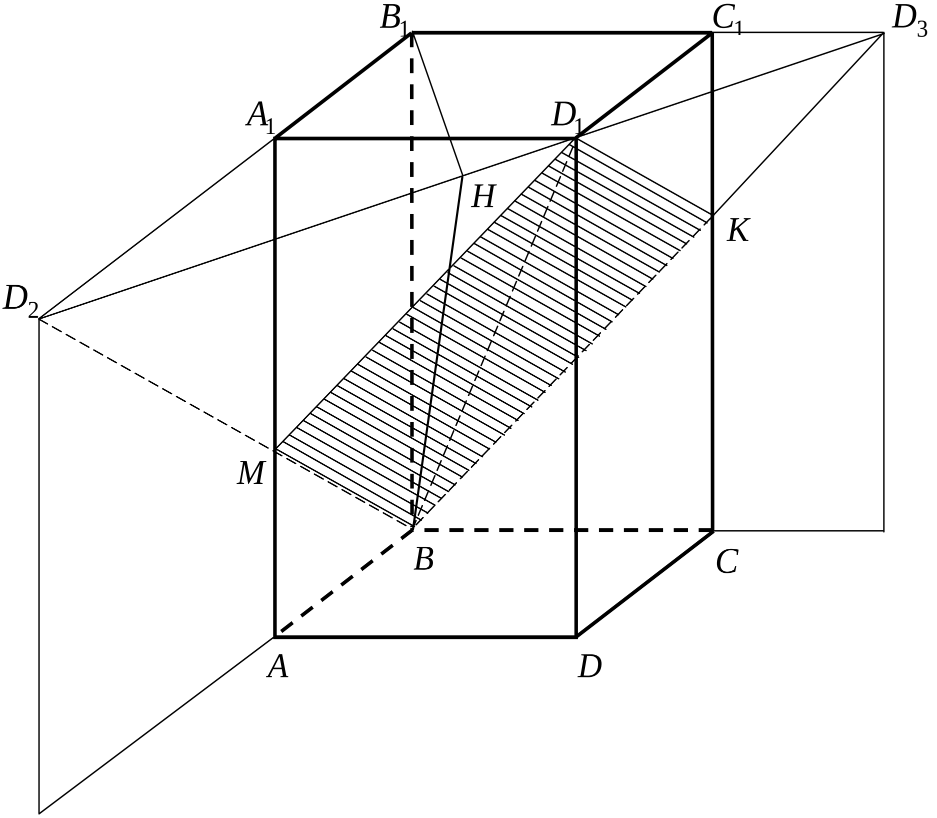
$$\sin\varphi = \frac{m}{\sqrt{2m^2+1} \cdot \sqrt{2+m^2}}.$$

Далее аналогично случаю 1.

Метод развертки

Применение метода развертки проиллюстрируем на примере следующей задачи.

Задача 6. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ такой, что $AB = 4$, $AD = 6$, $AA_1 = 5\sqrt{6}$. Плоскость α, содержащая диагональ BD_1, пересекает ребро AA_1 таким образом, что сечение параллелепипеда этой плоскостью имеет наименьший периметр. Какое наименьшее значение может иметь периметр сечения? Определите угол, который образует плоскость α с плоскостью основания параллелепипеда [1].



Решение.

Пусть четырехугольник $ABCD$ есть сечение параллелепипеда плоскостью α. Несложно доказать, что это – параллелограмм. Действительно, BM и MD_1 – следы секущей плоскости на гранях AA_1B_1B и AA_1D_1D.

ВК и KD_1 – следы секущей плоскости на гранях BB_1C_1C и DD_1C_1C, при этом D_1K параллелен МВ, ВК параллелен MD_1.

Сечение будет иметь наименьший периметр тогда, когда сумма двух сторон $(BM + MD_1)$ – наименьшая.

Повернем грань AA_1D_1D около ребра AA_1 так, чтобы она совместилась с плоскостью (ABB_1), тогда $MD_1 = MD_2$, точка D_2 принадлежит ребру A_1B_1.

Сумма отрезков ВМ и MD_2 достигает минимума, если точки В, М и D_2 лежат на одной прямой.

$P_{\text{сеч.}} = 2 \cdot (BM + MD_2) = 2BD_2$, $BD_2^2 = 10^2 + \left(5\sqrt{6}\right)^2 = 250$. Значит, $P_{\text{сеч.}} = 5\sqrt{10}$.

Далее определим угол между плоскостью основания и плоскостью сечения. Для этого развернем грань $\mathrm{DD_1C_1C}$ так, чтобы она совместилась с плоскостью грани $\mathrm{BB_1C_1C}$. Тогда $KD_1 = KD_3$, точка D_3 принадлежит прямой B_1C_1.

Угол между плоскостью (ABC) и секущей плоскостью равен углу между плоскостью верхнего основания параллелепипеда и плоскостью сечения. Линия пересечения плоскостей $(\mathrm{A_1B_1C_1})$ и α есть прямая D_2D_3. Проведем перпендикуляры в каждой из плоскостей к линии их пересечения. Треугольник $B_1D_2D_3$ – равнобедренный, прямоугольный, $B_1D_2 = B_1D_3 = 10$. Тогда $D_2D_3 = 10\sqrt{2}$. Высота треугольника, проведенная из вершины B_1, равна половине гипотенузы, т.е. $B_1H = 5\sqrt{2}$, где $B_1H \perp D_2D_3$.

Согласно теореме о трех перпендикулярах ВН также перпендикулярна D_2D_3. Из прямоугольного треугольника BB_1H находим линейный угол двугранного угла между плоскостями (ABC) и α.

$$\angle\left((ABC)\,,\,\alpha\right) = \varphi, \quad tg\varphi = \frac{BB_1}{B_1H}.$$

$$tg\varphi = \sqrt{3}, \ \text{ значит, угол } \ \varphi \ \text{ равен } \ 60^\circ.$$

Тема, касающаяся задач на нахождение наибольших и наименьших значений геометрических величин, интересна и достаточно обширна как с математической, так и с методической позиций. Она полезна как для учителей математики, так и для студентов. Материал может быть использован при подготовке школьников к конкурсным испытаниям, при проведении элективных курсов с учащимися и спецкурсов со студентами.

Библиографический список

1. Задачи вступительных экзаменов [Текст] / Сост. А.А. Егоров, В.А. Тихомирова. – М.: Квантум, 2008.

2. *Потоскуев, Е.В.* Геометрия. 11 кл.: задачник для общеобразовательных учреждений с углуб. и профильным изучением математики [Текст] / Е.В. Потоскуев, Л.И. Звавич. – М.: Дрофа, 2005.
3. *Шарыгин, И.Ф.* Сборник задач по геометрии . 5000 задач с ответами [Текст] / И.Ф. Шарыгин, Р.К. Гордин. – М.: Астраль, АКТ, 2001.

Диагностика сформированности компетенций в процессе обучения математике бакалавров менеджмента

О.В. Куликова

Формированию системы математического знания у студентов первых курсов, обучающихся по направлению подготовки бакалавра менеджмента, отводится достаточно большой объем времени. Реализация компетентностного подхода к обучению, представленная в образовательных стандартах третьего поколения, ставит перед преподавателем задачу о проектировании системы диагностики качества сформированных у студентов компетенций на материале преподаваемой учебной дисциплины. В нормативных документах понятие “компетенция” рассматривается как “способность применять знания, умения и личностные качества для успешной деятельности в определенной области” [7].

В стандартах второго поколения содержание дисциплины “Математика”, представленное в виде определенной совокупности дидактических единиц, условно распределяется на такие три модуля как математический анализ (МА), линейная алгебра (ЛА), теория вероятностей и математическая статистика (ТВ и МС) [3] (табл. 1).

В результате изучения дисциплины “Математика”, которая входит в базовую часть математического и естественнонаучного цикла (ЕН), бакалавр должен [7]:

– знать основные понятия и инструменты алгебры и геометрии, математического анализа, теории вероятностей, математической статистики;

– *уметь* решать типовые математические задачи, используемые при принятии управленческих решений, использовать математический язык и математическую символику при построении организационно-управленческих моделей;

– *владеть* математическими методами решения типовых организационно-управленческих задач.

Освоение элементов математической картины мира призвано сформировать у студента такую общекультурную компетенцию как “владение методами количественного анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования (ОК-15)” [7].

Таблица 1

Дидактические единицы дисциплины “Математика”

МА	**ЛА**	**ТВ и МС**
Понятие множества. Операции над множествами. Понятие окрестности точки. Функциональная зависимость. Графики основных элементарных функций. Предел числовой последовательности. Предел функции. Непрерывность функции в точке. Свойства числовых множеств и последовательностей. Глобальные свойства непрерывных функций. Производная и дифференциал. Основные теоремы о дифференцируемых функциях и их приложения. Выпуклость функции. Неопределенный интеграл. Несобственные интегралы. Точечные множества в N – мерном пространстве. Функции нескольких переменных, их непрерывность. Производные и дифференциалы функций нескольких переменных. Классические методы оптимизации. Функции спроса и предложения. Функция полезности. Кривые безразличия.	Системы линейных уравнений. Элементы аналитической геометрии на прямой, плоскости и в трехмерном пространстве. Определители. Системы векторов, ранг матрицы. N – мерное линейное векторное пространство. Линейные операторы и матрицы. Комплексные числа и многочлены. Собственные векторы линейных операторов. Евклидово пространство. Квадратичные формы. Системы линейных неравенств. Линейные задачи оптимизации. Основные определения и задачи линейного программирования. Симплексный метод. Теория двойственности. Дискретное программирование. Динамическое программирование. Нелинейное программирование.	Сущность и условия применимости теории вероятностей. Основные понятия теории вероятностей. Вероятностное пространство. Случайные величины и способы их описания. Модели законов распределения вероятностей, наиболее употребляемые в социально-экономических приложениях. Закон распределения вероятностей для функций от известных случайных величин. Неравенство Чебышева. Закон больших чисел и его следствие. Особая роль нормального распределения: центральная предельная теорема. Цепи Маркова и их использование в моделировании социально-экономических процессов. Статистическое оценивание и проверка гипотез, статистические методы обработки экспериментальных данных.

Анализируя составляющие педагогической технологии, направленной на усвоения учебного материала, В.П. Беспалько выделяет в структуре деятельности обучаемого четыре уровня, раскрывающие его способность решать различные задачи [1, с. 55-56]. *Первый* уровень – ученический (У), характеризуется умением решать задачи первого типа (известны цель, ситуация и действия, необходимые для достижения цели). *Второй* уровень – алгоритмический (А), требует проявления умений решать задачи второго типа (известны цель и ситуация, в которой необходимо продемонстрировать состав ранее усвоенных действий). *Третий* уровень – эвристический (Э), обязывает обучающегося уметь решать задачи третьего типа (известна только цель, а ситуацию и способ действия, который может привести к достижению поставленной цели, необходимо самостоятельно выбирать). *Четвертый* уровень – творческий (Т), отражает умение решать задачи четвертого типа (цель сформулирована в общем виде, поэтому, сначала требуется ее конкретизировать, а затем – сконструировать ситуацию и систему действий, обеспечивающую ее достижение).

Диагностировать уровни усвоения В.П. Беспалько предлагает в процессе решения задач различных типов. Решение задач первого и второго типов позволяет раскрыть сформированность репродуктивной учебной деятельности, которая предусматривает только воспроизведение ранее изученного материала. Структура продуктивной деятельности, связанная с генерацией новых идей, может найти свое отражение в решении задач третьего и четвертого типов. Стоимость задач устанавливается по равномерной дискретной двенадцатибалльной шкале. Задачи первого типа стоят от 1 до 3 баллов, задачи второго типа – от 4 до 6 баллов, задачи третьего типа – от 7 до 9 баллов, задачи четвертого типа – от 10 до 12 баллов [1, с. 67]. Если преобразовать дискретную двенадцатибалльную шкалу В.П. Беспалько в относительную непрерывную шкалу, то она может принять следующий вид: ученический уровень 0-0,25; алгоритмический уровень 0,26-0,50; эвристический уровень 0,51-0,75; творческий уровень 0,76-1.

Представляется целесообразным составить такую систему диагностики, в которую входили бы задачи всех четырех типов. Такая система контрольно-обучающих мероприятий (КОМ) создает благоприятные условия как для измерения качества сформированных знаний, умений и навыков, проявляющихся в репродуктивной деятельности, так и для измерения качества сформированных компетенций, раскрывающих свой потенциал в продуктивной деятельности по решению теоретических и прикладных задач.

Преподавание дисциплины “Математика” у бакалавров менеджмента осуществляется в течение трех первых семестров на основе материала традиционных учебников [2, 4-6] и включает, например, выполнение студентами следующих контрольно-обучающих мероприятий:

– *первый* семестр (контрольная работа “Исследование функции на непрерывность” (КР$_{11}$), тестирование “Производная функции” (Т$_{12}$), типовой расчет “Исследование функции и построение ее графика” (ТР$_{13}$), контрольная работа “Определение эластичности спроса и предложения” (КР$_{14}$), тестирование “Неопределенный интеграл” (Т$_{15}$), типовой расчет “Основные методы интегрирования” (ТР$_{16}$), лабораторная работа “Приближенное вычисление определенного интеграла с помощью математических функций Excel” (ЛР$_{17}$), тестирование “Дифференциальные уравнения” (Т$_{18}$), контрольная работа “Решение дифференциального уравнения спроса и предложения” (КР$_{19}$), коллоквиум “Дифференциальное и интегральное исчисления” (К$_{110}$);

– *второй* семестр (тестирование “Основы линейной алгебры” (Т$_{21}$), типовой расчет “Методы решения систем линейных алгебраических уравнений” (ТР$_{22}$), лабораторная работа “Анализ модели Леонтьева межотраслевого баланса с помощью математических функций Excel” (ЛР$_{23}$), тестирование “Основы векторной алгебры” (Т$_{24}$), лабораторная работа “Анализ модели сбалансированной бездефицитной торговли с помощью математических функций Excel” (ЛР$_{25}$), типовой расчет “Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве” (ТР$_{26}$), контрольная работа “Методы решения задач линейного программирования” (КР$_{27}$), лабораторная работа “Экономический анализ математических моделей задач линейного программирования в программе Excel “Поиск решения”” (ЛР$_{28}$);

– *третий* семестр (контрольная работа “Случайные события” (КР$_{31}$), тестирование “Случайные величины” (Т$_{32}$), лабораторная работа “Определение вида распределения с помощью статистических функций Excel” (ЛР$_{33}$), типовой расчет “Оценка параметров нормального распределения с помощью статистических функций Excel” (ТР$_{34}$), лабораторная работа “Определение параметров уравнения линейной регрессии с помощью статистических функций Excel” (ЛР$_{35}$), лабораторная работа “Анализ эффективности работы одноканальной системы массового обслуживания с отказами с помощью математических функций Excel” (ЛР$_{36}$), коллоквиум “Экономико-математические методы и модели” (К$_{37}$).

Содержание предлагаемой студентам работы дифференцируется по характеру учебной деятельности на репродуктивную (Р), продуктивную теоретическую (П) и продуктивную прикладную (П). Система задач с профессионально ориентированным содержанием, в которую входят КР$_{14}$, КР$_{19}$, ЛР$_{23}$, ЛР$_{25}$, ЛР$_{28}$, К$_{37}$, представляет собой систему заданий, выполнение которой направлено на формирование и диагностирование сформированности общекультурной компетенции ОК-15. Овладение методами количественного анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в этом случае распределяется на три этапа:

– решение учебных задач с элементами исследования экономических явлений (КР$_{14}$, КР$_{19}$);

– исследование математических моделей экономических явлений с применением программного обеспечения компьютера (ЛР$_{23}$, ЛР$_{25}$, ЛР$_{28}$);

– анализ использования математических методов моделирования в экономике (К$_{37}$).

Построение балльной шкалы оценивания позволяет наиболее адекватно отразить в количественных показателях содержание и значимость выполняемой студентами учебной работы. Если, например, максимальная стоимость овладения учебной дисциплиной определяется равной ста баллам, то возникает необходимость использования 100-балльной шкалы для оценки качества КОМ.

Обоснованное распределение ста баллов по всем КОМ связано с установлением методом экспертной оценки их степени значимости, которая пропорциональна их трудоемкости, зависящей от характера учебной деятельности. Например, степень значимости может быть средней (K_1),высокой (K_2) и очень высокой (K_3). Если средней степени значимости присвоить одну условную единицу K_1 =1 (ue),то высокой и очень высокой степени значимости целесообразно присвоить соответственно две и три условные единицы: K_2 =2(ue) и K_3 =3(ue).

Балльная стоимость условной единицы UE определяется делением ста баллов на стоимость всех КОМ по дисциплине, выраженную в ue. Балльная стоимость КОМ, в этом случае, вычисляется умножением балльной стоимости ue на стоимость ее степени значимости (табл. 2).

Применение относительной непрерывной шкалы оценивания для диагностики ученического (0-0,25), алгоритмического (0,26-0,50), эвристического (0,51-0,75) и творческого (0,76-1) уровней сформированности ОК-15 становится возможным при введении относительного коэффициента сформированности результатов обучения С, который вычисляется по формуле

$$\mathrm{C} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} q_i}{\sum\limits_{i=1}^{m} Z_i}, \tag{1}$$

где q_i – балльная оценка учебной работы студента за выполнение i-го КОМ, Z_i – максимальная бальная стоимость i-го КОМ, m – количество КОМ в системе диагностики сформированности результата обучения.

Таблица 2

Проектирование балльной стоимости КОМ по дисциплине "Математика"

№	КОМ	Учебная деятельность			Степень значимости КОМ			Стоимость (баллы)			
		Р	П	П	С 1 ue	В 2 ue	ОВ 3 ue	2	4	6	Z_i
1	КР$_{11}$	+	+			×			+		Z_1
2	Т$_{12}$	+			×			+			Z_2
3	ТР$_{13}$		+			×			+		Z_3
4	КР$_{14}$		+	+			×			+	Z_4
5	Т$_{15}$	+			×			+			Z_5
6	ТР$_{16}$		+			×			+		Z_6
7	ЛР$_{17}$		+			×			+		Z_7
8	Т$_{18}$	+			×			+			Z_8
9	КР$_{19}$			+			×			+	Z_9
10	К$_{110}$	+	+			×			+		Z_{10}
11	Т$_{21}$	+			×			+			Z_{11}
12	ТР$_{22}$		+			×			+		Z_{12}
13	ЛР$_{23}$			+			×			+	Z_{13}
14	Т$_{24}$	+			×			+			Z_{14}
15	ЛР$_{25}$			+			×			+	Z_{15}
16	ТР$_{26}$		+			×			+		Z_{16}
17	КР$_{27}$	+	+			×			+		Z_{17}
18	ЛР$_{28}$			+			×			+	Z_{18}
19	КР$_{31}$	+	+			×			+		Z_{19}
20	Т$_{32}$	+			×			+			Z_{20}
21	ЛР$_{33}$		+			×			+		Z_{21}
22	ТР$_{34}$		+			×			+		Z_{22}
23	ЛР$_{35}$		+			×			+		Z_{23}
24	ЛР$_{36}$		+			×			+		Z_{24}
25	К$_{37}$	+	+	+			×			+	Z_{25}
$\sum$					6	26	18	12	52	36	
$\sum$					50			100			

Относительный коэффициент сформированности С_{-15} общекультурной компетенции ОК-15, характеризующий качество изучения дисциплины “Математика”, вычисляется на основе результатов выполнения КР_{14}, КР_{19}, ЛР_{23}, ЛР_{25}, ЛР_{28}, К_{37}в течение трех семестров по следующей формуле

$$\text{С}_{\text{ОК}-15} = \frac{q_4 + q_9 + q_{13} + q_{15} + q_{18} + q_{25}}{Z_4 + Z_9 + Z_{13} + Z_{15} + Z_{18} + Z_{25}}, \tag{2}$$

где q_4, q_9, q_{13}, q_{15}, q_{18}, q_{25} – балльные оценки студента за выполнение соответственно КР_{14}, КР_{19}, ЛР_{23}, ЛР_{25}, ЛР_{28}, К_{37}; Z_4, Z_9, Z_{13}, Z_{15}, Z_{18}, Z_{25} – балльная стоимость соответственно КР_{14}, КР_{19}, ЛР_{23}, ЛР_{25}, ЛР_{28}, К_{37}.

Система контрольно-обучающих мероприятий, которая включает не только типовые дидактические задания, но и задачи с элементами исследования и творчества, создает преподавателю условия для диагностики уровней сформированности у студентов репродуктивной и продуктивной учебной деятельности. Такая система обладает многофункциональными возможностями по совершенствованию различных квалиметрических измерений качества результатов учебного процесса.

Библиографический список

1. *Беспалько, В.П.* Слагаемые педагогической технологии [Текст] / В.П. Беспалько. – М.: Педагогика, 1989. – 192 с.
2. *Кремер, Н.Ш.* Высшая математика для экономистов: учебник для вузов [Текст] / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин, М.Н. Фридман / под ред. Н.Ш. Кремера. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2001. – 471 с.
3. Государственный образовательный стандарт высшего профессионального образования. Направление 521500 “Менеджмент”. Степень (квалификация) – бакалавр менеджмента [Текст]. – М., 2000. – 19 с.
4. *Красс, М.С.* Основы математики и ее приложения в экономическом образовании: учебник [Текст] / М.С. Красс, Б.П. Чупрынов. – М.: Дело, 2002. – 688 с.
5. *Кремер, Н.Ш.* Теория вероятностей и математическая статистика: учебник для вузов [Текст] / Н.Ш. Кремер. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2004. – 573 с.
6. *Кремер, Н.Ш.* Практикум по высшей математике для экономистов: Учеб. пособие для вузов [Текст] / Н.Ш. Кремер, И.М. Тришин, Б.А. Путко и др. / под ред. Н.Ш. Кремера. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2003. – 423 с.
7. Федеральный государственный образовательный стандарт высшего профессионального образования по направлению подготовки 61 б – “Экономика”. Квалификация (степень) “Бакалавр” [Текст]. – М., 2009. – 28 с.

Исторические аспекты реализации преемственности школьного и вузовского математического образования

В.В. Липилина

Система работы с математически одаренными детьми, созданная бескорыстными энтузиастами советского времени и доведенная до уровня “ноу-хау”, оказалась, чуть ли не единственным рыночным продуктом российской системы математического образования востребованным на международном рынке. Этот “продукт” рождается при взаимодействии школьного и вузовского математического образования.

Эффективность взаимодействия школьного и вузовского образования в немалой степени зависит от решения проблемы организационно-педагогической совместимости учебного процесса в средних и высших образовательных учреждениях. К числу этих проблем можно отнести возможность применения различных форм повышенной математической подготовки школьников: факультативных занятий, школ и классов с углубленным изучением математики, олимпиады, школ юных математиков, заочных математических школ, подготовительных курсов при вузах, дополнительных занятий, репетиторства . Наиболее интенсивное развитие всех этих форм началось в шестидесятые годы двадцатого столетия. В первом десятилетии двадцать первого века появились различные формы сотрудничества средних образовательных учреждений с вузами (открытие классов, спрофилированных на конкретный вуз, конференции, научно-исследовательская работа и т.п.). Инициаторами организации таких новых форм подготовки школьников к продолжению образования являются вузы и университеты, а когда –то средневековые школы становились базой для возникновения университетов.

Преемственность школьного и университетского образования имеет свою давнюю историю. Вот что о средневековых школах и университетах пишет историк Л.Григорьев.

Переход от античности к средневековью сопровождался в Западной Европе глубоким упадком культуры. Не только варварские вторжения, добившие Западную Римскую империю, привели к гибели культурных ценностей древности. Не менее разрушительным стало для античного культурного наследия враждебное отношение со стороны церкви. Невежество царило в Западной Европе в V-X вв.

Монастырские и церковные школы представляли собой самые первые учебные заведения средневековья. И хотя христианская церковь сохраняла лишь выборочные, нужные ей остатки древней образованности (в первую очередь – латынь), именно в них продолжалась культурная традиция, связывавшая разные эпохи. Около трех лет требовалось для обучения письму. Кроме чтения и письма учились изображать числа с помощью пальцев, заучивали таблицу умножения, тренировались в церковном пении, зубрили латынь и выходили из стен школы полуграмотными, с основами католического вероучения.

Более крупные школы, дававшие образование посерьезней, возникали обычно при епископских кафедрах. В них, согласно сохранившейся римской традиции, изучали так называемые "семь свободных искусств" (грамматику, риторику, диалектику, арифметику, геометрию, астрономию и музыку). Система свободных искусств включала два уровня. Начальный состоял из грамматики, риторики, диалектики. Высший образовывали все оставшиеся свободные искусства. Самой трудной была грамматика. В риторике проходили правила синтаксиса, стилистики, упражнялись в составлении письменных и устных проповедей, писем, грамот, деловых бумаг. Диалектика (так тогда именовалось искусство мыслить, названное впоследствии логикой) учила не только рассуждать и делать выводы, но и находить в речи противника положения, противоречащие учению церкви, и опровергать их. Уроки арифметики знакомили со сложением и вычитанием, в меньшей степени – с умножением и делением (написание чисел римскими цифрами сильно затрудняло их). Школяры решали арифметические задачи, вычисляя время религиозных праздников и возраст святых. В цифрах видели религиозный смысл. Считали, что цифра "3" символизирует святую Троицу, а "7" – сотворение Богом мира в семь дней. За арифметикой следовала геометрия. Она давала лишь ответы на общие вопросы (что такое квадрат? и т. п.) безо всяких доказательств. В курсе геометрии сообщались и географические сведения, часто фантастические и нелепые. Изучали астрономию знакомились с созвездиями, наблюдали движение планет, Солнца, Луны, звезд, но объясняли его неправильно. Думали, что светила обращаются вокруг Земли по разным сложным путям. Астрономия должна была помочь вычислить сроки наступления церковных праздников. Занимаясь музыкой, ученики пели в церковном хоре. Обучение нередко растягивалось на 12-13 лет.

С XI века росло число церковных школ, стремительное развитие городов приводит к появлению светских городских частных и муниципальных (т. е. находящихся в ведении городского совета) школ. Влияние церкви было в них не так сильно. На первый план выступали практические потребности. Растущим городам и крепнущим государствам требовалось все больше образованных людей. Нужны были судьи и чиновники, врачи и учителя. К образованию все чаще приобщалась знать.

Пришел черед образования высших школ – университетов. Они возникали либо на основе бывших кафедральных (епископальных) школ (так появился в XII в. Парижский университет, выросший из школы, существовавшей при соборе Парижской Богоматери), либо в городах, где жили прославленные учителя, всегда окруженные способными учениками. Так из кружка последователей знаменитого знатока римского права Ирнерия развился Болонский университет. Занятия велись на латинском языке, поэтому немцы, французы, испанцы могли слушать итальянского профессора с не меньшим успехом, чем его соотечественники. На латыни общались студенты и между собой. Однако в быту "чужаки" вступали в общение с местными пекарями, пивоварами, хозяевами трактиров и сдатчиками жилья. Последние не знали латыни и были не прочь обсчитать и обмануть их. Поскольку студенты не могли рассчитывать на помощь городского суда в многочисленных конфликтах с местными жителями, они вместе с преподавателями объединились в союз, который и назывался "университет" (по-латыни – община, корпорация). В Парижский университет входило около 7 тыс. преподавателей и студентов, а помимо них членами союза являлись книготорговцы, переписчики рукописей, изготовители пергамента, перьев, чернильного порошка, аптекари и т.д. В долгой борьбе с городскими властями университеты добились самоуправления: они имели выборных руководителей и собственный суд. Преподаватели университетов создавали объединения по предметам – факультеты. Во главе их стояли деканы. Преподаватели и студенты избирали ректора – руководителя университета.

В XIV-XV вв. появляются так называемые коллегии (отсюда – колледжи). Сначала так называли общежития студентов. Со временем в них также стали проводиться лекции и диспуты. Коллегия, которую основал Робер де Сорбон, духовник французского короля, – Сорбонна – постепенно разрослась и дала свое название всему Парижскому университету. Последний был самой крупной высшей школой средневековья. В конце XV столетия было уже 79 университетов . Наиболее громкой славой пользовались Парижский, Болонский, Кембриджский, Оксфордский, Пражский, Краковский. Многие из них существуют и по сей день, заслуженно гордясь своей богатой историей и бережно сохраняя старинные традиции.

Университеты России в шестидесятых годах двадцатого века стали испытывать необходимость специального отбора будущих студентов на естественнонаучные и технические факультеты. Как раз в это время конкурсы на эти факультеты становились очень большими.

Специализированный учебно-научный центр (СУНЦ) МГУ образован в 1963 году выдающимися учеными математиками и физиками А.Н. Колмогоровым, И.К. Кикоиным и И.Г. Петровским с целью отбора и обучения старшеклассников из крупных городов и из глубинных регионов России, проявивших склонности в изучении естественных наук. СУНЦ организует школу-интернат № 18 физико-математического профиля при Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова. Занятия в школе проходят в форме лекций, семинаров и лабораторно-практических работ, которые проводят профессора и преподаватели естественных и гуманитарных факультетов МГУ, в том числе 12 докторов и 65 кандидатов наук, академик А.Н. Колмогоров читал в нем курсы лекций по различным разделам математики до начала 80-х годов прошлого столетия.

Разнообразие методик поиска одаренных детей, авторские учебно-воспитательские программы обусловили регулярное участие и победы наших школьников на олимпиадах и конференциях самых высоких уровней. Большая часть выпускников продолжают свое обучение на естественных факультетах МГУ.

Аналогичные школы-интернаты, при других вузах, имелись также в других городах СССР: Киеве, Новосибирске, Ленинграде, которые были основаны в СССР указом Совета Министров СССР в 1963-м году. После распада СССР аналогичная школа была создана в Екатеринбурге (во времена СССР – Свердловск), где также развиты гуманитарные специализации. В СУНЦ поступали талантливые школьники из многих областей Российской Федерации и Белоруссии.

Московская государственная пятьдесят седьмая школа ведет свою историю от Реального училища Статского советника Карла Мазинга, основанного в 80-х годах XIX века. Уже тогда это училище представляло одно из самых передовых средних учебных заведений научно-технического профиля г.Москвы. Традиции высокого уровня научно-технической подготовки выпускников сохранялись в школе в течение всего периода ее существования, а за последние 35 лет школа заняла ведущее место в России в области математического и физического образования. В школе разработаны и внедрены уникальные методики поиска, отбора, обучения и воспитания детей, особо одаренных в области интеллектуальной деятельности.

Ученики школы более 130 раз побеждали на Всесоюзных и Всероссийских школьных олимпиадах по математике и физике, 19 раз становились победителями Международных олимпиад. За последние 35 лет около 1000 выпускников школы стали студентами механико-математического и физического факультетов МГУ имени М.В. Ломоносова, более 350 выпускников поступили в Физико-технический институт. Среди окончивших школу – десятки кандидатов и докторов физико-математических наук. Школа получила международное признание.

При Ленинградском Физтехе к 1986 году организовали физико-техническую школу (ФТШ). В основе проекта лежала схема “базовая школа — базовые кафедры — базовый исследовательский институт”. Энтузиастом организации школы при Физтехе стал лауреат Нобелевской премии по физике академик Жорес Иванович Алферов, он явился Председателем Совета лицея.

Директор лицея "Физико-техническая школа" при Физико-техническом институте им. А.Ф. Иоффе Российской академии наук, замечательный преподаватель и интеллигентный человек Михаил Георгиевич Иванов считает, что отечественные физмат. школы являются, может быть, одним из самых ценных достижений советской образовательной системы. "Эти школы не имеют прецедента в мире", – говорит он.

Основная цель деятельности лицея – содействие формированию исследователя. Чтобы успешно заниматься исследовательской деятельностью, необходимы определенные качества, которые должны быть присущи лицеисту. Здесь упор сделали на шесть качеств:

– нестандартность – как мышления, так и личности (независимость мышления, интуиция, воображение, одаренность):

– мотивация к исследовательской деятельности (энтузиазм, настойчивость, сосредоточенность на задаче):

– интеллект (логика, память, абстрагирование, концентрация внимания):

– этика (принципы, управляющие поведением):

– контакт со средой (наблюдательность, технические навыки):

– социальность (понимание себя и других, организация других, лидерство).

До появления лицея ФТШ Российская академия наук не имела собственных учебных заведений. Академия и Министерство образования существовали порознь. Таков был типичный советский путь строгого разделения фундаментальной академической науки и образования. Типичный западный путь, в особенности американский, – сосредоточение именно в университетах фундаментальной науки. Это разумная мысль: учить должны те, кто сами делают реальную науку, а учиться полезнее, и эффективнее, если ученик не отрывается от разработчиков научных достижений.

И вот в нашей стране сделан важный шаг – рядом с лицеем строится новое здание Физико-технологического университета Российской академии наук. Теперь уже не только лицей, но и университет стал образовательным учреждением РАН. Созданием в Санкт-Петербурге средней специальной и высшей школ под эгидой Академии наук преследовалось несколько целей. Во-первых, лицей "Физико-техническая школа" становится отныне естественным звеном в системе непрерывного образования; во-вторых, происходит важное кадровое пересечение университетских и лицейских преподавателей, которые смогут одновременно участвовать в школьном процессе и, учитывая особенности собственных учебных программ, производить (в случае надобности) их стыковку. Но это еще не все: в одном потоке сливаются две струи – струя научная и струя образовательная.

Примерно половина выпускников поступает на базовые кафедры Физтеха. Еще треть – на другие физические и математические факультеты университетов. Продолжают образование в университетах США, Швеции, Израиля, Англии, Франции, Германии, Дании.

Математические классы и школы в шестидесятых годах 20 века организуются не только в больших университетских центрах, но и в небольших городах, там, где находились талантливые учителя математики и физики. Часто не удавалось оформить такие классы официально. Часы для углубленного изучения математики, физики выкраивались из учебного плана за счет факультативных занятий. Но обучение велось на самом высоком уровне. (Автор этих строк была выпускницей второго математического класса сш. № 17 г. Уральска, где математику преподавали Г.П. Щучкин, В.Д. Череватов, и выпускницей ВЗМШ. Позже автор сама была инициатором создания математических классов, физико-математического лицея.)

В середине 60-х годов в МГУ и многих других вузах страны существовало много форм работы со школьниками, интересующимися математикой. Однако приспособлены они были, главным образом, для школьников крупных городов. Чтобы помочь тысячам школьников из отдаленных сел и городов найти свой путь к математике, разбудить их интерес к занятиям, научить работать с книгой потребовалась новая форма работы. Такой формой стало заочное, или как сейчас принято говорить, дистанционное обучение.

Всесоюзная заочная математическая щкола стала первой в нашей стране заочной школой. Изначально школа была математической. Постепенно она расширялась, возникли отделения биологии, физики, филологии химии, экономики, истории и правоведения. Именно с этим связано изменение названия школы – “Всероссийская заочная многопредметная школа”.

ВЗМШ – достойное дитя хрущевской оттепели 60-х. Создавалась инициативой, трудом и талантом незаурядных людей своего времени, энтузиастов и профессионалов высокого класса, двух выдающихся отечественных математиков, ректора МГУ академика И.Г. Петровского и академика И.М. Гельфанда, который долгие годы возглавлял Научный совет ВЗМШ.

Среди скромных людей, которые двигали и двигают это великое дело нельзя не назвать бессменного директора ВЗМШ В.Ф. Овчинникова, членов научного совета Е.Г. Глаголеву, М.Б. Беркинблита, первого завуча П.И. Массарскую.

Заочной школе требовались пособия, приспособленные специально для такого обучения. И.М. Гельфанду удалось собрать превосходную команду математиков и педагогов. В числе первых авторов были А.А. Кириллов, Н.Х. Розов (ныне декан факультета педагогического образования МГУ, член-корреспондент Российской академии образования), Е.Г. Глаголева (кандидат педагогических наук, ученый секретарь Научного совета ВЗМШ).

А для обеспечения массовости охвата учащихся требовалось много преподавателей. Для этих целей были привлечены студенты, аспиранты и молодые ученые мех-мата МГУ, а затем и других вузов. Среди них ныне известные математики, авторы многочисленных пособий Ж.М. Раббот, Н.Б. Васильев, В.Л. Гутенмахер, А.А. Егоров, А.Л. Тоом и многие, другие люди, влюбленные в свое дело.

Практически с первого года работы начали открываться большие возможности, заложенные в этом способе обучения. Большой интерес, вызванный заочной школой среди школьных учителей, привел к возникновению и реализации идеи “Коллективного ученика” – школьного кружка, работающего под руководством учителя по тем же программам, что и индивидуально занимающиеся ученики. Удачную идею быстро подхватили, и вскоре в стране работали десятки заочных школ, в том числе и филиалы ВЗМШ.

Один из таких филиалов возник в Казахстане, в городе Уральске на физико-математическом факультете Государственного педагогического института им. А.С. Пушкина благодаря инициативе и энтузиазму кандидата физико-математических наук Ю.К. Суетина. В течении 15 лет автор этой статьи являлась руководителем и организатором работы Уральского филиала ВЗМШ. В 70-80-е годы двадцатого столетия этот филиал был одним из самых многочисленных в стране. В нем занимались старшеклассники со всего Казахстана. Количество учеников на двух потоках достигало 300.

Работа филиала была организована по примеру ВЗМШ при МГУ. Для педагогического вуза очень удачной оказалась возможность непосредственной постоянной практики студентов. Особенным образом была организована методическая работа со студентами, готовились методические пособия для них по проверке работ учащихся. Одновременно на протяжении многих лет в Уральском филиале существовала еще одна популярная для тех лет форма повышенной математической подготовки школьников – летние математические школы. Выпускники филиала-старшеклассники Казахстана приглашались на 15 дней в ЛМШ, которая обычно проходила на турбазе “Уральская” на высоком берегу Урала. Для работы в ней также привлекались студенты-математики 2-3 курсов. Работа таких школ – отдельная интереснейшая страница истории преемственности школьного и вузовского математического образования.

При Национальном исследовательском ядерном университете “МИФИ” более 40 лет существует своя заочная школа. Заочная школа МИ-

ФИ – один из лидеров в предоставлении образовательных услуг с применением заочной дистанционной технологии. Школа рассчитана на тех, кто стремится овладеть дополнительными знаниями самостоятельно. За последние 10 лет услугами Школы воспользовались более 100 тысяч человек.

Главное при заочном обучении привить школьнику умение самостоятельно работать с книгой, приучить к систематическому умственному труду. Нельзя не сказать еще об одном очень важном аспекте заочного обучения. Поскольку такая форма обучения требует письменного изложения, то это помогает школьнику развивать культуру мышления и речи.

В последние годы, когда в нашей стране все усиливающимися темпами наступает компьютеризация, проникая практически во все области жизни, в частности – в образование, претерпевает сильнейшие изменения и заочное образование, все более сближающееся с дистантным в традиционном (западном) понимании. Возникают два важнейших аспекта, в которых можно рассматривать этот процесс: во-первых, компьютер дает возможность изменить технологию общения учителя с учеником при заочном образовании, во-вторых, интерактивный курс – это не просто текст на экране компьютера, это сочетание теории, тренингов и зачетов.

Все эти формы активно работали в годы наибольшей популярности естественнонаучных и технических специальностей вузов. В перестроечные и постперестроечные годы популярность этих специальностей резко падает (как известно, с этого времени популярностью пользуются экономические и юридические специальности).

В университетах и вузах проблемой стало привлечение абитуриентов на физические и математические факультеты. Теперь преемственность стала носить несколько иную направленность – работа со школьниками, проявляющими интерес к математике и физике, сохранение их интереса к предметам и подготовка к продолжению образования. Проблема усугубляется еще и низкой рождаемостью в предыдущие десятилетия, малым количеством выпускников школ.

Автор этой статьи на протяжении многих лет являлась активным участником процесса преемственности школьного и вузовского математического образования в различных формах: организатором специализированных математических классов и физико-математического лицея в г. Уральске (Западно-Казахстанская область), работа в Начальной Инженерной школе и школе-лицее для одаренных детей Оренбуржья при Оренбургском государственном университете, университетских физико-математических классов, в которых кроме того на протяжении многих лет преподавала математику, осуществляла привлечение школьников города и области к научно-исследовательской деятельности при кафедрах математического факультета ОГУ, участию в конференциях, конкурсах, олимпиадах и турнирах.

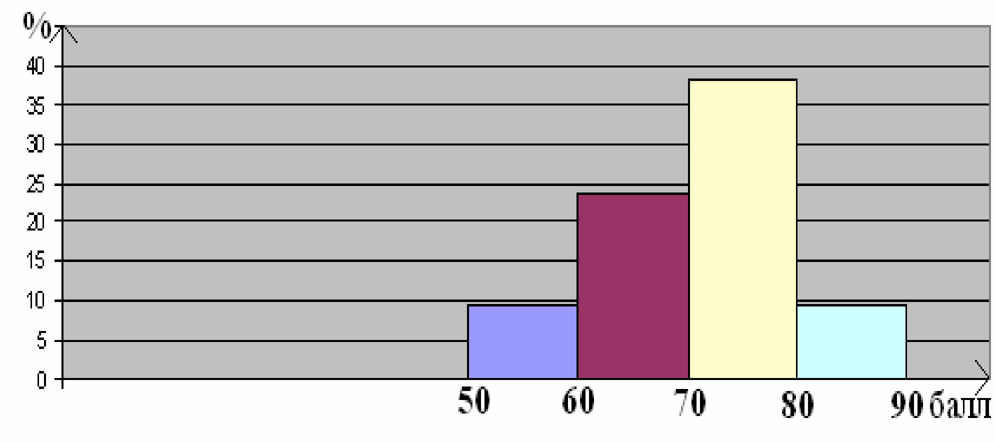
Используя опыт своей практической деятельности можно привести пример осуществления преемственности школьного и вузовского математического образования в этой уже новой реалии.

Идея создания университетских профильных классов на базе сш. № 7 г. Оренбурга стала реализовываться в 2002 г. Необходимость создания профильных классов в школе была обусловлена несколькими основными факторами: с одной стороны соответствию концепции модернизации российского образования на период до 2010 года, по которой на старшей ступени общеобразовательной школы предусматривалось профильное обучение, с другой – желанием родителей и, конечно, самих учащихся изучать углубленно ряд предметов в обычной общеобразовательной школе, и потребностью в более основательной подготовке учащихся к поступлению в высшее учебные заведения.

Преподавание в профильных классах физики, математики, информатики, а также элективных курсов осуществляется по авторским программам, утвержденным на кафедрах математического и физического факультетов, преподавателями, доцентами Оренбургского государственного университета. Часть занятий лабораторного практикума проводят на базе университета. За два-три года обучения в математической школе учащийся привыкает не только к стенам университета, но и адаптируется к вузовскому учебному процессу.

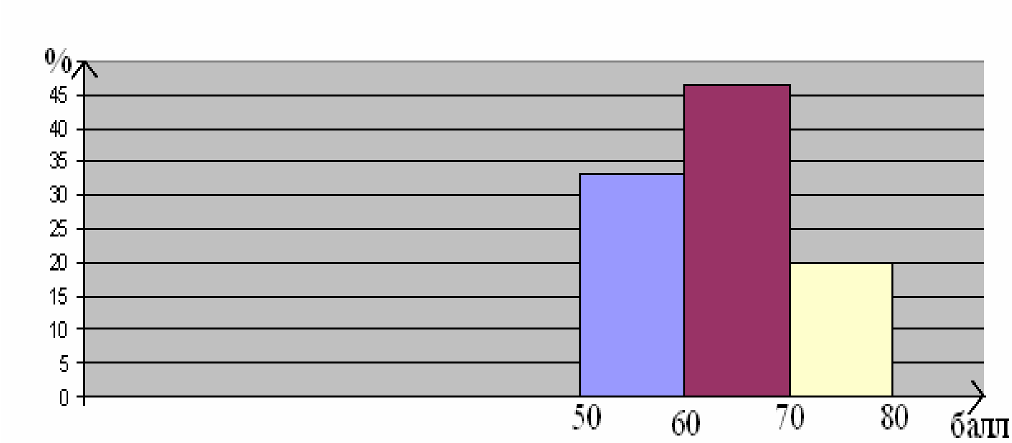
За три первых года эксперимента проведено два первых выпуска (21 и 16 человек) учащихся профильных классов, обучавшихся по двухлетней программе сш. № 7 и все выпускники стали студентами вузов.

**Выпуск физико-математического класса сш. № 7 в 2004 году
Результаты ЕГЭ по математике**



Выпуск – 21 человек. Поступили: в ОГУ – 17.

Выпуск физико-математического класса сш № 7 в 2005 году Результаты ЕГЭ по математике



Выпуск – 16 человек. Поступили в ОГУ – 9.

Замечание: средний балл ЕГЭ по математике по Оренбургу – 53 балла.

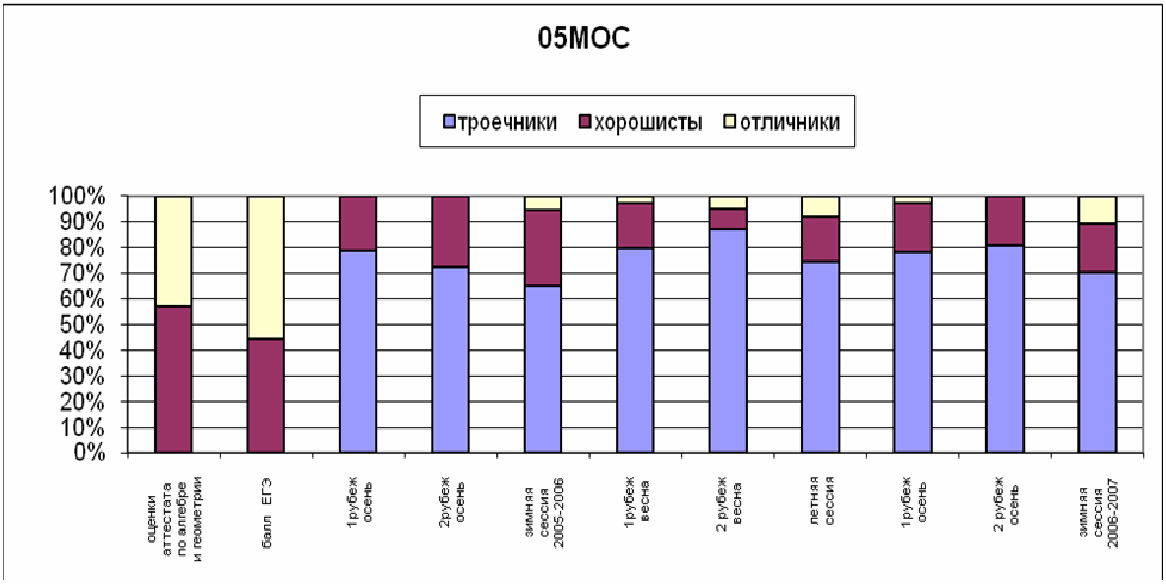
Основной и ведущей целью работы физико-математических классов является подготовка учащихся к продолжению образования, понимаемой в широком смысле как подготовка к успешному дальнейшему обучению. Содержание, формы и методы обучения в физико-математических классах развивают более высокий уровень умений, более сознательное овладение математическими понятиями, развивают прикладной характер в направлении понимания роли математического аппарата в приложениях, развивают владение математическим методом, как инструментом познания действительности. Мы стремимся сохранить фундаментальный, классический стиль преподавания математики в специализированных классах, в университете.

Несколько лет на базе математического факультета работает также воскресная математическая школа для учащихся 10-11 классов (в этих классах также преподают преподаватели, доценты математических кафедр университета)

С целью создания интегрированной образовательной системы, решения проблем преемственности среднего и высшего профессионального образования, обеспечения научно-теоретического и практического управления образовательным процессом в университетских физико-математических классах на базе сш. № 7 создан филиал кафедры алгебры университета. Сотрудники кафедры ведут индивидуальную работу с любым школьником, приходящим для консультаций по выполнению своих научных работ. За 2-3 года обучения в университетских математических классах учащиеся привыкают не только к стенам университета, но и адаптируется к вузовскому учебному процессу, привыкают к кафедре, к факультету и, естественно, при поступлении отдают предпочтение факультетам ОГУ.

Успешное обучение в вузе предполагает умение учащихся синтезировать междисциплинарные связи, наличие систематизированных знаний, глубокое и свободное владение теоретическим материалом и математическим аппаратом, достаточного для изучения математики на более высоком уровне абстракции и, как следствие, умение применить полученные знания в практической деятельности.

Опыт показывает, что выпускники физико-математических классов не только успешно поступают в вузы, но являются самыми успешными студентами на протяжении всех лет обучения в вузе, их оценочный рейтинг ***не снижается ни в период адаптации на первом курсе, ни на старших курсах. Они являются активными участниками научных семинаров, конференций*** различного уровня, математических олимпиад и турниров. Некоторые из первых выпускников уже стали аспирантами МИФИ и ОГУ. На математическом факультете Оренбургского университета в течение последних пяти лет ведется мониторинг успеваемости, качества обучения, успешности студентов, окончивших математические школы и классы, участников олимпиад, турниров и конференций.



На диаграмме – успеваемость студентов специальности Математическое обеспечение информационных систем математического факультета ОГУ, поступивших в 2005 году за три семестра. Необходимо обратить внимание на то, что множество “отличников” и “хорошистов” всегда инвариантно – его составляют выпускники университетских математических классов.

Библиографический список

1. *Смирнов, Е.И.* Технология наглядно-модельного обучения математике [Текст]: монография / Е.И. Смирнов. – Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 1998. – 313 с.
2. *Афанасьев, В.В.* Формирование творческой активности студентов в процессе решения математических задач [Текст]: монография / В.В. Афанасьев. – Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 1996. – 168 с.

Педагогические вузы на пороге внедрения ФГОС (федеральных государственных стандартов общего образования) второго поколения

Н.М. Епифанова

В 2005-2006 гг. в стране был проведен широкомасштабный мониторинг выпускников школ, результаты которого были весьма неутешительны [2].

Мониторинг обозначил проблемы не столько выпускников общеобразовательных школ, сколько всей структуры и содержания общего образования. Стала очевидной необходимость создания новых стандартов, которые бы определили:

– самостоятельные виды деятельности, а не только предметные умения и навыки, включающие практическое использование предметных и социальных знаний, накопленных в процессе образования;

– требования, прежде всего, к системе образования, а не к ученику.

В основу переустройства системы образования были положены принципы, закрепленные Законом РФ от 10.07.1992 № 3266-1 “Об образовании” [1].

Основу организации деятельности системы образования в новых условиях, по мнению разработчиков данных стандартов [3], должна составлять система “Трех Т” (требования к *результатам* освоения основных образовательных программ, требования к *структуре* основных образовательных программ, требования к *реализации* основных образовательных программ). Система “Трех Т” предполагает наличие

– квалифицированных учительских кадров;

– зданий, соответствующих СНиПам и санПиНам;

– соответствующей материально-технической базы, библиотек, информационных ресурсов, спортивных сооружений,. . .

Принципиальное отличие новой концепции стандарта состоит “в попытке реализовать средствами стандарта личностную ориентацию образования, его деятельностно – практическую и культурологическую составляющие, сохранив традиционную фундаментальность и универсальность” [5].

Согласно положению о ФГОС (федеральных государственных образовательных стандартов общего образования), приоритеты общего образования должны остаться прежними – “формирование общеучебных умений и навыков” [2]. И это очень важно. Российская школа всегда стремилась дать ученикам прочные знания, умения и навыки. Но в стандартах второго поколения “на первое место выходят не только требования к результатам образования, но и квалифицированные процедуры подтверждения соответствия реально достигнутых результатов ожидаемым” [3].

С сентября 2008 г. в ряде регионов начался эксперимент по апробации ФГОС второго поколения.

К сожалению, эксперимент начался без наличия хорошо подготовленной материальной базы, без наличия соответствующего методического обеспечения, без организованной системы переобучения учительского контингента... Вся нагрузка за процесс реализации ФГОС вновь ложится на педагогов. Им придется пересмотреть свою работу, освоить новые методы, принять, практически осуществить то, о чем всегда говорилось (научить самостоятельной деятельности), но не оценивалось в качестве одного из основных компонентов обученности учащихся. Удастся ли это сделать, покажет практика. Конечно, авторы и разработчики ФГОС основные надежды связывают с молодым поколением учителей, на которых ляжет основная тяжесть апробации и формирования новой системы образования. И задача педагогических вузов по возможности подготовить будущих учителей к выполнению данной миссии.

Поделимся некоторым опытом работы по подготовке будущих педагогов к работе в условиях новых требований системы образования.

1. Согласно ФГОС должна быть существенно изменена роль допредметного, надпредметного и метапредметного содержания образования. Много внимания предполагается уделять организации внеурочной (внеучебной) деятельности учащихся на основе вариативной составляющей базисного учебного (образовательного) плана. Поэтому на занятиях по методике будущие учителя знакомятся с методическими приемами

– проведения предметных экскурсий, “круглых столов”, диспутов, КВНов, предметных конференций, олимпиад...,

– организации работы школьных научных обществ, проведения кружковых занятий, элективных курсов,

– организации поисковых и научных исследований учащихся…

А в ходе педагогической практики студенты не только знакомятся с опытом организации данных видов деятельности в школе, но и принимают активное участие в проведении олимпиад, кружковых занятий. Многие дипломные работы выпускников посвящены разработке того или иного элективного курса для учащихся. На занятия по МПМ (методике преподавания математики) студенты приобретают пусть и мизерный, но все же опыт проведения предметных экскурсий, знакомятся с программами школьных научных конференций, предметных недель; планами работы школьных научных обществ. В последнее время на занятиях больше внимания уделяется обучению студентов приемам организации поисковых и научных исследований школьников. В силу сложности предмета математики, к сожалению, менее всего студентами приобретается опыт проведения дискуссий и “круглых столов”.

На кафедре силами студентов накоплен достаточный дидактический материал для организации и проведения разных видов внеурочной деятельности учащихся, который востребован не только студентами в ходе педагогической практики, но и учителями математики области. Наибольшей популярностью пользуются материалы для проведения школьных научных конференций (например, конференций “Математики Ярославского края”, “Математика в архитектуре ярославских зданий”), банк тем (с кратким содержанием занятий) для проведения заседаний школьного научного общества.

2. На занятиях по МПМ педагоги кафедры много сил и внимания уделяют формированию у студентов навыков, направленных на формирование учебной деятельности школьников, а не на передачу им учебной информации; навыков, позволяющих повысить степень самостоятельности учащихся на уроке, развить мотивационную сферу деятельности учащихся, повысить их инициативу и активность… С этой целью на занятиях используются такие приемы, как

– проведение студентами сравнительного анализа введения одного и того же понятия разными способами,

– написание конспекта урока “под конкретного ученика”,

– “анализ конспекта урока товарища”.

Так, анализируя конспект урока, написанный товарищем, студенты должны обратить внимание на следующие моменты:

– было ли в ходе урока запланировано обращение к ранее накопленным знаниям и умениям учеников;

– в конспекте преобладают задания для учащихся репродуктивного или продуктивного характера;

– проведена ли мотивация введения новой темы, нового задания;

– методически грамотно ли организована самостоятельная деятельность учащихся;

– запланировано ли создание ситуации самостоятельного поиска ответа на поставленный учителем вопрос;

– какие приемы предполагается использовать для побуждения учеников к самоанализу деятельности, самоконтролю, для введения учащихся в диалог;

– как предполагается организовать деятельность учащихся по обучению решению задач базового и повышенного уровней сложности;

– какие умения учащихся предполагается отследить при решении ими на уроке той или иной задачи, упражнения... (табл. 1).

3. На занятиях по методике преподавания математики (МПМ) студенты овладевают первичными навыками анализа содержания урока математики, в том числе и с точки зрения “формирования общих ключевых компетенций” учащихся:

– *ценностно-смысловых* (умение выбирать целевые и смысловые установки для своих действий, принимать решения);

– *общекультурных* (овладение опытом освоения научной картины мира, осознания роли национальной и общечеловеческой культуры..);

– *учебно-познавательных* (умение организовать целеполагание, планирование, анализ, проводить рефлексию, самооценку учебной деятельности, овладение навыками продуктивной деятельности, эвристическими методами решения проблем, вероятностными, статистическими методами познания, измерительными навыками...);

– *информационных* (умение самостоятельно искать, анализировать и отбирать необходимую информацию, организовывать, преобразовывать, сохранять и передавать ее);

– *коммуникативных* (овладение различными социальными ролями в коллективе, овладение умением задать вопрос, вести дискуссию...);

– *социально-трудовых* (овладение знаниями и опытом в вопросах экономики и права...);

– *личностного совершенствования* (освоение способами совершенствования личностных качеств, культуры мышления и поведения...).

Неоценимым помощником в приобретении студентами навыков выявления уровня сформированности ключевых компетенций учащихся может стать использование на занятиях по методике видеофрагментов уроков математики и педагогической матрицы “Лестница учебных достижений: знаю, умею, могу” Т.И. Шамовой [2].

Таблица 1

Текст задачи, решаемой учащимися на уроке	Уровень задачи	Проверяемые умения
Вычислить: 2072:37+231*101- 57	Задание базового уровня	Умение выполнять арифметические действия с использованием изученных алгоритмов (сложение, вычитание, умножение и деление на однозначное, двузначное числа в пределах 10 000)
Для подарков купили 199 конфет. В каждый подарок надо положить по 5 конфет. Сколько конфет останется?	Задание базового уровня	Умение понимать смысл деления с остатком, выделять неполное частное и остаток
Скорость пешехода от поселка до станции, расстояние между которыми 4 км, была на 1 км/ч больше, чем на обратном пути. Время его обратного пути на 12 мин больше. Чему равна скорость пешехода? Пусть км/ч скорость пешехода от поселка до станции. Какое из уравнений соответствует условию задачи? А. $\frac{4}{+1} - \frac{4}{} = \frac{1}{5}$В. $\frac{4}{} - \frac{4}{-1} = 12$ Б. $\frac{4}{-1} - \frac{4}{} = \frac{1}{5}$ Г. $\frac{4}{-1} - \frac{4}{} = 12$	Задание базового уровня	Умение оценивать правильность хода решения, анализировать решение с точки зрения его реальности

Обычно на занятии по МПМ при просмотре видеофрагмента урока математики студенты делятся на четыре группы. Первой группе предлагается провести наблюдение за деятельностью учителя по формированию общеучебных умений и навыков учащихся по следующим показателям:

- развитие монологической речи в соответствии с требованиями программы,
- систематическое вовлечение школьников в диалог,

- работа по совершенствованию устной и письменной речи,
- обучение использованию интернет-ресурсов...

Остальные группы отслеживают уровень проявления в деятельности учащихся того или иного критерия: учебно-познавательного, информационно-коммуникативного или рефлексивного. Так репродуктивный и достаточно-необходимый уровни проявления информационно-коммуникативного критерия студентами отслеживаются (табл. 2) по следующим показателям.

Таблица 2

Уровни проявления *репродуктивный*	Уровни проявления *достаточно-необходимый*
• Осознанное беглое чтение текстов различных стилей и жанров, проведение информационно-смыслового анализа текста. • Использование различных видов чтения (ознакомительное, просмотровое, поисковое...). • Создание письменных высказываний, адекватно передающих прослушанную и прочитанную информацию с заданной степенью свернутости (кратко, выборочно, полно). • Выбор и использование выразительных средств языка и знаковых систем (текст, таблица, схема, аудиовизуальный ряд:) в соответствии с коммуникативной задачей, сферой и ситуацией общения	• Адекватное восприятие устной речи и формирование способности передавать содержание прослушанного текста в сжатом или развернутом виде в соответствии с целью учебного задания. • Создание с помощью учителя письменных высказываний, адекватно передающих прослушанную и прочитанную информацию с заданной степенью свернутости (кратко, выборочно, полно). • Умение перефразировать мысль (объяснить “иными словами”) по образцу, предложенному учителем

После просмотра видеофрагмента урока математики организуется его обсуждение, заслушиваются выступления представителей каждой группы.

При просмотре следующего видеофрагмента отслеживают уровень проявления в деятельности учащихся других критериев.

На старших курсах студенты овладевают более сложными процедурами оценки деятельности учащихся на уроке математики. Так, после просмотра семиминутного видеофрагмента урока “Обучение учащихся 5 класса приемам решения текстовых задач на движение” студентам предлагается заполнить следующую таблицу (табл. 3).

Таблица 3 (фрагмент)

Компоненты приема	Содержание компонентов приема	Оценка эффективности использования данного приема на уроке (1,2, 3 балла)
1. Анализ текста задачи	1. *Семантический анализ* предполагает выделение и осмысление в тексте задачи: – отдельных слов, терминов, понятий как житейских, так и математических; – грамматических конструкций (“если…то”, “после того, как...” и т. д.); – количественных характеристик объекта, задаваемых словами “каждого”, “какого-нибудь” и т.д.; – восстановления предметной ситуации, описанной в задаче, путем переформулирования, упрощенного пересказа текста с выделением только существенной для решения задачи информации; – выделение общего смысла задачи – о чем говорится в задаче, указание на объект и величину, которая должна быть найдена (путь, скорость, время, количество…и т.д.). 2. *Логический анализ* предполагает: – умение заменять термины их определениями; – умение выводить следствия из имеющихся в условии данных (понятия, процессы, явления).	

	3.*Математический анализ* включает анализ условия и требования задачи. Анализ **условия** направлен на выделение: ◇ объектов (процессов, предметов): – рассмотрение объекта с точки зрения целого и частей, – рассмотрение количества объектов и их частей; ◇ величин, характеризующих каждый объект; ◇ характеристик величин: – однородные, разнородные, – числовые значения (данные), – известные и неизвестные данные, – изменения данных: изменяются (как изменяются), не изменяются, – отношение между известными данными величин. Анализ **требования** направлен на выделение: – неизвестных количественных характеристик величин объекта(ов)	
2. Перевод текста на язык математики с помощью вербальных, невербальных средств	....	

В результате проведения цикла таких занятий у студентов складывается единая и достаточно полная картина о требованиях, предъявляемых обществом к результатам образования на той или иной ступени обучения. Кроме того, они овладевают некоторыми процедурами оценки качества освоения учащимися общеобразовательных программ и их соответствия планируемым результатам образования на уровне требований стандарта.

В заключение следует отметить, что администрация, учителя математики школ города и области положительно отзываются о работе кафедры по подготовке студентов к педагогической деятельности в условиях радикальных изменений, происходящих в образовании, отмечая не только хорошую теоретическую и высокую техническую подготовленность студентов, но и

– компетентность студентов в вопросах методики проведения уроков в условиях новых требований,

– знание студентами процедур отслеживания уровня компетентности учащихся,

– владение приемами проведения самоанализа, рефлексии, контроля и оценки своей деятельности.

Библиографический список

1. Закон РФ от 10.07.1992 № 3266-1 “Об образовании” [Текст].
2. Личностно ориентированный урок: конструирование и диагностика [Текст] // Завуч. Управление современно. – № 2.
3. Концепция федеральных государственных образовательных стандартов общего образования [Текст] / под ред. А.М. Кондакова, А.А. Кузнецова. – М.: Просвещение, 2008.
4. Планируемые результаты начального общего образования / под ред. Г.С. Ковалевой, О.Б. Логиновой [Текст]. – М.: Просвещение, 2010. (Стандарты второго поколения).
5. Приказ Министерства образования России от 05.03.2004 № 1089 “Об утверждении федерального компонента государственных образовательных стандартов общего, основного и среднего (полного) общего образования” [Текст].
6. *Федосеева, Н.А.* Инновации и перемены [Текст] / Н.А. Федосеева // Управление начальной школой. – № 0/2008.
7. Фундаментальное ядро содержания общего образования / под ред. В.В. Колосова, А.М. Кондакова [Текст]. – М.: Просвещение, 2009. (Стандарты второго поколения).
8. *Хуторской, А.В.* Определение общепредметного содержания и ключевых компетенций как характеристика нового подхода к конструированию образовательных стандартов [Текст]. – М.: Просвещение, 2009.

Особенности и проблемы математического образования в Национальном университете Руанды

Д.Ю. Кузнецов

Всегда интересно и поучительно сравнивать образование в различных вузах и в различных странах. Имея более чем двухлетний опыт преподавания математики в Национальном университете Руанды (НУР, г. Бутаре), я имею возможность изложить проблемы и особенности математического образования в этом университете.

Одной из основных проблем является существенная дифференциация в базовом уровне математической подготовки студентов. Связано это, в частности, со структурой школьного образования. Общеобразовательная школа разделяется на 2 ступени – обязательное 6-летнее начальное общее обучение (primary school) и 6-летнее полное среднее специализированное обучение (secondary school) – 3 года общего обучения и 3 года специализации (high school). Зачисление в вузы проводится без вступительных экзаменов на основе конкурса выпускных баллов школы. При этом на физико-математические специальности могут поступить выпускники с различной специализацией (биология-химия, агрономия, животноводство, делопроизводство, филология и т.д.), она лишь отчасти учитывается при централизованном государственном распределении выпускников школ по различным вузам. Таким образом, уровень студентов первого курса оказывается очень разнородным. В частности, если выпускники школ со специализацией "математика-физика" проходят обучение по программе, примерно соответствующей программе общего курса математики вуза для нематематических специальностей (основы линейной алгебры и аналитической геометрии, комплексные числа, основы дифференциального и интегрального исчисления, функции нескольких переменных и частные производные, числовые и степенные ряды, введение в обыкновенные дифференциальные уравнения, теория вероятностей и математическая статистика), то математическая подготовка выпускников школ по другим специализациям (особенно гуманитарным и сельскохозяйственным) не соответствует общеобразовательным стандартам (уровень неполного среднего образования).

Другой проблемой является превалирование в общеобразовательной школе репродуктивных методов обучения, практически не рассматриваются доказательства утверждений и теорем в курсе математики, не отрабатываются навыки логического, творческого мышления. Однако при этом студенты в большинстве своем сообразительны, имеют хорошую память, способны запомнить большой объем материала. Интересны результаты исследования на IQ (тест Равена) и локус контроля, проведенного в НУРе среди студентов 1 курса инженерного факультета и факультета науки (общий объем выборки 96 человек). Средний показатель IQ среди испытуемых равен 100, что соответствует верхней планке средних значений. Этот показатель практически не коррелирует с результатами экзамена по математике (незначимая корреляция Пирсона r = 0,06). В то же время наблюдается значимая на уровне 0,01 отрицательная корреляция показателя IQ с возрастом (r = –0, 37). Заметим, что спецификой вузов Руанды является больший возраст студентов в сравнении с российскими вузами (средний возраст студентов первого курса в исследуемой выборке – 22 года), и большая дифференциация студентов по возрасту (19-28 лет).

В социальном плане образование в Руанде ценится очень высоко. Как правило, занять соответствующее положение в той или иной престижной социальной группе (работа в государственных учреждениях, участие в международных гуманитарных и экономических проектах) можно, только имея соответствующий уровень образования (бакалавр, магистр, PhD). Кроме того, образование дает потенциальную возможность трудоустройства или продолжения обучения в других странах. Это определяет высокую мотивацию обучения и исполнительскую дисциплину студентов.

Спецификой Национального университета Руанды также является большое количество студентов в группах (иногда 100-150 человек), при этом зачастую нехватка учебных аудиторий и тъюториал-ассистентов не позволяет проводить практические занятия по подгруппам. Таким образом, для лектора при работе с такими большими группами практически невозможно индивидуализировать обучение в рамках аудиторных занятий. Также наблюдается острая нехватка учебной литературы, традиционно преподаватель выдает студентом текст лекций по своему курсу, который они затем самостоятельно копируют.

В содержательном плане курс общей математики для студентов технических специальностей (Civil Engineering, Electrical Engineering, Computer Science) соответствует стандартному курсу европейских вузов по соответствующим специальностям. Рассмотрим, к примеру, содержание курса математики для специальности “Civil Engineering”. Курс рассчитан на 4 семестра и соответственно разбит на 4 подмодуля:

Module1: Engineering Mathematics 1-10 Credits

1. Revision:

Sequences: Sequences numbers, convergence, sum, product and quotients. Determinants: Determinants, evaluation of determinants of 3x3 and *nxn* matrices; elementary properties (6 hrs).

2. Linear Algebra:

Vector Algebra: Scalars, vectors in R^3, geometrical representation, addition and subtraction of vectors, multiplication with scalar, Cartesian coordinates and vectors; Unit vectors $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$, dot (or scalar) product, direction angles, projections, orthogonal vectors; cross (or vector) product, scalar triple product, linear dependence and independence; lines and planes in R^3, vector product of 3 or more vectors; vector differentiation, physical applications (velocity, acceleration). Matrix Algebra: Matrix, addition and subtraction of matrices, multiplication, row reduced echelon, transpose of a matrix; square matrices, singular and non-singular matrices, inverse matrices; orthogonal matrices, system of linear equations, solution by Elimination Methods (Gauss-Elimination, Gauss-Jordan algorithm), LU-Decomposition methods – Cholesky, physical and engineering applications. Scalar and Vector fields: gradient, divergence, Laplacian, curl; solenoidal fields, irrotational fields, conservative fields (12 hrs).

3. Calculus:

Differential Calculus: Differentiation of elementary functions of a single variable, the chain rule; Partial differentiation, total differentiation, differentiation of composite functions, the Errors and approximations; derivatives of arcs, curvature, Cartesian, polar and pedal forms. Integral Calculus: Antiderivative; the indefinite integral of elementary functions of a single variable; techniques of integration (integration by parts, integration of powers of trigonometric functions), integration by trigonometric substitution); definite integrals, area under a curve; applications in engineering, improper integrals, L'Hospital's rule. Infinite Series: Infinite series, convergence, tests for convergence (comparison, alternating series, p-series, integral); power series, interval of convergence of power series, tests for convergence of power series (ratio, roots), differentiation and integration of power series; Taylor series, Maclaurin series, approximation of elementary functions by Taylor/ Maclaurin series (binomial, trigonometric, exponential, logarithmic), applications (12 hrs).

4. First Order Ordinary Differential Equations:

Definitions (ode, order, degree, solution of ode), solution of first order odes (graphical methods – orthogonal trajectories in Cartesian), separation of variables, homogeneous and reducible to homogeneous odes, exact and reducible to exact odes); first order linear odes, initial value problems, integrating factor, Bernoulli equations (6 Hours).

Module 2: Engineering Mathematics 2-10 Credits

1. Higher order Ordinary Differential Equations:

Linear odes with constant coefficients – homogeneous odes, operator method, variation of parameters and undetermined coefficients; Legendre's linear equations (9 hrs).

2. Advanced Calculus:

Differential Calculus: Taylor's theorem for several variable functions, determination of local maxima and minima; Lagrange multipliers. Integral

Calculus: Double integrals, Jacobian and change of variables formula, triple integrals application to areas, surfaces and volumes. Integral Vector Calculus: Vector integration, Line integrals, Surface Integrals, Volume integrals, Integral theorems - Green's, Gauss-Divergence, Stokes (15 hrs).

3. Integral Transforms:

Gamma functions: Definition of integral transforms; Gamma functions, Beta functions; application to solve various problems. Laplace Transform (LT): Definitions, LT of elementary functions, LT of derivatives and integrals, finding LT of functions using theorems, Inverse LT of elementary functions, some theorems on Laplace transforms (1st shift, 2nd shift, convolutions); using theorems to find inverse LT, unit step functions, differentiation and integration of Laplace transforms; application of LT to solve differential equations of engineering importance (vibration of a string, undamped vibrations, deflection of beams resonance, damped vibrations, LRC circuits, systems of differential equations) (12 hrs).

Module 3: Engineering Mathematics 3-10 Credits

1. Differential Equations:

Bessel's Differential Equations (BDEs): BDEs (Definition, Recurrence formulae, generation function and orthogonality, engineering problems), series solution of BDEs, Rodrique's formula (generation function, recurrence formula, orthogonality, engineering problems). Partial Differential Equations (pdes): 2^{nd} order pdes of two variable functions; classification as hyperbolic, parabolic or elliptic; formulation and solution of one dimensional prototype pdes of engineering importance – wave equation, heat conduction equation and Laplace's equation, Initial and boundary value problems (ibvp), solution of ibvp by separation of variables (12 hrs).

2. Series and Transforms:

Fourier Series: Periodic functions, odd and even functions, Fourier series, Half range Fourier sine and cosine series, methods for finding Fourier coefficients; Application to science and engineering problems. Fourier Transforms: Finite and infinite transforms, finite sine and cosine transforms, inverse transforms, application to engineering problems. Z-Transforms: Definitions, standard transforms, some theorems (linearity, damping, shifting, convolution), initial and boundary value problems, inverse transforms, engineering problems (12 hrs).

3. Complex Analysis:

Complex functions: Function of a complex variable, polynomial, exponential and trigonometric functions; derivatives, the Cauchy-Riemann equations; Cauchy integral theorem, Cauchy integral formulae, Taylor series; Laurent series , singular points, poles, residue, residue theorem, evaluation of real integrals, problems of the type: $w = z^z, w = \frac{az+b}{cz+d}$. Conformal mapping (12 hrs).

Module 4: Engineering Mathematics 4-10 Credits

1. Numerical Methods:

Numerical Solutions of algebraic and transcendental equations: Newton-Ralphson method, Aitkin's Delta square method, order of convergence of the above methods. Finite Differences and Interpolations: Finite differences (forward, backward, central), interpolation formulae (Newton, central differences, Stirling's), application to engineering problems; Numerical differentiation; Numerical integration by trapezoidal rule and Simpson's rule. Numerical Solutions of systems of linear equations: Fixed Point Iteration methods, Jacobi, Gauss-Seidel, SOR, application to engineering problems. Numerical Solutions of odes: Approximations by Taylor's series; Euler method, and 4^{th} order Runge-Kutta methods(9 hrs).

2. Optimization Theory:

Basic Concepts: Basic concepts and classification of optimisation problems, Linear Programming (Problem formulation, Objective function, Constraints); Graphical solution of LP problem (6 hrs).

3. Statistics and Probability:

Quick review of Descriptive Statistics: Representation of data, frequency distributions, histograms, frequency polygon, cumulative frequency polygon, measure of central tendency (mean, mode, median), grouped and ungrouped data; dispersion (range, standard deviation), peaked ness (skew ness, kurtosis). Elementary Probability Theory: definition of probability, conditional probability (Baye's theorem), applications to engineering problems. Distributions: Random variables; probability distributions, PDF, CDF, some discrete and continuous probability distributions - Binomial, Poisson, and normal distributions; Mathematical Expectation and Variance. Hypothesis Testing: Significance of hypothesis testing; Type I, Type II errors, tests involving distributions, one and two tailed tests, tests for large and small samples, goodness of fit, chi-square distribution, student t' distributions; application to engineering problems, introduction to experimental design. Regression Analysis and Correlation: Curve fitting by least squares methods, Pearson's coefficient of correlation, Confidence intervals for the regression coefficients, auto and cross correlations, Examples from engineering problems. Quality Control: Detecting process change; control charts: x chart, R-chart, Runs analysis, p-chart, c-chart; tolerant limits, acceptance sampling for defectives. Application to engineering problems (21 hrs).

Таким образом, достаточно высокий заявленный содержательный уровень содержания курса математики вступает в противоречие с высокой дифференциацией студентов по уровню математической подготовки, недостаточным количеством учебных часов, выделяемых на дисциплину, трудностями в реализации индивидуального подхода к учебной деятельности студентов. Одними из возможных средств по преодолению этих противоречий могут служить технологии дистанционного обучения (E-learning), совмещаемые с традиционной методикой преподавания, и организация самостоятельной работы студентов в группах. Локальная компьютерная сеть университета технически позволяет использовать элементы дистанционного обучения, в частности, предоставлять постоянный доступ студентов к учебным материалам по курсу (тексты лекций, справочная информация, задания для самостоятельной и групповой работы, информация по организации учебного процесса) и осуществлять индивидуальный контроль (контроль количества подключений к данному ресурсу, выполнение индивидуальных заданий в форме электронных тестов и т.д.). Основными проблемами в реализации этой программы являются недостаточная компьютерная оснащенность (хотя уже сейчас студенты, имеющие персональные компьютеры, могут после их регистрации круглосуточно пользоваться в кампусе услугами беспроводной “wireless” связи), необходимость создания соответствующего программного и технического обеспечения на локальном сервере университета и отсутствие навыков работы преподавателей в сфере дистанционного обучения.

Более простой в части ее реализации является организация самостоятельной учебной работы студентов в подгруппах. Каждая подгруппа получает набор заданий в соответствии с содержанием курса с указанием сроков сдачи результатов. Компактное проживание студентов в кампусе, возможность пользоваться учебными аудиториями во внеучебное время и высокая мотивация на результаты обучения обеспечивают эффективность этой формы учебного процесса. Она более успешна, если студенты в каждой группе имеют различный уровень математической подготовки, что позволяет в процессе их совместной деятельности “подтягивать” до среднего уровня тех, кто имел изначально пробелы в математическом образовании (зачастую связанные, как было указано ранее, не с индивидуальными способностями обучающихся, а с их выбором той или иной специализации в школе).

Надеюсь, изложенные выше сведения будут интересны моим коллегам и, возможно, использованы кем-то из них в составлении программ по математике в своих вузах.

Решение задач с экономическим содержанием в среде Mathematica

А.В. Паньков

В данной статье мы рассмотрим пример практического использования ***Mathematica*** для решения задач с экономическим содержанием.

Mathematica – компьютерная математическая система (КМС); это программный продукт, сочетающий в себе свойства систем компьютерной алгебры (основная особенность которых – способность к символьным вычислениям без программирования) и языков программирования. Пользователь путем ввода условий своей задачи на обычном математическом языке дает задание на вычисление, и компьютерная среда по алгоритмам, содержащимся в ее ядре, решает задачу. Процесс решения задачи для пользователя происходит с минимальными затратами времени.

Компьютерные математические системы – новые средства, позволяющие выполнять как численные и аналитические, так и графические вычисления. Они аккумулируют и предоставляют пользователю возможности, накопленные за многовековой опыт развития математики, имеют прекрасные средства для построения графических изображений с высокой точностью. Позволяют решать задачи прикладной направленности и представляют большой интерес для системы образования.

Использование среды ***Mathematica*** позволяет поручить процесс вычисления компьютеру, а большее внимание уделить математической формулировке проблемы, выводу необходимых соотношений. Такой подход сохраняет интерес к решению проблемы, позволяя сконцентрироваться на понимании сущности моделирования, на анализе и интерпретации результата, творческой работе с моделью. Варьируя параметры модели, работая над поиском более выгодных (оптимальных) решений, можно дать понятия рисковых ситуаций. Существует много проблемных ситуаций и задач с экономическим содержанием, полезных для формирования и усвоения понятий экономических и управленческих теорий.

Использование метода вычислительного эксперимента при решении математических задач с экономическим содержанием с помощью ***Mathematica*** подробно рассмотрено в работе Brett Champion, Adam Strzebonski “Constrained optimization” Wolfram *Mathematica*®Tutorial Collection, 2008.

Мы ограничимся демонстрацией возможности использования среды ***Mathematica*** для решения некоторых разновидностей транспортных задач, не рассмотренных в выше указанной работе.

Рассмотрим следующий пример. Пусть компания хранит свою готовую продукцию на трех складах (первом, втором и третьем), расположенных в разных частях города. На этих складах хранится продукция в количествах 310, 260 и 270 штук соответственно. Продукцию необходимо доставить пяти оптовым покупателям П1, П2, П3, П4, П5, заявки которых составляют 180, 80, 200, 160 и 220 штук соответственно. Склады оптовых покупателей также расположены в разных частях города. Стоимости (в рублях) доставки одной штуки продукции со складов компании на склады покупателей показаны в следующей таблице.

Склады компании	Оптовые покупатели				
	П1	П2	П3	П4	П5
№ 1	10	8	6	5	4
№ 2	6	5	4	3	6
№ 3	3	4	5	5	9

Решение задачи в среде ***Mathematica*** возможно несколькими способами, так например, в качестве первого способа можно рассмотреть использование команды LinearProgramming:

1) определим коэффициенты переменных целевой функции z: z={10, 8, 6, 5, 4, 6, 5, 4, 3, 6, 3, 4, 5, 5, 9};

2) определим коэффициенты переменных левых частей ограничений:

$$a = \begin{pmatrix} 111110000000000 \\ 000001111100000 \\ 000000000011111 \\ 100001000010000 \\ 010000100001000 \\ 001000010000100 \\ 000100001000010 \\ 000010000100001 \end{pmatrix};$$

3) определим значения правых частей ограничений:
b={{310,0}, {260,0}, {270,0}, {180,0}, {80,0}, {200,0}, {160,0}, {220,0}};

4) для представления ответа в табличном виде следует обратить внимание на использование команды Partition[Otv2,5]//MatrixForm: Otv2= LinearProgramming[z,a,b]; Partition[Otv2,5]//MatrixForm

5) в результате получим:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 90 & 220 \\ 0 & 0 & 190 & 70 & 0 \\ 180 & 80 & 10 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6) для получения значения целевой функции можно воспользоваться следующей командой: Total[z Otv2]

7) мы определили что, стоимость перевозок составит 3210 при выполнении следующей схеме перевозок

	П1	П2	П3	П4	П5
№ 1	0	0	0	90	220
№ 2	0	0	190	70	0
№ 3	180	80	10	0	0

Рассмотрим второй способ с использованием команды Minimize:

1) определим целевую функцию z:
z=10 x[1,1]+8 x[1,2]+6 x[1,3]+5 x[1,4]+4 x[1,5]+6 x[2,1]+5 x[2,2]+4 x[2,3]+3 x[2,4]+6 x[2,5]+3 x[3,1]+4 x[3,2]+5 x[3,3]+5 x[3,4]+9 x[3,5];

2) определим ограничения g и переменные v:

```
g={x[1,1]+x[1,2]+x[1,3]+x[1,4]+x[1,5]==310,
x[2,1]+x[2,2]+x[2,3]+x[2,4]+x[2,5]==260,
x[3,1]+x[3,2]+x[3,3]+x[3,4]+x[3,5]==270,
x[1,1]+x[2,1]+x[3,1] ==180,
x[1,2]+x[2,2]+x[3,2] ==80,
x[1,3]+x[2,3]+x[3,3] ==200,
x[1,4]+x[2,4]+x[3,4] ==160,
x[1,5]+x[2,5]+x[3,5] ==220,
x[1,1] ≥0, x[1,2]≥0,x[1,3] ≥0,x[1,4] ≥0, x[1,5] ≥0,x[2,1] ≥0, x[2,2] ≥0,x[2,3]
≥0, x[2,4] ≥0,x[2,5] ≥0, x[3,1] ≥0, x[3,2] ≥0, x[3,3] ≥0, x[3,4] ≥0,x[3,5] ≥0};
v={x[1,1], x[1,2], x[1,3], x[1,4], x[1,5],x[2,1], x[2,2],x[2,3], x[2,4], x[2,5], x[3,1],
x[3,2], x[3,3], x[3,4], x[3,5]};
```

3) выполним поиск решения с использованием команды Minimize:

```
Otv=Minimize[{z, g},v]; Partition[Otv[[2]],5]//MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} \mathrm{x}[1,1]\to 0 & \mathrm{x}[1,2]\to 0 & \mathrm{x}[1,3]\to 0 & \mathrm{x}[1,4]\to 90 & \mathrm{x}[1,5]\to 220 \\ \mathrm{x}[2,1]\to 0 & \mathrm{x}[2,2]\to 0 & \mathrm{x}[2,3]\to 190 & \mathrm{x}[2,4]\to 70 & \mathrm{x}[2,5]\to 0 \\ \mathrm{x}[3,1]\to 180 & \mathrm{x}[3,2]\to 80 & \mathrm{x}[3,3]\to 10 & \mathrm{x}[3,4]\to 0 & \mathrm{x}[3,5]\to 0 \end{pmatrix}$$

Изменим условия рассмотренного примера следующим образом: пусть на складе № 3 хранится не 270 штук продукции, а, допустим, 260 штук. Остальные условия задачи оставляем без изменения. В таком случае на трех складах компании хранится всего 310 + 260 + 260 = 830 штук. Покупатели по-прежнему заказывают 180, 80, 200, 160 и 220 штук продукции, всего 840 штук.

Таким образом, предложение (830 шт.) меньше спроса (840 шт.) - имеем дефицит предложения. Поэтому такая задача называется задачей с дефицитом и ограничения для пунктов отправления записываются в виде равенств, а ограничения для пунктов назначения – в виде неравенств.

Решение задачи в среде ***Mathematica*** при использовании команды LinearProgramming будет отличаться только на 3 шаге, а именно изменятся значений правых частей ограничений на следующие: b={{310, 0}, {260, 0}, {270, 0}, {180, -1}, {80, -1}, {200, -1}, {160, -1}, {220, -1}}. Следует отметить, что данные изменения необходимы, так как знак у ограничений для пунктов назначения сменится с "=" на "≤". Все остальные значения и алгоритм поиска решения остаются прежними.

В результате мы получим, что стоимость перевозок составит 3160 при выполнении следующей схеме перевозок

	П1	П2	П3	П4	П5
№ 1	0	0	0	90	220
№ 2	0	0	190	70	0
№ 3	180	80	0	0	0

Изменим условия рассмотренного примера следующим образом: пусть на складе № 3 хранится не 260 штук продукции, а, допустим, 280штук. Остальные условия задачи оставляем без изменения. В таком случае на трех складах компании хранится всего 310 + 260 + 280 = 850 штук.

Покупатели по-прежнему заказывают 180, 80, 200, 160 и 220 штук продукции, всего 840 штук. Таким образом, предложение (850 шт.) больше спроса (840 шт.) – имеем избыток предложения. Поэтому такая задача называется задачей с избытком, и ограничения для пунктов отправления записываются в виде неравенств, а ограничения для пунктов назначения – в виде равенств.

Решение задачи в среде ***Mathematica*** при использовании команды LinearProgramming будет отличаться только на 3 шаге, а именно изменятся значений правых частей ограничений на следующие: b={{310, -1}, {260, -1}, {280, -1}, {180, 0}, {80, 0}, {200, 0}, {160, 0}, {220, 0}};. Данные изменения необходимы, так как знак у ограничений для пунктов отправления сменился с "=" на "≤". Аналогично задаче с дефицитом, все остальные значения и алгоритм поиска решения остаются прежними.

Стоимость перевозок составит 3200 при выполнении следующей схеме перевозок

	П1	П2	П3	П4	П5
№ 1	0	0	0	80	220
№ 2	0	0	180	80	0
№ 3	180	80	20	0	0

Авторы надеются, что рассмотренные примеры будут способствовать в решении ваших задач линейного программирования с помощью среды ***Mathematica***.

Библиографический список

1. *Паньков, А.В.* Математическое моделирование [Текст] / А.В. Паньков // в сб. "Развитие России в XXI веке: предпосылки, факторы, перспективы". – Чистополь: Издательство "Познание", 2008. – С. 398-404.
2. *Паньков, А.В.* Использование компьютерных математических систем на уроках математики в школе [Текст] / А.В. Паньков // Труды VI Колмогоровских чтений. – Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2008. – С. 187-192.

Методика приема заданий по курсу высшей математики на примере уравнений математической физики [1]

О.А. Пыркова

Изменившиеся социально-экономические условия ведут к необходимости подготовки профессионалов высокого класса. Главной задачей высшего образования, как сферы воспроизводства общественного интеллектуального опыта, является подготовка высокопрофессиональных, конкурентноспособных специалистов естественно-математических специальностей, способных к инновационной деятельности на основе овладения фундаментальными знаниями и самостоятельному принятию ответственных решений на различных этапах деятельности. Формирование этих навыков у студентов требует не столько нового предметного содержания, сколько иных педагогический технологий. Совершенствование качества подготовки специалистов вузами становится одной из важнейших государственных задач.

В современных условиях неизбежной глобализации информационного пространства возрастает и информационное давление на личность. Перенасыщенность информационного потока ведет к дезориентации учащихся: уделяется мало внимания второстепенной с точки зрения студента информации что приводит к потере темпа приобретения и качества новых знаний из-за недостаточного усвоения изучавшегося ранее материала.

Курс “Уравнения математической физики” занимает одну из ключевых позиций в процессе обучения студентов физико-математических специальностей. Курс рассчитан на два семестра в большинстве потоков, промежуточный контроль знаний проводится на зачете по УМФ в зимнюю экзаменационную сессию, что позволяет студентам скорректировать свою учебную деятельность, увеличив при необходимости усилия, затрачиваемые на изучение данного предмета. Итоговый контроль знаний проводится в весеннем семестре на основе письменной контрольной работы и устного экзамене. Элементы блочно-модульного обучения (дробления учебного материала на модули – определенные дозы, дидактические единицы, системно связанные и логически обособленные, с конкретными четко определенными целями, задачами) реализуются при помощи разделения курса на две основные части в каждом семестре. Контроль усвоения знаний по каждой из них проводится с помощью

---

[1] Работа поддержана АВЦП “Развитие научного потенциала высшей школы”, проект 2.1.1/500 и ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009-2013 гг.

приема заданий, т.е. поверке приобретенных студентом навыков решения задач на определенные темы и умения применять теорию, для построения и обоснования алгоритмов решения предложенных задач. Традиционно для получения зачета по заданию студент должен предоставить преподавателю на проверку тетрадь с решениями заранее предложенных задач (одних и тех же для всего потока) и написать небольшую контрольную работу по темам, входящим в задание, зачет по которому он стремится получить.

Результаты обучения надо оценивать не только количеством излагаемой информации, которое неизбежно растет с развитием современной науки, но и качеством усвоения студентами пройденного материала и умением грамотно использовать его. Целостный процесс обучения достигает желаемого результата только при высокой образовательной активности учащихся, самостоятельности их работы, индивидуализации их обучения. Нельзя рассчитывать на успех, если педагог активно преподает, а обучающийся не участвует в процессе усвоения знаний и умений, или участвует в них пассивно. Качество подготовки выпускников технических вузов к инновационной деятельности зависит, в том числе и от качества образовательных технологий. Помимо этого, компетентностный подход предъявляет свои требования к таким компонентам образовательного процесса, как средства контроля и оценки. Предлагаемая здесь методика проведения контрольных работ по приему заданий, опирающаяся на личностно-ориентированный подход, рассчитана на активизацию самостоятельной работы студентов с учетом индивидуального темпа освоения нового материала, что способствует как количественному, так и качественному росту приобретаемых учащимися знаний.

По каждому заданию на группу студентов, не превышающую 20 человек, предлагается 21 вариант контрольных работ, что обеспечивает необходимость самостоятельного решения предложенных задач, исключая списывание. Темы задач, их условия не являются неожиданными, будучи заранее выложены на личном учебном Web-сайте http://pyrkova.fizteh.ru [1]. Однако номер варианта, который достанется на контрольной работе, студентам заранее неизвестен. При этом более четко определяется круг вопросов и задач, знания по которым студент должен продемонстрировать при сдаче задания, и, помимо этого, удовлетворяется естественная потребность студентов к интеграции информационных технологий с источниками знаний. Не стоит опасаться снижения качества знаний, если студент попытается заранее прорешать один или несколько вариантов.

- Во-первых, проявление самостоятельности в работе студентов в любой из ее форм достойно поощрения.

- Во-вторых, решение нескольких дополнительных задач по теме задания лишь способствует приобретению более глубоких и прочных знаний по изучаемому предмету.
- В-третьих, студент, почувствовав затруднения при ответе на вопросы или при решении задач на некоторые темы, может своевременно обратиться либо к конспекту лекций, либо к учебникам, либо к пособию по решению основных задач, выложенному на том же сайте: во-первых, читывается стремление современных студентов использовать Интернет как источник в том числе и учебной информации, и, во-вторых, это существенно экономит время учащихся, не ущемляя их навыков самостоятельной работы. Тем самым реализуется поэтапное формирование и развитие навыков учебного труда с переходом к воспитанию внутренней потребности к саморазвитию и самовоспитанию.
- В-четвертых, варианты контрольных, выложенные на сайте, содержат больший объем вопросов и задач, чем студентам будет предложено решить на семинаре в процессе приема задания. Более подробно это будет обсуждаться ниже.
- В-пятых, если у преподавателя возникнет подозрение, что студенту попался вариант с заранее известным ему решением, вариант всегда можно заменить на аналогичный. Если же при подготовке к сдаче задания студент разобрал решение нескольких вариантов, то этот факт только можно приветствовать.

Рассмотрим методику приема задания по УМФ на примере индивидуальной контрольной работы для сдачи 2-го задания весеннего семестра для ФАКИ (факультета аэрофизики и космических исследований). Каждое задание в свою очередь делится на модули. Так для сдачи этого задания надо изучить пять тем: 1) задача Штурма-Лиувилля; 2) функции Бесселя и их применение при решении задач для круглой мембраны, метод Фурье; 3) сферические функции; 4) функция Грина задачи Дирихле; 5) потенциалы. По каждой из этих тем студенту предлагаются теоретические вопросы и задачи разного уровня сложности.

Ниже на рис. 1 приведен примерный вариант для сдачи 2-го задания по УМФ:

Следует отметить, что темы 2-го и 3-го модулей входят не только в устный экзамен, но навыки решения задач на заданные темы проверяются предварительно на письменном экзамене. Так задачи 2.3 и 3.3 взяты из вариантов экзаменационных работ прошлых лет. Задачи 2.2 и 3.2 взяты из тестов, предлагавшихся на переэкзаменовках в качестве допуска к основному экзамену. Теоретические вопросы по изучаемым темам в рамках рассматриваемого задания взяты из экзаменационной программы по данному предмету.

1. УМФ 3 курс 6 семестр **1 задание**

1. Задача Штурма-Лиувилля.

1. Дать определение оператора Штурма-Лиувилля. Указать условия на гладкость и знакоопределенность (если надо) всех входящих в него функций.
2. Найти функцию Грина оператора Штурма-Лиувилля: $\begin{cases} Ly = -y'', \ 0 < x < 1, \\ y(0) = y(1) = 0. \end{cases}$
3. Свести к интегральному уравнению задачу: $e^{2x}(y'' - 4y' + 3y) = \lambda y$, $0 < x < \ln 2$, $y'(0) - y(0) = 0$, $y'(\ln 2) = 0$.

2. Функции Бесселя и их применение при решении задач для круглой мембраны. Метод Фурье.

1. Указать дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция Бесселя $J_1(x)$.
2. Решение задачи $\begin{cases} u_{tt} = a^2 \Delta u, \ t > 0, r < 1, \\ u\big|_{r=1} = 0, \ u\big|_{t=0} = r^2 \sin\varphi, \ u_t\big|_{t=0} = 0 \end{cases}$ записать в виде функционального ряда с разделенными переменными, указав в нем общий вид функций, зависящих от r и зависящих от φ.
3. Найти решение смешанной задачи $u_t = 2\Delta u + J_1(2\mu_2^{(1)} r)\cos\varphi\cos t$, $r < \frac{1}{2}$, $t > 0$, $u = u(r, \varphi, t)$, $u\big|_{t=0} = f(r)(4\cos\varphi - 3)$, $u\big|_{r=\frac{1}{2}} = 0$, $\big|u\big|_{r=0}\big| < \infty$, где $f(r)$ – гладкая на $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ функция, $\mu_j^{(k)}$ – j-й по порядку положительный нуль функции Бесселя J_k, $k = 0, 1, 2 \ldots$; $j = 1, 2, 3, \ldots$, $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

3. Сферические функции.

1. Выписать формулу для оператора Лапласа Δu в сферических координатах (r, φ, θ) ($(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, $\theta \in [0, \pi]$).
2. Решить задачу ($(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\varphi \in [0; 2\pi]$, $\theta \in [0; \pi]$): $\begin{cases} \Delta u = 0, r < R, \\ u\big|_{r=R} = \cos\theta. \end{cases}$
3. Решить задачу ($(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\varphi \in [0; 2\pi]$, $\theta \in [0, \pi]$): $\Delta u = 0$, $1 < r < 2$, $u\big|_{r=1} = 2\sin^2\varphi + \cos 2\theta \cos 2\varphi$, $u\big|_{r=2} = 31 \sin 2\theta \sin\varphi$

4. Функция Грина задачи Дирихле.

1. Поставить внутреннюю задачу Неймана для уравнения Лапласа для шара радиуса R с центром в нуле для R^3 и указать, при каких условиях она имеет решение (обязательно указывать условия на гладкость всех участвующих в постановке задачи функций).
2. Построить функцию Грина для следующих областей в R^3: полупространство $x_3 > 0$.
3. Найти решение задачи Дирихле: $\begin{bmatrix} \Delta u = -f(x) & x_3 > 0 \\ u\big|_{x_3=0} = u_0(x) & \end{bmatrix}$ для непрерывных и ограниченных $f(x)$ и $u_0(x)$.

5. Потенциалы.

1. Дать определение объемного потенциала.
2. Перечислить основные его свойства. Указать необходимые условия на гладкость задающих его функций и на гладкость поверхности.
3. Найти ньютонов потенциал шара $\{|x| < R\}$ с плотностью $\rho = \rho(|x|)$. Рассмотреть случай n=3. Определить потенциал не только в шаре $\{|x| < R\}$, но и вне его.

Рис. 1. Вариант для сдачи 2-го задания по УМФ в весеннем семестре на ФАКИ

По первой, четвертой и пятой теме также предлагаются задания трех уровней: теоретический вопрос по материалу, входящему в экзаменационную программу устного экзамена и задачи двух уровней сложности.

Для приема задания учебным планом выделяется одна пара, т.е. 1 час 20 минут. За это время преподаватель должен успеть проверить результаты контрольной работы, побеседовать со студентом по пройденному материалу, проверить выполнение домашнего задания (решение заранее предложенных задач). К сожалению этого времени явно недостаточно, и приходится проводить дополнительные занятия по приему заданий. Для решения этой проблемы без существенных затрат дополнительного времени как преподавателя, так и студентов, предлагается следующая методика.

1. Все студенты, приступившие к сдаче задания должны иметь тетрадь с самостоятельно выполненным заданием. Как показывает анкетирование, проведенное на сайте http://pyrkova.fizteh.ru (опрошено более 780 учащихся), 41% студентов не уделяют должного внимания этому важному этапу обучения.

2. Всем студентам предлагается решить в отведенное для этого время задачи 2.3 и 3.3. Кроме того, навыки решения задач 2.3 и 3.3 будут в дальнейшем проверяться на экзаменационной контрольной работе. Таким образом, до некоторой степени можно определить уровень подготовки студента к последней и скорректировать его в случае необходимости.

Сильным студентам, как правило, достаточно 40 минут, чтобы справиться с заданием. Если студент правильно решает все задачи, то после краткой беседы по его тетради с домашним заданием, тем не менее позволяющей лучше понять индивидуальные особенности и возможности студента по сравнению с обычной проверкой тетради, ему проставляется зачет по данному заданию. Во время беседы одного из студентов с преподавателем, остальные продолжают решать предложенные им задачи.

Если студент за пару решает правильно только одну из предложенных задач, то вторая задача ему остается на дом. После того как он ее решит, ему будет предложено более подробно рассказать, как он решал на эту тему задачи из домашнего задания.

3. Студентам, не решившим ни одной задачи за пару, предлагается решить весь вариант дома, ответив на предложенные теоретические вопросы, что способствует ликвидации пробелов в знаниях, воспрепятствовавших выполнить намеченный объем работы в отведенные сроки. После успешного выполнения контрольной работы, студента ждет обстоятельная беседа по тетради с домашним заданием.

Стоит отдельно остановиться на психологическом аспекте данной методики приема задания. В конечном итоге временные затраты на сдачу задания с учетом предварительной подготовительной работы у всех студентов примерно одинаковые. Однако, студенты, проявившие большую самостоятельность в подготовке к сдаче задания, получают и большее моральное поощрение, выдерживая учебный график. Тем самым данная методика обеспечивает стимулирование интенсивной работы и высококачественной самостоятельной подготовки, служа инструментом обучения организации и управления собственной учебной, познавательной и исследовательской деятельностью. Студенты, обладающие более медлительной реакцией (это отнюдь не означает, что они менее способные), при правильной организации своей самостоятельной работы не сильно отстают от графика сдачи задания: как правило задержка сдачи задания не более чем на неделю. Студентам же не уделившим должного внимания самостоятельной работе приходится наверстывать упущенное в процессе сдачи задания. Так овладение алгоритмами решения задач второго уровня позволяет быстрее, а главное грамотнее решить задачу более сложного третьего уровня из того же пункта. Своевременная корректировка овладения учащимися основными программными элементами на этапе сдачи задания позволит в дальнейшем избежать замедления темпа обучения и избежать потери интереса к изучаемому предмету.

Таким образом, процесс приема задания сводится не к формальной проверке усвоенных на данный момент знаний, а является активным компонентом процесса обучения, в котором воспитательный аспект играет далеко не последнюю роль.

Предлагаемая методика приема заданий, как показала многолетняя практика ее применения, помогает успешно освоить большой объем математических знаний студентами с различным уровнем подготовки и заинтересованности в получении предметных знаний, учитывая индивидуальные потребности и темп обучения, стимулирует соревновательный дух, активизирует самостоятельную познавательную деятельность, возвращая математике ее важнейшую компоненту – развивающую функцию.

Библиографический список

1. *Пыркова, О.А.* Использование Интернета в процессе обучения [Текст] / О.А. Пыркова // Международная научная конференция "Образование, наука и экономика в вузах. Интеграция в международное образовательное пространство". – Плоцк, 2008. – С. 769-774.
2. *Пыркова, О.А.* О некоторых методических аспектах приема заданий по высшей математике [Текст] / О.А. Пыркова // Математика. Образование: Материалы XVII международной конференции. "Двуязычное (билингвальное) обучение в системе общего и высшего професси-

онального образования:” Материалы I международного симпозиума. – Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 2009. – С. 131.

Топология и геометрия равногранных тетраэдров в контексте УДЕ

А.Б. Эрдниев

В статье И.Ф. Шарыгина “Выход в пространство” [4] дается классический пример: “Из шести спичек сложить 4 правильных треугольника”. На плоскости это сделать невозможно. Как же быть? Оказывается, нужно выйти в пространство – сложить из спичек правильный тетраэдр. Невозможное на плоскости осуществимо в пространстве. По мнению И.Ф. Шарыгина автором этой задачи является академик В.И. Арнольд. Далее приводятся решения некоторых планиметрических задач, теорем Дезарга, Брианшона выходом в пространство. Речь идет о так называемой развертке. Такие задачи часто встречаются на экзаменах по математике ЕГЭ, вступительных экзаменах МГУ. Оказывается можно сконструировать задачи другого типа: из треугольника получить равногранный тетраэдр и координаты его вершин, уравнение вписанной и описанной сфер.

Модель равногранного тетраэдра можно получить из чертежа серединного треугольника ΔABC в остроугольном треугольнике $\Delta A_1B_1C_1$. Выход в пространство осуществляется превращением вершин $\Delta A_1B_1C_1$ в вершину D тетраэдра ABCD, у которого 4 равных грани. Аналогом правильного треугольника является правильный тетраэдр. Равногранные тетраэдры называются первым классом полуправильных тетраэдров, у которых все грани равные треугольники, вторым классом называются ортоцентрические тетраэдры, у которых сумма квадратов длин противоположных ребер постоянна и 4 высоты пересекаются в одной точке, называемой ортоцентром. Справедлива теорема: если тетраэдр является одновременно равногранным и ортоцентрическим, то он является правильным.

Определения аналогов:

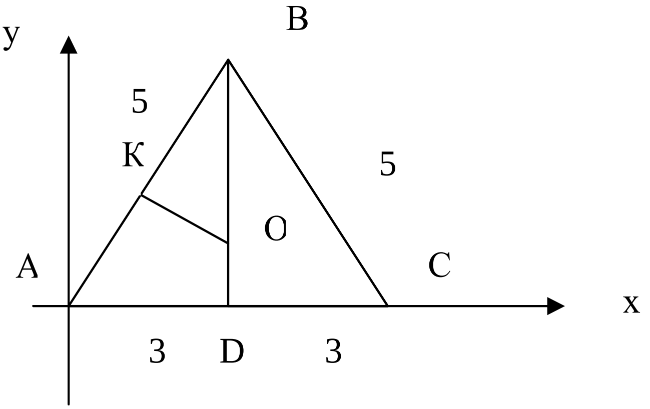
- высотой тетраэдра называется перпендикуляр, опущенный из вершины тетраэдра на плоскость противоположной грани;
- медианой тетраэдра называется отрезок, соединяющий вершину тетраэдра с центром тяжести противоположной грани;
- бимедианой тетраэдра называется отрезок, соединяющий середины противоположных ребер тетраэдра;

- бивысотой называется отрезок наименьшей длины, концы которого находятся на противоположных ребрах тетраэдра;
- биссектором двугранного угла между двумя гранями называется плоскость, проходящая через ребро и делящая этот угол пополам.

В геометрии равногранного тетраэдра справедливы 20 логически эквивалентных суждений, строгое доказательство которых в формате специального логического круга проводится в СУНЦ им. А.Н. Колмогорова. Два утверждения называются эквивиалентными, если каждое из них является следствием другого. Ключевую роль доказательства этих свойств выполняет описанный параллелепипед. Описанным параллелепипедом тетраэдра называется параллелепипед, полученный по чертежу: через каждое ребро тетраэдра надо провести плоскость, параллельную противоположному ребру. Мы получим три пары параллельных плоскостей ограничивающих параллелепипед. Итак, мы будем считать эти свойства доказанными, но требующими проверки в форме расчетных задач.

1. Все грани равны.
2. Противоположные ребра равны.
3. Все трехгранные углы при вершинах равны.
4. Двухгранные углы при противоположных ребрах равны.
5. В двух гранях углы, опирающиеся на общую сторону, равны.
6. Сумма линейных углов для каждого трехгранного угла при вершине тетраэдра равна 180°.
7. Разверткой тетраэдра является треугольник или параллелограмм.
8. Описанный параллелепипед тетраэдра – прямоугольный параллелепипед.
9. Тетраэдр имеет три оси симметрии.
10. Любые две бивысоты перпендикулярны.
11. Любые две бимедианы (средние линии) перпендикулярны.
12. Периметры всех граней равны.
13. Площади всех граней равны.
14. Высоты тетраэдра равны.
15. Медианы тетраэдра равны.
16. Радиусы описанных около всех граней окружностей равны.
17. Центр тяжести тетраэдра и центр описанной сферы совпадают.
18. Цент вписанной и описанной сфер совпадают.
19. Центр тяжести тетраэдра и центр вписанной сферы совпадают.

Для построения декартовой модели равногранного тетраэдра мы выбрали признаки №№ 17, 18, 19. Центр тяжести, центр вписанной и описанной сфер совпадает т.е. G=O=J. Без доказательства по аналогии будем считать, что координаты центра тяжести равны среднему арифметическому координат вершин тетраэдра. Начало координат поместим в А, ось Х направим по ребру АС, грань АВС будет определять плоскость ОХУ. Для определения возьмем в качестве ΔАВС удвоенный египетский треугольник 3, 4, 5.



Итак, найдем координаты центра описанной окружности для равнобедренного треугольника, полученного удвоением египетского, например 3, 4, 5.

А(0;0), В(3;4), С(6;0) ,К(1,5; 2,5), О(3;у) – центр описанной окружности около ΔАВС, где КО – серединный перпендикуляр.

1 способ: по теореме Пифагора АО$^2 = DO^2 + AD^2$, $R^2 = (4-R)^2+9$. $R = \frac{25}{8}$, значит, у $= 4 - \frac{25}{8} = \frac{7}{8} \Rightarrow O(3;\, \frac{7}{8})$.

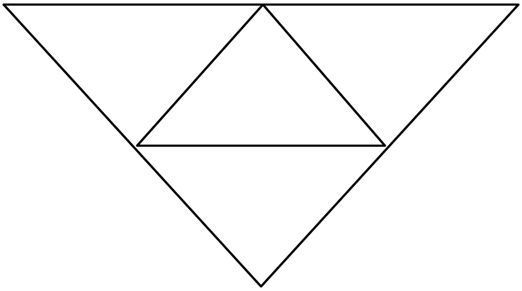
2 способ: КО прямая перпендикулярная АВ: у $= \frac{4}{3}$х. Тогда у $= -\frac{3}{4}$х$+$ b – уравнение прямой КО. $2 = -\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{2} + b \Rightarrow 3\frac{1}{8} = b \Rightarrow$ у $= -\frac{3}{4}$х $+ 3\frac{1}{8}$.

$$\begin{cases} x = 3; \\ \text{у} = -\frac{3}{4}\text{х} + 3\frac{1}{8}; \end{cases} \qquad \text{у} = -\frac{3}{4} \cdot 3 + \frac{25}{8} = \frac{7}{8} \Rightarrow O(3;\, \frac{7}{8}).$$

Так как центр описанной сферы проектируется в центр описанной окружности ΔАВС, то его координаты О $\left(3, \frac{7}{8}, r\right)$. Так как О=J, грань АВС лежит в плоскости ОХУ, то О $\left(3, \frac{7}{8}, r\right)$, где r – радиус вписанной сферы. Координаты центра тяжести тетраэдра равны среднему арифметическому координат вершин, то аппликата D будет равна 4r

$$r = \frac{0+0+0+z}{4}, \qquad z = 4r.$$

Найдем абсциссу и ординату точки D: A(0;0;0), B(3;4;0), C(6;0;0) D(x;y;4r). $\frac{0+3+6+\text{x}}{4} = 3$, х $= 3$, $\frac{0+4+0+\text{y}}{4} = \frac{7}{8}$, $y = -\frac{1}{2}$. D(3;$-\frac{1}{2}$; 4r), тогда радиус описанной сферы $R = \sqrt{R_1^2 + r^2}$, $R = \sqrt{\left(3\frac{1}{8}\right)^2 + r^2}$.



Обратим особое внимание на координаты точки D, где y отрицателен. Это значит что высота DH находится вне тетраэдра ABCD.

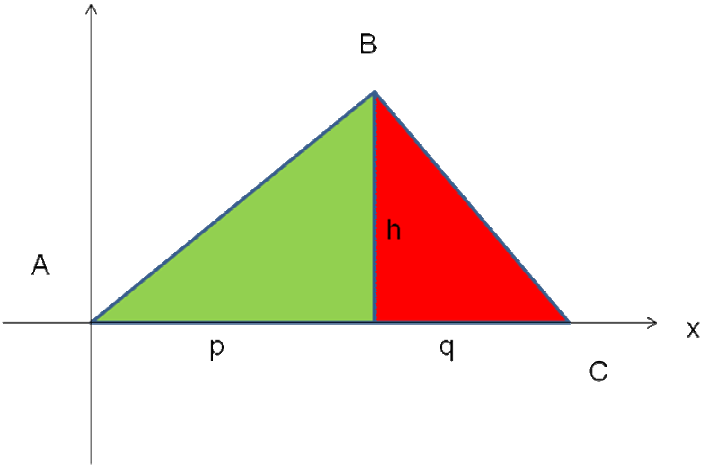
Найдем аппликату точки D.

Заметим, что $BD = \sqrt{(3-3)^2+(4+0,5)^2+(0-4r)^2} = 6$, $KD = \sqrt{20,25+16r^2} = 6$, $\left(\sqrt{20,25+16r^2}\right)^2 = 6^2$. $20,25+16r^2 = 36$, $16r^2 = 15,75$, $r^2 = \frac{63}{64}$, $r = \sqrt{\frac{63}{64}} = \frac{3\sqrt{7}}{8}$.

Проверка $CD = \sqrt{(6-3)^2+(0+0,5)^2+\left(0-\frac{3\sqrt{7}}{2}\right)^2} = \sqrt{9+\frac{1}{4}+\frac{63}{4}} = \sqrt{25} = 5$, A$D = \sqrt{(0-3)^2+(0+0,5)^2+\left(0-\frac{3\sqrt{7}}{2}\right)^2} = \sqrt{9+\frac{1}{4}+\frac{63}{4}} = \sqrt{25} = 5$. Верно.

Таким образом, D(3;$-\frac{1}{2}$;$\frac{3\sqrt{7}}{2}$), $R = \sqrt{\left(3\frac{1}{8}\right)^2+\left(\frac{3\sqrt{7}}{8}\right)^2} = \sqrt{\frac{625}{64}+\frac{63}{64}} = \frac{\sqrt{689}}{8}$.

Тогда уравнение вписанной сферы имеет вид $(\mathrm{x}-3)^2+\left(\mathrm{y}-\frac{7}{8}\right)^2+\left(z-\frac{3\sqrt{7}}{8}\right)^2 = \left(\frac{3\sqrt{7}}{8}\right)^2$, а уравнение описанной сферы $(\mathrm{x}-3)^2+\left(\mathrm{y}-\frac{7}{8}\right)^2+\left(z-\frac{3\sqrt{7}}{8}\right)^2 = \frac{689}{64}$.



$DH_2 = a_2b_1 = f = \frac{pq}{h}$, $p = b_2b_1$, $h = b_2a_1$, $q = a_2a_1$.

Составим координатную модель A(0,0), B(p,h), C(p+q,0). $y = \frac{h}{p}x$ – уравнение прямой AB. Найдем уравнение серединного перпендикуляра к стороне AB: $y = -\frac{p}{h}x+b$. Подставим координаты середины отрезка AB: $\frac{h}{2} = -\frac{p}{h}\cdot\frac{p}{2}+b$, $b = \frac{h}{2}+\frac{p^2}{2h}$. Тогда уравнение серединного перпендикуляра имеет вид

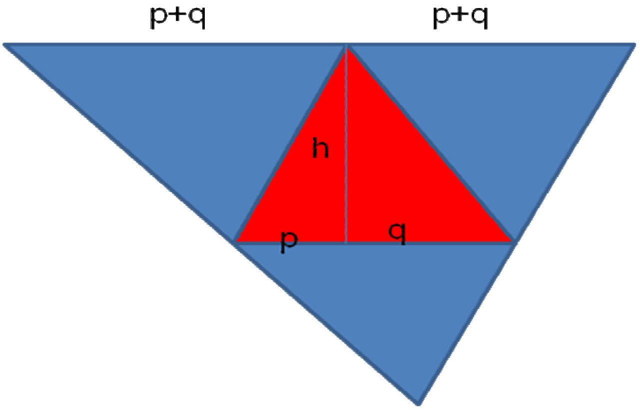
$$y = -\frac{p}{h}x + \frac{h^2+p^2}{2h}.$$

Найдем координату центра описанной окружности около треугольника ABC

$$\begin{cases} x = \frac{\mathrm{p+q}}{2}; \\ \mathrm{y} = -\frac{\mathrm{p}}{h}x + \frac{h^2+p^2}{2h}; \end{cases} \qquad O\left(\frac{p+q}{2}; \frac{h^2-pq}{2h}\right).$$

Так как центр описанной сферы проектируется в центр описанной окружности тяжести ΔABC, то его координаты $\mathrm{O}_1\left(\frac{p+q}{2}, \frac{h^2-pq}{2}, r\right)$. Так как O_1=J, грань ABC лежит в плоскости OXУ, то, где r – радиус вписанной сферы. Координаты центра тяжести тетраэдра равны среднему арифметическому координат вершин, то аппликата D будет равна 4r: $r = \frac{0+0+0+z}{4}$, $z = 4r$. Найдем абсциссу и ординату точки D: $A(0,0,0)$, $B(p,h,0)$, $C(p+q,0,0)$, $D(x,y,4r)$:

$$\frac{0+p+p+q+\mathrm{x}}{4} = \frac{p+q}{2},\ d\mathrm{x} = q,\ \frac{0+h+0+\mathrm{y}}{4} = \frac{h^2-pq}{2h},\ y = \frac{h^2-2pq}{2h}.$$

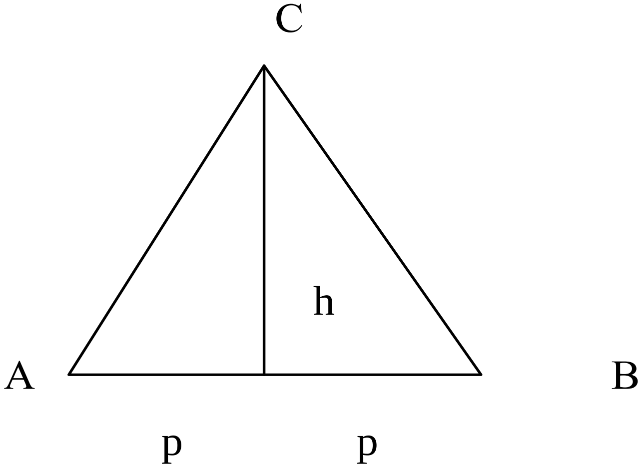


Через вершины ABC проведем прямые , которые параллельны противоположным сторонам. Получим развертку равногранного тетраэдра с основанием ABC.

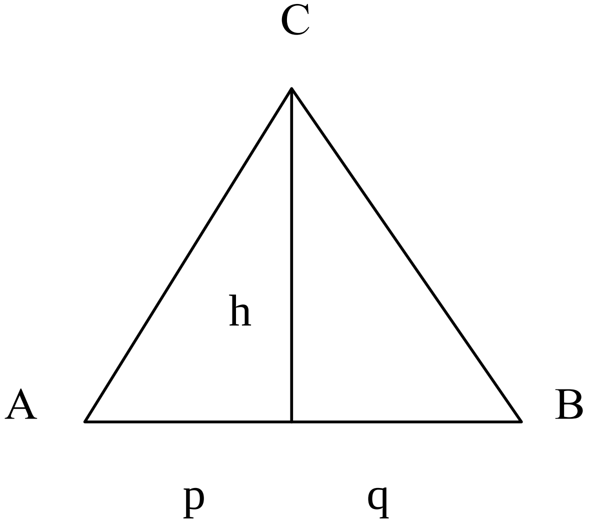
Ребро $BD = p+q = \sqrt{(p-q)^2 + \left(\frac{h^2-2pq}{h} - h\right)^2 + 16r^2}$, $r = \frac{1}{2}\sqrt{pq - \frac{p^2q^2}{h^2}}$. Подставим в координаты вершины тетраэдра и получим

$$D\left(q; \frac{h^2-2pq}{h}; 2\sqrt{pq - \frac{p^2q^2}{h^2}}\right).$$

Проведем классификацию равногранных тетраэдров по аналогии с треугольниками. В начале выделим равногранные равнобедренные тетраэдры, у которых 2 грани перпендикулярны. У этого тетраэдра высота пирамиды равна высоте опущенной на основание равнобедренного треугольника $h^2 = 2p^2$.



Равногранный тетраэдр, у которого 2 грани перпендикулярны.



$h^2 = 2pq$.

Итак, проведена топологическая классификация равногранных тетраэдров по двугранному углу:

- прямой-высота пирамиды совпадает с высотой грани $h^2 = 2pq$;
- острый – высота внутри пирамиды $h^2 > 2pq > pq$;
- тупой – высота вне пирамиды $2pq > h^2 > pq$;
- все грани остроугольные треугольники. Если $p = q$ значит треугольник равнобедренный;
- выделение типов позволяет систематизировать задачи с признаком G=O=J.

Библиографический список

1. *Вавилов, В.В.* Математические коллоквиумы [Текст] / В.В. Вавилов, П.М. Красников. – Москва: СУНЦ МГУ, 2006.
2. *Смирнов, Е.И.* Технология наглядно-модульного обучения математике [Текст] / Е.И. Смирнов. – Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 1998.
3. *Матизен, В.Э.* Равногранные и каркасные тетраэдры [Текст] / В.Э. Матизен // Квант. – Москва, 1975.
4. *Шарыгин, И.Ф.* Выход в пространство [Текст] / И.Ф. Шарыгин // Квант. – Москва, 1975. – № 5.

Формирование информационной компетентности учителя математики

М.С. Помелова

В настоящее время российское образование переживает этап своей модернизации, вызванный, в первую очередь, протекающими в современном российском обществе социально-экономическими процессами. Эти новые ориентиры системы образования проявляются в различных направлениях ее развития: в построении системы непрерывного образования, личностно-ориентированного обучения, компетентностного подхода в образовании, появлении форм альтернативного обучения, разработке новых подходов к формированию содержания образования, создании новой информационно-образовательной среды и т.д.

Правительственная Стратегия модернизации образования предполагает, что в основу обновленного содержания общего образования будут положены "ключевые компетентности". Были сформулированы основные положения компетентностного подхода в образовании, узловое понятие которого – компетентность. Было выделено, что это "понятие шире понятия знания, или умения, или навыка, оно включает их в себя (хотя, разумеется, речь не идет о компетентности как о простой аддитивной сумме знания-умения-навыки. Это понятие несколько иного смыслового ряда). Понятие “компетентность” включает не только когнитивную и операциональную – технологическую составляющие, но и мотивацинную, этическую, социальную и поведенческую”.

Такое широкое определение понятийного содержания компетентности существенно затрудняет ее измерение и оценку в качестве результата обучения, на что обращают внимание и сами разработчики. Об этом же свидетельствует и приводимое А.В. Хуторским содержание основных ключевых компетенций, в перечень которых входят: ценностно-смысловая, общекультурная, учебно-познавательная, информационная, коммуникативная, социально-трудовая, личностная компетенция.

Для того чтобы как-то упорядочить последующую трактовку компетентностей, разработчики “Стратегии модернизации содержания общего образования” предлагают разграничение компетентностей по сферам, полагая, что в структуре ключевых компетентностей должны быть представлены:

– компетентность в сфере самостоятельной познавательной деятельности, основанная на усвоении способов приобретения знаний из различных источников информации, в том числе внешкольных;

– компетентность в сфере гражданско-общественной деятельности (выполнение ролей гражданина, избирателя, потребителя);

– компетентность в сфере социально-трудовой деятельности (в том числе умение анализировать ситуацию на рынке труда, оценивать собственные профессиональные возможности, ориентироваться в нормах и этике взаимоотношений, навыки самоорганизации);

– компетентность в бытовой сфере (включая аспекты собственного здоровья, семейного бытия и проч.);

– компетентность в сфере культурно-досуговой деятельности (включая выбор путей и способов использования свободного времени, культурно и духовно обогащающих личность)”.

Компетентность можно представить в виде взаимодействующих и взаимопроникающих образований. В структуре компетентности можно вычленить профессионально-содержательный (наличие теоретических знаний по основам наук, изучающим личность человека), профессионально-деятельностный (профессиональные знания и умения, апробированные в действии) и профессионально-личностный (профессионально-личностные качества, определяющие позицию и направленность педагога, как индивида, субъекта деятельности) компоненты.

Существует множество подходов к раскрытию понятия профессиональной компетентности учителя, ее рассматривают и с позиции формы исполнения субъектом педагогической деятельности, а так же как личностного качества, помогающего учителю в деле воспитания и обучения детей, как уровня образованности и общей культуры учителя. Остановимся на следующем определении профессиональной компетентности, как системном явлении, включающем знания, умения, навыки, профессионально значимые качества личности учителя, обеспечивающие выполнение им собственных профессиональных обязанностей.

Современный период развития общества характеризуется активностью и широтой процесса информатизации, огромную роль в котором играет информатизация системы образования. Процесс информатизации системы образования предъявляет новые требования к педагогам школ. Возрастает значимость информационной компетентности учителей и преподавателей, осуществляющих свою профессиональную деятельность в условиях широкого внедрения средств ИКТ в образовательное пространство школы. Одной из ключевых компетенций выделяют информационную.

Информационная компетентность – понятие сравнительно новое. Информационная компетентность предполагает освоение обобщенных видов информационной деятельности человека (сбор, поиск, хранение, обработка информации) на основе использования ИКТ, способов использования ИКТ в профессионально-педагогической деятельности [1].

Разные исследователи предлагают множество определений информационной компетентности, остановимся на определении Н.А. Воиновой и А.В. Воинова, которые определяют содержание информационной компетентности как сочетание информационно-технологических и информационно-технических компонентов:

– владение конкретными навыками по использованию технических устройств;

– способность использовать в своей деятельности компьютерную информационную технологию;

– умение извлекать информацию из различных источников (как из периодической печати, так и из электронных коммуникаций), представлять ее в понятном виде и эффективно использовать;

– владение основами аналитической переработки информации;

– умение работать с различной информацией;

– знание особенностей информационных потоков в своей предметной области [2].

Информационная компетнентность имеет двойственную функцию, поскольку ее формирование является одной из целей образования, и в то же время она является ведущим средством обучения.

Одним из главных средств достижения высокого уровня мастерства учителя является использование в педагогической деятельности информационных и коммуникационных технологий (ИКТ). С повышением технического уровня средств ИКТ разрабатывались и совершенствовались научно-педагогические подходы их применения в образовательном процессе.

Проведение уроков с использованием информационных технологий является огромным стимулом в обучении. Посредством таких занятий активизируются психические процессы учащихся: восприятие, внимание, память, мышление; гораздо активнее и быстрее происходит возбуждение познавательного интереса.

Информационные технологии не только облегчают доступ к информации и открывают возможности вариативности учебной деятельности, ее индивидуализации и дифференциации, но и позволяют по новому организовать взаимодействие всех субъектов обучения, построить образовательную систему, в которой ученик был бы активным и равноправным участником образовательной деятельности. При этом средства ИКТ могут представлять следующие возможности: источник учебной информации; наглядное пособие (качественно нового уровня с возможностями мультимедиа и телекоммуникаций); тренажер; средство диагностики и контроля [3].

Процесс формирования информационной компетентности учителя математики должен ориентироваться на следующие компоненты:

1. Должны учитываться основные направления информатизации образования.

2. Информационные технологии в учебно-познавательной деятельности будущего педагога должны выступать в качестве предмета изучения и средства обучения, а также средства решения профессионально ориентированных задач.

3. Профессиональная подготовка должна осуществляться посредством реализации системы методических принципов использования средств информационных технологий.

4. Освоение информационными технологиями должно базироваться на принципах комплектности, системности, преемственности и связано с рассмотрением информационной технологии в качестве учебного материала.

5. Профессиональная подготовка будущих учителей математики в условиях педвуза должно включать в себя специальным образом организованную систему учебных и педагогических практик, направленную на формирование информационной компетентности в условиях информатизации профессиональной среды.

Работа с информацией, как правило, осуществляется при помощи информационных технологий. В информатизации образования наряду со ставшими традиционными компьютерными средствами существует и успешно развивается несколько других направлений. В последнее время большое развитие получило направление портативных специализированных информационных технологий, ориентированных на решение конкретных прикладных задач, получивших название малые средства информационных технологий. Примерами таких технологий являются мобильные телефоны, MP3-плееры, смартфоны, карманные портативные компьютеры, электронные записные книжки и переводчики, коммуникаторы и смартфоны. Примером малых средств информационных технологий, которые успешно применяются в обучении, являются современные научные и графические калькуляторы.

По сравнению с универсальными вычислительными средствами на основе персонального компьютера малые средства информационных технологий имеют ряд преимуществ. Они гораздо компактнее, более надежны, удобнее в эксплуатации и, что немаловажно, намного дешевле. Принципиальным отличием малых средств информационных технологий является то, что они рассчитаны на решение только определенного класса вычислительных задач и вся их электроника рассчитана на решение только этих вычислительных задач и не содержит лишней элементной базы. Поэтому малые средства информационных технологий всегда в несколько раз (в некоторых случаях и порядков) дешевле универсальных средств (компьютеров) и по критерию цена - качество решаемой вычислительной задачи, для которой они созданы, всегда намного эффективнее компьютеров. На рис. 1 представлен инструментарий малых средств информационных технологий.

Вычислительные возможности современных научных, а особенно графических калькуляторов настолько велики, что сейчас уже наблюдается смена терминологии. Все чаще их называют “микрокомпьютерами” или “математическими микрокомпьютерами”. Графические калькуляторы (графические математические микрокомпьютеры) имеют жидкокристаллический дисплей с хорошими характеристиками, вполне достаточными для нормального отображения и исследования графиков самых разнообразных функций, они имеют язык программирования похожий на Бейсик. К ним можно подключать различное проекционное оборудование – мультимедиа проекторы и жидкокристаллическую панель для проецирования изображения с помощью кодоскопа. К ним можно через специальное устройство (анализатор данных) стыковать датчики и они превращаются в мини физическую лабораторию. Причем, время подготовки оборудования – от включения до, например, построения графиков функций или выполнения лабораторных опытов составляет несколько секунд, что намного быстрее компьютера.

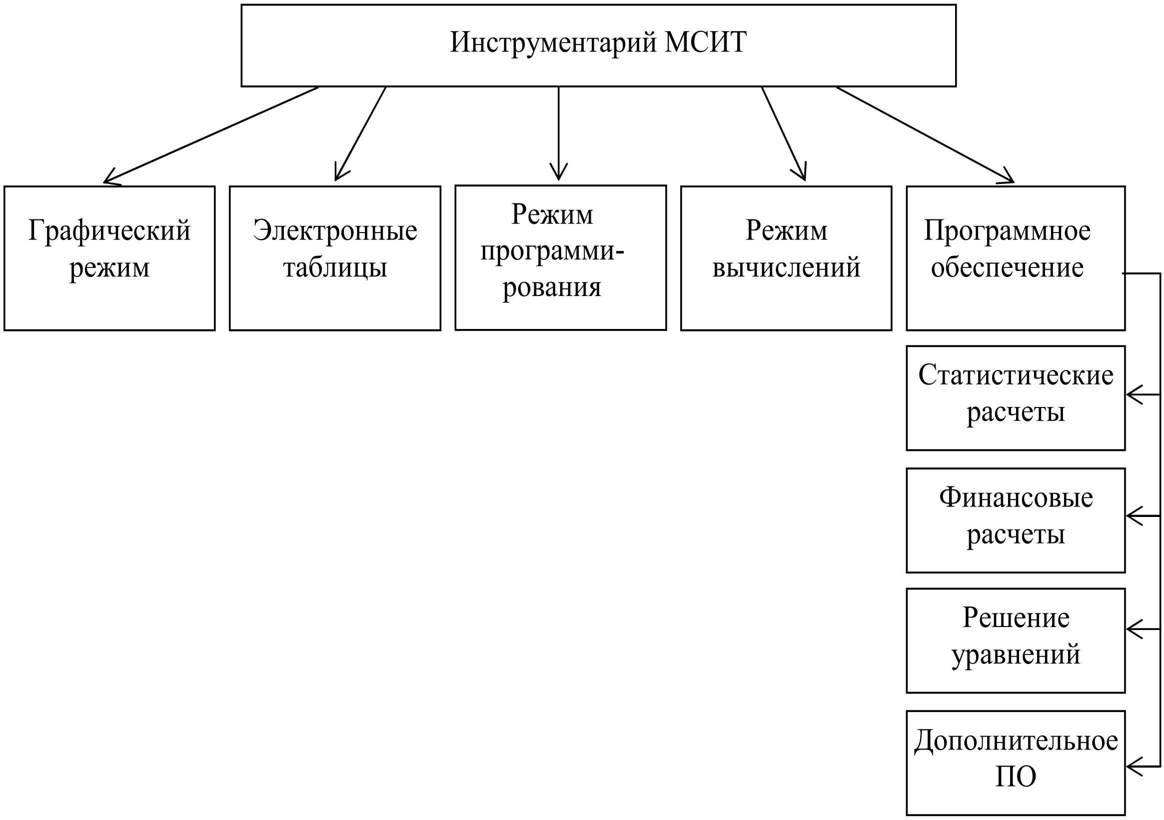


Рис. 1. Инструментарий малых средств информационных технологий

Малые средства информационных технологий обладают большими дидактическими возможностями. Они могут значительно повысить качество и эффективность учебного процесса. Именно этим и объясняется то, что малые средства информационных технологий стали вполне привычным средством обучения в большинстве развитых странах мира, таких, как Япония, США, Германия, Франция, страны Скандинавии. На применение этой технологии ориентированы стандарты, учебные программы и учебники большинства развитых стран мира. В настоящее время в мире создано и создается много учебных и методических пособий по вопросам эффективного применения калькуляторов в обучении, расширению и углублению содержания математической подготовки, применению графических калькуляторов для демонстрации физических явлений и опытов и т.д. И процесс этот продолжается. Отметим, что мировой опыт применения малых средств информационных технологий в обучении математике и ряду другим дисциплинам выглядит очень убедительно. Умение пользоваться научными калькуляторами входит в образовательный минимум многих стран мира.

Преподавание таких предметов, как математика, физика, химия, экономика основано на использовании математических методов, которые являются средствами, позволяющими обобщать, сравнивать, анализировать и делать умозаключения. Применение графических калькуляторов поможет студентам со слабой математической подготовкой стать успешными в освоении дисциплин физико-математического цикла в условиях сокращения учебных часов.

В основе применения малых средств информационных технологий в обучении заложена следующая идея: в современном курсе информатики и ИКТ малые средства информационных технологий должны рассматриваться как объект изучения (в направление этого необходимо углубить содержание сложившегося курса), в то же время они должны применяться как эффективное средство обучения как на уроках информатики, так и других естественно-научных дисциплин. В основу методики применения МСИТ в обучении есественно-научных дисциплин лежат следующие концептуальные положения:

1. Изменение акцентов в учебной деятельности нацеленных на интеллектуальное развитие учащихся за счет уменьшения доли репродуктивной деятельности ставит перед необходимостью введения нового содержания информатики и ИКТ по МСИТ.

2. Учебный материал по обучению работе с МСИТ на уроках информатики и ИКТ должен ориентироваться на опережение учебного материала других дисциплин: математики, физики, экономики и других естественно-научных дисциплин и должен способствовать повышению качества и эффективности как самого предмета информатики и ИКТ так и других естественно-научных дисциплин.

3. Необходима разработка принципиально нового комплекса методического обеспечения обучения информатике и ряду других дисциплин физико-математического и естественно-научного профиля, ориентированных на применение малых средств информационных технологий. Педагогические вузы в связи с этим должны учитывать при подготовке преподавателей и включать такие курсы “Информационные технологии в математике”, “Использование современных информационных и коммуникационных технологий в учебном процессе”, “Технологии и методика обучения математике”, “Методика обучения информатике”, “Методика обучения физике”.

Эти положения нацелены на формирование одной из ключевых компетенций, который выделяет Совет Европы, а именно информационной компетентностью, ее технологическим аспектом: владения новыми технологиями, в том числе малыми средствами информационных технологий.

Библиографический список

1. *Зимняя, И.А.* Ключевые компетенции – новая парадигма результата образования [Текст] / И.А. Зимняя // Высшее образование сегодня. – 2003. – № 5. – С. 34-42.

2. *Сенкевич, Л.Б.* Формирование информационной компетентности будущего учителя математики средствами информационных и коммуникационных технологий [Текст]: дис. ... канд. пед. наук: 13.00.02 / Л.Б. Сенкевич. – Тобольск, 2005. – 181 с.
3. *Роберт, И.* Основные направления научных исследований в области информатизации профессионального образования [Текст] / И. Роберт, В. Поляков. – М.: Образование и информатика, 2004.

О формировании профессионально-педагогической направленности будущего учителя математики в педвузе

А.Ю. Скорнякова

Нередко у выпускников педвуза наблюдается отсутствие положительного отношения к учительской профессии, следствием чего является нежелание работать в сфере образования. Поэтому необходим поиск путей решения задачи формирования профессионально-педагогической направленности студентов в течение вузовской математической подготовки.

В общепсихологических, психолого-педагогических теориях понятие направленности личности, профессиональной направленности будущего специалиста понимается неоднозначно и представлено в развитии: как система устойчиво доминирующих интересов (Л.И. Божович, А.Н. Леонтьев, С.А. Рубинштейн и др.), как личностное новообразование, которое формируется в результате социально-нравственного, профессионального и личностного самоопределения (Е.А. Климов), как эмоционально-ценностное отношение к профессии (Н.В. Кузьмина, Н.Д. Левитов, Г.А. Томилова и др.), как комплекс профессионально значимых качеств личности и профессиональных способностей (Ф.Н. Гоноболин, А.Н. Леонтьев, В.А. Сластенин, А.И. Щербаков и др.), как модель рефлексивного управления развитием обучающихся (В.С. Вершловский, Ю.Н. Кулюткин, Г.С. Сухобская, И.В. Фастовец и др.). Некоторые ученые рассматривают профессиональную направленность личности как систему, выделяют ее структуру, критерии отражения внутрисистемных связей (интерес к профессиональной сфере, отношение к профессиональной деятельности, характер и содержание представлений о профессии) (А.К. Маркова, Л.И. Кунц и др.) [1]. Большинство современных исследователей придерживаются формулировки понятия “процесса формирования профессионально-педагогической направленности студента в вузе” как процесса технологического управления условиями и факторами, способствующими развитию у обучающихся профессионального интереса и мастерства, пониманию общественного смысла и личностной значимости профессионально-педагогической деятельности, сознательного и творческого отношения к профессии и индивидуального стиля работы [1]. Вопросам профессионально-педагогической направленности будущих учителей математики значительное внимание уделяют А.Г. Мордкович, Г.Л. Луканкин, А.И. Нижников, Н.И. Батьканова и др.

Один из путей решения задачи формирования профессионально-педагогической направленности студентов в течение вузовской математической подготовки намечает имеющийся в Пермском государственном педагогическом университете опыт использования интерактивных форм обучения будущих учителей математики в рамках их аудиторной и внеучебной [2] работы. В частности, на занятиях курса по выбору "Математическая экономика" организуются дискуссии, участие студентов в проектной деятельности, в создании мультимедийных презентаций обучающего характера, в разработке практических задач и демонстрации их одногруппникам.

Курс "Математическая экономика" проводится в пятом семестре и преследует цель знакомства студентов с математическими методами решения экономических задач, связанных с планированием и организацией производственной деятельности, с определением будущей стоимости финансов и др. В рамках 34 и 32 часов аудиторной и самостоятельной работы соответственно изучаются следующие темы: "Системный подход и математические модели экономических объектов", "Элементы финансового анализа" и "Основы линейного программирования". Рассматривая вторую из них, обучающиеся организуют дискуссии, обмениваясь мнениями по поводу эффективности кредитования банками города Перми и выясняя экономическую выгоду от накопления нужной для покупки суммы, а также от взятия ссуды (для подготовки предварительно составляется обзор процентных ставок по различным видам кредитов). При этом большое внимание уделяется развитию речи студентов: им предлагается обоснованно высказывать свои точки зрения, ссылаться на известные правила, факты, высказывать догадки, предлагать способы решения проблем, задавать вопросы, вести переговоры, публично выступать. Подобная организация образовательного процесса способствует формированию следующих необходимых для будущего учителя умений: слушать, учитывать точку зрения обучающегося и не игнорировать его чувства и эмоции, содержательно и убедительно говорить, а также ставить себя на позицию другого. В результате студенты на практике овладевают методикой ведения дискуссии, как возможной формы педагогического общения. Кроме того, при изучении темы "Элементы финансового анализа" они самостоятельно придумывают задачи на вычисление стоимости финансов, отрабатывают действия по их решению на аудиторном занятии путем выступления перед остальными обучающимся и оформляют свои наработки в виде мини-рефератов. Приведем примеры задач, для которых в рамках указанного курса осуществлялась соответствующая деятельность студентов.

Задача 1. *Планируется получить через* 5 лет 300 *тыс. рублей на учебу. Сколько средств нужно вложить на банковский депозит, если гарантируется ежегодное начисление* 8%*?* Для решения используется формула $PV = FV(1+R)^{-n}$, где FV и PV – итоговая и текущая суммы соответственно; R – процентная ставка; n – количество лет. Подставив данные $PV = 300\,(1+0,08)^{-5}$, приближенно получим 204 тыс. рублей.

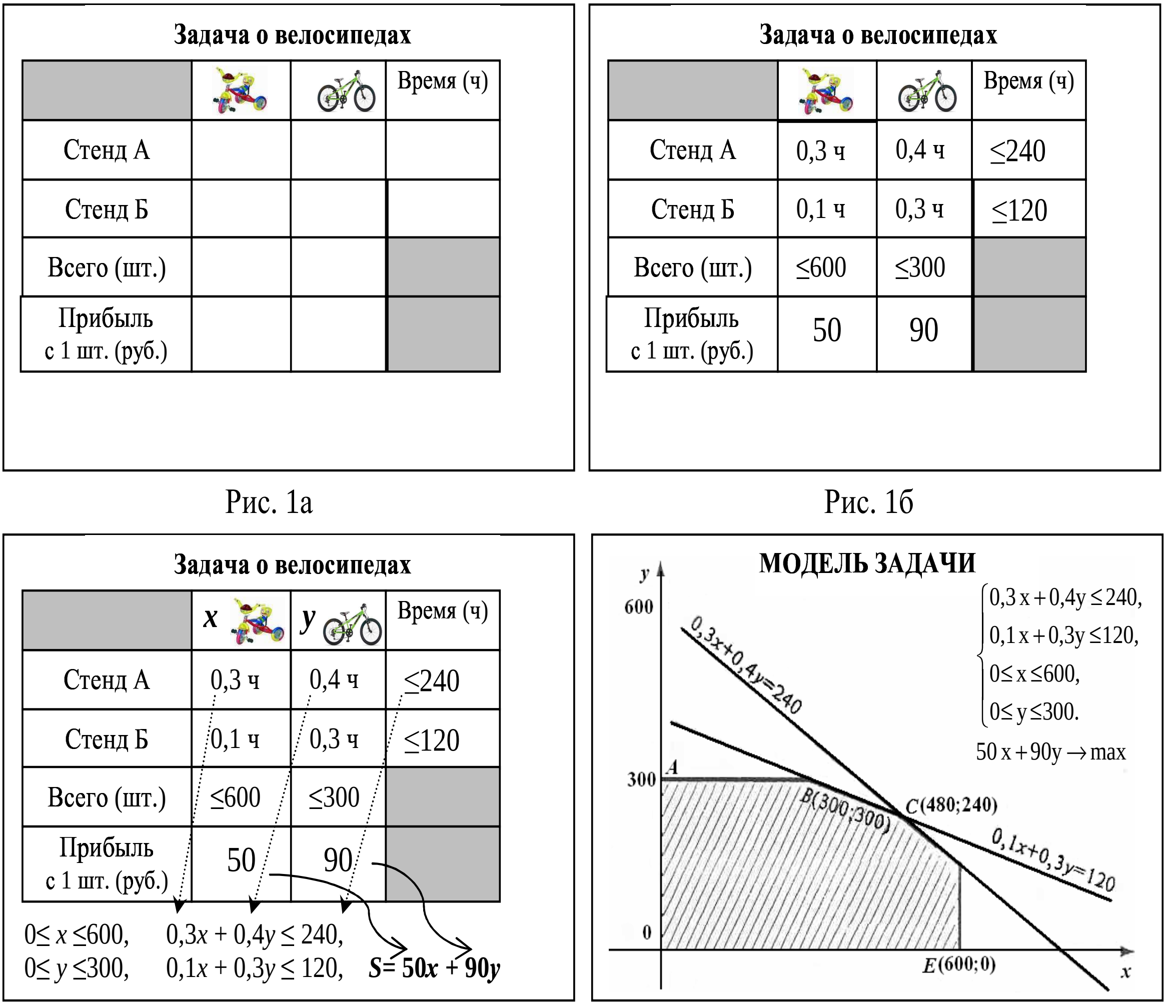
Формулирование обучающимися данной задачи демонстрирует у них педагогическую способность связывать учебный предмет с реальной жизнью.

Задача 2. *Студенту* 22 *года, он решил накопить на пенсию и планирует раз в год в начале периода вкладывать* 2 *тыс. рублей. Какая сумма накопится к пенсии? Сколько необходимо вкладывать, чтобы она составила* 15 *тыс. рублей, если гарантируется процентная ставка* 8 *% годовых?* Итоговая сумма определяется по формуле $FV = PMT\frac{(1+R)^n-1}{R}\,(1+R)$, где PMT – величина аннуитета, вносимая в каждый период. Подставив указанные в условии значения, получим $FV = 2000\frac{(1+0{,}08)^{33}-1}{0{,}08}\,(1+0,08)$ ≈315253,34 рублей. Далее определим вкладываемую сумму для накопления 15 тыс. рублей: $PMT = \frac{R\cdot FV}{(1+R)^n-1}\cdot\frac{1}{1+R} = \frac{0{,}08\cdot 15000}{(1+0{,}08)^{33}-1}\cdot\frac{1}{1+0{,}08}$ ≈95,162 рублей.

Особенностью задачи является привлечение для ее решения знаний из различных предметных областей: теории процентов, финансовой терминологии и др. Указанные задания и описанная выше деятельность по работе над ними дают возможность студентам на практике ощутить интегративный характер обучения математике и экономике, а также проявить важные для будущего учителя умения: объяснять, пользоваться вербальными и невербальными средствами передачи информации, организовывать и поддерживать педагогический диалог, активно слушать ученика.

При изучении темы “Элементы линейного программирования” в формировании профессионально-педагогической направленности студентов особую роль играют компьютерные презентации, сопровождающие деятельность по решению задач, описание одной из которых приведено ниже.

Задача. *Фирма выпускает прогулочные и спортивные велосипеды. Ежемесячно сборочный цех способен собирать не более* 600 *прогулочных и* 300 *спортивных велосипедов. Качество велосипеда оценивается* *на двух стендах А и Б: прогулочный проверяется* 0,3 *часа на А и* 0,1 *часа – на Б, спортивный проверяется* 0,4 *часа на А и* 0,3 *часа – на Б. По технологическим причинам в месяц стенд А не может работать более* 240 *часов, а стенд Б – более* 120 *часов. Реализация одного прогулочного велосипеда приносит доход в* 50 *рублей, а каждого спортивного –* 90 *рублей. Сколько прогулочных и спортивных велосипедов должна ежемесячно выпускать фирма, чтобы ее прибыль была наибольшей?* Рассмотрим некоторые фрагменты решения. Студентам дается задание свести условие в таблицу, структура которой высвечивается на слайде (рис. 1а).



Задача о велосипедах

			Время (ч)
Стенд А			
Стенд Б			
Всего (шт.)			
Прибыль с 1 шт. (руб.)			

Рис. 1а

Задача о велосипедах

			Время (ч)
Стенд А	0,3 ч	0,4 ч	≤240
Стенд Б	0,1 ч	0,3 ч	≤120
Всего (шт.)	≤600	≤300	
Прибыль с 1 шт. (руб.)	50	90	

Рис. 1б

Задача о велосипедах

	x	y	Время (ч)
Стенд А	0,3 ч	0,4 ч	≤240
Стенд Б	0,1 ч	0,3 ч	≤120
Всего (шт.)	≤600	≤300	
Прибыль с 1 шт. (руб.)	50	90	

$0 \le x \le 600$, $0,3x + 0,4y \le 240$,

$0 \le y \le 300$, $0,1x + 0,3y \le 120$, $S = 50x + 90y$

Рис. 1в

МОДЕЛЬ ЗАДАЧИ

$$\begin{cases} 0,3x + 0,4y \le 240, \\ 0,1x + 0,3y \le 120, \\ 0 \le x \le 600, \\ 0 \le y \le 300. \end{cases}$$

$50x + 90y \to \max$

Рис. 1г

Рис. 1. Фрагменты презентации этапов решения задачи

По мере диктовки ответов в презентации включается анимация и на экране появляются заполненные ячейки шаблона (рис. 1б). Далее обучающимися составляется математическая модель, в которой за x и y обозначается количество ежемесячно выпускаемых прогулочных и спортивных велосипедов соответственно. Преподавателем обращается внимание на условии 0$\leq x \leq$600,0$\leq y \leq$300 и акцентируется, что занятость стенда А0,3x+0,4y(часов) не должна превышать 240 часов, а прибыль фирмы составляет $S(x, y)$ =50x+90y (рублей). После этого студентами составляются неравенства ограничений, о которых идет речь в задаче. Ответы сопровождаются высвечиванием соответствующих выражений на доске (рис. 1в). В результате решение сводится к математической задаче нахождения целых значений x и y, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} 0,3x + 0,4y \leq 240, \\ 0,1x + 0,3y \leq 120, \\ 0 \leq x \leq 600, \\ 0 \leq y \leq 300 \end{cases}$$

и таких, чтобы прибыль была наибольшей (50x+90$y \to \max$). Далее обучающимися составляется графическая модель решения, после чего на экране демонстрируется поэтапное построение (рис. 1г): вслед за областью появляется график функции $y = -\frac{50}{90}x$, его передвижением с помощью анимации находится граничная точка С, в которой функция $S(x, y)$ принимает наибольшее значение. В итоге искомая прибыль достигается при выпуске 480 прогулочных и 240 – спортивных велосипедов. Указанная деятельность по работе над задачей позволяет развивать комплекс профессиональных способностей: делать учебный материал доступным, организовывать коллектив и проявлять творчество в работе.

В формировании профессионально-педагогической направленности студентов особую роль играет подготовка и защита проектов, выступающая в качестве итоговой формы контроля, подводящей изучение материала к логическому завершению. Проект представляет собой презентацию личной фирмы и включает математические расчеты прибыли и других показателей деятельности организации, определенных в течение всего курса. Каждый проект оформляется в виде письменного отчета и презентации PowerPoint. Проектная деятельность позволяет удовлетворять личные потребности и интересы, выявлять персональные возможности, т.е. максимально индивидуализировать обучение.

В целом использование на занятиях курса по выбору “Математическая экономика” описанных выше интерактивных форм обучения способствует пониманию студентами общественного смысла и личностной значимости педагогической работы, формированию у них профессионального интереса, сознательного и творческого отношения к процессу преподавания, профессионального мастерства и индивидуального стиля деятельности. Кроме этого, у будущих учителей математики складывается положительное впечатление об учительской профессии, следствием чего является их желание работать в сфере образования.

Библиографический список

1. *Ковкина, И.В.* Развитие профессиональной направленности студентов в учебной деятельности [Текст] / И.В. Ковкина // Вестник Костромского государственного университета им. Н.А. Некрасова. – Кострома, 2007. – № 1.– С. 64-69.
2. *Скорнякова, А.Ю.* Об использовании информационных технологий во внеучебной работе по математике [Текст] / А.Ю. Скорнякова // Материалы XXVII Всероссийского семинара преподавателей математики университетов и педагогических вузов. – Пермь: Перм. гос. пед. ун-т., 2008. – С. 240-241.

Развитие исследовательских компетенций студентов в процессе обучения фрактальной геометрии

Е.С. Стакина

Различные изменения в современном обществе диктуют необходимость в совершенствовании, а также в улучшении качества подготовки педагогических кадров. В наши дни школа нуждается в учителях, способных работать в быстроизменяющихся условиях окружающего мира, готовых к принятию новых образовательных задач и педагогических инноваций. Этого можно добиться, если осуществлять обучение будущих учителей с позиции компетентностного подхода, т.е. формировать соответствующие компетенции.

Разграничивая смысловые значения понятий “компетенция” и “компетентность”, мы будем придерживаться точки зрения А.В. Хуторского, который под компетенцией понимает некоторое отчужденное, наперед заданное требование к образовательной подготовке обучаемого, а под компетентностью – уже состоявшееся его личностное качество (характеристику) [2].

Таким образом, в нашем исследовании компетентность мы соотнесем с педагогической сферой деятельности, и определим, как индивидуальную характеристику педагога, которая включает в себя содержательную (знания, умения, навыки), структурную (уровни педагогического мастерства) и личностную (качества личности, способности) составляющие и оценивается эффективностью решения педагогических задач.

На основе изучения научных трудов по проблеме определения понятия “компетенции”, мы можем считать, что к компетенциям в настоящее время относят:

– совокупность знаний, умений и навыков человека, необходимых для эффективного решения поставленных задач;

– необходимые личностные качества (способности, способы деятельности), значимые для продуктивной работы в определенной предметной области.

В ходе дискуссий о возможности реализации компетентностного подхода в образовании, большое значение принимает разработка структуры компетенций специалиста. Этой проблеме посвящено множество научных трудов [В.И. Байденко, Н.В. Кузьмина, Л.М. Митина, Н.А. Селезнева, В.А. Тестов, В.Д. Шадриков]. Некоторые из этих авторов [В.И. Байденко, Н.А. Селезнева, В.Д. Шадриков] разделяют компетенции на группу ключевых (универсальных, надпредметных) и профессиональных (предметно-специализированных). Мы будем придерживаться их точки зрения. Таким образом, общая структура компетенций учителя-предметника выглядит следующим образом (рис. 1):

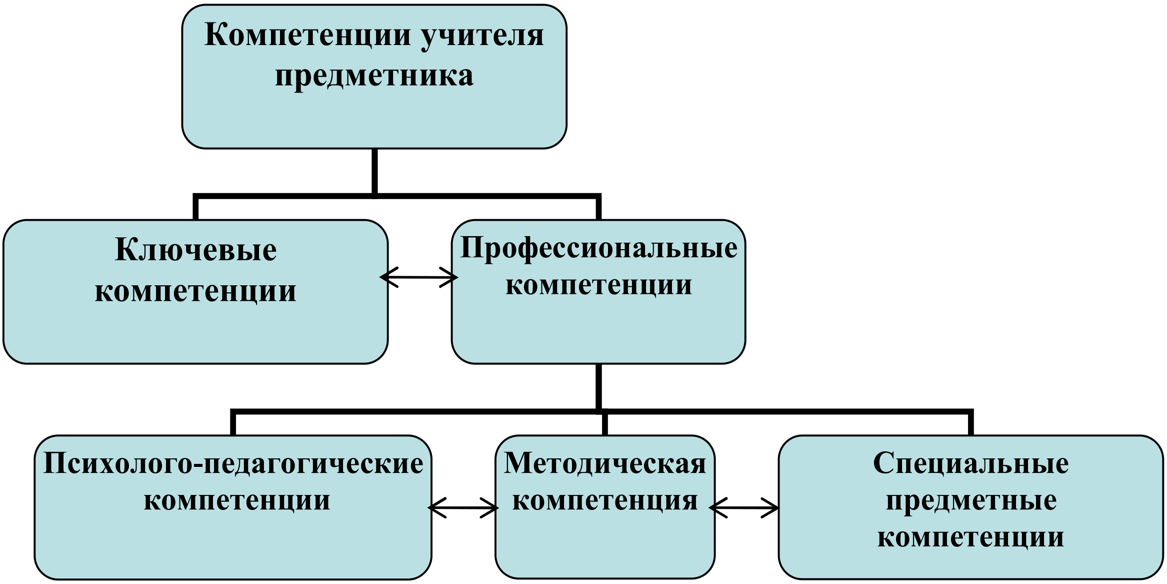


Рис. 1. Общая структура компетенций учителя-предметника

Ключевые компетенции мы будем рассматривать как базис необходимых знаний, умений и навыков в жизнедеятельности человека, а также необходимые качества личности, на основе которых будет формироваться профессиональная компетентность. В качестве основы была выбрана структура ключевых компетенций А.В. Хуторского (ценностно-смысловые, общекультурные, учебно-познавательные, информационные, коммуникативные, компетенции личностного самосовершенствования, социально-трудовые компетенции).

Отдельно выделим и рассмотрим такую составляющую психолого-педагогических компетенций, как исследовательская компетенция. Анализ литературных источников по указанному аспекту показал недостаточность психолого-педагогических и методических исследований, которые напрямую касались бы развития исследовательских компетенций будущих учителей математики.

Под исследовательской компетенцией мы будем понимать устойчивый интерес к изучению нового материала, способность выбрать и определить область интересующей проблемы, провести исследование, проанализировать его результаты и вынести их на обсуждение.

В школах, как известно, сейчас рассматривают те вопросы математики, которые изучались столетия назад. Однако наука не стоит на месте. Поэтому компетентный учитель математики должен быть осведомлен во всех направлениях развития своего предмета. Таким новым направлением в развитии математики является фрактальная геометрия. Эта наука на сегодняшний день имеет множество сфер применения (физика, медицина, метеорология, компьютерная графика). Задачи из области фрактальной геометрии также отличаются нестандартностью и новизной методов решения. Таким образом, при соответствующей организации обучения занятия по фрактальной геометрии, по нашему мнению, будут способствовать развитию исследовательских компетенций студентов.

Формы обучения характеризуются следующими:

1) традиционные лекции предполагаются в малом количестве; все основные теоретические знания студенты получают в процессе самостоятельной работы с источниками;

2) основная форма обучения – самостоятельная работа в микрогруппах (3-5 человек) по выполнению и представлению разного рода докладов, презентаций, исследований и проектов;

3) используются различные формы контроля: тестовые, лабораторные работы, защита проектов перед группой студентов и преподавателей, устные и письменные зачеты;

При организации обучения особое внимание также уделяется:

1) единой цели и общему результату работы микрогруппы;

2) самостоятельности студентов в распределении заданий, в выборе источников и форм выполнения (в сроках выполнения ограничения существуют);

3) творческому подходу к выполнению заданий (поиск новой интересной информации, оригинальность решений, указание нескольких способов решения задачи или поставленной проблемы, уход от шаблонных решений и стереотипов мышления);

4) умению анализировать и представлять результаты, формулировать и аргументировать свою точку зрения;

5) умению оценивать свою работу и работу своих коллег.

В качестве примера рассмотрим одну из форм организации обучения на факультативных занятиях по фрактальной геометрии, такую как проектная деятельность. На первом этапе работы происходит ориентировка в содержание темы, распределение групповых заданий, постановка вопросов и задач. Студенты делятся на микрогруппы и выбирают одну из тем, предложенных преподавателем. Могут быть обозначены следующие темы: “Классические фрактальные множества”, “Фрактальная размерность”, “Метод итераций”, “Эстетика фракталов” и т.п. Каждой группе выдаются вопросы в рамках определенной темы и список задач для решения. К примеру, тему “Классические фрактальные множества” могут сопровождать следующие задачи:

1) Найдите длину кривой Коха – T (рис. 2);

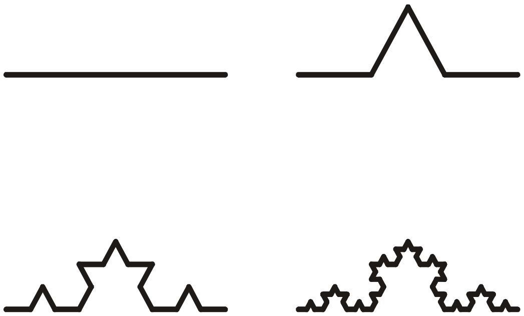


Рис. 2. Кривая Коха

2) Постройте вариацию снежинки Коха;

3) Найдите диаметр n-ой итерации снежинки Коха;

4) Покажите, что сумма площадей треугольников, выкинутых при построении треугольника Серпинского, равняется площади исходного треугольника (рис. 3);

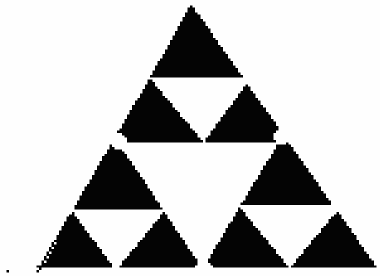


Рис. 3. Треугольник Серпинского

5) Постройте вариацию ковра Серпинского.

Второй этап – этап самостоятельной работы. Преподаватель выступает в роли консультанта. Студентам предлагается собрать дополнительный материал по теме исследования с использованием рекомендуемой литературы и Интернета; самостоятельно изучить методы решения задач по выбранной теме, решить задачи и представить их решения; подготовить презентацию своего исследования.

Третий этап – защита проектов. Каждой группе отводится время для выступления, представления своего проекта и решенных задач. В конце этого этапа преподаватель подводит итоги о степени рассмотрения группами предложенных разделов курса и степени решения поставленных задач. Далее необходимо провести комбинированные практические занятия с целью осмысления студентами всех предложенных тем.

Отметим, что проектная деятельность – это лишь одна из форм организации обучения на занятиях по фрактальной геометрии. В целом же, помимо развития исследовательских компетенций, такая организация обучения фрактальной геометрии способствует:

1) интенсивному росту самостоятельности студентов;
2) готовности студентов к работе в команде;
3) развитию коммуникативных умений;
4) развитию творческого мышления;
5) развитию умения решать профессиональные проблемы;
6) развитию целеустремленности, уверенности в своих силах;
7) стремлению студентов к саморазвитию.

Мы представили лишь одну из компетенций учителя-предметника, и показали, как можно осуществить ее развитие в рамках факультативных занятий по фрактальной геометрии. На самом деле потенциал этой научной области гораздо шире, и в дальнейшем можно рассмотреть вопрос о том, какое влияние оказывает обучение фрактальной геометрии на формирование профессиональных компетенций будущего учителя математики в целом.

Библиографический список

1. *Кузьмина, Н.В.* Профессионализм личности преподавателя и мастера производственного обучения [Текст] / Н.В. Кузьмина. – М., 1990.
2. *Хуторской, А.В.* Ключевые компетенции как компонент личностно-ориентированного образования [Текст] / А.В. Хуторской // Народное образование. – 2003.

Алгоритмические умения как основа формирования компетенций

Л.Н. Удовенко

В современный процесс образования прочно входит компетентностный подход [5, 7], ключевыми понятиями которого являются компетенции и компетентности. Под *компетенциями* понимают единицы социализации (процесса присвоения, освоения человеком социальных норм и ценностных ориентиров). Это позволяет прогнозировать более гибкое социальное поведение индивида, комфортность его пребывания в обществе, эффективность (для себя и для общества) исполнения определенных социальных ролей. Компетенция интерпретируется как социокультурная умелость, способность и готовность встраиваться в ситуацию, читать социальные тексты и адаптироваться в социуме.

Существуют различные трактовки понятия “компетентность”. Все они сходственны и, как правило, включают в себя две основные составляющие: когнитивную (знания) и операционную (способы деятельности и готовность к осуществлению деятельности), неразрывно связанные между собой. О.С. Таизова и А.А. Пинский [9, с. 24] предлагают еще и третью составляющую – аксиологическую (наличие определенных ценностей), так как в основе компетентностного подхода лежит культура самоопределения и самореализации (способность и готовность самоопределяться, самореализовываться, саморазвиваться) в реальных общественно-исторических условиях. Тогда *компетентность* есть способность индивида к активному, ответственному жизненному действию, осуществляемому на основе ценностного самоопределения, способность активно взаимодействовать с миром, в ходе этого взаимодействия понимать, изменять себя и мир.

Опираясь на идеи личностно-ориентированного обучения, под *компетентностью* можно понимать меру включенности человека в деятельность (Б.Д. Эльконин) [9]. Данная трактовка не противоречит подходу А.В. Хуторского, который для разделения общего и индивидуального [8] предлагает различать часто используемые понятия “компетентность” и “компетенция”. *Компетенция* рассматривается им как совокупность взаимосвязанных качеств личности (знаний, умений, навыков, способов деятельности), задаваемых по отношению к определенному кругу предметов и процессов, и необходимых для качественной продуктивной деятельности по отношению к ним. Под *компетентностью* автором понимается владение [обладание] человеком соответствующей компетенцией, включающей его личностное отношение к ней и предмету (объекту) деятельности.

Результатом поиска подходов к реализации компетентностно-ориентированного образования считаем определение методической целесообразности и оправданности формирования знаниевой базы и комплекса навыков и умений, а также элементов функциональной грамотности, под которыми мы понимаем социально приемлемые алгоритмы действий в типичных, стандартных ситуациях с целью выхода в дальнейшем за рамки этих стандартных типичных ситуаций для получения интегрированного результата обучения – формируемых компетентностей. В соответствии с разделением содержания образования на общее метапредметное (для всех предметов), межпредметное (для цикла предметов или образовательных областей) и предметное (для каждого учебного предмета) А.В. Хуторской [10] представляет понятие образовательных компетенций и их иерархию следующей классификацией компетенций: 1. *Ключевые компетенции* – относятся к общему (метапредметному) содержанию образования. 2. *Общепредметные компетенции* – относятся к определенному кругу учебных предметов и образовательных областей. 3. *Предметные компетенции* – частные по отношению к двум предыдущим уровням компетенции, имеющие конкретное описание и возможность формирования в рамках учебных предметов. Г.А. Клековкин, Е.А. Самойлов утверждают теоретическую и практическую целесообразность определения и разграничения *общих, специальных и ключевых компетентностей.* Первые допускают широкий перенос из одной деятельности в другую, всякий раз обеспечивая при этом эффективность и результативность действующей личности. Вторые рассматриваются как общие компетентности, приобретшие черты оперативности под влиянием требований конкретной деятельности. Третьи – как общие компетентности, приобретшие черты оперативности на определенном историческом этапе развития цивилизации, общества, конкретного государства или социальной общности [4, с. 174].

Каждый школьный предмет призван помимо знаниевой базы дать ученику вполне определенные компетентности. С этой точки зрения анализ возможностей школьной математики приводит нас к целесообразности специального рассмотрения учебного математического материала. Для этого было рассмотрено понятие содержательно-методической линии школьного курса математики [2, с. 50]. Эта специфическая категория позволяет изучать методические особенности учебных материалов и конструировать их. Под методической линией мы понимаем “сечение” курса школьной математики, в которое попадают тематически идейно связанные, но композиционно разъединенные фрагменты учебников. Материал, относящийся к каждой линии, изучается длительное время, нередко на протяжении всего курса, так, что эту линию можно рассматривать не только с точки зрения установления преемственных и внутрипредметных, но и межпредметных связей, а также связей, выходящих за рамки изучения отдельных школьных дисциплин.

К основным для школьной алгебры линиям относим, в частности, алгоритмическую. Она связана со всем курсом школьной математики, в алгебре отражена частично, насколько позволяют возможности и специфика учебного материала. Эта линия пронизывает всю школьную математику, начиная с первых шагов математического образования и до окончания школы. Уже в начальной школе в явном виде алгоритмы появляются при решении уравнений, в которых неизвестные находятся ***по правилу***. Например, неизвестное слагаемое находится как разность между суммой и известным слагаемым, или, чтобы найти делитель, нужно делимое разделить на частное. А вот при изучении начал математического анализа алгоритмизация учебного материала усложняется, обогащается содержанием. Так, при развертывании функциональной линии мы учимся решать задачи, направленные на освоение и использование учащимися свойств функций. Стандартный пример – это нахождение наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке. Иногда достаточно найти значения функции на концах, сравнить и объявить, которое из них будет наибольшим, а которое – наименьшим. А иногда требуется учет свойств функции на заданном отрезке таких как, например, непрерывность, монотонность функции на отрезке и др. В таких случаях происходит изменение не столько алгоритма в смысле предписания последовательности выполнения действий, сколько алгоритма осуществления мыслительных действий, что свидетельствует о выходе алгоритмической линии за собственные рамки, ее проникновении в другие содержательно-методические линии школьной математики, о ее влиянии на их структурные компоненты и содержательное наполнение. В этом состоит важная особенность алгоритмической линии, отличающая ее от других содержательно-методических линий. К особенностям алгоритмической линии относим и то, что ведущее для алгоритмической линии понятие – алгоритм – в начале курса не выделяется и, по существу, остается в нем изолированным, поскольку понятие блок-схемы выполняет только иллюстративные функции, а представление о программе и алгоритмических языках дается в ознакомительном плане. Понятие алгоритма служит предметом изучения на уроках математики весьма короткое время и, в основном, фрагментарно, используется в ограниченном масштабе, главным образом как термин, под которым понимается ***правило***, ***последовательность операций***, ***предписание*** и т.п. для того, чтобы подчеркнуть алгоритмический характер действий. Для алгоритмической линии характерна пропедевтика понятия алгоритма, которая производится при помощи определенной организации материала ***других*** линий, в сравнении с которыми характеристикой алгоритмической линии может служить ее ***невыявленность*** в школьном курсе математики. Эта невыявленность часто оказывается поводом для недооценки роли алгоритмической линии при обучении. Однако алгоритмическая составляющая мыслительной деятельности позволяет судить не только о сформированности логических структур в сознании (Ж. Пиаже), но и об уровне сформированности логического мышления субъекта.

Как показывают немногочисленные теоретические исследования и опыт практической деятельности, в основе любой из формируемых компетентностей лежат алгоритмические умения. В связи с этим всем осваиваемым понятиям независимо от содержательной принадлежности целесообразно давать алгоритмическое “наполнение” с первых шагов изучения. Предлагаемый путь освоения понятия “алгоритм” можно применять не только с акцентом на освоение конкретной процедуры, но и для постепенного формирования представления об общих чертах всех операционных блоков.

Разводя понятия *компетенция* и *компетентность*, важно то, что алгоритмические умения по сути есть компетенции, присущие всем компетентностям, чьи бы авторские подходы и суждения мы не рассматривали. При этом особенно выпукло алгоритмические умения проявляются при проведении анализа ключевых компетентностей/ций. Алгоритмические умения, как компетенции, формируются и развиваются наиболее эффективно, если в процессе обучения используются самые разнообразные виды деятельности. На начальном этапе формирования компетентности велика роль предметной деятельности. Эта деятельность в процессе вербализации приобретает новое качество, позволяющее алгоритмизировать не только предметную деятельность, но и мыслительную. Алгоритмические умения становятся уже не предметом обучения, а средством “добывания” знаний, пожалуй, даже средством планирования такого “добывания” с целью последующего применения, прогнозирования ожидаемых результатов, проведения аналитических срезов получаемых результатов своей деятельности и последующего перспективного планирования.

Формирование алгоритмических умений у учащихся целесообразно осуществлять не только на уроках, но и во внеурочной деятельности. В обоих случаях полезно применять активные формы обучения [1, 6]. Результаты проведенных исследований позволяют говорить об особой значимости метода проектов при формировании алгоритмических умений в рамках компетентностно-ориентированного обучения.

Этот метод предполагает овладение знаниями на активной основе, через целесообразную деятельность учащегося, основанную на его личном интересе в данной знаниевой области. Суть метода заключается в правильно организованном стимулировании интереса обучаемых к решению определенных проблем. Поскольку разрешение любой учебной проблемы требует от ученика владения определенной суммой знаний и способами деятельности, учитель специальным образом организует условия, обеспечивающие развитие познавательных умений и навыков, а также умений самостоятельно конструировать свои знания. Планирование деятельности ученика проходит в условиях алгоритмической деятельности и на основе уже приобретенных алгоритмических умений.

При выборе проблемы проективная деятельность всегда предполагает использование разнообразных методов, средств обучения, с одной стороны, а с другой, интегрирование знаний, умений из различных областей предметного знания, науки, техники, технологии, творческих областей, т.е. предусматривает последовательный “перебор” вариантов путей решения, что напрямую связано с алгоритмической составляющей деятельности учащегося [3]. Процедурно метод проектов в точности повторяет все этапы работы с алгоритмом. Методу проектов также присущи такие свойства как дискретность, детерминированность, результативность, массовость, конечная определенность, которые характеризуют понятие алгоритма.

Таким образом, формирование компетентностей у учащихся неизбежным образом связано с освоением понятия “алгоритм”. В работе мы не коснулись анализа компетентностей, выделяемых различными авторами, с точки зрения их алгоритмической составляющей. Однако каждая из предлагаемых компетенций значительным образом “наполнена” алгоритмическим содержанием.

Библиографический список

1. *Беспалько, В.П.* Педагогика и прогрессивные технологии обучения [Текст] / В.П. Беспалько. – М.: Изд-во Ин-та профессионального образования Минобразования России, 1995. – 336 с.
2. *Блох, А.Я.* Курс алгебры средней школы [Текст]: метод. разработки для слушателей ФПК / А.Я. Блох. – М.: Изд-во МГПИ им. В.И. Ленина, 1986. – 85 с.
3. *Кальней, В.А.* Структура и содержание проектной деятельности [Текст] / В.А. Кальней, Т.М. Матвеева, Е.А. Мищенко, С.Е. Шишов // Стандарты и мониторинг в образовании. – 2004. – № 4. – С. 21-26; – 2004. – № 5. – С. 23-31; – 2004. – № 6. – С. 16-21.
4. *Клековкин, Г.А.* К теории компетентностно-ориентированного обучения [Текст] / Г.А. Клековкин, Е.А. Самойлов // Педагогический

процесс как культурная деятельность: Материалы и тезисы 4-ой Международной научн.-практ. конф. В 2-х т. – Самара: Изд-во Самарский научный центр РАН, 2002. – Т. 1. – С. 170-175.

5. О Концепции модернизации российского образования на период до 2010 года (Приказ от 11.02.02 г. № 393 [Текст] // Вестник образования. – 2002. – № 6. – С. 10-40.
6. *Пахомова, Н.Ю.* Метод учебного проекта в образовательном учреждении[Текст]: пособие для учителей и студентов педагогических вузов / Н.Ю. Пахомова. – М.: АРКТИ, 2003. – 112 с.
7. Приказ Министерства образования Российской Федерации от 1 апреля 2003 г. № 1313 “О программе модернизации педагогического образования” [Текст] // Стандарты и мониторинг в образовании. – 2003. – № 4. – С. 9.
8. Современные подходы к компетентностно-ориентированному образованию [Текст]: материалы семинара / аод ред. А.В. Великановой. – Самара: Изд-во Профи, 2001. – 60 с.
9. *Стоюнин, В.Я.* Избранные педагогические сочинения [Текст] / В.Я. Стоюнин. – М.: Педагогика, 1991. – 368 с.
10. *Хуторской, А.В.* Ключевые компетенции и образовательные стандарты [Текст]: доклад на Отделении философии образования и теоретической педагогики РАО, 23 апреля 2002 г. / А.В. Хуторской. http://www.eidos.ru/news/compet.htm - e-mail: info@eidos.ru

Электронная переписка как одна из форм внеклассной работы

Н.В. Сушенцова

Внеклассная работа в школе имеет большое воспитательное и образовательное значение. Проводимая в тесной связи с урочной, классной работой, внеклассная деятельность, рассматриваемая как одна из фаз процесса обучения, направленного на использование содержания учебного материала в жизненной практике учащихся, углубляет их знания, расширяет способы деятельности, создает условия для реализации индивидуальных способностей школьников, для побуждения у них интереса к самообразованию, к самосовершенствованию. Она призвана удовлетворять постоянно меняющиеся интересы детей и подростков, духовные, социокультурные и образовательные потребности, создавать широкие возможности школьникам для занятий любимым делом.

Внеклассная работа – это организация педагогом различных видов деятельности школьников во внеучебное время, обеспечивающих необходимые условия для социализации личности ребенка.

Внеклассная работа по математике в ее традиционном толковании проводится в школе учителем во внеурочное время с учащимися, проявляющими к математике интерес. Эта работа планируется учителем и по мере необходимости корректируется. Государственных программ по внеклассной работе нет, как нет и норм оценок. На внеклассные мероприятия и занятия ученики приходят по желанию, без всякой предварительной записи. Если у ученика пропадет интерес к внеклассной работе, он прекращает свое участие в ней. Активизация внеклассной работы по математике призвана не только возбуждать и поддерживать у учеников интерес к математике, но и желание заниматься ею дополнительно как под руководством учителя во внеурочное время, так и при целенаправленной самостоятельной познавательной деятельности по приобретению новых знаний, т. е. путем самообучения.

Сформулируем цели и задачи внеклассной работы по математике:

1. Углубление и расширение знаний по математике.
2. Развитие интереса учащихся к предмету.
3. Развитие их математических способностей.
4. Воспитание у школьников интереса и вкуса к самостоятельным занятиям математикой.
5. Воспитание и развитие инициативы и творчества.
6. Интеллектуальное развитие.
7. Подготовка к практической творческой деятельности по любой специальности.
8. Повышение общего уровня развития учащихся.
9. Подготовка школьников к дальнейшему образованию и самообразованию.

Преимущества внеклассной работы:

– занятия организуются на добровольных началах,

– педагог имеет бо́льшую свободу выбора содержания, форм, средств, методов внеклассной воспитательной работы, чем при проведении урока;

– внеклассные занятия учитывают запросы отдельной группы учащихся или индивидуальные наклонности каждого ученика в отдельности;

– позволяют учащимся проявить свой интерес к определенным видам занятий, предусмотренных планом внеклассной работы,

– занятия по внеклассной работе не ограничены жесткими временными рамками,

– имеются возможности для привлечения социального опыта родителей и других взрослых,

– более естественная обстановка, неформальность общения и отсутствие у учащихся напряжения, связанного с оценкой результатов.

Чаще всего в практике внеурочной деятельности встречаются такие формы работы, как: факультативные (элективные) курсы, математические кружки или развивающие часы в 5-6 классах, предметные недели, научно-исследовательская работа, интегрированные внеклассные занятия, олимпиады, математические бои, конкурсы, экскурсии и т.п. Указанные формы часто пересекаются и поэтому трудно провести между ними резкие границы. Более того, элементы многих форм могут быть использованы при организации работы по какой либо одной из них. Например, при проведении математического вечера можно использовать соревнования, конкурсы, доклады и т.д.

Различают два вида внеклассной работы по математике, это:

– работа с учащимися, отстающими от других в изучении программного материала (дополнительные внеклассные занятия);

– работа с учащимися, проявляющими к изучению математики повышенный, по сравнению с другими, интерес и способности (собственно внеклассная работа в традиционном понимании смысла этого термина).

Но можно выделить еще и третий вид работы – работа с учащимися по развитию интереса в изучении математики. Главный упор в данном типе работы делается на развитие интересов математики в соответствии с возможностями этой группы учащихся.

Примером такого типа внеклассной работы по математике может служить электронная переписка учащихся, цель которой, с помощью творческого самовыражения учащихся повысить интерес к предмету. Переписка – это игровая форма организации внеурочной работы. Рассмотрим поэтапно технологию переписки.

I. Подготовительный:

1) оговариваются временные рамки переписки (четверть, полугодие, год);

2) учитель выбирает для переписки пары классных коллективов (желательно, чтобы это были разновозрастные группы);

3) учитель знакомит старшеклассников с целями и задачами игры, предлагает им составить тексты писем с вымышленными историями сказочных героев и математическими заданиями;

4) педагог разбивает классы младших школьников на группы по 2-4 человека по способностям или с учетом интересов школьников. Рекомендуется использовать помощь школьного психолога;

5) в медиатеке учащиеся старших классов создают на компьютерах папку с определенным названием, например, “Домик тетушки Математики”, в которой каждый участник переписки оставляет письмо своему

абоненту. (один старшеклассник может курировать одну или две группы младших школьников).

II. Основной:

1) после того, как написаны все письма для младшеклассников, на бумажном носителе составляется письмо с предложением участвовать в электронной переписке. Это своего рода объявление. В письме указывается место, где учащиеся могут найти индивидуальные задания. Письмо – объявление оказывается в классе младших школьников "загадочным" образом;

2) "малыши" решают задания, пишут ответы на том же компьютере, на котором получили задания. В дальнейшем они могут также предлагать различные задачи старшеклассникам. Разрешается советоваться при решении заданий и оформлении письма на компьютере с одноклассниками, учителем, родителями.

Если школьники в группе "малышей" имеют средние способности по предмету, то в текст письма "вплетаются" задания на закрепление учебного материала. Если способности школьников выше средних, то им предлагаются задачи олимпиадного характера. Младшие школьники также могут предлагать старшеклассникам свои задания.

III. Заключительный:

по итогам переписки проводится мероприятие, в ходе которого, школьники могут познакомиться друг с другом, раскрыть секреты игровых моментов. В заключение праздника вниманию зрителей предлагается слайд-шоу, составленное из фотографий участников и гостей.

Практика показала:

1) увеличение числа участников к концу периода, отведенного на переписку;

2) значительную активизацию работы учащихся на уроке;

3) увеличение числа правильных ответов школьников;

4) совершенствование умений и навыков в работе с компьютером.

Данная форма работы привлекает детей с гуманитарными способностями, т.к. требует фантазии, умения сочинять и рассказывать увлекательные истории. Может быть использована для работы с детьми любого возраста и по любому предмету.

Таким образом, электронная переписка как форма внеклассной работы, организованная с учетом индивидуальных особенностей и потребностей учащихся, позволяет проявлять школьникам, присущие им качества и способности, реализовывать свой потенциал, получать удовлетворение от своей деятельности и утверждаться в коллективе.

Внеклассные занятия с учащимися приносят большую пользу и самому учителю. Чтобы успешно проводить внеклассную работу, учителю приходится постоянно расширять свои познания по математике. Это благотворно сказывается и на качестве его уроков.

С помощью продуманной системы внеурочных занятий можно значительно повысить интерес школьников к математике.

Библиографический список

1. *Сушенцова, Н.В.* Электронная переписка учащихся как действенное средство повышения интереса к предмету [Текст] / Н.В. Сушенцова // Математика в школе. – 2010. – № 4. – С. 57-62.

Практическая направленность в процессе обучения геометрии

О.В. Весновская

Одним из школьных учебных предметов является геометрия. Она обеспечивает готовность человека к непрерывному образованию и самообразованию в самых различных областях человеческой деятельности [1, с. 4]. Ее изучение способствует формированию у школьника логического (дедуктивного) и алгоритмического мышления, аналитико-синтетической деятельности, гибкости, конструктивности, критичности и других качеств мышления. Данный предмет помогает не только в усвоении учащимися определенной суммы знаний, но и в развитии познавательной самостоятельности, что проявляется в способности выдвигать гипотезы, находить новые пути решения геометрических задач.

Однако, как показывают результаты единого государственного экзамена (ЕГЭ), выпускники школ в недостаточной степени владеют знаниями в области геометрии. В целом по Чувашской Республике показатели решения геометрических задач за 2007 год следующие: задачу B9, в зависимости от варианта, решили в среднем около 7% учащихся, задачу B8 – около 10%. Результаты ЕГЭ выявили лишь формальное усвоение школьниками геометрических знаний, неумение применять геометрические знания в жизни, в повседневной практической деятельности [2]. В подавляющем большинстве учащиеся не владеют методами анализа, исследования геометрической ситуации, не способны сформулировать гипотезу решения проблемы, затрудняются в выборе эффективных средств решения задачи, не умеют делать выводы и обобщать свои результаты. В итоге мы наблюдаем низкий уровень знаний по геометрии.

Одним из факторов, обуславливающих данную ситуацию, является недостаточная практическая ориентированность обучения. В результате геометрия в школе превращается в сугубо теоретический предмет.

При этом исчезает связь с окружающим миром, остается только множество чисто формальных определений, и много важных для повседневной жизни знаний по геометрии, так и не находят применения. Оторванность геометрии от практической деятельности – основной недостаток преподавания математики традиционной школы, который является существенной причиной отчуждения школьников от данного предмета, что проявляется в потере интереса учащихся к геометрии [3].

На недостатки существующего подхода к изучению геометрии указывают многие ученые-педагоги (В.А. Гусев, А.В. Мордкович, И.Ф. Шарыгин и др.). Они отмечают, что роль геометрии приобретает большую значимость, если уделить внимание не только усвоению знаний, но и формированию различных приемов мыслительной деятельности.

Одним из механизмов развития геометрического мышления может стать совместное изучение геометрии и оригами. История этого искусства очень богата. В России возможность включения элементов оригами в преподавание геометрии изучается Омским центром оригами, С.Н. Белим, И.В. Богатовой, В.В. Гончар, И.В. Капитоновой, И.А. Кругловой, С.В. Опаричевой, Н.И. Шеремет и др.

Проблематика использования оригами в процессе преподавания геометрии в школе исследована в недостаточной степени. Однако, как показывает практика, применение оригами в процессе обучения способствует более эффективному усвоению учащимися геометрии. Отсюда возникает противоречие между потенциальными возможностями применения оригами в процессе изучения геометрии и недостаточной разработанностью теории по данному вопросу.

Исходя из этого противоречия, мы сформулировали проблему нашего исследования: каковы должны быть педагогические условия, при которых использование оригами будет способствовать эффективному изучению геометрии школьниками? Целью исследования является выявить, обосновать и экспериментально проверить педагогические условия использования оригами в процессе преподавания геометрии.

Объектом исследования является процесс преподавания геометрии в 7 классе средней общеобразовательной школы, предметом исследования – педагогические условия использования оригами в процессе преподавания геометрии в 7 классе средней общеобразовательной школы.

Практическая значимость сформированной проблемы состоит в том, что разработанная методика может быть использована в условиях основной школы без значительной перестройки учебных планов и программы школьного курса геометрии, она позволяет использовать любой из действующих учебников, не требует дополнительного времени и обеспечивает успешное усвоение учебного материала.

Апробированный экспериментальный материал позволил создать эффективное учебно-методическое и психолого-педагогическое обеспечение применения оригами и использования информационно-коммуникационных технологий при изучении геометрии, наметить основные принципы практического и деятельностного реформирования обучения геометрии в школе. Разработан пропедевтический курс "Оригами и геометрия" для школьников (1-6 класс) и рабочая тетрадь по учебному курсу "Геометрия и оригами" для учащихся 7 класса.

Проведенный нами анализ структуры и содержания наиболее широко применяемых учителями учебников геометрии для средней школы позволяет сделать некоторые выводы. Во-первых, существуют определенные расхождения в понимании авторами логики построения школьного курса геометрии. Во-вторых, компоненты содержания учебников в целом совпадают. Результаты проведенного исследования позволили нам заключить, что элементы оригами могут быть включены в содержание образования.

Отметим следующий немаловажный момент. В ходе работы с бумагой, проводятся линии сгибов обеими руками. Физиологами установлено, что ручной труд, пальчиковая сенсорика и моторика развивает важнейшие центры головного мозга, причем левая кисть рук связана с правым полушарием головного мозга, а правая кисть – с левым полушарием головного мозга [4, 7]. Данные центры головного мозга выполняют определенные функции. Левое полушарие головного мозга отвечает за развитие рациональных психических функций – логического мышления, речи. Правое полушарие отвечает за развитие иррациональных психических функций, – образов, ощущений, чувств, воображения, творчества, интуиции. Когда упор делают на развитие логического мышления, тогда эффективнее развивается левое полушарие головного мозга. В случае, когда упор делают на развитие творческого мышления, тогда эффективнее развивается правое полушарие головного мозга.

Учитывая главную цель образовательного процесса, а именно воспитание гармонично развитой личности, можно сделать вывод, что необходимо развитие обоих полушарий головного мозга. Если одно из них не будет развито, из человека не получится гармонично развитой личности.

В психологии доказано, чтобы стать специалистом в любой сфере человеческой деятельности, нужно иметь хорошо и пропорционально развитыми оба полушария головного мозга, и левое, и правое.

Следовательно, необходимо в равной степени развивать рациональные и иррациональные психические функции человека, а значит развивать одновременно и левое и правое полушария головного мозга. Более эффективному их развитию способствует оригами – искусство складывания фигур из бумаги. Оно представляет собой удивительный вид деятельности, включающий богатые возможности.

Изначально в процессе работы с бумагой в технике оригами задействованы одновременно обе руки. Намечая линии сгибов, ребенок приводит в действие те виды своей мыслительной деятельности, которые ранее были не задействованы. Мозг берет не себя функции управления новым для ребенка видом деятельности и, управляя им, развивается сам. Чем больше и разнообразнее сфера дел, в которых участвует ученик, тем более развиты те центры его мозга, которые можно развивать только в процессе овладения навыками работы с бумагой, взаимосвязи “рука-мозг”. Активная работа обеих рук влечет за собой повышение активности полушарий головного мозга. Развивается не только левое полушарие, отвечающее за логику и речь, но и правое полушарие, ответственное за творчество, интуицию, воображение.

Таким образом, оригами развивает физиологические (анатомические), и психические (интеллектуальные) способности человека, активизирует взаимодействие полушарий и полнее раскрывает ресурсы человеческого организма.

Занятия оригами способствуют развитию пространственного воображения, глазомера, внимания, памяти, фантазии и творческого мышления. Сами занятия оригами развивают интенсивнее и на более высоком уровне восприятие (целостность и структурность образа), внимание (концентрация и устойчивость), память (зрительная и кинестетическая), мышление (пространственное, креативное) [5, 7], способствуют развитию пространственного воображения, глазомера, фантазии и творческого мышления. Все эти качества необходимы для изучения школьного курса геометрии. Отсюда следует, что оригами является одним из эффективных средств изучения геометрии.

Обучение геометрии с использованием оригами проходит два этапа:

1) пропедевтический курс “Оригами и геометрия”;

2) использование оригами в изучении отдельных тем школьного курса геометрии.

На первом этапе происходит введение в мир оригами, освоение техники выполнения изделий и формирование навыка работы с бумагой, знакомство с условными знаками и основными приемами складывания, знакомство с базовыми формами и схемами, позволяющими провести преобразования с бумагой.

На втором этапе проходит реализация методики обучения геометрии с использованием оригами начиная с 7 класса, знакомство с основными Международными условными знаками и приемами складывания, принятыми в оригами.

Одной из основных возможностей использования оригами мы видим в более детальном и широком обзоре геометрических знаний. В процессе складывания листа бумаги теоремы и свойства математических объектов становятся настолько очевидными, что нет необходимости в дополнительных разъяснениях. Рассмотрим в качестве примера простейший из многоугольников – треугольник, который в геометрии играет основную роль. Геометры столь подробно изучили треугольник, что иногда говорят о "геометрии треугольника" как о самостоятельном разделе элементарной геометрии. Важное место в геометрии занимают свойства равнобедренного треугольника. Более подробно рассмотрим использование оригами при изучении данной темы. Напомним, что равнобедренный треугольник — треугольник, если у него две стороны равны. Эти стороны называются боковыми, а третья сторона – основанием. Важно отметить, что по определению, правильный треугольник также является равнобедренным, но обратное неверно.

При построении треугольника методом перегибания бумаги необходимо на первом этапе отметить отрезок и согнуть лист по серединному перпендикуляру к нему. Любая точка серединного перпендикуляра равноудалена от концов данного отрезка, поэтому, наметив сгиб, проходящий через концы отрезка и произвольную точку на серединном перпендикуляре, можно получить равнобедренный треугольник. Докажем, что в равнобедренном треугольнике биссектриса, проведенная к основанию является медианой и высотой, а также что углы при основании равны. Для этого рассмотрим BK – биссектриса и проведем необходимые построения в технике оригами (рис. 1).

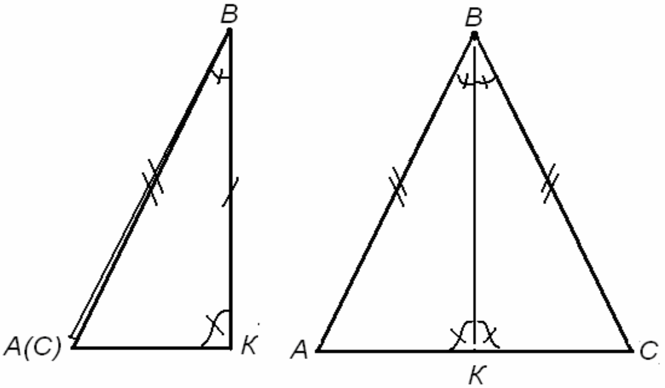


Рис. 1

В этом случае $\angle ABK = \angle CBK$, $AB = CB$ (боковые стороны), BK – общая сторона. В силу первого признака равенства треугольников имеем, что $\Delta ABK = \Delta CBK$, тогда соответствующие элементы этих треугольников равны, т.е. $\angle A = \angle C$, $AK = CK$, $\angle AKB = \angle CKB$, которые в сумме образуют развернутый угол, поэтому они являются прямыми углами. В итоге имеем, что в равнобедренном треугольнике ABC: BK – медиана (AK=CK), BK – высота ($\angle$AKB=$\angle$CKB), углы при основании равны ($\angle$A=$\angle$C).

Для проверки эффективности использования оригами в обучении геометрии школьного курса был проведен эксперимент, цель которого – апробировать разработанную технологию, проверить эффективность использования оригами в реальной практике обучения геометрии.

С целью проверки выдвинутой гипотезы в 2007 учебном году был проведен эксперимент на базе школы-гимназии № 20 г. Новочебоксарск Чувашской Республики. В качестве экспериментальных объектов были выбраны учащиеся двух седьмых классов с примерно одинаковым количеством и уровнем успеваемости детей.

С целью создания относительно равных условий проведения эксперимента в каждом классе выбрали равное количество учеников, имеющих одинаковую успеваемость по математике. Класс 7 “А” был определен экспериментальным, другой 7 “Б” – контрольным.

7 “А” – экспериментальный	7 “Б” – контрольный
учились на “3” – 3 человека учились на “4” – 9 человек учились на “5” – 14 человек	учились на “3” – 3 человека учились на “4” – 9 человек учились на “5” – 14 человек
Итого: 26 человек	Итого: 26 человек

Рис. 2. Количественный и качественный состав учащихся контрольного и экспериментального классов после выборки

Проведенная выборка позволила сравнять качественный и количественный состав учащихся. Число учеников, таким образом, составило 26 человек в каждом классе.

Далее в экспериментальном классе преподавание геометрии осуществлялось с использованием оригами, а в контрольном на основе традиционной методики. В конце каждой четверти проводились контрольные срезы, которые проходили в форме контрольных работ.

Результаты экспериментальной группы по сравнению с результатами контрольной группы данной школы показали более высокий показатель знаний. Статистическая обработка результатов сравнения качества геометрических знаний в экспериментальной и контрольной группах с помощью критерия хи-квадрат Пирсона дает основания говорить, что учащиеся при проведении эксперимента получили разный уровень успеваемости и уровень знаний по геометрии. Проведенные беседы и наблюдения за деятельностью учащихся выявили высокий интерес к изучению геометрического материала с использованием оригами.

Полученная оценка	Контр.раб. №1		Контр.раб. №2		Контр.раб. №3		Контр.раб.№4		Итог. контр.раб.	
	Количество учащихся		Количество учащихся		Количество учащихся		Количество учащихся		Количество учащихся	
	Э	К	Э	К	Э	К	Э	К	Э	К
2	0	5	1	5	0	4	1	5	0	5
3	10	13	9	13	10	16	8	10	7	13
4	11	6	13	6	9	6	11	9	12	7
5	5	2	4	2	7	0	6	1	7	1

Рис. 3. Результаты контрольных работ по геометрии за курс 7 класса

Следовательно, выдвинутая гипотеза экспериментально подтверждена. Таким образом, использование оригами в изучении геометрии 7 класса повышает эффективность обучения.

С помощью оригами можно проверить на практике важность того или иного геометрического понятия, не просто пройти теоретический материал, а научиться понимать суть изучаемого материала; научиться мыслить, исследовать, делать опыты, выводы, понимать то, о чем говоришь сам, и то, что говорят другие.

Библиографический список

1. *Мерлина, Н.И.* Дополнительное математическое образование школьников и современная школа: (Состояние. Тенденции. Перспективы) [Текст] / Н.И. Мерлина. – М.: Гелиос АРВ, 2000. – 177 с.
2. Единый государственный экзамен в Чувашской Республике в 2007 году: результаты и анализ [Текст]. – Чебоксары: Изд-во Чувашского республиканского института образования, 2007. – 44 с.
3. *Шарыгин, И.Ф.* Нужна ли школе 21-го века Геометрия? [Текст] / И.Ф. Шарыгин // Математическое просвещение. – М.: МННМО, 2004. – № 3. – Вып. 8. – С. 37-52.
4. *Шумакова, Е.Р.* Межполушарная функциональная асимметрия в динамике бимануальной активности у детей 7-11 лет при обучении оригами [Текст]: Автореф. дис. ... канд. психол. наук: 19.00.02 / Е.Р. Шумакова. – Ростов н/Д: Рост. гос. ун-т, 2000. – 22 с.
5. http://jorigami.narod.ru/Contens/n_09/2_Origami_and_brain_activity.htm
6. *Весновская, О.В.* Оригами: орнаменты, кусудамы, многогранники [Текст] / О.В. Весновская. – Чеб.: Изд-во “Руссика”, 2003. – 52 с.

7. *Шеремет, Г.Г.* Оригами как средство развития интеллектуальных и творческих способностей детей [Текст] / Г.Г. Шеремет // Информационно-методический журнал Пермского областного детского центра “Восхождение”. – Пермь: Восхождение, 2006. – Вып. 5. – с. 40-44.

Изучение нелинейной динамики как средство развития интуитивного мышления

А.С. Бабенко

Современное общество требует от выпускников вузов быстро ориентироваться в сложившихся обстоятельствах и находить пути решения проблем, поэтому одной из задач высшего профессионального образования является развитие интуитивного мышления.

Для примера приведем задачу из курса нелинейной динамики на исследование систем двух дифференциальных уравнений, содержащих предельные циклы, которая, на наш взгляд, способствует развитию интуитивное мышление (см. подробнее [4]). Интуиция проявляется при решении конкретных задач, в умении ориентироваться в незнакомых ситуациях, выдвигать гипотезы решения, а затем их проверять, поэтому была выбрана данная тема, в которой вводится новое понятие “предельный цикл” и требуется выбрать путь доказательства, что система содержит предельный цикл.

Рассмотрим задачу, приведенную в нескольких работах [1-3].

Задача 1. Найти неподвижные точки системы и определить их тип:

$$\begin{cases} x' = 2x - y - x\left(x^2 + y^2\right), \\ y' = x + 2y - y\left(x^2 + y^2\right). \end{cases} \tag{1}$$

Студенты самостоятельно могут выполнить данное задание, так как на предыдущих занятиях был выработан алгоритм решения.

Найдем неподвижные точки системы (1).

$$\begin{cases} 2x - y - x\left(x^2 + y^2\right) = 0, \\ x + 2y - y\left(x^2 + y^2\right) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Система (2) имеет единственное решение $O(0; 0)$. Для того, чтобы определить тип точки, линеаризуем систему (1) в окрестности точки O.

В нашем случае

$$\begin{cases} x' = 2x - y, \\ y' = x + 2y. \end{cases} \tag{3}$$

Составим характеристическое уравнение системы (3).

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0; \quad \lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0.$$

Характеристическое уравнение имеет два мнимых корня $2 \pm i$ с положительной действительной частью, следовательно, точка O является неустойчивым фокусом.

При исследовании получилось выявить только одну точку, которая к тому же является неустойчивой.

Задача 2. Построить фазовый портрет системы (1) при следующих начальных условиях: 1) $(1; 0)$ 2) $(3; 1)$.

Студенты строят фазовый портрет системы с помощью информационных и коммуникационных технологий (ИКТ) при различных начальных условиях (см. рис. 1).

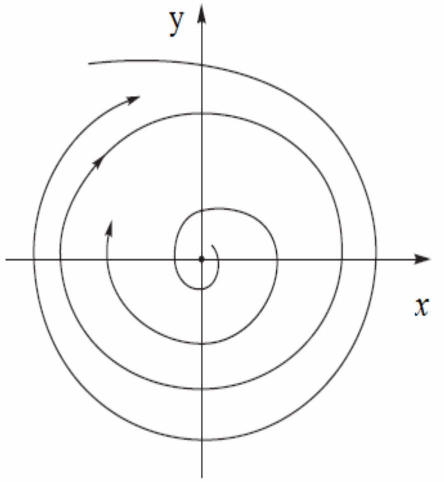


Рис. 1. Фазовый портрет системы (1)

В результате построения во всех трех случаях обнаруживается траектория, попадая на которую точки остаются на ней, которая получается во всех случаях.

Студенты делают интуитивное предположение, что существуют системы, в которых есть не только неподвижная точка, но и множество точек, к которым стремятся все траектории.

Далее необходимо сказать, что такой вид траектории называется предельным циклом и ввести его понятие, а также проиллюстрировать на примерах, но предварительно студенты сами предлагают формулировку понятия “предельный цикл”.

Задача 3. Определить вид найденной траектории и доказать, что предельный цикл существует.

Мы предположили, что система содержит предельный цикл, но как доказать, что он действительно существует. Обдумывая решение задачи, на основе знаний, полученных на занятиях по математическому анализу, студенты выдвинут следующую гипотезу решения: по предположению предельный цикл – окружность, поэтому следует перейти в полярные координаты.

Если $\begin{cases} x = r \cdot \cos\varphi, \\ y = r \cdot \sin\varphi, \end{cases}$ то $\begin{cases} (r \cdot \cos\varphi)' = 2r \cdot \cos\varphi - r \cdot \sin\varphi - r^3 \cdot \cos\varphi, \\ (r \cdot \sin\varphi)' = r \cdot \cos\varphi + 2r \cdot \sin\varphi - r^3 \cdot \sin\varphi, \end{cases}$

следовательно, $\begin{cases} r' \cdot \cos\varphi - r \cdot \sin\varphi \cdot \varphi' = 2r \cdot \cos\varphi - r \cdot \sin\varphi - r^3 \cdot \cos\varphi, \\ r' \cdot \sin\varphi + r \cdot \cos\varphi \cdot \varphi' = r \cdot \cos\varphi + 2r \cdot \sin\varphi - r^3 \cdot \sin\varphi. \end{cases}$

Умножим первое равенство на $\cos\varphi$, а второе – на $\sin\varphi$ и сложим равенства.

$$\begin{cases} r' \cdot \cos^2\varphi - r \cdot \cos\varphi \cdot \sin\varphi \cdot \varphi' = 2r \cdot \cos^2\varphi - r \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi - r^3 \cdot \cos^2\varphi, \\ r' \cdot \sin^2\varphi + r \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi \cdot \varphi' = r \cdot \cos\varphi \cdot \sin\varphi + 2r \cdot \sin^2\varphi - r^3 \cdot \sin^2\varphi, \end{cases}$$

тогда $r' = 2r - r^3$.

Умножим первое равенство на $\sin\varphi$, а второе – на $\cos\varphi$ и из второго равенства вычитаем первое равенство.

$$\begin{cases} r' \cdot \cos\varphi \cdot \sin\varphi - r \cdot \sin^2\varphi \cdot \varphi' = 2r \cdot \cos\varphi \cdot \sin\varphi - r \cdot \sin^2\varphi - r^3 \cdot \cos\varphi \cdot \sin\varphi, \\ r' \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi + r \cdot \cos^2\varphi \cdot \varphi' = r \cdot \cos^2\varphi + 2r \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi - r^3 \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi, \end{cases}$$

тогда $\varphi' = 1$.

Получаем следующую систему:

$$\begin{cases} r' = r\left(2 - r^2\right), \\ \varphi' = 1. \end{cases} \tag{4}$$

Найдем неподвижные точки системы (4). $r\left(2 - r^2\right) = 0$, следовательно, $r_1 = 0, r_2 = \sqrt{2}$. $r_1 = 0$ соответствует неподвижной точке системы (1) $O\,(0; 0)$. $r_2 = \sqrt{2}$ соответствует предельному циклу, который является окружности радиуса $\sqrt{2}$.

Далее следует привести несколько примеров систем, в которых имеются предельные циклы устойчивые или нет, чтобы провести классификацию предельных циклов, имеются циклы, являющиеся замкнутой кривой, отличную от окружности.

В результате решения данных задач студенты видят необычность и важность нелинейных систем, так как в линейных системах возможно появление только неподвижной точки.

Библиографический список

1. *Вишик, М.И.* Фрактальная размерность множеств [Текст] / М.И. Вишик // Соровский образовательный журнал. – 1998. – № 1. – С. 122-127.
2. *Леонов, Г.А.* Странные аттракторы и классическая теория устойчивости движения [Текст] / Г.А. Леонов // Успехи механики.– 2002. – № 3. – С. 3-43.
3. *Кольцова, Э.М.* Нелинейная динамика и термодинамика необратимых процессов в химии и химической технологии [Текст] / Э.М. Кольцова, Ю.Д. Третьяков, Л.С. Гордеев, А.А. Вертегел. – М.: Химия, 2001.
4. *Секованов, В.С.* Формирование креативной личности студента вуза при обучении математике на основе новых информационных технологий [Текст] / В.С. Секованов. – Кострома: КГУ, 2004.

Математическое моделирование реализации трудового потенциала региона

Е.А. Чекмарева

Представляемая работа посвящена решению методами математического моделирования актуальной проблемы, стоящей перед экономической наукой и практикой – выявлению возможностей для более полного использования трудового потенциала региона. Автором предлагается методика математического моделирования реализации трудового потенциала на основе социологических измерений. При моделировании используется статистическая обработка баз данных социологических опросов, метод главных компонент, корреляционно-регрессионный анализ и др.

Постановка проблемы

Под реализацией трудового потенциала понимается процесс и результат его использования в трудовой деятельности населения. Оценка реализации количественной стороны трудового потенциала – хорошо изученный вопрос, нашедший отражение в статистическом учете. При этом показателями реализации трудового потенциала региона служат: уровень экономической активности населения трудоспособного возраста, уровень занятости и безработицы.

Оценка реализации качественной стороны трудового потенциала – это более сложная задача, представляющая непосредственный научный и практический интерес. Решению данной задачи может способствовать математическое моделирование.

Концептуальная модель

Концептуально модель реализации трудового потенциала была определена следующими основные положениями:

- сущность процесса реализации трудового потенциала сводится к превращению качественных характеристик работников в результаты труда;
- каждый работник может быть охарактеризован восьмью базовыми качествами: физическим и психическим здоровьем, когнитивным и творческим потенциалом, коммуникабельностью, культурным и нравственным уровнем, потребностью в достижении (социальными притязаниями);
- перечисленные качества каждый работник использует в трудовой деятельности с разной интенсивностью;
- при одинаковом уровне развития качеств разные работники характеризуются разным уровнем результативности труда, что обусловлено разной степенью использования трудового потенциала;
- вышеперечисленные показатели потенциально могут быть оценены на основе социологических измерений;
- при возможности получения интегрального показателя результативности трудовой деятельности, этот показатель может расцениваться как показатель результата всего процесса реализации трудового потенциала;
- процесс реализации трудового потенциала может быть представлен регрессионной моделью, отражающей зависимость результативности трудовой деятельности от качества трудового потенциала и уровня его использования.

Алгоритм моделирования

В соответствии с концептуальной моделью алгоритм моделирования трудового потенциала региона сводится к ответу на цепочку вопросов: Насколько сильно развито то или иное качество у работника? → Насколько работник использует это качество? → Какие при этом он получает результаты? → Как взаимосвязаны эти показатели? Перечисленные вопросы определяют этапы математического моделирования реализации трудового потенциала региона (рис. 1).

Рис. 1. Алгоритм моделирования трудового потенциала региона

Осуществить такой алгоритм позволяют социологические измерения. В частности, информационную базу нашего исследования составили данные мониторинга качественного состояния трудового потенциала Вологодской области[1], проводимого Институтом социально-экономического развития территорий РАН.

Результаты моделирования

I этап. Оценка качества трудового потенциала.

Ответ на вопрос “Насколько сильно развито то или иное качество у работника?” дает измерение индексов качества трудового потенциала по методике ИСЭПН РАН (Н.М. Римашевская, Д.И. Зюзин, Е.Б. Бреева и др.), осуществляемое в рамках указанного мониторинга, по итогам которого рассматриваемые восемь базовых качеств (физическое и психическое здоровье, когнитивный и творческий потенциал, коммуникабельность, культурный и нравственный уровень, потребность в дости-

---

[1] Объектом исследования является население трудоспособного возраста. Опросы проходят в Вологде и Череповце и в восьми районах области (Бабаевском, Великоустюгском, Вожегодском, Грязовецком, Кирилловском, Никольском, Тарногском и Шекснинском). Объем выборки составляет 1500 человек.

жении) приобретают числовую оценку в виде индексов в интервале от нуля до единицы (чем выше значение индекса, тем более развито качество; табл. 1).

Таблица 1

Результаты мониторинга качественного состояния трудового потенциала Вологодской области в 2009 г. (средние значения по области)

Качество	Значения индексов качества трудового потенциала	Ранг	Значения индексов степени использования трудового потенциала	Ранг
Физическое здоровье	0,728	4	0,784	**1**
Психическое здоровье	0,739	2	0,759	6
Когнитивный потенциал	0,614	7	0,763	5
Творческий потенциал	0,572	**8**	0,682	**8**
Коммуникабельность	0,736	3	0,781	2
Культурный уровень	0,674	5	0,763	4
Нравственный уровень	0,757	**1**	0,764	3
Потребность в достижении	0,643	6	0,689	7

Источник: Мониторинг качественного состояния трудового потенциала Вологодской области, ИСЭРТ РАН, 2009 г.

II этап. Оценка степени использования качеств в трудовой деятельности.

Для оценки степени применения населением своих качеств и умений в конкретной трудовой деятельности в рамках мониторинга трудового потенциала, проводимого ИСЭРТ РАН в 2009 г., разработана специальная методика, основанная на блоке вопросов вида “Насколько сильно Вы “выкладываетесь” на работе? В какой мере используете свои качества и умения?”. Предложена следующая четырехбалльная шкала: использую в полной мере (на пределе своих возможностей) – 4 балла, более-менее полно (могу использовать больше) – 3, частично (мало) – 2, очень мало (по минимуму) – 1. В дальнейшем путем деления фактического числа баллов на максимально возможное полученные баллы переводились в индексы, условно названные индексами степени использования трудового потенциала и соответствующие восьми базовым индексам качества трудового потенциала (табл. 1).

III этап. Оценка результативности трудовой деятельности.

Поскольку для анализа реализации трудового потенциала нужен показатель, характеризующий результативность, а не ее восприятие работником (как, например, самооценка производительности труда), для этой цели возможно использование системы вопросов вида: “Что из перечисленного ниже характеризует Вашу трудовую (учебную) деятельность?” (табл. 2).

Таблица 2

Распределение ответов на вопрос: “Что из перечисленного ниже характеризует Вашу трудовую (учебную) деятельность?”, %

Вариант ответа	Часто бывает	Иногда бывает	Совсем не бывает
Невыполнение норм выработки (нормированных заданий) – делаю меньше, чем от меня требуют	8,2	39,8	52,0
Выполнение норм выработки (нормированных заданий) на 100% – делаю ровно столько, сколько от меня требуют	43,0	41,1	15,9
Перевыполнение норм выработки (нормированных заданий) более чем на 100% – делаю больше, чем от меня требуют	25,7	50,7	23,6
Опоздания, прогулы, уход с работы раньше времени	3,2	34,7	62,1
Сдача работы с первого предъявления с высоким качеством (оценкой), без замечаний	37,9	43,2	18,8
Срывы в работе: по Вашей вине случались аварии, простаивало оборудование, допускались ошибки в документации, управленческие и т. д.	5,0	28,8	66,1
Подача рационализаторских предложений, предложений по улучшению работы в цехе, отделе (классе) и т. д.	12,6	48,2	39,2

Источник: Мониторинг качественного состояния трудового потенциала Вологодской области, ИСЭРТ РАН, 2009 г.

С целью формирования интегрального показателя результативности трудовой деятельности был проведен факторный анализ, который выявил две главные компоненты. Причем структура первой главной компоненты (объясняет 31% вариации), вобравшей в себя переменные, характеризующие наличие либо отсутствие "хорошего" (выполнения и перевыполнения норм выработки, сдачи работы с первого предъявления с высоким качеством, подачи рационализаторских предложений) дает основания считать ее интегральным показателем результативности трудовой деятельности. То есть результативность трудовой деятельности приобрела числовую оценку в виде значений первой главной компоненты, условной названной интегральным показателем результативности трудовой деятельности.

IV этап. Корреляционно-регрессионный анализ.

Введем следующие обозначения:

$Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6, Q_7, Q_8$ (от англ. Quality – качество) – индексы качества трудового потенциала (получены на этапе 1), соответствующие восьми базовым характеристикам: физическое здоровье, психическое здоровье, когнитивный потенциал, творческий потенциал, коммуникабельность, культурный уровень, нравственный уровень, потребность в достижении;

$U_1, U_2, U_3, U_4, U_5, U_6, U_7, U_8$ (от англ. Use – использование) – соответствующие индексы степени использования трудового потенциала (получены на этапе 2);

P (от англ. Productivity – продуктивность, результативность) – интегральный показатель результативности трудовой деятельности (получен на этапе 3).

Расчет коэффициентов корреляции подтвердил наличие значимых прямых связей между полученными переменными (табл. 3). Однако качество трудового потенциала и степень его использования сами по себе в отдельности не дают результативности. В результативность превращается только та часть трудового потенциала, которая использована в трудовой деятельности.

Исходя из содержательного смысла переменных $Q_1, \ldots, Q_8$ и $U_1, \ldots, U_8$, введение новой переменной $R_i = Q_i \times U_i$ позволяет численно оценить реализованный трудовой потенциал.

В данном случае индексы $U_1, \ldots, U_8$ играют роль понижающих коэффициентов и исключают из рассмотрения ту часть трудового потенциала, которая не используется в трудовой деятельности.

Таблица 3

Связь результативности трудовой деятельности с качеством трудового потенциала, степенью его использования

Компонент трудового потенциала (качественная характеристика)							
Физическое здоровье	Психическое здоровье	Когнитивный потенциал	Творческий потенциал	Коммуникабельность	Культурный уровень	Нравственный уровень	Потребность в достижении
Коэффициенты корреляции с индексами качества трудового потенциала							
Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	Q_6	Q_7	Q_8
-0,008	0,177(**)	0,343(**)	0,211(**)	0,305(**)	0,203(**)	0,215(**)	0,154(**)
Коэффициенты корреляции с индексами степени использования трудового потенциала							
U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6	U_7	U_8
0,215(**)	0,276(**)	0,277(**)	0,234(**)	0,332(**)	0,343(**)	0,328(**)	0,214(**)
Коэффициенты корреляции с индексами реализации трудового потенциала							
R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7	R_8
0,179(**)	0,316(**)	0,365(**)	0,280(**)	0,401(**)	0,369(**)	0,347(**)	0,238(**)

** Корреляция значима на уровне 0,01.

Рассчитанные таким образом значения переменных R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6, R_7, R_8 (от англ. Realisation – реализация) назовем индексами реализации трудового потенциала. Далее переменные $R_1, \ldots, R_8$ будем использовать в качестве объясняющих.

Как показывает расчет коэффициентов корреляции, переход от переменных $Q_1, \ldots, Q_8$и $U_1, \ldots, U_8$ к новому набору предсказывающих (объясняющих) переменных увеличил силу связей.

Применяя для устранения мультиколлинеарности переход к ортогонализированным объясняющим переменным с помощью метода главных компонент, была получена новая переменная-фактор, являющаяся линейной комбинацией исходных (объясняющая дисперсия – 52%):

$$R_0 = 0,131 \cdot R_1 + 0,148 \cdot R_2 + 0,188 \cdot R_3 + 0,167 \cdot R_4 + 0,194 \cdot R_5 +$$

$$+0,194 \cdot R_6 + 0,190 \cdot R_7 + 0,159 \cdot R_8.$$

Таким образом, искомое уравнение статистической связи приняло вид:

$$P = f(R_0) + \varepsilon,$$

или с учетом линейного вида функции (выбран в соответствии с диаграммой рассеивания):

$$P = a + b \cdot R_0 + \varepsilon,$$

где a, b – искомые неизвестные параметры, ε – случайная ошибка.

Оценка неизвестных параметров модели в ППП SPSS позволила построить следующую регрессионную модель:

$$P = -0,001 + 0,444 \cdot R_0 + \varepsilon,$$

или, возвращаясь к исходным переменным:

$$P = -0,001 + 0,444 \cdot (0,131 \cdot Q_1 \cdot U_1 + 0,148 \cdot Q_2 \cdot U_2 + 0,188 \cdot Q_3 \cdot U_3 + 0,167 \cdot Q_4 \cdot U_4 + \\ + 0,194 \cdot Q_5 \cdot U_5 + 0,194 \cdot Q_6 \cdot U_6 + 0,190 \cdot Q_7 \cdot U_7 + 0,159 \cdot Q_8 \cdot U_8) + \varepsilon. \quad (*)$$

О качестве построенной модели говорят значимые коэффициент корреляции r = 0,437 и коэффициент детерминации r^2= 0,191.

Первичный анализ построенной регрессионной модели (*), в частности, анализ коэффициентов перед переменными, позволяет сделать вывод о том, что наибольший вклад в результативность трудовой деятельности достигается за счет более полного использования таких качеств, как: коммуникабельность и культурный уровень (наиболее востребованные качества в активно развивающейся сфере услуг; коэффициенты перед этими переменными являются наибольшими), наименьший отклик в результативности присущ физическому здоровью.

Кроме того, близкий к нулю свободный член уравнения регрессии ($a = -0,001$) говорит о том факте, что при нулевой реализации трудового потенциала, результативность труда будет нулевая. Это не только соответствует здравому смыслу, но и свидетельствует о хорошем модельном отражении реальной ситуации.

Слабые стороны построенной модели, ее недостатки:

- значительная роль стохастики и неопределенности (полученные связи, хоть и являются значимыми, довольно слабы);
- отсутствие естественных и простых единиц измерения, принципиальная трудность получения необходимой информации;
- степень практической применимости результатов моделирования ограничена особенностями измерения.

Возможности, предоставляемые моделью, ее достоинства:

- анализ построенной функциональной модели позволит оценить потери в результативности труда на различных этапах реализации трудового потенциала, выяснить какой этап в цепочке перехода качества трудового потенциала в результативность трудовой деятельности является слабым звеном и характеризуется наибольшими потерями;
- модель позволяет оценивать вклад реализации каждого качества в итоговую результативность трудовой деятельности.

- также на основе модели возможна оценка экономического эффекта от повышения реализации трудового потенциала населения в той или иной сфере.

Балльная система оценивания обученности студентов как средство формирования опыта их учебной деятельности

О.А. Кирносова

Проблема контроля и оценивания учебной деятельности всегда была актуальной, так как эти взаимосвязанные процессы являются необходимыми элементами системы обучения. Изучением вопроса об их влиянии на формирование опыта учебной деятельности обучающихся занимались многие педагоги и психологи: Ш.А. Амонашвили, Б.Г. Ананьев, В.П. Беспалько, П.П. Блонский, Л.С. Выготский, А.Л. Жохов, Т.А. Ильина, В.П. Симонов, Е.И. Смирнов, В.А. Сухомлинский, Н.Ф. Талызина и другие.

Так Т.А. Ильина считала, что “проверка и оценка знаний, будучи органически включенными в учебно-воспитательный процесс, играют большую роль в повышении эффективности учебного труда учащихся, обеспечении качества прочности их знаний, умений и навыков, в формировании целого ряда нравственных и других важных качеств личности” [5, с. 330].

Согласно одним источникам считается, что контроль содержит в себе оценивание (как процесс), оценку (как результат проверки) и отметку (как численный аналог оценки), то есть оценка и отметка являются результатами проведенного педагогического контроля. В других источниках оценку (оценивание) характеризуют как процесс, а отметку – как результат, в третьих говорится, что оценка – это способ и результат, подтверждающий соответствие или несоответствие уровня обученности студента целям и задачам обучения. Нередко оценку и отметку вообще не разграничивают, хотя Амонашвили Ш.А. отмечал, что “уподобление оценки и отметки равносильно отождествлению процесса решения задачи с его результатом” [1, с. 12].

В учебном процессе слову “оценка” придается значение результата, а ведь важен не только результат, но и процесс формирования оценки. В большинстве публикаций по этому вопросу до сих пор не сложилось устоявшейся терминологии, нет ясности: оценка – это процесс или результат? На наш взгляд, целесообразнее использовать терминологию: “оценивание” – процесс, “оценка” – результат.

В методике оценивания весьма важен выбор шкалы оценки. Первая трехбалльная система оценок возникла в средние века в Германии (1 –

“лучший”, 2 – “средний”, 3 – “худший”). Позже средний разряд разделили на классы, получилась пятибалльная шкала. В России с 1837 г. прижилась система оценки знаний из пяти баллов. В 1918 г. принят декрет об отмене балльной оценки знаний, в 1935 г. было установлено пять словесных оценок: “очень плохо”, “плохо”, “посредственно”, “хорошо”, “отлично”, а в 1944 г. словесную систему оценок заменили цифровой пятибалльной системой.

В мире используется множество других, более дифференцированных, шкал оценивания знаний: 100-балльня система, 20-балльная, 10-балльная и другие.

Шкалы	Страны, использующие данную шкалу
100 баллов	Афганистан, Бангладеш, Боливия, Бурунди, Гватемала, Израиль, Индия, Ирак, Иран, Мексика, Мьянма, Никарагуа, Нигерия, Объединенные Эмираты, Пакистан, Панама, Перу, Руанда, Сирия, Судан, США, Тайвань, Египет, Филиппины, Южная Корея, Япония
30 баллов	Италия
20 баллов	Венесуэла, Бельгия, Ливан, Португалия, Франция
15 баллов	Алжир, Марокко, Тунис
12 баллов	Украина
10 баллов	Албания, Аргентина, Вьетнам, Греция, Исландия, Нидерланды, Румыния, Турция, Швейцария, Югославия
6 баллов	Австралия, Болгария, Германия, Польша
5 баллов	Австрия, Венгрия, Великобритания, Куба, Латвия, Монголия, Таиланд, Хорватия
4 балла (2, 3, 4, 5) (1 практически не применяется)	Россия и большинство стран СНГ, Испания, Китай, Сингапур, Чехия

Важной задачей является выбор системы оценивания качества знаний. Классическая (по пятибалльной шкале) система оценивания знаний студентов основана на результатах выполнения контрольных работ, промежуточной аттестации, защите курсовых проектов (работ), сдаче зачетов и экзаменов в сессию, то есть носит не постоянный характер и, к тому же, осуществляется по разным шкалам. Контрольные работы и зачеты чаще всего оцениваются по принципу “сдано – не сдано”, курсовые работы и экзамены – по пятибалльной шкале. Причем “не сдано” и “двойка” не имеют смысла, так как студент, не сдавший зачет или экзамен, имеет возможность “пересдать” материал. Также классическая система оценки знаний не стимулирует систематическую работу студентов: занятия можно не посещать, задания можно не сдавать в срок, а перед зачетной неделей сконцентрироваться и, как говорится, “галопом по Европам”. Не исключены и случайности при сдаче зачетов и экзаменов: сильный студент может разволноваться и дать неполный ответ, а слабый вытянуть “счастливый” билет. Многие студенты вообще “учатся для того, чтобы выдержать экзамены, а экзамены выдерживают для того, чтобы получить диплом” [3, с. 160]. Утрачивается интерес к учению, так как оценка “начинает доминировать над собственными интересами обучения, и ученик начинает учиться ради того, чтобы избежать дурной или получить хорошую отметку”. [3, с. 268].

Но не только студенты – “слабое звено” в классической системе оценивания, ведь и преподаватели зачастую бывают необъективными при оценивании студентов, забывая, что оценка не кнут и не пряник, а просто показатель интеллектуального роста (об этом говорили Ш.А. Амонашвили, Т.А. Ильина, В.А. Сухомлинский). Субъективизм обусловлен еще и тем, что “у каждого преподавателя свои нормы выставления оценок” [10, с. 161]. Оценка должна отражать реальный результат овладения знаниями, иначе у студентов “вырабатывается “умение” обходить требования учителя, приспосабливаясь к сиюминутной ситуации” [5, с. 332].

Таким образом, пятибалльная шкала не отражает реальной картины учебных достижений студентов, ее преимуществами являются простота и привычность, а недостатками – субъективность и слабая дифференциация.

Альтернативой может послужить многобалльная шкала оценивания (или рейтинговая от английского – “to rate” (оценивать) и “rating” (оценка, оценивание), что не противоречит рассматриваемой терминологии). Оценивание знаний, умений и навыков студентов необходимо проводить последовательно, по мере изучения дисциплины. Обучение может быть результативным только тогда, когда учебная работа систематически контролируется, когда сами студенты постоянно видят результаты своей работы. Студент с самого начала обучения освобождается от процесса оценивания (самооценки), то есть отсутствует мотивационная основа учения, а ведь Ш.А. Амонашвили считал, что “мотив – возбудитель деятельности” [1, с. 158].

В нашем опыте мы используем следующую *накопительную* систему оценивания обученности (на примере курса математики). Она также является рейтинговой, но осуществляется почти непрерывно и, главное, *по большинству видов учебной деятельности.* Студентов заранее знакомят с порядком и критериями рейтингового оценивания по всем видам учебной деятельности. В зависимости от качества ответа и количества контрольных заданий студент набирает определенную сумму баллов.

Лекции:

– просто прослушивание – 1 балл;

– оформление и запись, наличие вопросов – 2 балла;

– оформление лекции в виде короткого конспекта (схемы, таблицы) с обозначением связей с ранее изученным материалом и обязательным наличием в конспекте вопросов “на будущее” – 3 балла.

Практические занятия:

– присутствие – 1 балл;

– ответы на теоретические вопросы – 0-2 балла:

- 0 – ответ не дан или дан неверно;
- 1 – ответ дан с недочетами;
- 2 – ответ дан в полном объеме; (такая система помогает преодолеть боязнь оценок “1” и “2”)

– доказательство теорем – 0-2 балла;

– выполнение заданий к занятию – 0-2 балла;

– выполнение домашних работ – 0-2 балла (в зависимости от количества недочетов, которые могут установить и другие студенты группы);

Контрольные мероприятия:

– решение контрольных работ – 0-20 баллов (10 заданий, оцениваемых по приведенной выше схеме);

– сдача коллоквиума – 0-20 баллов.

Пропустившие и не выполнившие задания оцениваются по штрафной системе в 2 раза ниже рейтинга. За пропуски по уважительной причине, подтвержденные документально, устанавливаются дополнительные дни для “отработки”.

Система является многобалльной (100-балльной), предполагает суммирование баллов, но при подведении итогов, полученные студентами баллы можно легко перевести в привычные пятибалльные оценки (в процентном отношении степени обученности):

“отлично” – от 90 до 100 баллов;

“хорошо” – от 76 до 89 баллов;

“удовлетворительно” – от 61 до 75 баллов;

“неудовлетворительно” –60 баллов и менее.

Накопительная система оценки знаний более объективна и справедлива по отношению к тем, кто трудится в течение всего учебного года, так как позволяет успешным студентам без экзамена получить положительную итоговую оценку. Те же, кто не согласен с итоговым рейтингом, могут сдавать экзамен на общих основаниях, это приводит к снижению случайностей при сдаче экзаменов и зачетов.

Таким образом, осуществляется ориентация на успех, а как говорил В.А. Сухомлинский “есть успех – есть и желание учиться” [9, с. 63]. Рейтинговая система показывает динамику успехов и неудач в процессе обучения; усиливает мотивацию к учебной деятельности, а значит к приобретению опыта этой деятельности.

Предполагается, что на одном занятии студент может получить несколько оценок: за домашнее задание, за теорию, за практические задания. Следовательно, чтобы набрать необходимое количество баллов, студентам приходится готовиться к каждому занятию, а не только в конце семестра перед зачетом или экзаменом, то есть осуществляется почти повседневный контроль и регулярность работы студента в течение семестра. Систематическая работа – движущая сила саморазвития, а значит приобретения опыта, в том числе и опыта учебной деятельности.

Одной из важнейших компонент системы оценки должна стать ее публичность, этого можно достичь применением “контрольных листов”, в которых студенты (а не только преподаватели в своих журналах) будут фиксировать свой рейтинг, так можно избежать спорных ситуаций при подведении итогов и привлечь студентов к процессу самооценивания. Здесь можно рекомендовать использовать опыт донецкого педагога В.Ф. Шаталова [11], когда учащимся, во-первых, четко обозначается набор задач, которые им необходимо решить за данный промежуток времени, во-вторых, предоставляется возможность самим заполнять “клеточки” в сводной таблице уже решенных задач. Учитель (преподаватель) согласно данным этой таблицы в контрольные сроки оценивает работу учащихся. Этот опыт может быть с успехом перенесен и на почву обучения студентов в педагогическом институте.

Рейтинговая система оценивания формирует у студентов “мотивы учебной деятельности, познавательной активности и самостоятельности”, то есть превращает студента “из объекта в субъект обучения” [1, с. 4]. Она является средством развития, воспитания, формирования опыта учебной деятельности, обратной связи в системе “преподаватель – студент”.

Таким образом, внедрение рейтинговой накопительной системы оценивания обученности обеспечивает стремление студентов набрать больше баллов, повышает их интерес к учебной деятельности, тем самым организует систематическую работу, повышает мотивацию к учебной деятельности и как результат приобретается опыт учебной деятельности, но следует помнить, что рейтинговая система оценивания – не панацея от всех бед.

Библиографический список

1. *Амонашвили, Ш.А.* Воспитательная и образовательная функция оценки учения школьников: экспериментально-педагогическое исследование [Текст] / Ш.А. Амонашвили. – М.: Педагогика, 1984. – 296 с.
2. *Блонский, П.П.* Избранные педагогические и психологические сочинения [Текст]. В 2-х т. Т. 1 / П.П. Блонский / под ред. А.В. Петровского. – М.: Педагогика, 1979. – 304 с.
3. *Выготский, Л.С.* Педагогическая психология [Текст] / Л.С. Выготский / под ред. В.В. Давыдова. – М.: Педагогика, 1991. – 480 с.
4. *Елисеев, О.Н.* Применение статистических методов для оценки успеваемости [Текст] / О.Н. Елисеев. – МГТУ “Станкин”, Россия. – (http://tqm.stankin.ru/arch/n02/ articles/10.htm)
5. *Ильина, Т.А.* Педагогика: курс лекций: учеб. пособие [Текст] / Т.А. Ильина. – М.: Просвещение, 1984. – 496 с.
6. *Илюхин, Б.В.* Оценка качества образования и задачи в рамках КПМО на 2009 год [Текст] / Б.В. Илюхин. – (http://edu.tomsk.gov.ru/kpmo/brif_18-19_12_08/iljuhin_rsoko)
7. Педагогические условия повышения достоверности оценки обученности учащихся [Текст]. – (http://www.mirrabot.com./work/work_12671.html)
8. *Рыбанов, А.А.* Интеллектуальная система оценки качества учебного процесса [Текст] / А.А. Рыбанов, В.П. Шевчук, Е.А. Приходько // Сетевой электронный научный журнал “Системотехника”. – 2004. – № 2. – (http://systech.milm.edu.ru/2004/n2/ Ribanov.htm)
9. *Сухомлинский, В.А.* Разговор с молодым директором школы [Текст] / В.А. Сухомлинский. – М.: Просвещение, 1982. – 206 с.
10. *Талызина, Н.Ф.* Педагогическая психология: учеб. для студентов [Текст] / Н.Ф. Талызина. – М.: Издательский центр “Академия”, 2003. – 288 с.
11. *Шаталов, В.Ф.* Педагогическая проза: из опыта работы школ г. Донецка [Текст] / В.Ф. Шаталов. – М.: Педагогика, 1980. – 96 с.

Проблема развития гибкости мышления школьников в процессе обучения математике

О.М. Абрамова

Развивающее обучение математике предполагает органическое слияние обучения и развития, при котором обучение выступает не самоцелью, а условием развития школьников. При подобном обучении школьники самостоятельно добывают знания и способы действия, перестраивают ранее полученные способы решения задач, открывают новые способы. Методы развивающего обучения основаны не на передаче готовых схем решения задач, а на организации такой деятельности, которая обеспечивает детям формирование продуктивного, творческого мышления. Способствует решению нестандартных задач, в которых учитываются различные признаки объекта в зависимости от ситуации. Свойство творческого мышления, позволяющее варьировать способы решения задачи, перестраивать их в зависимости от ситуации, трактуется как гибкость. Люди, обладающие гибкостью мышления, предлагают сразу несколько вариантов решения, комбинируя известные элементы задачи. Гибкость мышления заключается в умение выявлять все возможные скрытые, неочевидные стороны, свойства, функции объекта и, используя их, быстро изменять способ решения.

В психологической литературе гибкость рассматривается как важнейшее свойство продуктивного, творческого мышления. Гибкость мышления проявляется в перестройки имеющихся способов решения задачи, в целесообразном варьирование способов, в изменении способа, перестающего быть эффективным, на оптимальный способ. Типичные задания на выявление гибкости включают возможные варианты решения задачи, например возможные варианты использования какого-либо объекта: кирпича, консервной банки, листа бумаги. При этом, если человек, решающий подобную задачу скажет, что с помощью кирпича можно: придержать дверь, сделать груз для бумаги, заколотить гвоздь, сделать красную пудру, то он показывает высокий результат развития гибкости мышления. Тем самым человек выявляет все возможные, ранее не анализировавшиеся признаки, стороны предмета и, осмысливая их, решает задачу.

Исходной базой для развития понятийных средств гибкости мышления являются ее образные средства – специфические представления, которые позволяют увидеть основной признак не сам по себе, а в системе свойств и связей предмета и при необходимости произвести переориентировку признаков, их обобщение на другом основании. Важное достоинство таких представлений – способность улавливать относительные границы между отдельными группами явлений и переходить от группы к группе, что в элементарной форме отражает диалектику изменения явлений. Итак, структуру гибкости мышления составляют ее средства – специфические представления, а так же мыслительные действия, позволяющие оперировать ими. Мыслительные действия включают анализ признаков объекта, ориентировку на существенные в данной ситуации признаки, выявление различия и сходства, причинно-следственных связей и зависимостей, установление закономерностей.

Влияние обучения математике на развитие гибкости мышления подчеркивали многие ученые. Гибкость и разносторонность мышления, по мнению В.Ф. Парламарчук, зависит от умения сравнивать объекты, сознательно находить новые признаки в них, рассматривая их с разных сторон, что обеспечивается обучением фундаментальным основам математики. Ученые, изучавшие математические способности, выделили те их показатели, которые относятся к проявлениям гибкости мышления. Еще А.Н. Колмогоров считал основной и существенной особенностью математического мышления “способность находить пути решения, не подходящие под стандартное правило”. В.А. Крутецкий выделял в качестве компонента математических способностей “свободное преключение от одной умственной операции к другой, свободу от шаблонов и трафаретов”. Ф. Папи и Ж. Папи считали “рассмотрение ситуации с различных сторон наиболее эффективным фактором, развивающим математические способности”. По мнению Л.В. Занкова, “основным направлением математической подготовки должно стать развитие таких средств мыслительной деятельности, как гибкость и быстрота реакций”. Л.В. Занков уделяет особое внимание развитию гибкости мышления младших школьников: “...когда речь идет о мышлении, на первый план обычно выдвигается вопрос об усвоении знаний и понятий. Говорится также о процессах сравнения и обобщения. Но особое значение приобретает одна особенность мышления, которая до настоящего времени оставалась в тени. Мы имеем в виду рассмотрение одного и того же предмета с разных точек зрения”. Таким образом, на основе анализа исследований гибкости можно дать характеристику особенностям проявления гибкости мышления, где такой показатель, как целесообразное варьирование способов действий, большинством авторов выдвигается в качестве основного критерия гибкости мышления.

Педагоги высказывают мнение, что существующая система обучения развивает не продуктивное, а скорее, инертное мышление. Знания, преподносящиеся в школе, носят характер неких окончательных, непреложных истин. В каждодневной практике обучения ни учитель, ни ученик не имеют возможности для того, чтобы подвергать эти истины сомнению и рассматривать спорные вопросы. От ученика требуют строго следовать тексту учебника или преподанному учителем способу решения задачи. Очевидно, что такой стиль обучения не может обеспечить в дальнейшем творческого применения знаний.

Д.Б. Богоявленская отмечает, что гибкость мышления проявляется в быстром преобразовании способа действия в соответствии с изменениями объективной ситуации. Это предполагает выделение существенных сторон изменений. Возможность отхода от привычных действий, от стереотипа, нахождение новых путей решения, комбинаций элементов прошлого опыта.

В.Д. Шадриков рассматривает гибкость в качестве свойства мышления, обеспечивающего продуктивность умственной деятельности. Он связывает гибкость с изменением аспектов рассмотрения предметов, явлений, их свойств и отношений, с умением изменить намеченный путь решения задачи, если он не удовлетворяет тем условиям, которые вычленяются в процессе решения и не могут быть учтены с самого начала. По мнению В.Д. Шадрикова, гибкость проявляется в активном переструктурировании исходных данных, понимании и использовании их относительности.

В.А. Крутецкий определял гибкость мышления как компонент математических способностей, вытекающих из основных характеристик математического мышления. Гибкость мышления выражается в легком и свободном переключении с одной умственной операции на другую, качественно иную, в многообразии аспектов в подходе к решению задач, в свободе от сковывающего влияния шаблонных и трафаретных способов решения, в легкости перестройки сложившихся схем мышления и схем действия.

Вышеизложенные исследования, описывающие проявления гибкости мышления, позволяют охарактеризовать ее как свойство продуктивного мышления, заключающееся в возможности смены интерпретации контекстов объекта (свойств и функций) в зависимости от условий мыслительной задачи, и проявляющееся в целесообразном варьирование способов при ее решении.

Своеобразным подходом к изучению гибкости является исследование О.Н. Гарнец, которая связывает гибкость мыслительных действий со свойствами личности индивида, проводя взаимозависимости между личностными характеристиками и интеллектуальными способностями индивида. Автором выявлены два качественно своеобразных уровня гибкости мыслительных действий. Первый – уровень вызванной гибкости, которая не выходит за рамки адекватной реакции на стимул. Вызванная гибкость характеризует способность индивида изменить ход своих мыслей, способ действий под влиянием подсказки, наталкивающей на мысль о возможности существования способов решения, отличных от тех, которыми он пользовался до сих пор. Второй уровень – уровень спонтанной гибкости, природа которой принципиально отличается от гибкости вызванной. Данный уровень регистрируется в тех случаях, когда обращение к новому способу действия происходит вне тупиковой ситуации по инициативе самого испытуемого, поведение которого детерминируется уже не только особенностями ситуации, но, прежде всего, свойствами его личности – критичностью, инициативностью, постоянной нацеленностью на творческую рационализацию осуществляемых действий.

Одним из наиболее развернутых можно считать понимание гибкости мышления, введенное Н.А. Менчинской. В ее исследованиях было показано, что гибкость мышления проявляется в целесообразном варьировании способов действий, в легкости перестройки уже имеющихся знаний и перехода от одного действия к другому, в преодолении инерции предыдущего действия, в формировании обратных связей.

Гибкость ума характеризуют так: преодоление барьера прошлого опыта, отход от привычных ходов мысли, разрешение противоречий между актуализированными знаниями и требованиями проблемной ситуации, оригинальность решений, их своеобразие; переход от прямых к обратным, от одной системы действия к другой, отказ от привычных действий; способность к творческим поискам новых решений в меняющихся условиях действительности и специфики проблем, подлежащих решению.

Можно констатировать, что практически все авторы связывают это качество ума с владением целесообразным варьированием способов действий, с творческим подходом к решению задач, с отказом от шаблонов в решении. Гибкость ума тесно связана с проявлениями творческой деятельности, хотя это качество ума в определенной мере необходимо в любой сфере деятельности. Особенно гибкость ума проявляется при использовании приема умственных действий – “анализ через синтез”, именно там и реализуется механизм гибкости ума.

Развитие мышления учащихся, как известно, является одной из основных задач обучения в школе. В современных условиях, когда начальное образование в России модернизуется, ориентируясь на международную программу Юнеско “Образование для всех”, на первый план выступает развитие творческого компонента мышления, ибо современному обществу нужны люди, способные продуцировать оригинальные идеи и претворять их в жизнь, умеющие быстро находить конструктивный выход из сложных и проблемных ситуаций, диктуемых повседневной жизнью.

Одной из тенденций нашей эпохи – научно-технической революции и высоких технологий – является передача многих однообразных и рутинных процессов машинами и высвобождение человеческих сил и времени для творческой деятельности. В тоже самое время НТР и ВТ делают жизнь человека более разнообразной и сложной: она требует от него не шаблонных, привычных действий и подходов, а гибкости, беглости, оригинальности и разработанности мышления (т.е. креативности мышления) при решении актуальных задач, возникающих в процессе жизнедеятельности. Ясно, что человеку с гибким мышлением легко адаптироваться в новых условиях, найти творческий подход к любой насущной проблеме и достичь высокой производительности труда.

Математика имеет большие возможности в развитии не только абстрактного, понятийного, алгоритмического и т.д. мышления, но и творческого. Огромное количество математических задач, накопленных и проверенных входе многовековой педагогической практики, исправно служили и служат средствам развития всех видов мышления, включая творческое. Математическая задача – это первая искорка, начало познавательного, эвристического, творческого процесса. Она пробуждает мысль, будоражит мышление и развивает гибкость мышления.

Библиографический список

1. *Алферов, А.Д.* Психология развития школьника: учебное пособие [Текст] / А.Д. Алферов. – Ростов н/Д: Феникс, 2000. – 384 с.
2. *Брушлинский, А.В.* Психология мышления и проблемное обучение [Текст] / А.В. Брушлинский // Педагогика. - 2003. – № 5. – С. 53.
3. *Груденов, Я.И.* Психолого-дидактические основы методики обучения математике [Текст] / Я.И. Груденов. – М.: Педагогика, 1987. – 158 с.
4. *Гусев, В.А.* Психолого-педагогические основы обучения математике [Текст] / В.А. Гусев. – М.: Вербум-М: Издат. Центр “Академия”, 2003. – 432 с.
5. *Зайкин, М.И.* Провоцирующие задачи [Текст]: [Математика: Метод. указания] / М.И. Зайкин, В.А. Колосова // Математика в школе. – 1997.
6. *Калмыкова, З.И.* Продуктивное мышление как основа обучаемости [Текст] / З.И. Калмыкова. – М.: Просвещение, 1981. – 120 с.
7. *Крутецкий, В.А.* Психология математических способностей школьников [Текст] / В.А. Крутецкий. – М.: Просвещение, 1986. – 431 с.
8. *Менчинская, Н.А.* Психология применения знаний к решению учебных задач [Текст] / Н.А. Менчинская // Психология применения знаний к решению учебных задач. – М.: Высшая школа, 1958. – 416 с.

Глава 4

История математики и математического образования

Еще раз об определении предмета математики и о периодизации ее истории

Г.М. Полотовский

Тема, обозначенная в заглавии, далеко не нова – более того, по-видимому, это одна из “вечных” тем и, возможно, многие не найдут ниже ничего существенно нового. Тем не менее, мне представляется полезным еще раз обратиться к указанным вопросам, которые так или иначе приходится затрагивать при чтении курса истории математики.

1. Что такое математика? Начнем с широко известного определения, данного Ф. Энгельсом в 1878 г. в “Анти-Дюринге”[1]: “*Чистая математика имеет своим объектом пространственные формы и количественные отношения действительного мира...*”

Мне кажется, что у математика, задумавшегося над этой дефиницией, неминуемо возникнет ряд вопросов, например:

Вопрос 1. Математическая логика (а также в большой мере топология, теория алгоритмов, алгебраическая геометрия, computer science,...) – это пространственные формы или количественные отношения?

Вопрос 2. Что такое пространственные формы и количественные отношения?

Вопрос 3. Что такое действительный мир и каковы *в действительности* взаимоотношения действительного мира и математики?

На последний вопрос как бы ответил сам Энгельс, завершив приведенное выше начало цитаты пояснением “*стало быть, весьма реальный материал*”. Однако многочисленные высказывания Энгельса показывают, что он понимал связь математики с действительным миром откровенно вульгарно:

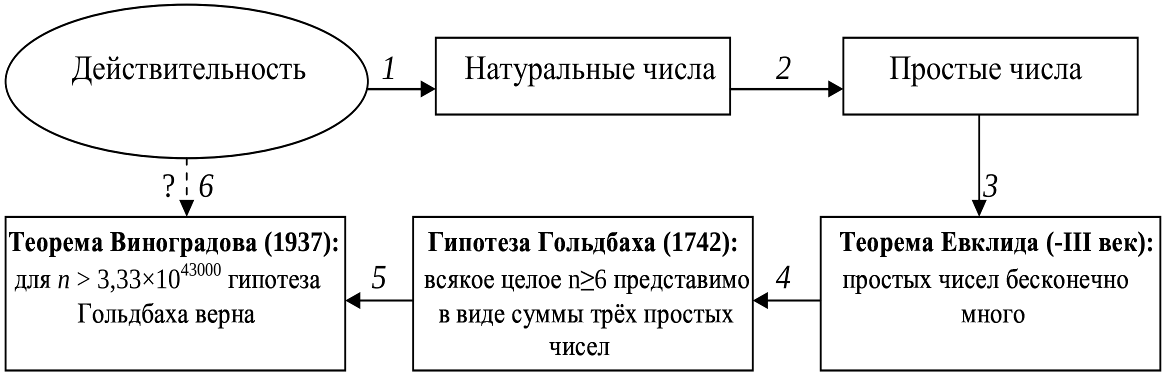
“Результаты геометрии представляют собой не что иное, как естественные свойства различных линий, поверхностей, тел и, соответственно, их комбинаций, которые большей частью встречались уже в природе задолго до того, как существовали люди (радиолярии, насекомые, кристаллы и т.д.)”;

любая математическая операция “совершается самой природой”, которая “оперирует этими дифференциалами, молекулами точно таким же образом и по точно таким же законам, как математика оперирует своими дифференциалами”;

“Смешение математических действий, допускающих математическое доказательство, проверку, – так как они основаны на непосредственном материальном созерцании, – с такими чисто логическими действиями, которые допускают доказательство путем умозаключения и которым, следовательно, не свойственна положительная достоверность, присущая математическим действиям <...>”;

“Математические понятия взяты не откуда-нибудь, а только из действительного мира. Они заимствованы из внешнего мира, а не возникли в голове из чистого мышления”.

Для иллюстрации неочевидности вопроса о связи математики с действительностью мой учитель Д.А. Гудков[1] приводил на своих лекциях по истории математики следующую схему.



Если с первой связью (стрелка 1) можно с небольшими оговорками[2] согласиться, то простые числа уже не так близки к действительности – вспомните Л. Кронекера (1823-1891): “Бог создал натуральные числа, все остальное – дело рук человеческих”. Теорема Евклида может и вообще не иметь к действительности никакого отношения, поскольку вопрос о наличии в природе бесконечности, насколько мне известно, не решен. Можно ли тогда говорить, что стрелка 6 отвечает непосредственной связи с действительностью?

---

[1] Дмитрий Андреевич Гудков (1918-1992) – профессор Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. В 1969 г. он нашел классификацию неособых кривых степени 6 и открыл (в виде гипотезы) сравнение в топологии вещественных алгебраических кривых, доказательство которого в последовавших работах В.И. Арнольда и В.А. Рохлина ознаменовало начало современного этапа в исследованиях по 16-ой проблеме Гильберта. Д.А. Гудков также автор книги “Н.И. Лобачевский. Загадки биографии”(1992 г.).

[2] Конечно, для строгого дедуктивного использования натуральных чисел и они требуют формального описания – например, с помощью аксиоматики Пеано.

Нет никаких сомнений в том, что А.Н. Колмогоров (1903-1987), взявший определение Энгельса за основу в своей во многом основополагающей статье “Математика” (см. [2]), понимал недостатки этого определения лучше других. В частности, он пытался подправить это определение – например, снять Вопрос 2 не слишком конкретным разъяснением “Запас количественных отношений и пространственных форм, изучаемых математикой, непрерывно расширяется”, или непосредственно вставляя в определение наряду с “пространственными формами и количественными отношениями” математическую логику. Почему же Колмогоров не отказался от определения Энгельса? Ответ на этот вопрос представляется мне совершенно очевидным: в условиях, мягко говоря, идеологической несвободы сделать это было невозможно.

Негодность определения Энгельса была ясна многим математикам. Некоторые из них предложили свои варианты определения математики. Приведу ряд примеров.

Л.Д. Кудрявцев в 1980 г. писал [3]: “Чистая математика – это наука, изучающая специальные логические структуры, называемые математическими структурами, у которых описаны определенные отношения между элементами”. Мне не кажется удачной идея определять понятие “*математика*” через понятие “*математическая* структура”, хотя Н. Бурбаки [4] делает то же самое: “Математика есть набор абстрактных форм – математических структур”.

В недавней статье [5] Л.Д. Кудрявцев развернул свое определение: “Математика изучает определенного рода логические понятия и отношения между ними. Для этих понятий даются логические определения и постулируются их связи. Определяются теоретико-множественные, топологические, метрические, геометрические, аналитичес-кие, алгебраические и вероятностные структуры, которые и представляют собой предмет, изучаемый математикой”. И далее: “Математические структуры представляют собой часть информационного поля, которое существует наряду с материальным (физическим) полем. Информационное поле состоит из реально существующих абстрактных фактов. $<\ldots>$ Информационное поле содержит в себе разнообразные логические (не только математические) структуры, все сведения о материальном (физическом) мире, о законах его развития, взаимодействии его частей, о его прошлом и будущем”.

Перечислительный подход не кажется мне обнадеживающим: пропущены, например, “алгоритмические” структуры, да и кто вообще даст гарантию, что с развитием математики не возникнут структуры какого-то неведомого пока вида? Что касается концепции информационного поля из последней цитаты, то в первой части (“реально существующие абстрактные факты”) она не слишком ясна, а во второй части (“все сведения о материальном мире,..., о его прошлом и будущем") информационное поле по сути берет на себя функции Создателя.

Определение, предложенное Д.Х. Муштари, А.Н. Шерстневым и В.А. Бажановым для "Татарской энциклопедии": "Математика – наука о структурах, порядке и отношениях, возникшая в процессе развития практики вычислений, измерений и описания форм (реальных и абстрактных) объектов и отношений между ними и основанная на логических доказательствах и численных выкладках"[1], дает, на мой взгляд, наиболее удачное из вышеприведенных описание математики, но и его нельзя считать определением в логико-математическом смысле: оно опирается на неформализованные понятия (структура, порядок, отношение) без выделения каких-то понятий в качестве исходных, неопределяемых.

Мне кажется, что обреченность попыток дать "настоящее" определение математики ясна с самого начала. Конечно, эта мысль не является новой. Например, по мнению Г. Вейля (1885-1955) "Вопрос об основаниях математики и о том, что представляет собой в конечном счете математика, остается открытым. Мы не знаем какого-то направления, которое позволит в конце концов найти окончательный ответ на этот вопрос, и можно ли вообще ожидать, что подобный "окончательный" ответ будет когда-нибудь получен и признан всеми математиками" (см. [6, с. 16]). По этому же поводу А.П. Юшкевич (1906-1993) писал [7]: "Если меня спросят, что же такое математика, я не сумею ответить" и "Не знаю, возможно ли одной, хотя бы и длинной фразой определить, что же такое математика, если не говорить шутливо, что это предмет, которым занимаются так называемые математики <...>".[2]

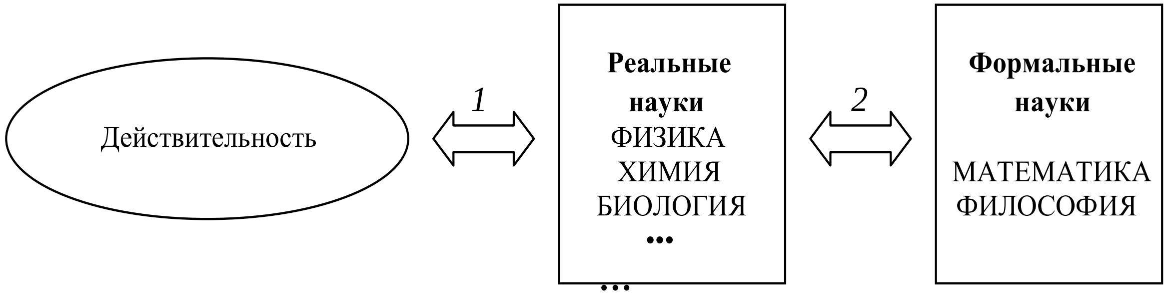
Чем же заменить (хотя бы в курсе истории математики) определение предмета математики? Д.А. Гудков полагал, что вместо определения математики следует описать ее место среди других наук, и в качестве такого описания считал адекватной схему, предложенную Г. Грассманом (1809-1877) в его знаменитой статье [8], в самом начале которой написано: "Верховное деление всех наук состоит в разделении их на реальные и формальные науки, из которых первые отображают в мышлении бытие, как самостоятельно противостоящее мышлению. Их истина заключается в согласии мышления с этим бытием. Наоборот, формальные науки имеют своим предметом то, что полагается самим мышлением. Их истина заключается в согласии процессов мышления с самими собой".

---

[1] Пользуюсь случаем поблагодарить профессора В.А. Бажанова, сообщившего мне это определение.

[2] Кстати, в той же статье [7] А.П. Юшкевич писал: "Недостаточность принятого за отправное определения Энгельса была ясна А.Н. [Колмогорову] с самого начала".

Студентам Д.А. Гудков пояснял подход Грассмана следующей схемой, называя стрелку 1 “первым отражением”, а стрелку 2 – “вторичным отражением” действительности.



Из сказанного выше мне представляется совершенно неоправданной практика, когда, скажем, на лекции без всяких комментариев дается “классическое” определение математики через “*пространственные формы и количественные отношения*”.[1] Во-первых, это ничему не учит. Во-вторых, при всем искреннем уважении к А.Н. Колмогорову я не вижу никакого смысла в канонизации его подходов со всеми деталями. Наконец, мне кажется неэтичным как приписывать это определение А.Н. Колмогорову, так и сообщать, что это определение принадлежит Ф. Энгельсу, не сказав при этом о полном непонимании Энгельсом современной ему математики. Тщательное обоснование последнего утверждения можно найти в замечательной статье Ж. ван Хейенорта[2] [9], где, в частности, убедительно показано, что “Энгельс был столь же незнаком с историей анализа, сколько и с его принципами” и что “для Энгельса математика фактически неотличима от физики, она как бы ветвь физики”.[3] Приведу только несколько цитат из Энгельса по [9]: “Квадратный корень из минус единицы не просто противоречие, а даже абсурдное противоречие, действительная бессмыслица. <...> Если

---

[1] Мне довелось присутствовать на такой лекции уже в постсоветский период.

[2] Жан ван Хейенорт (1912-1986) в 1932-1939 гг. был личным секретарем и телохранителем Л.Д. Троцкого, затем до 1945 г. – секретарем IV Интернационала. Разочаровавшись в марксизме, Ж. ван Хейенорт в 1946 г. закончил университет в Нью-Йорке и в 1949 г. защитил диссертацию по геометрии. Позже его интересы переместились в область математической логики, а затем – в историю логики и математики и в философию. В 1965-1986 гг. он преподавал философию в различных университетах США.

[3] Ср. с высказыванием В.И. Арнольда [10]: “Математика – это часть физики, являющаяся, как и физика, экспериментальной наукой: разница только в том, что в физике эксперименты стоят обычно миллионы долларов, а в математике – единицы рублей”. Впрочем, я не знаю математиков, согласных с этой формулировкой, и подозреваю, что в процитированном высказывании главным является его полемический или какой-то тактический смысл.

только мы привыкнем приписывать корню квадратному из минус единицы или четвертому измерению какую-нибудь реальность вне нашей головы, то уже не имеет особенно большого значения, сделаем ли мы еще один шаг дальше, признав также и спиритический мир медиумов”; “Во всякой системе с нечетным основанием теряет силу различие четных и нечетных чисел”; “Математические аксиомы самоочевидны для европейцев, но, конечно, не для бушменов и австралийских негров”;[1] “Лейбниц – основатель математики бесконечного, по сравнению с которым индуктивный осел Ньютон является испортившим дело плагиатором”.

2. О периодизации истории математики. С точки зрения преподавания истории математики разбиение длительного пути ее развития на отдельные периоды является прежде всего удобным и необходимым инструментом. В таблице ниже приведены известные мне подходы к периодизации истории математики. Конечно, следует иметь в виду, что каждая периодизация в значительной степени условна (как правило, границы периодов ориентировочны, региональные особенности не учитываются, в каждом новом периоде сохраняются черты предыдущих и т.д.).

t	В.В. Бобынин	А.Н. Колмогоров	А.Д. Александров	Д.А. Гудков	Г.М. Полотовский
+1950	Дедуктивная математика	Современная математика	Современная математика	Современная математика	Современная математика
			Абстрактная математика		
+1800		Математика переменных величин	Математика общих понятий	Математика переменных величин	«Абстрактно-общая» математика
+1600 – 500		Период элементарной математики	Период элементарной математики	Математика постоянных величин	«Конкретно-наглядная» математики
–3000	Индуктивная математика	Период зарождения математики	Период зарождения математики Момент	Праматематика дворцовых цивилизаций	Праматематика дворцовых цивилизаций
			зарождения	Праматематика первобытного общества	Праматематика первобытного общества

---

[1] По-моему, неплохая иллюстрация и к вопросу о пролетарском интернационализме.

Периодизация, предложенная В.В. Бобыниным (1849-1919), была бы безупречной, не будь она столь бедной. Классическая периодизация Колмогорова изложена в той же знаменитой статье “Математика”, что и обсуждавшийся выше его подход к определению математики. Последующие авторы, включенные в таблицу, принимают границы периодов, предложенные Колмогоровым[1], подразделяя некоторые периоды на более короткие. Так, Д.А. Гудков делит начальный период на “праматематику первобытного общества”, характеризующуюся накоплением опыта счета и различения геометрических объектов, и на “праматематику дворцовых цивилизаций” – период накопления математических фактов. Приставка “пра” призвана подчеркнуть чисто индуктивный характер математики этих периодов. А.Д. Александров делит на части период “современная математика”, что тоже представляется обоснованным, поскольку он уже достаточно продолжителен и не является однородным. По поводу его деления и названий частей могут быть разные подходы. Так, А.П. Юшкевич [7] считал, что математику XIX и первой половины XX века можно охарактеризовать названием “эпоха нестандартной математики”, а вторую половину XX века – временем вычислительной и машинной математики. Мне кажется, что характерной чертой математики двух последних веков является также появление серии “отрицательных” результатов (доказательство неразрешимости трех классических задач древности, недоказуемости V-го постулата Евклида, открытие алгоритмически неразрешимых проблем, логической непротиворечивости континуум-гипотезы и т.п.).

Однако названия “средних” периодов представляются мне неадекватными. По поводу неудачности термина “период элементарной математики” ясно высказался А.П. Юшкевич в [7], мотивируя это как неопределенностью самого термина “элементарная математика”, так и явной неэлементарностью (при любом разумном понимании этого термина) многих математических достижений античности[2]. Мне представляются неверными также названия “математика постоянных величин” и “математика переменных величин”: конечно, древним грекам не свойственны были выражения типа ”пусть x пробегает значения от 0 до 1“, однако ни апории Зенона, ни теорию Евдокса отношений величин, ни его же

---

[1] Отмечу, что выделение “момента зарождения” в периодизации, предложенной А.Д. Александровым, представляется мне неестественным.

[2] А.П. Юшкевич писал в [7]: “Как-то раз я попробовал затронуть этот вопрос в беседе с А.Н. Он выслушал мои замечания, но ответил только: “Интересно: об этом стоит подумать” и этим ограничился”. По-видимому, на этот вопрос у А.Н. Колмогорова не было уже ни сил, ни времени.

метод исчерпывания, ни "Трактат о конфигурации качеств" Н. Орема (XIV в.) – примеры можно продолжать – нельзя отнести к математике постоянных величин. Я не сомневаюсь (по-моему, это ясно видно из текста Колмогорова), что эти названия периодов – еще один "идеологический рудимент", спровоцированный известным высказыванием Энгельса: "Поворотным пунктом в математике была декартова переменная величина. Благодаря этому в математику вошли движение и диалектика...". Замечу, что мои (последний столбец таблицы) названия этих периодов тоже не кажутся мне удачными – я их оставил за неимением лучших.

Замечание. Этот текст написан уже после того, как был сделан устный доклад, поэтому у меня есть приятная возможность поблагодарить участников Чтений за заинтересованное обсуждение.

Библиографический список

1. *Энгельс, Ф.* Анти-Дюринг. Переворот в науке, произведенный господином Евгением Дюрингом [Текст] / Ф. Энгельс. – М.: Политиздат, 1983. – 482 с.
2. *Колмогоров, А.Н.* Математика в ее историческом развитии [Текст] / А.Н. Колмогоров. – М.: Наука, 1991. – 223 с.
3. *Кудрявцев Л.Д.* Современная математика и ее преподавание [Текст] / Л.Д. Кудрявцев. – М.: Наука, 1985. – 170 с.
4. *Бурбаки, Н.* Очерки по истории математики [Текст] / Н. Бурбаки. – М.: ИЛ, 1963. – 292 с.
5. *Кудрявцев, Л.Д.* О математике [Текст] / Л.Д. Кудрявцев // Математика в высшем образовании. – 7 (2009). – С. 9-20.
6. *Клайн, М.* Математика. Утрата определенности [Текст] / М. Клайн. – М.: Мир, 1984. – 16 с.
7. *Юшкевич, А.П.* А.Н. Колмогоров о сущности математики и периодизации ее истории [Текст] / А.П. Юшкевич // Историко-математические исследования. – 1994. – Вып. 35. – С. 8-16.
8. *Грассман, Г.* Чистая математика и учение о протяженности [Текст] / Г. Грассман // В кн.: "Математика. Метод, проблемы и значения ее". – Спб.: Образование, 1913.
9. *Ван Хейенорт, Ж.* Ф. Энгельс и математика [Текст] / Ж. ван Хейенорт // Природа. – 1991. – № 8. – С. 90-105.
10. *Арнольд, В.И.* Что такое математика? [Текст] / В.И. Арнольд. – МЦНМО, 2002. – 104 с.

Квадратриса Гиппия и ее связь с задачами о трисекции угла и о квадратуре круга

А.И. Щетников

Обзор исторических свидетельств

Задача о делении произвольного угла на три равных части (и вообще в произвольном данном отношении) могла исходно рассматриваться греческими геометрами в связи с вопросом о построении разных правильных многоугольников. Попытки решить ее в общем виде с помощью циркуля и линейки не увенчались успехом. Поэтому для ее решения стали изобретаться другие средства.

Одним из таких средств служит специальная механическая кривая, изобретенная знаменитым софистом Гиппием Элидским (конец V в. до н.э.). Позднее эта кривая была применена Динostратом (середина IV в. до н.э.) для решения задачи о квадратуре круга, и поэтому она получила название квадратрисы.

О том, что квадратриса каким-то образом связана с именем Гиппия, сообщает Прокл (V в. н.э.) в *Комментарии к I книге Начал Евклида.* В первом отрывке, относящемся к этому вопросу, Прокл перечисляет разные подходы к решению задачи о трисекции угла: “Никомед воспользовался для этого конхоидальной линией, и он учит нас ее порождению, порядку и признакам, будучи открывателем ее особенностей; и с ее помощью он делит всякий прямолинейный угол на три части. Другие осуществляли это при посредстве квадратрис Гиппия и Никомеда, и они тоже пользовались смешанными линиями – квадратрисами. Иные же начали со спиралей Архимеда и разделили данный прямолинейный угол в данном отношении” (272.7). Во втором отрывке речь идет об установлении определяющих принципов для различных кривых: “Ведь и Аполлоний показывает признаки каждой из конических линий, и Никомед для конхоид, и Гиппий для квадратрис, и Персей для спирик” (356.11).

Свидетельства Прокла, восходящие, скорее всего, к Гемину (I в. н.э.), весьма отрывочны. Подробное же изложение, включающее в себя построение квадратрисы, предложенное Динostратом решение задачи о квадратуре круга, критические возражения, выдвинутые против этого решения Спором Никейским, а также связь квадратрисы с некоторыми спиральными линиями, приводит Папп (III в. н.э.) в *Математическом собрании* (IV, 30-34). В начале этого раздела он сообщает, что “для осуществления квадратуры круга Динострат, Никомед и другие более поздние математики пользуются некоторой кривой, получившей имя квадратрисы от этого ее основного свойства”. Имя Гиппия в тексте Паппа не упомянуто – скорее всего, по той причине, что хотя Гиппий и придумал эту кривую, описав принцип ее построения, однако ее связь с проблемой квадратуры круга была установлена существенно позже.

В. Кнорр в своей книге (Knorr 1986) обсуждает построение Гиппия в свете общей истории решения геометрических задач древнегреческими математиками, и делает предположение, что Гиппий – изобретатель квадратрисы не тождественен с Гиппием Элидским, но жил в более позднюю эпоху. Впрочем, этот вывод не представляется мне обязательным: конструкция квадратрисы достаточно естественна и проста, и она выглядит весьма элементарной по сравнению с некоторыми геометрическими построениями математиков из следующего за Гиппием поколения, – скажем, по сравнению с решением задачи об удвоении куба, предложенным Архитом Тарентским. Во всяком случае, Гиппий не старше Динострата – ведь рассуждение Динострата опирается на построение Гиппия, которое предполагается уже выполненным.

Гиппий и задача о делении угла в данном отношении

Ключевая идея, выдвинутая Гиппием, состоит в непрерывном соотнесении двух равномерных движений – кругового и прямолинейного. Если нам удастся установить такое соотнесение, то тогда, разделив след прямолинейного движения на любое число равных частей с помощью теоремы Фалеса, мы разделим на такое же число равных частей и соотнесенную с этим следом круговую дугу, а тем самым – и опирающийся на эту дугу центральный угол. На таком соотнесении основан целый ряд решений задач о делении угла, в том числе и упомянутое выше решение Архимеда со спиралями; решение же Гиппия было исторически первым.

В квадрат $ABCD$ впишем дугу окружности BD с центром A. Пусть радиус этой окружности AE равномерно вращается вокруг A от стороны AB к стороне AD; и пусть отрезок FG, равномерно перемещается от стороны BC к стороне AD, оставаясь параллельным этой паре сторон. Пусть оба эти движения одновременно начинаются и одновременно заканчиваются. Движущиеся отрезки в каждый момент времени будут пересекаться в некоторой точке H, которая опишет кривую линию BHG (рис. 1). При этом в любой момент времени пройденный отрезок BF будет так относиться к полному отрезку BA, как пройденная дуга BH к полной дуге BK.

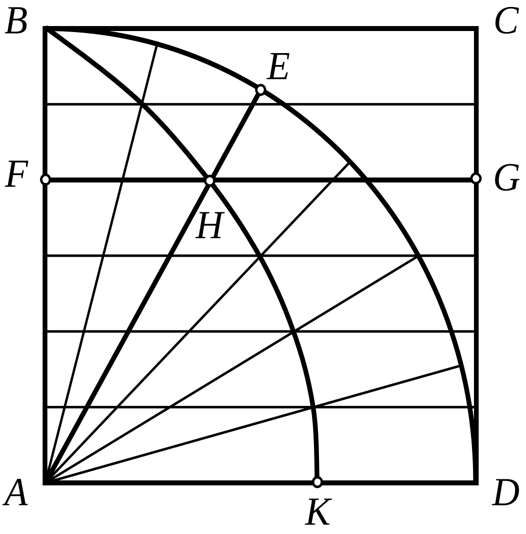


Рис. 1

Когда кривая Гиппия уже проведена, ее можно применять для деления произвольного угла в любом заданном отношении. К примеру, пусть мы хотим разделить некий острый угол на три части. Отложим равный ему угол BAH, где H – точка, в которой сторона угла пересекает кривую. Опустим из H на AB перпендикуляр HF. Разделим отрезок BF на три равных части точками L, M. Восстановим к AB перпендикуляры LP, MQ до пересечения с кривой BHK в точках P, Q. Проведем лучи AP, AQ – они делят угол BAH на три равных части (рис. 2).

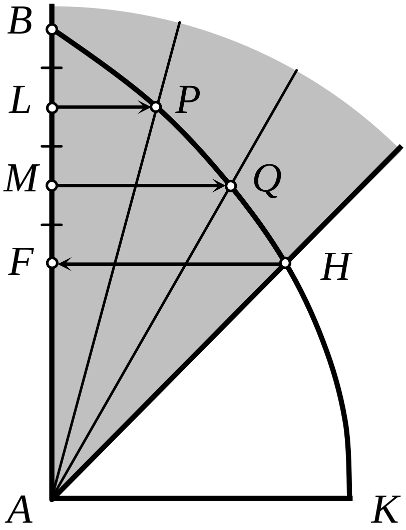


Рис. 2

Против применения квадратрисы в геометрии возражал Спор Никейский. “В самом деле, – говорил он, – как можно заставить две точки двигаться из B равномерным движением так, чтобы одновременно одна точка пришла по прямой в A, а другая точка – по дуге в D, если не знать с самого начала, как относятся между собой длины этих прямой и дуги? Ведь именно в этом отношении должны находиться и скорости обоих движений. Если же это отношение нам не дано, то не следует пользоваться этой линией, относящейся скорее к механике, нежели к геометрии”.

Отметим также, что проблему сравнения двух движений, одно из которых происходит по прямой линии, а другое – по окружности, обсуждает Аристотель в *Физике* (248a10–b6) – впрочем, не слишком внятно.

Возможно, Спор в своем возражении и был некоторым образом прав, и решение задачи о трисекции угла с помощью квадратрисы или других механических линий в рамках некоторых требований не может быть признано за “настоящее” геометрическое решение. Однако сама квадратриса, будучи мысленно построенной, оказывается вполне определенным геометрическим объектом, с которым можно связывать разные теоремы и задачи, что и было сделано сначала Гиппием, а впоследствии – Динократом.

Динострат и задача о спрямлении дуги окружности

Как сообщает Папп, Динострат установил, что дуга BED так относится к радиусу AD, как сам этот радиус AD относится к отрезку AK, где K – концевая точка квадратрисы. Сам Динострат доказывает эту теорему методом исчерпания. Сначала предполагается, что величина AK', определяемая из пропорции

$$\text{дуга } BED : AD = AD : AK',$$

будет или больше, или меньше AK; оба эти предположения приводятся к противоречию, после чего делается вывод, что AK' совпадает с AK.

Здесь мы сталкиваемся с ситуацией, характерной для многих сохранившихся доказательств античной геометрии: ни из формулировки теоремы, ни из самого доказательства никоим образом не видно, откуда автор узнал, что доказываемая им теорема верна. Между тем у него обязательно должно было иметься некоторое предварительное понятие о ее истинности: ведь если бы такого знания у него не было, с чего бы он стал эту теорему доказывать?

Осознав эту ситуацию, попробуем восстановить тот путь, который мог привести Динострата к его открытию. Как мы помним, исходная идея Гиппия состояла в согласовании вращательного и поступательного движений. В его конструкции проходимые двумя точками расстояния были различными, а потому были различны и скорости их движений. Если нам удастся построить прямолинейное и круговое движение с равными скоростями, то движущиеся таким образом точки будут проходить за одно и то же время равные расстояния, и прямая будет приравнена по длине дуге окружности.

Проведем дугу KM в четверть окружности с центром A и рассмотрим начинающееся в точке K согласованное движение трех точек: пусть точка Pдвижется по кривой KB, точка Q – по отвесу KL, точка R – по дуге KM таким образом, чтобы точки P и Q постоянно находились на одной горизонтали FG, а точки P и R – на одном радиусе AP (рис. 3). Пусть точка Q движется по KL равномерно: тем самым точка R движется по KM также равномерно, поскольку это согласование движений заложено в самый принцип построения кривой Гиппия.

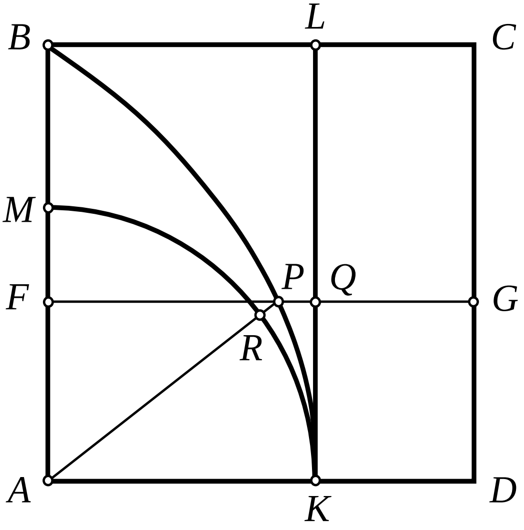


Рис. 3

Посмотрим теперь, как обе точки Q и R начинают свое движение от точки K. За “первое мгновение движения” они проходят один и тот же бесконечно малый стартовый отрезок, который можно считать и бесконечно малой дугой окружности, и бесконечно малым отрезком касательной к этой дуге, поскольку окружность и ее касательная совпадают в бесконечно малом. Тем самым скорости обеих точек оказываются одинаковыми на старте – а следовательно, и в течение всего движения. Поэтому за полное время своего движения обе точки проходят равные расстояния. Отсюда можно заключить, что отрезок KL равен по длине дуге KM. Возвращаясь к первоначальному чертежу (рис. 1), заключаем, что вписанная в квадрат дуга BD так относится к стороне AD, как AD относится к отрезку AK.

Понятно, что это рассуждение, если его рассматривать в качестве доказательства, не выдерживает стандартов строгой критики, поскольку оно имеет дело с “бесконечно малыми движениями”, которые в строгом смысле не существуют; но зато теперь известно, что нужно доказывать, а приемы таких доказательств уже были разработаны в древнегреческой математике Евдоксом.

Кроме того, рассуждение Динострата опирается на нетривиальный факт существования концевой точки K, местонахождение которой не может быть определено прямым построением, на что указывал в своей полемике Спор: “Невозможно определить ту точку кривой, которая необходима для выполнения квадратуры круга, а именно точку ее пересечения с прямой AD; ведь когда прямые AE и FG будут при своем движении приближаться к исходному положению, они совпадут с прямой AD и никоим образом не дадут точки взаимного пересечения”.

На это можно ответить, что хотя прямые AB и BC в своем конечном положении не дают пересечения в точке, однако во всех прочих положениях они пересекаются в определенной точке, и эта точка в своем движении подходит к точке K как к пределу этого движения.

Библиографический список

1. *Архимед.* Сочинения [Текст] / Архимед; перевод и комм. И.Н. Веселовского. – М.: Физматгиз, 1962.
2. *Ван дер Варден, Б.Л.* Пробуждающаяся наука: Математика древнего Египта, Вавилона и Греции [Текст] / Б.Л. Ван дер Варден; перевод И.Н. Веселовского. – М.: Физматгиз, 1959.
3. *Прасолов, В.В.* Геометрические задачи древнего мира [Текст] / В.В. Прасолов. – М.: Фазис, 1997.
4. *Heath, T.L.* A history of Greek mathematics. 2 vols. Oxford: Clarendon Press, 1921.
5. *Knorr, W.R.* The ancient tradition of geometric problems. Boston: Birkhäuser, 1993.
6. *Pappus.* Synagoge. Ed. F. Hultsch. 3 vols. Berlin: Weidmann, 1876-1878.
7. *Proclus.* In primum Euclidis elementorum librum commentarii. Ed. G. Friedlein. Leipzig: Teubner, 1873.

О неизданной рукописи И.Н. Веселовского

Г.А. Зверкина

В библиотеке МГУ с 1941 г. хранится рукопись И.Н. Веселовского “Возникновение греческой науки. (Физико-математические науки в Греции VI века до н.э.)” – 3 книги, 497 с. Этот текст, отпечатанный под копирку с многочисленными рукописными вставками и исправлениями, И.Н. Веселовский передал на хранение на механико-математический факультет МГУ 9 июля 1941 г., когда стало ясно, что начавшаяся 22 июня 1941 г. война с немецко-фашистскими захватчиками продлится не один месяц (к этому времени фашисты уже захватили значительную часть запада и северо-запада СССР и вплотную подошли к Смоленску).

Позднее ряд материалов этой рукописи вошли в публикации "Египетская наука и Греция" (1948) и "Вавилонская математика (по материалам диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук, 1951)" (1955) в Трудах Института истории естествознания и техники. Но в полном виде эта замечательная книга так и не была издана, и число прочитавших рукопись исчисляется единицами.

Прежде чем продолжить рассказ об этой работе, вкратце изложим биографию И.Н. Веселовского.

Иван Николаевич Веселовский родился 26(14) ноября 1892 г. в Москве в профессорской семье. Он блестяще закончил классическую гимназию и в 1916 г. математическое отделение физико-математического факультета Московского университета, после чего был оставлен для подготовки к профессорскому званию под руководством Н.Е. Жуковского. Несколько лет он проработал инженером-исследователем в ЦАГИ под руководством Н.Е. Жуковского, затем в Госплане. С 1921 г. он работал в Аэродинамической лаборатории МВТУ, а с 1925 г. читал в МВТУ курсы и вел практические занятия по теоретической механике – сначала в качестве рядового преподавателя, а позже профессора. И.Н. Веселовский – автор целого ряда учебных пособий и курсов по математике и теоретической механике. Скончался И.Н. Веселовский 24 июня 1977 г. в Москве.

В историю науки И.Н. Веселовский, как и многие другие историки науки, пришел из действующей науки. История науки стала для него увлечением, которое со временем превратилось в главное дело жизни. Незаурядные филологические способности и интерес к истории культуры определили основное направление его исследований в этой области. Он с гимназических времен владел несколькими языками, а позднее освоил итальянский, польский, голландский, новогреческий...

Еще в довоенные годы он перевел на русский язык почти все доступные сочинения античных авторов по математике и механике. Античная наука в дальнейшем стала главным делом его жизни.

В 1948-1950 гг. был издан перевод "Начал" Евклида, в редактировании которого И.Н. Веселовский принимал непосредственное участие; также он снабдил это издание обстоятельными комментариями.

В 1962 г. были опубликованы сочинения Архимеда вместе с многочисленными приложениями переводов античных авторов. Также И.Н. Веселовский перевел труды Диофанта Александрийского, Аристарха Самосского, Клавдия Птолемея, Николая Коперника. Благодаря его переводу отечественные читатели смогли ознакомиться и с важными для истории науки трудами Б.Л. Ван дер Вардена.

Некоторые его переводы античных авторов (псевдо-Аристотеля и Герона Александрийского), Иордана Немрария (Jordanus Nemorarius, XIII в.), а также итальянского астронома и историка науки XIX века Джованни Вирджинио Скиапарелли (Schiaparelli, Giovanni Virginio, 1835-1910) до сих пор не изданы.

Итак, основным направлением работы И.Н. Веселовского была средневековая и античная наука. Знание мертвых языков и широкая эрудиция математика, хорошее гуманитарное образование позволили И.Н. Веселовскому подойти к изучению истории античной науки несколько иначе, чем его предшественникам.

Дело в том, что с начала возникновения истории науки античной наукой занимались, в основном, филологи, немного знающие соответствующую науку (в рамках школьного или гимназического курса) и специалисты в данной области знания, всецело доверявшиеся мнению переводчиков-филологов (а, как известно, перевод старинных научных текстов часто зависит от того, насколько переводчик разбирается в сущности переводимого текста). Первоначально история науки ограничивалась в основном биографиями ученых, затем стали исследоваться и их результаты и методы их научной работы. Но практически отсутствуют историко-научные работы, в которых бы глубоко прослеживались причины интереса ученых к тем или иным проблемам и давался бы анализ социально-экономического, технологического, мировоззренческого и межкультурного влияния на развитие науки.

Авторов, пишущих об истории науки, И.Н. Веселовский разделял на четыре группы: 1) люди, хорошо знающие свою науку, но не обладающие достаточными историческими знаниями; 2) люди, хорошо знающие историю, но не специалисты в науке, историю которой они описывают; 3) довольно многочисленная группа авторов, не знающих как следует ни истории, ни науки; 4)очень небольшое количество исследователей, хорошо знающих и свою науку, и вполне понимающих значения исторических условий ее развития.

К этой последней группе И.Н. Веселовский причислял Б.Л. Ван дер Вардена, и, конечно, к ней принадлежал и он сам.

И.Н. Веселовский был не только специалистом в области физико-математических наук, но и знатоком античной и средневековой культуры, и его знание древних языков и возможность изучения первоисточников привели И.Н. Веселовского к совершенно революционным взглядам на историю зарождения и становления науки в древней Греции.

Он не просто анализировал сохранившиеся античные научные тексты (не столько математического, сколько мировоззренческого содержания), но и увязывал их с состоянием и путями развития общественной мысли (а это включает и разного рода мифы и религиозные представления древних народов – предшественники философии). Кроме того, изучение истории развития науки немыслимо без учета состояния общественных отношений и уровня развития производства и экономических отношений, без учета взаимного влияния различных древних культур друг на друга. Этот подход к исследованию истории науки лишь в недавнее время начал использоваться отдельными отечественными и зарубежными исследователями.

При этом И.Н. Веселовский не только приводит достаточно широко известные в его время факты из истории античной науки, но и впервые дает ряд важных для истории науки античных текстов в своем переводе.

Для того, чтобы возможно было оценить масштабы предпринятого И.Н. Веселовским исследования, приведу основные тезисы рукописи, составленные И.Н. Веселовским.

Возникновение греческой науки (физико-математические науки в Греции VI века до н.э.)

1. Исследования последнего времени показали, что вавилонская научная астрономия возникла в 7-6-ом веках, т.е. почти одновременно с греческой наукой, и развивалась параллельно с этой последней.

2. Это обстоятельство заставляет думать, что причины, вызвавшие развитие, как греческой, так и восточной науки, действовали на всем протяжении Восточного Средиземноморья.

3. Века, предшествовавшие 6-му веку (от 9-го до 7-го), были временем распространения железных орудий в Восточном Средиземноморье. Классическими представителями "железного века" являются греки послегомеровской эпохи в Европе и ассирийцы в Азии.

4. Введение железа способствовало неравномерному развитию различных культурных областей, выдвинуло на первый план народы, прилегающие к малоазиатскому и иранскому плато (центр распространения железа лежал, по-видимому, на востоке Малой Азии), сделало возможным завоевание одних культурных стран другими, вызвало обмен между различными культурными странами; все это привело к созданию денежной системы (возникающей почти одновременно и в Малой Азии, и в Индии) и к изменению характера рабовладения: домашнее и коллективное рабство восточных теократий заменяется рабством античного типа.

5. Возникновению античной науки в 6-м веке предшествовало громадное религиозное движение, захватившее все Восточное Средиземноморье от Индии до Греции; в указанное время возникают буддизм и джайнизм в Индии, религия Заратустры в Иране, иудаизм в Палестине и Двуречье, элевсинские, дионисовские и орфические мистерии в Греции. В результате этого "реформационного" движения меняется содержание древней религии: бывшая в предшествующую эпоху натуралистической, она приобретает моральный характер: появляется идея об универсальном божестве, источнике всякого добра, возникают дуали-

стические учения о противоположности добра и зла в мире, о бессмертии души и необходимости очищения.

6. В связи с переходом центра тяжести религиозной жизни от натурализма к морали пересматриваются старые об"яснения природных явлений “волей богов” и возникает возможность новых об"яснений, не являющихся ни теологическими, ни мифологическими. На греческой почве громадную роль в этом отношении сыграли представлявшие воззрения образованных людей орфические учения, характерными особенностями которых являлись, во-первых, космогонические теории и, во-вторых, учение о бессмертии души.

7. Шестой век в Греции характеризуется сильным развитием космогонических теорий (Акусилай, Эпименид, Ферекид, орфики), которые в процессе постепенного развития теряют свой первоначальный мифологический характер и в космогониях милетской школы приобретают уже вполне рационалистический характер, исключающий идею божественного вмешательства.

8. Из философов Милетской школы Фалес познакомил греков с заимствованными им из Египта астрономическими учениями, Анаксимандр дал первую чисто механическую картину возникновения мира, Анаксимен является творцом научной метеорологии.

9. В деятельности пифагорейской школы отразилась вторая особенность орфических учений – идея о бессмертии души. Для складывания воззрений пифагорейской школы существенное значение имело два обстоятельства: во-первых, желание устранить резкие проявления политической борьбы, во-вторых, – то, что Самос 6-го века до н.э. был крупным инженерным центром тогдашней Греции. Первое обстоятельство способствовало созданию замкнутой школы, ставившей целью воспитание своих членов, и, в конечном счете, привело к возникновению формальной логики; второе обстоятельство выдвинуло на первый план интерес к математическим теориям.

10. Находящиеся в нашем распоряжении источники не дают нам возможность охарактеризовать самого Пифагора, как научного деятеля; тем не менее они дают возможность утверждать, что пифагорейская арифметика уже существовала около 500 г. до н.э.

11. Пифагорейское представление о числе было двоякого рода: число рассматривалось или в виде logos arithmos – имеющего некоторую форму собрания материальных единиц – монад, или в форме l3go∼ – формулы, указывающей соотношение входящих в состав рассматриваемого предмета элементов.

12. В конце 9-ой книги Эвклида сохранилась пифагорейская теория четных и нечетных чисел, приводящая к учению о совершенных числах, египетское происхождение которого в высшей степени вероятно.

13. В начальной стадии своего развития пифагореизм не имел самостоятельной геометрической науки: геометрия представляла собой лишь часть общей науки о числе (арифметическая геометрия); о первоначальной ее форме можно составить представление, рассматривая индусскую геометрию “сутр шнура”.

14. Крушение своеобразного “математического атомизма” пифагорейцев произошло еще на пифагорейской почве в результате открытия иррациональности $\sqrt{2}$.

15. Кроме арифметики и геометрии пифагорейцы применяли свою теорию чисел и к музыке. Находящиеся в нашем распоряжении источники не позволяют составить представления о начальных стадиях развития пифагорейской теории музыки; однако, в высшей степени вероятно, что понятие об отношении и пропорции развилось первоначально именно на почве музыкальной теории.

18. Никакой стереометрии и никакого учения о сферичности земли в эпоху Пифагора не существовало: развитие греческой астрономии началось уже после Пифагора.

17. Сравнение между Пифагором и милетской школой показывает, что оба течения почти в одинаковой степени интересовались вопросами о началах, о божестве, о материи, о мире, о душе, обе школы характеризуются резко выраженным дуализмом. Основное отличие между Пифагором и милетцами заключается в том, что пифагорейцы исключали из своего рассмотрения движение, в то время как для милетской школы движение, наряду с материей, играло первостепенную роль в мировом процессе. Эта “статичность” пифагорейской философии в противоположность динамизму милетцев находит свое историческое оправдание в тем, что пифагорейцы, вырабатывая формально-логические методы математических доказательств, естественно должны были исключить идею развития из своего рассмотрения.

18. Несмотря на некоторый более или менее резке выраженный религиозный оттенок греческой научной мысли в 6-м веке до н.э., большими достижениями греческой науки за этот период является установление основ ионийской астрономии и пифагорейской математики.”

В начале работы И.Н. Веселовский обсуждает, какое место занимает история науки в ряду других научных дисциплин и ее значимость в современной науке и культуре.

В первой книге рукописи он начинает анализ развития физико-математических наук Греции не с перечисления греческих ученых и их работ, а с анализа развития наук (в первую очередь, математики и астрономии) в смежных с Грецией странах. Он рассматривает состояние и развитие научного знания в древнейших культурах, учитывая их дальнейшее влияние на развитие греческого знания. И.Н. Веселовский собрал все доступные в то время сведения о науке минойцев, египтян, лидийцев, хеттов и ассирийцев. Естественно, особое внимание он уделял вавилонской науке и ее влиянию на дальнейшее развитие греческого знания, в первую очередь, астрономии.

Надо сказать, что история науки в этом исследовании рассматривается в связи с историей развития технологий, экономических и межгосударственных отношений всех регионов, которые имели или могли иметь некие связи с греческими городами и государствами.

Вторая книга посвящена развитию Ионийской науки, причем И.Н. Веселовский исследует не только “чисто научные” произведения мыслителей эллинистической части Малой Азии, но и влияние на научную мысль различных религиозных представлений древнего мира. В связи с этим, естественно, он касается истории знания и культуры одного из ближайших соседей ионийцев – древнего Ирана. Невозможно рассматривать развитие науки Восточного Средиземноморья в отрыве от его связей с Востоком.

И.Н. Веселовский глубоко изучает разнообразные философско-мировоззренческие представления греческих авторов, начиная с 7-6 веков до н.э. и до 3-го века до н.э. Его исследование орфизма и греческих космогоний подкрепляются большим количеством греческих текстов, частично переведенных самим И.Н. Веселовским, частично взятых из широко известных переводов Ф.Ф. Зеленского (надо сказать, тоже не профессионального переводчика, а ученого-филолога, подтверждавшего свои исследования собственными переводами древних авторов).

Естественно, в этой части своего исследования И.Н. Веселовский уделяет большое внимание всем доступным сведениям о Фалесе, Анаксимандре и Анаксимене. Он убедительно доказывает, что значительная часть астрономических открытий, приписываемых Фалесу, имеет вавилонское происхождение, а ряд философских положений греческих авторов имеют египетские корни.

Третья книга посвящена самому яркому представителю греческой науки рассматриваемого периода – Пифагору. И.Н. Веселовский скрупулезно исследует все дошедшие до XX века греческие свидетельства о Пифагоре, начиная с разрозненных отрывков в древнейших научных текстах и кончая греческими историками и представителями неопифагорейцев. При этом он не только сравнивает различные свидетельства о деятельности Пифагора, но и оценивает экономическое и политическое положение Самоса в исследуемую эпоху, влияние состояния военно-инженерного развития Самоса на воззрения древних ученых. Он приводит убедительные свидетельства о серьезном влиянии египетской и персидской традиции на развитие технологий Самоса и на пифагорейскую философию.

Особое внимание он уделяет понятию числа у пифагорейцев, которые различали его значение как числа arithmos и числа logos.

Важное место в пифагореизме занимает логическое доказательство. Рассматривая пифагорейскую педагогику, И.Н. Веселовский связывает ее с возникновением этого нового метода научного исследования.

Естественно, большое внимание уделяется геометрическим познаниям пифагорейцев. Здесь И.Н. Веселовский сравнивает состояние греческой геометрии рассматриваемого периода с индийской математикой примерно того же времени – для этого он рассматривает известное сочинения Апастамбы “Шульба-Сутра” или “Правила (сутры) веревки” – сочинение о методах геометрических построений с помощью натянутого шнура, т.е. фактически с использованием окружностей и прямых.

В оценке естественнонаучного знания пифагорейского времени важное место занимает пифагорейская теория музыки (фактически, теория построения музыкальной шкалы), астрономия и физиология. Эти области интересов первых пифагорейцев и их взаимосвязь также внимательно проанализированы И.Н. Веселовским.

В конце третьей книги И.Н. Веселовский дает оценку пифагорейской науки как важного этапа в развитии общечеловеческого знания и указывает общие и различные черты пифагорейской и ионийской (милетской) науки.

Столь широкого рассмотрения развития науки эллинистического мира в связи с историей развития культуры, мировоззрения и технологии других регионов мира, на мой взгляд, не было проведено ни одним из известных историков науки.

Автор выражает глубокую признательность сотрудникам библиотеки механико-математического факультета МГУ, сохранившим рукопись и предоставившим возможность ее изучения.

О двух математических письмах Декарта Принцессе Елизавете Богемской

О.О. Барабанов

Основными мотивами для этой работы послужили наши алгоритмы для современной спутниковой навигации [1, 2], которые неожиданно для нас (2008 год) оказались родственны первому математическому письму Декарта к Принцессе Елизавете Богемской, а также наши исследования творчества выдающегося русского ученого и педагога *Т.Ф. Осиповского (1766-1832)*, одного из первых картезианцев в России [3].

В последнее время внимание к творчеству Декарта только увеличивается. При этом на первый план выдвигается детализация мысли Декарта. Неслучаен поэтому интерес к переписке Декарта с Принцессой *Елизаветой Богемской (1618-1680)*, которая началась в 1643 году и продолжалась шесть с половиной лет до смерти Декарта в начале 1650. Эта переписка (32 письма Декарта, 26 писем Елизаветы) переведена на английский [4] и испанский язык [5]. Мы коснемся только писем с математическим содержанием № 6, 7, 8. Для простоты, письмо № 6 будет далее называться первым письмом Декарта, письмо № 7 – промежуточным письмом Елизаветы, письмо № 8 – вторым письмом Декарта. Мы заимствуем биографические данные из [6]. Основное внимание – второму письму.

Декарт предложил задачу ***о нахождении круга, касающегося трех заданных кругов***[1] Принцессе Елизавете, когда он был в Гааге около 11 октября 1643. В это время сам он жил в небольшом городке *Эгмонд дю Эф* около Алкмара, примерно в 70 километрах от *Гааги* (резиденции Елизаветы), что позволяло быструю почту. Декарт написал о постановке этой задачи перед Елизаветой *Альфонсу Полло* 21 октября 1643 года: *"Кстати, испытываю угрызения совести в том, что предложил недавно задачу о 3 кругах госпоже принцессе Богемской; эта задача такая трудная, что, кажется, решая ее, Ангел, который не использует других правил Алгебры, кроме данных Стампьоном, не сможет обойтись без чуда"*. Как видим, требуются некоторые сведения о Елизавете, Полло, и Стампьоне:

Принцесса Елизавета Богемская (1618-1680) стоит в ряду самых ярких женщин последних веков, предшествуя Марии Терезии и Екатерине Великой. Известно, например, что в 1677 Елизавета познакомилась с *Уильямом Пенном* и находилась с ним затем в переписке (8 писем) до своей смерти в 1680 году [7]. Пенн отдал должное светлой памяти Елизаветы во втором издании своей книги "*No Cross, No Crown*" (1682), прославляя ее набожность и благочестие, ее простоту, ее заботу о подданных, ее справедливость, скромность и любовь к благотворительности. Великий *Лейбниц*, в 1678 году посетивший Аббатису Елизавету, дал ей такую характеристику: *"она столь же высока по своему уму, как и по рождению"*. Но нет лучшего памятника для Принцессы Елизаветы, чем посвящение ей в *"Первоначалах философии"* (1644) Декарта, в котором Декарт, в частности, пишет: "*я еще не находил никого, кто так хорошо понимал бы мои сочинения, как Вы; даже среди лучших и ученейших голов есть многие, считающие их темными; мне приходится почти постоянно наблюдать, как одни легко схватывают математи-*

---

[1] Это знаменитая задача Аполлония (3 век до н.э; см. [2]).

ческие истины, метафизические же остаются для них недоступными, между тем как о других можно сказать обратное. Насколько простирается мой опыт, единственный ум, которому доступно и то, и другое, это Ваш". (Цит. по [8]). Эта оценка Декарта по смыслу повторяет фрагмент из второго математического письма Декарта Елизавете.

Елизавета весьма дорожила документами своей переписки с Декартом. Так, из письма Елизаветы к *Теодору Хааку* от мая 1665 года [9] следует, что Елизавета продолжала популяризировать учение Декарта, передавая письма покойного учителя, касающиеся геометрии, кембриджскому платонику Генри Мору (В.С. Трофимова [7]). Очевидно, что в состав этих писем входили и два математических письма Декарта Елизавете лично. Это подтверждается и тем, что, согласно [10], в 1660-х *Джон Пелль* (1610-1685) связывался с Елизаветой через Теодора Хаака по поводу ее решения задачи Аполлония.

Следует подчеркнуть, что год (1643) начала переписки с Елизаветой стал для Декарта тем годом, который голландцы [6] называют началом Утрехтского кризиса – продолжительного промежутка опасной для Декарта идеологической борьбы с Боэцием (см. [11]). Можно только удивляться тому, как Декарт, сохраняя свою непринужденную манеру, занимался в это время интересными ему вопросами естествознания, математики и философии. Важную помощь в политических вопросах оказывал ему *Альфонс Полло,* бывший в это время камергером при дворе Штатгалтера Нидерландов Фредерика Хендрика.

Полло (Pollot, Pallotti, Alfonso (de), 1602-1668) оказался одним из немногих, кто заинтересовался *Геометрией* Декарта (1637). По этой причине Декарт подарил ему один из шести эксклюзивных экземпляров своего труда. Полло инициировал знакомство Декарта и Елизаветы, когда в октябре 1642 известил Декарта о том, что Елизавета прочитала его *Размышления о началах философии* (*Meditationes de Prima Philosophia, 1641)* и что она хочет обсудить с ним его книгу. Декарт ответил на это приглашение с воодушевлением, подчеркивая, что дорожит мнением Елизаветы более чем мнением университетских профессоров, для которых критерий истины по Аристотелю важнее, чем очевидные соображения разума. Декарт уведомил Полло, что не замедлит прибыть в Гаагу, чтобы иметь честь выразить свое уважение Принцессе и прислушаться к ее указаниям. Посредничество Поло между Декартом и Елизаветой было весьма существенным. Кроме того, предпоследняя фраза Елизаветы из ее промежуточного письма, намекает на то, что Полло был соучастником ее математических занятий. Полло бережно относился к своей переписке с Декартом, а после смерти Декарта коллекционировал рукописные копии писем из переписки Декарта.

Стампьон (Johan Jansz Stampioen de Jonge, 1610–1690) опубликовал несколько работ по математике, в частности книгу *“Новое правило Алгебры”*[1], содержащую вариацию метода Кардано-Тартальи для решения кубического уравнения. Однопараметрическая алгебра Стампьона была значительно слабее многопараметрической алгебры Декарта, но Стампьон претендовал на лидерство. Это привело к довольно продолжительному публичному математическому спору, в котором сторону Декарта представлял землемер Вассенар. В ноябре 1640 г. Вассенар при несомненном участии Декарта публикует полный отчет по делу под названием “*Разоблачение неосведомленного математика Я. Стампьона”*[2]. По репутации Стампьона это наносит серьезный удар. Тем не менее, Константин Гюйгенс просит его обучать своих сыновей математике в 1644 г., хотя, возможно, какую-то роль в этом сыграло и то, что Стампьон обучал уже Принцессу Елизавету и сына штатгалтера Голландии.

Первое письмо Декарта [17 ноября 1643] содержит эффективный алгебраический алгоритм решения задачи Аполлония о построении окружности, касающейся трех данных. В наше время алгебраический алгоритм Декарта (с естественным расширением на трехмерный случай) стал опорным для спутниковой навигации (см. [1, 2]). Всестороннее рассмотрение этого алгоритма для случая внешнего касания кругов произведено в работе [2]. Однако непреходящий интерес представляет и то, *как* Декарт получал свой алгоритм. Возможно, что методическое значение математических писем Декарта Елизавете даже выше, чем сами математические результаты, изложенные в этих его письмах. По крайней мере, так считал сам Декарт. Вот начало его первого математического письма Елизавете:

“Узнав от г-на Полло, что Вы, Ваше Высочество, заинтересовались вопросом о трех окружностях, и что нашли способ его решения, предполагая лишь одну неизвестную величину, я подумал, что мой долг изложить здесь причину, почему я предложил несколько таких задач, и каким образом я их решаю.

Углубляясь в какой-нибудь вопрос Геометрии, я всегда замечаю, что линии, которыми я пользуюсь, чтобы отыскать суть вопроса, параллельны или пересекаются под прямым углом чаще, чем это ка-

---

[1] Эта книга, *Johan Stampioen*, Algebra ofte nieuwe Slel-Regel (1639), написанная на голландском языке, переиздана в 2009 году (Kessinger Publishing). В сжатом виде содержание этой книги приводится на сайте по истории математики http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/ шотландских авторов *J.J. O’Connor* and *E.F. Robertson.*

[2] *Jacob van Wassenaer,* Den on-wissen wis-konstenaer J. Stampioenius. – Leyden, 1640. Эта 90-страничная книга на голландском языке сейчас доступна в электронной библиотеке http://books.google.ru.

жется ожидаемым; и я не принимаю во внимание другие Теоремы, за исключением того, что стороны подобных треугольников пропорциональны между собой, и что в прямоугольных треугольниках квадрат основания равен сумме квадратов сторон. И я не боюсь предположить несколько неизвестных величин, чтобы упростить задачу до таких условий, что она будет зависеть только от этих двух Теорем; напротив, я предпочел бы, чтобы их [неизвестных величин] *было скорее больше, чем меньше".*

Затем в своем письме Декарт делает оценку лежащего на поверхности способа алгебраического решения задачи через четырехкратное применение теоремы Герона:

"Например, если нужно найти решение упомянутого вопроса о трех окружностях при помощи Теоремы, которая заставляет определять площадь треугольника по трем его сторонам [теорема Герона], *нужно лишь предположить неизвестную величину".* Неизвестной величиной здесь является радиус круга, внешне касающегося трех заданных. Декарт справедливо оценивает сложность освобождения от радикалов: *"Но мне кажется, что этот способ приведет к такому количеству бесполезных вычислений, что мне бы не хотелось заниматься ими в течение трех месяцев".* После этой уничижительной оценки подхода, в котором угадывается Стампьон, Декарт излагает свое решение с использованием трех неизвестных в удобной системе прямоугольных координат (см. [2]), которое сводится к квадратному уравнению, а это на языке Декарта означает, что *"эта задача плоская, и нет больше необходимости продолжать. Остальное нужно уже не для того, чтобы развивать и совершенствовать ум, а лишь для того, чтобы тренировать терпение какого-нибудь трудолюбивого счетовода".* Заметим, что сейчас *"трудолюбивым счетоводом"* является наш друг компьютер (см. [1]).

Промежуточное письмо Елизаветы [21 ноября 1643] содержит благодарность Декарту: "*Я замечала недостатки в своих решениях, не разбираясь в них достаточно хорошо, чтобы составить Теорему; но я никогда бы не нашла в них смысла без вашего последнего письма, которое дает мне все то удовлетворение, о котором я просила, и которое дает мне больше знаний, чем мой учитель* [Стампьон] *в течение полугода".* К сожалению, приложение к письму Елизаветы с ее собственным решением задачи Аполлония не сохранилось. Поэтому загадочны комплименты в адрес разработки Елизаветы, открывающие второе письмо Декарта.

Второе письмо Декарта [29 ноября 1643] содержит тождество шестого порядка для частного случая задачи Аполлония, когда все круги касаются. Впоследствии *Пидоу* [12] назвал это тождество *теоремой Де-*

карта. В своем письме после комплиментов по поводу решения Елизаветы общей задачи Аполлония Декарт переводит разговор на частный случай, когда три заданных круга касаются между собой: "*. . . оно* [уравнение] *покажется Вам легче в предположении, что три данных окружности соприкасаются, и при использовании во всем вычислении лишь четырех букв* d, e, f, x, *которые, будучи радиусами четырех окружностей, имеют подобное соотношение между собой. И, в первую очередь, Вы найдете:*

$$AK = \frac{dd + df + dx - fx}{d + f} \quad \text{и} \quad AD = \frac{dd + df + de - fe}{d + f}.$$

Как видите, x *присутствует в линии* AK, *как* e *в линии* AD, *первый находится при помощи треугольника* AHC, *как другой при помощи треугольника* ABC. *Затем, наконец, получится это уравнение* [формула Декарта]

$$\begin{aligned} &ddeeff + ddeexx + ddffxx + eeffxx = \\ &= 2deffxx + 2deeffx + 2deefxx + 2ddeffx + 2ddefxx + 2ddeefx, \end{aligned}$$

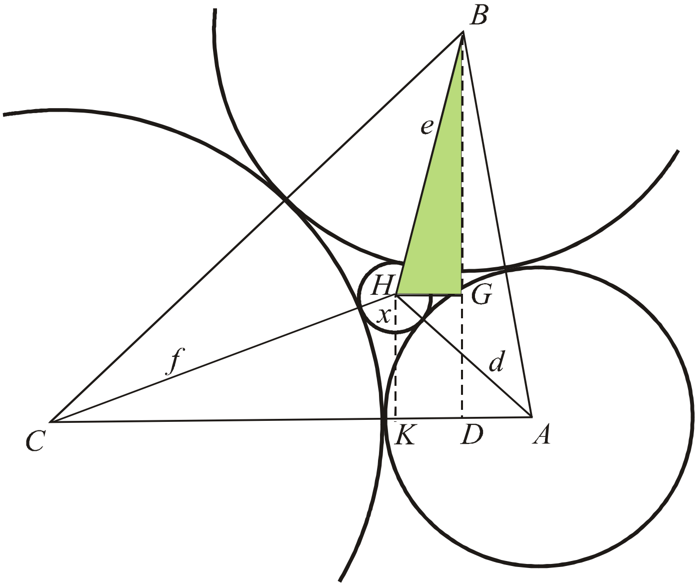
из которого делают вывод в виде теоремы, что сумма четырех произведений по три квадрата радиусов вдвое больше шести произведений по два радиуса с квадратами двух других радиусов; что является достаточным, чтобы послужить примером того, как найти радиус самой большой окружности, которая могла бы быть вписана между тремя заданными соприкасающимися окружностями".

Этот фрагмент порождает две ветви:

1) Декарт считает нужной словесную формулировку теоремы (см. ниже Содди);

2) Декарт на первое место ставит не саму формулу, а алгоритм ее использования.

По-видимому, благодаря промежуточному письму Елизаветы, Декарт скорректировал свою методику: "*И Вы, Ваше Высочество, можете увидеть здесь два совершенно разных пути в одном и том же вопросе, согласно разным планам, которые предлагаются. Так, желая знать, какова суть вопроса, и как можно подойти к его решению, я принимаю в качестве заданных величин перпендикулярные или параллельные линии, и предполагаю множество других неизвестных величин, чтобы избежать ненужных повторений, и лучше видеть самые короткие пути. Вместо этого, желая разрешить вопрос, я принимаю в качестве заданных величин стороны треугольника, и предполагаю только одну неизвестную величину".*



Декарт не снабдил свое письмо подробным выводом основного уравнения.

Наша реконструкция вывода Декарта основана на том, что выражения для AK и AD, предъявленные Декартом, очевидно отправляют к прямоугольному треугольнику BGH. По теореме Пифагора

$$BD^2 = (d+e)^2 - AD^2 = \frac{4\,(d+e+f)\,def}{(d+f)^2},$$

$$HK^2 = (d+x)^2 - AK^2 = \frac{4\,(d+x+f)\,dxf}{(d+f)^2},$$

$$(e+x)^2 = (BD - HK)^2 + (AK - AD)^2\,,$$

Следовательно,

$$(e+x)^2 = (d+e)^2 + (d+x)^2 - 2BD \cdot HK - 2AK \cdot AD.$$

Умножив на $\frac{(d+f)^2}{4}$ и перегруппировав члены последнего равенства, получим

$$2df\sqrt{ex\,(d+e+f)\,(d+x+f)} = df\,(e+x)\,(d+f) - ex\left(d^2+f^2\right).$$

Заменим трижды встречающуюся в последнем равенстве сумму $(d+f)$ буквой b и возведем равенство в квадрат. Получим уравнение

$$pb^2 + qb + r = 0,$$

в котором

$$p = 4d^2 f^2 ex - d^2 f^2 (e+x)^2,$$

$$q = 4d^2 f^2 ex (e+x) + 2df (e+x) ex \left(d^2 + f^2\right) = 2dfex (e+x)(d+f) b,$$

$$r = 4d^2 f^2 e^2 x^2 - e^2 x^2 \left(d^2 + f^2\right)^2 = -e^2 x^2 (d-f)^2 b^2.$$

После сокращения на b^2 и перегруппировки получим формулу Декарта. Представленный вывод вполне соответствует приемам *Геометрии* Декарта [13] и, вероятно, он был знаком Елизавете.

Переоткрытия и обобщения формулы Декарта. Представим себе, что точка H на рисунке Декарта это вершина вырожденного тетраэдра с основанием ABC. Тогда изображенная на рисунке конфигурация характеризуется нулевым объемом этого тетраэдра. Алгебраическогое выражение объема тетраэдра через его шесть ребер получил в 1752 *Леонард Эйлер* [14]. В конфигурации Декарта каждое ребро тетраэдра есть сумма соответствующих радиусов. Выполнив соответствующие подстановки в формулу Эйлера, получим формулу Декарта с точностью до коэффициента (−16). Таким образом, формула Декарта является естественным следствием формулы Эйлера для объема тетраэдра. Есть основания полагать, что такой вывод формулы Декарта был возможен задолго до Эйлера. Дело в том, что сам алгоритм вычисления объема тетраэдра по его ребрам опубликовал уже *Тарталья* (1499-1557), и преобразование этого алгоритма в алгебраическую форму после *Геометрии* Декарта стало, наверняка, весьма привлекательной задачей для математиков того времени (см. подробнее [15]).

Переоткрытие формулы Декарта без выхода из плоскости сделал *Якоб Штейнер (1796-1863),* [16]. Штейнер впервые рассмотрел оба случая – и внешнего и внутреннего касания. Сначала Штейнер с помощью хитроумной цепочки вполне античных рассуждений, использующих только подобие треугольников, получает удивительное тождество

$$\frac{HK}{x} = \frac{BD}{e} + 2.$$

Во второй части [16, p. 60-63] своего вывода формулы Декарта Штейнер использует тот алгебраический метод в геометрии, родоначальником которого и был Декарт. Именно, во-первых, Штейнер преобразует последнее тождество:

$$\frac{HK}{BD} = x \cdot \left(\frac{1}{e} + \frac{2}{BD}\right).$$

Теперь слева стоит *барицентрическая координата* точки K (центра внутреннего круга) в системе базисных точек A, B, C по отношению к вершине B треугольника ABC. Повторив эту формулу для других вершин и сложив полученные равенства, по основному свойству барицентрических координат Штейнер получает

$$1 = x \cdot \left(q_A + q_B + q_C + \frac{2}{h_A} + \frac{2}{h_B} + \frac{2}{h_C} \right),$$

где $q_B = 1/e$ – кривизна круга с центром в вершине B и т.п., а $h_B = BD$ – высота треугольника при вершине B и т.п. Во-вторых, по формуле Герона

$$\frac{2}{h_B} = \frac{d+f}{\sqrt{def(d+e+f)}}$$

и т.п. Следовательно,

$$q = q_A + q_B + q_C + 2 \cdot \sqrt{q_A q_B + q_B q_C + q_C q_A},$$

где $q = 1/x$ – кривизна внутреннего круга. После переноса кривизн налево и возведения в квадрат получается *формула Декарта в записи Штейнера*:

$$q^2 + q_A^2 + q_B^2 + q_C^2 - 2 \cdot (q q_A + q q_B + q q_C + q_A q_B + q_B q_C + q_C q_A) = 0.$$

Запись Штейнера соответствует языку квадратичных форм:

$$q^T D q = 0,$$

где q – столбец кривизн, а матрица

$$D_4 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

может называться *матрицей Декарта порядка* $N = 4$.

По мнению авторов книги [17, p. 286] формула Декарта была известна японским математикам на момент 1830 года.

В 1842 *Филип Бикрофт* опубликовал свое переоткрытие формулы Декарта с оригинальным доказательством в развлекательном ежегоднике для любителей математики [18]. При этом Бикрофт использовал свое собственное замечательное наблюдение: искомая конфигурация четырех окружностей является частью конфигурации восьми окружностей, каждая из которых проходит через три точки контакта трех других, где все окружности либо касаются, либо ортогональны. Это наблюдение позволяло обойтись одной формулой Герона без дополнительных возведений в квадрат.

Следующим и, на наш взгляд, заключительным эпизодом в сюжете *“формула Декарта”* стала в 1886 году работа *Роберта Лаклана* [20], основанная на тождестве *Жана Гастона Дарбу* [19]. Дарбу распространил понятие степени точки относительно окружности (сферы), введенное Штейнером в упомянутой его работе, на степень отношения окружностей (сфер):

$$\pi_{1,2} = d_{1,2}^2 - r_1^2 - r_2^2,$$

где $d_{1,2}$ – расстояние между центрами. Если окружности (сферы) касаются внешним или внутренним образом, то, соответственно,

$$\pi_{1,2} = -2r_1r_2 \quad \text{или} \quad \pi_{1,2} = 2r_1r_2.$$

Для двух произвольных окружностей в заданной декартовой системе координат

$$x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1 = 0, \qquad x^2 + y^2 + 2g_2x + 2f_2y + c_2 = 0$$

легко вычислить, что

$$\pi_{1,2} = c_1 + c_2 - 2g_1g_2 - 2f_1f_2.$$

Пусть теперь матрица A состоит из 5 произвольных строк размера 4

$$(1 \quad \mathrm{c}_i \quad 2g_i \quad 2f_i), \qquad i = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,$$

а матрица B из 5 произвольных столбцов размера 4

$$(\mathrm{c}_j \quad 1 \quad -g_j \quad -f_j)^T, \qquad j = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

Так как размерность системы столбцов матрицы AB не больше размерности системы столбцов матрицы B, т.е. не больше 4, то имеет место *тождество Дарбу*

$$|AB| = \begin{vmatrix} \pi_{0,0} & \pi_{0,1} & \pi_{0,2} & \pi_{0,3} & \pi_{0,4} \\ \pi_{1,0} & \pi_{1,1} & \pi_{1,2} & \pi_{1,3} & \pi_{1,4} \\ \pi_{2,0} & \pi_{2,1} & \pi_{2,2} & \pi_{2,3} & \pi_{2,4} \\ \pi_{3,0} & \pi_{3,1} & \pi_{3,2} & \pi_{3,3} & \pi_{3,4} \\ \pi_{4,0} & \pi_{4,1} & \pi_{4,2} & \pi_{4,3} & \pi_{4,4} \end{vmatrix} = 0.$$

Предположим теперь, что окружности с номерами $i = 0$ и $j = 0$ совпадают. Пусть их центр фиксирован, а радиус r_0 стремится к бесконечности. Поделим первую строку и первый столбец определителя Дарбу на $(-r_0^2)$ и перейдем к пределу. Получим *тождество Лаклана*

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \pi_{1,1} & \pi_{1,2} & \pi_{1,3} & \pi_{1,4} \\ 1 & \pi_{2,1} & \pi_{2,2} & \pi_{2,3} & \pi_{2,4} \\ 1 & \pi_{3,1} & \pi_{3,2} & \pi_{3,3} & \pi_{3,4} \\ 1 & \pi_{4,1} & \pi_{4,2} & \pi_{4,3} & \pi_{4,4} \end{vmatrix} = 0.$$

Если при этом речь идет только о четырех попарно касающихся окружностях, то после элементарных сокращений в последнем определителе получим

$$\begin{vmatrix} 0 & q_1 & q_2 & q_3 & q_4 \\ q_1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ q_2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ q_3 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ q_4 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

где буквами q обозначены соответствующие кривизны. Это и есть формула Декарта в виде определителя. В своей работе Лаклан повторил этот вывод для сфер в трехмерном пространстве и раскрыл соответствующий определитель [19, p. 586]:

$$3(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 + q_5^2) = (q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + q_5)^2.$$

Расширение формулы Декарта на n-мерный случай в виде определителя теперь очевидно. Раскрытие этого определителя дает *обобщенную формулу Декарта-Лаклана*

$$n \sum_j q_j^2 = \left(\sum_j q_j \right)^2.$$

Случай внешнего касания легко вписывается в схему Лаклана.

В 1936 году нобелевский лауреат, “отец изотопов” *Фредерик Содди* опубликовал в стихотворной форме свое переоткрытие формулы Декарта в еженедельном журнале *Nature* [21] (без доказательства). Кроме того, в своем стихотворении Содди сформулировал и трехмерный вариант формулы Декарта для сфер.

Frederick Soddy (1936)	Перевод Тиберия Закадушного (2010)
The Kiss Precise	**Поцелуйная точность**
For pairs of lips to kiss maybe Involves no trigonometry. 'Tis not so when four circles kiss Each one the other three. To bring this off the four must be As three in one or one in three. If one in three, beyond a doubt Each gets three kisses from without. If three in one, then is that one Thrice kissed internally.	Для поцелуя двух пар губ Любые формулы как гири, Но если не губа, а круг, И их целуются четыре, Не избежать нам двух картин: Как три в одном и в трех один. Раз в трех один, никто не тужит, Целуя каждого снаружи. Раз три в одном, то он, смотри, Целуем каждым изнутри.
Four circles to the kissing come. The smaller are the benter. The bend is just the inverse of The distance from the center. Though their intrigue left Euclid dumb There's now no need for rule of thumb. Since zero bend's a dead straight line And concave bends have minus sign, *The sum of the squares of all four bends* *Is half the square of their sum.*	И вот целуются круги: Кто меньше, тот кривее друга, Ведь кривизна или изгиб Обратна радиусу круга. Теперь, что не узрел Евклид, Пусть знает каждый индивид: Что у прямой – нуль кривизна, У вогнутости – отрицательна, *Квадратов сумма их двукрат* *Есть суммы всех кривизн квадрат.*
To spy out spherical affairs An oscular surveyor Might find the task laborious, The sphere is much the gayer, And now besides the pair of pairs A fifth sphere in the kissing shares. Yet, signs and zero as before, For each to kiss the other four *The square of the sum of all five bends* *Is thrice the sum of their squares.*	А целование шаров Вполне кругам аналогично, И как бы ни был случай нов, Но выглядит реалистично, Что в поцелуи пары пар Вцелован новый, пятый шар. Его, как прежде, кривизна С другими согласована: *Квадратов сумма их трехкрат* *Есть суммы всех кривизн квадрат.*

Стихотворение Содди вызвало интерес, превосходящий норму научного открытия. Через полгода в том же журнале появилось индуктивное продолжение стихотворения Содди – еще одна строфа для N-мерного случая, принадлежащая Форальду Госсету. Отметим, что Содди интуитивно следовал принципу педагогики Декарта *не быть скучным.* В самом деле, в двух математических письмах Елизавете Декарт трижды говорит об этом: *“Я даже боюсь показаться скучным Вашему Высочеству ...”, “... вычисления не покажутся Вам скучными”, “Вычисления данного уравнения наводят скуку”.*

“Когда я был аспирантом в Кэмбридже, – вспоминал *Коксетер (1907-2003)*, – стихотворение Содди произвело на меня такое впечатление, что я послал ему просьбу встретиться со мной за обедом. Он принял мое предложение, и мы совершили с ним восхитительную прогулку вдоль взморья. После моего отъезда в Канаду, я поддерживал с ним переписку до конца его жизни. Его идеи повлияли на четыре мои работы” [22, p. 191]. Во всей этой истрии переоткрытий формулы Декарта интресно то, что ни Эйлер, ни Штейнер, ни Бикгрофт, ни Лаклан, ни Содди не были знакомы со вторым матматическим письмом Декарта Елизавете. В академическую математику формулу о четырех касающихся кругах со ссылкой на Декарта первым ввел *Даниэль Пидоу* (1910-1998) в 1967 [12], который, в свою очередь, проморгал Лаклана. Затем появилось огромное множество публикаций, посвященных этой проблеме. Заметим, однако, что название обобщенной теоремы Декарта как теоремы Содди-Госсета, предложенное в [23], неудачно. По совокупности обстоятельств этот результат должен именоваться как ***теорема Декарта-Лаклана*** или как ***формула Декарта-Лаклана*** и никак по другому.

Полный текст всех трех писем из математической переписки Декарта и Елизаветы будет опубликован в журнале “История науки и техники”.

Библиографический список

1. *Барабанов, О.О.* Математические задачи дальномерной навигации [Текст] / О.О. Барабанов, Л.П. Барабанова. – М.: Физматлит, 2007.
2. *Барабанов, О.О.* Алгоритмы решения навигационной разностно-дальномерной задачи от Аполлония до Коши [Текст] / О.О. Барабанов, Л.П. Барабанова // История науки и техники. – 2008. – № 11. – С. 2-21.
3. *Барабанов, О.О.* Изложение основ арифметики и алгебры в учебниках Л. Эйлера и Т.Ф. Осиповского. Сходство и различие [Текст] / О.О. Барабанов, Н.А. Юлина // История науки и техники. – М., 2008. – № 2. – С. 2-13.
4. *Shapiro, L.* Princess Elisabeth of Bohemia and René Descartes, The

Correspondence between Princess Elisabeth of Bohemia and Rene Descartes – University of Chicago Press, 2007.

5. *Descartes, R.*, Correspondencia con Isabel de Bohemia y otras cartas, *traducción María Teresa* GALLEGO URRUTIA, introducción Mateu CABOT, Barcelona, Alba, 1999, 277 p.
6. *Descartes, R.* The Correspondence of Rene Descartes 1643 *edited by* Th. Verbeek, E.-J. Bos, J.M.M. van de Ven // Quaestiones Infinitae, Publications of the Department of Philosophy Utrecht University, Volume XLV, Zeno Institute for Philosophy, The Leiden-Utrecht Research Institute 2003, 326 p.
7. *Трофимова, В.С.* Женский голос в картезианстве XVII века: принцесса Елизавета Богемская [Текст] / В.С. Трофимова // Вестник истории и философии КГУ. Серия “Философия”. – 2008. – № 2. – С. 25-30.
8. *Фишер, К.* История новой философии [Текст] / К. Фишер. – М.: Директмедиа Паблишинг, 2005. – Т. 1.
9. BL Add. 4365 f. 196. *Letter to T. Haak* (Theodore Haak, translator, d. 1690) 1665. Fr. Copy.
10. http://www.bookrags.com/research/elisabeth-princess-of-bohemia-16181-eoph/
11. *Асмус, В.Ф.* Декарт [Текст] / В.Ф. Асмус. – М.: Политиздат, 1956.
12. *Pedoe, D.* On a theorem in geometry // American Mathematical Monthly, **74** (1967), pp. 627-640, esp. p. 634.
13. *Декарт, Р.* Геометрия: с прил. избр. работ П. Ферма и переписки Декарта [Текст] / Р. Декарт. – М.-Л.: НКТП СССР, 1938.
14. *Eulero, L.* Demonstratio nonnullarum insignium proprietatum, quibus solida hedris planis inclusa sunt praedita (представлено Санкт-Петербургской Академии 6 апреля 1752) // Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, 4, 1758, pp. 140-160. (E231 в списке Энестрема).
15. *Сабитов, И.Х.* Объемы многогранников [Текст] / И.Х. Сабитов. – М.: МЦНМО, 2002.
16. *Steiner, J.* Gesammelte Werke, *ed. K. Weierstrass*, Reimer, Berlin, 1881. pp. 17-76.
17. *Fukagawa, H., Rothman, T.* Sacred mathematics: Japanese temple geometry, Princeton University Press, 2008.
18. *Beecroft, Ph.* Properties of circles in mutual contact // Lady’s and Gentleman’s Diary, 1843, pp. 91-96; 1846, p. 51.
19. *Darboux, G.* Sur les relations entre les groupes de points, de cercles et de sphéres dans le plan et dans l’espace // Ann. Sci. École Norm. Sup., vol. 1, 1872, pp. 323-392.

20. *Lachlan, R.* On systems of circles and spheres, Phil. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A 177 (1886), pp. 481-625.
21. *Soddy, F.*, The Kiss Precise // Nature 137, p. 1021 (20 June 1936).
22. *Coxeter, H.S.M.* The Descartes Circle Theorem / *Pritchard* C. The changing shape of geometry: celebrating a century of geometry and geometry teaching, Cambridge University Press, 2003, pp. 189-192.
23. *Lagarias, J.C., Mallows, C.L., Wilks, A.* Beyond the Descartes circle theorem // Amer. Math. Monthly 109 (2002), p.338-361.

From Quaternions to Clifford Analysis

Helmuth R. Malonek

> *Could anything be simpler or more satisfactory? Don't you feel, as well as think, that we are on a right track, and shall be thanked hereafter. Never mind when.*
>
> W.R. Hamilton, 1859

> *...there will come a time when these ideas, perhaps in a new form, will arise anew and will enter into living communication with contemporary developments...*
>
> H.G. Grassmann, 1861

Besides all arguments in favor and against quaternions we saw in the last 50 years a burst in its applications and generalizations in almost all disciplines dealing with problems in more than two dimensions. But a detailed historical study on the history of quaternions after 167 years of its creation is still missing. A brief explanation of the basic algebraic ideas of W.R. Hamilton, H. Grassman, and W.K. Clifford is followed by a description of R. Fueter's approach to hypercomplex function theory as starting point for the development of Clifford Analysis. Remarks on recent trends in two of the main fields of applications, i.e., in Geometric Algebra as well as Clifford Analysis complete this short overview.

Introduction

W.R. Hamilton (1805-1865), the creator of quaternions, believed that he was "on the right track". But it is a historical fact that in the very beginning the true nature of quaternions was misunderstood, also by Hamilton, and the consequences were "Missed opportunities" (F. Dyson, [9]) which caused a delay of about 40 years in what concerns their application in Physics. In pure mathematics the progress was never completely stopped, but mainly going on in Number Theory and Abstract Algebra with controversial academic discussions about *the right* understanding of quaternions. In engineering the vector, tensor and matrix calculus dominate everywhere, at least since the beginning of the 20th century. From the historical point of view it is very difficult to do justice to the pioneers of that time, but it seems to us that two events marked significantly some changes. One was the newly started research on hypercomplex function theory by Iftimie [21] (in the tradition of works done by his romanian co-patriots Moisil and Toedorescu in 1931) and by Delanghe [6] (following the line of Fueter's school in Zurich between 1930 and 1950). But whereas the motivation of Fueter [10] came from number theoretic problems, Delanghe and his soon growing Gent school on *Clifford Analysis* concentrated on problems arising from harmonic analysis. The other event was initiated by the physicist D. Hestenes who had worked for NASA and published *"Space-time algebra"* [18] and later "Multivector calculus" in 1966 resp. 1968. His work was mainly concerned with physical problems expressed in the language of Geometry. Following Clifford's original idea he coined the term *"Geometric Algebra"* for his approach to the use of Clifford algebras in applications. *Clifford Analysis* and *Geometric Algebras* are nowadays synonyms for two main ways of dealing with Clifford algebras. We recommend the interested reader to consult [1, 3, 5, 8, 16, 18, 23, 27] and the references therein for further reading.

From Hamilton and Grassmann to Clifford

The early history of quaternions is more or less well known. The discovery of quaternions by the Royal Astronomer of Ireland, William Rowan Hamilton [17], on the 16th of October 1843 was motivated by the hope to create a type of *hypercomplex* numbers related to the three dimensional space of our visual intuition like complex numbers are related to the plane. Hamilton succeeded to go an important (now seemingly trivial) step forward to the solution. His formal definition of complex numbers as ordered pairs of real numbers (1835) suggested to him the idea to attack the problem as an algebraic one for ordered triplets (α, β, γ) of real numbers combined together as $z = \alpha + \beta i + \gamma j$ with $i^2 = j^2 = -1$. But it took him almost ten years to understand that without a fourth dimension and without dropping the commutativity of multiplication no such system exists. After having arrived to the basis representation of his quaternions as expressions of the form

$$q = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad \text{with} \quad \mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ij}\,\mathbf{k} = -1,$$

Hamilton showed very carefully that besides commutativity all other properties that characterize quaternions as a real finite-dimensional *associative division algebra* unknown so far, are fulfilled. Later Frobenius (1877) showed that it was the only one algebra of that type besides $\mathbb{R}$ and $\mathbb{C}$. In fact, his discovery heralded the golden age of algebra when instead of algebraic equations the study of algebraic structures became the main concern. But from the very beginning of his trials he was obsessed by the quixotic idea that quaternions would play a key role in physics, being on a par with the creation of the infinitesimal calculus. Consequently, for the last twenty years of his life, Hamilton concentrated all his power on the study of quaternions. But the man who succeeded to explain the secrets of the new number system with relations to dimension three and four was a man of a new generation, born after 1843. His name was William Kingdom Clifford (1845-1879).

It is very curious that the appearance of quaternions also marked the beginning of modern vector analysis, which later on prevailed over the use of quaternions. The fact that Hamilton started with triplets and ended up with quaternions implied immediately his concern about the special role of $b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} \in \mathrm{Im}\mathbb{H}$ which he called *vector* in the sense of the similar term *radius vector* that had been used for many years before.

For the algebraically real part he introduced the word scalar part or simply the scalar of q and prefixed both components of q by V resp. S, i.e. $q = Sq + Vq$.

With the introduction of the Nabla-operator ∇ in the form $\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}$ in 1846/1847, Hamilton also invented the other essential technical ingredient for the vector calculus: the vector differential operator which is used to describe the gradient of a scalar function as well as the divergence and the curl of a vector valued function.

Long time after Hamilton the vector calculus found in J. W. Gibbs (1839-1903) [11] and Heaviside (1850-1925) their most prominent promoters. Remarkable and surely not fair, that both strongly tried to deny that inheritance as it is described in Crowe's book on the History of Vector Analysis [5]. Unfortunately, W.K. Clifford (1845-1879) [4] is only described as a "transition figure". In fact, Clifford's insights in the relationship between Hamilton's quaternions and Grassmann's "algebra of extensions" are the key to a fair appreciation of Hamilton's work as well as the milestone for the progress in this field of algebra. Clifford has been considered as one of the four mathematicians that very soon understood the ideas of Grassmann, after their publication in the confusing work "Die lineale Ausdehnungslehre - ein neuer Zweig der Mathematik" [12]. He succeeded to combine in his "Geometric Algebra" the ideas of both, Hamilton and Grassmann. Indeed, in 1844 the real 8-dimensional exterior algebra $\bigwedge \mathbb{R}^3$ of the linear space $\mathbb{R}^3$ was constructed by Grassmann with the basis

$$1;\ \ e_1, e_2, e_3;\ \ e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_3, e_2 \wedge e_3;\ \ e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$$

satisfying the multiplication rules

$$(i)\quad e_i \wedge e_j = -e_j \wedge e_i \text{ for } i \neq j, \quad \text{and } (ii)\ e_i \wedge e_i = 0, \quad i = 1, 2.$$

The Grassmann exterior algebra has no inner product and does not require a metric. Therefore Clifford, motivated by Hamilton's ideas, introduced in 1878 for his *Geometric Algebra* a new product, where metric relations for products of vectors (realized by areas, volumes etc.) also have place. He replaced Grassmann's rules by $e_ie_j = -e_ie_j$, $e_ie_i = -1$, $i = 1, 2$. In the concrete case of $\mathbb{R}^2$ this led him to the real associative 4-dimensional Clifford algebra $\mathcal{C}\ell_{0,2}$. The dimension grading introduces a multi-vector structure and the multiplication rules show that $\mathcal{C}\ell_{0,2} \cong \mathbb{H}$, i.e. Clifford obtained an algebra which is isomorphic to Hamilton's quaternions with the basis $\{1, e_1 = \mathbf{i}, e_2 = \mathbf{j}, e_1e_2 = \mathbf{k}\}$. But from the geometric point of view this approach was not satisfactory, because the nature of the basis elements $\{1, e_1 = \mathbf{i}, e_2 = \mathbf{j}, e_1e_2 = \mathbf{k}\}$ seems different (2 vectors and 1 bivector). Clifford found later the way out to an algebra which fulfills all demands. His work was published posthumously in 1882. Therefore he changed the multiplication rules to $e_ie_j = -e_ie_j$, $e_ie_i = +1$. In the concrete case of $\mathbb{R}^3$ Hamiltons quaternions can be recognized as isomorphic to the *even subalgebra* $\mathcal{C}\ell^+_{3,0}$ constituted by *scalars and bivectors* of the real associative 8-dimensional Clifford algebra $\mathcal{C}\ell_{3,0}$. In this case all basis elements $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ have an interpretation as basic bivectors. Therefore the set of pure quaternions Im$\mathbb{H}$ as the set of real linear combinations of $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ geometrically represents the set of bivectors and *not* the set of vectors in the sense of radius vectors like Hamilton had supposed. This explains also, why Hamilton met problems when trying to explain the appearance of the half of the rotation angle in the general formula of rotation (see [1]).

Grassmann and Clifford belong to the first group of mathematicians who overcame the barriers of the 3-dimensional space of our intuition. Clifford introduces his new algebras not only in $\mathbb{R}^3$ but also in $\mathbb{R}^n$.

Notice that W. Pauli (1927) and P.A.M. Dirac [7] rediscovered quaternions by their matrix representations in $Mat(2, \mathbb{C}) \cong \mathcal{C}\ell_{3,0}$ resp. $Mat(4, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C} \otimes \mathcal{C}\ell_{1,3}$. Later on the mathematicians R. Brauer and H. Weyl (1935) as well as C. Chevalley (1954) contributed essentially to this important field of research in quantum theory and specialists in Physics and Clifford algebras are still very active in this field (see [2]).

Trends in Geometric Algebra

Since about 40 years, the field of Geometric Algebra has been increasing and broadening itself in such a way that it is no longer possible to make a simple classification of its trends. It seems that the natural relationship to practical computer sciences turned out to be the main impulse for the development of new applications of Geometric Algebras. But we refer also to remarks of Hestenes' in [19]. He noticed that several different systems which provide similar geometric concepts, need to have a common language. Without trying to reduce or to question the advances and the usefulness of disciplines like

Vector Analysis
Matrix Algebra
Differential Forms
Synthetic Geometry
Spinor Calculus
Tensor Analysis
Clifford Algebra
Coordinate Geometry
Grassmann Algebra
Multivector Algebra,

all together constitute a set of highly redundant theories which sometimes need enormous technical skills. It seems to be rather evident that the coordinate-free tools provided by Geometric Algebra could serve in some sense as a unifying language for several different mathematical languages that are used in different fields of application. It is well known that the use of quaternions for instance in the fields of aircraft orientation, spacecraft stabilization, and other areas of relevance for defense were a well hidden secret during the cold war on both sides of the iron curtain. Meanwhile one can say that mathematical models based on quaternions have been very much appreciated in all high technologies with need of calculations in real time. Software development for video games, for which quaternions allow efficient computations with minimal storage for smooth rotations of solids is a field of enjoyment which seems to increase without any limitations. Another examples are the advances in robotics, computer vision, virtual reality, crystallography, electrical engineering, quantum information processing by nuclear magnetic resonance, neural computing etc. where meanwhile the use of quaternions or derived algebraic structures has become indispensable.

Fueter's approach to hypercomplex Analysis

The Swiss mathematician and number theorists Rudolf Fueter (1880-1950), a former student of Hilbert, tried (since 1928) to develop a *hypercomplex function theory* by considering quaternion valued functions $f = f(z)$ of a quaternion variable $z \in \mathbb{H}$ [10]. In the last decade of his life he also considered the general case of $\mathcal{C}\ell_{0,n}$-valued functions.

Due to the fact that a quaternion $z \in \mathbb{H}$ can be represented by a pair of two complex variables $z_1 = x_0 + x_1 i$ and $z_2 = x_2 + x_3 i$ in the form $z = x_0 + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k} = z_1 + z_2\mathbf{j}$. His work was also a contribution to the very intensive discussion in the 1920th about the "right" way for generalizing holomorphic function to higher dimensions. Of course, the algebraic properties of the quaternion algebra lead to another generalization than the consideration of a complex valued functions of two or more complex variables.

The fact that the quaternions form a division algebra promises that it simply could be sufficient to follow a generalization of Cauchy's approach to holomorphic complex functions by demanding the existence of a quaternionic differential quotient as limit of the form

$$\lim_{\Delta z \to 0} \Big(f(z+\Delta z) - f(z)\Big)\Big(\Delta z\Big)^{-1} \quad \text{or} \quad \lim_{\Delta z \to 0} \Big(\Delta z\Big)^{-1}\Big(f(z+\Delta z) - f(z)\Big).$$

But in fact, limits of these expressions independent from the direction of convergence, exist only for *right* resp. *left linear functions* of a quaternionic variable. This has rigorously been proven by several author's independently from Fueter's research and until many years later, even until the 1990 (see [22, 27]). But Fueter was aware of a paper of Scheffers [26] where such difficulties had been announced (not well proved), and used another approach for defining generalized holomorphic functions (which he called regular).

Following Riemann's approach in the complex case, he defined quaternion valued regular functions $f(z) = f_0(z) + f_1(z)\mathbf{i} + f_2(z)\mathbf{j} + f_3(z)\mathbf{k}$ as belonging to the kernel of the quaternionic Cauchy-Riemann operator

$$\mathcal{D} := \frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{\partial}{\partial x_1}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial x_2}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial x_3}\mathbf{k}.$$

This means that f is called a *regular from the right* function if $f\mathcal{D} = 0$ resp. a *regular from the left* function if $\mathcal{D}f = 0$. Nowadays in Clifford Analysis regular functions are called *monogenic* (sometimes also hypercomplex holomorphic, Clifford holomorphic etc. [16]).

The far reaching analogy between complex function theory and quaternionic function theory can be illustrated by some of the basic properties of monogenic functions.

Indeed, using a quaternion valued surface-element of the form

$$d\sigma := dx_1dx_2dx_3 - dx_0dx_2dx_3\mathbf{i} + dx_0dx_1dx_3\mathbf{j} - dx_0dx_1dx_2\mathbf{k}$$

and $f, g \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ Fueter noticed that it is possible to derive the quaternionic form of Stokes' formula over a 4-dimensional positively oriented domain Ω as

$$\int_{\partial\Omega} f(z)d\sigma g(z) = \int_{\Omega} (f\mathcal{D}g + f\mathcal{D}g)dV$$

where dV stands for the volume element $dV := dx_0dx_1dx_2dx_3$.

This hypercomplex form of Stokes' formula in $\mathbb{R}^4$ immediately suggests the

Generalized Cauchy theorem. *Let f be a function monogenic from the right (i.e. $f\mathcal{D} = 0$) and g be a function monogenic from the left (i.e. $\mathcal{D}g = 0$) in the 4-dimensional positively oriented domain with boundary Ω than*

$$\int_{\partial\Omega} f(z)d\sigma g(z) = 0.$$

Notice that monogenic functions $f = f(z) = \sum_0^3 f_k(x)e_k$ with $f_0 = 0$ and $\frac{\partial f_k}{\partial x_0} = 0, k = 1, 2, 3$ are monogenic from the left as well as from the right and describe an irrotational fluid flow without sources nor sinks.

Other important properties of monogenic functions follow like in the complex plane from the fact that the Laplace operator can be factorized, namely as $\mathcal{D}\overline{\mathcal{D}} = \overline{\mathcal{D}}\mathcal{D} = \Delta_4$, where

$$\overline{\mathcal{D}} := \frac{\partial}{\partial x_0} - \frac{\partial}{\partial x_1}\mathbf{i} - \frac{\partial}{\partial x_2}\mathbf{j} - \frac{\partial}{\partial x_3}\mathbf{k}$$

denotes the conjugated Cauchy-Riemann operator. This shows that monogenic functions and their components are *harmonic functions.* Furthermore, the real analyticity of harmonic functions together with special functions methods (Legendre polynomials or Gegenbauer polynomials) can be used for defining *generalized power series* [3]. A generalization of the concept of the *areolar derivative in the sense of Pompeiu* (see [23]) which relies on measure theoretic relations between higher-dimensional volume and surface-integrals, enables to show that $\frac{1}{2}\overline{\mathcal{D}}f$ can be considered as the generalized hypercomplex derivative of the monogenic function f (see [13]). This answered the question about the existence of a generalized Cauchy approach to monogenic functions by the concept of hypercomplex differentiabilty as mentioned in the beginning of this section. In fact, it is also a hint to the fact that hypercomplex analysis can be considered as function theory in co-dimension 1.

Trends in Clifford Analysis

Independently from Fueter, but also motivated by the idea to create a spatial holomorphic function theory two Romanian mathematicians, G.C. Moisil and N. Teodorescu, published in 1931 a paper [25] where they applied to a vector function $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ a traceless matrix differential operator which turns out to be equivalent to the use of the Dirac operator given by

$$D = \frac{\partial f}{\partial x_1}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial x_3}\mathbf{k}.$$

instead of the generalized Cauchy-Riemann operator.

It follows immediately that the Laplace operator in $\mathbb{R}^3$ can now be factorized in the simple form $D\overline{D} = \overline{D}D = -D^2 = \Delta_3$ which implies several advantages in the applications to physical problems, where, from the viewpoint of spatial symmetry, the choice of a distinguished variable like x_0 is not motivated. The Dirac operator is the central differential operator in fluid dynamics and in the theory of heat conduction, but it also plays an important role in the description of the electromagnetic field: Maxwell's equations rely on the Dirac operator. But the application from which the Dirac operator derives its name is quantum mechanics, as it was mentioned before. In non-relativistic quantum mechanics usually the Dirac operator on a three dimensional space is used as defined in ([7]). In relativistic mechanics however one uses the Dirac operator on the Minkowski space $\mathbb{R}^{1+3}$.

In 1982, the book of Brackx, Delanghe and Sommen [3] marked the first period of advances in theoretical research whereas the book of Gürlebeck and Sprössig [14] already systematically described applications for solving linear and nonlinear boundary value problems of the most important partial differential equations of mathematical physics (Laplace and Helmholtz equations, equations of linear elasticity, Maxwell equations, Navier-Stokes equations and others). The authors studied questions of existence, uniqueness, regularity, and general representation of their solutions in a unified form. Furthermore they introduced and developed new boundary collocation methods as well as represented a discrete model of the quaternionic function theory for constructing finite difference methods.

An almost complete picture of the state of the art in theory and applications of Clifford analysis up to 1997 is contained in [15] being completed by the book [16] published in 2008. This textbook deserves some special attention due to the fact that it explains for the first time the fundamentals of one-variable Complex Analysis and Clifford Analysis together.

After 30 years of remarkable dynamics and success in several areas of theoretic and applied research, Clifford Analysis will continue to approve its importance as a combination of algebra, geometry and analysis, particularly adapted to higher dimensions.

Библиографический список

1. *Altmann, S.L.* Hamilton, Rodríguez, and the Quaternion Scandal (what is wrong with on the major mathematical discoveries of the nineteenth century) *Mathematical Magazine*, 62 ,1989, 291-308.
2. *Baylis, W.E.* Electrodynamics: A Modern Geometric Approach, Birkhäuser, 1999.
3. *Brackx, F., Delanghe, R., Sommen, F.* Clifford Analysis. Pitman **76**, Boston-London-Melbourne, 1982.
4. *Clifford, W.* Applications of Grassmann'Extensive Algebra, American Journal of Mathematics Pure and Applied, 1, 1878, 350-358.

5. *Crowe, M.J.* A history of Vector Analysis, Dover, 1993.
6. *Delanghe, R.* On regular-analytic functions with values in a Clifford algebra, Math. Ann. 185 (1970), 91-111.
7. *Dirac, P.A.M.* The quantum theory of the electron, Proc. Roy. Soc. A117, 1928.
8. *Dorst, L., Doran, Ch., Lasenby, J. (eds.)* Applications of Geometric Algebra in Computer Science and Engineering, Birkhäuser, 2002.
9. *Dyson, F.* Missed Opportunities, J.W.Gibbs Lectures, Bull. AMS, Vol. 78 (1972), 635-652.
10. *Fueter, R.* Über Funktionen einer Quaternionenvariablen. Atti Congr. Int. mat., Bologna 1928.
11. *Gibbs, J.W.* On multiple algebra Proc. Amer. Assoc. Adv. Sci., 1886, vol. 35, 37-66.
12. *Grassmann, H.G.* Die lineale Ausdehnungslehre - ein neuer Zweig der Mathematik, Verlag Wiegand, Leipzig 1844.
13. *Gürlebeck, K., Malonek, H.* A Hypercomplex Derivative of Monogenic Functions in $\mathbb{R}^{m+1}$ and its applications, Complex Variables 39 (1999), 199-228.
14. *Gürlebeck, K., Sprössig, W.* Quaternionic Analysis and Elliptic Boundary Value Problems. Birkhäuser Verlag, Basel, 1990.
15. *Gürlebeck, K., Sprössig, W.* Quaternionic and Clifford Calculus for Physicists and Engineers, John Wiley &. Sons, 1997.
16. *Gürlebeck, K., Habetha, K., Sprössig, W.* Holomorphic functions in the plane and n-dimensional space. Transl. from the German. (English) Basel: Birkhauser, 2008.
17. *Hamilton, W.R.* On a new Species of Imaginaries Quantities connected with a theory of Quaternions - Proceedings of the Royal Irish Academy, Nov. 13, 1843, vol. 2, 424-434.
18. *Hestenes, D.* Space-Time Algebra, Gordon and Breach, N.Y., 1966.
19. *Hestenes, D.* A unified language for mathematics and physics, in: Chisholm, J.S.R.,Common, A.K. (eds.), Clifford Algebras and Their Applications in Mathematical Physics, NATO ASI Ser.C 183, 1-23 (1986).
20. *Hurwitz, A.* Vorlesungen über die Zahlentheorie der Quaternionen, Springer, Berlin, 1919.
21. *Iftimie, V.* Fonctions hypercomplexes, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Repub. Soc. Roum., Nouv. Ser. 9 (57) (1965), 279-332.
22. *Kryloff, N.M.* Sur les quaternions de W.R. Hamilton et la notion de la monogeneite Dokl.Akad.Nauk SSSR 55, 787-788 (1947).
23. *Malonek, H.* Selected topics in hypercomplex function theory, In: Clifford Algebras and Potential Theory, Eriksson, Sirkka-Liisa (ed.), University of Joensuu, Report Series 7 (2004), 111-150. Doklady Acad. Sc. USSR, 59, 1948 431-434.

24. *Mitrea, M.* Clifford Wavelets, Singular Integrals, and Hardy Spaces. Lecture Notes in Mathematics 1575, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1994.
25. *Moisil, G.C., Theodorescu, N.* Fonctions holomorphes dans l'espace, Bul. Soc. Stiint. Cluij 6, (1931), 177-194.
26. *Scheffers, G.* Verallgemeinerung der Grundlagen der gewöhnlichen complexen Zahlen, Berichte kgl. Sächs. Ges. der Wiss. 52 (1893), pp. 60.
27. *Sudbery, A.* Quaternionic analysis, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 85 (1979), 199-225.

Владимир Андреевич Стеклов – ученый с нижегородской родословной

Е.В. Губина

С нижегородской землей связаны имена многих выдающихся математиков – Н.И. Лобачевского, А.М. Ляпунова, Н.Н. Боголюбова, А.Ф. Леонтьева, А.А. Андронова и других. В этом ряду находится и Владимир Андреевич Стеклов, первый вице-президент Академии наук, имя которого носит Математический институт Российской Академии наук.

Род Стекловых берет свое начало из Лукояновского уезда Нижегородской губернии. В своих воспоминаниях [1] В.А. Стеклов писал: “Прапрадед разъезжал в кибитке, крытой рогожей, за что и получил в народе прозвище «поп Рогожа»”. Правительство его считало разбойником, крестьянское население Лукояновского и Сергачского уездов – своим заступником и благодетелем. При помощи организованной им “шайки” приверженцев. . . он держал в руках всех помещиков. Имея подробные сведения о разных бедствиях, постигших крестьян в различных селениях уездов. . . , он распределял, сколько хлеба, скота, леса и т.д. должен поставить каждый помещик в пострадавшее село или волость и посылал к ним своих “атаманов” с предписанием собрать столько, сколько он укажет, туда, куда укажет. . . Все окрестное крестьянское население горой стояло за удалого героя поволжских лесов. Власти не могли с ним ничего поделать”.

И сын попа Рогожи, и его внук, т.е. прадед и дед академика были священниками в селе Апраксино Сергачского уезда Нижегородской губернии.

Отец академика, Андрей Стеклов, закончил курс Нижегородской духовной семинарии первым по успехам и был направлен на казенное содержание в Казанскую духовную академию. Но он мечтал о другом продолжении образования – об университете. И, как пишет В.А. Стеклов

[1], он “решил заставить начальство выгнать себя из академии. Воспользовавшись заданной темой «о всемогуществе божьем», он написал обстоятельное сочинение, где доказывал, что вся жизнь природы покоится на незыблемых законах физики и что религия есть выдумка людей. . . ”. Но академическое начальство дорожило способным студентом. “На “совете” признали его “заблудшим”, подвергли “нужным” наказаниям, а из академии не пустили” [1]. После окончания в 1854 году Казанской духовной академии Андрей Иванович Стеклов получил место преподавателя русской истории и древнееврейского языка в Нижегородской духовной семинарии. В 1868 году он стал ректором этой семинарии.

В 1861 году Андрей Иванович женился на Екатерине Александровне Добролюбовой, сестре знаменитого общественного деятеля Николая Александровича Добролюбова. Екатерина Александровна окончила женский пансион для детей-сирот при женском монастыре в Симбирске. Она была очень дружна с братом, вела с ним переписку, но не прошло и полутора месяцев после ее замужества, как в Петербурге 17 ноября 1861 года Н.А. Добролюбов умер.

Андрей Иванович Стеклов совсем не был похож на представителя так называемого духовного сословия. Он был ученым-историком, педагогическим деятелем, в его доме была обширная библиотека. По характеру он был замкнут, малообщителен и отличался крутым нравом. Его слово было твердым и веским.

9 января 1864 года (28 декабря по 1863 г. старому стилю) в семье Стекловых родился сын Владимир.

В 1874 году Володя Стеклов поступил в первый класс Нижегородского Александровского дворянского института, занятия в котором велись по программе гимназии. Володя был способный, живой и предприимчивый мальчик. Часто потребность в движении, необычайная склонность к самостоятельности и живость брали верх, и Володя много времени проводил на воздухе, “упражняясь во всевозможного рода играх и забавах спортивного или гимнастического характера, что, конечно, весьма способствовало укреплению здоровья и нервной системы, но отнюдь не успешному прохождению курсов” [3]. Он переплывал Волгу (а весной Волга возле Нижнего разливалась в ширину километров на пять), перебегал с друзьями по поперечным балкам внутри башен Кремля, балансируя над многометровыми провалами, стал одним из самых способных добровольцев при тушении пожаров, которые нередко случались в “деревянном” Нижнем.

В первые школьные годы успехи Владимира Стеклова были весьма посредственными. Но когда отец как-то в присутствии матери и сестер назвал сына неспособным шалопаем, Володя почувствовал жгучий стыд. После этого он стал основательно заниматься даже летом. В седьмой класс он перешел с наградой, в восьмой класс – с первой наградой. И если его упорный интеллектуальный труд начался с самолюбивого желания показать, что он не хуже других, то в процессе работы зародился и укрепился интерес к наукам и творческой работе.

Серьезному увлечению математикой и физикой способствовал прекрасный нижегородский педагог В.В. Малинин, который разрешал ученикам по вечерам производить опыты в физическом кабинете. Володя "завел у себя дома лабораторию с физическим кабинетом, устроил самодельную электрическую машину, лейденские банки, сам изготовлял элементы, производил всякие химические опыты. . . " [3]. В этот период особая дружба установилась у Володи с братом его отца, дядей Иваном, пламенным поклонником науки и техники, "русским самородком". И.И. Стеклов служил дьяконом в церкви Митрополита Алексия. При этом у себя дома он устроил механическую мастерскую и использовал всякую возможность, чтобы удовлетворить свое природное призвание к инженерному делу. Дядя и племянник проводили в лаборатории долгие часы, увлеченно ставили многочисленные опыты. Вскоре к ним присоединился возвратившийся из Америки "дядя Ваня" – Иван Александрович Добролюбов (брат матери Стеклова), молодой человек 22-х лет, приехавший в Нижний после окончания курса в Нью-Йорке в известном Корнелевском институте. "Силач, спортсмен и наряду с тем великолепный знаток математики и физики" [1], он сразу покорил сердца обоих друзей, и все занятия теперь протекали под его руководством.

Владимир Стеклов много читал. Стекловы следили за политическими событиями в России, и в их семье, как и во многих других семьях того времени, возникали горячие политические споры. "Случайно в это время, на так называемом "пробном испытании", нам была в институте задана тема: "Великий век был век Екатерины". . . и я без всякой предвзятой мысли провел в своем сочинении мысль, что век Екатерины только с виду был великим, на деле чуть ли не заканчивал собой крушение Петровских реформ. Расписал все это я от чистого сердца. . . Велико же было мое удивление, когда после прочтения наших сочинений, директор Шапошников воскликнул: "Откуда у нашего лучшего ученика проявилось такое вольнодумство?!" Э, сказал я сам себе, да я, оказывается, имею свои собственные взгляды на исторические события, отличные от взглядов всех других товарищей и их учителей. Я думал раньше, что просто излагаю выученные на уроках истории факты, подгоняя их под данную тему и больше ничего... Это был как бы толчок моего умственного пробуждения, когда я почувствовал себя существом рассуждающим и притом вольнодумно" [1].

До этого времени педагоги думали, что Стеклов займется философией или историей, а он между тем стал больше заниматься математикой, физикой и химией. Несмотря на то, что преподаватели уговаривали отличника по древним языкам избрать для занятий филологию, Владимир Стеклов, окончив среднюю школу в 1882 году, поступил на первый курс физико-математического факультета Московского университета.

Летом 1882 семья Стекловых переехала в Крым. Это было связано с болезнью отца. Андрей Иванович перевелся из Нижнего в Симферополь на должность ректора Таврической духовной семинарии.

В первый год университетской жизни учеба в университете сложилась для Стеклова неудачно: человек общительный, музыкально-одаренный, он оказался обладателем высокого баса и охотно пел на студенческих вечеринках. Все это мешало занятиям. Владимир должен был остаться на второй год. Но он уже привык быть первым, чувствовал свои незаурядные способности. Стеклов бросает Московский университет и уезжает к родителям в Симферополь. Он думает о переходе на медицинский факультет, но потом решает поступить на физико-математический факультет Харьковского университета.

Харьковский университет, основанный в 1804 году, был одним из старейших университетов в стране. Из его стен вышли знаменитый биолог Илья Ильич Мечников и один из крупнейших русских математиков Михаил Васильевич Остроградский.

В Харьковском университете Владимир Стеклов занимается под руководством профессора М.Ф. Ковальского, который умел привить студентам любовь и уважение к науке. Стеклов становится центром кружка студентов, серьезно относящихся к занятиям наукой.

В 1885 г. в Харьковском университете в качестве приват-доцента начал работать Александр Михайлович Ляпунов. Владимир Стеклов тогда учился на третьем курсе. Ляпунов был переведен в Харьков из Петербургского университета. Его учителями были П.Л. Чебышев, К.А. Поссе и Д.К. Бобылев. Некоторые задачи, поставленные Чебышевым, навели Ляпунова на тему его магистерской диссертации "Об устойчивости эллипсоидальных форм равновесия вращающейся жидкости". Эта диссертация, защищенная в январе 1885 г. в Петербургском университете, сделала имя Ляпунова известным в математическом мире.

А.М. Ляпунов сразу покорил харьковских студентов силой своего таланта. Те, кому были не чужды интересы науки – а таких было немало, – стали напрягать все силы, чтобы хоть немного приблизиться к той высоте, на которую влек учитель. Владимир Стеклов становится наиболее внимательным его учеником. Дальнейшие занятия Стеклова как студента и потом как оставленного при университете молодого ученого протекали под руководством Ляпунова.

15 октября 1887 г. Владимир Стеклов успешно сдал выпускные экзамены и закончил университет. Ему было предложено остаться при университете для подготовки к получению профессорского звания. Ляпунов подверг его нелегкому испытанию. Он предложил Владимиру написать работу на тему: "Движение биллиардного шара по шероховатой поверхности". Выполнение этого задания должно было обнаружить способности будущего стипендиата к самостоятельной работе. Стеклов представил выполненную работу в феврале 1888 года. Ляпунов признал эту работу блестящей.

Еще в студенческие годы Владимир Стеклов познакомился с *Ольгой Николаевной Дракиной.* Ее брат, студент Николай Дракин, был приятелем Стеклова. Ольга была хорошей пианисткой и преподавала музыку в Женском епархиальном училище. 28 января 1890 г. Владимир и Ольга обвенчались в церкви этого училища. В 1891 г. у Стекловых родилась дочь Ольга.

В 1889 г. В.А. Стеклов назначается ассистентом при кафедре механики, а в 1891 г. он допускается к чтению лекций в качестве приват-доцента. В 1894 г. он получает степень магистра прикладной математики, защитив диссертацию *"О движении твердого тела в жидкости"*, и в 1896 г. назначается исполняющим должность экстраординарного профессора по кафедре механики. В 1902 г. после защиты диссертации *"Общие методы решения задач математической физики"* В.А. Стеклов получает степень доктора прикладной математики. К этому времени относится и начало дружбы между семьями Стеклова и Ляпунова, которая продолжалась долгие годы. В своих воспоминаниях В.А. Стеклов пишет: "В это время мы сблизились с моим дорогим учителем Александром Михайловичем Ляпуновым и его женой Натальей Рафаиловной, а также с ее отцом Рафаилом Михайловичем Сеченовым. Мы стали часто бывать друг у друга... Старик Сеченов (брат знаменитого физиолога Ивана Михайловича Сеченова) до чрезвычайности привязался ко мне и считал нас самыми близкими людьми. Когда он приходил к нам, то часто, после математических бесед с Ляпуновым, на продолжительность которых постоянно брюзжал старик Сеченов, я задавал им концерты под аккомпанимент Оли. Пел, главным образом, из опер и преимущественно из "Руслана", которого обожала Наталья Рафаиловна, находя мое пение лучше всякого оперного. Заканчивали вечер мы скромной закуской с некоторым количеством рюмок водки, что очень одобрял Рафаил Михайлович, и около 12 часов обычно расходились" [1].

В Харьковском университете и Харьковском технологическом институте Стеклов читает курс теоретической механики, в который вводит элементы векторной алгебры, векторного анализа, сведения о криволинейных интегралах. Это было очень прогрессивно для того времени.

Интенсивная научная работа В.А. Стеклова в Харькове подготовила дальнейший расцвет его творческой научной мысли. Кроме двух диссертаций Стеклов имеет уже большое число трудов и становится крупной научной величиной. С 1902 по 1906 г. он является председателем Харьковского Математического Общества. В 1903 г. избирается членом-корреспондентом Академии наук. Но научная работа не мешала работе общественной. Он принимает деятельное участие в университетских делах. В 1905-1906 гг. Стеклов берет на себя обязанности декана физико-математического факультета и участвует в совещаниях по выработке нового университетского устава. Как и всякое другое свое дело, Владимир Андреевич выполнял эту работу с полной отдачей. Стеклов резко возражал против введения в учебный план репетиций по математике и механике. Репетицией назывался "промежуточный экзамен", опрос студентов с выставлением отметок каждые полтора месяца. В речи на ученом совете Стеклов сказал: "...И это постоянное нервное напряжение и усиление зубрежки благодаря репетициям, продолжаются из недели в неделю в течение двух первых и самых важных в студенческой жизни лет" [2]. Вместо репетиций он предлагает ввести практические занятия, на которых решались бы задачи по курсу и давались бы дополнительные разъяснения наиболее трудных мест курса. Эта инициатива была поддержана другими высшими учебными заведениями и в 1899 г. практические занятия по математике и механике были введены по всей стране.

По различным вопросам университетской жизни В.А. Стекловым было опубликовано пять заметок.

В 1900 г. вышла в свет знаменитая работа Ляпунова "Общая задача об устойчивости движения". В 1901 г. Академия наук избрала А.М. Ляпунова в ординарные академики по кафедре прикладной математики (должность оставалась вакантной после смерти П.Л. Чебышева в 1894 г.), и в 1902 г. А.М. Ляпунов переселился в Петербург.

В 1906 г. В.А. Стеклов принимает предложение занять кафедру в Петербургском университете. Этот новый период деятельности Владимира Андреевича делится на две части, не имеющие между собой определенной границы. Первая часть связана с университетом, затем, по крайней мере формально, Стеклов порывает с университетом и сосредотачивается на работе в Академии наук.

Появление Владимира Андреевича в Петербургском университете немедленно сказалось в некоторых реформах учебной жизни. В частности, так же, как и в Харькове, были введены планомерные практические занятия, отсутствовавшие до того времени. Вокруг Стеклова образовалась довольно большая группа студентов, занятиями которых он руководил. От своих непосредственных учеников он требовал посильной, но, безусловно, самостоятельной научной работы с самого начала. Вместе с тем, он не признавал узкой специализации без достаточно широкого математического образования.

В качестве ординарного профессора Владимир Андреевич читает лекции по теории дифференциальных уравнений – обыкновенных и в частных производных. Стеклов предъявлял большие требования на магистерском экзамене, но по воспоминаниям прошедших этот экзамен, никакой экзамен не доставлял столько удовлетворения и просто удовольствия, как экзамен Стеклова. Так получалось из-за полного отсутствия какой бы то ни было мелочности в вопросах и такой их постановки, при которой экзаменующийся чувствовал себя не проверяемым, а просто собеседником. При часто возникавших спорах Владимир Андреевич спокойно выслушивал оппонента и также спокойно разубеждал его, когда это было надо.

В 1910 г. В.А. Стеклов избирается адъюнктом Академии наук, в марте 1912 г.– экстраординарным академиком, и в июле того же года – ординарным академиком. При этом он не прекращает своей деятельности в университете. В 1916 г. он избирается членом Правления Академии наук и постепенно начинает отходить от дел в университете. В 1919 г. В.А. Стеклов избирается Вице-президентом Академии на 8 лет и председателем хозяйственного комитета. Он прекращает чтение лекций в университете, и начинается его разносторонняя деятельность в Академии наук.

С 1919 г. по 1926 г. при деятельном участии Стеклова происходила реорганизация всей Академии. В частности, с именем Стеклова тесно связана история создания при Академии *Физико-математического института, явившегося прямым предшественником современного математического института имени В.А. Стеклова.*

В январе 1919 г. по предложению академиков В.А. Стеклова, А.А. Маркова и А.Н. Крылова общее собрание Академии признало необходимым создать при Академии Математический кабинет, включавший в свой состав музей имени П.Л. Чебышева. Библиотека Математического кабинета была образована из ряда библиотек известных русских математиков. Вошла в нее и библиотека В.А. Стеклова. Директором кабинета был назначен В.А. Стеклов.

В 1921 г. по инициативе академиков В.А. Стеклова, А.Н. Крылова и А.Ф. Иоффе кабинет и Физическая лаборатория были объединены в Физико-математический институт Российской Академии наук.

Физическая лаборатория была основана в начале XIX века по почину изобретателя вольтовой дуги Василия Владимировича Петрова (1761-1834), сначала это был Физический кабинет, в 1812 г. переименованный в лабораторию. В лаборатории были приборы, приобретенные еще Петром I. Объединение Физической лаборатории и Математического кабинета стало необходимым ввиду назревшей потребности связать физические и математические науки. Директором института был назначен В.А. Стеклов.

К 1925 г. (год двухсотлетия Академии) в состав института входили:

1) математический отдел (В.А. Стеклов), который объединял математический кабинет им. П.Л. Чебышева и А.М. Ляпунова; библиотеку из библиотек академиков А.М.Коркина, А.М. Ляпунова, А.А. Маркова, В.А. Стеклова; рукописный отдел из бумаг А.М. Коркина, О.И. Сомова, Е.И. Золотарева, коллекцию механизмов П.Л. Чебышева и вычислительные приборы;

2) физический отдел (А.Н. Крылов);

3) сейсмический отдел (П.М. Никифоров).

В.А. Стеклов уделял много внимания сейсмической сети Советского Союза. По его инициативе при Академии наук была учреждена Межведомственная постоянная сейсмическая комиссия. В.А. Стеклов заведовал теоретической и вычислительными частями экспедиции по исследованию изменений силы тяжести в области Курской магнитной аномалии (КМА), которая была обнаружена русским астрономом академиком П.Б. Иноходцевым в 1783 г.

В 1926 г. Физико-математическому институту было присвоено имя В.А. Стеклова, а в 1934 г. институт разделился на два института, один из которых – Математический институт АН СССР – сохранил имя В.А. Стеклова)

В период с 1918 по 1926 г. В.А. Стеклов жил в академической квартире на набережной Невы около моста лейтенанта Шмидта. В это время Владимиру Андреевичу пришлось пережить много тяжелых утрат. В 1918 г. ушли из жизни Александр Михайлович Ляпунов и его жена Наталья Рафаиловна. И В.А. Стеклов пишет о своем учителе А.М. Ляпунове: "Все из ряда вон выходящие силы свои он отдавал на беззаветное служение науке, ею он жил, в ней одной видел он смысл жизни и часто говорил, что без научного творчества и самая жизнь для него ничего не стоит... За внешней сухостью и даже суровостью в Александре Михайловиче скрывался человек большого темперамента с чуткой и детски чистой душой" [2].

7 сентября 1920 г. в возрасте 59-ти лет умерла жена Владимира Андреевича – Ольга Николаевна. Владимир Андреевич очень тяжело переживает смерть жены. В эти годы он живет уединенно, в свободное время много занимается музыкой. Вспомним, что в молодости он имел сильный голос, прекрасно пел и мечтал о карьере певца.

Стеклов известен как историк математики, философ и писатель. В 1920 г. выходит его книга "Математика и ее значение для человечества", в которой он пишет: "Все явления, происходящие в природе и обществе, должны со временем стать объектами математики... Люди непременно все согласятся между собой и притом по всем вопросам, но это будет тогда, когда наука о природе, т.е. вся истина, будет математически формулирована".

В 1923 г. выходят две книги Стеклова "Михайло Ломоносов" и "Галилео Галилей" В работе "Михайло Ломоносов" Стеклову удается создать живой портрет великого и самобытного ученого, но избежать излишней лакировки его облика. "Нередко впадал он в крайности и в разгаре борьбы задевал личности..., но все это во многом объясняется общим состоянием нравов той эпохи и является неизбежной мелочью на общем фоне его беззаветной борьбы в защиту интересов науки, в которой он действительно не жалел себя" [2].

Так написать мог только разносторонний ученый, увлеченный наукой и мастерски владеющий словом.

В книге "Галилео Галилей" нет подробной биографии великого ученого, но эта книга дает читателю представление о состоянии науки того времени, о борьбе основателей новой физики со средневековыми предрассудками.

Образец художественного репортажа дает книга "В Америку и обратно. Впечатления" (1925). Эта работа написана после поездки В.А. Стеклова в Канаду и Соединенные Штаты Америки.

Стеклову также принадлежат очерки и статьи о жизни и деятельности П.Л. Чебышева, М.В. Остроградского, Н.И. Лобачевского, А.М. Ляпунова, А.А. Маркова, А. Пуанкаре.

23 февраля 1926 г. в Казани отмечалось 100 лет со дня представления Н.И. Лобачевским своей рукописи физико-математическому отделению Казанского университета, и Стеклов участвует в торжествах, посвященных этой дате. На обратном пути из Казани он заболел воспалением легких. Но вернувшись в Петербург, он продолжает работать, готовит к изданию сочинения Ляпунова. 14 мая он уезжает в Крым, чтобы полечиться. Ему становится немного лучше, но 30 мая 1926 г. он внезапно умирает. Похоронен В.А. Стеклов на литературных мостках Волкова кладбища в Петербурге.

Основные математические работы В.А. Стеклова посвящены математической физике. В этой области им достигнуты выдающиеся результаты. Стеклов получил ряд существенных результатов, касающихся основных задач теории потенциала, вплотную подошел к понятию гильбертова пространства.

Выдающемуся математику Владимиру Андреевичу Стеклову принадлежит достойное место в плеяде ученых и деятелей культуры, родившихся на Нижегородской земле.

Библиографический список

1. *Стеклов, В.А.* Воспоминания. Научное наследство [Текст] / В.А. Стеклов. – Л.: Наука, 1991. – Т. 17.
2. *Игнациус, Г.И.* Владимир Андреевич Стеклов. [Текст] / Г.И. Игнациус. – М.: Наука, 1967.
3. *Виноградова, Т.П.* Нижегородская интеллигенция [Текст] / Т.П. Виноградова. – Нижний Новгород: Волго-Вятское книжное издательство, 1992.

Визит академика Н.М. Крылова в Португалию в 1927 году

В.И. Харламова

В работе анализируется развитие международных связей европейских математиков в начале XX века на примере Португалии. Обсуждается начало реформ в науке и образовании и усиление роли научных связей ученых разных стран. Исследованы архивные документы Университетов Куимбры и Порту (Португалия) и архива РАН (Россия). Обнаружены ранее неизвестные документы о пребывании академика Н.М. Крылова с курсом лекций в Университете Куимбры в 1927 году.

Введение

В Португалии, в отличие от других европейских стран, таких как Франция, Италия, России, Германия и Англия, до конца XIX века не было зарегистрировано заметных достижений в области математики. Исключение составляют выдающиеся работы Педро Нунеша[1], португальского математика периода великих географических открытий XVI века, и много позже, в эпоху реформ конца XVIII века, необходимо отметить пионерские работы Жозе Анастасия да Кунья[2] и деятельность Жозе Монтейро да Роша[3].

---

[1] Педро Нунеш (1502-1578) – португальскй математик, создатель некоторых измерительных приборов, в том числе нониуса.

[2] Жозе Анастасио да Кунья (1744-1787) – португальский математик, автор “Математических начал” опубликованных в 1790 году. Это единственная работа того времени, вышедшая на португальском языке. Предполагается, что он предвосхитил открытия формулы Коши, известной под именем формулы Коши-Больцано.

[3] Жозе Монтейро да Роша (1734-1819) – португальский астроном, сыграл выдающуюся роль в развитии математических наук в Португалии.

Франсишко Гомеш Тейшейра[1] делит историю математики в Португалии на пять периодов[2]:

1. **Период формирования**: (1455-1495) время правления Д. Жоао I до конца правления Д. Жоао II (в этот период использовалась римская нумерация).

2. **Период расцвета**: с момента смерти Д. Жоао II до конца XVI века (развитие научных элементов – астролябия, нонио и квадрант, это было связано с открытием морских путей в Индию и Бразилию, развитие навигации).

3. **Период упадка**: с XVII века до середины XVIII века.

4. **Период преобразований**: с середины XVIII века до середины XIX века. (Преобразование Университета Куимбры Маркизом Помбалом и создание Лиссабонской Академии Наук в 1779 г.).

5. **Современный период**: с середины XIX века до XX века.

В этой работе нас интересует последний период, конец XIX начало XX века. В этот период весь европейский научный мир приходит к мысли о необходимости реформ в образовании и в науке. Не остается в стороне и Португалия.

Реформы на рубеже XX века

Высшее образование в Португалии к началу XX века было сосредоточено в Университете Куимбры, Политехнической школе Лиссабона и Политехнической Академии Порту. Про высшее математическое обучение, даваемое в этих трех высших учебных заведениях, докладывал Луиш Вудхауз (Luis Woodhouse) на конгрессе в Порту в 1921 году (Congresso para o Progresso das Ciências):

“В этих заведениях программа для курса чистой математики состоит из высшей алгебры, аналитической геометрии, дифференциальной и интегральной математики и начертательной геометрии. Имеется также курс прикладной математики включающей в себя механику, астрономию и геодезию, и только в университете обучают математической физике и механике небесных тел”.

Научные исследования проводились исключительно членами Лиссабонской Академии наук и Институтом Куимбры. Члены Академии, следуя уставу 1851 года, делились на два класса: первый класс это математические, физические и естесвенные науки; второй класс это мораль, политика и искусство.

---

[1] Франсишко Гомеш Тейшейра (1851-1933) – португальский математик.

[2] *Histyria das matembticas em Portugal,* Lisboa, Academia das Cikncias de Lisboa, 1934.

Научные работы публиковали два журнала, журнал “*Институт*”, издаваемый с 1853 года в Куимбре (печатал в основном математические статьи дидактического характера) и “*Журнал физико-математических и естественых наук*”, выходивший с 1866 года в Лиссабоне.

Почти все эти исследования, проводимые в Португалии, не выходили за пределы страны в связи с ее научной изолированностью. Назрела необходимость преобразований в науке, а также необходимо было внести некоторые изменения и в систему высшего образования.

“Нет ничего хуже для науки страны, чем ее изолированность от других стран. Эта изолированность была почти абсолютной в Португалии в XIX веке, и главной причиной этого был наш малоизвестный португальский язык. Наши журналы мало читались за границей и наши ученые не публиковали результаты своих исследований в научных изданиях других стран”. (Франсишко Гомеш Тейшейра, 1925).

Во второй половине XIX века имя Франсишко Г. Тейшейра было известно не только в Португалии, но и за ее пределами. Имея возможность путешествовать и знакомиться с различными научными школами за пределами Португалии, он понимал необходимость расширения международных научных связей. В 1877 году он основал научный журнал *“Журнал математических и астрономических наук” (“Jornal de sciencias matemáticas e astronómicas”),* который выходил в течение 28 лет и был преобразован в “*Научные труды Политехнической Академии Порту*” (“*Anais Scientificos da Academia Politécnica do Porto*”). Богатая научная переписка Тейшейра с учеными разных стран позволяет понять всю грандиозность планов по борьбе с изолированностью Португалии в научном плане. Около 2000 писем, хранящихся в архиве университета Куимбры, знакомят нас с такими именами как А. Пуанкаре, Г. Дарбу, Ш. Эрмит, Ж. Адамар, М. Лерх, М. Кантор, Ф. Клейн, Э. Ландау. Невозможно перечислить все имена, которые мы встречаем, изучая корреспонденцию Тейшейра, но следует отметить, что в этом архиве есть письма и из России.

Формирование международных связей

Тейшейра не был одинок в своем желании открыть границы Португалии для науки. Франсишко Миранда да Кошта Лобу, известный португальский астроном и математик, так же как и Тейшейра не желал мириться с создавшейся ситуацией. Благодаря его усилиям, португальские ученые начали участвовать в международных конференциях, и университеты Португалии открыли свои двери для профессоров из других стран.

Участвуя лично в различных международных конференциях[1], Кошта Лобу знакомится с учеными из других стран и приглашает их посетить Португалию. В частности, на 7-ом Конгрессе математиков в 1924 году в Торонто, Кошта Лобу пригласил оказать честь Институту Куимбры и стать его член-корреспондентами некоторых присутствовавших там ученых. Одним из приглашенных был Н.М. Крылов[2].

Как нам удалось выяснить, на основании португальских архивных документов, в 1927 году Кошта Лобо пригласил Н.М. Крылова посетить Португалию. Мы заинтересовались целью и программой этого визита, в связи с тем, что никакие опубликованные по-русски документы о жизни и профессиональной деятельности Н.М. Крылова не содержат никакой информации об этом визите в Португалию.

Характеризуя научную деятельность Н.М. Крылова, необходимо отметить следующие главные направления его исследований: проблемы теории интерполяции и механических квадратур, приближенное интегрирование дифференциальных уравнений математической физики и обширная область нелинейной механики. Весьма значительная часть трудов Н.М. Крылова посвящена вопросам приближенного интегрирования дифференциальных уравнений математической физики.

Многочисленные монографии и статьи Н.М. Крылова получили широкую известность за рубежом. В 1925 году Н.М. Крылов получил при-

---

[1] **6-ой** Международный конгресс математиков, 1920 г., Страсбург. Франсишко М. да Кошта Лобо представил доклад “*Sur la courbe dŭcrite par le pφle sur la surface de la Terre*”. (*L'Enseignement Mathematique*, vol. 21 (1920), p. 205). **7-ой** Международный конгресс математиков, 1924 г., Торонто. Доклад “*Nouvelles thŭories physiques: application a l'astronomie*”.

[2] Николай Митрофанович Крылов (1879-1955), получил образование в Горном институте С.-Петербурга, где был учеником известного математика И.П. Долбни. Затем изучал математику во Франции, Италии и Англии по работам Пикара, Пуанкаре, Дарбу, Гильберта, Дини и Бианки.

Еще студентом, он написал свою первую научную работу *“О некоторых приложениях псевдоэлиптических интегралов к вычислению объемов”*, которая тогда была удостоена премии имени Г.А. Тиме. По окончании института в 1902 году получил звание горного инженера. Работу под заглавием *“О разложении в ряды по фундаментальным функциям, встречаемым при интегрировании одного дифференциального уравнения с частными производными 4-го порядка и о разложении по полиномам Якоби”* в 1911 году защитил в Горном Институте как адъюнктскую диссертацию. После смерти И.П. Долбни возглавил в Горном институте кафедру высшей математики. С 28 марта 1916 года зачислен в состав приват-доцентов Петроградского университета для чтения курса *“Теория тригонометрических рядов”*.

глашение от ректора Университета Куимбры Фернандо де Алмейда (Fernando de Almeida) посетить Португалию для прочтения курса лекций.

Научное путешествие

Путешествие в Португалию началось 3 сентября 1926 года и продолжалось до 22 июля 1927 г. На протяжении всего пути Крылов вел дневник, который озаглавил “Научное путешествие по Западной Европе”, где он описывает посещение научных центров в Неаполе, Болонье, Париже, Страсбурге и Куимбре.

20 ноября 1926 года, в Академии Наук Неаполя он выступает с лекцией, а 7 декабря он представляет свои работы на Конгрессе, проходившем в Университете Неаполя. 17 декабря в Институте Математики Университета Болоньи Крылов представляет свою работу “*О приближенном интегрировании дифференциальных уравнений математической физики*”.

В Академии Наук в Париже Н.М. Крылов представляет свою работу “*О приближенном интегрировании некоторых дифференциальных уравнений математической физики в частных производных*”, а также посещает выступления других ученых и принимает участие в семинаре Адамара.

На протяжении своего путешествия в Италии и Франции Н.М. Крылов приобретает научные журналы и книги и отправляет их на Украину в Академию Наук.

В апреле 1927 года Н.М.Крылов прибыл в Португалию для прочтения курса лекций в Университете Куимбры. Эти лекции впоследствии были опубликованы под названием “*О некоторых новых методах приближенного интегрирования дифференциальных уравнений математической физики*” (“*Sobre alguns novos métodos da integração aproximada das equações diferenciais da Física Matemática*”).

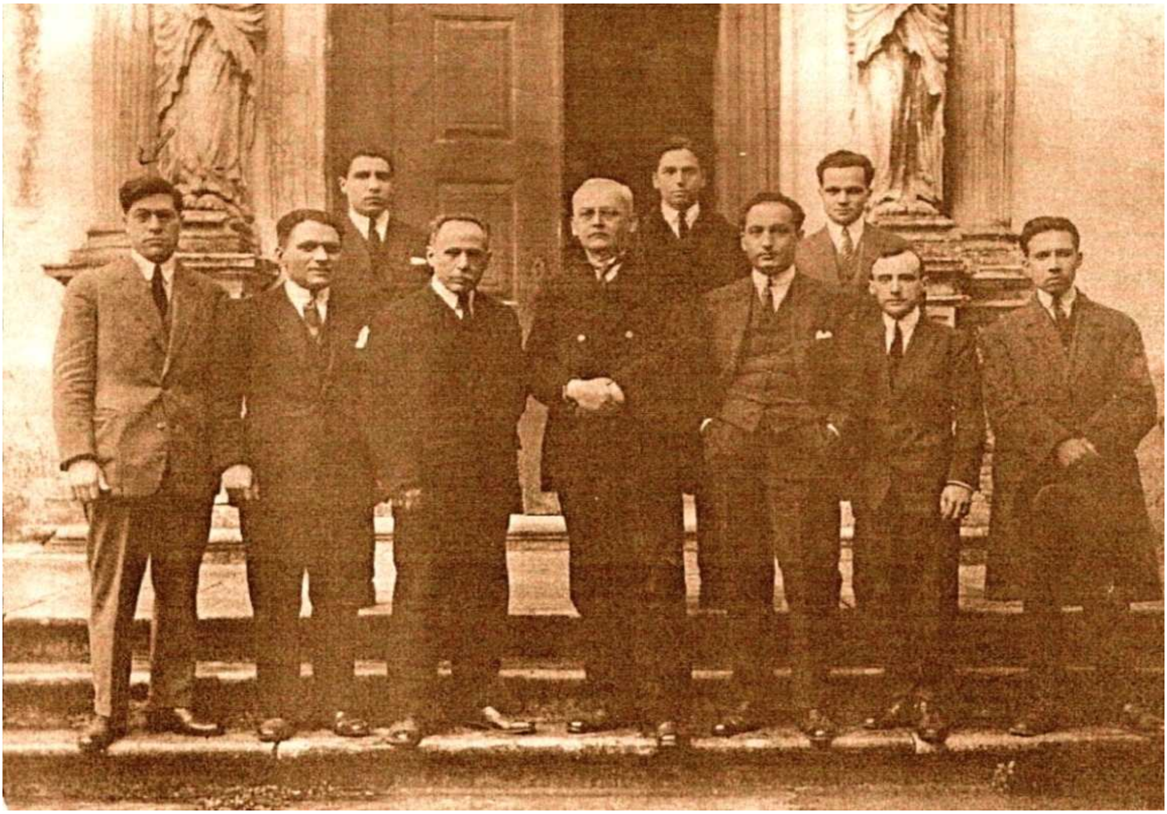
Слушателями на лекциях Н.М. Крылова были люди уже закончившие университет. Некоторые из них преподавали на математическом факультете университета, в том числе один из известнейших впоследствии португальских математиков Руй Луиш Гомеш[1] (Ruy Luís Gomes).

Курс состоял из 8 лекций, первые семь были прочитаны по-французски, а последняя, восьмая, “*из уважения к пригласившему университету*” была прочитана на португальском языке. Надо отметить, что до

---

[1] Руй Луиш Гомеш (Ruy Luhs Gomes, 1905-1984), португальский математик,один из основателей Астрономической обсерватории университета Порту, в 1981 году награжден от СССР Орденом Дружбы Народов.

этого Николай Митрофанович португальского языка не знал, и овладел им за этот короткий период пребывания в стране.



Первый ряд, справа налево: Руй Луиш Гомеш, Гумерзинду да Кошта Лобу, Жозе Висэнтэ Гонсалвеш, Николай Митрофанович Крылов, Франсишко да Кошта Лобу, Мануэл Эшпартейро и Мануэл дош Рейш

Будучи в Португалии, Н.М. Крылов отмечает в своих записках, что Университет Куимбры совместно с "Институтом Куимбры" *"...прилагают все доступные им усилия в деле привлечения иностранных ученых для чтения лекций в Куимбрском университете..."*. Так, следует отметить, что в период пребывания Н.М. Крылова в Куимбре, там была прочитана лекция по метеорологии норвежским ученым Бьеркнесом, в связи с организацией метеорологической службы в Португалии. Незадолго до Н.М.Крылова гостем математического факультета Куимбрского университета был английский ученый Юнг, специалист в теории тригонометрических рядов и председатель Лондонского Математического Общества. Как отмечает в своих записках Н.М. Крылов, профессора Куимбры *"...были не только профессорами, но даже и ректорами Па-*

рижской Сорбонны[1]*; по учебникам Алгебры одного из знаменитейших ученых того времени Дон Педро Нунеша училась вся Европа...*"[2], а профессор математики Сидонио Паиш (Sidonio Pais) был президентом Португалии в 1917/18 гг.

В своих дневниковых записках Н.М. Крылов упоминает имя профессора Университета Куимбры математика Франсишко Гомеша Тейшейры, одного из крупнейших ученых Португалии, ученого с европейским именем. Сочинения этого математика "*...были изданы в шести томах на государственный счет, причем издание это, начатое при королевской власти, было закончено при республиканском режиме: признание заслуг ученого было вне политики...*"[3]. Именем профессора Гомеша Тейшейры названа одна из аудиторий в Университете Куимбры, где находится и бюст ученого. "*...Тут кстати отмечу одну любопытную подробность, вначале меня, иностранца, весьма изумившую, – это склонность португальцев ставить памятники своим крупным людям еще при их жизни...*"[4].

Как член-корреспондент Института Куимбры Н.М. Крылов в период пребывания в Университете присутствовал при защите диссертаций, а также докторских экзаменов. Находясь в Куимбре, Николай Митрофанович, интересовавшийся новейшими достижениями, прослушал лекции французских археологов о раскопках на острове Крит. Математическая библиотека Университета, умело и со знанием дела подобранная, также привлекла внимание Н.М. Крылова. Там он часами знакомился с содержанием научных журналов как зарубежных, так и издаваемых на Пиринейском полуострове. Сегодня библиотека Университета является своеобразным музеем, и приятно сознавать, что среди редких научных журналов и книг в библиотеке находится курс лекций русского математика Николая Митрофановича Крылова. Во многих статьях о Н.М. Крылове можно встретить слова о том, что своими блестящими лекциями Крылов оказал большое влияние на формирование многих ученых своей страны, но теперь мы можем сказать, что это влияние не имело границ.

Автор благодарит работников архивов Университетов Куимбры и Порту (Португалия) и архива РАН (Россия) за содействие в поисках документов. Автор считает своим приятным долгом сказать слова благодарности профессорам Г.Р. Малонеку (Университет Авейро, Португа-

---

[1] Диогу дэ Гувейа (Diogo de Gouveia), год рождения приблизительно 1471, был ректором Сорбоны.

[2] Н.М. Крылов. Автобиографические записки. 1927 г.

[3] Там же.

[4] Там же.

лия) и С.С. Демидову (МГУ им. М.В. Ломоносова, Россия) за большое внимание к данной работе.

Даты жизни Н.М. Крылова

Н.М. Крылов 29.11.1879-11.05.1955.

1902 г. – окончил Петербургский Горный институт.

1911 г. – защитил диссертацию на степень адъюнкта.

1912-1917 гг. – Профессор Горного института.

1917 г. – присуждена степень доктора математики (honoris causa) Киевского университета.

1918-1922 гг. – Профессор Крымского университета и редактор математического журнала “Proceedings of the Mathematical Laboratory of the Taurie University”.

1922 г. – действительный член Академии наук УССР.

1925 г. – член-корреспондент Академии наук СССР.

1929 г. – действительный член Академии наук СССР.

Библиографический список

1. *Боголюбов, А.Н.* Н.М. Крылов как историк математики [Текст] / А.Н. Боголюбов // Мат. сб. – 1978. – С. 3-14.
2. *Лучко, Т.Ф.* Вклад Н.М. Крылова и Н.Н. Боголюбова в развитие вариационных методов математической физики [Текст] / Т.Ф. Лучко // Мат. сб. – 1978. – С. 15-30.
3. *Урбанский, В.М.* Из истории кафедры математической физики АН УССР [Текст] / В.М. Урбанский // Мат. сб. – 1978. – С. 31.
4. *Боголюбов, Н.Н.* Николай Митрофанович Крылов. К семидесятилетию со дня рождения [Текст] / Н.Н. Боголюбов. – Киев, 1949.
5. *Боголюбов, А.Н.* Николай Митрофанович Крылов [Текст] / А.Н. Боголюбов, В.М. Урбанский. – Киев, 1987.
6. О целях организации Математического кабинета (лаборатории) при Таврическом университете. Записки математического кабинета Таврического университета [Текст]. – Симферополь: тип. Тавр. Губ. Зем., 1919. – Т. 1. – С. 4-13.
7. *Крылов, Н.М.* Автобиографические заметки [Текст] / Н.М. Крылов // Архив Н.М. Крылова. – Архив РАН, ф. 689.
8. *Юшкевич, А.П.* Ж.А. да Кунья и проблемы обоснования математического анализа [Текст] / А.П. Юшкевич // Историко-математические исследования. – Москва, 1973. – Вып. XVIII. – С. 157-175.
9. *Юшкевич, А.П.* К.Ф. Гаусс и Ж.А. да Кунья [Текст] / А.П. Юшкевич // Историко-математические исследования. – Москва, 1973. – Вып. XVIII. – С. 186-189.

10. *Боголюбов, А.Н.* Воззрения Ж.А. да Кунья в области механики [Текст] / А.Н. Боголюбов // Историко-математические исследования. – Москва, 1974. – Вып. XIX. – С. 177-187.
11. “Historia das Matemáticas em Portugal”, Lisboa, Academia das Ciências de Lisboa, 1934.
12. Henrique de Vilhena, “O Professor Doutor Francisco Gomes Teixeira”, Lisboa, 1935.
13. *Харламова, В.И.* Португальские лекции математика Н.М. Крылова [Текст] / В.И. Харламова, Х.Р. Малонек // Вестник Национальной Академии Наук Украины, 2004. – № 11. – С. 63-67.

К 100-летию со дня рождения Николая Владимировича Ефимова

А.К. Рыбников, К.К. Рыбников, Т.А. Ласковая

31 мая 2010 года исполняется 100 лет со дня рождения выдающегося отечественного геометра Николая Владимировича Ефимова, лауреата Ленинской премии (1966 г.), члена-коррспондента АН СССР (1978 г.).

Н.В. Ефимов родился в г. Оренбурге. В начале двадцатых годов XX столетия семья переехала в Новочеркасск, и в 1923 г. Н.В. Ефимов стал учеником 2-ой объединенной школы I и II ступени г. Новочеркасска (по устному свидетельству самого Н.В. Ефимова до 1923 г. он школу не посещал и учился дома). В 1927 г. Николай Владимирович окончил школу, но сразу поступить в университет не смог – требовался рабочий стаж. Начиная с июня 1927 г. Н.В. Ефимов работал на строительстве депо станции Каменоломни, а с декабря – на заводе “Красный Аксай”. В 1928 г. он поступил в Северо-Кавказский университет в Ростове-на-Дону, где его наставником был профессор Д.Д. Мордухай-Болтовской. Осенью 1931 г., в связи с существенным увеличением приема в аспирантуру Московского университета, в Ростов прибыли представители МГУ с целью отобрать лучших студентов для обучения в аспирантуре МГУ. Н.В. Ефимов был включен в состав студентов, направленных в аспирантуру НИИ математики и механики при механико-математическом факультете МГУ. К этому моменту Северо-Кавказский университет оказался жертвой сомнительной реформы, в ходе которой большинство университетов страны было преобразовано в отраслевые институты, и превратился в Северо-Кавказский государственный индустриально-педагогический институт – СКГПИ (к счастью, спустя год университет был восстановлен). Уже будучи аспирантом МГУ, Н.В. Ефимов обратился в учебную часть СКГПИ с просьбой о выдаче ему диплома об окнчании института. К заявлению прилагалась справка о том, что "Н.В. Ефимовым успешно выполняется учебная программа, дополняющая его математическое образование до уровня, требуемого учебными прграммами désignинститутов"

Научными руководителями Н.В. Ефимова были Я.С. Дубнов и В.Ф. Каган. За время обучения в аспирантуре он подготовил (и успешно защитил) кандидатскую диссертацию по теории сетей. Последующие работы Н.В. Ефимова посвящены "геометрии в целом". На выбор дальнейшей тематики научных исследований существенно повлияла встреча Николая Владимировича с эмигрировавшим в 1934 г. в СССР из фашистской Германии известным геометром С.-Э. Кон-Фоссеном. В период с 1934 г. по 1941 г. Н.В. Ефимов работал в Воронежском университете. В эти годы он опубликовал ряд заметных работ и, в частности, получил свой первый выдающийся результат, открыв существование жесткости "в малом" – он доказал, что на аналитической выпуклой поверхности почти для всякой изолированной точки уплощения ее сколь угодно малая окрестность не допускает изгибаний и даже бесконечно малых изгибаний в аналитическом классе деформаций. В 1940 г. он защитил диссертацию на соискание ученой степени доктора физико-математических наук [1]. Накануне начала Великой Отечественной войны Н.В. Ефимов работал в Воронежском государственном университете, занимая должность проректора.

В начале Великой Отечественной войны Н.В. Ефимов ушел добровольцем в Красную Армию. Затем в ноябре 1941 г. приказом командования он был отозван из армии и назначен заведующим кафедрой математики Воронежского авиационного института, эвакуированного с началом войны в Ташкент.

В 1943 г. Н.В. Ефимов получил неожиданное назначение на должность заведующего кафедрой высшей математики Московского лесотехнического института – высшего учебного заведения с необычной судьбой.

Николай Владимирович был приглашен в МЛТИ на должность заведующего кафедрой высшей математики в 1943 г., когда институт был восстановлен постановлением Совнаркома СССР № 771 от 15 июля 1943 г. До этого деятельность института прерывалась дважды (с 1925 г. по 1930 г. и с 1935 г. по 1943 г.).

Основан МЛТИ был в 1919 году. К этому времени в нашей стране существовали учебные заведения, готовившие лесоводов, но не была налажена подготовка специалистов по механической и химической обработке древесины. К организации института подошли весьма серьезно. К работе в МЛТИ были привлечены выдающиеся ученые. Курс математического анализа читал Н.Н. Лузин, аналитическую геометрию – О.Ю. Шмидт (он в этот период был заместителем наркома финансов), теоретическую механику – С.А. Чаплыгин. Курс физики читал А.Ф. Иоффе, регулярно приезжавший для чтения лекций из Ленинграда в Москву. Учебные корпуса института располагались в центре Москвы (к 1921 г. это были 2 корпуса на Волхонке в непосредственной близости от Храма Христа Спасителя). В состав института входили мастерские, опытные лесничества и лесхозы, хозяйственная деятельность которых была успешной. К середине 1924 г. МЛТИ смог перейти на самоснабжение и не нуждался в помощи государства. Вместе с тем, имели место серьезные трудности с размещением студентов в общежитиях и с жильем для преподавателей. Эти трудности не были преодолены, и в 1925 г. институт был ликвидирован (несмотря на протесты выдающихся ученых и возражения наркома просвещения А.В. Луначарского), а студенты переведены в Ленинградский лесной институт.

В 1930 г. МЛТИ был воссоздан. Ему сначала выделили учебный корпус на Рождественке, который до 1930 г. принадлежал ВХУТЕИН'у – Высшему художественно-техническому институту (ВХУТЕИН в 1930 г. был расформирован). В дальнейшем из здания на Рождественке институт переместился в здание бывшей мебельной фабрики на Большой Ордынке. Обучение в этот период велось модным в те времена методом: месяц – занятия, месяц – работа в лесхозе или на мебельной фабрике. Качество обучения стало, разумеется, намного хуже. По-прежнему институт испытывал трудности с помещениями. Он начал своими силами строительство вблизи Москвы, на станции Строитель Ярославской железной дороги (там, где он располагается ныне). Было построено 10 деревянных жилых домов по 8 квартир каждый. Были построены мастерские. Заложили фундамент учебного корпуса (ныне – это левое крыло главного корпуса). Однако, строительство завершено не было. В 1935 г. институт опять был ликвидирован, и вновь его студентов отправили в Ленинград.

В третий раз МЛТИ возобновил свою деятельность в 1943 г. В трудных условиях военных и первых послевоенных лет строительство было возобновлено на прежнем месте и в кратчайшие сроки завершено. Институт начал успешно функционировать.

В дальнейшем МЛТИ не ограничился подготовкой специалистов по лесозаготовкам и обработке древесины. Высокая квалификация преподавателей и тот уровень, на котором велось преподавание, позволили институту стать также базой по подготовке специалистов для расположенного неподалеку ракетно-космического КБ, возглавляемого С.П. Королевым (ныне НПО “Энергия”).

В становление и развитие МЛТИ вложен труд многих ученых нашей страны. Среди них одним из самых выдающихся был Николай Владимирович Ефимов.

В архиве МГУЛа хранятся научные отчеты [2-5], содержащие изложение следующих работ Николая Владимировича:

- “Исследование деформаций поверхности, содержащей точку с нулевым значением гауссовой кривизны”;
- “Исследование бесконечно малых изгибаний сферы”;
- “Исследование многообразий типа плоскости Лобачевского”;
- “Некоторые свойства чебышевских множеств” (в соавторстве с С.Б. Стечкиным).

Работа “Исследование деформаций поверхности, содержащей точку с нулевым значением гауссовой кривизны” посвящена тематике исследований, начатых Николаем Владимировичем еще до войны. В ней доказано, что при гладкой деформации поверхности с изолированной точкой нулевого значения гауссовой кривизны индекс этой точки остается неизменным (теорема об устойчивости индекса). Установлено, что наличие изолированной точки нулевого значения гауссовой кривизны повышает ее сопротивление изгибанию. Два года спустя, в 1948 г., эти результаты были опубликованы в Математическом сборнике [6]. Часть из них была опубликована ранее, в 1946 году [7].

В работе “Исследование бесконечно малых изгибаний сферы” Николай Владимирович ставит цель: доказать или опровергнуть предположение, что из жесткости любого порядка следует неизгибаемость поверхности в классе аналитических деформаций. Николаю Владимировичу удалось решить эту задачу в важном частном случае. В 1952 г. эти результаты были опубликованы в Успехах математических наук [8].

В работе “Исследование многообразий типа плоскости Лобачевского” доказана теорема о несуществовании в 3-мерном евклидовом пространстве E^3 полной регулярной поверхности с отделенной от нуля гауссовой отрицательной кривизной, однозначно проектируемой на всю плоскость (т.е. определяемой уравнением вида $z = f(x, y)$). Тем самым доказана невозможность реализации в виде поверхности $z = f(x, y)$ не только плоскости Лобачевского (что было доказано в 1901 г. Д. Гильбертом), но и многообразия типа плоскости Лобачевского (т.е. многообразия, кривизна которого заключена между двумя отрицательными числами). В 1953 г. эти результаты были опубликованы в ДАН СССР [9] и в Успехах математических наук [10]. В 1963 г. он доказал общую теорему о невозможности изометрического погружения в E^3 (в виде регулярных поверхностей) двухмерных полных римановых метрик с отделенной от нуля гауссовой отрицательной кривизной. Доклад Николая Владимировича на Международном конгрессе математиков в Москве в 1964 г. с изложением этого результата (который стал известен под названием “Теорема Ефимова”) вызвал интерес у математиков всего мира. За эту работу Николаю Владимировичу в 1966 году была присуждена Ленинская премия.

В отчете кафедры высшей математики МЛТИ за 1957 г. [5] приведена изящная геометрическая теорема о том, что класс чебышевских множеств совпадает с классом ограниченных замкнутых выпуклых множеств в том и только том случае, когда единичная сфера пространства выпукла и не имеет конических точек (результат совместной работы Н.В. Ефимова и С.Б. Стечкина). Эта теорема дает геометрическую характеристику множеств, рассматриваемых обычно в теории наилучших приближений. В печати работа появилась в 1958 году [11].

Надо сказать, что Николай Владимирович был абсолютно лишен чувства научного снобизма, который, к сожалению, часто бывает присущ талантливым ученым-теоретикам, подчеркнуто чурающимся любых задач прикладного характера.

В 1950 г. заведующий кафедрой теории машин и механизмов лесного комплекса, профессор (впоследствии действительный член АН СССР) В.Г. Нестеров рассказал ему о задаче теоретического обоснования работы одного из механизмов, являющегося изобретением коллектива кафедры. Задача представлялась инженерам весьма сложной и состояла в следующем: “В плоскости движется круг K неизменного радиуса так, что центр его находится на постоянной прямой AB. Рассматривается некоторая линия L, которая, сохраняя свою форму, перемещается поступательно в направлении, перпендикулярном к прямой AB, и все время касается круга в некоторой (переменной) точке M. Требуется найти и исследовать линию L при условии, что касательная к ней в точке M неизменно проходит через фиксированную точку C на прямой AB”. Николаю Владимировичу удалось формализовать эту задачу, построив достаточно простую с точки зрения анализа математическую модель. Оказалось, что искомая кривая является графиком функции:

$$f(x)=\frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{x+\sqrt{x^2+4a^2}}}+\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{x+\sqrt{x^2+4a^2}}+\sqrt{2x}}{\sqrt{x+\sqrt{x^2+4a^2}}-\sqrt{2x}},$$

где a – радиус подвижного круга.

Производная $f'(x)$ принимает положительные значения при $x>0$ и, таким образом, функция $y=f(x)$ монотонно возрастает. Кроме того, при $x\to+\infty$ имеет место $f(x)\to+\infty$. Автор делает вывод: “кривая монотонно поднимается слева направо вверх и... при $x\to+\infty$... кривая поднимается неограниченно высоко... В своей начальной точке (т.е. в начале координат) кривая касается оси OY". Стоит заметить, что Николай Владимирович стремится изложить свои выводы предельно ясным и простым языком.

Получив соотношение для второй производной $y = f(x)$:

$$y'' = -\frac{a^2}{x^3 y''(2y'^2 + 1)},$$

автор определяет радиус кривизны кривой как

$$\rho = a\frac{2y'^2 + 1}{y'^2}.$$

Отсюда следует, что радиус кривизны кривой всюду более чем в два раза превышает радиус подвижного круга:

$$\rho > 2a.$$

Анализ соотношения, определяющего ρ, показывает, что радиус кривизны ρ в положительном направлении оси OX монотонно возрастает и стремится к бесконечности.

Последним выводом в работе является заключение, которое стало наиболее важным для конструкторов: "кривая, касаясь круга K, охватывает его сверху и, кроме точки соприкосновения, других точек с этим кругом не имеет".

Работа эта под названием "Исследование одной линии" была включена в научно-технический отчет МЛТИ за 1950 год [12], но никогда не была опубликована в открытой печати. В связи с этим она осталась практически не известной для математиков.

Работу в МЛТИ Николай Владимирович с 1946 г. совмещал с работой в Московском государственном университете, где был профессором кафедры математики физического факультета, а с 1956 года возглавил кафедру математического анализа на механико-математическом факультете. В МГУ им был организован научно-исследовательский семинар по "геометрии в целом", ставший в дальнейшем крупным центром научных исследований, известным не только в нашей стране, но и за рубежом. С 1957 г. основным местом работы Николая Владимировича становится механико-математический факультет МГУ. Однако, с переходом в МГУ его связь с МЛТИ оборвалась не сразу. С 1957 г. по 1960 г. Николай Владимирович продолжал возглавлять кафедру высшей математики МЛТИ, работая там по совместительству.

Руководимая Н.В. Ефимовым кафедра высшей математики МЛТИ представляла собой весьма сильный в профессиональном отношении коллектив преподавателей. Создане такого коллектива – несомненная заслуга Николая Владимировича. На кафедре тогда работали Б.А. Фукс, Р.Я. Берри, Д.В. Клетеник, Р.З. Хасьминский и др. Именно в тот период были написаны учебные пособия самого Н.В. Ефимова "Высшая геометрия" (1945 г.) и "Краткий курс аналитической геометрии" (1949 г.) и широко известный "Сборник задач по аналитической геометрии" Д.В. Клетеника, выдержавший много изданий. В это же время появляются в печати известные монографии Б.А. Фукса, посвященные теории аналитических функций. Заслуги самого Н.В.Ефимова были отмечены в 1950 г. премией имени Н.И. Лобачевского.

Особо следует сказать о присущей Николаю Владимировичу манере чтения лекций. В ней органически сочетались высокий научный уровень и доступность изложения. Его объяснения были доходчивы и детальны. Он стремился к тому, чтобы материал лекции был усвоен всеми студентами, и никогда не ориентировался на избранных.

Все, кто работал с Н.В. Ефимовым, слушал его лекции, сохранили о нем самые теплые воспоминания. Студенты МЛТИ искренне любили Николая Владимировича за доброту, отзывчивость и готовность терпеливо и доходчиво объяснять все детали курса. В вышедшей в 1999 г. книге "Лестех. Начало. 1919-1953 гг. Московский лесотехнический институт в документах и воспоминаниях" практически каждый выпускник (многие из них стали впоследствии известными специалистами и учеными) тепло вспоминает Николая Владимировича. Так, например, профессор Н.И. Лебедев – один из первых послевоенных выпускников МЛТИ – написал: "Николай Владимирович имел непререкаемый авторитет и снискал глубокое уважение студентов. В этом ученом было что-то такое, что не позволяло студентам приходить ни на экзамен, ни на собеседование с ним не подготовленным. Сам Николай Владимирович в общении со студентами был всегда исключительно вежлив, корректен и уважителен, в том числе и при объяснении сложных математических понятий". Мы видим, что еще тогда, будучи совсем молодым человеком, Н.И. Лебедев смог разглядеть и оценить такие черты характера Николая Владимировича, как доброжелательность к людям, глубокая порядочность и исключительно ответственное отношение к любому делу. Своим личным примером Николай Владимирович воздействовал на окружающих его людей (а это дано не каждому), и сила этого воздействия была велика.

Наука и преподавание всегда были главным делом жизни Николая Владимировича. Он никогда специально не стремился ни к административным постам, ни к общественной деятельности. Однако, ему постоянно приходилось выполнять то те, то другие административные обязанности и заниматься той или иной общественной деятельностью. Ему приходилось быть и проректором Воронежского университета (перед войной), и депутатом Мытищинского городского Совета (коллеги по кафедре математического анализа в МГУ узнали об этом случайно, по невзначай вырвавшейся реплике), и деканом механико-математического факультета МГУ. Причина в том, что люди его уважали, доверяли ему, а он, будучи человеком в высшей степени ответственным и добросовестным, не мог обмануть надежды людей. Он с честью оправдывал оказываемое ему доверие, зачастую не жалея своих сил и здоровья.

Каждый, кто имел счастье учиться у Николая Владимировича, работать с ним, сохранил память о нем как о человеке большой души, выдающемся ученом и замечательном педагоге.

Доброй традицией стало проведение научных конференций памяти Н.В.Ефимова. Их регулярно проводят МГУ, Ростовский университет и Ростовское математическое общество. В сентябре 2000 года состоялась конференция, посвященная его 90-летию.

В заключение, авторы хотели бы заметить, что каждого из них судьба сводила с Николаем Владимировичем.

Первый из авторов был приглашен преподавателем на кафедру математического анализа механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова в период, когда он заканчивал обучение в аспирантуре, самим Н.В. Ефимовым. На этой кафедре он работает и по сей день.

Второму автору посчастливилось слушать его лекционный курс “Алгебра и геометрия” в период студенчества и даже сдавать ему экзамен по этому курсу. Сейчас он является заведующим кафедрой, которую некогда возглявлял Николай Владимирович.

Третий автор поступил на механико-математический факультет МГУ в то время, когда Н.В. Ефимов был там заведующим кафедрой математического анализа.

Наконец, все трое, как члены одной семьи Рыбниковых, были его соседями по знаменитому Дому преподавателей МГУ на Ломоносовском проспекте Москвы.

Библиографический список

1. Математика в СССР за сорок лет. 1917-1957 [Текст]. – Библиография. – М.: ГИФМЛ, 1959. – Т. 2. – С. 254-255.
2. Научно-технический отчет. МЛТИ. 1946 г. [Текст]. – Московский областной государственный архив (МОГА). – Ф. 7188. – Опись 1-т. – Дело 49.
3. Научно-технический отчет. МЛТИ. 1952 г. [Текст]. – МОГА. – Ф. 7188. – Опись 1-т. – Дело 291.

4. Отчет кафедры математики МЛТИ за 1953-1955 гг. [Текст]. – МОГА. – Ф. 7188. – Опись 1-т. – Дело 296.
5. Отчет кафедры математики МЛТИ за 1957 г. [Текст]. – МОГА. – Ф. 7188. – Опись 1-т. – Дело 398.
6. *Ефимов, Н.В.* Исследование деформаций поверхности, содержащей точку с нулевым значением гауссовой кривизны [Текст] / Н.В. Ефимов // Матем. сборник. – 1948. – 23(65). – С. 89-125.
7. *Ефимов, Н.В.* Исследование изгибания поверхности с точкой уплощения [Текст] / Н.В. Ефимов // Матем. сборник. – 1946. – 19(61). – С. 461-488.
8. *Ефимов, Н.В.* Некоторые предложения о жесткости и неизгибаемости [Текст] / Н.В. Ефимов // УМН. – 1952. – 7:5(15). – С. 215-224.
9. *Ефимов, Н.В.* Исследование однозначной проекции поверхности отрицательной кривизны [Текст] / Н.В. Ефимов // ДАН СССР. – 1953. – 93. – С. 609-611.
10. *Ефимов, Н.В.* Некоторые теоремы о поверхностях отрицательной кривизны [Текст] / Н.В. Ефимов // УМН. – 1953. – 10:1(63). – С. 101-105.
11. *Ефимов, Н.В.* Некоторые свойства чебышевских множеств [Текст] / Н.В. Ефимов, С.Б. Стечкин // ДАН СССР. – 1958. – 118:1. – С. 17-19.
12. Научно-технический отчет. МЛТИ. 1950 г. [Текст]. – МОГА. – Ф. 7188. – Опись 1-т. – Дело 212.
13. *Рыбников, А.К.* Научная и педагогическая деятельность Николая Владимировича Ефимова в Московском лесотехническом институте (1943-1957) [Текст] / А.К. Рыбников, К.К. Рыбников // Лесной вестник. – 2000 – № 4(13). – С. 180-184.
14. *Рыбников, К.К.* Математики Московского государственного университета леса [Текст] / К.К. Рыбников. – М.: ГОУ ВПО МГУЛ, 2009. – 132 с.
15. *Рыбников, А.К.* Николай Владимирович Ефимов. Работа в Московском лесотехническом институте (1943-1957) [Текст] / А.К. Рыбников, К.К. Рыбников // Международная школа-семинар по геометрии и анализу памяти Н.В. Ефимова. Тезисы докладов. – Ростов-на-Дону, 2000. – С. 7-8.

Из истории становления дифференциальной геометрии как учебного предмета: ученики и последователи Леонарда Эйлера

И.В. Игнатушина

Дифференциальная геометрия как наука и учебный предмет возникла в России в XVIII в. в трудах Леонарда Эйлера (1707-1783) и представителей его школы.

Среди учеников Эйлера первое место по количеству результатов и их новизне занимает Николай Иванович Фусс (1755-1826). Работая под руководством Эйлера, Фусс овладел методами анализа бесконечно малых и умело использовал их в исследованиях по геометрии [1-3]. В своих работах Фусс решил ряд задач на установление свойств кривых, параметры которых связаны определенными соотношениями. Ранними его работами такого рода были “Аналитико-геометрическое исследование о кривой линии, обладающей особым свойством” (1784) [4] и “Аналитико-геометрическое исследование о различных видах кривых линий, обладающих особым свойством” (1784) [5].

Часть работ Фусса более позднего периода была посвящена изучению свойств кривых, заданных определенными соотношениями между радиусом кривизны, радиус-вектором и длиной дуги, отсчитываемой в определенном направлении от некоторой начальной точки. Эти работы близки к так называемой естественной или натуральной геометрии, развитой позднее в трудах Эрнесто Чезаро (1859-1906).

Помимо исследования кривых на плоскости, Фусс занимался и некоторыми вопросами, относящимися к дифференциальной геометрии в пространстве. Например, в мемуаре “Решение некоторых вопросов, относящихся до разверзания кривых линий двоякой кривизны” (1815) [6] он рассмотрел задачу на отыскание эволюты и эвольвенты пространственной кривой.

Фусс подготовил ряд учебников по математике, в которых отразил результаты научных изысканий, относящихся к дифференциальной геометрии. Например, в “Начальных основаниях дифференциального и интегрального исчисления” (1804) он изложил исчисление бесконечно малых для функций одной, двух и трех независимых переменных и показал его приложения к решению задач, в том числе и геометрических.

В дальнейшем разрозненно изданные учебники Фусс объединил в общий курс, составивший три книги “Начальных оснований чистой математики” (1810-1812) [7]. С 1814 г. этот курс стал основным для гимназий вплоть до реформы отечественного образования 1828 года. Он был достаточно компактным, доступным в объяснениях и доказательствах для учеников гимназий, учитывал их возрастные особенности. Его можно считать первым стабильным учебником математики. В подтверждение этого факта приведем специальное распоряжение министра народного просвещения, которое предписывает всем гимназиям “дабы отныне учителя оных руководствовались сим сочинением, и круг математических наук ограничивался бы в гимназиях теми частями математики, кои в сем сочинении помещены” [8]. Отметим также, что в то время специальных программ по математике еще не существовало. Содержание математического образования определяли в основном учебники. Поэтому по указанному курсу Фусса можно судить о характере и объеме гимназического математического образования первой четверти XIX в.

Другим, не менее талантливым учеником Л. Эйлера, был Федор Иванович Шуберт (1758-1825). Диапазон его математических интересов был достаточно широк, но, судя по публикациям, предпочтение он отдавал геометрии. В работе “Рассуждения о точках возврата” (1822) [9] Шуберт впервые вывел условия для определения точек возврата кривой $f(x,y)=0$. Координаты точки возврата должны удовлетворять следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} f(x,y)=0, \\ \frac{\partial f}{\partial x}=0, \\ \frac{\partial f}{\partial y}=0, \\ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}. \end{cases}$$

В ходе поисков этого критерия Шуберт, очевидно, воспользовался общим методом определения двойных особых точек по Эйлеру, согласно которому для этой цели требуется решить систему уравнений:

$$\begin{cases} f(x,y)=0, \\ \frac{\partial f}{\partial x}=0, \\ \frac{\partial f}{\partial y}=0. \end{cases}$$

Позднее аналогичный способ нашел применение при исследовании тройных, четырехкратных и т.д. особых точек [10, 11].

В своей работе Шуберт рассмотрел все возможные виды двойных особых точек, кроме случая самоприкосновения (см. подробнее [12]). Указанные результаты в дальнейшем вошли во все учебники по дифференциальной геометрии.

Последним крупным представителем петербургской школы XVIII в. был Семен Емельянович Гурьев (1764-1813). Его научные изыскания были тесным образом связаны с направлением работ Эйлера [1, 13, 14]. В “Мемуаре о решении основных задач, предложенных для кривых, ординаты которых исходят из неподвижной точки” (1794) [15] Гурьев предложил единый аналитический подход к выводу всех основных дифференциально-геометрических формул плоских кривых, заданных в полярных координатах. Отметим, что до этого в математике каждая дифференциально-геометрическая формула такого рода выводилась по отдельности из рассмотрения соответствующих бесконечно малых фигур. Преимущество подхода Гурьева заключается в том, что он использовал полярный угол, а не дугу круга некоторого радиуса, как это делали до него.

Работая в военно-учебных заведениях, Гурьев использовал опыт и идеи французских математиков XVIII – начала XIX в., прежде всего

Гаспара Монжа (1746-1818). Для русской школы Гурьев написал и перевел ряд учебников, оказавших значительное влияние на всю математическую литературу России.

Особого внимания заслуживают “Основания трансцендентной геометрии кривых поверхностей” (1806) [16] Гурьева, поскольку эту работу можно считать первым руководством по дифференциальной геометрии в пространстве, вышедшим на русском языке. К сожалению, в ней не были учтены результаты Монжа, тогда уже широко известные. Вся работа состоит из шести глав.

В первой главе объясняется построение касательной плоскости и нормали к поверхности, заданной уравнением $F(x, y, z) = 0$. Сначала Гурьев рассматривает дифференциальное уравнение этой поверхности: $dz = mdy + ndx$, где $m = \frac{\partial z}{\partial y}$, $n = \frac{\partial z}{\partial x}$, причем $\frac{\partial m}{\partial x} = \frac{\partial n}{\partial y}$. Затем через точку М$(x, y, z)$ поверхности (рис. 1) он проводит сечения BM и CM плоскостями QNM и PNM, которые параллельны соответственно плоскостям XAZ и YAZ.

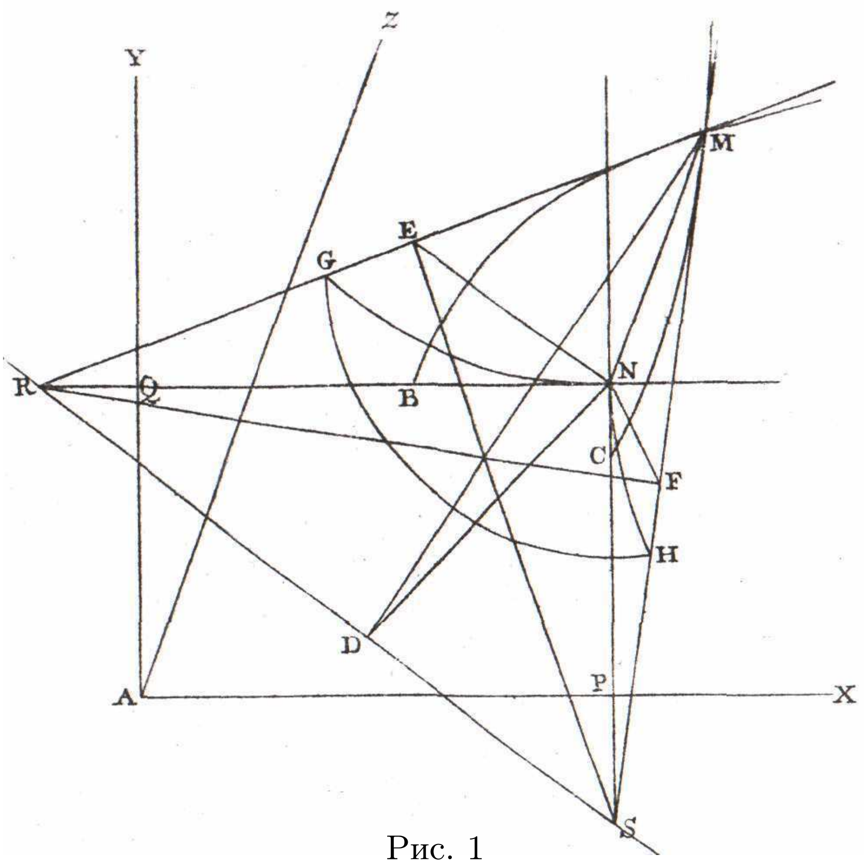


Рис. 1

К получившимся кривым BM и CM в плоскостях QNM и PNM строятся касательные MR и MS. Соответствующие им подкасательные NR и NS находятся из следующих равенств: $NR = \frac{z\partial x}{\partial z} = \frac{z}{n}$ и $NS = \frac{z\partial y}{\partial z} = \frac{z}{m}$.

Плоскость MRS, проведенная через касательные MR и MS, и есть искомая касательная плоскость, проведенная к поверхности в точке $\mathrm{M}\,(x, y, z)$.

Далее Гурьев показывает, как можно определить положение касательной плоскости MRS через углы ее наклона к координатным плоскостям. Затем объясняется построение нормали (рис. 2) к поверхности в точке $\mathrm{M}\,(x, y, z)$.

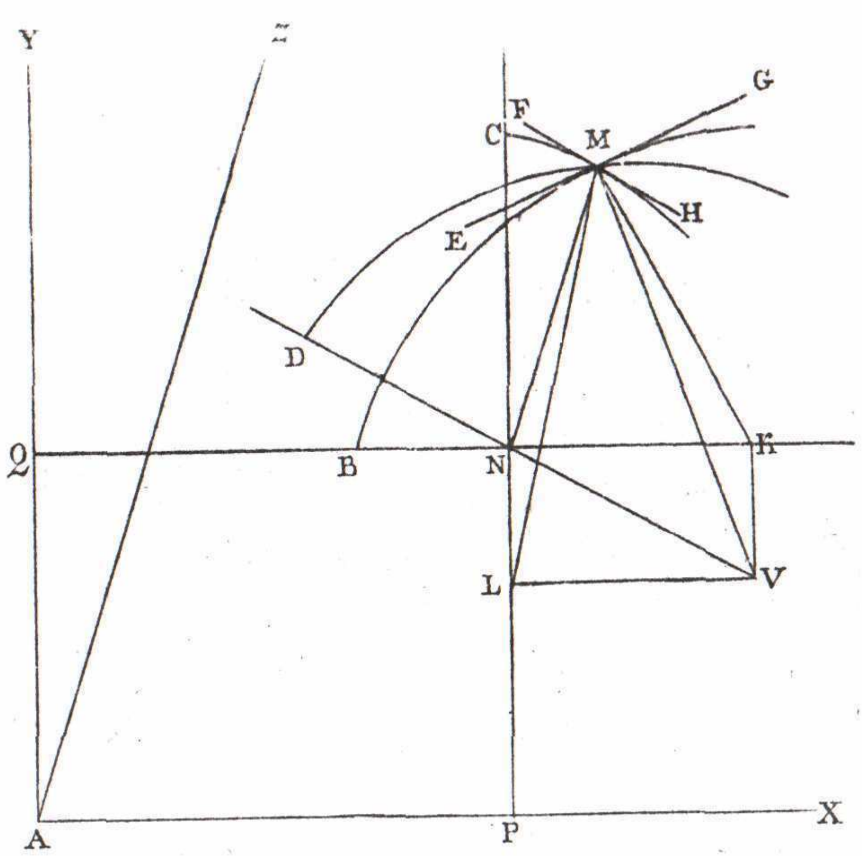


Рис. 2

Сначала в плоскостях QNM и PNM к кривым BM и CM проводятся нормали MK и ML. В плоскости XAY на соответствующих субнормалях NK и NL строят прямоугольник $NKVL$, тогда прямая MV является искомой нормалью к поверхности.

Поскольку уравнения сечений BM и CM суть $dz = ndx$, $dz = mdy$, то соответствующие им субнормали будут следующие: $NK = \frac{z\partial z}{\partial x} = nz$, $NL = \frac{z\partial z}{\partial y} = mz$. Отсюда $NV = \sqrt{m^2z^2 + n^2z^2} = z\sqrt{m^2 + n^2}$, тогда нормаль $MV = z\sqrt{1 + m^2 + n^2}$.

Сечение DM кривой поверхности плоскостью NMV, проходящей через нормаль MV и ординату NM, Гурьев, вслед за Эйлером, называет главным.

В конце первой главы приведены примеры построения касательной плоскости и нормали к поверхностям прямого конуса, прямого цилиндра, шара.

Вторую главу Гурьев посвятил описанию алгоритма нахождения экстремумов функций одной и нескольких переменных. Эта глава, как отмечал Гурьев, взята им из “Дифференциального и интегрального исчисления” (1777) [17] Жака Антуана Кузена (1739-1800).

Третья глава под названием “О кривизне кривых поверхностей” есть по сути перевод мемуара Эйлера “Исследования о кривизне поверхностей” (1767) [18].

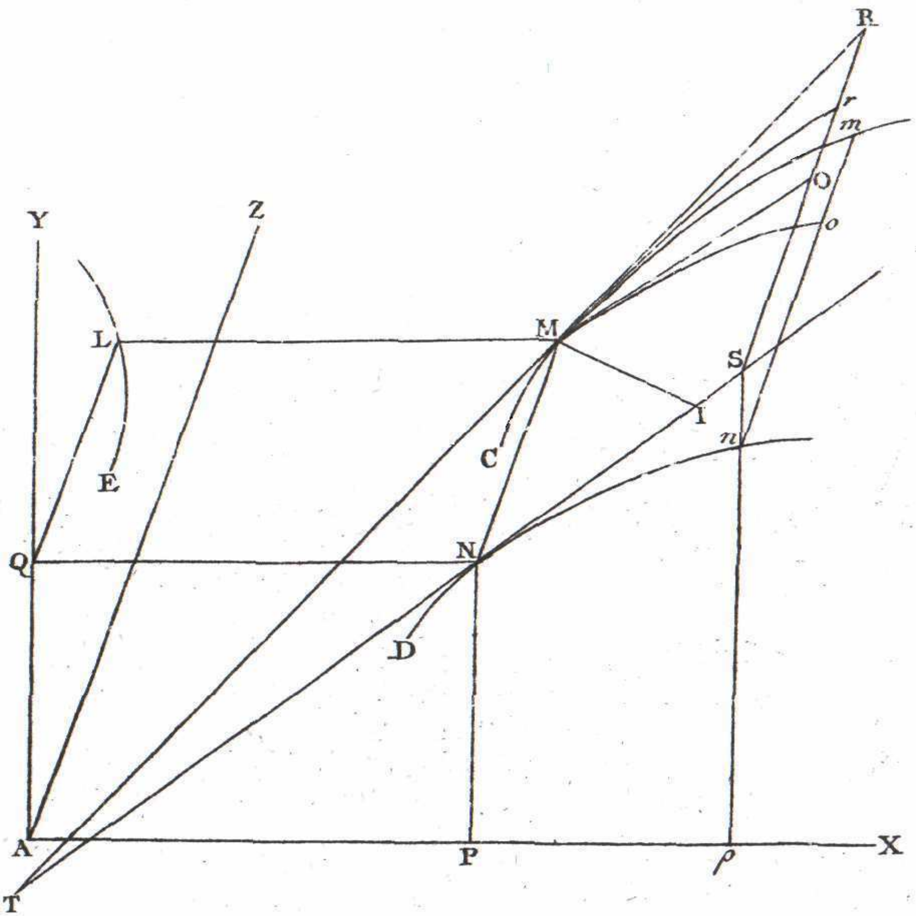


Рис. 3

Четвертая и пятая главы посвящены пространственным кривым или “двояко-кривым линиям”, как их в то время называли. Такая кривая определяется как пересечение двух поверхностей. Тогда касательная к такой кривой в некоторой ее точке есть прямая, полученная в результате пересечения двух касательных плоскостей, проведенных в этой точке к соответствующим поверхностям. В этих главах Гурьев рассматривает пространственную кривую CM, которая есть результат пересечения некоторой поверхности с цилиндрической поверхностью $DNMC$ (рис. 3), образующая которой параллельна оси AZ, а направляющая DN является проекцией кривой CM на плоскость XAY. Тогда касательная MT, проведенная к кривой CM в точке $M\,(x, y, z)$, удовлетворяет следующему равенству: $MT = \frac{z}{dz}\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$.

При таком подходе кривую CM можно трактовать как результат сечения некоторой поверхности $dz = mdy + ndx$ плоскостью TMV (рис. 4), проходящей через касательную MT к этой кривой и нормаль к MV данной поверхности.

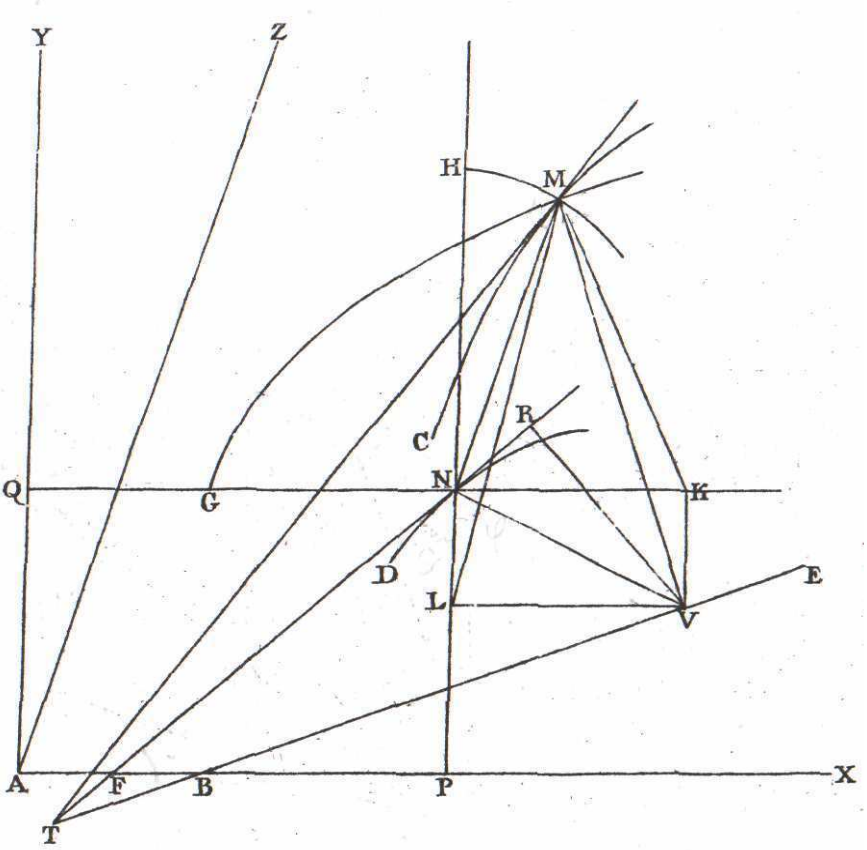


Рис. 4

Тогда кривизна кривой CM в точке $M\,(x, y, z)$ есть кривизна поверхности $dz = mdy + ndx$ в направлении касательной MT. Следовательно, радиус кривизны кривой CM в точке $M\,(x, y, z)$ определяется из следующего равенства:

$$R = \frac{-1}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}},$$

где $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$.

В последней главе Гурьев показал вычисление площадей поверхностей и объемов тел при помощи введенных Эйлером двойных интегралов.

Еще одна заметка Гурьева “О кривизне кривых линий”(1812) [19] была посвящена выводу формулы радиуса кривизны плоской кривой.

Работы Гурьева нашли отклик у современников. Его последователями в деле просвещения стали Василий Иванович Висковатов (1780-1812) и Петр Александрович Рахманов (ум. 1813 г.).

В.И. Висковатов, ученик Гурьева, преподавал математику и механику в Артиллерийском кадетском корпусе, а затем в Институте путей сообщения. В 1808 г. Висковатов представил к печати работу “Краткое изложение способа знаменитого Лагранжа изъяснять исчисление дифференциальное и приложение оного к геометрии кривых линий” (1810) [20], которая являлась довольно подробным конспектом двух первых отделов “Théorie des functions analytiques”(1797) [21] и “Leçons sur le calcul des fonctions”(1806) [22] Жозефа Луи Лагранжа (1736-1813). Особый интерес представляет вторая часть этой работы, носящая название “О приложении исчисления дифференциального к геометрии кривых линий”, которая является одним из первых изложений вопросов дифференциальной геометрии плоских кривых, вышедших на русском языке. Эта часть работы разбита на восемь параграфов.

В первом параграфе, названном “О направлении кривых линий”, вводятся понятия касательной к кривой, выпуклости и вогнутости кривой, точки перегиба, многократной точки, точек возврата первого и второго рода.

Второй параграф посвящен выводу уравнений касательной и нормали, проведенных в некоторой точке $M\,(x, y)$ кривой. Рассматриваются случаи, когда эта кривая задана в прямоугольной системе координат, в косоугольных координатах и в полярных координатах.

В третьем параграфе описан алгоритм нахождения экстремумов функций одной и двух переменных.

Четвертый параграф рассказывает о способе нахождения точек перегиба плоской кривой.

Пятый параграф посвящен многократным точкам кривой, т.е. точкам через которые проходят несколько ветвей одной и той же кривой, и представлен алгоритм определения порядка кратности этих точек.

В шестом параграфе рассмотрен частный случай двукратных точек, а именно точек возврата кривой линии, которые Висковатов так же, как и Эйлер, разделил на два рода: “когда обе ветви обращены одна к другой одинакового рода сторонами (рис. 5), то оная называется точкою возврата первого рода; а когда ветви сии обращены одна к другой разного рода сторонами (рис. 6), то точка возврата называется второго рода” [20, с. 281].

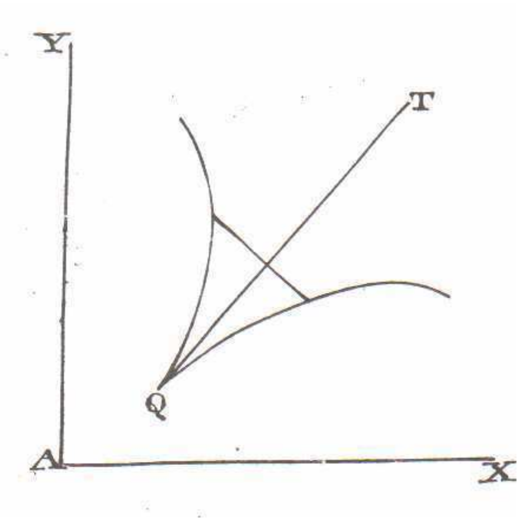


Рис. 5

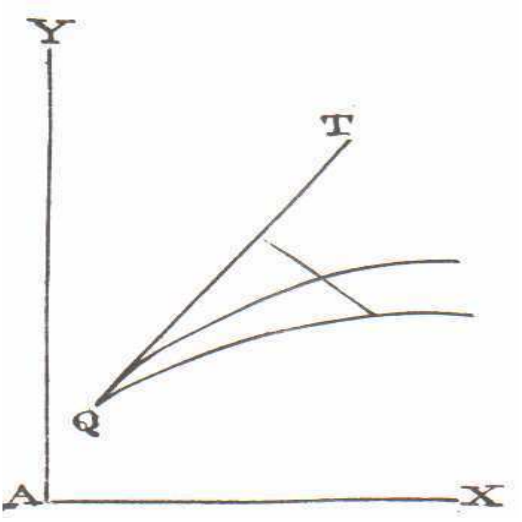


Рис. 6

Седьмой параграф несколько выходит за рамки дифференциальной геометрии на плоскости, поскольку в нем выводятся формулы для дифференциалов не только дуг плоских кривых, но и дифференциалов площади поверхности тел вращения.

Последний, восьмой параграф посвящен вопросу о кривизне плоской кривой. Если кривая задана в прямоугольной системе координат, радиус ее кривизны вычисляется по следующей формуле

$$r = \pm \frac{\left(\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}\right)^3}{d\left(\frac{dy}{dx}\right) : dx} = \pm \frac{ds^3}{dx^2 \cdot d\left(\frac{dy}{dx}\right)},$$

где знак “–” берется в случае вогнутой кривой, а знак “+” в случае выпуклой кривой.

Если кривая задана в косоугольных координатах, где угол между осями равен k, то радиус кривизны определяется так:

$$r = \pm \frac{ds^3}{dx^2 \cdot d\left(\frac{dy}{dx}\right) \sin k \left(1 + \frac{dy}{dx} \cos k\right)}.$$

В случае, когда кривая задана в полярной системе координат $(z; \varphi)$, формула для радиуса кривизны имеет вид $r = \mp \frac{zdz}{dh}$, где $h = \frac{z^2 d\varphi}{ds}$.

Далее в этом параграфе рассказывается об эволютах, которые Висковатов называл “развертающимися”, а также эвольвентах, названные им “линиями развертания”. Устанавливаются формулы, связывающие эволюты и эвольвенты между собой в трех случаях, когда они заданы в прямоугольных, косоугольных и полярных координатах.

В заключение вводится понятие соприкасающихся кривых, т.е. таких двух кривых, у которых производные первого и более высоких порядков в фиксированной точке равны между собой.

Рассмотренная работа Висковатова удачно дополняет "Основания трансцендентной геометрии кривых поверхностей" Гурьева. По этим работам мы получаем представление о содержании лекций по дифференциальной геометрии, читавшихся в начале XIX в. на русском языке.

П.А. Рахманов был профессиональным военным, но его главные интересы принадлежали математике [23, 24]. В 1803 г. он посетил Париж, где познакомился с новейшими достижениями французской математической школы и стал ее горячим поклонником. Вернувшись в Россию, Рахманов издал "Опыт о поверхностях вращения" (1806) [25] и "Опыт о цилиндрических и конических поверхностях" (1806) [26], где отразил некоторые идеи Монжа по дифференциальной геометрии.

Эти же результаты он использовал в своей педагогической деятельности. У себя на квартире в Петербурге П.А. Рахманов читал бесплатные лекции по дифференциальному и интегральному исчислению для желающих студентов. Один из его слушателей Николай Тенигин издал эти лекции по своим записям, озаглавив их "Лекции г. Рахманова о дифференциальном исчислении" (1810) [27]. Четвертая глава этого курса была посвящена приложениям дифференциального исчисления к геометрии. В ее первом отделении выводятся уравнения касательной и нормали, проведенных к плоской кривой, заданной в прямоугольной декартовой системе координат. Во втором отделении устанавливается уравнение радиуса кривизны плоской кривой и говорится об эволюте и эвольвенте кривой. Третье отделение посвящено вопросу о порядке соприкосновения кривых. В четвертом отделении показан алгоритм определения точек перегиба плоской кривой. И в последнем, пятом отделении этой главы речь идет о кратных точках плоской кривой. Все теоретические сведения иллюстрируются специально подобранными примерами.

Библиографический список

1. *Юшкевич, А.П.* Эйлер и русская математика в XVIII в. (Из истории первой петербургской математической школы) [Текст] / А.П. Юшкевич // Труды института истории естествознания. – М.: Изд-во АНСССР, 1949. – Т. 3. – С. 45-116.
2. *Лысенко, В.И.* Николай Иванович Фусс (1755-1826) [Текст] / В.И. Лысенко. – М.: Наука, 1975.
3. *Лысенко, В.И.* О неопубликованных рукописях по геометрии академиков А.И. Лекселя и Н.И. Фусса [Текст] / В.И. Лысенко // Вопросы истории естествознания и техники. – М.: Изд-во АН СССР, 1960. – Вып. 9. – С. 116-120.

4. *Fuss, N.* Exercitatio analytico-geometricae circa lineam curvam singulari proprietate praeditam // Acta Academiae Scientiarum Petrotolitanae. St.-Petersbourg, 1780. T. IV. P. 49-69.
5. *Fuss, N.* Disquisitio analytico-geometrica de variis speciebus linearum curvarum singulari proprietate praeditarum // Acta Academiae Scientiarum Petrotolitanae. St.-Petersbourg, 1781. T. V. P. 127-146.
6. *Фусс, Н.* Решение некоторых вопросов, относящихся до разверзания кривых линий двоякой кривизны [Текст] / Н. Фусс // Умозрительные исследования. – СПб., 1815. – Т. IV. – С. 82-96.
7. *Фусс, Н.* Начальные основания чистой математики, сочиненные Николаем Фуссом. Ч. 1-3 [Текст] / Н. Фусс. – СПб, 1810-1812.
8. Сборник распоряжений по министерству народного просвещения (1802-1834) [Текст]. – СПб, 1886. – Т. 1. – С.225.
9. *Schubert, F.-T.* Réflexion sur les points de rebroussement // Mémories de l'Acad. Des sciences de St.-Petersbourg, 1822. T. VIII. S. 176-196.
10. *Бюшгенс, С.С.* Дифференциальная геометрия [Текст] / С.С. Бюшгенс. – М.: Изд-во ЛКИ, 2008. – С.35-45.
11. *Ла Валле-Пуссен, Ш.Ж.* Курс анализа бесконечно малых [Текст] / Ш.Ж. Ла Валле-Пуссен. – М.-Л., 1933. – Т. 2. – С. 389-396.
12. *Лысенко, В.И.* Из истории вопроса о точках возврата плоской кривой [Текст] / В.И. Лысенко // Историко-математические исследования. – М., 1961. – Вып. XIV. – С. 517-526.
13. *Юшкевич, А.П.* Академик С.Е. Гурьев и его роль в развитии русской науки [Текст] / А.П. Юшкевич // Труды Института истории естествознания. – М., 1947. – Т. 1. – С. 219-268.
14. *Юшкевич, А.П.* Академик С. Е.Гурьев и его роль в развитии русской науки [Текст] / А.П. Юшкевич // Математика в ее истории. Отв. ред. С.С. Демидов. – М., 1996. – С. 265-332.
15. *Guriev, S.E.* Mémorie sur la resolution des principaux problemes qu'on peut proposer dans les courbes, doun les ordonnces partent d'un point fixe // Nova Acta Academiae Petropolitanae, 1801. – T. XII. – S. 176-191.
16. *Гурьев, С.Е.* Основания трансцендентной геометрии кривых поверхностей [Текст] / С.Е. Гурьев. – СПб, 1806.
17. *Cousin, J. A.* Leçons de calcul différential et de calcul integral. Paris, 1777.
18. *Euler, L.* Recherches sur la courbure des surfaces [1767] // Leonhardi Euleri Opera omnia. Ser. I. Opera mathematica / Ed. A. Speiser. Turici (Zurich), 1955. Vol. 28. S. 1-22.
19. *Гурьев, С.Е.* Прибавление к сочинению о правилах движения переменного. О кривизне кривых линий [Текст] / С.Е. Гурьев // Умозрительные исследования. – СПб., 1812. – Т. III. С. 24-33.

20. *Висковатов, В.И.* Краткое изложение способа знаменитого Лагранжа изъяснять исчисление дифференциальное и приложение оного к геометрии кривых линий [Текст] / В.И. Висковатов // Умозрительные исследования. – СПб., 1810. – Т. II. – С.183-314.
21. *Lagrange, J.L.* Théorie des functions analytiques . Paris, 1797.
22. *Lagrange, J.L.* Leçons sur le calcul des fonctions . Paris, 1806.
23. *Гузевич, Д.Ю.* Первый русский ученик Ecole Polytechique (Петр Рахманов) [Текст] / Д.Ю. Гузевич, И.Д. Гузевич // Историко-математические исследования. – 2003. –№ 43. – С. 186-208.
24. *Бобынин, В.В.* Рахманов (Рохманов) Петр Александрович [Текст] / В.В. Бобынин// Русский биографический словарь. – СПб. Притвиц-Рейс, 1910. – Т. 15. – С. 512-517.
25. *Рахманов, П.* Опыт о поверхностях вращения [Текст] / П. Рахманов. – СПб. Типография при Императорской Академии Наук, 1806.
26. *Рахманов, П.* Опыт о цилиндрических и конических поверхностях [Текст] / П. Рахманов. – СПб. При Императорской Академии Наук, 1806.
27. *Рахманов, П.* Лекции г. Рахманова о дифференциальном исчислении, изданные Николаем Тенигиным [Текст] / П. Рахманов. СПб., 1810.

Опыт Н.Д. Брашмана в совершенствовании высшего математического образования [1]

Л.Р. Шакирова

По свидетельству современников, наука в Московском университете в первой трети XIX в. развивалась в исключительно неблагоприятных условиях: “тяжелое время застоя, неприязнь правительства к рассадникам высшего образования...– все эти условия, какими отличалась описываемая эпоха, не благоприятствовали у нас росту и процветанию науки и порождали много темных и печальных сторон...” [1]. Положение в Московском университете изменилось в 1830-е гг., когда математика перестала быть просто вспомогательной дисциплиной, необходимой для изучения других наук. Этот период связан с началом научно-педагогической деятельности в университете Николая Дмитриевича Брашмана.

При знакомстве с деятельностью Н.Д. Брашмана обращает на себя внимание его высокое методическое мастерство в преподавании математических дисциплин. Наиболее полная оценка его преподавания была

---

[1] Исследование выполнено при финансовой поддержке РГНФ, проект № 10-06-29606а/В.

дана автором статьи, опубликованной в сборнике “Математическая наука в Московском университете”. Не упоминая о том, что основная педагогическая подготовка Н.Д. Брашмана в течение 9 лет проходила под руководством профессора Н.И. Лобачевского в Казанском университете, он пишет: “Дух математического творчества вдохнул в математическое отделение университета выходец из Моравии Н.Д. Брашман” [4, с. 15].

Выпускник Венского университета, Н.Д. Брашман в 1825 г. был назначен адъюнктом чистой математики в Казанский университет по рекомендации бывшего профессора астрономии Казанского, а позднее – Венского университета И.А. Литтрова. В Казани Н.Д. Брашман становится одним из первых учеников Н.И. Лобачевского по подготовке к профессорскому званию. Областью научных исследований Н.Д. Брашмана были проблемы математического анализа и алгебраических функций.

Преподавал он студентам аналитическую и начертательную геометрию, теорию уравнений высших степеней и дифференциальное исчисление. Продолжая традицию своего учителя преподавать, основываясь на принципе научности, Н.Д. Брашман в своей речи “О влиянии математических наук на развитие умственных способностей” отмечал необходимость учитывать, что “постепенное занятие в открытии уже известных истин приучает к открытию неизвестных”, то есть с самого начала изучения предмета следует приобщать студентов к методам научного исследования. “Наука, – говорил он, усовершенствуется через улучшение способов ее изложения и через распространение ее пределов. Первое можно требовать от профессора, и заслуги каждого видны будут из напечатанных его сочинений. Что же касается до распространения предметов наук, то оно собственно составляет прямую обязанность академика, однако же не выходит из круга деятельности профессора” [2, с. 28-29].

Н.Д. Брашман предъявляет к профессору особые требования, которые предполагают не только подлинное знакомство с наукой своего времени, но и некоторые творческие возможности. “Должно требовать от каждого преподавателя в университете, – пишет он, – издания по крайней мере одного из своих курсов не позже десяти лет со времени вступления его в должность преподавателя. Исключения могут быть только для тех профессоров прикладных наук, которые каким-нибудь отличным трудом, опытами или наблюдениями способствовали к усовершенствованию наук и приобрели известность в ученом мире” [3]. Избранный в сентябре 1832 г. экстраординарным профессором Казанского университета, Н.Д. Брашман в августе 1834 г. был переведен в Московский университет, где впоследствии становится основоположником механической научной школы.

Известно, что Н.Д. Брашман превосходно знал математику своего времени и был замечательным педагогом высшей школы и организатором. По свидетельству современников, “Н.Д. Брашман, несомненно, был выдающимся педагогом. Его лекции были содержательны, интересны и постоянно обновлялись. Он умел находить среди своих слушателей одаренных людей и вдохновлять их на научный подвиг. Многим он подсказывал те области исследований, которым они посвящали значительную часть своей научной жизни” [4, с. 15]. Необходимым условием сознательного обучения студентов он считал ясное понимание целей и задач предстоящей работы, раскрытие их важности и значения. В упомянутой ранее Речи он уделил большое внимание методике обучения математике, считал, что с самого начала изучения математики необходимо дать “верный взгляд” на предмет и точное направление в ее изучении.

В 1864 г. несколько профессоров Московского университета во главе с Н.Д. Брашманом и несколько интересовавшихся математикой лиц, не состоявших профессорами университета, объединились в математический кружок, имевший своей задачей чтение рефератов о наиболее интересных новых произведениях математической литературы и о собственных работах участников кружка. Так было положено начало Московскому математическому обществу.

Н.Д. Брашман, как и его учитель Н.И. Лобачевский, постоянно стремился привить слушателям любовь к практике, научить их применять теорию к решению практических вопросов: при чтении курса теоретической механики он специально подбирал соответствующие задачи для упражнений; гидродинамику читал “с приложениями к теории водяных колес”.

Из воспоминаний современников известно, что в частных беседах со своими слушателями Н.Д. Брашман нередко призывал их к работе в области практической механики и советовал им при этом иметь в виду не только преподавание, но и ту пользу, какую они могли бы принести отечественной промышленности. Сохранилось следующее интересное свидетельство, принадлежащее А.С. Ершову: “В этот день я окончил последний из своих экзаменов для получения степени магистра – экзамен из прикладной математики. . . После экзамена я говорил с Брашманом о моем будущем. Он с участием вызывал меня на новую работу по практической механике, советовал иметь в виду не одну учительскую должность, но и пользу, которую я могу принести Москве и самому себе приложением своих знаний” [5, с. 4]. Это свидетельство важно в двух отношениях: оно указывает на присущую Н.Д. Брашману черту – принимать отеческое участие в судьбе своих учеников и оно подтверждает мысль о том, что он принадлежал к числу немногих профессоров

Московского университета, которые стремились использовать науку для развития экономики. Последнее обстоятельство особенно важно. Оно, собственно говоря, и определило то счастливое направление в развитии механики, которое оформилось окончательно к началу 80-х гг. XIX в. и благодаря которому университет подготовил таких корифеев механической науки, как Н.Е. Жуковский и С.А. Чаплыгин.

Ученики Н.Д. Брашмана успешно овладевали практической механикой. В 1844 г. А.С. Ершов защитил в Московском университете магистерскую диссертацию "О воде как о двигателе". Другой его ученик И.И. Рахманинов стал адъюнктом кафедры прикладной математики Киевского университета, а затем профессором. В 1861 г. он защитил докторскую диссертацию "Основания теории относительного движения".

Н.Д. Брашман, как и его учитель Н.И. Лобачевский, отличался особым умением настойчиво искать между своими слушателями способного молодого человека, а затем приглашать его к себе и заниматься с ним с необыкновенным упорством и терпением. Особенно ценил он в слушателях способности и любовь к математике. По словам современников, Н.Д. Брашман, "отыскав несколько таких слушателей, занимался с ними с такой неутомимостью, что они уходили от него обессиленными и выдерживали весьма немногие" [6]. Сохранились следующие прекрасные слова о Н.Д. Брашмане, обращенные к нему одним из его учеников, Н.А. Любимовым: "В древности философ днем на улицах и торжищах с фонарем искал человека; не столь эффектно, но не менее усердно вглядывались Вы в своих слушателей и искали между ними математика. Как скоро Вам казалось, что в каком-либо из Ваших учеников есть зародыш математического таланта, зачаток той великой силы, благодаря которой природа покорна человеку, Вы с любовью сосредотачивали на нем свое внимание, руководили, помогали, возбуждали к труду и ободряли" [5].

Другим учеником Н.Д. Брашмана был А.Ю. Давидов, выдающиеся способности и талантливость которого были замечены еще когда он находился на студенческой скамье. Магистерские диссертации А.Ю. Давидова, А.С. Ершова и И.И. Рахманинова имели большое практическое значение. Вот что писал П.Л. Чебышев об одном из них: "Сочинение г. Рахманинова имеет тем более интереса, что он, не ограничиваясь одними теоретическими выводами, обращает полное внимание на те правила устройства колес, которые выведены были из наблюдений. От такого сближения теории с практикой сочинение г. Рахманинова очень много выигрывает" [7, с. 291].

Еще во время учебы А.Ю. Давидова в университете Н.Д. Брашман видел в нем будущего профессора и заботился о достойном приготовлении его к этому званию. "После университетского курса, не оставляя

Москвы, – говорит А.Ю. Давидов в своем автобиографическом очерке, – продолжал постоянно заниматься математическими науками вообще, и преимущественно аналитическою механикою, имея при этом в профессоре механики Н.Д. Брашмане постоянно деятельного руководителя и друга” [8, с. 275-276]. О характере этого руководства может свидетельствовать и речь А.Ю. Давидова, произнесенная в честь Н.Д. Брашмана: “Вы не довольствовались одним чтением лекций, – в своей аудитории, между своими слушателями, Вы постоянно искали молодых людей прилежных и способных, из которых могли бы выйти достойные ученые, и, найдя их, сосредотачивали на них все свое внимание, все усилия, чтобы образовать из них полезных деятелей для науки” [9, с. XI]. “Вы лелеяли их как своих родных детей, Ваш дом был их домом, Ваш стол их столом, Ваши книги принадлежали им; а в нужде и в неудаче они постоянно находили в Вас совет и опору. Таким образом действовали Вы в продолжение сорока лет, и результаты Вашей деятельности соответствуют Вашим стараниям: Вы образовали рассадник молодых ученых, которым пользовались и пользуются почти все русские университеты, и в Петербургском университете математические науки преподаются Вашими учениками, и Петербургская академия наук получила своих академиков-математиков из лиц, образовавшихся в Вашем доме, под Вашим руководством; один из них член Парижской академии наук” [9, с. XI].

Деятельность педагога не оставляет таких очевидных, всем заметных результатов, как, например, деятельность писателя или ученого. Главная сила его деятельности заключается в том глубоком, неизгладимом впечатлении, которые производят его нравственная личность и его взгляды на тех, кем он руководит, в том громадном нравственном влиянии, которое он имеет на своих учеников и последователей, влиянии, сила которого не может быть взвешена и измерена, результаты которого не могут быть с точностью оценены. Изучая педагогические дарования выдающихся педагогов-математиков Казанского университета, мы обращаем внимание на то, что их общая черта – поиск одаренных молодых людей для дальнейшей индивидуальной подготовки их к научно-исследовательской деятельности, характерная для нескольких поколений университетских ученых-педагогов, начало которой было положено в Казанском университете профессором М.Х. Бартельсом, затем продолжено его преемником Н.И. Лобачевским и его учениками, среди которых был и Н.Д. Брашман.

Библиографический список

1. *Сеченов, И.М.* Автобиографические записки [Текст] / И.М. Сеченов. – М., 1952.

2. *Брашман, Н.Д.* О влиянии математических наук на развитие умственных способностей [Текст] / Н.Д. Брашман // Речь…17 июня 1841 г. – М., 1841.
3. Государственный исторический музей. Отдел письменных источников. – Ф. 381. – Ед. хр. 29.
4. *Гнеденко, Б.В.* Очерки по истории математики в России [Текст] / Б.В. Гнеденко. – М.-Л.: Гостехиздат, 1946.
5. *Любимов, Н.А.* Воспоминания об Ершове [Текст] / Н.А. Любимов. – М., 1873.
6. Обед в честь Брашмана [Текст] // Московские ведомости. – 1864. – № 213.
7. *Чебышев, П.Л.* Полное собрание сочинений [Текст] / П.Л. Чебышев. – М.-Л., 1948. – Т. V.
8. Биографический словарь профессоров и преподавателей Императорского Московского университета [Текст]. – М., 1855. – Т. 1.
9. Биография Н.Д. Брашмана [Текст] // Математический сборник. – М., 1866. – Т. 1. – № 1.

История, математика и прогресс (к 200-летию преподавания математики в институте путей сообщения)

М.М. Воронина, Л.В. Коновалова

Виктор Викторович Бобынин (1849-1919) известный русский математик, профессор Московского университета, первый историк математики в России (с 1882 года он читал курс истории математики) дал интересное толкование понятия “математика”. Это определение он написал для словаря Брокгауза и Эфрона в конце XIX века. Он считал, что “Математика” это не “наука” или “знание” – как переводили с греческого раньше, а от глагола “монтана” – что можно перевести как “учусь через размышление”. Эти слова В.В. Бобынина как нельзя лучше характеризуют процесс обучения в Институте Корпуса путей сообщения.

Надо отметить, что политику в области технического образования почти на всем протяжении XIX века определял Петербург, а своеобразным техническим центром в нем являлся институт Корпуса инженеров путей сообщения. Поэтому в качестве примера рассмотрим этот институт, открытый в 1809 году. Суть обучения сводилась к тому, чтобы: 1) сформировать ответственных работников для Корпуса инженеров путей сообщения, который проводил все строительные работы в Империи, 2) получить образованных инженеров, 3) выпускать людей, способных к управлению производством. Для преподавания в институт были приглашены лучшие специалисты: академики, профессора и французские инженеры. Образование состояло из трех разделов – общее – “необходимое во всяком роде службы”, специальное – “необходимое для инженера”, и нравственное – “споспешествующее образованию инженера”. В третий раздел входило знание языков, деловая переписка и история открытий в точных науках. На Совете института было принято следующее положение: “Поручить преподавателям при чтении ими курса по инженерным предметам, обращать внимание студентов на историческую часть, так как это важно в деле развития транспортной науки и усовершенствования способов производства”. Таким образом, в техническом образовании предусматривалось комплексность знаний. При этом даже учитывался момент, что знание истории, литературы приучает воспитанников к “удовольствиям, более изысканным”, что позволит еще больше поднять престиж инженера.

Результат такого образования широко известен. Инженер путей сообщения славился по всей стране своими знаниями, широтой интересов, нестандартностью мышления.

Институт явился детищем Департамента водяных коммуникаций. Во главе его стоял Николай Петрович Румянцев – один из умнейших и образованнейших людей своего времени. Он одновременно был, согласно современной терминологии, министром путей сообщения и министром торговли, и поэтому он, как никто, понимал необходимость создания в России разветвленных, усовершенствованных путей сообщения. Румянцев был хорошо знаком с европейской системой образования, и, видимо, с его одобрения в начале XIX века в Петербурге была принята французская система обучения.

Корпус инженеров предназначался для выполнения всех строительных работ, осуществляемых ведомством путей сообщения. Институт Корпуса инженеров путей сообщения был открыт для подготовки инженеров широкого профиля для проектирования, строительства и эксплуатации сухопутных и водных путей сообщения и гидротехнических сооружений. Таким образом, институт стал первым транспортным и строительным высшим техническим учебным заведением России.

Во главе института до 1824 года стоял крупный механик и строитель А.А. Бетанкур (1758-1824). Он приехал в Россию по приглашению русского посла в Испании И.И. Муравьева-Апостола и использовал свой опыт руководителя Школы путей сообщения в Мадриде, а также знакомство с программами и структурой парижской Политехнической школы для организации учебных занятий в институте путей сообщения. Не будучи создан по образцу какой-либо школы, институт в Петербурге в дальнейшем сам служил образцом.

Техническое образование в институте строилось на базе общенаучной подготовки по математике, механике, физике по образцу, близко воспроизводившему парижскую Политехническую школу. Однако в России, в отличие от французской системы, обучение было непрерывным, то есть подготовка по общенаучным, базовым предметам не была оторвана от сугубо инженерных предметов. Тем самым в институте была создана своя отечественная система образования, которая получила распространение в России и ряде других стран.

Немного о Политехнической школе. Она была создана в 1794 году. В ее создании участвовали самые знаменитые люди Франции. Большинством в один голос в Конвенте было принято следующее утверждение. Люди, способные к математическим наукам, способны и ко всем остальным наукам, в том числе к чисто гуманитарным, но не наоборот. В основу работы школы было положено следующее положение: многие различные отрасли науки требуют одинаковой подготовки в математических науках (математика, механика, физика, начертательная геометрия). Поэтому в Политехнической школе усиленно занимались именно этими науками. Отбор учащихся проводился по всей Франции. В результате в первой половине XIX века Франция вышла на самые передовые позиции в области математики, механики, математической физики и т.д.

Это положение также лежало в основе вновь созданного института Корпуса инженеров путей сообщения. В институте частично переняли и систему обучения: количество лекционных часов и практических занятий, их распределение в течение дня и в течение недели, поощрительные меры.

Можно отметить, что подобные учебные заведения в начале XIX века существовали только во Франции и в России. В Австрии Политехнический институт был открыт в 1815 г., Ремесленный институт в Берлине – в 1821 г., Политехнические институты в Карлсруэ – в 1825 г., в Мюнхене – в 1827 г., в Дрездене – в 1828 г., что позволило Германии к концу XIX века выйти на одно из первых мест в промышленном и инженерном отношении.

Английские инженеры в то время не интересовались теоретическими проблемами и игнорировали занятия математикой. До 40-х годов XIX века там не было специальных технических учебных заведений, что в конечном итоге привело к отставанию.

Во вновь созданный институт путей сообщения приглашались лучшие преподаватели, и эта традиция сохраняется уже на протяжении двух столетий. Так, в 1830 году в институт были приглашены М.В. Остроградский и В.Я. Буняковский, которые стали преподавать математику и механику, основываясь на работах О.Коши. Кстати, В.Я. Буняковский стал впервые факультативно читать курс теории вероятностей в высшей школе, и относительно лотерей он говорил, что это “налог на невежество”.

Математическое образование в институте всегда ставилось во главу угла. Так, в 1834 г. на Конференции (Совете) института постановили: “высшую математику отнести к первому разряду наук, то есть к наукам, необходимым каждому инженеру”. В 1843 г. было принято положение: “Тех инженеров, которые не осилят высшую математику, инженерами не выпускать - только архитекторами”. В 1859 г. на заседании Совета института отмечалось, “Стремление к анализу усвоено ими через изучение высших математических наук”. Здесь речь идет о том, что инженеры ответственно подходят к порученному делу, тщательно анализируют его и лишь потом принимают решение.

До середины 20-х годов XX столетия институт сохранял свое лидирующее положение в области технического образования. Можно напомнить, что в эти годы в нем работали – В.И. Смирнов, Г.М. Фихтенгольц, Я.Д. Тамаркин, Я.В. Успенский и др. Постепенно институт это положение утрачивает.

1930-е годы программа по математике была сокращена, что через несколько лет вызвало резкое возражение крупнейших ученых и практиков. Строитель Днепрогэса И.Г. Александров говорил, что сокращать преподавание математики - это преступление, иначе мы будем выпускать монтеров, а не инженеров. Положение было исправлено.

Дальнейшее увеличение объема курса высшей математики произошло и в 1950-60-е годы, так как война показала недостаточный уровень инженерных знаний среди молодого поколения. В результате наша страна смогла добиться лидирующего положения во многих областях науки и техники.

В последнее время, к сожалению, наблюдается существенное сокращение числа часов курса высшей математики. . .

История математики в Южном Федеральном (Ростовском, Варшавском) университете

Ю.С. Налбандян

Формирование ростовской школы истории математики, как и ростовской математической школы вообще, началось в 1915 году, после переезда в Ростов-на-Дону Варшавского Императорского университета. Среди ученых, оказавшихся в Ростове, был **Дмитрий Дмитриевич Мордухай-Болтовской (1876-1952).** К этому времени он уже являлся автором более 30 научных работ, 15 статей с обзором математических публикаций в европейских научных журналах и нескольких статей по истории математики, в частности, “К учению Д. Бернулли о нравственном имуществе и нравственном ожидании” (1904). Кроме того, в Варшаве в 1913 г. им были опубликованы “Четыре лекции по философии математики, прочитанные на курсах для преподавателей средней школы летом 1912 г.” (см. также сборник [1, с. 26-73, 482]). Изучавший по первоисточникам историю Белоруссии, Литвы и России, неплохо знавший историю средних веков, Мордухай-Болтовской часто использовал исторические данные в научной работе и в лекционных курсах. Этому также способствовало владение несколькими иностранными языками (немецким, французским, греческим, латинским).

В Ростове ученый начинает подготовку к “открываемому курсу Истории и Методики математики”, в связи с чем летом 1916 г. получает командировку в Москву. В Архиве РГУ (ЮФУ) хранится его отчет о поездке (ф. 527, оп. 1, № 124, лл. 2-3 и оборот), в котором перечисляются изученные материалы и комментируется их использование при подготовке статей [2, 3] и работы “Философско-математические идеи XVII века и их дальнейшая эволюция”, которая будет опубликована только в 1919 году, а также переиздана в [1].

Благодаря деятельности Д.Д. Мордухай-Болтовского, курс “История математики” с середины 20-х годов XX века регулярно входит в учебные планы (в XXI веке, правда, он читается только для магистрантов и студентов отделения “математика”, получающих дополнительную квалификацию “Преподаватель”). В рамках организованного ученым семинара по истории математики в 1921-1924 гг. (см. [4, с. 458-459]) заслушиваются такие доклады как “Происхождение проблемы решения уравнений в радикалах”, “История нумерации”, “Некоторые теоремы геометрии Лобачевского”, “Интегральное исчисление XVIII века”, “История алгебраической символики”. Уделяется внимание истории математики и на заседаниях знаменитого методического коллоквиума по математике (см. [5]). Здесь с докладами выступает и сам Дмитрий Дмитриевич (“Эвклид, Лежандр” – 1925, “50-летний юбилей научной и педагогической деятельности проф. А.В. Васильева” – 1925, “Немецкая философия первой половины XIX века и элементарная математика” – 1925, “Генезис и история теории пределов” – 1927), и его ученики и коллеги, в частности, Н.М. Несторович (“Метод исчерпывания в геометрии” – 1925, “Феликс Клейн и Меранская программа” – 1925, “Элементы истории математики в начальном преподавании математики” – 1928) и М.П. Черняев (“Первая книга “Начал” Евклида с методической точки зрения” – 1926). Судя по документам (например, Государственный Архив Ростовской области (ГАРО), ф. 46, оп. 1, № 260, л. 10 и оборот), студентам предлагаются дипломные работы историко-математического направления (“История алгебраической символики и ее методическое значение”, “История и методика исчисления бесконечно малых", "История аналитической геометрии").

По инициативе Д.Д. Мордухай-Болтовского в Ростове широко праздновалось 100-летие со дня знаменитого выступления Н.И. Лобачевского. В воспоминаниях выпускницы мехмата Ю. Хаплановой [6] упоминается о поездке ростовской делегации в Казань, где ученый выступил с речью "Лобачевский и основные логические проблемы в математике". В частности, автор воспоминаний пишет: "*После вице-президента Академии наук, громадного, с бородой и голосом протодьякона, Стеклова, Мордухай показался маленьким и невзрачным. Но это только пока он не заговорил*". Отмечались в университете юбилеи и других ученых, как правило – на заседаниях отделения математики и астрономии общества естествоиспытателей. Так, в 1917 проходило собрание, посвященное памяти Ж.Л. Даламбера, в 1921 – Н.Е. Жуковского, в 1922 – А.А. Маркова и В.П. Ермакова, в 1923 – Б.К. Млодзеевского, в 1925 – Ф. Клейна и К. Фламмариона, в 1927 – М.Г. Миттаг-Леффлера (см. [7]). Активно участвовали математики в подготовке и проведении торжественных заседаний всего общества естествоиспытателей по поводу 200-летия Академии Наук (сентябрь 1925 г.), а в 1928 г. прошло заседание отделения математики и астрономии общества естествоиспытателей, приуроченное к 400-летней годовщине со дня смерти А.Дюрера, на котором выступили доцент А.Д. Силин, проиллюстрировавший доклад "Творчество Дюрера" "картинами эпидиаскопа", и сам Мордухай-Болтовской, детально разобравший достижения ученого и художника в области геометрии (см. [8]).

Кроме того, ученый продолжает собственные исследования. Обзор некоторых направлений можно найти во вступительной статье к [1] и в работе [9]. Когда в 1928 г. готовился к печати специальный выпуск "Известий Северо-Кавказского университета" (№ 3), посвященный 30-летию научно-педагогической деятельности профессора, туда был включен цикл "Исследования о происхождении некоторых основных идей современной математики" (см. также [1, с. 268-365, 519-540]). Вообще, к работам Д.Д. Мордухай-Болтовского по истории математики можно отнести около 30 публикаций из почти 200 (см. [10, с. 253-297]). Кроме того, в Санкт-Петербургском филиале Архива Академии наук (ф. 821, оп. 1) среди неопубликованных трудов ученого находятся такие исследования как "Исторический материал при преподавании математики в средней школе", "Из истории дробей", "История логарифма отрицательного числа", "История касательной", "Очерки из истории обыкновенных дифференциальных уравнений", "Античные исторические проблемы", "Основания геометрии в XVI веке", "Из истории континуума", "Эволюция понятия функции", "Происхождение иррационального числа", "Пять основных этапов развития анализа бесконечно малых", "Из истории эйлеровых и лежандровых формул", "Из истории объемов и поверхностей" и т.д. Их обзор был сделан М.Б. Налбандян на XIII Международном конгрессе по истории науки в 1971 г. (см. [11]).

Военные годы обернулись для Дмитрия Дмитриевича трагедией. В архиве М.Б. Налбандян хранятся пронзительные документы – письма Мордухай-Болтовского 1943-1947 гг. В первом же из них (апрель 1943), адресованном Николаю Яковлевичу Авдееву в г. Ош, где в эвакуации находился Ростовский университет, ученый описывает события последнего времени – "*Вы всю историю с моим поранением хорошо знаете. Дальнейшая моя судьба, лазарет и одна бомба, клиника и две бомбы, перевод в Ессентуки, больница, комната, квартира в 2 комнаты, выбрасывание меня на улицу без суда, комнатка в станице и сейчас назначение профессором в Пятигорский пединститут, куда я до сих пор не могу переехать. Страшные боли с впрыскиванием наркотиков в Ростове,... новые боли, затем рожа с 40 с лишним градусами температуры. При этом все время бедственное голодное существование... и равнодушие, более того, жестокое отношение власть имущих".* Но вопреки боли, голоду, усталости и сожалениям о "такой старости", Мордухай-Болтовской остается Ученым и Педагогом: постоянно пишет о возможности возрождения университета, сокрушается из-за гибели библиотеки и математического кабинета, расспрашивает о судьбах учеников и дает методические советы. В письме 1945 года (19 мая) он весьма скептически рассуждает о перспективах аспирантуры по истории математики: *"едва ли она возможна в СССР, где не знают ни латинского, ни греческого языка".*

В письмах 1946 г. (уже из Иванова, куда ученый переехал работать после Пятигорска) Мордухай-Болтовской несколько раз обращается к судьбе диссертации по истории математики, представленной **Владимиром Львовичем Минковским**, выпускником Воронежского университета. В те годы Минковский работал в Курганской области, в Шадринском пединституте (с 1945 по 1950 гг. заведовал кафедрой математики, с 1947 по 1949 гг. был деканом физико-математического факультета), впоследствии переехал в Орел. Стоит отметить, что оценка ученого на сайте ШГПИ *("отличался интеллигентностью, высокой математической культурой, феноменальной памятью")* вполне соответствует тому, что писал о нем Мордухай-Болтовской *("очень интеллигентный человек с острым интересом к методике и истории")*. Называл он Минковского любимейшим учеником и наследником в области истории математики. *"История математики, которой он под моим руководством занимался, – писал Дмитрий Дмитриевич, – была историей учебника".* Это направление Минковский продолжил и после защиты (1947), ему принадлежит ряд интересных публикаций в журнале “Математика в школе”, не раз переиздаваемая книга “За страницами учебника математики”. Он стал одним из соавторов очень теплой статьи [12], посвященной 100-летию со дня рождения Мордухай-Болтовского.

Главным трудом, фактически – делом всей жизни Дмитрия Дмитриевича, являются переводы двух классиков математики – Евклида и И. Ньютона. В 1937 году он подготовил к печати книгу “Ньютон Исаак. Математические работы” (перевел, прокомментировал и написал вступительную статью). В 1948-1950 гг. выходят в свет в его переводе три тома “Начал” Евклида. Редактировали эту работу И.Н. Веселовский и М.Я. Выгодский , причем в [13] отмечено, что И.Н. Веселовский в определенной мере исправил перевод Мордухай-Болтовского. Впрочем, сам ученый в упомянутой переписке (в частности, в письме к М.Г. Хапланову в сентябре 1946 г.) высказывал ряд претензий к этим исправлениям. Не слишком лестно характеризовал он и общие подходы к истории математики, приверженцем которых был Выгодский (отмечая, как главный недостаток, то, что его бывший ученик *“всегда являлся противником нового и оригинального, цеплялся всегда за мнения, или принятые большинством, или официально одобренные”*). Такая характеристика, кстати, весьма созвучна прозвучавшим в статье [14] замечаниям о приверженности Выгодского методам марксистского анализа, о его постоянной и жесткой полемике с историками науки, стоящими на противоположных марксизму позициях.

Марк Яковлевич Выгодский (1898-1965) поступил в находившийся в Ростове университет в 1916 году, однако вскоре после революции переехал в Баку, а заканчивал свое математическое образование уже в Москве. В 1930 г. С.А. Яновская и М.Я. Выгодский вместе начинают читать курс истории математики в МГУ, в 1933 они организуют семинар по истории математики. Фактически Выгодский стал одним из родоначальников советской историко-математической школы. Однако не вызывает сомнения тот факт, что интерес к геометрии и истории математики был сформирован именно в студенческие ростовские годы под влиянием Д.Д. Мордухай-Болтовского.

С одной стороны, не без его влияния Выгодский с конца 30-х годов XX века сосредоточил усилия на изучении математики древнего мира. Результатом явились замечательное сочинение “Арифметика и алгебра в древнем мире”, работа “Платон как математик”, анализ содержания “Начал” Евклида и философских и методологических взглядов великого грека, опубликованный в первом томе “Историко-математических исследований” в 1948 году.

С другой стороны, он наверняка помнил об интересе учителя к “первоисточникам” и поэтому, заняв должность главного редактора Государственного технико-теоретического издательства, стал инициатором издания комментированных переводов классиков науки. В частности, М.Я. Выгодский сам подготовил к публикации и прокомментировал “Стереометрию винных бочек” И. Кеплера, “Приложения анализа к геометрии” Г. Монжа, первый том “Дифференциальной геометрии” В. Бляшке, “Дифференциальное исчисление” Л. Эйлера.

В 1931 году М.Я. Выгодский предпринял разбор историко-математических работ своего учителя в статье [15] и дал ему яркую характеристику: *“Автор не суживает предмета, не ограничивается хронологией математических открытий: он поднимается до общеметодологических обобщений; он ищет связь между математическими идеями и мировоззрением эпохи; он извлекает из истории математики уроки для современного преподавания математики... Автор не отрывает математику от философии... дает много ценного для педагога... ему хочется и часто удается стать на точку зрения эпохи, им разбираемой”.*

К сожалению, творчество и жизнь М.Я. Выгодского еще ожидают своих исследователей, в частности, немало интересных материалов хранится в фонде Выгодского в Центральном Московском Архиве – Музее Личных Собраний (бывшем Центральном архиве документальных коллекций Москвы). Опись 1 фонда 30 насчитывает более 300 единиц хранения, в том числе рукописи работ “История математики” (1926) и “Понятие числа в его развитии” (1931), переписку с многими учеными, отзывы и рецензии на труды и учебные пособия С.Е. Белозерова, В.М. Брадиса, Б.Л. Ван-дер Вардена, Д.Д. Мордухай-Болтовского, А.П. Юшкевича, биографические и автобиографические материалы. В последнее время личностью Выгодского заинтересовались в Туле, где он провел последние годы, однако публикации, подготовленные И. Редько в 1999-2005 гг. (см., например, [16]) и содержащие любопытную информацию мемуарного характера, являются не вполне профессиональными.

Интересно еще отметить, что даже в наиболее известных работах о М.Я. Выгодском [14, 17, 18] фактически не упоминается о том, что в 1947-1948 годах он работал в Ростовском университете, читая, в частности, курсы истории математики и механики (материалы можно найти в архиве университета и в [10, с. 92-107]).

Если М.Я. Выгодский непосредственно сотрудничал с Д.Д. Мордухай-Болтовским только в ранние студенческие годы, то другие ученики Дмитрия Дмитриевича, работавшие рядом с ним, успешно продолжили дело учителя в Ростовском университете. **Николай Михайлович Несторович (1891-1955)**, который стал виднейшим специалистом в области неевклидовой геометрии, использовал много исторических фактов в монографии "Геометрические построения в плоскости Лобачевского". Интерес к этой тематике возник у него во многом благодаря упомянутым выше юбилейным торжествам 1926 года. Н.М. Несторович был автором и соавтором ряда работ, посвященных Мордухай-Болтовскому, а также проявлял интерес к применению истории математики в учебном процессе [19, с. 224-228; 10, с. 318-326].

После Великой Отечественной войны и возвращения университетского коллектива из эвакуации интерес к истории науки вспыхнул с особой силой. В 1946-1947 годах функционировал семинар по истории и методологии физико-математических наук, которым руководил Петр Степанович Папков. Среди докладчиков, помимо самого руководителя – М.П. Черняев, В.П. Вельмин, А.Б. Гремяченский, С.Я. Альпер, А.В. Батырев (тематику докладов см. в ГАРО, ф. 46, № 321, оп. 10). М.П. Черняев опубликовал ряд биографических очерков, в частности, о К.А. Андрееве. Впервые начали читаться курсы истории астрономии (А.В. Батырев), физики (В.С. Михалевский), механики (М.Я. Выгодский), а традиционный курс истории математики по очереди вели М.Я. Выгодский и его бывший аспирант (по Московскому университету) С.Е. Белозеров, который фактически принял от Д.Д. Мордухай-Болтовского эстафету историко-математических исследований.

Выпускник Саратовского университета **Семен Ефимович Белозеров (1904- 1987)** начал работу в Ростовском университете в 1938 году, был ректором в самые тяжелые годы (1938-1954). Кандидатскую диссертацию "Из истории теории функций комплексного переменного" он защитил под руководством М.Я. Выгодского в 1939 году, в числе первых аспирантов по истории математики. С.Е. Белозеров стал специалистом в области истории теории аналитических функций (см. [10, с. 53-56]), автором хорошо известных и популярных монографий [20] и [21], заложил основы обстоятельного изучения истории университета (см. [19]). Обзор этих и других работ ученого можно найти в [22, с. 50-51]. На протяжении ряда лет С.Е. Белозеров читал спецкурс "История и современная теория знаменитых задач древности". Исследования по этой теме продолжали в своих дипломных работах студенты физмата (мехмата), а работы по истории частных классов аналитических функций нашли дальнейшее развитие в трудах его аспирантов.

Валерий Маркович Кузнецов, закончивший аспирантуру в 1963 году, занимался изучением истории теории автоморфных функций. Теория эллиптических функций стала основным направлением работы **Маргариты Бабкеновны Налбандян (1931-2004).** Защитив в 1972 году под руководством С.Е. Белозерова кандидатскую диссертацию "Теория эллиптических функций и ее приложения в трудах русских математиков

XIX и начала XX века”, она собрала значительный архив документов, связанных с именами таких ученых как Е.И. Золотарев, Ю.В. Сохоцкий, И.П. Долбня и многие другие.

Впоследствии М.Б.Налбандян переключилась на историю Ростовского университета, собрала богатую коллекцию материалов, посвященных Варшавскому (Донскому, Северо-Кавказскому, Ростовскому) университету, деятельности Общества естествоиспытателей, жизни и творчеству Д.Н. Горячева, Д.Д. Мордухай-Болтовского, В.И. Романовского, В.П. Вельмина, Н.В. Ефимова, М.Ф. Суботина, М.Г. Хапланова. . . В ходе многолетней работы с фондом Ростовского университета в Государственном Архиве Ростовской области она заметила, что в отчетах о научной деятельности в 1917-1918 гг. Д.Д. Мордухай-Болтовской неоднократно упоминал собственные публикации в местной печати. Маргарита Бабкеновна сумела найти 12 заметок ученого в газетах “Ростовская речь” и “Приазовский край” и тем самым пополнила библиографию из [10]. Первый обзор этих статей был подготовлен совместно М.Б. Налбандян и Ю.С. Налбандян и размещен на сайте http://www.math.rsu.ru/mexmat/ma/nalb/DDM-B.html; впоследствии интересный комментарий к ним предложили Т.С. Полякова и ее ученик В.Е. Пырков в статье [23].

Значительную роль сыграла М.Б. Налбандян в возобновлении чтения курса истории математики на мехмате, в подготовке небольшой монографии [24], посвященной истории физико-математического (механико-математического) факультета. Ее заслугой является и восстановление буквально по крупицам биографии Николая Андреевича Дернова, ректора РГУ, расстрелянного в 1938 году (см. [25] или [26]). Активно участвовала она и в проведении юбилейных заседаний Ростовского Математического общества в соответствии с традициями, заложенными Д.Д. Мордухай-Болтовским.

Эта публикация во многом подготовлена по материалам из архива М.Б. Налбандян, который требует серьезного изучения.

Библиографический список

1. *Мордухай-Болтовской, Д.Д.* Философия. Психология. Математика [Текст] / Д.Д. Мордухай-Болтовской. – М.: Серебряные нити, 1998.
2. *Мордухай-Болтовской, Д.Д.* Из прошлого пятой книги “Начал” Евклида [Текст] / Д.Д. Мордухай-Болтовской // Математическое образование. – 1916. № 7-8 (см. также в [1, с. 192-212, с. 503-506]).
3. *Мордухай-Болтовской, Д.Д.* О моделях во второй книге “Начал” Евклида [Текст] / Д.Д. Мордухай-Болтовской // Вестник опытной физики и элементарной математики. – 1916. – № 655-656. 18 с.

4. История отечественной математики [Текст] / под ред. И.З. Штокало. – Киев, 1970. – Т. 4. – Кн. 2.
5. *Несторович, Н.М.* О работе методического Colloquium'а по математике при Геометрическом кабинете, руководимого проф. Д.Д. Мордухай-Болтовским [Текст] / Н.М. Несторович // Известия Северо-Кавказского университета. – 1928. – Т. 3(15). – С. 31-34.
6. *Хапланова, Ю.* Прошлое [Текст] / Ю. Хапланова. – Ростов-на-Дону, 1998.
7. *Налбандян, М.Б.* Налбандян Ю.С. Из истории общества естествоиспытателей при Варшавском (Донском, Северо-Кавказском) университете: метод. указания к курсу "История математики" [Текст] / М.Б. Налбандян, Ю.С. Налбандян. – Ростов-на-Дону: УПЛ РГУ, 1995. – 25 с. http://www.math.rsu.ru/mexmat/ma/nalb/PDF/est.pdf
8. *Мордухай-Болтовской, Д.Д.* Дюрер как художник и как математик. Информация о заседании отделения математики и астрономии общества естествоиспытателей 12 мая 1928 г., посвящ. Дюреру [Текст] / Д.Д. Мордухай-Болтовской // Бюллетень научных обществ и учреждений Северо-Кавказского края. – 1928. – № 16/10. – С. 5-6.
9. *Хапланов, М.Г.* Выдающийся математик Д.Д. Мордухай-Болтовской (1876-1952) [Текст] / М.Г. Хапланов // Ростовский государственный университет. 1915-1965. Статьи, воспоминания, документы. – Ростов-на-Дону: ИРУ, 1965. – С. 145-160.
10. *Белозеров, С.Е.* Механико-математический факультет Ростовского университета: биобиблиографический справочник. Выпуск 2. Математики (1920-1970). [Текст] / С.Е. Белозеров, С.И. Миесерова, В.А. Ткачева. – Ростов-на-Дону, 1972.
11. *Налбандян, М.Б.* О некоторых неопубликованных работах Д.Д. Мордухай-Болтовского [Текст] / М.Б. Налбандян // XIII Международный конгресс по истории науки. Материалы по истории физико-математических наук. – М.: Наука, 1971. – С. 33.
12. *Налбандян, М.Б.* Д.Д.Мордухай-Болтовской (к 100-летию со дня рождения) [Текст] / М.Б. Налбандян, В.Л. Минковский, К.К. Мокрищев, М.Г. Хапланов // Вопросы истории естествознания и техники. – М.: Наука, 1977. – Вып. 3-4 (56-57). – С. 102-103.
13. *Житомирский, С.В.* Переводчик "Альмагеста" И.Н. Веселовский [Текст] / С.В. Житомирский / В кн. Птолемей. Альмагест, или математическое сочинения в 13 книгах. – М.: Наука, 1998. С.452-454.
14. *Бронштейн, И.Н.* Памяти Марка Яковлевича Выгодского [Текст] / И.Н. Бронштейн, А.И. Маркушевич, Э.Г. Позняк, Б.А. Розенфельд, А.П. Юшкевич // Успехи математических наук. – 1967. – Т. 22. – Вып. 5(137). – С. 203-206.

15. *Выгодский, М.Я.* “Исследования” Мордухай-Болтовского [Текст] / М.Я. Выгодский // В сб. “На борьбу за материалистическую диалектику в математике”. – М.-Л.: Гостехиздат, 1931. – С. 183-191.
16. *Редько, И.* Математика и история в жизни М.Я. Выгодского. Влияние идеологии на судьбу ученого [Текст] / И. Редько // В сб. “Права человека в России: вчера, сегодня, завтра”. – Тула: Гриф и К, 2005. – С. 109-119. http://stipendiat.memo.ru/redko/redko_mat_i_hist.html
17. *Розенфельд, Б.А.* Марк Яковлевич Выгодский и его работы по истории математики [Текст] / Б.А. Розенфельд // Выгодский М.Я. Арифметика и алгебра в древнем мире. – М.: Наука, 1967. – С. 350-362.
18. *Юшкевич, А.П.* М.Я. Выгодский (1895-1965) [Текст] / А.П. Юшкевич // Вопросы истории естествознания и техники. – 1967. – Вып. 22. С. 126-127.
19. *Белозеров, С.Е.* Очерки истории Ростовского университета [Текст] / С.Е. Белозеров. – Ростов-на-Дону: ИРУ, 1959.
20. *Белозеров, С.Е.* Основные этапы развития общей теории аналитических функций [Текст] / С.Е. Белозеров. – Ростов-на-Дону: ИРУ, 1962. – 312 с.
21. *Белозеров, С.Е.* Пять знаменитых задач древности. История и современная теория [Текст] / С.Е. Белозеров. – Ростов-на-Дону: ИРУ, 1975. – 318 с.
22. *Белозеров, С.Е.* Математика и механика в Ростовском университете за 50 лет [Текст] / С.Е. Белозеров, И.И. Ворович, А.К. Никитин, М.Г. Хапланов // Развитие науки в Ростовском Государственном Университете. 1915-1965. – Ростов-на-Дону: ИРУ, 1965. – С.44-101.
23. *Полякова, Т.С.* Тема интеллигенции в публицистике Д.Д. Мордухай-Болтовского 1917-1918 гг. [Текст] / Т.С. Полякова, В.Е. Пырков // Наука и Образование. Известия Южного отделения Российской Академии Образования и Ростовского Государственного Педагогического Университета. – 2004. – № 2. – С. 142-150.
24. *Коробейник, Ю.Ф.* Механико-математический факультет Ростовского государственного университета: краткий исторический очерк [Текст] / Ю.Ф. Коробейник, Я.М. Ерусалимский, М.Б. Налбандян, Н.Н. Рожанская. – Ростов-на-Дону: ИРУ, 1989.
25. *Налбандян, М.Б.* Н.А. Дернов (1891-1938): метод. указания к курсу “История математики” [Текст] / М.Б. Налбандян, Ю.С. Налбандян. – Ростов-на-Дону: УПЛ РГУ, 1992. – 34 с.
26. *Налбандян, М.Б.* Н.А. Дернов (1891-1938). К 100-летию со дня рождения [Текст] / М.Б. Налбандян, Ю.С. Налбандян // Деп. в НИИ высшего образования. – 04.10.1991. № 632-91. – 32 с. http://www.math.rsu.ru/mexmat/ma/nalb/PDF/dernov.pdf

Теория вероятностей и математическая статистика на педагогическом факультете Ярославского (1922-1924) университета (постановка проблемы)

Е.И. Щукин

Среди 11 названий, которые за 100-летнюю историю своего существования носил Ярославский государственный педагогический университет имени К.Д. Ушинского, есть и такое – педагогический факультет Ярославского государственного университета (1922-1924) [1, с. 4].

Остановимся на этом подробнее. Как известно, в 1803 году по инициативе и на средства П.Г. Демидова, правнука знаменитого Никиты Демидова, основателя династии уральских горнозаводчиков и покровителей наук и искусств [2, с. 7], было открыто Ярославское училище высших наук, которое в соответствии с Уставом училища от 9 февраля 1805 года "занимало первую степень непосредственно после двух центральных университетов – Московского и Санкт-Петербургского" [3, с. 8]. Заметим что здесь имеется в виду так называемый академический университет Санкт-Петербурга, который, однако, учебным заведением не был, и поэтому в Санкт-Петербурге в 1819 году был основан другой университет, который уже в настоящее время и образует – вместе с Московским университетом – действительно два центральных университета России.

Начиная с 1811 года, аттестаты Демидовского училища высших наук имеют равную степень с аттестатами университетов (которых к 1811 году было уже несколько – Дерпт (1802), Вильно (1803), Казань (1804), Харьков (1805) – все эти университеты располагались на территории тогдашней России)[4, с. 108]. Само Демидовское училище прошло несколько этапов в своем развитии – первоначально (с 1803 по 1833) в звании "Ярославского Демидовского училища высших наук", затем – "Ярославского Демидовского лицея" (1834-1869) и "Ярославского Демидовского юридического лицея" (1870-1917).

Ярославский государственный университет возник путем преобразования Демидовского юридического лицея. Подписанный В.И. Лениным Декрет Совета Народных Комиссаров учреждал государственные университеты в Костроме, Смоленске. Астрахани и Тамбове и преобразовывал в государственные университеты бывший Демидовский лицей в Ярославле и педагогический институт в Самаре. Сроком открытия университетов считали день первой годовщины Октябрьской революции – 7 ноября 1918 года [5, с. 17-20].

Первые студенты Ярославского университета начинали заниматься на единственном факультете – общественных и исторических наук по

4 отделениям: экономическому, юридическому, историческому и кооперативному. Студенты, которые перешли из Демидовского юридического лицея, продолжили занятия по лицейским программам обучения для II, III и IV курсов.

Весной 1919 года в ЯрГУ был создан факультет общественных наук с тремя отделениями: юридическо-политическим, экономическим и историческим.

В 1922 году ЯрГУ был объединен с педагогическим институтом имени Н.А. Некрасова (до этого – институт народного образования, а еше ранее – учительский институт, существовавший с 1908 г.), в результате чего и возник педагогический факультет Ярославского университета, который стал готовить кадры для техникумов и школ второй ступени. Первый курс для всех студентов был общим, а со второго курса устанавливалась специализация по трем отделениям: словесно-историческому, биолого-географическому и физико-математическому.

Не останавливаясь на подробностях дальнейшей судьбы ЯрГУ, отметим лишь, что в августе 1924 г. педагогический факультет университета вновь был выделен в Ярославский педагогический институт. Сам же ЯрГУ был вынужден прекратить свою деятельность из-за отсутствия финансирования осенью 1924 г., хотя никаких федеральных документов о закрытии университета не принималось.

Возникает вопрос: могла ли изучаться теория вероятностей и математическая статистика в ЯрГУ (1922-1924) и на каком отделении это было возможно? Казалось бы – ответ ясен: теория вероятностей и математическая статистика должны были изучаться на физико-математическом отделении! К сожалению, прямого ответа на этот вопрос пока найти не удалось – нет в архиве ЯГПУ им. К.Д. Ушинского соответствующих документов. Однако некоторые предположения сделать возможно, но касается это главным образом другого отделения – юридического. Дело в том, что еще со времени Демидовского Юридического лицея уделялось большое внимание подготовке студентов-юристов по статистике и политической экономии. Соответствующие курсы, начиная с 1906 г. читал известный русский статистик и экономист польского происхождения Орженцкий Роман Михайлович (1863-1923), профессор кафедры статистики Демидовского юридического лицея – университета (1906-1918).

Р.М. Орженцкий родился в г. Житомире. После окончания гимназии поступил на юридический факультет Новороссийского университета (Одесса). В 1887 г. закончил его и работал в Одессе на государственных должностях и одновременно преподавал политическую экономию и статистику, в том числе в Новороссийском университете (после защиты магистерской диссертации), но в 1906 г. был уволен за неблагонадежность. В том же году он был принят в Демидовский юридический лицей, где с 1907 г. возглавил кафедру статистики и создал статистико-экономический методологический кабинет. С 1910 г. Р.М. Орженцкий работал и в Ярославском губернском земстве, руководя оценочно-статистическим бюро. В декабре 1912 г. защитил диссертацию на степень доктора политической экономии и статистики в Санкт-Петербургском университете. В 1918 г. он – профессор Ярославского университета, в 1919 г. – профессор Санкт-Петербургского университета. В 1918-1920 г. – член коллегии ЦСУ, заведующий отделом статистической методологии. В 1919 г. избран академиком АН УССР. С 1920 г. – заведующий кафедрой теоретической экономии в АН УССР в Киеве, возглавлял изучение бюджетов, конъюнктуры народного хозяйства, движения рыночных цен. Сотрудничал с Киевским губернским статистическим бюро, руководил изданием губернких статистических бюллетеней, а также преподавал в учебных заведениях Киева.

В экономических трудах Р.М. Орженцкий развивал субъективно-психологическое направление исследований экономических явлений (т.н. австрийская школа – т.е. группа экономистов Венского университета конца XIX века, положившая начало отдельному направлению экономичской теории, основы которого сформулировал профессор Карл Менгер (1840-1921), выступивший против классической теории ценности, делавшей упор на производство и предложение). Карл Менгер утверждал, что ценность блага определяется не стоимостью его производства, а удовлетворением, или полезностью, которую потребитель получает от этого блага.

В статистике Р.М. Орженцкий разрабатывал методы количественного измерения массовых общественных явлений, полагая, что статистический метод как особый логический прием можно рассматривать только в отношении получения “сводных признаков” – различных средних и относительных величин.

Конец жизни Р.М. Орженцкого сложился трагически: уехав (эмигрировав) в Польшу, он погиб случайно от взрыва бомбы, брошенной в здание Варшавского университета [6, с. 200].

Основными сочинениями Р.М. Орженцкого являются:

1. Учение об экономическом явлении. Введение в теорию ценности. Одесса, 1903.
2. Сводные признаки. Ярославль, 1910.
3. Учебник математической статистики. Санкт-Петербург, 1914.
4. Элементарная теория статистических величин и вычислений. Киев, 1921.

Сочинения Р.М. Орженцого “Сводные признаки” и “Учебник математической статистики” имеются в отделе редких книг фундаментальной библиотеки ЯГПУ им. К.Д. Ушинского (куда они перешли из библиотеки Ярославского Демидовского юридического лицея). В этом же отделе имеются первые русские учебники по теории вероятностей: “Теория вероятностей с приложением преимущественно к страхованию и смертности” (Москва, печатано в университетской типографии, 1843; автор – Н.Е. Зернов, выпускник Ярославской гимназии; один год затем учившийся в Ярославском училище высших наук, а потом перешедший на учебу в Московский университет; успешно его закончивший и в 1843 г. бывший ординарным профессором чистой математики Московского университета, доктором философии); “Опыт элементарного анализа теории вероятностей (Москва, 1845; сочинение написано для получения степени магистра 24-летним кандидатом П.Л. Чебышевым – специально для Ярославского Демидовского лицея); “Основания математической теории вероятностей” (Санкт-Петербург, в типографии Императорской Академии Наук, 1846; автор – В.Я. Буняковский, Императорской АН ординарный академик, профессор С.-Петербургского университета и доктор математических наук Парижской академии).

Таким образом, можно с полным на это правом утверждать, что на педагогическом факультете Ярославского университета (1922-1924) были хорошие возможности продолжения традиций изучения теории вероятностей и математической статистики и остается предпологать, что все же будут найдены документы, это подтверждающие.

Библиографический список

1. Профессора ЯГПУ: 1908-2008. Биографические очерки [Текст]. – Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2008.
2. *Демидова, Н.Г.* Род Демидовых: прошлое и настоящее [Текст] / Н.Г. Демидова // Альманах № 1 Международного Демидовского фонда. – М.: Издательский Центр “Классика”, 2001.
3. *Гущина, Е.В.* Биографический сборник Демидовского университета [Текст] / Е.В. Гущина, Д.К. Морозов, Ю.Г. Салова. – Ярославль-Рыбинск, 2008.
4. *Чаплыгин, В.Ф.* История и методология математики [Текст] / В.Ф. Чаплыгин. – Ярославль: Изд-во ЯрГУ им. П.Г. Демидова, 2007.
5. Собрание Узаконений и Распоряжений Рабочего и Крестьянского Правительства [Текст]. М., Юридическая литература, 1919. – № 2. – С. 21.
6. *Корнев, В.П.* Видные деятели отечественной статистики. [Текст] / В.П. Корнев. – М.: Финансы и статистика, 1993.

Н.А. Извольский – профессор Ярославского педагогического института

Р.З. Гушель

С 1924 по сентябрь 1938 года в Ярославском педагогическом институте работал профессор-математик Николай Александрович Извольский (1870-1938).

Среди методистов имя Н.А. Извольского было широко известно еще до 1917 года. И позже он продолжал свои исследования в области методики математики. Но он не был только методистом, что видно из документов о его работе в Ярославском педагогическом институте.

Николай Александрович Извольский родился в 1870 году в г. Епифани Тульской губернии в семье учителя уездного училища Александра Андриановича Извольского. Мальчику было три года, когда отец его умер, и двое детей остались на попечении матери – акушерки-фельдшерицы, работавшей сначала в Епифани, а затем – в Туле.

В 1889 году Н.А. Извольский окончил Тульскую гимназию, где учился у известного учителя математики Е.С. Томашевича. Еще в гимназии мальчик познакомился с журналом "Вестник опытной физики и элементарной математики", нередко посылая в редакцию решения предлагавшихся в журнале задач [1]. Впоследствии Николай Александрович писал в своем Curriculum vitae, что он "считался первым в гимназии математиком" [2].

Получив аттестат, юноша поступил в Московский университет, на физико-математический факультет, который и окончил в 1893 году со степенью кандидата, полученной за работу "Изображение поверхностей на плоскости". В январе 1894 года Н.А. Извольскому была присуждена серебряная медаль за исследование "Учение о вероятностях "a posteriori" и применение его к статистике".

Среди тех, у кого учился Николай Извольский в университете, были профессора В.Я. Цингер, Н.В. Бугаев, П.А. Некрасов, А.Г. Столетов, Б.К. Млодзеевский и другие. Сам он впоследствии писал: "Особенно я ценил лекции профессора Цингера, в которых всегда чувствовалась глубина проникновения в суть излагаемых вопросов. У меня под влиянием Цингера, очень глубокого геометра, сложилась особенная склонность к геометрии" [2].

Преподавательскую деятельность Николай Александрович начал в январе 1894 года во втором Московском кадетском корпусе; он оставался здесь до 1908 года, когда перешел в женскую гимназию Валицкой.

Одновременно, еще с 1906 года, он преподавал на курсах, организованных секцией средней школы Московского общества народных университетов. В 1907 году Н.А. Извольский был избран преподавателем Высших женских курсов. На этих курсах он работал вплоть до 1919 года. В 1918 году Курсы были преобразованы во 2-й МГУ.

На Высших женских курсах Николай Александрович преподавал следующие дисциплины: “элементарную геометрию, сферическую геометрию и тригонометрию, синтетическую теорию конических сечений, специальный курс геометрии” [2]. Помимо этого, с 1908 года он вел занятия в Московском коммерческом институте и ряде других учебных заведений Москвы.

В середине 1919 года Н.А. Извольский уехал в родную Епифань, где прожил до осени 1921 года.

И вновь Москва. С 1921 года он преподавал на рабфаке имени Плеханова, в Пречистенском практическом институте, во 2-м МГУ, где проработал до 1931 года.

С 1924 года Николай Александрович стал преподавателем Ярославского педагогического института. В 1925 году научно-технической секцией ГУС’а он был утвержден профессором института и оставался в этой должности до конца своих дней. С 1931 года Н.А. Извольский был на пенсии по инвалидности, но работать в Ярославле продолжал, приезжая сюда из Москвы.

Из беглого обзора мест трудовой деятельности Н.А. Извольского до 1917 года видно, что он преподавал, преимущественно, в средних учебных заведениях, в том числе, в течение 14 лет в кадетском корпусе, где курс математики был значительно больше, чем даже в реальных училищах, не говоря уже о гимназиях. Свыше десяти лет он работал и на Высших женских курсах. Тем не менее, научные интересы Николая Александровича в то время принадлежали, главным образом, элементарной математике и вопросам ее преподавания в средней и повышенной начальной школе.

Самые ранние публикации Н.А. Извольского – его учебные пособия. В 1903-1904 годах в Москве выходит в двух частях его “Арифметика”. В 1918 году там же обе части “Арифметики” выходят уже четвертым изданием. В 1910 году была опубликована его “Геометрия в пространстве”, а в следующем 1911 году – “Геометрия на плоскости”. Эти руководства выдержали также по четыре издания – в последний раз они вышли в Ленинграде в 1924 году. В том же году в Москве вышла его “Методика геометрии” - первый учебник по методике математики на русском языке, опубликованный после 1917 года.

Перу Николая Александровича принадлежит и ряд других пособий для начальной и средней школы, впервые вышедших еще до революции.

Н.А. Извольский являлся постоянным автором многих педагогических журналов. Назовем некоторые из опубликованных им в разные годы работ: “О сознательном выполнении арифметических действий” (Педагогический сборник, 1906); “О биссектрисах треугольника” (Вестник опытной физики и элементарной математики, 1910); “Цель обучения арифметике” (Там же, 1913); “Заметки о преподавании геометрии” (Математическое образование, 1912); “Первые шаги курса геометрии” (Там же, 1913); “Особые явления в учебно-задачной литературе” (Педагогический вестник Московского учебного округа, 1913); “Комбинационная работа, как основа для преподавания математики” (1914).

В 1914 году Николай Александрович начал издавать журнал “Математический вестник”. Главной задачей нового журнала стало обсуждение вопросов методики преподавания математики в начальных учебных заведениях. Значительное число публикаций в этом издании принадлежало его редактору. Отметим некоторые: “Мой взгляд на предмет геометрии” (1914, № 4); “Начальное знакомство учащихся с уравнениями” (1915, № 8); “О желательной постановке курса математики в высших начальных училищах” (1916, № 6); “Беседы с учащимися о началах геометрии” (1917, № 3).

Работая в Москве, Н.А. Извольский был одним из активных членов Московского математического кружка – объединения московских педагогов-математиков, которое возглавлял профессор Московского университета Б.К. Млодзеевский. В 1916 году кружок избрал Николая Александровича своим представителем для работы в комиссии при Министерстве народного просвещения по подготовке программ математики в средней школе.

Приведем темы некоторых докладов Н.А. Извольского на заседаниях Московского математического кружка: “Об учебнике геометрии Бореля” (1909); “Прямая и обратная теоремы Симпсона и их обобщение” (1910); “Изучение степеней чисел” (1915).

Н.А. Извольский участвовал в работе как Первого, так и Второго всероссийских съездов преподавателей математики (1912 и 1914 гг.). Он выступал на обоих съездах. Тексты его докладов опубликованы. Их темы: “Современное состояние курса геометрии в средней школе в связи с обзором наиболее распространенных учебников” (1912); “К вопросу о длине окружности” (1914).

В Ярославском педагогическом институте Н.А. Извольский читал отнюдь не методику. Он преподавал здесь различные разделы курса математики.

Не располагая данными обо всех прочитанных им в Ярославле курсах, мы можем сказать о некоторых из них, на основании обнаруженных в архиве карточек учебных поручений.

В 1927/1928 учебном году он читал курсы математического анализа и высшей математики (в этот последний входили теория вероятностей и проективная геометрия). Те же курсы он читал и в 1929/1930 учебном году. В 1932/ 1933 учебном году ему были поручены курсы высшей алгебры и теории вероятностей. В 1938/1939 учебном году ему были запланированы: аналитическая геометрия (годовой курс), высшая геометрия, теория геометрических построений и теория вероятностей.

В 1932/1933 учебном году на III курсе математической секции Н.А. Извольским был прочитан спецкурс "Избранные вопросы элементарной математики с высшей точки зрения" (15 часов). Среди рассмотренных здесь вопросов были следующие: непрерывные дроби; измерение длин; теория площадей по Евклиду и Веронезе; "краткие сведения о циклических точках, об абсолюте плоскости и о проективной метрике". Среди рекомендованных по этому курсу руководств указана книга Ф. Энриквеса "Fragen der Elementargeometrie", t.II. Николай Александрович рекомендовал и свои учебники по геометрии и методике геометрии [3].

Как видно из сказанного выше, Н.А. Извольский читал в Ярославле математические курсы, а также избранные вопросы элементарной математики. И темы для дипломных работ он предлагал, преимущественно из высшей или элементарной геометрии. Назовем некоторые из предлагавшихся тем: "Учение о кривизне пространственных кривых и поверхностей", "Способ Греффе вычисления иррациональных корней уравнения"; "Штейнеровы построения", "Теоремы Паскаля и Брианшона в свете синтетической и проективной геометрии"; "Проективная теория полюсов и поляр относительно конических сечений"; "Преобразование обратными радиусами".

Среди тем дипломных работ иногда встречаются и методические, в том числе: "Отрицательные и дробные числа и методы их применения в средней школе", "Теория симметрических функций корней уравнений и ее начатки в курсе школы при изучении квадратных уравнений" [4].

Читая курс проективной геометрии, Н.А. Извольский столкнулся с тем, что учебников по этому разделу геометрии на русском языке тогда не было. Существовали, конечно, дореволюционные учебники, написанные К.А. Андреевым, М.Е. Ващенко-Захарченко и другими авторами, но их было мало. Нужен был новый учебник. И Николай Александрович написал книгу "Основной курс проективной геометрии", изданную в 1933 году Государственным технико-теоретическим издательством тиражом 5000 экземпляров. Объем книги составил 10,5 печатных листов [5].

В соответствии с традицией русских геометров, автор строит изложение, отталкиваясь от понятия проективного соответствия и теоремы Дезарга. Такой же, или очень близкий, подход к проективной геометрии осуществлен в книге "Проективная геометрия" М.Е. Ващенко-Захарченко, вышедшей в Киеве в 1897 году.

Н.Ф. Четверухин (1891-1974), опубликовавший в Учпедгизе практически одновременно с Н.А. Извольским свой учебник “Введение в проективную геометрию”, начинает с вопросов, связанных с аффинными преобразованиями и построением изображений. Раздел собственно проективной геометрии он строит достаточно близко к используемой Н.А. Извольским схеме, но Н.Ф. Четверухин рассматривает и проективные координаты, которых у Н.А. Извольского нет совсем – у него изложение чисто конструктивное.

В 1938 году Комитетом по делам высшей школы при СНК СССР были утверждены программы для пединститутов. Среди рекомендованных пособий по курсу “Высшая геометрия” был указан и учебник Н.А. Извольского.

В последние годы жизни (он скончался 27 сентября 1938 года) Николай Александрович работал над книгой “Синтетическая геометрия”. Опубликовано это сочинение было уже после смерти автора, в 1941 году.

О содержании книги можно судить по следующим словам из авторского предисловия: “...Большая часть нашего студенчества остается неознакомленной ни с тем богатством фактического матерétила, который дала нам старая (греческая) синтетическая геометрия, ни с теми методами, с помощью которых это богатство было получено...

Издается очень много книг, но почти нет таких, которые давали бы простое, проводимое синтетическими методами, по возможности конкретное, ознакомление с фактами греческой геометрии... Главным ее (книги – Р.Г.) содержанием является синтетическая теория конических сечений; ей предшествуют необходимые для пополнения геометрического образования главы, посвященные учению о радикальной оси, о центрах подобия кругов и т.д.” [6].

Из периодических изданий, в которых Н.А. Извольский печатался в советское время, отметим сборник “Математическое просвещение” и журнал “Математика в школе”, до 1936 года выходивший под названием “Математика и физика в школе”. В первом из указанных изданий вышли следующие статьи: “Геометрия Понселе” (1935, вып. 4); “О параболах, вписанных в треугольник” (1936, вып. 10). Во втором были опубликованы работы: “Геометрическое учение о площадях” (1935, № 3); “Вопросы построимости линейкою и циркулем” (1936, № 3, 4); “Об уравнениях и их методике” (1936, № 5); “Об одном применении метода инверсии” (1938, № 5-6); “К вопросу об учебнике геометрии” (1939, № 3) [7].

Но вернемся, однако, в Ярославский педагогический институт.

В 1930 году из Ярославля уехала профессор Л.Н. Запольская, и Н.А. Извольский возглавил кафедру математики пединститута. В 1937 году эта единственная математическая кафедра была разделена на две, и он стал заведующим кафедрой геометрии.

Как заведующий кафедрой, Николай Александрович значительное внимание уделял работе студенческого научного кружка, выступал перед учителями, внимательно следил за работой кабинета математики, которым заведовал ведущий факультетский методист-математик С.И. Петров.

Выступал он и в Москве. В феврале 1928 года Н.А. Извольский сделал доклад в геометрическом кружке при научно-исследовательском Математическом институте 1-го МГУ. Тема доклада: "Гармонизирующие конические сечения".

В 20-х годах в Ярославле появляются и местные научные издания. В 1926 году вышел первый выпуск первого тома Трудов Ярославского педагогического института. Единственная статья по математике в этом томе – статья Н.А. Извольского "Некоторые изыскания о парах кругов".

В 30-х годах в СССР начинает формироваться институт ученых степеней и званий приблизительно в таком виде, как он существует в настоящее время. Появляется ВАК.

В 1937 году ЯГПИ направил в ВАК ходатайство о присвоении Н.А. Извольскому ученой степени доктора физико-математических наук без защиты диссертации. В этом ходатайстве институту было отказано. Н.А. Извольский был утвержден в ученой степени кандидата физико-математических наук без защиты диссертации и в ученом звании профессора по кафедре математики [2].

Документы ВАК Николай Александрович получил за несколько месяцев до смерти. Осенью 1938 года ему стало плохо прямо на занятиях, его увезли в больницу, где он и умер. Н.А. Извольский был похоронен в Ярославле, на Леонтьевском кладбище. К сожалению, его могила не сохранилась. В 50-е годы младшие коллеги Николая Александровича пытались ее найти, но безуспешно.

Осенью 1939 года на физико-математическом факультете ЯГПИ был организован вечер памяти Н.А. Извольского. На нем было сделано два сообщения: "Н.А. Извольский как методист" (докл. Н.Н. Шемянов), и "Н.А. Извольский как математик" (докл. Д.Е. Ножницкий).

22 ноября 1995 года кафедры геометрии и методики преподавания математики ЯГПУ провели заседание объединенного научно-методического семинара, посвященное 125-летию со дня рождения Н.А. Извольского. Программа заседания включала четыре сообщения.

С докладом "Жизнь и научная деятельность Н.А. Извольского" выступил заведующий кафедрой геометрии профессор Л.А. Сидоров. Доцент этой же кафедры Т.Л. Агафонова рассказала о геометрических работах ученого. Методическому наследию Николая Александровича было посвящено два сообщения. Одно из них освещало его работы по методике геометрии, а второе – по методике начального обучения. Докладчиками выступили доценты П.С. Марголите и В.Г. Иванов.

Библиографический список

1. *Андронов, И.К.* Полвека развития школьного математического образования в СССР [Текст] / И.К. Андронов. – М., 1967.
2. Государственный архив Ярославской области (ГАЯО). – Ф. Р-2257. – Оп. 10. – Дело 15.
3. ГАЯО. – Фонд Р-2257. – Оп. 5. – Дело 311.
4. ГАЯО. – Фонд Р-2257. – Оп. 5. – Дело 124.
5. *Извольский, Н.А.* Основной курс проективной геометрии [Текст] / Н.А. Извольский. – М., 1933.
6. *Извольский, Н.А.* Синтетическая геометрия [Текст] / Н.А. Извольский. – М., 1941.
7. *Шемянов, Н.Н.* Н.А. Извольский [Текст] / Н.Н. Шемянов // Ученые записки ЯГПИ. – 1955. – Вып. 17.

Комбинационная работа по арифметике и геометрии в трудах Н.А. Извольского

С.В. Жаров

В 2010 году исполняется 140 лет со дня рождения профессора Ярославского государственного педагогического института (ныне университета) Николая Александровича Извольского. Исторический период его трудовой деятельности – конец XIX века и первая треть XX века. Задача данной статьи – описать в общих чертах его методическую работу в области изучения начального курса арифметики и геометрии. Педагогический труд на протяжении 44 лет – удел не всякого. Обилием своих мыслей Николай Александрович делился с читателями педагогических журналов, в том числе с читателями своего собственного журнала “Математический вестник” – журнала, посвященного преподаванию арифметики и начал алгебры и геометрии. Участник двух всероссийских съездов преподавателей математики (1912-1914 гг.), автор многих учебников по арифметике, геометрии и методике преподавания арифметики и геометрии ставит своей основной задачей борьбу со школьной рутиной, ищет пути обновления школьной математики и методов ее преподавания.

Доклад Н.А. Извольского на Втором Всероссийском съезде преподавателей математики в январе 1914 года назывался “Комбинационная работа, как основа для преподавания математики”. Он явился продолжением статьи “Цель обучения арифметике” в “Вестнике опытной физики и элементарной математики" за 1913 год (№ 594). Со ссылкой на мемуар Анри Пуанкаре "Наука и метод" Н.А. Извольский ставит цель обучения арифметике, выразив ее следующими словами: "при обучении арифметике, даже ее началам, следует обратить внимание на развитие способности к комбинационной работе" [2]. "И возникает желание поставить дело обучения математики так, чтобы с самых ранних шагов приучать учащихся к комбинационной работе, развивать стремление подмечать аналогию у ряда осуществленных комбинаций, приближать учащихся к взгляду, что содержание изучаемого отдела явилось результатом именно такой комбинационной работы и результатом стремления открывать аналогии в ряде осуществленных комбинаций" [1].

Остановимся сначала на арифметике. Арифметика берет на себя целые и дробные числа. Существование каждого числа для нашего созерцания является фактом. Скорее всего изучение интересных особенностей арифметического материала достигнет цели в том случае, если "применять арифметику, возможно искуснее, на практике, чем решение бесконечного ряда задач" [1]. Приведем пример Н.А. Извольского, который иллюстрирует вид комбинационной работы и ее значение. Рассмотрим целое число 6 и создадим комбинацию 6=1+2+3, т.е. разложим на последовательные слагаемые. Смотрим далее 12=3+4+5, потом 15=7+8=1+2+3+4+5 и т.д. Некоторые числа допускают такое разложение. Задача состоит в том, чтобы подметить закономерность, всякое ли число так можно разложить. Результат не заставляет себя долго ждать – нельзя представить числа, являющиеся степенями числа 2. Путь индукции выявил закономерность. Н.А. Извольский считал безусловно необходимым перестроить курс арифметики так, чтобы включить в него ряд отдельных задач комбинационного характера. В развитие этой идеи Н.А. напечатал в 1916 году книгу "Комбинационная работа. Сборник упражнений по арифметике", на которую ссылались впоследствии многие авторы сборников задач по арифметике, но до сих пор не удается ее увидеть ни в бумажном, ни в электронном виде.

По степени трудности Николай Александрович разделил арифметические задачи на четыре серии. Примеры первых двух серий относятся полностью к современной начальной школе. Первая серия направлена на поиск простых арифметических закономерностей. Например, пишем сумму 4+14+24+34= и 4+15+26+37= . Выясняется, что в первом примере каждое последующее слагаемое на 10 больше предыдущего, а во втором – на 11. Построить сумму чисел, начиная с 4 и разностью в 12 и т.д. до тех пор, пока в ответе не получится ровно 100. Меняя первое слагаемое и создавая подобные комбинации, получим, что только четыре однозначных числа – 1, 4, 7 – при таких условиях дадут в сумме

100. Вторая серия затрагивает примеры на комбинацию арифметических действий и их очередность. Третья серия имеет целью достигнуть того, чтобы учащиеся из ряда примеров могли подметить какую-либо особенность известного класса чисел. Например, при возведении в квадрат результат не может оканчиваться на 2, 3, 7 и 8, что является результатом опытной работы.

Четвертая серия задач охватывает более сложные вопросы и также имеет целью подметить особенности комбинаций при возведении в квадрат, при изучении свойств делимости, при разложении числа на последовательные слагаемые. Рассмотрим такие примеры, которые позволяют применить комбинационный метод. Один из них – изыскать способ быстро находить суммы дробей:

$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{48\cdot 49}=?$ (заметить $\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$).

Подобный пример:

$\frac{2}{1\cdot 3}+\frac{2}{3\cdot 5}+\frac{2}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{2}{53\cdot 57}=?$ (заметить $\frac{2}{3\cdot 5}=\frac{1}{3}-\frac{1}{5}$).

Еще один интересный пример: разложить на простые множители произведение чисел от 1 до 121. Это потребует усидчивости, смекалки. Вопрос состоит в том, чтобы оживить преподавание арифметики, чтобы учащийся становился соавтором известных арифметических закономерностей, а не простым воспроизводителем уже открытых до него истин. В современной методической литературе такой метод называется эвристическим или комбинационно-исследовательским.

В 1916 году в журнале “Математический вестник” вышла статья Н.А. Извольского “Различные направления в области методики арифметики” [4], где изложены три основных направления преподавания арифметики – средство убеждения, когда учитель всегда прав, средство интуиции, образного мышления, когда учитель получает правило через демонстрацию конкретных примеров, и третий – логический, основанный на знании известных фактов. Кратко анализируя указанные способы, Николай Александрович приходит к выводу, что в реальной жизни “неизбежно опираться и на логику, и на интуицию, а отчасти и на доверие” [4].

Представляет интерес обратиться еще к одной статье в журнале “Математический вестник”, вып. 1-2, за 1917 год – “Проект новой постановки курса математики в средней школе” [3], где Н.А. Извольский делает попытку перестроить курс математики так, чтобы он не стал “гнетом на учащихся”. Это легко сравнить с нынешней средней школой, когда постоянно твердится, что юристу, врачу, историку и т.п. не нужна математика, поэтому учить ее не надо, и происходит натаскивание учащихся на экзамен, а не выявление логической необходимости изучения предмета. Автор подчеркивает, что нельзя все ставить на запоминание, желательно вовлекать учащихся в составление различных примеров из имеющихся, широко привлекать жизненный опыт. Он пишет, что “творческая работа исходит из построения и изучения комбинаций из материала, над которым приходится работать;. . . результатом изучения этих комбинаций являются заключения, ценные для науки, техники, полезные результаты для практической жизни. В сущности вся изобретательность человека начинается с комбинационной работы” [3].

В цитируемом проекте рассматриваются четыре основных раздела математики: арифметика, алгебра, геометрия и тригонометрия, при этом в конце статьи приводится минимум числа уроков для каждого раздела. Основная идея творческой работы пронизывает все указанные разделы. Остановимся еще на одном разделе математики – геометрии.

В статье “Проект новой постановки...” Н.А. Извольский подчеркивает, что “основная работа учащихся на протяжении всего курса геометрии должна иметь целью выяснять *происхождение* теорем. Так как традиционное преподавание этот вопрос. . . игнорирует, то ясно, что геометрия в представлении учащихся становится собранием неизвестно откуда, почему и зачем появившихся теорем, которые для чего-то надо доказывать” [3].

Первоисточником материала по геометрии является опыт и наблюдение. Существование каждой точки, прямой, поверхности для нас является фактом. Поэтому предметом изучения геометрии являются соотношения между этими основными образами. После установления этого вопроса начинается комбинационная работа. Н.А. Извольский пишет, что “обучение геометрии должно было бы начаться в таком направлении, а не с доказательства ряда теорем” [1]. При этом условием усвоения данного курса является уверенность в непреложности геометрических истин. Далее Н.А. Извольский пишет, что “уверенность может создаться лишь тогда, когда воображение и мысль учащихся пройдут путь, приведший к указанным свойствам, путь, на протяжении которого должны работать и интуиция, и логика” [1]. В духе Д. Гильберта мы мыслим три рода вещей – точки, линии, поверхности, т.е. мы можем понимать нечто материальное. В геометрии мы обязательно прибегаем к материальному осуществлению через модель или рисунок. После исходных положений начинаем строить различные комбинации. Например, выделив одну точку на прямой, получим сразу два луча, две точки – отрезок, комбинируя два луча с общей вершиной, получим угол и т.д. Можно усложнять комбинации и переходить к сравнению отрезков и углов, к их сложению и вычитанию. Дальнейшее рассмотрение двух прямых приведет к понятию параллельных и пересекающихся прямых, а комбинация из трех прямых уже дает повод к изучению треугольников. Усложняя комбинационную работу, перейдем и к пространственным образам.

В качестве иллюстрации приведем несколько примеров, которые преследовали бы развитие комбинирующей деятельности учащихся [1].

1) Даны три точки, не лежащие на одной прямой. Построить параллелограмм так, чтобы эти точки были его вершинами. Сколько решений имеет задача? Конгруэнтны ли построенные параллелограммы? Исследование построенной фигуры приведет к рассмотрению средней линии треугольника, соотношению площадей полученных треугольников.

2) Если каждую сторону треугольника увеличить в 2 или 3 раза, то во сколько раз увеличится площадь? Площади подобных фигур на плоскости относятся, как квадрат коэффициента подобия.

3) Даны в пространстве две прямые. Сколько можно провести через них пар параллельных плоскостей? Если прямые скрещиваются, то одну, если они параллельны, то бесконечное множество, если пересекаются, то одну при условии, что совпадающие плоскости попадают в ранг параллельных плоскостей.

4) Геометрические места точек, равноудаленных от двух, трех данных точек, плоскостей; задачи на построение шаров, проходящих через 2, 3, 4 точки и касающихся данных плоскостей.

В "Проекте новой постановки..." Н.А. Извольский подчеркивает необходимость знания основных геометрических объектов, свойств геометрических величин (длина, площадь, объем) и указывает на особую роль задач на построение. Кроме того, автор обращает внимание, что "начало курса геометрии должно вестись в значительно замедленном темпе, чтобы дать возможность, пользуясь рядом упражнений, самых простых, прочно закрепиться в воображении учащихся основным геометрическим образам. Стремление создать в воображении учащихся отчетливые образы для геометрических объектов должно считаться основою методики геометрии" [3]. Николай Александрович уделял много времени методическим вопросам начального изучения различных разделов математики. Многие методические находки можно применить и в современных курсах начальных классов.

В заключение постараемся провести некоторую общую линию между тремя известными методистами арифметики в плане решения задач – С.А. Рачинским, С.И. Шохор-Троцким и Н.А. Извольским. Первые два методиста известны с конца 19 века и начала 20 века. С.А. Рачинский хотел построить курс арифметики на множестве интересных жизненных задач, при этом особое внимание уделял устному счету (беда нынешних учеников). В своей "Методике арифметики" С.И. Шохор-Троцкий формулирует "метод целесообразных задач", который выражается словами:

“истинная метода состоит в том, чтобы ставить ребенка в условия, при которых ум человеческий начал изобретать арифметику, и сделать его свидетелем этого изобретения” [5]. Н.А. Извольский явился продолжателем высказанных идей, обобщил их на другие разделы математики и в многочисленных работах сформулировал свой метод, который заключается в комбинационной работе, как основе для преподавания математики, и подготовил соответствующий проект новой постановки всего курса математики в средней школе.

Библиографический список

1. *Извольский, Н.А.* Комбинационная работа как основа для преподавания математики [Текст] / Н.А. Извольский // Доклады, читанные на 2-ом Всеросс. Съезде преподавателей математики. – М., 1915. – С. 148-157.
2. *Извольский, Н.А.* Цель обучения арифметике [Текст] / Н.А. Извольский // В.О.Ф.Э.М. – 1913. – № 594. – С. 145-151.
3. *Извольский, Н.А.* Проект новой постановки курса математики в средней школе [Текст] / Н.А. Извольский // Математический вестник. – 1917. – Вып. 1-2. – С. 1-26.
4. *Извольский, Н.А.* Различные направления в области методики арифметики [Текст] / Н.А. Извольский // Математический вестник. – 1916. – Вып. 7-8. – С. 186-192.
5. *Шохор-Троцкий, С.И.* Методика арифметики [Текст]: пособие для учителей средней школы / С.И. Шохор-Троцкий. – 5-е изд. – М.-Л.: Учпедгиз, 1935. – 344 с.

О забытом авторе забытых учебников

И.К. Зубова

В 2007 г., на Пятых Колмогоровских чтениях, проходивших в Ярославском государственном педагогическом университете, впервые довелось услышать об изданном в 1908 году в Оренбурге библиографическом труде Д.В. Агапова “Алфавитный каталог русских книг по математике, вышедших в России с начала книгопечатания до последнего времени”. Автор имеет в виду период с 1682 по 1908 год. Каталог включает 1678 названий учебников, задачников, справочников, научно-популярных изданий для учащихся средних и высших учебных заведений.

Имя этого автора и его каталог упомянули в своих докладах В.П. Одинец, профессор Российского государственного педагогического университета им. А.И. Герцена (С.-Петербург) и В.М. Бусев, аспирант

Института истории естествознания и техники РАН (Москва). Предметом исследования последнего являются вопросы истории математического образования в России. В статье “О библиографической работе в области преподавания математики” В.М. Бусевым сделан подробный обзор библиографических работ, посвященных этим вопросам. Труду оренбургского автора здесь дается весьма высокая оценка, этот каталог называется важным и полезным для преподавателя математики и в наши дни.

Интерес к этому изданию вызвал естественный интерес и к его составителю, Д.В. Агапову, который и сам является автором довольно многих пособий по элементарной математике. Он включил в свой каталог 25 названий собственных изданий, выпущенных до 1908 года. В первом разделе каталога, названном “Арифметика”, содержится девять названий книг Агапова. Во втором – “Алгебра” – пять названий. В третьем – “Геометрия” – также пять названий, в четвертом – “Тригонометрия” – три названия, и в пятом – “Математика элементарная и высшая” – вновь три названия. Большая часть этих книг представляет собой учебники и руководства к решению задач для средних и старших классов и по программе выпускных экзаменов, а также вступительных конкурсных экзаменов в высшие специальные учебные заведения.

Обратившись к каталогу Российской Государственной Библиотеки, мы убедились, что Дмитрий Васильевич Агапов с 1891 по 1927 годы активно издавал в Оренбурге математическую литературу. Предлагаем вниманию читателя список его трудов. Мы сохраняем его классификацию работ в составленном им каталоге и дополняем список названиями, найденными в каталоге РГБ. Кроме того, источником для дополнения этого списка служит недавно изданный Оренбургской областной универсальной научной библиотекой им. Н.К. Крупской библиографический указатель “Оренбургская книга: XIX-XXI вв.”

Арифметика

1. Подробное решение и объяснение наиболее трудных арифметических задач сборника А. Малинина и К. Буренина. – Оренбург, 1891. – 42 с.

2. Подробное решение и объяснение типических задач по арифметике: для ст. классов сред. учеб. заведений. – Оренбург: типолитогр. Б.А. Бреслина, 1894. – 84 с.

3. Подробное решение и объяснение типических задач по арифметике: для ст. классов сред. учеб. заведений. – 2-е изд., доп. – Оренбург [скл. изд. у авт.], 1898. – 132 с.

4. Подробное решение и объяснение типических задач по арифметике. для ст. классов сред. учеб. заведений. – 3-е изд. – Оренбург [гл. скл. изд. у авт.], 1900. – 93 с.

5. Подробное решение и объяснение наиболее трудных арифметических задач сборников А. Малинина, К. Буренина и И. Верещагина. – Оренбург [гл. скл. изд. у авт.], 1900. – 273 с.

6. Ответы на все вопросы по арифметике и из приложений алгебры к геометрии, помещенные в экзаменационных программах конкурсных испытаний в высшие специальные учебные заведения. – Оренбург, 1901. – 63 с.

7. Арифметические действия и применение их к решению задач. – Оренбург: типолитогр. Б.А.Бреслина, 1902. – 61 с.

8. Подробное решение и объяснение арифметических задач, помещенных в систематическом сборнике В. Арбузова, А. Минина, В. Минина, Д. Назарова. – Оренбург [гл. скл. изд. у авт.], 1902. – 142 с.

9. Основы арифметики. – Оренбург [гл. скл. изд. у авт.], 1902. – 45 с.

10. Различные способы решения типичных и наиболее употребительных задач по арифметике. – Оренбург [гл. скл. изд. у авт.], 1902. – 72 с.

11. Руководство к решению и объяснению арифметических задач на тройные правила. – Оренбург [гл. скл. изд. у авт.], 1902. – 120 с.

12. Образцы письменных экзаменационных работ по арифметике. – Оренбург [гл. скл. изд. у авт.], 1902. – 79 с.

Алгебра

13. Подробное решение и объяснение наиболее трудных задач алгебры Давидова. – Оренбург [изд. авт.], 1891. – 43 с.

14. Подробное решение и объяснение наиболее трудных задач алгебры Малинина и Буренина. – Оренбург [изд. авт.], – 1892. – 38 с.

15. Искусственные способы решения уравнений второй степени со многими неизвестными. Для старших классов средних учебных заведений / сост. Д.В. Агапов. – Оренбург: изд. авт., 1894. – IV. – 52 с.

16. Искусственные способы решения уравнений второй степени со многими неизвестными. Для старших классов средних учебных заведений. 2-е издание, доп. / сост. Д.В. Агапов. – Оренбург [скл. изд. у авт.], 1899. – 64 с.

17. Подробное решение и объяснение наиболее трудных алгебраических задач сборника Ф. Бычкова. – Оренбург: типолитогр. Б. Бреслина, 1900. – 105 с.

18. Искусственные способы решения уравнений второй степени со многими неизвестными. Для старших классов средних учебных заведений. Третье дополненное издание / сост. Д.В. Агапов. – Оренбург [гл. скл. изд. у авт.], 1901. – 55 с.

19. Подробное решение и объяснение наиболее трудных алгебраических задач сборника Н.А. Шапошникова и Н.К. Вяльцева. – Оренбург [гл. скл. изд. у авт.], 1902. – 107 с.

20. Пособие к решению алгебраических задач на составление уравнений. – Оренбург [гл. скл. изд. у авт.], 1902. – 78 с.

21. Приложение логарифмов к вычислению сложных процентов и срочных уплат. – Оренбург [гл. скл. изд. у авт.], 1902. – 62 с.

22. Новая формула для возведения бинома. – Оренбург, 1927.

Геометрия

23. Подробное решение и объяснение наиболее трудных численных задач геометрии А. Давидова. – Оренбург [изд. авт.], 1891. – 41 с.

24. Решение некоторых геометрических задач помощью теоремы Агапова: во всяком прямоугольном треугольнике произведение катетов равно произведению полупериметра треугольника на разность между суммой катетов и гипотенузы: для ст. классов сред. учеб. заведений. – 2-е изд. – Оренбург [скл. изд. у авт.], 1898. – 20 с.

25. Методы решения треугольников. Для старших кл. средн. учебн. завед. – Оренбург [скл. изд. у авт.], 1899. – 96 с.

26. Подробное решение и объяснение 50 геометрических теорем и задач на построение, помещенных в программах вступительного конкурсного экзамена в высшие специальные учебные заведения. – Оренбург [гл. скл. изд. у авт.], 1901. – 35 с., 1 л. черт.

27. Подробное решение и объяснение всех численных задач геометрии А. Давидова. – Оренбург [гл. скл. изд. у авт.], 1902. – 180 с.

28. Подробное решение и объяснение наиболее трудных задач геометрии А. Киселева. – Оренбург: типолитогр. Б.А. Бреслина. 1902. – 76 с.

29. Сборник наиболее употребительных геометрических задач на построение и методы их решения. – Оренбург [гл. скл. изд. у авт.], 1902. – 92 с., 2 л. черт.

30. Измерение углов линейными мерами и решение треугольников по новой системе Д.В. Агапова. – Оренбург [скл. изд. у авт.], 1908. – 43 с. с прибавлением: черт., 1 л. ил.

31. Новые угломеры линейной системы, для чертежных, межевых и других технических работ, с объяснением основания их устройства и с указанием употребления. 2-е прибавление к брошюре “Измерение углов линейными мерами”. – Оренбург: типолитогр. Б.А. Бреслина, 1908. – 8 с., 3 л. черт.

32. Геометрия на новых началах. Без параллельных: система Д.В. Агапова: решение треугольников. – Оренбург: типолитогр. Б.А. Бреслина, 1909. – 92 с.

33. Деление данного отрезка прямой на произвольное число равных или пропорциональных частей, с указанием устройства и примене-

ния делительной и пропорциональной линейки. – Оренбург: типолитогр. Б.А. Бреслина, 1909. – 14 с.: 1 л. черт.

34. Измерение углов помощью угломера линейной системы Д.В. Агапова. Прибавление к брошюре “Геометрия на новых началах”. – Оренбург: типолитогр. Б.А. Бреслина, 1909. – 22 с., 1 л. черт.

35. Основное понятие об углах. – Оренбург: типолитогр. Б.А. Бреслина, 1909. – 15 с., 1 л. черт.

36. Угловой или копировальный циркуль: полное описание циркуля с указанием его применений. – Оренбург: типолитогр. Бреслина, 1911. – 12 с.

Тригонометрия

37. Подробное решение и объяснение наиболее трудных задач тригонометрии А. Малинина. – Оренбург [изд. авт.], 1892. – 44 с., 1 л. черт.

38. Новая тригонометрия. Решение треугольников с помощию теоремы Агапова. – Оренбург: типолитогр. Б.А. Бреслина, 1894. – 124 с.

39. Новая тригонометрия. Решение треугольников помощию одной теоремы. 45 случаев. Для старших классов средних учебных заведений. – 2-е изд. – Оренбург [скл. изд. у авт.], 1898. – 96 с.

40. Тригонометрические теоремы, формулы и применение их к решению задач: темы для письмен. испытаний с образцами решения их. – Оренбург [скл. изд. у авт.], 1899. – 144 с., 3 л. черт.

41. Приложение теории круговых функций к тригонометрии. Методы решения треугольников. – Оренбург, 1899.

42. Тригонометрический транспортир с переменною и постоянною степенями точности и с показателем величин тангенсов половин определяемых углов: его теория и применение: тригонометрия на новых началах. – Оренбург, 1918. – 73 с.

Математика

43. Собрание наиболее трудных задач по математике, служивших темами на испытаниях зрелости во всех учебных округах России, с подробным решением и объяснением их: Вып. 1-4. – Оренбург: тип. Б.А. Бреслина, 1890-1893.

Вып. 1: Арифметика. – 1890. – 80 с.

Вып. 2: Алгебра. – 1890. – 67 с.

Вып. 3: Геометрия. – 1891. – 93 с., 2 л. черт.

Вып. 4: Тригонометрия. – 1893. – 88 с., 2 л. черт.

44. Собрание наиболее трудных задач по математике, служивших, во всех округах России, темами на испытаниях зрелости в гимназиях и на выпускных экзаменах в реальных училищах, с подробным решением

и объяснением их: арифметика, алгебра, геометрия и тригонометрия. – 2-е изд. – Оренбург [скл. изд. у авт.], 1898. – 132 с., 3 л. черт.

45. Конспект и справочная книжка по математике: формулы, необходимые при решении задач по арифметике, алгебре, геометрии и тригонометрии: темы для письменных испытаний с образцами решения их. – Оренбург: типолитогр. Б.А. Бреслина, 1892-1893.

Вып. 1. Арифметика. – 1892. – 50 с.

Вып. 3. Геометрия. – 1892. – 52 с.

Вып. 4. Тригонометрия. – 1893. – 80 с.

46. Конспект и справочная книжка по математике: формулы, необходимые при решении задач по арифметике, алгебре геометрии и тригонометрии: темы для письменных испытаний с образцами решения их. – 2-е изд. – Оренбург [скл. изд. у авт.], 1898 . – VIII, 116 с., 1 л. черт.

47. Конспект и справочная книжка по математике: формулы, необходимые при решении задач по арифметике, алгебре геометрии и тригонометрии: темы для письменных испытаний с образцами решения. – 3-е изд. – Оренбург [гл. скл. изд. у авт.], 1900. – VIII, 118 с., 1 л. черт.

48. Собрание задач по математике, служивших темами на испытаниях зрелости в гимназиях и на выпускных экзаменах в реальных училищах, с подробным решением и объяснением их: арифметика, алгебра, геометрия и тригонометрия. – 3-е изд. – Оренбург [гл. скл. изд. у авт.], 1900. – 176 с., 5 л. черт.

49. Сборник типичных и наиболее трудных задач по арифметике, алгебре, геометрии, тригонометрии и физике, предлагавшихся на конкурсных экзаменах во всех высших специальных учебных заведениях, с подробными решениями и объяснениями. – Оренбург: типолитогр. Б.А. Бреслина. 1901. – 196 с.

50. Ответы на все вопросы об арифметике и из приложений алгебры к геометрии, помещенные в экзаменационных программах конкурсных испытаний в высшие учебные заведения. – Оренбург [гл. скл. изд. у авт.], 1901. – 63 с.

51. 1. Новая формула для возведения биномов с производительными коэффициентами в любую степень; 2. Чисто-элементарная формула для определения кривой эллипса; 3. Теорема тангенсов, объединяющая решение треугольников во всевозможных основных и особых случаях: система Д.В. Агапова. – Оренбург, 1927. – 12 с.

Неожиданно в каталоге РГБ встретилась и такая запись: Д.В. Агапов. Кто виноват? Драма из современной жизни: в 3-х д. – Оренбург: типолитография Б.А. Бреслина, 1895. – 97 с. Разумеется, у нас не было сомнений в том, что Д.В. Агапов – преподаватель математики. Присутствие среди его трудов литературного произведения этому предположению нисколько не противоречит: среди преподавателей довольно часто увлечение художественной литературой!

Где мог работать такой преподаватель? Естественно было предположить, что трудился он в одном из трех уважаемых учебных заведений Оренбурга, в которых математика преподавалась на высоком уровне. Это были: Неплюевское военное училище (позднее – Неплюевский кадетский корпус), открытое в январе 1825 г., классическая мужская гимназия, которая открылась в 1868 г., и, наконец, реальное училище. Оно было открыто в Оренбурге в 1892 г. и в начале XX века стало широко известно и за пределами Оренбургской губернии благодаря деятельности в нем математического кружка. В течение нескольких лет в Оренбурге издавался журнале "Записки математического кружка при Оренбургском реальном училище", в котором публиковались наиболее интересные доклады, сделанные на заседаниях кружка. В 1910 году директором реального училища стал К.А. Торопов (1860-1933), математик Петербургской школы, ученик К.А. Поссе (1847-1928).

Однако поиски фамилии Д.В. Агапова в адрес-календарях среди фамилий преподавателей учебных заведений Оренбурга до 1900 года пока никакого результата не дали. Зато, как это ни удивительно, в адрес-календаре Оренбургской губернии за 1914, а потом и за 1915 г. был обнаружен титулярный советник Дмитрий Васильевич Агапов, член Оренбургской губернской контрольной палаты. Остается думать, что человек, несомненно, имевший как математическое образование, так и определенную склонность к преподаванию математики, по каким-то причинам преподаванием не занимался или оставил в какой-то момент преподавательскую деятельность. Познакомившись со списком трудов Д.В. Агапова, можно предположить, что он давал частные уроки, например, помогал выпускникам средних учебных заведений готовиться к поступлению в университет.

По некоторым документам Государственного архива Оренбургской области удалось установить, что оренбургские казаки Агаповы были большой и уважаемой семьей. Ее представители стали довольно известными в городе и губернии людьми. В опубликованном в 2007 году биографическом справочнике А.В. Ганина и В.Г. Семенова "Офицерский корпус Оренбургского казачьего войска" упоминается генерал-майор Василий Васильевич Агапов (1827-1902), из дворян станицы Нижнеозерной. Он был дважды женат, и Дмитрий Васильевич, родившийся 20 октября 1865 года, – второй сын от его второго брака. Год смерти пока не установлен.

Благодаря содействию В.М. Бусева, нам удалось познакомиться с двумя работами Д.В. Агапова, находящимися в Государственной научной педагогической библиотеке им. К.Д. Ушинского в Москве. Изданы обе книги в Оренбурге, в типолитографии Б.А. Бреслина.

Первая из них представляет собой второе издание пособия для старших классов средних учебных заведений "Новая геометрия. Решение треугольников помощию одной теоремы". Выпущена она в 1898 году. В этом пособии речь идет о следующей теореме:

Произведение разности между полупериметром и стороной треугольника на тангенс половины угла, противолежащего этой стороне, есть величина постоянная для каждого треугольника, равная радиусу круга, вписанного в этот треугольник.

Эта теорема, как следует из текста, была доказана Д.В. Агаповым ранее и уже использовалась им в других работах. В рассматриваемом пособии он приводит ее доказательство и выводит из него формулы для решения прямоугольных и непрямоугольных треугольников. Выводится следствие для прямоугольного треугольника:

Во всяком прямоугольном треугольнике произведение катетов равно произведению полупериметра треугольника на разность между суммой катетов и гипотенузой.

Этим следствием можно воспользоваться, когда требуется определить гипотенузу треугольника по его катетам. Такой путь может оказаться предпочтительнее использования теоремы Пифагора, когда приходится работать с большими числами и для упрощения вычислений применять логарифмирование. Все эти сведения занимают всего четыре страницы и представляют собой введение к пособию. Само же оно содержит 86 страниц, на которых изложен подробный разбор 45 случаев решения различных треугольников с помощью выведенных формул. Вместо предисловия в книге помещен отрывок из рецензии, опубликованной в "Журнале министерства народного просвещения" в 1894 году. К сожалению, отрывок невелик и автор рецензии неизвестен. В ней говорится, что способов решения треугольников без применения формул тригонометрии, а только с применением таблиц синусов, тангенсов или их логарифмов существует немало, и способ Агапова - один из них, довольно рациональный и тщательно разработанный.

Вторая работа называется "Измерение углов линейными мерами и решение треугольников по новой системе Д.В. Агапова. На ее титульном листе имеется несколько загадочная надпись: "Склад издания у автора: Д.В. Агапова, Оренбург, Инстит." Подобные надписи встречаются и на титульных листах других книг Агапова, из чего можно сделать вывод, что у него имелся свой книжный склад и, возможно, он сам занимался продажей своих изданий.

Что касается содержания этой работы, то оно довольно неожиданно. Автор предлагает ввести новый способ измерения углов, "заменить градусную систему измерения углов линейною, что даст возможность установить точную, вполне определенную связь между углами и всеми остальными частями треугольника, пользуясь которою, мы будем в состоянии определить все неизвестные части треугольника, путем вычисления, с произвольною степенью точности, при достаточном, конечно, числе данных". Таким образом, в этой работе также представлен способ решения треугольников, но уже другой, совсем не использующий тригонометрию. Если рассмотреть угол MAN и провести перпендикуляры BC, DE, FK к одной из его сторон, мы получим три подобных треугольника: ABC, ADE, AFK (см. рис. 1).

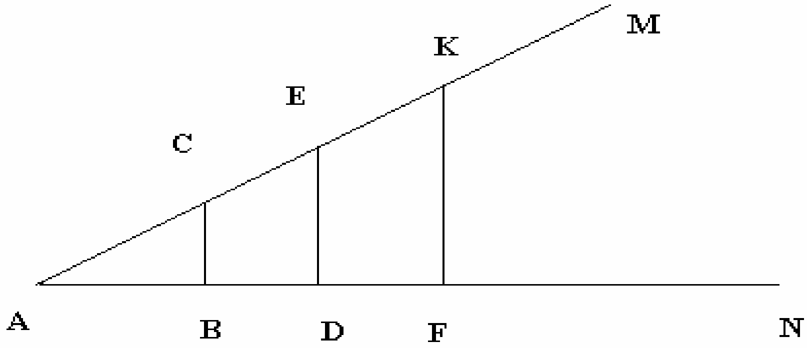
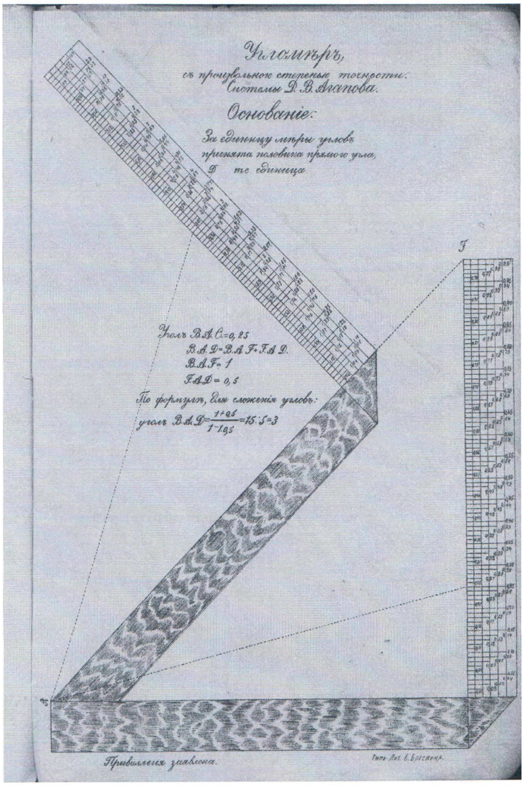


Рис. 1

Из подобия этих треугольников следует равенство отношений: $\frac{BC}{AB} = \frac{ED}{AD} = \frac{FK}{AF}$, то есть отношение высот построенных таким образом прямоугольных треугольников к их основаниям, разумеется, остается постоянным. Величину этого отношения предлагается считать длиной некоего отрезка, измеряющего угол. За единицу меры угла тогда принимается половина прямого угла. "Измеряющая" прямого угла считается равной бесконечности. Вместо транспортира применяется "угломер", представляющий собой бумажную ленту, согнутую в трех местах, под прямым углом, затем под углом в 45 градусов, а затем опять под прямым углом (см. рис. 2).

Вводятся правила сравнения, сложения, вычитания углов, умножения и деления угла на число, определения дополнительного угла по данному острому. Затем автор переходит к решению треугольников. Он рассматривает 15 задач на решение прямоугольных и десять – на решение "косоугольных", т.е., остроугольных треугольников. В следующих параграфах выводятся две формулы площади треугольника с применением понятия "измеряющих линий" его углов, формулы, позволяющие отделить от треугольника линией, параллельной одной из его сторон, треугольник заданной площади, а также отыскиваются площади произвольного четырехугольника, параллелограмма и трапеции, также с использованием "линейного" представления угла и понятия его измеряющей линии.

Следует заметить, что такой подход к изложению темы "Решение треугольников" оригинален и, возможно, интересен для любознательного школьника, или, как мы сказали бы сейчас, мог бы найти применение в профильных классах.



Угломѣръ,
съ произвольною степенью точности:
Системы Д.В. Агапова.

Основание:

За единицу мѣры угловъ
принята половина прямого угла,
D те. единица

Уголъ B.A.C.=0,25
B.A.D=B.A.F+F.A.D.
B.A.F=1
F.A.D=0,5
По формулѣ, для сложенія угловъ:
уголъ B.A.D$=\frac{1+0,5}{1-1.0,5}=15:5=3$

Привиллегія заявлена.

Типо-Лит. Е. Бреслина.

Рис. 2

Таким образом, хотя узнать о Дмитрии Васильевиче Агапове пока удалось немного, несомненно, что это был довольно интересный человек. Надеемся в ближайшем будущем расширить наше представление о нем как о личности и как об авторе учебников и суметь по достоинству оценить его место в истории математического образования в Оренбургском крае.

Библиографический список

1. *Агапов, Д.В.* Алфавитный каталог русских книг по математике, вышедших в России с начала книгопечатания до последнего времени. 1682-1908 [Текст] / Д.В. Агапов. – Оренбург: типо-литография Б.А. Бреслина, 1908. – 99 с.
2. *Бусев, В.М.* О библиографической работе в области преподавания математики [Текст] / В.М. Бусев // Труды Пятых Колмогоровских чтений. – Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2007. – С. 334-346.
3. *Ганин, А.В.* Офицерский корпус Оренбургского казачьего войска. Биографический справочник [Текст] / А.В. Ганин, В.Г. Семенов. – М: Русский путь. Библиотека-фонд “Русское зарубежье”, 2007. – С. 78.

4. *Одинец, В.П.* Забытый Лобачевский [Текст] / В.П. Одинец // Труды Пятых Колмогоровских чтений. – Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2007. – С. 316-320.
5. Оренбургская книга: XIX-XXI вв. [Текст]: библиогр. указ.: в 3.ч. / Мин-во культуры Оренб. обл., Оренб. обл. универс. науч. б-ка им. Н.В. Крупской; рук. проекта Н.В. Никитина; сост. О.В. Федосова, В.М. Коломацкая, Н.В. Колыхалова, А.В. Толстова. – Оренбург: Издательский центр ОГАУ, 2009. – С. 7-8, 36, 41, 44, 53.
6. *Столяров, Н.А.* Константин Александрович Торопов [Текст] / Н.А. Столяров // Математика в школе, 1955. – № 1. – С. 70.

Реформы обучения математике сквозь призму времени

В.М. Бусев

Технологии и реформы: кто есть кто

Идея написать данный текст родилась, когда автор, будучи редактором газеты “Математика”, принимал участие в подготовке летнего тематического номера, посвященного технологиям в обучении математике (№ 14/2008). В процессе работы быстро выяснилось, что технологий великое множество, а общепринятого определения технологии нет. При этом слово “технология”, явно заимствованное из технической сферы, используется в таких, например, словосочетаниях, как “личностно-ориентированная технология обучения”, “технология свободного воспитания”, что выглядит несколько неестественно. Представляется более правильным говорить в данных случаях не о технологии, а о системе обучения (системе воспитания); слово же “технология”, учитывая его техническое происхождение, видится более уместным употреблять при характеристике таких систем обучения, которые практически не учитывают человеческий фактор (индивидуальные особенности учеников и учителей).

Согласно Большой советской энциклопедии, технология – это совокупность приемов и способов получения, обработки или переработки сырья, материалов, полуфабрикатов или изделий, осуществляемых в различных отраслях промышленности, в строительстве и т.д. Понятно, что каждая конкретная технология должна учитывать особенности того класса объектов, для переработки или получения которых она применяется. Но индивидуальные особенности того или иного объекта не учитываются, поскольку объекты рассматриваются как однородные (по физическим, химическим или еще каким-то свойствам).

Если желать использовать термин “технология” применительно к педагогике, то разумно сохранить его смысловое значение (потому что если не сохранять, то вообще непонятно, зачем вводить термин). Это естественно влечет за собой ряд следствий. В частности, ученики должны рассматриваться как некое однородное сырье, учителя – как операторы производства, которые перерабатывают данный им материал согласно имеющейся инструкции. На любом производстве неизбежен брак – из-за нестандартных деталей, сбоев оборудования или нарушения инструкции. Поэтому нужно быть готовым к тому, что некоторую часть учеников “переработать” (обучить, воспитать) не получится. Наконец, очевидно, что так понимаемая технология в педагогике не может быть гуманной, ведь мы сознательно оставляем некоторых детей за бортом своих усилий, списываем их в брак.

Несмотря на последнее обстоятельство, использование технологий в педагогике неизбежно, поскольку без них обучить массы детей невозможно: классы численностью 20-25 человек просто не позволят вести индивидуальное обучение. Проблему дифференциации отчасти решить можно (организация кружков, профильное обучение и т.д.), но в целом массовая школа пока не имеет значительных ресурсов для решения этой проблемы. Однако даже если бы таковые ресурсы имелись, индивидуальное обучение вряд ли бы имело место. Дело в том, что хотя каждый ученик “в малом” уникален, все дети “в целом” устроены одинаково: в определенном возрасте они имеют одни и те же важные для обучения качества, заложенные природой. Так, учащиеся младших классов не способны к абстрагированию на высоком уровне, им бесполезно объяснять, что такое аксиома и теорема. Соответствующие возможности у них появятся позже. Подросткам уже неинтересны игровые или сказочные сюжеты задач, которые они так любили в начальной школе. Возрастные особенности детей дают богатый простор для изобретения форм, методов и содержания обучения, пригодных для учащихся определенного возраста. Понятно, что эти формы, методы и содержание, будучи посильными и интересными для основной массы детей, станут использоваться учителем фронтально (или, если возможно, с каждым учеником по отдельности, но в данном случае это неважно). А что такое формы, методы и содержание, которые “работают” безотносительно к личности ученика? Это технология.

Технологии, о которых говорилось выше, можно назвать *локальными*: они используются в пределах одного или нескольких классов, их особенности могут зависеть от личности учителя, транслирование таких технологий может быть ограниченно (другой учитель не сможет работать по предложенной технологии). Примеры локальных технологий можно найти в методической прессе для учителей. Один из общеизвестных примеров – система работы В.Ф. Шаталова. Несмотря на то, что она была признана эффективной и о ней в свое время много говорили и писали, эта технология не пошла в массовую школу.

Другой тип технологий – технологии *глобальные*. Основное их отличие от технологий локальных – неограниченные возможности трансляции от учителя к учителю (в том числе, из поколения в поколение). Эти технологии наиболее приближены к производственным технологиям: личности ученика и учителя из них практически устранены. Классическим примером глобальной технологии может служить традиционная классно-урочная система обучения. Ее часто критиковали и продолжают критиковать за неэффективность, но она существует до сих пор, поскольку замены ей не найдено. Возможно, это единственная система обучения, которая наиболее "технологична", т.е. позволяет почти каждому учителю научить почти каждого ученика почти в любые времена.

Локальная образовательная технология необходимо включает в себя организационные формы, методы и содержание обучения. Глобальная технология помимо этого предполагает наличие институтов ее трансляции (в частности, систему педагогического образования).

До сих пор мы говорили о технологиях. Обратимся теперь к реформам. Понятно, что всякая реформа связана с внесением изменений в технологию. Эти изменения могут быть двух типов: либо меняется одна из составляющих технологии, либо меняются все. Последний тип реформ носит потенциальный характер, все реальные реформы ограничивались только частичными изменениями, касающимися отдельных составляющих технологии. Видимо, в этом и заключались причины провала многих из них: нельзя изменить одну составляющую, не изменяя других, чтобы не нарушить равновесия, присущего технологии.

Возьмем, например, локальную технологию устного счета на уроках математики. Организовать устный счет можно так. Учитель диктует ученикам несложные арифметические примеры (вроде 251·3 или 248:4), ученики записывают пример на листочке и тут же записывают ответ, проводя вычисления в уме. По окончании работы соседи по парте меняются листочками, с помощью учителя проверяют решения друг друга и выставляют отметки согласно установленным критериям (листочками можно и не обмениваться). Затем листки сдаются учителю, который их еще раз просматривает дома (чтобы убедиться в справедливости отметок). Если между учителем и учениками есть доверие, то при небольших временных затратах можно достаточно эффективно вести работу по повышению вычислительной культуры учащихся. Это вполне реальная технология, практикуемая учителями математики.

Попробуем теперь поэкспериментировать с этой технологией, меняя одну из ее составляющих. Заменим для начала содержание; пусть вместо арифметических примеров учащимся предлагается решить квадратное уравнение (даже с небольшими коэффициентами и “хорошим” дискриминантом). Технология сразу перестанет быть эффективной, поскольку решение уравнения требует значительного времени. Такой “устный счет” сложнее для учащихся, он включает уже не одну операцию, а несколько, и рискует растянуться минут на 10-15. При этом смещается акцент: вместо тренировки в вычислениях дети будут вспоминать формулы, т.е. достижение цели будет затруднено.

Теперь изменим организационную форму. Пусть работы проверяет только учитель. Очевидно, что на уроке он этого сделать не сможет. Остается одно: собрать листки и проверить их дома, а результаты сообщить на следующем уроке. К тому времени учащиеся уже забудут, что и как они решали (ведь на решение примера дается несколько секунд, поэтому в памяти он сохраниться надолго не может), и смысл проверки пропадет. Можно вообще исключить контроль из данной технологии. Но тогда ошибки учащихся не будут выявлены. Можно отдать контроль полностью на откуп ученикам. В этом случае есть опасность обмана.

Таким образом, хорошая, эффективная локальная технология не допускает замены ее главных составляющих. Иногда их можно модернизировать (например, в описанной технологии вместо арифметических примеров предлагать простейшие линейные уравнения типа $2\text{x}+1 = -3$), но не более того. Это же относится и к глобальной технологии – традиционной классно-урочной системе обучения. Ниже на примере реформ математического образования будет показано, к чему приводили действия реформаторов, пытавшихся менять отдельные составляющие традиционной системы обучения.

Собственно, в российском математическом образовании было всего две реформы: “большевистская” в 1920-е гг. и “колмогоровская” в 1960-70-е гг. Рассмотрим их.

Реформа первая: сближение школьной математики с жизнью

Процессы реформирования школьного образования в 1920-е гг. невозможно понять, если не учитывать 20-летнего дореволюционного периода, наполненного творческими поисками педагогов и стремлениями некоторых чиновников улучшить положение дел в образовании. Этот период характеризуется возрастанием критики в адрес традиционной системы обучения и воспитания. На многочисленных педагогических съездах делегаты повторяли на разные лады одну и ту же мысль: нужно что-то менять, и менять радикально. Основные требования можно свести к следующим:

1) децентрализация и демократизация системы образования;
2) создание различных типов школ (дифференциация обучения);

3) модернизация или отмена системы экзаменов и оценивания учащихся;

4) усиление связи школы с жизнью, практическая направленность обучения (вплоть до создания трудовой школы).

5) широкое использование методов обучения, способствующих развитию самостоятельности ученика.

Среди прочего на общепедагогических съездах обсуждались вопросы обучения математике (также прошло два специальных съезда преподавателей математики). Школьный курс математики конца XIX–начала XX вв. представлял собой объединение некоторых разделов элементарной математики: арифметики, алгебры, геометрии и тригонометрии. При этом по сложившейся традиции в курсе математики изучались преимущественно абстрактные конструкции, порой достаточно сложные и плохо усваиваемые учащимися. Это вызывало недовольство учеников и педагогов (не только математиков). Особенно резкой критике подвергалась оторванность содержания школьной математики от окружающей жизни. На съездах докладчики предлагали вместо псевдопрактических задач о курьерах и бассейнах решать задачи на вычисление счета в лавке, на измерение участка земли и т.д.

Все перечисленные требования не могли быть выполнены быстро, поэтому неудивительно, что до революции в направлении решения школьных проблем было сделано немногое. Большевики (до октября 1917 г.) сформулировали свои представления о школе. Эти представления имели много общего со сказанным выше. Придя к власти, новые руководители системы образовании решили реализовать свои соображения на бумаге (“Положение об единой трудовой школе” и “Основные принципы единой трудовой школы”), а затем на практике. Последнее получалось плохо, поскольку условия того времени не позволяли серьезно заняться школьными делами.

Ситуация стала меняться в 1922-1923 гг. Тогда было положено начало первой масштабной реформе отечественного школьного образования в XX в. Критикуя существовавшие программы семилетней школы, Н.К. Крупская предлагала широко подходить к изучению труда людей. “Чтобы изучить трудовую деятельность людей, необходимо изучить объект этой деятельности – природу и ее силы, затем необходимо изучить способы воздействия человека на природу (технику) и, наконец, субъекта этой деятельности – человека” [1, с. 4]. Именно эти указания Н.К. Крупской легли в основу новых программ, основные особенности которых начали обсуждаться уже в конце 1922 г.

Соответственно временам года программа для школ I ступени распадается на триместры: осенне-зимний, зимне-весенний и весенне-летний. Программа строится во всех триместрах приблизительно одинаково: в начале триместра проводится учет детской работы до триместра (итоги каникул), затем планируется работа на триместр, после чего предлагается ряд сезонных тем; заканчивается работа в триместре отчетной выставкой [2. С. 31.]. Программы для 1-го и 2-го годов обучения были разработаны в двух вариантах – городском и сельском. Это объясняется желанием авторов привлечь к изучению краеведческий материал, чем устанавливается связь школы с окружающей жизнью.

Весь материал, подлежащий изучению в триместре, разбивался на темы, которые носили не предметный, а общий характер. Например, осенне-зимний триместр 2-го года обучения в сельской школе делился на темы: “Жизнь ребенка во время летних вакаций”, “План работ на ближайшее время”, “Охрана здоровья”, “Осенние работы в деревне”, “Октябрьская революция”, “Приготовление к зиме”, “Итоги триместра – устройство отчетной выставки”. Каждая тема разбивалась на три колонки: природа и человек, труд, общество. Приведем распределение материала по теме “Домашние животные” в сельской школе на 2-м году обучения [2. С. 40].

Природа и человек	**Труд**	**Общество**
Жизнь и строение домашних животных. Корова и теленок. Мелкий рогатый скот, в сравнении с коровой. Лошадь – рабочее животное. Свинья – мясное животное. Разведение кроликов. Кошка – хищное животное. Собака, ее служба в доме. Зарисовка домашних животных. Чтение соответствующего литературного материала и усвоение соответствующих песен и стихов.	Помощь в уходе за домашними животными. Участие в обработке молока и получение из него разных продуктов. Подсчет удоя коровы и козы. Подсчет корма домашних животных. Умножение в пределах 1000.	Экскурсии по мере возможности (молочная ферма, племхоз, кожевенный завод). Добывающая и обрабатывающая деятельность человека (на примере). Что такое фабрика и завод? Город как промышленный центр. Рассказы о городе и городской жизни. Количество деревенского скота (подсчет и сравнение). Наемный труд в деревне. Классовый состав в деревне: бедняк, середняк, кулак. Коллективные письменные работы на вышеозначенные темы с иллюстрациями.

Из приведенного фрагмента программы хорошо видны идеи, положенные составителями в ее основу. Центральным является изучение трудовой деятельности людей, в данном случае крестьян. Это отражено в средней колонке, где изложен материал об уходе за домашними животными. В первой колонке домашние животные рассматриваются с точки зрения биологии. В третьей колонке речь идет уже не столько о домашних животных, сколько об общественных отношениях между людьми. Нетрудно видеть, что изучение темы не ограничивается только сообщением детям некоторых сведений из биологии и практической работой по уходу за домашними животными. Первая колонка предполагает получение детьми навыков в чтении, письме, рисовании и музыке. Во второй колонке предполагается некоторая работа с выходом на математику (даже явно выписано умножение чисел в пределе 1000). В третьей колонке помимо письменных работ с иллюстрациями и подсчетов предусмотрено изучение некоторых обществоведческих тем: город как промышленный центр, классовый состав деревни. Таким образом, тема рассматривается с разных сторон, с точки зрения разных наук, комплексно. Поэтому разработанные программы получили название *комплексных программ*, а темы, на которые подразделялись триместры, – *комплексами*.

Уход от предметного построения программ был принципиальной позиций их авторов. Это естественно влекло за собой отказ от предметного преподавания, что было явно сформулировано: “Точно так же, как и родной язык, математика не должна изучаться в школе, как оторванный самодовлеющий предмет: она должна явиться упражнением детей в счете и измерении изучаемых ими реальных вещей. Занятия по математике начинаются тогда, когда течение программной работы подводит нас к необходимости применить ее условный и образный язык... Подобный ход работы и заставляет нас поэтому отказаться от строгой системы и постепенности развития математических представлений и навыков, как это было в старой школе и как это часто бывает теперь” [3. С. 115.]. Связь школы с жизнью посредством работы над комплексными темами диктовала и содержательные особенности программ: большое внимание предлагалось уделять десятичным дробям, приближенным вычислениям, графикам и диаграммам, измерительным работам на местности, черчению планов и вообще геометрии в начальной школе, практическим задачам. Последние следовало составлять на местном материале и материале, отражающем жизнь всего Советского Союза.

В объяснительной записке к программе по математике для школ II ступени говорилось: “Математика сама по себе не имеет образовательной ценности в школе, математика важна лишь постольку, поскольку она убедительно помогает разрешать практические задачи...” [4. С. 134.]. Отсюда, по мнению авторов программы, следует, что нет нужды включать в курс такие вопросы, которые имеют только теоретическое значение.

Таким образом, предполагалась революционная ломка старой системы обучения. При этом указания были неконкретными. Новые идеи без подробных объяснений породили среди педагогов и методистов недоверие к комплексным программам и вызвали массу недоразумений в работе рядовых школьных учителей.

А. Радченко, анализируя затруднения педагогов, указывал на то, что часто учителя из комплекса делали самоцель: “Связывают что угодно с чем угодно, лишь бы получился комплекс. Берут мелочные, случайные социально безразличные темы и мудрят над тем, чтобы “скомплексировать” в них обязательно и труд, и природу, и общество, и формальные навыки да еще физическое и художественное воспитание. . . ” [5. С. 89]. При таком подходе упускается из виду главное: место труда в изучаемой теме.

На неправильное понимание комплексности в обучении математике указывал педагог-математик И.И. Грацианский. Он приводил примеры ошибок двух типов. В одном случае жизненность преподавания сводится к решению бессмысленных задач, составленных из реальных данных: например, при изучении темы “Рынок” измеряется длина и ширина рынка. Такого рода задачи, полагает автор, не дают ничего ни с точки зрения исследования комплексной темы, ни с точки зрения приобретения вычислительных навыков и умения решать задачи, поскольку появились они исключительно из-за желания педагога во что бы то ни стало увязать математику с комплексной темой. “В этом случае нет преимущества перед решением задач по старым задачникам в смысле жизненности, – замечает И.И. Грацианский, – но весьма часто здесь наблюдается регресс по сравнению со старой традицией, так как раньше задачи с большею тщательностью подбирались с точки зрения выработки вычислительных навыков и самой конструкции задачи” [6. С. 9].

В другом случае ошибка заключалась в пренебрежении основными принципами методики математики. Педагоги, прочитав в программах, что математика должна изучаться попутно, понимали это так, будто она должна изучаться как попало. В результате учителя, желая скорее перейти к проработке комплекса, не уделяли должного внимания объяснению нового материала, ограничиваясь показом готовых алгоритмов. Это приводило к тому, что для учащихся оставался непонятным смысл алгоритмов, которые им предлагалось заучить и затем применять.

И.И. Грацианский отмечал, что оба типа ошибок очень распространены среди учительства. Они были не случайны, а проистекали из упрощенного понимания задач методики. Приведем еще одно важное наблюдение ленинградского методиста: “*Учитель ищет готового шаблона* и свою подготовку представляет, как добросовестное записывание и вычитывание не только задач, но целых тем, чтобы затем, не мудрствуя лукаво, воспроизводить все это в классе” [6. С. 9-10].

Другой педагог-математик А.В. Ланков проанализировал публикации последних лет о преподавании математики, авторы которых писали о трудностях при работе по комплексной системе. Он дополнил их своими наблюдениями: “Нам особенно часто приходилось встречаться с двумя выходами. Или все уроки математики проводятся “вне комплекса”, или налицо «псевдокомплексирование»” [7. С. 10]. В первом случае учителя говорили, что пытались скомплексировать математику с темами, но у них ничего не получилось. Во втором случае учителя составляли задачи вроде: “У Степана 4 овчины да у Ивана 5 овчин. Сколько всего у них овчин?” (тема “Приготовление одежды и обуви”). В основу увязки здесь положено словесное содержание. Учителя не понимали бессмысленности таких задач для изучения комплексной темы: “И когда начинаешь говорить о бесцельности подобного комплексирования, учащие делают изумленное лицо” [7. С. 11].

Интересное наблюдение сделал методист арифметики Д.Л. Волковский [8. С. 5-16]. Он заметил, что если до революции содержание арифметических задач подгонялось под теорию, то теперь наоборот, всю математику подгоняли под содержание, под комплексные темы. При такой подгонке нарушалась последовательность в изложении, что не могло не привести к неувязке математического материала с комплексом.

Как видно из всего сказанного, в 1920-е гг. была сделана попытка реформировать традиционную систему обучения, а точнее, заменить ее другой технологией. Чтобы осуществить такую замену, требовалось разработать новые содержание и методы обучения, новые организационные формы и наладить педагогическое образование. Некоторые шаги в этих направлениях были сделаны, но сколько-нибудь существенно продвинуть реформу не удалось. Свою роль в этом сыграло отсутствие четких рекомендаций, без которых многие учителя оказались беспомощны. Но были и другие причины. Достаточно быстро обнаружилось, что комплексная система обучения не дает возможности приобретения прочных навыков в счете и письме. Это породило стихийное движение учителей за проведение, наряду с проработкой комплексов, дополнительных занятий “навыков”. Иногда комплексы вообще не прорабатывались. Педагог В.В. Репьев отмечал: “... преподаватели математики забыли о комплексной системе, а если и вспоминают о ней, то как о неприятном пережитке прошлого” [9. С. 12]. Таким образом, в отношении обучения математике школа постепенно вернулась к привычным формам проведения занятий.

Комплексная система обучения в конце 1920-х гг. была модернизирована в комплексно-проектную систему обучения и просуществовала до 1931 г., а затем была ликвидирована после известного постановления ЦК ВКП(б) о начальной и средней школе. За несколько лет были разработаны новые программы по всем предметам, написаны новые или отредактированы старые учебники, введены экзамены, создана сеть образцовых школ и налажено методическое руководство работой учителей-практиков. За короткий срок школа была фактически превращена в дореволюционную гимназию, и потесненная некогда традиционная система обучения снова вступила в свои права. Причины этого понятны: укрепление и развитие страны невозможно в условиях реформ, развитие возможно только в условиях стабильности. Традиционная система обучения, учитывая все ее недостатки, вполне отвечала потребностям дня.

Реформа вторая: сближение школьной математики с наукой

Следующая попытка реформирования относится к концу 1950-х – началу 1960-х гг. Согласно закону “Об укреплении связи школы с жизнью и о дальнейшем развитии системы народного образования в СССР” (1958), обучение в средней общеобразовательной школе планировалось связать с производственным трудом путем вовлечения учащихся в работу цехов предприятий, колхозов, совхозов. Фактически это был ренессанс идей политехнизации начала 1930-х гг. Тогда политехнизация школы привела к дальнейшему падению уровня знаний и навыков, и этот путь развития народного образования был признан ошибочным (хотя в документах 1930-х гг. школа по-прежнему нередко называлась политехнической). Уроки прошлого еще не были забыты всеми, и нашлись лица, которые категорически не согласились с новой политехнизацией школы. Одним из таких людей был академик АПН РСФСР и заместитель министра просвещения РСФСР математик А.И. Маркушевич. Он уже давно вынашивал планы организовать совсем другую реформу, о необходимости которой говорили еще до революции. Такая возможность представилась после ухода Н.С. Хрущева с поста генерального секретаря ЦК КПСС.

Идея реформы заключалась в следующем: приблизить школьную математику к уровню современной науки. Традиционно содержание математического образования в начальной и средней школе ограничивалось элементарной математикой, которая была создана еще в древние времена. Математика нового времени – математический анализ, аналитическая геометрия, теория вероятностей – оставалась за пределами школьного курса и изучалась в высшей школе. В конце XIX – начале XX в. зародилось так называемое международное движение за реформу преподавания математики, главной целью которого было введение в среднюю школу высшей математики. Некоторые шаги в этом направлении были сделаны; в частности, основы высшей математики были введены в программы реальных училищ. Но в целом школа осталась в стороне от этих нововведений.

В советское время идея сближения школьной математики с наукой математикой последних столетий обсуждалась неоднократно. Элементы математического анализа и аналитической геометрии были введены в программу средней школы, в 1918–1921 гг. и в 1934 г. Оба раза школа оказывалась не готовой к этим нововведениям, и от них приходилось отказываться. Очередная попытка была предпринята во время упомянутой реформы конца 1950-х – начала 1960-х гг. Дифференциальное исчисление, естественно, было подано как необходимая составляющая образования будущего работника-практика. Возможно, именно это позволило ввести его в школьную программу 1961 г.

Но введение дифференциального исчисления было только началом, планы ученых-математиков были куда шире. Уже в конце 1961 г., выступая на совещании по вопросам обучения математике, А.И. Маркушевич заявил о необходимости новой реформы в обучении математике [10. С. 3-14]. В его выступлении уже просматриваются новые идеи: вскользь упоминаются теория множеств и теория вероятностей. Более определенно А.И. Маркушевич высказался позднее, когда в декабре 1964 г. была образована комиссия по определению содержания школьного образования. Он напомнил о международном движении за реформу начала XX в. и предложил пересмотреть основные его установки: "…в результате развития обобщающих и объединяющих идей, имеющих достаточно прозрачный и элементарный характер (основные структуры), прямо ставится вопрос о перестройке школьного курса в направлении сближения его с духом и буквой современной математики, т.е. математики XX века" [11. С. 4]. Таким образом, теперь речь шла уже не о математике XVII–XVIII вв., а о математике новейшего времени: о теории множеств, теории групп, геометрических преобразованиях, аксиоматическом методе.

Еще дальше своего коллеги пошел другой математик – Н.Я. Виленкин. Он обратил внимание на то, что преподавание арифметики в современной школе почти не отличается от преподавания ее много лет назад. "В результате этого школьный курс арифметики несет очень малую идейную нагрузку", – писал Н.Я. Виленкин [12. С. 19]. В то же время на арифметику отводится весьма значительное время, которое употребляется для изучения счета и решения задач, а места для новых идей не остается. Н.Я. Виленкин резюмирует: "Итак, *чрезмерное увлечение арифметикой приводит к плохому знанию математики*" [выделено Н.Я. Виленкиным. – *В.Б.*]. Чем же следует заниматься вместо "чрезмерного увлечения арифметикой"? Нужно, полагает автор, изучать уравнения, функции, производную, алгебраические операции, алгоритмы, теорию вероятностей, множества. Единственный путь для введения всех этих понятий в курс математики начальной школы видится Н.Я. Виленкину в использовании новых видов математических задач, решаемых с помощью обычных арифметических действий, но подготавливающих изучение более глубоких математических идей. В статье даны указания по созданию такой системы задач.

С критикой традиционного курса школьной математики выступили и другие ученые: А.Н. Колмогоров, Б.В. Гнеденко, В.А. Успенский. На содержании их статей мы останавливаться не будем, поскольку они высказывали мысли, аналогичные рассмотренным выше.

Прежде чем переходить к рассказу о ходе самой реформы, необходимо отметить, что некоторые из названных нами ученых (в том числе, руководители реформы А.И. Маркушевич и А.Н. Колмогоров) призывали к большой осторожности при обновлении содержания школьного курса математики. В частности, они предлагали вводить новые идеи постепенно, преимущественно в старших классах. На деле, однако, все получилось наоборот.

Проект новых программ для обсуждения был опубликован в 1967 г., а уже в 1968 г. была утверждена новая программа, которая мало отличалась от опубликованного ранее проекта; многие предложения учителей-практиков, высказанные в ходе дискуссии, были отвергнуты. Началась работа по подготовке новых учебников, которые без должной экспериментальной проверки шли в массовую школу. При этом содержание учебников противоречило словам реформаторов о необходимости соблюдения осторожности: современная математика вводилась не только на старшей ступени обучения, но и гораздо раньше. Формулировки и символика стали громоздкими, и педагоги с учащимися с трудом разбирались в сути предлагаемого.

У педагогов была выбита почва из-под ног: освоение тонкостей современной математики требовало немалых усилий, многие их наработки оказались бесполезными в новых условиях, отсутствовали четкие указания (особенно в начале реформы). Трудно пришлось и преподавателям педвузов. Фундаментальный курс элементарной математики был заменен теоретическим курсом “Современные основы школьного курса математики” и практикумом по решению задач. Новые учебники для педвузов были также приближены к современной математике.

В результате коренная ломка школьной математики вынудила некоторых опытных учителей оставить преподавание (уйти на пенсию), что только осложнило дело.

В конце 1970-х гг. стало очевидно, что реформа зашла не в ту сторону. Это признали даже ее сторонники. Так, Б.В. Гнеденко от имени руководимой им кафедры теории вероятностей МГУ подверг критике действующие учебники за перегруженность, громоздкие формулировки и неудачное изложение отдельных тем [13. С. 26-27]. 10 мая 1978 г. вопросы школьного математического образования обсуждались на заседании бюро Отделения математики АН СССР. В принятом решении было отмечено, что существующие школьные учебники и программы по математике не удовлетворяют современным требованиям к математической подготовке учащихся в условиях всеобщего среднего образования. Этот вывод был подтвержден 5 декабря 1978 г. на общем собрании Отделения математики АН СССР, на которое были приглашены представители педагогической общественности. Окончательный удар по реформе нанес математик Л.С. Понтрягин, выступив в журнале “Коммунист” с разгромной статей [14. С. 99-112]. В результате реформа была остановлена. Некоторые учебники были заменены другими, некоторые переработаны. От математики XX века было решено отказаться.

Нужны ли реформы образования?

В рассмотренных нами кратко реформах при внешней их непохожести можно обнаружить много общего, типичного. Обе реформы были навязаны сверху, мнения педагогов по большому счету никто не спрашивал. На учителей было принято смотреть как на консервативную массу, как на оппозицию, не желавшую перемен. Поэтому большинство их соображений отвергалось. Обе реформы показали, что реформаторы недооценивали мнения педагогов; главным критерием истинности их теоретических рассуждений выступала учительская практика, с которой приходилось считаться. Но осознание этого наступало слишком поздно; механизм разрушения реформы уже был запущен, и остановить его было невозможно.

Учитель массовой школы неизменно вставал на пути всех реформ, обрекая на неудачу большинство начинаний реформаторов. На сегодня мы имеем ту же самую традиционную систему обучения, какая была в конце XIX в. и на протяжении всего XX в. Конечно, она подверглась некоторым изменениям локального характера, но изменения эти не превратили ее в новую систему обучения, в новую глобальную технологию. Неудачи былых реформ и живучесть традиционной системы обучения наталкивают на мысль о невозможности проведения реформ вообще. К тому же неудачи реформирования приносили школе ощутимый вред. Поэтому можно говорить не только о невозможности, но и о нецелесообразности каких бы то ни было реформ.

Но, быть может, возможно заранее просчитать и нейтрализовать нежелательные последствия реформ? Вероятно, отчасти да (так, знание психологии массового учителя помогает предусмотреть ряд трудностей, которые могут возникнуть). Но нередко бывают ситуации, возникновение которых заранее предсказать нельзя. Например, руководители реформы 1960–1970-х гг. рассчитывали на экспериментальную работу по новым программам и учебникам, однако времени на это предоставлено не было. Комплексная система обучения под влиянием политических процессов второй половины 1920-х гг. была сильно идеологизирована при одновременном выхолащивании предметного содержания. Изначально комплексная система обучения предполагалась другой, но в 1923 г. трудно было предвидеть грядущие перемены.

Приведенные примеры говорят о том, что в практике реформирования отечественной школы нередко правила меняются во время игры, а иногда и по несколько раз. Заранее просчитать все варианты нельзя, и реформаторы, столкнувшись с новыми обстоятельствами, оказываются в тупике: им очевидно, что реформа пошла не в том направлении, но повлиять на ход событий они не могут, а отказаться от своих планов не хотят. В результате приходится идти на компромиссы, которые иногда приводят к тому, что реформа превращается в свою противоположность. Так, вместо умеренного введения понятий современной математики на старшей ступени обучения школа получила учебники, в которых эти понятия вводились гораздо раньше, а соответствующая символика загромождала и делала непонятными простые вещи (сами реформаторы впоследствии признавали, что здесь был допущен перегиб) [15. С. 16-17]. Невозможность просчитать последствия реформирования образования – серьезный аргумент, чтобы отказаться от масштабных изменений вообще.

Есть и другие аргументы в пользу отказа от реформ в образовании. Фактически, любая реформа предполагает ломку традиций. Но традиции не возникают просто так, их целесообразность подтверждается многолетним, а иногда и многовековым опытом. Так, математику изучают из века в век, начиная с самых древних времен. Арифметические, алгебраические и геометрические задачи можно найти в египетских папирусах, у древних греков, индусов, китайцев и др. Нетрудно видеть, что современные задачи часто весьма похожи на задачи 1000-летней давности, а иногда повторяют их дословно. Таким образом, традиция решения "оторванных от жизни" задач пришла к нам из далекого прошлого. Очевидно, что традиция эта сохранилась неслучайно: по каким-то причинам людям всех времен нравилось и нравится решать задачи. Главные среди этих причин – естественная человеческая любознательность и потребность в тренировке интеллекта.

Можно сказать, что школьная математика – это своеобразная культурно-историческая традиция, связанная с решением задач. Действительно, согласно Большой советской энциклопедии, традиция (от лат. traditio – передача, предание) – это элементы социального и культурного наследия, передающиеся от поколения к поколению и сохраняющиеся в определенных обществах, классах и социальных группах в течение длительного времени. Все это мы наблюдаем в отношении школьной математики. Она является частью культурного наследия прошлого, причем связанного не только со школой, но и с наукой, бытом и обычаями некогда живших людей. Эта часть культурного наследия передается из поколения в поколение, иногда без значительных изменений (классический образец – евклидова геометрия).

Взгляд на школьную математику как на традицию позволяет решить вопрос о необходимости реформирования математического образования. Если школьная математика – это культурно-историческая традиция, то зачем ее менять? Ведь традиция не может быть вредоносной или слишком неэффективной – в противном случае она не стала бы традицией. Решение задач зарекомендовало себя как хороший инструмент развития мышления. И нет никакой необходимости ломать этот инструмент: связывать сюжеты задач с практикой социалистического строительства, менять организационные формы или решать задачи более “научными” методами. Традиция – вещь устойчивая, и школа все равно не примет радикальных новшеств. Рано или поздно она вернется к испытанным способам трансляции культурных образцов прошлого [16. С. 42-49].

Очевидно, что изложенное выше нетрудно распространить на школу вообще, если рассматривать ее как большую культурно-историческую традицию (тогда математическое образование будет являться ее составляющей). Это вполне естественная точка зрения, поскольку одна из главных задач школы (на наш взгляд, самая главная) – передача накопленного человечеством знания и социального опыта. Во многих современных педагогических теориях эта точка зрения считается устаревшей и критикуется: авторы теорий явно или неявно противопоставляют усвоение знаний и развитие. Они полагают, что главная задача школы в современном быстро меняющемся мире – научить детей приспосабливаться к новым реалиям и, по возможности, управлять событиями. Нет спору, жить в мире с каждым днем становится все труднее (и неуютнее), некоторые знания быстро устаревают, а общий объем знаний стремительно растет, и нет никакой возможности усвоить в школе хотя бы малую их часть. В такой ситуации способы деятельности, конечно, выходят на первый план. Человек должен быть способен к самообучению, уметь ориентироваться в постоянно меняющихся условиях.

Но ведь всегда будут существовать то, что не устаревает. Это та часть человеческого опыта, которая вошла в золотой фонд мировой культуры: произведения литературы, изобразительного искусства и архитектуры, киноленты, открытия ученых и т.д. Все это никак не связано с утилитарными потребностями личности, которые нередко ставятся на первое место в современных педагогических теориях (например, в компетентностном подходе). Между тем, освоение этого опыта необходимо, поскольку именно он (и только он) позволяет сориентироваться в мире, осознать себя Единицей Вселенной и поставить себе достойные цели. Конечно, достижение этих целей потребует привлечения адекватных способов деятельности. Но цели важнее, они первичны по отношению к способам деятельности. Поэтому умаление значимости целеполагания, намеренное или ненамеренное затушевывание огромной важности “непрактичных” знаний представляется неправильным. Школа “для” видится тупиковым путем развития образования, поскольку акцент на утилитарные потребности внешнего мира неизбежно оставит за рамками образования духовную, нравственную и другие сферы – главное, на что должна обращать внимание школа. Неразвитость этих сфер при богатых операциональных возможностях личности приведет к дальнейшему росту агрессии либо равнодушия в современном мире.

Соответственно реформы, направленные на приближение школы к потребностям современной жизни, оказываются как минимум сомнительными (а, учитывая традиционные неудачи реформирования, и просто вредными). Поэтому целесообразно никаких реформ не проводить, а сосредоточить усилия на выделении той части культуры, которая составляет (или должна составлять) ядро обучения и воспитания. Локальные модернизации содержания школьных дисциплин с целью соответствующей расстановки акцентов помогут школе стать сильнее в ее нелегкой борьбе с окружающим миром (в том, что это именно борьба, сомневаться не приходится: культура всегда борется с бескультурьем). Модернизация форм и методов позволит сделать обучение и воспитание более эффективными. Подчеркнем, что речь идет именно о модернизациях, а не о реформах. Например, при обучении математике вполне возможно, не изменяя кардинально содержание предмета, добиться значительного эффекта путем привлечения нестандартных задач и внедрения элементов исследовательской деятельности.

Если отказаться от реформ совсем, то возникает вопрос: как же школа будет развиваться? Нам кажется, что такая постановка вопроса связана с распространенным стереотипом о том, что школа – это некое мертвое царство, населенное консервативными педагогами, которые плохо понимают современные реалии и не желают ничего менять. На самом деле школа является живым организмом, который очень чутко реагирует на все изменения, происходящие в стране и в мире. Так, современная школа является гораздо более демократичной, чем она была прежде. Во многих школах имеется дополнительное образование, которое не является обязательным для школьников, и занятия проводятся только благодаря обоюдному интересу учащихся и учителей. Можно привести много других примеров того, как школа самостоятельно ищет и находит пути своего развития.

Выходит, что процесс обучения зависит в итоге от того, как его себе представляют люди, находящиеся на “низшей” ступени образовательной иерархии – учителя, родители, директора школ (и ученики). Какие-то колоссальные усилия отдельных лиц по реформированию системы образования часто не требуются вовсе: система самостоятельно определяет, куда ей двигаться, сама жизнь за окном подталкивает ее в нужном направлении. Поэтому представляется разумным отказаться от реформирования образования, оставив за школой право совершенствовать свою деятельность, модернизируя согласно назревшим потребностям отдельные составляющие глобальной технологии. Задача государства в этом случае – присматриваться к школе, прислушиваться к голосам ее жителей и поддерживать здоровые начинания педагогической общественности (материально, морально, законодательно).

Библиографический список

1. *Крупская, Н.К.* К вопросу о программах [Текст] / Н.К. Крупская // На путях к новой школе. – 1922. – № 2.
2. Новые программы для единой трудовой школы. Первый и второй годы школы I ступени. Первый год школы II ступени [Текст]. – М.-Пг., 1923. – Вып. 1.
3. Новые программы для единой трудовой школы первой ступени. I, II, III и IV годы обучения [Текст]. – М., 1924.
4. Программы для первого концентра школ второй ступени (5, 6 и 7 годы обучения) [Текст]. – М.-Л., 1925.
5. *Радченко, А.* Затруднения в работе по новым программам и пути к их разрешению [Текст] / А. Радченко // Программы ГУСа и местная работа над ними. Сб. статей под ред. С.Т. Шацкого. 2-е изд. – М., 1925.
6. *Грацианский, И.И.* Методика математики и комплексная система [Текст] / И.И. Грацианский // Математика в школе. – Сб. статей под ред. И.И. Грацианского. – Л., 1926. – I(V).
7. *Ланков, А.В.* Математика и комплекс [Текст] / А.В. Ланков. – М.-Л., 1926.
8. *Волковский, Д.Л.* Об основных тенденциях в современной литературе по математике для школ I ступени [Текст] / Д.Л. Волковский //

На путях математики. Сб. статей под ред. М.М. Рубинштейна. – М., 1926. – Вып. 2.

9. *Репьев, В.В.* Основные вопросы преподавания математики в школе II ступени [Текст] / В.В. Репьев // Физика, химия, математика, техника в трудовой школе. – 1929. – № 7.
10. *Маркушевич, А.И.* Об очередных задачах преподавания математики в школе [Текст] / А.И. Маркушевич // Математика в школе. – 1962. – № 2.
11. *Маркушевич, А.И.* К вопросу о реформе школьного курса математики [Текст] / А.И. Маркушевич // Математика в школе. – 1964. – № 6.
12. *Виленкин, Н.Я.* О некоторых аспектах преподавания математики в младших классах [Текст] / Н.Я. Виленкин // Математика в школе. – 1965. – № 1.
13. *Гнеденко, Б.В.* Мнение кафедры теории вероятностей МГУ им. М.В. Ломоносова об учебниках для средней школы по математике [Текст] / Б.В. Гнеденко // Математика в школе. – 1978. – № 5.
14. *Понтрягин, Л.С.* О математике и качестве ее преподавания [Текст] / Л.С. Понтрягин // Коммунист. – 1980. – № 14.
15. *Абрамов, А.М.* ‘О положении с математическим образованием в средней школе (1978–2003) [Текст] / А.М. Абрамов. – М., 2003.
16. *Бусев, В.М.* Школьная математика как культурно-историческая традиция [Текст] / В.М. Бусев // Математика в школе. – 2009. – № 4.

Сведения об авторах

1. *Абрамова Олеся Михайловна* – аспирант Арзамасского государственного педагогического университета, Арзамас.
2. *Агарев Владимир Михайлович* – студент, МИИТ, Москва.
3. *Алексеев Валерий Борисович* – доктор физико-математических наук, профессор МГУ, Москва.
4. *Алжеева Аида Алексеевна* – старший преподаватель Калмыкского государственного университета, Элиста.
5. *Бабенко Алена Сергеевна* – ассистент Костромского государственного университета, Кострома.
6. *Балабаев Владимир Евгеньевич* – доктор физико-математических наук, профессор ЯрГУ, Ярославль.
7. *Барабанов Олег Олегович* – кандидат физико-математических наук, доцент Государственной технологической академии, Ковров.
8. *Бахусова Елена Васильевна* – директор “Центра педагогических технологий В.М. Монахова” ТНУ, кандидат педагогических наук, доцент, Тольятти.
9. *Башмаков Марк Иванович* – академик РАО, доктор физико-математических наук, профессор, С.-Петербург.
10. *Безручко Анна Сергеевна* – ассистент Уссурийского государственного педагогического университета, Уссурийск.
11. *Боровских Алексей Владиславович* – доктор физико-математических наук, профессор МГУ, Москва.
12. *Бусев Василий Михайлович* – заведующий отделом Научной педагогической библиотеки имени К.Д. Ушинского, Москва.
13. *Весновская Оксана Валерьевна* – старший преподаватель Института образования, Чебоксары.
14. *Воронина Маргарита Михайловна* – доктор технических наук, профессор, С.-Петербург.
15. *Воронцова Ольга Романовна* – кандидат технических наук, доцент Костромского государственного технологического университета, Кострома.
16. *Гильмуллин Мансур Файзрахманович* – кандидат педагогических наук, старший преподаватель Елабужского государственного педагогического института, Елабуга.
17. *Голикова Елена Александровна* – кандидат физико-математических наук, доцент, Екатеринбург.

18. *Губина Елена Васильевна* – доцент Волжской государственной академии водного транспорта, Н. Новгород.
19. *Гурбатова Елена Романовна* – кандидат технических наук, доцент Института развития образования, Иваново.
20. *Гушель Ревекка Залмановна* – старший преподаватель ЯГПУ, Ярославль.
21. *Далингер Виктор Алексеевич* – доктор педагогических наук, профессор Омского государственного педагогического университета, Омск.
22. *Демидов Сергей Сергеевич* – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий сектором ИИЕТ РАН, Москва.
23. *Епифанова Нина Михайловна* – кандидат педагогических наук, доцент ЯГПУ, Ярославль.
24. *Жаров Сергей Викторович* – кандидат физико-математических наук, доцент ЯГПУ, Ярославль.
25. *Жилинская Татьяна Степановна* – аспирант БГПУ им. М. Танка, Минск, Республика Беларусь.
26. *Зайб Надин* – Институт наук о Земле, Фридрих-Шиллер университет, Йена, Германия.
27. *Зверкина Галина Александровна* – кандидат физико-математических наук, доцент Московского государственного университета путей сообщения, Москва.
28. *Зотиков Сергей Васильевич* – кандидат физико-математических наук, доцент, Симферополь, Украина.
29. *Зубова Инна Каримовна* – кандидат физико-математических наук, доцент Оренбургского государственного университета, Оренбург.
30. *Игнатушина Инесса Васильевна* – кандидат физико-математических наук, старший преподаватель Оренбургского государственного педагогического университета, Оренбург.
31. *Капустина Татьяна Васильевна* – доктор педагогических наук, профессор Елабужского государственного педагогического университета, Елабуга.
32. *Катержина Светлана Федоровна* – кандидат педагогических наук, старший преподаватель Костромского государственного технологического университета, Кострома.
33. *Кирносова Ольга Александровна* – аспирант ЯГПУ, Ярославль.
34. *Кляй Йонас* – Институт наук о Земле, Фридрих-Шиллер университет, Йена, Германия.

35. *Когаловский Сергей Рувимович* – кандидат физико-математических наук, профессор Шуйского государственного педагогического университета, Шуя.
36. *Колоскова Мария Евгеньевна* – аспирант СУНЦ МГУ, Москва.
37. *Коновалова Лариса Викторовна* – кандидат физико-математических наук, доцент С.-Петербургского государственного архитектурно-строительного университета, С.-Петербург.
38. *Корикова Тамара Михайловна* – кандидат педагогических наук, доцент ЯГПУ, Ярославль.
39. *Кузнецов Владимир Степанович* – кандидат физико-математических наук, доцент ЯрГУ, Ярославль.
40. *Кузнецов Дмитрий Юрьевич* – кандидат физико-математических наук, доцент ЯГПУ, Ярославль.
41. *Кузнецова Валентина Анатольевна* – доктор педагогических наук, профессор ЯрГУ, Ярославль.
42. *Куликов Анатолий Николаевич* – кандидат физико-математических наук, доцент ЯрГУ, Ярославль.
43. *Куликов Дмитрий Анатольевич* – кандидат физико-математических наук, доцент ЯрГУ, Ярославль.
44. *Куликова Ольга Валентиновна* – кандидат педагогических наук, доцент Уральского государственного университета путей сообщения, Екатеринбург.
45. *Кучугурова Нина Дмитриевна* – доктор педагогических наук, профессор Российского государственного социального университета, Москва.
46. *Ласковая Татьяна Алексеевна* – старший преподаватель МГТУ, Москва.
47. *Липилина Вера Васильевна* – кандидат педагогических наук, доцент, Самара.
48. *Ловягин Юрий Никитич* – кандидат физико-математических наук, доцент СПбГУ, С.-Петербург.
49. *Малова Ирина Евгеньевна* – доктор педагогических наук, доцент Брянского государственного университета, Брянск.
50. *Malonek Helmuth R.* – профессор, университет Авейро, Португалия.
51. *Мельников Юрий Борисович* – кандидат физико-математических наук, доцент Уральского государственного педагогического университета, Екатеринбург.

52. *Миронкин Дмитрий Петрович* – старший преподаватель Костромского государственного университета, Кострома.
53. *Митенева Светлана Феодосьевна* – кандидат педагогических наук, доцент Вологодского государственного педагогического университета, Вологда.
54. *Монахов Вадим Макариевич* – академик РАО, доктор педагогических наук, МГГУ, Москва.
55. *Налбандян Юлия Сергеевна* – кандидат физико-математических наук, доцент Южного федерального университета, Ростов-на-Дону.
56. *Новик Ирина Александровна* – доктор педагогических наук, профессор БГПУ им. М. Танка, Минск, Республика Беларусь.
57. *Одинец Владимир Петрович* – доктор физико-математических наук, профессор, Сыктывкар.
58. *Омаров Рустам Рамазанович* – аспирант МГУ, Москва.
59. *Паньков Александр Владимирович* – кандидат педагогических наук ЧФ ИЭУиП, Елабуга.
60. *Полотовский Григорий Михайлович* – кандидат физико-математических наук, доцент Нижегородского государственного университета, Н. Новогрод.
61. *Помелова Мария Сергеевна* – кандидат педагогических наук, АГПИ, Арзамас.
62. *Потоскуев Евгений Викторович* – кандидат физико-математических наук, профессор Тольяттинского государственного университета, Тольятти.
63. *Праздникова Елена Владимировна* – С.-Петербургский государственный университет, С.-Петербург.
64. *Пыркова Ольга Анатольевна* – кандидат физико-математических наук, доцент МФТИ, Москва.
65. *Розов Николай Христович* – член-корреспондент РАО, доктор физико-математических наук, профессор МГУ, Москва.
66. *Ройтенберг Владимир Шлеймович* – кандидат физико-математических наук, доцент ЯГТУ, Ярославль.
67. *Рыбников Алексей Константинович* – кандидат физико-математических наук, доцент МГУ, Москва.
68. *Рыбников Константин Константинович* – кандидат физико-математических наук, доцент МГУ леса, Москва.
69. *Садовская Ольга Борисовна* – кандидат технических наук, доцент Костромского государственного технологического университета, Кострома.

70. *Секованов Валерий Сергеевич* – доктор педагогических наук, профессор Костромского государственного университета, Кострома.
71. *Сенашенко Василий Савельевич* – доктор физико-математических наук, профессор, Москва.
72. *Сергеева Ирина Евгеньевна* – ассистент МПГУ, Москва.
73. *Симонов Рэм Александрович* – доктор исторических наук, профессор Московского государственного университета печати, Москва.
74. *Скорнякова Анна Юрьевна* – ассистент Пермского государственного педагогического университета, Пермь.
75. *Соболев Виталий Николаевич* – ассистент Российского государственного торгово-экономического университета, Москва.
76. *Стакина Елена Сафаровна* – ассистент Костромского государственного университета, Кострома.
77. *Станевко Вадим Николаевич* – кандидат технических наук, доцент РГАТА, Рыбинск.
78. *Степанова Дарья Игоревна* – аспирант ЯрГУ, Ярославль.
79. *Суслова Ирина Васильевна* – старший преподаватель ЯГПУ, Ярославль.
80. *Сушенцова Надежда Валерьевна* – учитель ГОУ РМЭ “Лицей Бауманский”, Москва
81. *Тестов Владимир Афанасьевич* – доктор педагогических наук, профессор Вологодского государственного педагогического университета, Вологда.
82. *Тимофеева Ирина Леонидовна* – доктор педагогических наук, профессор МПГУ, Москва.
83. *Трофимец Елена Николаевна* – кандидат педагогических наук, доцент ЯГТУ, Ярославль.
84. *Трубников Николай Андреевич* – кандидат медицинских наук, доцент ЯГПУ, Ярославль.
85. *Трубникова Жанна Николаевна* – врач-кардиореаниматолог клинической больницы им. Н.А. Семашко, Ярославль.
86. *Удовенко Лариса Николаевна* – кандидат педагогических наук, доцент Тольяттинского филиала Самарского государственного университета, Тольятти.
87. *Харламова Вера Ивановна* – профессор, университет Авейро, Португалия.
88. *Чекмарева Елена Андреевна* – аспирант Вологодского научно-координационного центра ЦЭМИ РАН, Вологда.

89. *Шакирова Лилиана Рафиковна* – доктор педагогических наук, профессор Татарского государственного гуманитарно-педагогического университета, Казань.
90. *Щетников Андрей Иванович* – доцент, заместитель директора по науке Центра образовательных проектов “Пифагор”, Новосибирск.
91. *Щукин Евгений Иванович* – кандидат педагогических наук, доцент ЯрГУ, Ярославль.
92. *Эрдниев Арслан Батырович* – учитель математики Элистинской многопрофильной гимназии, Элиста.
93. *Эрдниев Батыр Пюрвеевич* – доктор педагогических наук, профессор Калмыкского государственного университета, Элиста.

Научное издание

Труды VIII Международных Колмогоровских чтений
Сборник статей

Издается в авторской редакции
Компьютерная подготовка оригинал-макета *Т.Л. Трошиной*

Подписано в печать 15.09.2010. Формат 60×92 1/16.
Уч.-изд. л. 32 Усл. печ. л. 33,25 Заказ 335 Тираж 150.

Издательство Ярославского государственного педагогического
университета имени К.Д.Ушинского (ЯГПУ)
150000, Ярославль, Республиканская ул., 108

Типография ЯГПУ
150000, Ярославль, Которосльная наб., 44
Тел.: (4852) 72-64-05, 32-98-69