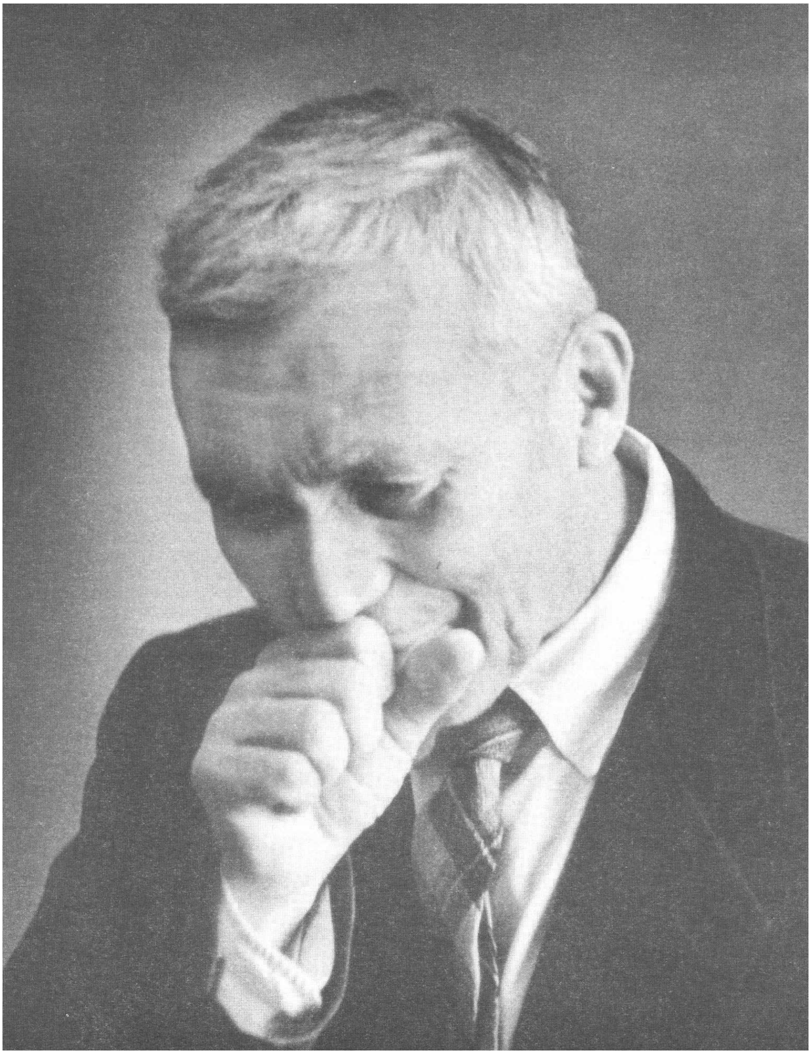


Андрей Николаевич Колмогоров (1903–1987)

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМ. М.В. ЛОМОНОСОВА
ГОУ ВПО «ЯРОСЛАВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. К.Д. УШИНСКОГО»

ТРУДЫ

VII МЕЖДУНАРОДНЫХ КОЛМОГОРОВСКИХ ЧТЕНИЙ

Ярославль
2009

УДК 51; 51:372.8; 51(091)
ББК 22.1 я434
Т 782

Печатается по решению редакционно-издательского совета ЯГПУ имени К. Д. Ушинского

Труды VII Международных Колмогоровских чтений
Т 782 [Текст]: сборник статей. – Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2009. – 455 с.

ISBN 978-5-87555-367-7

Начиная с юбилея (100-летия со дня рождения академика А.Н. Колмогорова, 2003 г.), на родине выдающегося математика XX столетия в Ярославле проводятся традиционные Колмогоровские чтения.

Настоящий сборник статей VII Международных Колмогоровских чтений (2009 г.) так или иначе отражает интересы А.Н. Колмогорова во многих областях математики, теории и методики обучения математике, истории математики и математического образования. Воспоминания учеников и коллег А.Н. Колмогорова содержат новые факты его биографии и аспекты научно-методических интересов ученого.

Сборник будет полезен преподавателям школ и вузов, студентам и всем, кто интересуется математикой, методикой ее преподавания и историей российского образования.

УДК 51; 51:372.8; 51(091)
ББК 22.1 я434

ISBN 978-5-87555-367-7

Оглавление

Глава 1

Пленарные доклады: А.Н. Колмогоров и математика XX столетия

Колмогоров и Фаддеев – два подхода к школьному математическому образованию

М.И. Башмаков

Введение

Примерно 50 лет назад в Москве и Ленинграде в профессиональной среде математиков сложилось две школы со своими подходами к математическому образованию. Лидерство в этих школах можно связать с именами двух выдающихся математиков – Андрея Николаевича Колмогорова и Дмитрия Константиновича Фаддеева.

Эти школы роднила общая позиция по коренным вопросам – внимание к школьному математическому образованию и непосредственное участие в решении стоящих перед ним проблем, отношение к школьной математике как важнейшей части общекультурного и интеллектуального развития школьников, воспитание у своих учеников уважения к работе в школе, сохранение и передача традиций, сложившихся в этом направлении.

В то же время конкретные научные, методические, организационные подходы в "работе со школьниками" (так в те годы именовалось это направление профессиональной и общественной деятельности) сложились достаточно различными. Анализ этих подходов имеет не столько историческое значение (автор – "плохой историк" и не хочет нести ответственность за точность приводимых фактов и дат), сколько важен для разумной ориентации в той сложной обстановке, которая сложилась в последние годы.

Фигуры А.Н. Колмогорова и Д.К. Фаддеева были названы в качестве лидеров двух школ, разумеется, достаточно обоснованно, но в некоторой степени условно – в эти же годы в работе со школьниками были активны многие их коллеги по Университетам, не говоря уже о многочисленном "молодом поколении". Достаточно, например, назвать для Москвы фигуру И.М. Гельфанда, активно пропагандировавшего идею заочной математической школы, или для Ленинграда – А.Д. Александрова, серьезно разрабатывавшего проблемы преподавания геометрии в школе. В то же время для внешнего взгляда "управление" этими школами выглядело совершенно различным – "абсолютная монархия" в Москве предполагала личное участие монарха в принятии решений по вопросам всех уровней, в то время как в Ленинграде весь "синклит", хотя и занимал руководящее положение (А.Д. Александров был ректором, Д.К. Фаддеев – деканом мат-мех факультета, приглашенный в Университет позднее В.А. Рохлин – председателем методической комиссии), передал все организационные и большую часть методических вопросов в руки своих молодых учеников, без колебаний поддерживая их инициативы и принимая на себя всю тяжесть необходимых контактов с партийными и административными органами.

В создавшемся в Ленинграде "регентском правлении" мне выпала участь быть не только координатором и организатором университетской школьной работы, но и "мостом" между двумя школами. Можно назвать в интервале 20 лет с конца 50-х годов несколько узловых точек, в которых пересекалась деятельность двух школ.

1959-61 гг. – организация Всесоюзной математической олимпиады школьников по опыту Ленинградской и Московской олимпиад, проходивших с 1934-35 гг.

1963 г. – создание школ-интернатов при Университетах, одновременное развитие сети городских математических школ, кружков и юношеских математических школ при Университетах, открытие Всесоюзной и Северо-Западной заочных математических школ.

1969-70 гг. – подготовка и выпуск журнала "Квант".

1967 и далее – работа в комиссиях по математическому образованию, подготовка и выпуск нового поколения учебников, публикация в журнале "Математика в школе" серии статей, посвященных обновлению математического образования.

Начальным импульсом в установлении деловых и дружеских контактов между москвичами и ленинградцами можно считать приглашение в 1959 году на московскую олимпиаду команды из 10 ленинградских школьников. Я был руководителем этой команды и познакомился с москвичами, дружба с которыми во многом определила последующие события. "Иных уж нет, а те далече", но мне хочется упомянуть имена Н. Васильева, А. Савина, И. Слободецкого, людей, которые были главными "моторами" создававшейся машины.

В содержательном плане, как это видится сейчас, через 50 лет, линии, выбранные двумя школами, оказались различными. Начиная с общей точки (работа с сильными школьниками – Всесоюзная олимпиада, интернат), А.Н. Колмогоров повел непрерывную линию “вниз”, дойдя до перестройки математического образования в массовой школе, в то время как Д.К. Фаддеев и его коллеги по факультету одобрили идею сделать резкий разрыв и начать линию с самого низа. Таким “низом” стала бурно развивавшаяся в Ленинграде система средних ПТУ. Забегая вперед, можно сказать, что обе линии были нацелены на одну и те же точку – массовую школу, но путь москвичей, имевший большую по модулю производную, достаточно быстро достиг намеченной цели, но к настоящему времени его следы, к сожалению, заметно стерты, в то время как гораздо более медленный путь ленинградцев привел к тому, что интерес массовой школы к результатам, достигнутым на этом пути, стал резко расти.

Было бы неверно обсуждать, какая из двух обозначенных линий (сверху вниз или снизу вверх) лучше, даже независимо от полученных результатов. Обе они дали глубокие находки, которые являются объективно ценными и актуальность которых на современном этапе развития школы несомненна.

Выделим несколько содержательных моментов школьного курса математики: функциональная линия, векторы и геометрические преобразования, введение элементов анализа и развитие математического языка. Остановимся на первом из них, оставив обсуждение остальных для отдельной публикации.

Алгебраический и функциональный подходы в школьной математике

Сравните два набора терминов:

выражение с переменными x, y, z;	выражение с буквами x, y, z;
уравнение с одной переменной;	уравнение с одним неизвестным;
многочлен от двух переменных;	многочлен с двумя буквами.

Вопрос, разумеется, не в словах – если разумно определен и толково объяснен смысл используемых терминов, то предпочтение одному из них перед другим вряд ли приведет к конкретным ошибкам. Тем не менее, выбор системы терминов сказывается на общем подходе и возвеличивание одного из них неминуемо приводит к умалению другого.

С именем А.Н. Колмогорова справедливо связывается формирование функциональной линии в школьной математике. К началу “колмогоровской реформы” необходимость существенного увеличения роли теории функций давно назрела и была встречена с единодушным одобрением как профессиональными математиками, так и большинством учителей.

Наступил момент эйфории – везде отображения: отображение чисел в числа (обычные функции), точек в точки (геометрические преобразования), натуральных чисел в любые объекты (последовательности), конечных множеств в конечные множества (все понятия комбинаторики), суждений в множество из двух элементов – истина / ложь (логика высказываний) и т. д.

Что же начало теряться? Прежде всего – это алгебраические идеи, которые лишились своего языка и поля применения. Первый конфуз произошел с понятием тождества. Естественное определение тождества двух выражений с одинаковыми переменными как равенства их значений на общей области определения сразу вызвало возможность объявлять тождеством неполные равенства типа $\sqrt{x-1} = \sqrt{1-x}$, но наличие таких курьезов всерьез не воспринималось. Однако в школьной практике преобразования рациональных выражений и решения уравнений (7–9 классы) появился такой серьезный вопрос, который мы поясним на примере.

Любой человек скажет, что равенство $x + 1 = \frac{x^2-1}{x-1}$ является тождеством. Оно выполняется для любых $x \neq 1$.

Аналогично тождеством будет и равенство $\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{x^3+x^2+x+1}{x^2+1}$, справедливым на том же множестве. Если $A = B$ и $B = C$, то A должно равняться C. Разумеется, равенство $x + 1 = \frac{x^3+x^2+x+1}{x^2+1}$ является тождеством на том же множестве. Однако оба выражения определены при $x = 1$. Будут ли совпадать их значения при $x = 1$? С точки зрения теории функций – необязательно, с точки зрения алгебры – безусловно. В алгебре рациональные дроби не рассматриваются как поставщики значений рациональных функций. Равенство $\frac{P}{Q} = \frac{R}{S}$, где P, Q, R, S – многочлены с любым числом букв (R и S – ненулевые многочлены), а алгебре понимается как формальное равенство (совпадение) многочленов $P \cdot S = R \cdot Q$. Транзитивность равенства дробей становится теоремой, которая фактически была в школьном курсе алгебры.

Явное обсуждение ленинградцев с А.Н. Колмогоровым этого казуса привело к написанию им замечательной статьи “О школьном определении тождества” [1].

Одна из моих аспиранток (Л. Афонькина) написала и успешно защитила диссертацию на тему об алгебраическом и функциональном подходе в школьном курсе математики.

Я привел только один пример, иллюстрирующий разницу в названных подходах. На самом деле вопрос достаточно глубок и, к сожалению, мало известен учителям, потому что линия на “вымывание” из школьного курса алгебраических идей проходило все эти годы. Могу лишь сказать, что такие важные вещи как алгебраическое понимание симметрии, символьное исчисление, трактовка операций и их свойств почти исчезли из курса.

В “ленинградских учебниках”, благодаря влиянию Д.К. Фаддеева и его школы, алгебраическая линия сохранялась в достаточно полном виде, но эти учебники не были широко распространены. Отметим, что Д.К. Фаддеев для “наведения мостов” предложил включить (с доказательством) следующую теорему: если многочлены P и Q (с любым числом букв, но с коэффициентами в бесконечном поле, например, числовом) имеют равные значения во всех точках, кроме нулей некоторого ненулевого многочлена R, то их значения равны и в этих нулях.

Библиографический список

1. Математика в школе, 1966. – № 3.

Обучение учеников в школе и подготовка учителей в вузе

Н.Х. Розов

Преамбула

Мы хотели бы представить для обсуждения некоторые предложения, касающиеся как средней общеобразовательной школы, так и педагогического образования в стране.

При разработке предложений мы исходили из базисных аксиом:

– человеческий мозг не может нормально функционировать без регулярных умственных упражнений и нагрузок. Образование в широком смысле как раз и дает ту эффективную и целенаправленную нагрузку, тренировку мозгу, которая обеспечивает его поступательное развитие. Тем самым по большому счету речь идет о сохранении человечества как вида, о борьбе против его деградации;

– с прагматической точки зрения человек малообразованный, с малотренированным мозгом слабо осознает происходящее, медленно реагирует на него, плохо ориентируется в задачах и целях, затрудняется в принятии даже простейших решений, не готов к восприятию нового;

– предложения должны не ориентироваться на субъективные, виртуальные представления о “правильной образовательной политике”, а предлагать инструменты для решения конкретных проблем образования, которые вырисовываются из результатов объективного (статистического, опросного) исследования реалий;

– при анализе фактов и проектировании изменения необходимо исходить не из “благих пожеланий”, а из хорошо известного положения, что “любая политика есть продолжение экономики”;

– чтобы чего-то добиться, надо учитывать фундаментальные интересы уже задействованных лиц или заинтересовать новых людей, учитывать законы человеческой психики и социального поведения;

– каждая проблема образования привязана к определенным экономическим возможностям, к целям, местам, задачам, к субъективным воззрениям или некомпетентности конкретных людям, а качество образования зависит только от того, кто учит, чему учит и как учит.

Средняя общеобразовательная школа

1. Если мы действительно хотим решить – не на словах, а на деле – проблему обеспечения средней школы высококвалифицированными кадрами, необходимо, наконец, начать всерьез заниматься обеспечением имиджа и уважения к профессии учителя такой зарплатой, которая эквивалентна его особо ответственной, очень тяжелой и достаточно нервной работе по подготовке и воспитанию будущих поколений населения страны, отвечающих запросам XXI века.

За последний период правления Россией так называемые демократы довольно быстро и весьма основательно развалили всю систему народного образования – от дошкольного до высшего профессионального. Теперь во многих городах очередь на место в детский садик надо занимать даже не при рождении ребенка, а совсем в другой момент. Отношение к среднему профессиональному образованию фактически оставило страну без молодых рабочих и техников. Серьезно был обескровлен преподавательский корпус вузов – во “внешнюю” и “внутреннюю” эмиграцию его покинули сотни тысяч профессионалов, прежде всего – молодых и наиболее перспективных. Но в особенно тяжелом положении находится средняя школа – в плане как кадрового, так и материально-технического обеспечения.

Испокон веку учитель был на Руси одним из самых уважаемых людей. В деревнях, встречая учителя на улице, мужики снимали шапки, а бабы кланялись в пояс. Образование считалось главным богатством и вожделенной мечтой: даже неграмотные и неимущие стремились во что бы то ни стало своих детей прежде всего обучать. И в крупном городе, и в малой деревеньке школа была притягательным центром знаний и культуры, пользовалась всеобщей поддержкой.

Положение современного учителя в России весьма незавидное. По результатам опросов, зарплата учителей остается недостаточной для обеспечения их качественной работы и собственной достойной жизни. В настоящее время основные расходы людей – на жилье, поэтому наиболее конкретной единицей измерения является "кв. метр жилой площади". По данным Росстата, в 2007 г. средняя стоимость 1 кв.м типовой жилой площади составляла 44630 руб., так что (в зависимости от региона) учительская месячная зарплата "весит" от 0.14 до 0.8-1.0 кв.м.

По данным ВЦИОМ (2008 г.) только 49% школьных учителей заявили, что их устраивает их социальное положение – значит, каждый второй учитель ходит в школу без внутреннего энтузиазма. Недофинансирование особенно затрагивает интересы учителей со стажем работы 5-15 лет – школа тем самым отрубает себе возможность получать новые молодые кадры. Между тем 17% учителей – пенсионного возраста и около 30% – предпенсионного; только 8% учительского корпуса – молодые учителя со стажем работы в школе до 5 лет.

Сегодня, когда все и вся определяют исключительно неприкрытые денежные интересы, только должная зарплата может стимулировать к работе в школе, какую бы популяризацию профессии учителя мы ни затеяли. Без радикального первоочередного решения проблемы оплаты учителя все мероприятия (перестройка педвузов, введение магистратуры и проч.) даст такой же эффект, как у музыкантов в басне И.А. Крылова.

Наиболее популярна сейчас у руководителей образования тема о Болонском процессе – что нам надо "у них" перенимать, где надо "их опыт" внедрять. Хорошо бы в первую очередь нам перенять европейский стандарт оплаты труда людей, занятых обучением молодежи.

2. Если мы действительно хотим решать проблему радикального повышения качества школьного образования, необходимо всерьез обеспокоиться решением базисных проблем: научно обоснованные объем школьной программы и содержание каждой дисциплины, чехарда со "стандартами", внедрение современных психолого-педагогических и методических разработок в области обучения, воспитания, современных образовательных технологий.

По данным мониторинга МПГУ, абсолютное большинство учителей, родителей, учащихся и до половины экспертов не видят сколько-нибудь заметных позитивных изменений в системе общего образования. В ответах респондентов выделяются: общее снижение качества образования (54%), усиление неравенства в получении качественного образования (53%), устаревшие представления о минимальном содержании программ школьного образования (22%).

По состоянию на 2007/2008 учебный год в школе надлежало формировать 378 компетенций. Но каков результат? Вот один пример: по данным опроса ВЦИОМ (2007 г.), около трети россиян считают, что ... Солнце вращается вокруг Земли. Не означают ли это, что "формирование компетенций" соседствует с дремучей неграмотностью?

Сегодня только ленивый не говорит, что наши дети в школе чрезмерно перегружены (например, рабочий день старшеклассников длится в среднем 10 часов). Однако "предметники" постоянно требуют добавить им часы, в том числе и для неумолимо растущего объема свежей информации, в школьном расписании появляются все новые дисциплины. Перестройка школьного образования должна идти за счет научно продуманной замены теряющих актуальность сведений (к большинству из них мы, правда, очень привыкли и традиционно за них держимся) на свежий материал, дающий развивающий эффект и способствующий воспитанию "живости ума". И особенно – за счет сокращения немыслимого числа заучиваемых правил, фактов, дат, формул, которые есть в справочниках, словарях, Интернете. Надо, наконец, осознать, что лозунг "Обогащайте свою память знанием всего того, что выработало человечество" навек ушел в прошлое.

Другим следствием перегрузки школьников является нарушение состояния здоровья основной массы учащихся. По имеющимся данным, только около 10% выпускников школы являются абсолютно здоровыми; количество детей, не готовых к систематическому полноценному образованию, увеличилось в 5 раз по сравнению с 70-80 гг. прошлого века. Но ведь здоровье, физическое развитие – бесценное богатство любого человека, тем более – ребенка; даже очень хорошо обученный, но больной молодой человек не сможет в полной мере реализовать свои знания и жизненные устремления. Поэтому одним из важнейших предметов в школе должна стать физкультура. Почему бы один день в неделю не освободить от предметных уроков и не отдать физкультуре и спорту, а также экскурсиям и кружкам, художественной самодеятельности и походам в театр? Вместо этого пока появился... учебник по физкультуре, так что дети могут у доски отвечать: "Козлом называется...".

Говоря о тех, кто учится в школе, нельзя отдельно не сказать о тех, кто в школе **не учится**. В 2006 г. в России было более 2 млн. детей, которые нигде не учились (включая как беспризорников, так и тех, кто жил в семье). Эта серьезная проблема возникла после того, как вместо "Закона о всеобуче", предусматривавшего обязательное школьное обучение и ответственность за уклонение от него, наша Дума выдумала закон "О праве на образование". Нужно срочно принять меры к тому, чтобы защитить детей от неграмотности, дать им знания в том объеме, который соответствует их возможностям и психологическому статусу.

3. Слабой эффективности и невысокому качеству учебного процесса в школе в значительной мере способствуют и многие иные факторы, которые хорошо известны, но научно разобраться с ними мы все так и не соберемся: отсутствие полноценных учебников и дополнительной литературы для школьников, недостаточное число методических пособий для учителей, несовременные методики обучения, немыслимая преподавательская нагрузка и многое другое.

Верно, что профессиональный уровень части учителей невысок, так как они не обогащаются новыми педагогическими и методическими достижениями. Но посмотрим по-человечески: всегда ли учитель, дающий 20-25 уроков в неделю (полторы ставки), выполняющий еще и другие обязанности (не забудем и про его личную жизнь), в состоянии систематически повышать свою квалификацию – изучать научные книги, овладевать новыми технологиями, осваивать передовой опыт? Постоянный профессиональный рост можно обеспечить только после принятия научно обоснованной и гуманной нормы преподавательского труда.

К проблеме повышения квалификации учителей нельзя не подойти и с другой стороны. Ежегодно у нас защищаются сотни диссертаций по педагогической проблематике, но большинство из них пишутся на абстрактные темы, остаются недоступными и непонятными практикующему учителю. Рекомендаций, наработок, учебников, методик для школьника и учителя из всех этих сочинений проистекает чрезвычайно мало. Следует резко усилить практико-ориентированную, прагматическую компоненту исследовательских работ, постоянно иметь в виду задачи совершенствования содержания школьного образования, потребности преподавателя в конкретных советах, в книгах по обучению и воспитанию, написанных доступным языком.

Уровень образования в значительной степени зависят от доброкачественности учебной литературы. К книгам, претендующим на звание "учебник", должны предъявляться очень жесткие требования по всем параметрам: подбор коллектива авторов, безукоризненность содержания, соблюдение дидактических принципов, методическое искусство, стиль и грамотность изложения, наличие информационно-компьютерной поддержки и др. Подготовку учебников пора превратить из мелкого ремесла для желающих в крупное производство: учить хорошо и по-современному – задача, неподъемная для небольшого авторского коллектива, который не в состоянии выстраивать все линии современного образования в сбалансированную и оптимизированную систему.

Специального внимания требуют школьные библиотеки. Вопрос о создании списков обязательной рассылки книг по этим библиотекам особенно актуален для школ в деревнях, поселках, небольших городах. Школьникам нужны не только учебники (включая весьма необходимые и все никак не прививающиеся у нас аудиоучебники по ряду дисциплин), но и дополнительная учебная литература, умные, добрые, развивающие книги, научно-популярные журналы, диски. А все это стоит весьма дорого и, к тому же, вдали от крупных городов все это купить почти невозможно. А как учитель, работающий в "глубинке", может доставать актуальную методическую литературу по специальности, книги по современным методикам преподавания, об опыте лучших педагогов?

Сегодня стало модным говорить о том, что ведущим инструментом школьного образования все больше становится Интернет: ученик может получать все знания из сети, что, кстати, параллельно развивает в нем и важный навык работать самостоятельно. А потому учитель-предметник оттесняется на второй план – школьник из Интернета, мол, почерпнет гораздо больше того, что знает преподаватель. Такие волюнтаристские заявления весьма опасны для школы. Интересно, откуда уверенность, что ученики будут именно "получать знания", а не сидеть в "клубничных сайтах"? Как они будут самостоятельно отделять фундаментальные сведения от любопытных, но второстепенных деталей? И есть ли гарантия, что ученик, невзлюбивший математику, через Интернет ее полюбит?

Широко обсуждается и уже реализуется в разных формах идея о ликвидации "малокомплектных сельских школ" под предлогом "экономии бюджетных средств". Не до конца ясно, как будет реализована программа транспортировки сельских детей на автобусах в райцентры, если учесть российские дороги, расстояния, зимы. Между тем, школа всегда была в небольших населенных пунктах очагом знаний и культуры. По чисто человеческим причинам деревня без школы обречена на постепенное вымирание. В стране в значительных объемах ведется восстановление, реставрация и строительство храмов и церквей. Неужели есть люди, которые не понимают, что образование в не меньшей степени определяет уровень развития цивилизации в стране, гарантирует перспективы развития культуры и науки (а значит, и экономики), является главным богатством и основным отличительным качеством homo sapiens?

Существенно, что школы и органы управления ими испытывают острый дефицит высококвалифицированных менеджеров, способных профессионально и компетентно организовать качественную работу. Факт остается фактом: оценки современного состояния управления общим образованием, процедур аттестации, лицензирования и аккредитации школ, сформированные на базе мнений учителей и руководителей школ, учащихся и их родителей, работодателей и самих управленцев, имеют за последние три года отрицательную динамику.

Со средней школой неразрывно связано и другое звено народного образования – среднее профессиональное образование, учитывающее особенности и возможности большого контингента учащихся и являющееся массовой ключевой формой подготовки кадров для реального производства. Важно обеспечить учащимся этого звена получение полного среднего образования. Однако неприемлемым является тот факт, что для них не разработаны специальные программы такого обучения, не созданы специальные учебники общеобразовательных дисциплин.

Педагогические университеты

1. В каждом регионе России обязательно необходим по крайней мере один педагогический университет (институт или, в крайнем случае, педагогический факультет местного классического университета), обеспечивающий учителями школы региона, особенно в селах, деревнях, рабочих поселках, небольших городках.

Из 60 тыс. общеобразовательных учреждений РФ 2/3 составляют сельские школы. Детям “в глубинке” должно быть гарантировано равное с городскими право на получение качественного образования. Но из выпускников педагогического университета (или классического университета) крупных областных центров абсолютное большинство сделает все возможное (и невозможное), чтобы в село не поехать. Только региональные педагогические вузы смогут обеспечить подготовку учителей для региона из местных же кадров, прежде всего – для школ в сельской местности. Без повсеместного и “поголовного” обучения детей в регионе невозможно его интенсивное развитие, он обречен на прозябание.

Имеет смысл шире использовать “технологию филиалов”, когда крупный областной педагогический университет имеет филиалы в мелких городах области и обучение осуществляется “на месте”. При систематической работе это будет способствовать подъему уровня преподавания и одновременно обеспечит доступность образования. Кроме того, студенты получат возможность “жить в родных стенах”, учиться, не выезжая из родного города, и поэтому у них появится больше стимулов остаться работать “на малой родине”.

Секрет полишинеля, что сейчас муссируется такая радикальная идея: существенно сократить число педагогических вузов (скажем, оставить 10-15 таких вузов на всю Россию), а остальные преобразовать в местные филиалы центральных классических университетов или вовсе закрыть. Мотивировка до боли знакома и стандартна: экономия бюджета, слабый уровень преподавания в целом ряде педагогических вузов, малое число выпускников, реально идущих работать учителями в школу.

Начнем с того, что никто и не собирается спрашивать мнение налогоплательщика, на деньги которого, собственно, и существует вся система образования, готов ли он отказаться от такой формы обучения своих детей и подготовки учителей для своих внуков.

Если думать о будущем страны, то, по большому счету, именно обучение в педагогическом вузе является самым демократичным способом приобщать молодежь к знаниям и культуре, приступить, наконец, к решению проблемы повышения уровня цивилизации народа. И пусть выпускница после педагогического вуза не пошла в школу и растит дома детей – у этих детей образованная, умелая и культурная мать, знающая педагогику, психологию, приемы воспитания, а потому способная вырастить физически и умственно здоровое и развитое поколение.

Сокращение числа обучающихся в педагогических университетах – таких студентов весьма значительное число – может иметь и серьезные социальные последствия. В связи с постигшим нас экономическим кризисом и неконтролируемым сокращением рабочих мест молодежь будет пополнять армию безработных, окажется на улице за чертой бедности и в конце концов может взяться за “оружие пролетариата”.

Тот факт, что слишком многие выпускники педагогических вузов не хотят работать в школе, не является “виной” этих вузов. В России провозглашена “рыночная экономика”, а потому и оценивать этот факт надо по рыночному критерию: число желающих идти в школу пропорционально той зарплате, которую правительство платит учителю. Поэтому математики уходят в банки работать на компьютерах, преподаватели иностранных языков – в фирмы переводчиками, физкультурники – охранниками в рестораны, клубы и казино. Ведь понятно: если бы заработок министра составлял 10000 рублей в месяц, едва ли нашлось бы много желающих сесть на этот стул.

2. Для обеспечения учителями школ в сельской местности необходимо для учителей этих школ восстановить существовавшие льготы (так безответственно отмененные) и ввести обучение местной молодежи в педагогических вузах по финансовому контракту с государством, который гарантирует материальное обеспечение в течение учебы при обязательстве, скажем, три года работать в предписанной школе.

Только такие конкретные (и, кстати, рыночные) меры могут заинтересовать молодого человека в сельской школе, подтолкнуть его пойти туда и там остаться, тем более, что в сельской местности есть достаточно высокая вероятность получения жилья". И только такие меры позволят реально изменить отношение молодежи и общественного мнения к профессии учителя. Без этого все останется, как прежде: в педагогические вузы будет приходить далеко не лучшая часть выпускников школ, а на работу в школы будут приходить худшие выпускники педагогических вузов в недостаточном количестве.

3. Для формирования квалифицированных учителей (грамотных предметников и вдумчивых воспитателей) следует в первую очередь укрепить педагогические вузы квалифицированными преподавательскими кадрами по разным дисциплинам, прежде всего – за счет выпускников аспирантуры классических университетов.

Научный потенциал таких выпускников особенно важен в педагогических вузах, особенно региональных. Однако эффективность работы этих выпускников зависит не только от их высокой научной квалификации, но и от их подготовленности к преподаванию в высшей школе. Между тем, психолого-педагогической подготовке к работе в высшей школе аспирантура классических университетов внимание уделяет явно недостаточное.

На решение этой проблемы в классических университетах нацелена дополнительная образовательная программа "Преподаватель высшей школы", которая, однако, реализуется очень неактивно в связи с отсутствием у аспирантов временных возможностей (нереально короткий срок аспирантуры, необходимость подрабатывать и др.). К тому же, так и остается открытым вопрос об источниках ее финансирования.

Радикальное решение злободневного вопроса о подготовке аспирантов к преподаванию в вузе состоит в том, чтобы в программе аспирантуры любого вуза прописать как обязательные психолого-педагогические курсы, методику и практику обучения своему предмету. Кстати, освоение основ психологии и педагогики представляется важной прагматической компонентой образования, востребованной сегодня работодателями, необходимой для семейной жизни, для культуры контактов с людьми. И потому не лучше ли заменить имеющий абстрактную ценность аспирантский минимум по методологии и философии науки на прагматически актуальный цикл психологии и педагогики?

4. Для формирования высококвалифицированных учительских кадров на "предметных" факультетах педагогических университетов необходимо учредить двухгодичную магистратуру для наиболее перспективных бакалавров.

Такая магистратура должна бесплатно давать дополнительную (к "предметному" образованию) подготовку в области педагогики; психологии; теории и практики воспитания; методики преподавания; образовательных технологий; менеджмента, организации, экономики и правового обеспечения образования; предусматривать педагогическую стажировку, освоение навыков исследовательской работы. Выпускники магистратуры будут получать легитимный документ с формулировкой "Магистр образования, преподаватель <предмета>".

Предлагаемая альтернативная формулировка "Магистр педагогики" является некорректной. Атрибут магистра должен сопровождать не раздел науки, а область деятельности: педагогика – наука, а деятельность – это образование. "Магистр физики" – человек, который может осуществлять деятельность в области физической науки. А "Магистр образования, преподаватель физики" может осуществлять деятельность в области образования – преподавания физики. Идея использовать направление "Магистр педагогики" специально для подготовки управленцев неразумна: школе необходимы в первую очередь отличные предметники, и магистр (в том числе и работающий управленцем) обязательно должен быть образцом предметника высокой квалификации.

Лучшие выпускники магистратуры педагогических университетов смогут эффективно работать преподавателями в старших классах, в том числе – и в профильных школах.

Классические университеты

1. Необходимо обеспечить возможность студентам всех факультетов классических университетов, параллельно с фундаментальной подготовкой в избранной ими научной области, добровольно и бесплатно получать дополнительно психолого-педагогическую и методическую подготовку в рамках образовательной программы "Преподаватель", для чего надо расширять число факультетов педагогического образования классических университетов. Следует безотлагательно решить остающийся открытым вопрос об источниках финансировании обучения всех желающих студентов-бюджетников классических университетов страны по этой дополнительной программе.

Существует такая точка зрения, что в школе может без проблем работать инженер и экономист, доктор наук и вчерашний студент – и вообще преподавать в школе может каждый. И чем больше будет таких "учителей" – тем лучше, тем богаче "палитра возможностей". Так может думать только тот, кто давно окончил школу и с тех пор открывал ее дверь разве что для официального визита, кто не понимает, что настоящее преподавание в школе – очень тонкое искусство и весьма тяжелое ремесло, требующее, как и все настоящее, специального и кропотливого обучения.

Классические университеты представляют большие резервы для решения насущной проблемы формирования высококвалифицированных учительских кадров. Речь должна в первую очередь идти о преподавателях для старшей школы, для профильных классов, для специализированных школ с углубленным изучением предмета, для реализации внеурочной работы, прежде всего - с одаренными учащимися. Именно работающие в школе выпускники классических университетов, имеющие глубокие научные знания и навыки исследовательской работы, могут радикально решить вопрос о действенной реализации программы профилизации старшей школы, осуществить обучение способных учащихся, обеспечить такие инновационные концепции учебной деятельности, как поисково-исследовательская, проектная, конструкторская и др.

Однако надо подчеркнуть, что классические университеты в принципе не могут заменить педагогические вузы в деле подготовки учителей для массовой школы и потому не должны рассматриваться как альтернативный источник педагогических кадров. Например, привлечение выпускников классических университетов к работе в начальной школе является расточительством и, кроме того, невозможно из-за недостаточной специальной подготовки в возрастной психологии, методике обучения младших школьников и специфике их воспитания.

Финансирование программы "Преподаватель", которое до сих пор остается проблематичным, должно обеспечить обучение студентов в ее рамках именно на бесплатной основе, что, помимо подготовки педагогических кадров, будет содействовать социальной поддержке малообеспеченных студентов (в основном они и идут на факультеты педагогического образования).

2. Для формирования высококвалифицированных кадров широкого профиля для школ необходимо учредить на факультетах педагогического образования классических университетов двухгодичную магистратуру для перспективных выпускников всех факультетов университета, завершивших параллельно обучение и по образовательной программе “Преподаватель”.

Эта магистратура должна бесплатно давать дополнительную теоретическую и практическую подготовку в области педагогики и психологии; теории и практики воспитания; методики преподавания предмета; современных образовательных технологий, прежде всего – информационно-компьютерных; менеджмента, организации, экономики и правового обеспечения образования; предусматривать педагогическую стажировку. Выпускники магистратуры будут получать легитимный документ с формулировкой “Магистр образования, преподаватель <предмета>”. Альтернативная формулировка “Магистр педагогики” является некорректной, ибо за два года обучения невозможно изучить педагогическую науку в объеме, допускающем такую формулировку.

3. Все университеты, в том числе классические, технические, технологические, экономические, гуманитарные и проч., должны повернуться лицом к школе, оказывать ей систематическую содержательную поддержку.

Эта работа вузов ориентирована на их же пользу – ведь именно выпускники школ заполняют студенческие аудитории. В вузах любят говорить о слабой подготовке поступающих. Так может быть следует мобилизовать свои интеллектуальные и кадровые ресурсы на написание учебных пособий для школьников и научно-популярных публикаций, на проведение внеклассных занятий “по интересам” и кружков, на открытие лекториев по вопросам науки, познавательных и консультационных сайтов, на разработку новых образовательных методик?

К работе со школьниками полезно привлечь и их студентов – они бы получали важные для будущей деятельности навыки общения с людьми и организации коллективной работы. В процессе обучения студентов и аспирантов непедагогических вузов целесообразно также предусмотреть изучение психологии и педагогики, что повысит востребованность выпускников на современном рынке труда и позволит более качественно формировать преподавательские кадры для самой высшей школы.

Созданию здорового общественного климата и обеспечению комфортного самочувствия самого человека серьезно способствовало бы психологическое образование молодежи. Этому уделяется сегодня абсолютно недостаточное внимание - при всех бесконечных разговорах о том, что выпускник вуза должен быть готов работать в постоянно меняющихся условиях, иногда стрессовых, должен быть мобильным, толерантным, коммуникабельным, психологически устойчивым. А ведь все эти качества не появляются спонтанно, их надо воспитывать, всему этому надо специально учиться. Видимо, наступило время серьезно и обстоятельно обсудить вопрос о том, что разные курсы психологии должны стать обязательным элементом программы любого вуза на уровне федеральной компоненты каждого стандарта.

Вузы региона, объединив свои усилия под эгидой педагогического университета, могли бы принять плодотворное участие в организации работы по повышению квалификации и переподготовке учительских кадров, предложив учителям содержательную программу с экскурсами в современные разделы знаний. Целью переподготовки учителей должно быть освоение ими современных методических приемов, инновационных принципов и методов работы. Поэтому система переподготовки учителей должна представлять собой не как краткосрочные курсы, а продуманную систему корпоративного образования, предусматривающую регулярное серьезное обучение как теоретического, так и практического плана.

Информатизация управления качеством образовательного процесса (на примере факультета информатики и математики МГГУ имени М.А. Шолохова)

В.М. Монахов, Е.В. Бахусова

Авторами выдвинута концепция управления качеством образования, в которой *управление трактуется как процесс*, к проектированию и прогнозированию которого операционально применимы и аппарат технологизации этого процесса, и аппарат его информатизации. Естественно, что идеологией этой концепции является интеграция педагогических и информационных технологий.

Обозначим существующие подходы к трактовке категории “качество образования”:

• *знаниево-операционный* подход *качество образования* трактует как определенный уровень освоения обучаемым содержания образования;

• *функционально-деятельностный подход* трактует качество образования как меру реализации потенциальных возможностей личности обучаемого и характеризуется соотношением *целей и результатов* образовательной деятельности при условии, что цели заданы операционально и диагностично;

• *компетентностно-ориентированный* подход качество образования определяет как умения обучаемых действовать на основе полученных знаний и возможностями выпускников быть успешными в социальном и профессиональном плане.

В основу нашей концепции положен *функционально-деятельностный подход.*

Основные положения концепции:

1) *процессный* подход к управлению;

2) организация управления сводится к *проектированию* управленческого процесса;

3) представление управленческого процесса в виде *технологической карты*;

4) выделение основных *параметров управления, входных управленческих переменных и выходных переменных* с точки зрения методологии нечеткого моделирования (дискретные управленческие решения);

5) контроль за управленческим процессом через матрицу 5х5 *"Функционал управления"*;

6) построение системного *мониторинга* хода управленческого процесса;

7) использование информации, полученной как результат функционирования мониторинга, для *принятия управленческих решений, обеспечивающих заданное качество* образовательного процесса.

В результате исследования инновационных возможностей траектории профессионального становления специалиста на факультете информатики и математики Московского государственного гуманитарного университета имени М.А. Шолохова были выявлены *основные этапы инновационных преобразований учебного и управленческого процессов:*

Этап 1. Разработка *модели учебного процесса.*

Этап 2. Технологизация модели и создание педагогической технологии проектирования учебного процесса (рис. 1).

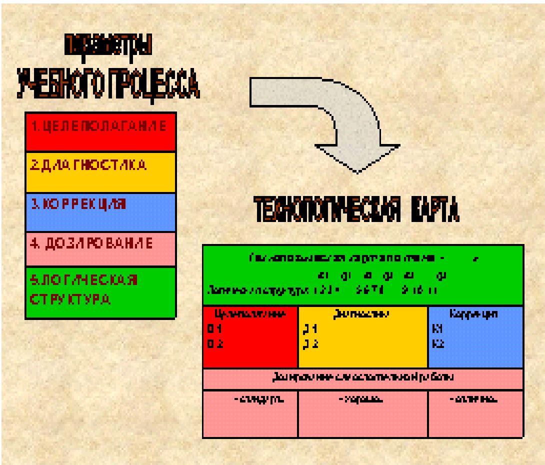


Рис. 1

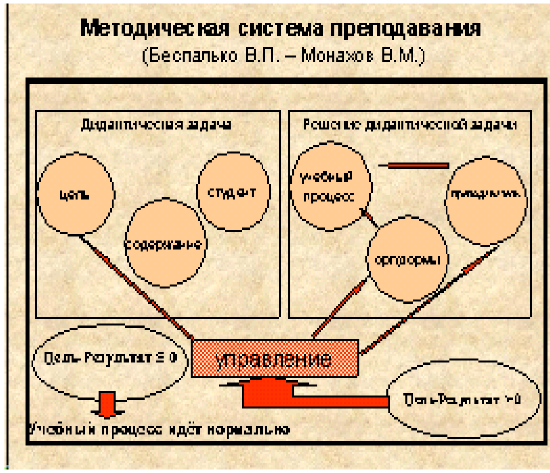


Рис. 2

Этап 3. Разработка *модели методической системы преподавания*. В этой модели функционирует принципиально иной главный управленческий критерий для принятия управленческого решения – разность между микроцелью и результатом диагностики, фиксирующей реальный уровень освоения учащимся содержания микроцели (рис. 2).

Этап 4. Создание *компьютерной системы аналитической обработки результатов всех диагностик*, позволяющей получить целостную картину качества образовательного процесса, которая характеризует уровень и динамику качества профессиональной подготовки обучаемых, а также качество профессиональной деятельности профессорско-преподавательского состава (рис. 3, 4).

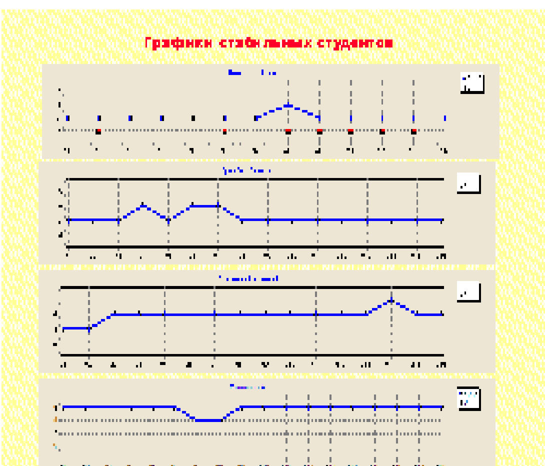


Рис. 3

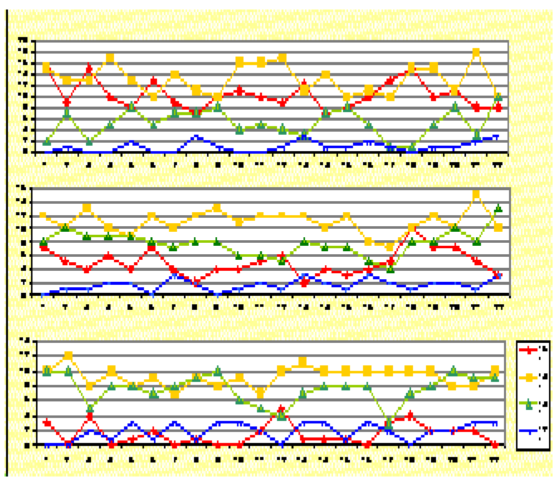


Рис. 4

Этап 5. Построение *модели управленческого процесса*, сведение ее к технологической карте, которая четко определяет процедурную последовательность управленческой деятельности (рис. 5, 6).

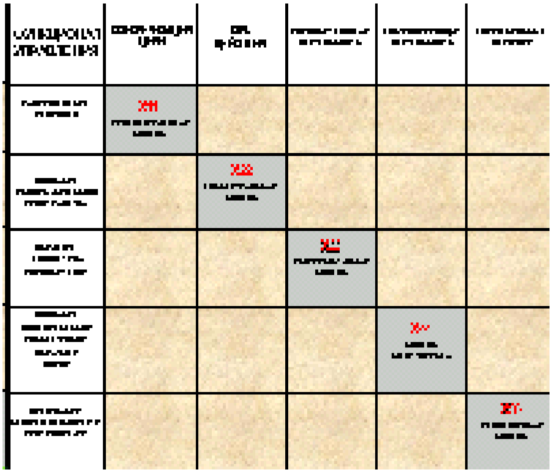


Рис. 5

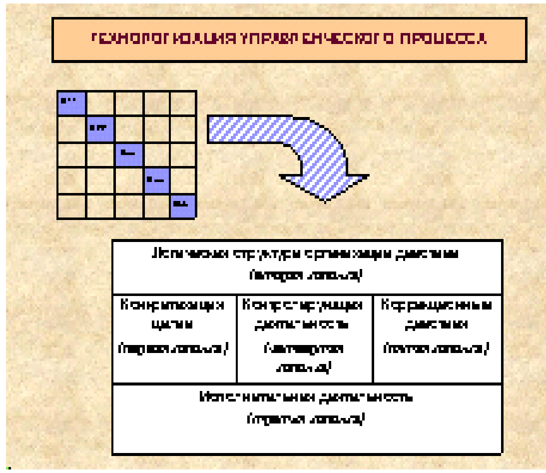


Рис. 6

Этап 6. *Создание информационного банка допустимых управленческих решений различного уровня и долгосрочности.*

Обращаем внимание на два фундаментальных результата, представленных выше:

во-первых, реализованная возможность трансформации модели учебного процесса в технологическую карту;

во-вторых, неожиданная для авторов трансформация "управленческого функционала" в те же пятикомпонентную технологическую карту.

Резюме вышесказанного:

1) *только после представления любого процесса в виде совокупности технологических карт, можно переходить к информатизации управления качеством*;

2) идеальным результатом интеграции информационных и педагогических технологий является создание общенаучного фундаментального инструментария, адекватно и универсально моделирующего все педагогические и управленческие ситуации образовательного процесса;

3) новый инструментарий естественно требует от ППС соответствующей *информационно-технологической культуры моделирования* как учебного, так и управленческого процессов. А это уже философия формирования и использования человеческих знаний и ресурсов.

До сих пор в многолетней научной деятельности авторы использовали методологию классического системного моделирования и все модели педагогических объектов, внедренные в массовую практику, были построены на этой методологии. Однако, все отчетливее видны ограничения этих моделей, связанные с:

- неясностью и нечеткими границами педагогической системы;

• неоднозначностью семантики отдельных терминов при построении, как концептуальной модели так и инструментальной модели;

• неполнотой модельных представлений о сложной педагогической системе при постановке и решении слабоформализуемых проблем;

• невозможностью учета всех релевантных особенностей решаемых проблем;

• противоречивостью и слабой функциональной взаимосвязью отдельных компонентов педагогических систем;

• неопределенностью наступления и невозможностью прогнозирования некоторых событий, относящихся к возможности нахождения педагогической системы в том или ином состоянии.

Методология нечеткого моделирования не заменяет и не исключает методологию системного моделирования, а только конкретизирует последнюю к процессу построения и использования нечетких моделей сложных систем и процессов в образовательной сфере.

Нечеткая модель это информационно-логическая модель системы, построенная на теории нечетких множеств и нечеткой логики, и позволяющая учитывать роль и функции человеческого фактора.

Библиографический список

1. *Монахов, В.М.* Введение в теорию педагогических технологий [Текст] / В.М. Монахов. – Волгоград: Изд-во "Перемена", 2006.
2. *Бахусова, Е.В.* Некоторые концептуальные вопросы информатизации управления качеством образовательного процесса [Текст] / Е.В. Бахусова // Материалы 17 международной конференции "Математика. Образование". – Чебоксары, 2009.
3. *Монахов, В.М.* К вопросу использования методологии нечеткого моделирования при информатизации педагогических объектов [Текст] / В.М. Монахов // Материалы 17 международной конференции "Математика. Образование". – Чебоксары, 2009.

Джузеппе Пеано и российское математическое сообщество его времени

С.С. Демидов

1. Педварительные замечания. Такая тема появилась в моих занятиях случайно: известный итальянский историк математики профессор Сильвия Роэро предложила мне выступить с докладом на эту тему на конференции, посвященной 150-летию со дня рождения выдающегося математика, которая прошла в октябре 2008 года в Турине. Более того, она сделала мне замечательный подарок – она прислала мне несколько DVD-дисков, содержащих материалы из архива Дж. Пеано. Когда я познакомился с ними, то предложенная задача показалась мне, с одной стороны, очень привлекательной, с другой, не слишком обременительной – я полагал, что подготовка доклада займет совсем немного времени (как вскоре выяснилось, в этом отношении я очень ошибался). И я ответил согласием.

Так я приступил к решению задачи с очень необычной, по крайней мере для меня, постановкой вопроса – исходя из оказавшихся в моем распоряжении материалов туринского архива Пеано, попробовать бросить взгляд на современное ему российское математическое сообщество: как воспринимались россиянами его идеи, как они реагировали на них, что означали для россиян его имя и его идеи, как вообще принимались в России того времени новые идеи, зародившиеся на Западе, и как они там укоренялись.

2. Взгляд из столиц. Санкт-Петербург. Первое, что сразу бросилось мне в глаза, это несколько странная география его российских корреспондентов (сразу оговорюсь – я имею в виду только его корреспондентов-математиков, его же обширные связи по линии искусственных языков – эсперанто, интерлингвы и пр. – я затрагивать не собирался, хотя этот вопрос также представляет определенный интерес). Среди них отсутствуют ученые из Санкт-Петербурга и Москвы – двух столиц и ведущих отечественных математических центров того времени (хотя, заметим сразу, на рассматриваемый период ложится начало постепенного роста значимости провинциальных научных центров, когда, вслед за Казанью, начинают все более отчетливо заявлять о себе математики Харькова, Одессы, Варшавы и Дерпта – об этом, впрочем, далее). Их отсутствие находит очень простое объяснение из сопоставления фактов научной биографии Пеано и жизни современного ему российского математического сообщества.

Если говорить о Санкт-Петербурге, то здесь все совсем просто – по самому духу и тематике чебышевская школа и круг Дж. Пеано слишком далеко отстояли друг от друга. Занимавшие Пеано, начиная с 90-ых годов, вопросы оснований математики и математической логики, не только не входили в круг их интересов, но вызывали у них резкую реакцию неприятия.

Что же касается работ Пеано по разделам, примыкавшим к теории функций действительного переменного (теория интеграла, “кривая Пеано" и т.д.), то, как следует из реакции петербуржцев на работы Г. Кантора, исследования Э. Бореля, А. Лебега и Р. Бэра, и на последовавшие за ними исследования математиков школы Д.Ф. Егорова – Н.Н. Лузина, они не могли вызвать у них интереса.

Единственной точкой соприкосновения петербуржцев с творчеством туринского математика стал курс дифференциального и интегрального исчисления А. Дженноки, изданный Дж. Пеано в 1884 с его дополнениями [6]. Эти дополнения, вводившие читателя на строительную площадку претерпевавшего в те годы гигантскую перестройку математического анализа вызвали особый интерес в мире. Курс был переведен на другие языки (в том числе, на русский [7]) и обратил на себя внимание и в Петербурге. Правда, внимание это было запоздалым. Петербуржцы долго игнорировали перестройку, символом которой стал К. Вейерштрасс, но уже в 1910-е годы не замечать ее не смогли даже они. Во всяком случае наименее политически ангажированные из них (речь идет, конечно, о "политике" внутриматематической). Здесь пионером выступил К.А. Поссе, который в 1913-1914 гг. опубликовал (правда, в далекой от столицы Одессе) двухтомный курс анализа Э. Чезаро [8]. Он же в тяжелые годы гражданской войны осуществил перевод курса Дженноки-Пеано (1), опубликованный [9] в Берлине (там Государственное издательство печатало в ту пору многие книги на русском языке !) в 1922 г. Издание это оказалось неудачным. Вот что он писал по этому поводу В.А. Стеклову 4 апреля 1924 г. в связи с выходом в Берлине очередного издания своего "Курса дифференциального и интегрального исчисления" (цитирую по [10, с. 58]): "По горькому опыту с моим переводом курса Дженокки, в котором на 320 страниц оказалось 400 опечаток (пропущены целые страницы моей рукописи), боюсь, не испорчена ли и эта книга".

И хотя сам этот перевод [9], который Поссе снабдил собственными примечаниями, не сыграл заметной роли в преподавании математического анализа в СССР, сама книга [6] и, особенно, примечания Дж. Пеано оказали большое влияние на становление курса дифференциального и интегрального исчисления самого Поссе – курса, многие идеи которого, задачи и методические подходы были восприняты его сотрудником – Г.М. Фихтенгольцем, учебники которого, на которых выросло несколько поколений советских математиков, принадлежат к числу лучших в XX столетии.

Проблема становления корпуса учебной литературы по математике для советской высшей школы, в том числе, учебников по математическому анализу совершенно не исследована и стоит на повест-

ке дня современных историко-математических исследований. Один из важнейших аспектов этой проблемы – изучение становления курсов К.А. Поссе и Г.М. Фихтенгольца, а также влияния на них идей Дж. Пеано.

Перевод Поссе – это единственное, насколько нам известно, соприкосновение творчества Пеано с деятельностью математиков петербургской школы.

3. Взгляд из столиц. Москва. Следующим по значимости математическим центром России была Москва с ее университетом и Математическим обществом – вторым (после математического класса Академии наук) по влиянию на российскую математическую жизнь учреждением Империи. Динамика развития математики в первопрестольной была отлична от петербургской.

На период активной деятельности Дж. Пеано, предшествующий его погружению в математическую логику и деятельность, связанную с интерлингвой, то есть на период охватывающий 80-е годы XIX – начало XX в. падает время расцвета Московской философско-математической школы. Главными направлениями ее деятельности были (если рассматривать ее ретроспективно – с позиций современной математики) – дифференциальная геометрия (К.М. Петерсон, Б.К. Млодзеевский, Д.Ф. Егоров) и прикладная математика (Н.Е. Жуковский, С.А. Чаплыгин). Разумеется, что касается дифференциальной геометрии, то здесь москвичи сотрудничали с итальянцами, но в этих связях Дж. Пеано не играл никакой роли – дифференциальная геометрия не была объектом его особого внимания.

Что же касается теории обыкновенных дифференциальных уравнений, теории множеств, математической логики и оснований математики – основных тем его тогдашних исследований, то они лежали в стороне от интересов москвичей. Ситуация начала меняться в первое десятилетие XX века, когда москвичи заинтересовались теорией множеств и теорией функций действительного переменного – так зародилась Московская школа теории функций действительного переменного (Д.Ф. Егоров, Н.Н. Лузин). Однако, эта активность оказалась в противофазе с развитием интересов Дж. Пеано. Его интерес к теории множеств и функций угасал. Математическая логика и основания математики окажутся в сфере активных интересов москвичей лишь в 30-е годы.

Когда москвичи всерьез занялись теорией множеств и фукций для них результаты Пеано были уже классикой. Рассказ о знаменитой кривой Пеано, заполняющей квадрат, стал непременной частью курса по теории функций действительного переменного, регулярно читавшегося Н.Н. Лузиным (см. его книгу [12]). Точно так же классическая теорема Пеано о существовании решения задачи Коши для дифференциального уравнения с непрерывной правой частью стала составной частью курсов по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Никаких сведений о прямых контактах с Пеано москвичей (равно как и математиков северной столицы) мы не имеем. Судя по всему, их просто не было.

Так что отсутствие сколь-нибудь активных контактов Дж. Пеано с петербургскими и московскими коллегами выглядит совершенно естественным. Однако, математическая жизнь России того времени не сводилась к деятельности математиков двух столиц. Провинция в последней трети XIX – в первом десятилетии XX в. начинала играть все более заметную роль в жизни российского математического сообщества. Находясь на почтительном отдалении от обеих столиц, математики провинциальных университетов могли чувствовать себя, в достаточной мере, независимыми от них, в частности, в выборе тематики собственных исследований, избирая подчас направления, как мы это уже видели на примере математической логики, в столицах игнорировавшиеся. С математиками российской провинции – с учеными из Казани, Одессы, Варшавы (Ростова-на-Дону) – и оказалось связанным творчество знаменитого ученого.

4. Взгляд из провинции. Казань. С совершенно иными настроениями идеи Дж. Пеано были приняты в Казани, где традиции математических исследований, заложенные еще Н.И. Лобачевским, были совершенно иными. Естественно, что геометрия и основания геометрии (и шире – основания математики) всегда находились в сфере внимания казанских математиков. Поэтому совершенно не удивительно, что именно в Казани начал свою пионерскую деятельность в математической логике – области только зарождавшейся, в праве существования которой отказывали тогда, как мы уже говорили, ведущие математики как на Западе, так и в России – астроном местного университета П.С. Порецкий.

В 1884-1908 гг. он опубликовал на русском и французском языках цикл статей, в которых, развивая и обобщая идеи Буля и Шредера, внес существенный вклад в логику высказываний и в логику классов. Его результаты получили известность на Западе (см. [4]). Высоко оценил их в своей “Алгебре логики” Л. Кутюра. *Вопрос о взаимоотношениях Пеано и Порецкого требует серьезных, прежде всего архивных, изысканий.* Вряд ли они встречались (2). Однако, в 6 томе издаваемого Пеано журнала “Rivista di Matematica” (1896-1899) была опубликована статья Порецкого “La loi des racines en logique”.

Работами Порецкого было положено начало исследованиям по математической логике в России. Знаменательно, что начались они не в столицах, а в Казани – городе, осененном гением Н.И. Лобачевского.

Для обсуждаемого нами вопроса особенную роль сыграл тот факт, что на 1892 г. пришлось столетие Н.И. Лобачевского, которое казанцы отпраздновали с особым размахом. Ведущей фигурой математической жизни Казани того времени выступил А.В. Васильев. Широко образованный математик, обладавший многообразными международными связями, живо интересовавшийся историей математики, он положил начало изучению творчества Н.И. Лобачевского и научному изданию его работ. Естественными актами в этой деятельности стала предпритая им организация празднований 100-летия со дня рождения великого математика, а также учреждение по его инициативе международной премии за работы по геометрии, прежде всего геометрии неевклидовой (3). Эта тематика, активно разрабатываемая в Западной Европе, прежде всего в Германии и Италии (в школе Дж. Пеано), и лежавшая в стороне от интересов петербуржцев и москвичей, очень занимала казанцев.

Согласно регламенту, премия должна была присуждаться каждые три года. Первое присуждение состоялось в 1897 году. Лауреатом был назван Софус Ли. Объявление о втором конкурсе было помещено в различных математических журналах, в частности, в 6-ом томе издаваемого Пеано журнала “Rivista di Matematica” за 1900-1901 г. В третьем конкурсе 1904 г. принял участие один из самых талантливых учеников Пеано – Марио Пиери. И именно Пеано написал отзыв [14] о результатах Пиери, касающихся оснований геометрии.

Разумеется, между А.В. Васильевым и Дж. Пеано существовали контакты, которые установились не позднее 1900 г. (об этом свидетельствует упомянутая выше публикация объявления о втором конкурсе на премию Н.И. Лобачевского в журнале “Rivista di Matematica”). *Вопрос о характере этих контактов остается пока открытым.* В его прояснении могут помочь материалы из архивов Казани и Москвы.

В 1907 г. А.В. Васильев переехал в Санкт-Петербург, и более поздний след контактов Дж. Пеано с казанскими математиками мы находим уже в 1926-28 гг. – в период, когда страна, в ту пору уже СССР, начала выходить из периода политической неопределенности (новая большевистская власть наконец почувствовала себя уверенно) и экономической разрухи, вызванных событиями Первой мировой войны, революции и гражданской войны. Казанские математики приступили к восстановлению нормальной жизни сообщества, прежде всего, конечно, к возобновлению полнокровных научных исследований. В Казань вернулся геометр Д.И. Зейлигер, а в 1928 г. сюда переехал один из крупнейших алгебраистов того времени Н.Г. Чеботарев. Начались попытки реанимации международных математических контактов. В этом контексте и следует рассматривать предпринимавшиеся в 1926-1928 гг. усилия тогдашнего вице-президента Казанского физико-математического общества Н.Н. Парфентьева по восстановлению контактов с Пеано (4). И хотя эта деятельность казалась успешной, у нее уже намечались дурные перспективы: на Европу надвигались мрачные времена.

5. Взгляд из провинции. Одесса. Пожалуй, самыми восприимчивыми к новым идеям, идущим с Запада, оказались на рубеже веков математики молодого Новороссийского университета. Организованный в Одессе в 1865 г., он не был обременен традициями и был открыт новым веяниям, в частности, идеям зарождавшейся математической логики. Активным ее пропагандистом выступил профессор университета И.В. Слешинский. Им был осуществлен перевод “Алгебры логики” Л. Кутюра, опубликованный одесским издательством “Mathesis” в 1909 г. с его предисловием и комментариями, а также с добавлениями другого одесского математиками С.О. Шатуновского. С.О. Шатуновский был известен своими оригинальными взглядами на основания математики (достаточно напомнить о его критике закона исключенного третьего), позволяющих рассматривать его как предтечу идей интуиционизма и конструктивизма. Ряд интересных результатов в области математической логики был опубликован в 1896-1899 гг. другим преподавателем Новороссийского университета Е.Л. Буницким. Все это создавало благоприятную почву для приятия одесситами идей Пеано в области математической логики и оснований математики.

Действительно, результаты Дж. Пеано одесситы хорошо знали и ценили. Один из наиболее влиятельных одесских математиков В.Ф. Каган занимался в начале XX века основаниями геометрии. Второй том его магистерской диссертации, опубликованный в 1907 г., содержит такую характеристику школы Пеано [19, с. 497]: “этой задачей (задачей обоснования геометрии – С.Д.) занялись итальянские математики. Стремление уточнить и обосновать математические дисциплины, возникшее, главным образом, в Германии, в последнюю четверть истекшего столетия встретило горячее сочувствие в Италии. Здесь создалась целая школа последователей этого направления, во главе которого... Дж. Пеано. Математическая логика, основания арифметики и основания геометрии, строгое развитие анализа – таковы вопросы, которым Пеано посвятил свои силы и на которых сосредоточил внимание своих учеников. Стоя на строго формальной точке зрения, Пеано понимал, что обычное словесное выражение математических выводов не может гарантировать нас от логических ошибок, не может гарантировать строго формального характера вывода. Он придумал поэтому особую идеографию, согласованную с его взглядами на математическую логику, которая, при помощи небольшого числа символов, должна выражать математические предложения и их выводы. Специальный журнал “Rivista di Matematica” должен был проводить эти идеи и распространять их среди математиков: журнал содержал почти исключительно статьи, написанные в идиографии Пеано. Нужно, однако, сказать, что эта идеография не встретила сочувствия среди математиков и вряд ли таковое заслуживает. Доказательства Пеано отнюдь не представляют собой выводов, механически производимых на основании известных формальных законов, как того требует формальная логика; идеография Пено – это те же слова, иначе обозначенные, но требующие изучения символистики, далеко не такой простой, как она кажется Пеано. Вместо упрощения, получается только усложнение дела. Но если идеография Пеано *еще* не сыграла значительной роли, *то его тонкий ум, глубоко проникающий в мельчайшие детали вывода, сыграл значительную роль в деле обоснования математики* (курсив мой – С.Д.).

В 1889 г. Пеано опубликовал небольшое сочинение “Основания геометрии, логически изложенные”, написанное в его идеографии. Эта статья посвящена обоснованию геометрии в тесном смысле этого слова. Пеано, по-видимому, не был знаком с работой Паша, и совпадение его идей с системой Паша нужно признать весьма удивительным”. И далее (с. 501): “К сожалению, это небольшое сочинение, написанное в идеографии, почти никому не известной, получило очень малое распространение и еще в настоящее время редко кому знакомо. Но ученики Пеано усвоили его идеи и довели их до полного обоснования проективной геометрии. Сюда относятся работы Амодео, Фано, Энриквеса и Пиери”.

Каган предложил собственную систему аксиом геометрии [19], но, что представляется нам особенно важным для рассматриваемого нами вопроса, это та выдающаяся роль которую В.Ф. Каган сыграл в становлении Советского математического сообщества. Переехав после революции в Москву, он стал одним из самых влиятельных советских математиков, создателем известной школы в области дифференциальной геометрии. Его деятельность способствовала тому, чтобы идеи Пеано в советском математическом сообществе высоко ценились, а имя его почиталось.

Но это уже было потом и в Москве, а в Одессе уже в начале XX века его имя было на слуху, а его идеи развивали. Поэтому совершенно естественным выглядит проведение 16 декабря 1932 г. в Одесском университете специального заседания его памяти. Доклад о его жизни и творчестве сделал учившийся в Италии профессор университета Д.А. Крыжановский.

6. Взгляд из провинции. Ростов-на-Дону (Варшава). Многообразные связи установились у Пеано с математиками, проживавшими в Польских землях. Земли эти в рассматриваемый период переживали непростой период. Если к началу XX века они были разделены между тремя империями – Российской, Австро-Венгерской и Германской – то в результате Первой мировой войны они соединились в единое государство со столицей в Варшаве. Конечно, этому предшествовала длительная борьба за независимость, то вспыхивавшая до открытых революционных выступлений, то затихавшая. Конец XIX – начало XX века – период, казалось бы, затишья. Протестная активность приняла скрытые формы. Общественность, например, русской части – то есть Царства Польского – оказалась поделенной на две части: ориентировавшихся на Россию и польских патриотов. Такая же поляризация наблюдалась и в математическом сообществе. Польские патриоты, хотя и превосходно владели русским языком, в своей деятельности, в том числе научной, старались использовать только польский (конечно, если они выступали в зарубежных журналах, то пользовались принятыми тогда западноевропейскими, преимущественно, французскими). Варшавский университет, основанный в 1869 г., был русским университетом. Его профессора-математики также были русскими, в основном, это были воспитанники Московского и Петербургского университетов. Некоторые известные польские математики окончили этот университет, например, В. Серпинский, ставший учеником Г.Ф. Вороного. Но все же между обеими обозначенными группами существовала хорошо различимая дистанция. Национально ориентированные польские математики предпочитали, как мы только что заметили, получать образование не на русском языке, печататься в изданиях, выходивших по польски или на одном из западноевропейских языков. В их сообществе формировалась будущая польская математическая школа с ее повышенным интересом к теории множеств, теории функций действительного переменного, логике. У представителей этого сообщества (например, у одного из его лидеров С. Дикштейна) завязались особые отношения с Пеано. *Их изучение – отдельная задача, требующая работы в архивах Польши (Варшавы и Кракова) и Украины (Львова), которую мы оставим в стороне.*

Что же касается российски ориентированного математического сообщества Варшавы, то одним из самых ярких его представителей, оказавшимся связанным с Пеано, был Д.Д. Мордухай-Болтовской.

Еще будучи в статусе оставленного при Санкт-Петербургском университете "для подготовки к профессорскому званию", Д.Д. Мордухай-Болтовской в 1898 г. начал преподавать в Варшавском политехническом институте, а с 1909 стал экстраординарным профессором Варшавского университета. В 1914 г. он был уже его ординарным профессором. Когда началась Первая мировая война и германская армия приблизилась к Варшаве, университет был эвакуирован в Ростов-на-Дону и так там и остался. К сожалению, наши знания о варшавском периоде жизни Мордухай-Болтовского очень ограничены. Их изучение требует серьезных изысканий в ахивах Польши и Ростова-на-Дону. Его довоенный домашний архив погиб при бомбардировках Ростова немецкой авиацией (5). Тем ценнее для нас сегодня переписка Мордухай-Болтовского с Пеано, сохранившаяся в архиве Пеано в Турине. Она охватывает период с лета 1925 по осень 1931 г. Когда и как начались их контакты и встречались ли они лично, мы не знаем. Вполне вероятно, что первые их контакты относятся еще к варшавскому периоду жизни Мордухай-Болтовского. Во всяком случае, содержание первого же его письма, датированного 25 августа 1925 г. , указывает на то, что это не первый контакт двух математиков. Речь в нем идет о некотором варианте "металогики", предлагаемом Мордухай-Болтовским, "**Металогики,** которая находится в таком же отношении к логике формальной, в каком пространство многих измерений соотносится с обыкновенным пространством". Судя по сохранившимся письмам (все они, за исключением цитированного первого, написаны на интерлингве), речь шла о вопросах математической логики, истории и философии математики и ее преподавании, а также о проблемах интерлингвы. В некоторых из них обсуждаются работы Мордухай-Болтовского, приготовленные для итальянского журнала "Schola et vita", а также некоторые рукописи Пеано.

Вопрос об идеях Мордухай-Болтовского в области математической логики и оснований математики и их влиянии на развитие соответствующих вопросов в СССР (*не надо забывать, что он был выдающимся педагогом, крупнейшем тогда математиком, работавшим в Рос-*

товском-на-Дону университете (6)) *требует специального изучения, равно как и содержание и возможное (впрочем, маловероятное) влияние на польских ученых написанной на интерлингве книги* [23], *не содержащейся ни в одном из подготовленных Мордухай-Болтовским или его учениками и изданных в СССР списке его трудов).* Вообще о польских контактах Мордухай-Болтовского, ставших в 20-е – 30-е годы чрезвычайно опасными для советских людей (за них вполне можно было угодить в лагеря) мы ничего не знаем. То, что они на самом деле существовали, мы узнаем только в наши дни из обнаружившегося факта издания книги [23] (7). Неудивительно, что сам Мордухай-Болтовской об этой книге предпочитал не упоминать.

7. Предварительные итоги. Проведенное нами исследование породило больше вопросов, *отмеченных нами курсивом*, чем ответов. Высвечивая исторический материал, касающийся жизни российского математического сообщества конца XIX – первой трети XX века из некоторой точки, избранной самой постановкой нашей задачи, мы столкнулись с большим массивом неизученного материала, погружение в который потребует от нас чрезвычайно большого времени. Однако, мы все-таки попытаемся подвести некоторые предварительные итоги проведенной работы.

Изучение контактов Дж. Пеано с российскими математиками, а также характера восприятия его идей в России позволяет выявить один из любопытных аспектов развития математики в стране в конце XIX – первой трети XX в.: в период, когда в России и в СССР закладывались основания одной из ведущих математических школ второй половины XX века – Советской математической школы.

Одной из характерных особенностей этой школы была широта диапазона ее исследований: это была почти вся математика века. Эта широта и стала одним из важнейших условий ее выживания, как по настоящему мощной научной школы, в условиях мира, разделенного железным занавесом. Когда этот занавес после смерти И.В. Сталина в 1953 году начал подниматься, перед миром предстала школа, обладавшая мощным потенциалом. Начало процессу полнокровного общения советских математиков с учеными мирового научного сообщества положил Международный математический конгресс, собравшийся в Москве в августе 1966 года. В известном смысле, это был триумф Советской математической школы, представленной выдающимися именами почти во всех разрабатывавшихся в то время областях математики. Такая широта диапазона не могла бы быть достигнутой, если бы математические исследования в стране развивались в идеологических рамках, заданных лидерами столичных школ. К счастью, влияние этих выдающихся математиков было не абсолютным даже в столицах и значительно теряло свою силу на периферии. Так, именно в провинциальных университетах были без всякого предубеждения восприняты идеи Дж. Пеано в области анализа, оснований математики и математической логики. Именно там начали воспринимать его результаты как высшие достижения современной математики, а само его имя относить к числу наиболее выдающихся математиков. Его идеи начали воспринимать и развивать. И когда с течением времени на авансцену начали выходить математики нового поколения (некоторые из них были выходцами из провинции), то для них имя Пеано и его результаты воспринимались естественно как научная классика, а в спектре научных исследований советских уже математиков появились и математическая логика, и основания математики, и теория функций множеств, и теория интеграла.

Долгое время к Дж. Пеано и его наследию не было справедливым даже итальянское научное сообщество. Не находил он достойной оценки и в западноевропейской математической и философской среде. Об объективных и субъективных причинах этого проникновенно сказал в своей речи на празднованиях 125-летия Дж. Пеано известный итальянский философ Л. Джеймонат [24]. Поэтому неудивительно, как отметил Джеймонат, что начало подлинной оценке значимости вклада великого математика положили далеко за пределами Италии – прежде всего в США (это был Х. Кеннеди, опубликовавший в 1980 г. его научную биографию [14]), а также в СССР, где в работах Ф.А. Медведева была выявлена его фундаментальная роль в развитии ряда идей теории функций действительного переменного (в частности, в теории функций множеств). К работам, отмеченным Л. Джеймонатом, добавим и книгу Стяжкина [4, 26] по истории математической логики, на которую мы уже ссылались, а также исследования Е.А. Зайцева по логике Пеано [27-29]. Так Россия начала отдавать долги памяти великого мастера (8).

Примечания

(1) В 1903 г. уже был издан [11] перевод курса Дженокки-Пеано, выполненный неким Н.С. Синеоковым. *Вопрос о том, чем не устраивал первый перевод и зачем понадобился новый, требует специального иизучения.*

(2) Будучи человеком нездоровым, Порецкий вряд ли много путешествовал. Вероятно, он вообще не выезжал из России. Судя по косвенным данным, у него были связи с Л. Кутюра – *этот вопрос (и вообще творческая биография П.С. Порецкого) требует специального изучения.*

(3) Это празднование стало, пожалуй, первым официальным научным мероприятием, которым российская провинция громко заявила о себе миру.

Отметим, что академический Петербург не отметил эту дату сколь-нибудь заметным образом: Н.И. Лобаческий и неевклидова геометрия не входили в круг идеологизированных интересов А.А. Маркова и его окружения. Это особенно контрастирует с организацией в 1913 г. Марковым академических празднований 200-летия публикации закона больших чисел Я. Бернулли. Эти празднования, по идее Маркова, противопоставлялись проводившимся в том же году торжествам в честь 300-летия дома Романовых.

(4) Благодаря любезности проф. С. Роэро, мы располагаем письмами этого периода Парфентьева Пеано. *Ответные письма Пеано следует искать в архиве Казанского университета.* Эти написанные по-французски письма высланы, по большей части, из Казани, а также из Москвы, где он останавливался в августе 1928 г. по пути в командировку в Западную Европу, у А.В. Васильева, из Берлина, Болоньи (где он участвовал в Международном конгрессе математиков, на котором надеялся лично повстречаться с Пеано – этим надеждам не суждено было сбыться, так как Пеано на конгресс не приехал) и Парижа. В этих письмах обсуждались различные вопросы: новый конкурс на премию Н.И. Лобачевского, объявленный в сентябре 1926 г., обмен изданиями между Академией Interlingva и Казанским физико-математическим обществом, членство в ней Парфентьева, возможная тема его публикации в журнале Академии, так впрочем и не осуществленная.

В 1930 г. в Казани отмечался 25-летний юбилей работы Парфентьева в университете, и в Туринскую академию было отправлено приглашение участвовать в этом мероприятии. Президент Академии обратился к Пеано с просьбой написать от имени Академии приветственное письмо, что Пеано и осуществил [16].

(5) На основании материалов архива Мордухай-Болтовского, хранящегося ныне в Санкт-Петербурге, А. Родиным было подготовлено чрезвычайно интересное издание [22].

(6) Среди его студентов в 1936-1941 гг. был А.И. Солженицын, который вывел его под вымышленным именем Дмитрия Дмитриевича Горяинова-Шаховского в романе “В круге первом”.

(7) Столь смелое поведение Д.Д. Мордухай-Болтовского во многом объясняется наличием у него высокого покровителя – М.И. Калинина (см. [20]). Дело в том, что деревенским мальчиком он служил в доме

Мордухай-Болтовских, которые замечательно к нему относились, занимались его образованием и определили впоследствии на один из механических заводов Санкт-Петербурга. Став одним из руководителей Советского государства, он никогда не забывал хорошего отношения к нему семьи Мордухай-Болтовских.

(8) Разумеется, в последние десятилетия итальянские историки науки предприняли значительные исследования, посвященные жизни и творчеству своего великого соотечественника. Примером может служить опубликованное в 1994 г. исследование М. Сегре [30], посвященное трудам Д. Пеано по аксиоматике математики. Одним из свидетельств глубокого интереса к наследию Пеано стали доклады на торжествах по случаю его 150-летия, состоявшиеся в Турине в сентябре – октябре 2008 года, в которых принял участие и автор настоящей статьи. Настоящая статья написана по материалам, собранным автором в ходе подготовки к докладу, произнесенному 3 октября в Туринской академии наук.

Библиографический список

1. *Кояловuч, Б.М.* Рецензия на "Алгебру логики" Л. Кутюра [Текст] / Б.М. Коялович // Журнал Министерства народного просвещения. – 1910. – Январь. – С. 111-115.
2. *Слешинский, И.В.* По поводу отзыва проф. Кояловича о книге Л. Кутюра "Алгебра логики" [Текст] / И.В. Слешинский // Журнал Министерства народного просвещения. – 1910. – Май. – С. 211-220.
3. *Коялович, Б.М.* Ответ проф. И. Слешинскому [Текст] / Б.М. Коялович // Журнал Министерства народного просвещения. – 1910. – Сентябрь. – С. 189-199.
4. *Стяжкин, Н.И.* Формирование математической логики [Текст] / Н.И. Стяжкин. – М.: Наука, 1967.
5. *Эренфест, П.* Рецензия на книгу Л. Кутюра "Алгебра логики" Л. Кутюра [Текст] / П. Эренфест // Журнал русского физико-химического общества при Санкт-Петербургском университете. Физический отдел. – 1910. – Т. 42. – Отдел 2. – С. 382-387.
6. *Genocchi, A.* Calcolo differenziale e principii di calcolo integrale. Publicato con aggiunte del Dr. G. Peano. Torino: Bocca, 1884.
7. *Дженноки, А.* Дифференциальное исчисление и основы интегрального исчисления, изданные проф. Guiseppo Peano [Текст] / А. Дженноки; перевод Н.С. Синеокова. – Киев-Петербург-Харьков: Южно-Русское книгоиздательство Ф.А. Иогансона, 1903.

8. *Чезаро, Э.* Элементарный учебник алгебраического анализа и исчисления бесконечно малых [Текст] / Э. Чезаро; перевод с нем. К.А. Поссе. Одесса, 1913. – Ч. 1; 1914. – Ч. 2.
9. *Дженноки, А.* Дифференциальное исчисление и начала интегрального исчисления [Текст] / А. Дженноки. – Издано с дополнениями и примечаниями проф. Дж. Пеано; пер. К.А. Поссе. – Петроград: Academia, 1922.
10. *Сергеев, А.А.* Константин Александрович Поссе [Текст] / А.А. Сергеев. – М.: Наука, 1997.
11. *Дженноки, А.* Дифференциальное исчисление и основы интегрального исчисления, изданные проф. Guiseppo Peano [Текст] / А. Дженноки; перевод Н.С. Синеокова. – Киев-Петербург-Харьков: Южно-Русское книгоиздательство Ф.А. Иогансона, 1903.
12. *Лузин, Н.Н.* Теория функций действительного переменного [Текст] / Н.Н. Лузин. – М.: Учпедгиз, 1940.
13. *Бажанов, В.А.* Александр Васильевич Васильев [Текст] / В.А. Бажанов, А.П. Юшкевич // Васильев А.В. Николай Иванович Лобачевский. – М.: Наука, 1992. – С. 221-228.
14. *Peano, G.* Sur les principes de la Gйomйtrie selon Mario Pieri. Rapport prйsentй a la Sociйtй physique et mathйmatique de Kazan // Известия Казанского физико-математического общества (2). – 1905. – Т. 4. – С. 92-95.
15. *Лаптев, Б.Л.* Воспоминания о Н.Н. Парфентьеве [Текст] / Б.Л. Лаптев // Очерки истории НИИ математики и механики имени Н.Г. Чеботарева. – Казань: Изд-во Казанского университета, 1989. – С. 119-124.
16. *Kennedy, H.C.* Peano. Dordrecht, 1980.
17. *Юшкевич, А.П.* История математики в России до 1917 года [Текст] / А.П. Юшкевич. – М.: Наука, 1968.
18. *Лопшиц, А.М.* Вениамин Федорович Каган [Текст] / А.М. Лопшиц, П.К. Рашевский. – М.: Изд-во Московского Университета, 1969.
19. *Каган, В.Ф.* Основания геометрии [Текст] / В.Ф. Каган. – Одесса, 1905-1907. – Т. 1-2.
20. *Родин, А.* Биографический очерк [Текст] / А. Родин // *Мордухай-Болтовской Д.Д.* Философия. Психология. Математика. – М.: Серебряные нити, 1998. – С. 12-25.
21. *Ляпин, Н.М.* Дмитрий Дмитриевич Мордухай-Болтовской [Текст] / М.П. Черняев, Н.М. Несторович, Н.М. Ляпин // Успехи математических наук, 1953. – Т. 8. – Вып. 4(56). – С. 131-139.

22. *Мордухай-Болтовской, Д.Д.* Философия. Психология. Математика [Текст] / Д.Д. Мордухай-Болтовской. – М.: Серебряные нити, 1998. С. 12-25.
23. *Mordukhaj-Boltovskoj, D.* Insolubiles in scholastica et paradoxos de infinito de nostro tempore. Warszawa, 1939.
24. *Джеймонат, Л.* Труды Пеано и их место в Итальянской культуре [Текст] / Л. Джеймонат // Вопросы истории естествознания и техники, 1984. – № 1. – С. 84-88.
25. *Medvedev, F.A.* Scenes from the History of Real Functions. Basel: Birkhäuser, 1991.
26. *Styazhkin, N.I.* History of mathematical logic from Leibniz to Peano. Cambridge (Mass.) – London: MIT-press, 1969.
27. *Зайцев, Е.А.* Теория определений Дж. Пеано [Текст] / Е.А. Зайцев // Методологический анализ оснований математики. – М.: Наука, 1988. – С. 46-55.
28. *Зайцев, Е.А.* Семантическая структура логики Дж. Пеано [Текст] / Е.А. Зайцев // Историко-математические исследования. – М.: Наука, 1990. – Вып. 32-33. – С. 146-157.
29. *Zaitsev, E.A.* An Interpretation of Peano's Logic. In: Arch. Hist. Ex. Sci., 1994. – V. 46. – № 4. – P. 367-383.
30. *Segre, M.* Peano's Axioms in their Historical Context. In: Archive for History of Exact Sciences, 1994. – V. 48. – № 3/4. – P. 201-342.

Об издании трудов А.Н. Колмогорова

А.М. Абрамов

За годы, прошедшие после кончины А.Н. Колмогорова (1987 г.), была проведена большая работа по изданию его трудов. Продолжается издание "Избранных трудов" (ответственный редактор А.Н. Ширяев). Первые три тома [1-3] являются переизданиями сборника научных работ, подготовленного при жизни А.Н. Четвертый том "О математике и математиках", состоящий из двух книг [4-5], включает наиболее известные, но давно не переиздававшиеся работы. Завершается работа над пятым томом "Острое критическое слово", включающим в себя избранные рецензии и отзывы. Шестой том будет посвящен проблемам образования, а седьмой – исследованиям А.Н. в гуманитарной сфере (история, стиховедение, лингвистика).

Большим событием стал выход в свет трехтомника “А.Н. Колмогоров” [6-8], подготовленного к его 100-летию А.Н. Ширяевым и недавно ушедшей из жизни Н.Г. Рычковой. Здесь представлен наиболее полный на сегодня библиографический указатель, а, главное, большой корпус текстов, неизвестных ранее; часть переписки А.Н. Колмогорова и П.С. Александрова, дневниковые записи А.Н.

Не опубликованные ранее материалы А.Н. Колмогорова вошли и в другие издания. Л.А. Бассалыго опубликовал и подробно прокомментировал первую научную работу А.Н. Колмогорова “Новгородское землевладение XIV-XV вв.” [9]. В.А. Успенский включил в свои “Труды по математике” [10] ряд неизвестных текстов, в том числе “Семиотические послания”. Отдельные не изданные ранее материалы А.Н. опубликованы в различных периодических изданиях, а также брошюрах [11-13].

Творчество А.Н. Колмогорова удивительно богато и в качественном, и в количественном отношении. Для того, чтобы сохранить его наследие, предстоит большая постоянная и длительная работа. Цель данной заметки – высказать некоторые конкретные предложения.

Занимаясь в течение длительного времени исследованием педагогического наследия А.Н. Колмогорова, я столкнулся с проблемой “неизвестных текстов”. Дело в том, что у А.Н. не было полного собрания оттисков всех его публикаций, отсутствует и полный список. Возникла гипотеза: многие законченные машинописные тексты являются рукописями, изданными в массовой прессе, то есть в газетах и журналах. Так появилась идея издания тома “Публицистика”, содержащего, по возможности, все статьи А.Н., предназначенные для широкой аудитории.

Предварительный список публицистических работ А.Н. Колмогорова, насчитывающий 45 названий, был известен. Поскольку сами тексты в большинстве своем в архиве А.Н. отсутствовали, потребовался поиск оригиналов по “Летописи газетных статей”, издающейся с 1936 года. В результате к настоящему времени собрано 90 статей по данной тематике, изданных, начиная с 1929 г. Около 20 неопубликованных текстов найдено в архиве А.Н. (частично это незавершенные работы). Примерно 15 публикаций не будут включены в том публицистики: это коллективные работы, в которых участие А.Н. либо ограничено, либо не подтверждается. Подготовлены также комментарии. В тех случаях, когда речь идет о статьях с сохранившимися автографами, публикации даются в авторском варианте.

Этот опыт показывает, что для того, чтобы целостно и достаточно полно представить творчество А.Н. Колмогорова, необходим тщательный поиск всех его работ. Основные источники поиска: 1) различные издания, начиная с 1923 г.; 2) архив А.Н. Колмогорова; 3) архивы различных организаций (АН СССР, РАН, МГУ, АПН СССР…); 4) личные архивы (речь идет, главным образом, о письмах А.Н. – полный анализ и подготовка к изданию очень обширной переписки еще впереди).

Как известно, А.Н. Колмогорову была свойственна необычайная разносторонность научных и общественных интересов. Поэтому естественный шаг к осмыслению его творчества – подготовка к изданию нескольких циклов книг и брошюр, каждый из которых содержит, по возможности, полное собрание его работ по одной теме. В применении к такой большой теме, как “Математическое просвещение” (речь идет о проблемах массового школьного образования, популяризации математики, изданиях для учеников и учителей математики) предварительный план выглядит следующим образом.

Том первый – “К истории реформы школьного математического образования в СССР. 60-80-е гг. XX столетия”. Здесь собраны работы А.Н. Колмогорова, относящиеся к четырем периодам:

1937-1962 гг. Основной результат этих лет – учебник алгебры, написанный в соавторстве с П.С. Александровым. В архиве А.Н. сохранился неопубликованный ранее план второй части учебника, а также материалы обсуждений. К этому же периоду относятся первые варианты программы для школы, небольшие статьи.

1963-1970 гг. Эти годы были посвящены, в основном, созданию принципиально новой программы школьного курса математики (1968 г.). История ее создания и концепция А.Н. Колмогорова, положенная в ее основу и представленная в различных материалах, составляет содержание данного раздела.

1970-1979 гг. В этот период А.Н. возглавляет работу по созданию школьных учебников. Являясь председателем математической комиссии ученого методического совета Минпроса СССР, он пишет многочисленные отзывы; становится редактором и автором учебников “Геометрия 6-8” и “Алгебра и начала анализа 9-10”. Выходят в свет его многочисленные статьи, разъясняющие идеи реформы.

1979-1987 гг. В этот раздел включена работа А.Н., написанная в период “Контрреформы”, т.е. после заседания Отделения математики АН СССР в декабре 1979 г., на котором программы и учебники были подвергнуты резкой критике.

Последующие тома “Математического просвещения”, содержащие тексты для тех, кто интересуется математикой, а главным образом, для учеников и учителей, компонуются из работ, относящихся к методике математики, а также статей в энциклопедических изданиях (их более 100).

Том второй естественно назвать “Основы математики”. Здесь центральное место занимает знаменитая статья “Математика” во втором издании БСЭ, дополненная выпавшими из нее фрагментами из первого издания БСЭ. Большой, малоизвестный и непрокомментированный цикл статей, начавшийся в 1922 г., относится к понятиям “величины” и “числа”. К теме “Основ математики” примыкают статьи и заметки о теории множеств, аксиоматическом методе, элементах логики, системе обозначений.

Последующие четыре тома имеют классическую компоновку: “Алгебра”, “Геометрия”, “Начала анализа”, “Элементы теории вероятности и статистики”.

Другой цикл изданий трудов А.Н. Колмогорова связан с темой ФМШ. В физико-математической школе-интернате №18 при МГУ А.Н. работал с 1963 г. За 15 лет активной работы он прочитал множество замечательных курсов и отдельных лекций, многие годы работал в летних школах для учащихся. К сожалению, он не успевал записывать тексты прочитанных им лекций; сохранились, в основном, их наброски. Поэтому на данном этапе главное направление – поиск возможно сохранившихся конспектов, реконструкция набросков, систематизация архивных материалов и имеющихся публикаций А.Н.

В целом же мне представляется, что следует ставить вопрос о подготовке полного собрания трудов А.Н. Колмогорова, что, естественно, предполагает создание соответствующей постоянно действующей структуры. Его творчество уникально по разнообразию и богатству идей, грандиозно по объему. Наследие А.Н. Колмогорова заслуживает самого внимательного и бережного отношения: это – национальное достояние России. Достояние человечества.

Библиографический список

1. *Колмогоров, А.Н.* Избранные труды [Текст] / А.Н. Колмогоров. – М., Наука, 2005. – Т. 1.
2. *Колмогоров, А.Н.* Избранные труды [Текст] / А.Н. Колмогоров. – М., Наука, 2005. – Т. 2.
3. *Колмогоров, А.Н.* Избранные труды [Текст] / А.Н. Колмогоров. – М., Наука, 2005. – Т. 3.
4. *Колмогоров, А.Н.* Избранные труды [Текст] / А.Н. Колмогоров. – М., Наука, 2007. – Т. 4. – Кн. 1.

5. *Колмогоров, А.Н.* Избранные труды [Текст] / А.Н. Колмогоров. – М., Наука, 2007. – Т. 4. – Кн. 2.
6. “Колмогоров” [Текст]. – М., Физматлит, 2003. – Т. 1.
7. “Колмогоров” [Текст]. – М., Физматлит, 2003. – Т. 2.
8. “Колмогоров” [Текст]. – М., Физматлит, 2003. – Т. 3.
9. *Колмогоров, А.Н.* Новгородское землевладение XIV-XV вв. [Текст] / А.Н. Колмогоров / сост. и комм. Л.А. Бассалыго. – М., Наука, 1993.
10. *Успенский, В.А.* Труды по НЕматематике [Текст] / В.А. Успенский. – М., ОГИ, 2002. – Т. 1, 2.
11. *Колмогоров, А.Н.* Математика – наука и профессия [Текст] / А.Н. Колмогоров. – М., Наука, Физматлит, 1988.
12. *Колмогоров, А.Н.* Математика в ее историческом развитии [Текст] / А.Н. Колмогоров / под ред. В.А. Успенского. – М., Наука, Физматлит, 1991.
13. Колмогоров и кибернетика [Текст] / под ред. Д.А. Поспелова, Я.И. Фета. – Новосибирск, 2001.

Ярославский трактат по древнерусской математике и астрономии в списке конца XVII – начала XVIII вв.[1]

М.Л. Городецкий, Р.А. Симонов, О.Р. Хромов

Недавно О.Р. Хромов обнаружил неизвестные хронолого-арифметические записи на защитных листах 1-2 об. (объем 4 стр.) в рукописной книге “Страсти Христовы”, переписанной и оформленной книжным мастером Диомидом Яковлевым сыном Серковым в 1691 г. [1-SIM03], хранящейся в Ярославском историко-архитектурном и художественном музее-заповедника (шифр ЯМЗ 54403/3)[2]. Текст выполнен скорописью конца XVII – начала XVIII вв., которая совпадает с почерком нумерации листов рукописи, но не с почерком Диомида Серкова. Среди записей и помет в рукописи это наиболее ранний почерк. Из этого следует заключить, что хронолого-арифметический текст был вписан в рукопись уже после ее изготовления, видимо, одним из первых ее владельцев. Запись

[1] Работа частично поддержана грантом РГНФ, № 09-03-00633а.

[2] Рукопись имеет роскошное оформление в виде гравированных иллюстраций, отпечатанных с досок Афанасия Трухменского (рамки из серии “Времена года”) и Леонтия Бунина (сюжетные средники иллюстраций из 14-листовой серии “Страсти Христовы”).

не очень хорошей сохранности, в ней есть утраты из-за обрыва листа, ряд мест плохо читается из-за затеков от воды и загрязнений, кроме того, отсутствует окончание (возможно, несколько строк) (см. "Приложение" в конце настоящей статьи).

Началом являются слова "Подобает ведать елика писменных и сколько месяцев и днеи и часов во дни и в нощи в году и тому роспись". Основным предметом сочинения древнерусского автора была динамика годичной длительности в часах светлого (дня) и темного (ночи) времени суток (на две даты каждого месяца). Трактат сразу, без "раскачки" начинается с хронологических сведений: "Писменных месяцев в году 12"[1]. Далее следует материал о числе дней и часов в каждом месяце года, начиная с сентября[2]. Заканчивается сводка данных о числе дней и часов для августа, последнего месяца сентябрьского года. Далее идут расчеты о неделях и др. Завершается текст материалом о динамике годичной длительности дня и ночи в сутках под названием "Роспись в году часам дневным и ночным"[3].

Здесь для 12 июня приводится дневной максимум в 17 ч. 45 м. и ночной минимум в 6 ч. 15 м., причем предыдущая (24 мая) и последующая (24 июня) даты имеют одинаковые временные показатели 17 ч. (день) и 7 ч. (ночь). Сохранились тексты конца XVI-XVII вв., которые использовались при эксплуатации башенных часов. Ими являются особые "пособия" по регулировке московских общественных часов [5, 6]. В них максимальным количеством дневных часов летом и ночных часов зимой указываются 17 часов, о чем также свидетельствуют данные о циферблатах XVII в. Москвы (с семнадцатью делениями) [7] и др. Ярославский текст содержит в принципе тот же материал, что и "пособия", но по сравнению с ними изложен с бóльшими подробностями и для более северной широты, а также содержит, кроме целочисленных, дробные значения.

"Пособия", как тип текста, были своего рода регламентационно-справочными документами по "управлению" башенными часами. Поэтому они не содержали "лишней" информации, в связи с этим данные в них округлялись до целочисленных значений. "Пособия" можно рассматривать возникшими из произведений, подобных Ярославскому трактату,

[1] Употреблявшиеся в трактате древнерусские ("буквенные") цифры замены современными.

[2] В Ярославском трактате не говорится, как получены результаты счета, а сообщаются окончательные числовые значения.

[3] См. предварительную публикацию о Ярославском трактате [4].

как бы “очищенных” от “лишних” сведений (долей часа в минутах) и адаптированных к 17-часовому максимуму. Однако прежде, чем такая традиция с 17-часовым максимумом установилась, по-видимому, существовал период, в который рассматривались и другие возможности.

Эти поиски, вероятно, были связаны с переходом на новую систему счета времени, которая в общественной сфере была связана с так называемым “косым” (переменным) счетом, когда длительность часа определялась как 1/12 часть дневного и отдельно ночного времени в каждых сутках [8]. В историографии считается, что переход на равноденственный (постоянный) час произошел “в Москве в середине XVI в. (а в других местах России в XVII в.)” [7].

Однако более точно переход на равноденственный час в Москве было бы относить к 1-й половине XVI в. Это следует из сообщения Новгородской второй летописи о пожаре 1551 г. в новгородском Юрьеве монастыре: “В лето 7059 [1551]...Да того же лета, месяца майя в 9, на память иже во святых отца нашего чюдотворца Николы, в третий час нощи по Московским часам, а по Новгородцким часом на шестом часе на ночном, загорелось в Юрьеве манастыри...в субботу” [9]. Действительно 9 мая 1551 г. была суббота [10]. Из летописи следует, что 9 мая 1551 г. в Новгороде использовались два типа часов: старые “косого” счета (Новгородским часом) и новые – равноденственные (Московским часом). Значит, в середине XVI в. уже началось распространение равноденственных часов по всей России (а не в XVII в., как считали В.Н. Пипуныров и Б.М. Чернягин). Поэтому в Москве башенные часы с равноденственным счетом должны существовать еще раньше, в 1-ой половине XVI в. Поскольку это было делом государственной важности, то должны производиться предварительные изыскания, которые ложились в основу доклада государю. Одним из таких материалов мог быть оригинал Ярославского списка.

Косвенно об этом можно заключить из слов австрийского посла барона Сигизмунда Герберштейна о дневном максимуме для Москвы в $17\frac{3}{4}$ часа, как в Ярославском трактате. Следовательно, в нем дан максимум, известный в первой половине XVI в. для летнего солнцестояния в Москве, когда в России готовилось введение “равноденственного” суточного часового счета отдельно для дня (начиная отсчет часов с рассвета) и отдельно для ночи (при начале отсчета с заката).

Сигизмунд Герберштейн (1486-1566) дважды посещал Москву – в 1516-1517 и 1525-1526 гг. В “Записках о Московии” он отмечал, что ему говорили, “что самый длинный день в Москве во время летнего солнцестояния составляет 17 часов и три четверти". С. Герберштейн это проверил в 1526 г., для чего произвел необходимые наблюдения с помощью астролябии в полдень 9 июня. Его результат оказался другим: Москва имеет "самый длинный день – 17 часов и одну четверть" [11, с. 133]. Д.О. Святский по указанному поводу заметил, что эта длительность "оказывается всего на 20 м[инут] меньше действительной (17 ч. 35 м.)" [12, с. 440]. М.Л. Городецкий перепроверил данные, в результате подтвердился вывод Святского (17 ч. 35 м.).

Особенность сообщенных С. Герберштейном сведений заключается в их конкретности. По-видимому, и до XVI в. на Руси производились определенные, но анонимные астрономические исследования, например, при наблюдении солнечных и лунных затмений. Но в данном случае факт наблюдения датирован (1526 г.), атрибутирован (С. Герберштейну), документирован (его дневниковой записью, впоследствии опубликованной), инструментально обеспечен (использованием астролябии) и выражен конкретным временем 17 ч. 15 м. Однако значение рассмотренного свидетельства шире обозначенного факта. С. Герберштейн упоминает еще об одном важном наблюдении, которое было проведено до него (давшее точность 17 ч. 45 м., всего на 10 мин. отличную от истинной – 17 ч. 35 м.), которое он собственно и перепроверял (что дало худшую точность: 17 ч. 15 м., уступающую истинной 20 мин.).

С. Герберштейн пишет, что о географической широте Москвы, примерно отвечающей дневному максимуму в 17 ч. 45 м., ему сообщил "некто". В комментариях к этому месту д.и.н. А.Л. Хорошкевич говорит следующее: "Некто" – по-видимому, общий знакомый Г[ерберштейна] и Николая Булева из Любека, астронома, лекаря и переводчика. . . Странно отсутствие прямых указаний о Булеве, находившимся в Москве с 1490 по 1533 г." [11, с. 326].

При обсуждении нашего доклада, сделанного на XII Международной научной конференции по проблемам книговедения [13], было высказано предположение, что С. Герберштейн задумал проверить данные о часовом максимуме в 17 ч. 45 м. для Москвы еще в свой первый приезд сюда в 1517 г., так как считал, что они получены "из ненадежного источника", о чем писал в своих "Записках", но у него не было необходимого для этого инструмента. Поэтому в свой второй приезд он привез с собой астролябию, с помощью которой определил часовой максимум Москвы в 17 ч. 15 м.

Косвенно это подтверждается тем, что С. Герберштейн явно не называет Николая Булева, что кажется современным исследователям стран-ным. Возможно, ссылка на Николая Булева могла быть в записях С. Герберштейна, сделанных в его первый московский приезд. Но ко второму приезду 1526 г. он убрал ее из-за опасности упоминания о нем по той причине, что Николай Булев мог попасть в немилость к московским властям из-за ложной пропаганды астрологически предсказанного в 1524 г., но не состоявшегося вселенского катаклизма [14].

Описываемые С. Герберштейном изыскания производились в связи с установлением координат Москвы и других городов России, о чем сообщает также Д.О. Святский. Соответствующие данные могли иметь цель картографирования Московии [12, с. 439-443]. Часовой максимум нужно было знать также для обслуживания башенных часов, о чем С. Герберштейн ничего не пишет. По-видимому, башенные часы с равноденственным счетом появились в Москве после его отъезда из России. С учетом такой возможности и изложенных выше данных Новгородской второй летописи кажется допустимым предположение, что башенные часы с равноденственным счетом появились в Москве во 2-й четверти XVI в., точнее в период 1526-1551 гг.

Документация для эксплуатации таких часов должна была появиться несколько раньше, так как их установка без обеспечения управления ими не имела бы смысла. В указанной связи заслуживает внимания древнерусский перевод "Осмочастной книги", выполненный в 1495 г., по-видимому, двумя переводчиками, работавшими параллельно. В его основе лежит оригинал восьмой книги литургического сочинения французского епископа Дюрана (XIII в.). Один перевод сохранился до нашего времени в списке XVII в., а второй вошел в состав "Предисловия святцам", также известном в списках XVII в. (подробнее см. [15]). Дата 1495 г. стоит не в начале и не в конце перевода, а внутри текста – при статье "О часех немецких...".

Как установила А.А. Романова, эта статья есть у Дюрана, но разумеется без указанной даты древнерусского перевода. Кроме того, дюрановский текст дополнен данными о числе часов в половине дня и ночи [16, SI191]. Это может свидетельствовать о том, что материал "О часех немецких...", содержащий информацию о годичной динамике роста/убыли в равноденственных часах для дня и ночи (на одну дату в каждом месяце) особо интересовал инициаторов перевода сочинения Дюрана. Следует иметь в виду, что эти сведения соответствовали северным широтам с летним часовым максимумом днем в 18 часов (при минимуме в 6 ч. ночью). Следует также учесть, что инициатива в организации рассматриваемого перевода исходила из окружения Новгородского архиепископа Геннадия. Причем Новгороду примерно соответствовал указанный часовой максимум. Знаменательно, что дюрановская статья "О часех немецких. . ." встречается также отдельно от "Осмочастной книги" и "Предисловия святцам" в более раннем русском списке XVI в. и в комплекте с оригинальной статьей "[О часех] по-руски ж в Новгороде в Великом" [18].

Часовые данные для этого текста не были собраны непосредственно в Новгороде, как показали предварительные расчеты М.Л. Городецкого. В основном они соответствуют широте, проходящей несколько южнее Новгорода и даже Пскова, и связаны, скорее всего, с территорией Прибалтики. Дисгармонирует с основными данными указание дневного максимума в 18 ч. 52,5 м. для 12 июня (и соответственно 12 декабря для ночи). Эти сведения могут быть территориально связаны с Русью, но не с Новгородом, а с Кирилло-Белозерским монастырем. По-видимому, дополнительный материал по затронутому вопросу может дать сохранившийся в списке XVI в. "Указ книжным часам, во сколько часов обходит Солнце над Псковскою землею", остающийся до сих пор не опубликованным.

Судя по рассмотренным текстам, в России в конце XV-XVI вв. велась работа по сбору и разработке научных текстов о динамике дневного и ночного времени в сутках в равноденственных часах (по 60 мин.) для их адаптации к российским территориям [19]. В отличие от "пособий" для башенных часов эти тексты содержат доли часа, выраженные в оригинальной системе дробей.

"Пособия" как тип текста были своего рода регламентационно-справочными документами по регулировке башенных часов. Так, в рукописи конца XVI в. "Круг миротворный" [20] на лл. 98 и 101 об. содержатся два оригинальных "пособия". Первое – в виде круговой диаграммы без названия. Оно отличается от других аналогичных "пособий" тем, что здесь для 9 июня указан дневной максимум, как для северных широт: 18 часов (при ночном показателе 6 часов). При этом для 9 декабря приводятся симметричные значения: день 6 ч., ночь 18 ч. Второе "пособие" на л. 101 об. озаглавлено "Круг часовой оуказной Московъскаго переводу". В нем для 9 июня дается величина дня в 17 ч., а ночи в 6 (а не 7 часов, как ожидалось бы); для 9 декабря соответственно – длина ночи в 17 ч., а дня в 6 часов (а не 7, как требовалось) [21]. Совпадение данных (с учетом симметрии), очевидно, исключает описку. В свете данных Ярославского текста, указанное "отклонение" от правила легко объяснить результатом упразднения долей часов, при котором $17\frac{3}{4}$ превратилось в 17, а $6\frac{1}{4}$ в 6.

Значит, в XVI в. при формировании научной документации, связанной с введением нового повседневного часового счета, включая разработку "пособий" по регулировке общественных часов, могли рассматриваться два варианта: "северный" с максимумом в 18 ч. (возникший путем округления максимума в 17 ч. 45 м., с добавлением 15 мин.) и "южный" с 17 ч. (возникший путем округления герберштейновского значения 17 ч. 15 м., с удалением 15 мин.), причем окончательный выбор пал на последний. Открытое в Ярославле произведение с максимумом для июня в $17\frac{3}{4}$ часа ставит изучение вопроса на почву источникового факта, состоящего в том, что уже в первой четверти XVI в. существовал текст, подобный Ярославскому, на котором базировалось создание вспомогательных "пособий" по регулировке московских башенных часов. Возможно, Ярославский трактат восходит к этому протографу 1-ой четверти XVI века.

И еще один важный вывод. Находка в Ярославле неизвестного ранее хронолого-арифметического трактата произошла в канун 900-летия Кирика Новгородца (1110-после 1156), начавшего на Руси математическое изучение хронологии в своем трактате "Учение им же ведати человеку числа всех лет" (1136 г.) (см. подробнее [22]). Ярославский трактат – самый большой по объему после "Учения" Кирика древнерусский календарно-математический текст. Такие находки происходят раз в несколько столетий. "Учение" Кирика, например, было открыто примерно 200 лет назад. Есть еще одна особенность, роднящая Ярославский трактат с "Учением" Кирика. По справедливому наблюдению советского историка науки Т.И. Райнова, "Учение" – одно из немногих или единственное произведение домонгольского периода, конкретное содержание которого не вставлялось "в богословско-символический текст" [23]. Так же и Ярославский трактат написан вне богословского контекста.

Приложение. Ярославский трактат

Рукопись "Страсти Христовы", 1691 г. Ярославский историко-архитектурный и художественный музей-заповедник, шифр ЯМЗ 54403/3. Защитные листы (1-2 об.), скоропись конца XVII – начала XVIII вв. Текст из-за воздействия воды и механических повреждений частично утрачен. Окончание трактата утрачено вместе с листами рукописи. Утраты обозначены в публикации угловыми скобками с отточием. При публикации текста орфография сохраняется, титла раскрываются, кириллические цифры передаются индоарабскими, "ъ" в конце слов опускается.

Л.1.

Подобает ведать елика писменных и сколько месяцов и днеи и часов во дни и в нощи в году и тому роспись

Писменных месяцев в году 12.

Месяц сентябрь, а в нем 30 дней, часов 720.

Месяц октябрь, а в нем 31 день, часов 744.

Месяц ноябрь, а в нем 30 дней, часов 720<. . . >.

Месяц декабрь, а в нем 31 день, часов 744 обре[тается].

Месяц генварь, а в нем 31 день, часов<. . . >.

Месяц февраль, а в нем 28 дней, часов<. . . >.

А коли бывает высокосн год<. . . > прибудет в году день [п]олна<. . . >.

Месяц март, а в нем 31 день<. . . >.

Месяц апрель, а в нем<. . . >.

Месяц май, а в нем<. . . >.

Месяц июнь, а в нем 30<. . . >.

Месяц июль, а в нем 31<. . . >.

Л. 1 об.

Месяц август, а в нем 31 день, а часов 744.

И всего в году в письменных в 12 месяцах 365 дней, опричь високосного дни, а недель в году 52, а в недели 168 часов.

<. . . >ву неделях 336 часов.

<. . . >месяцах 1354 часа.

<. . . >месяцах 2016 часов.

<. . . >месяцах 3360 часов.

<. . . >во шти месяцах 4354.

<. . . >месяцах в году 87[20] часов

<. . . >го дни а с високосным 8784 часа.

<. . . >о наречеся осень, зима и весна и лето, <. . . > роспись.

<. . . >аг и славнаго пророка и предтечи Крестителя Господня<. . . > по Рожестве Господа Бога и Спаса нашего Иисуса Христа<. . . > [д]ень и 6 часов, а часов дневных и нощных.

<. . . >Господа Бога и Спаса нашего Иисуса Христа да по Благовещении<. . . > а дней 91 день и 6 часов, а часов дневных и нощных 2190 ча<. . . >.

Л. 2.

Весна нареченная з Благовещениева дни Пресвятыя Богородицы марта с 25-го числа до Рождества Крестителя Господня Иоанна июня по 24 число 91 день и 6 часов, а часов 2190 часов.

Лето нареченно с Рождества Иоанна Предтечи июня с 24 числа по Зачатия Иоанна ж Крестителя Господня сентября по 23 число 91 день и 6 часов, а часов 2190, и всего в году 8760 часов, а когда весокосной год, тогда прибудет в году во дни и в нощи 24 часа.

Роспись в году часом дневным и нощным.

Генваря в 1 день час дни прибыл во дни 8 часов и в нщи 16 часов. Генваря по 17 число 2 недели 2 дни часов в них 384 часа.

Генваря в 17 день во дни 9 часов, а в нощи 15. Февраля по 2 число 2 недели 2 дни часов в них 384 часа.

Февраля во 2 день во дни 10 часов, а в нощи 14. Февраля ж по 18 число 2 недели 2 дни 384 часа.

Февраля во 18 день во дни 11, а в нощи 13. Марта по 5 число 2 недели со днем 360 часов.

Марта в 5 день во дни 12, а в нощи 12. Марта по 21 число 2 недели и 2 дни, часов в них 384 часа.

Марта в 21 день во дни 13, а в нощи 11. Апреля по 6 число 2 недели 2 дни, часов в них 384 часа.

Апреля в 6 день во дни 14, а в нощи 10. Апреля по 22 число 2 недели 2 дни, часов в них 384 часа.

Мая в 8 день во дни 16, в нощи 8. Мая по 24 число 2 недели 2 дни, часов в них 384 часа.

Мая в 24 день во дни 17, а в нищи 7. Июня по 12 число 2 недели 4 дни часов в них 832 часа.

Июня в 12 день оттоле нощи прибывает. Течение солнечное отвратися к закату. Во дни 17 часов и 3 четвети часа, а в нощи 6 часов с четвертой и те три чет<...> до Рожества Иоанна Предтечи июня по 24 число неделя 5 дней<...>.

Июня в 24 день во дни 17, а в нощи 7 часов. Июля по 6 число<...> часов в них 288 часов.

Л. 2 об.

Июля в 6 день час нощи прибыл во дни 16, а в нощи 8 часов. Июля по 22 число 2 недели 2 дни, а часов в них 384 часа.

Июля в 22 день во дни 15, а в нощи 9. Августа по 7 число 2 недели 2 дни, а часов в них 384 часа.

Августа в 7 день во дни 14, а в нищи 10 часов. Августа по 24 число 2 недели 3 дни, а часов в них 880 часов.

Августа в 24 день во дни 13 часов, а в нощи 11. Сентября по 8 число 2 недели со днем, а часов в них 360 часов.

Сентября в 8 день 12 часов, а в нощи 12 часов. Сентября по 24 число 2 недели 2 дни, часов в них 384 часа.

Сентября в 24 день во дни 11, а в нощи 13. Октября по 10 число 2 недели 2 дни, часов в них 384 часа.

Октября в 10 день 10 часов, а в нощи 14. Октября по 26 число 2 недели 2 дни, часов них 384 часа.

Октября в 26 день во дни 9 часов, а в нощи 15. Ноября по 11 число 2 недели 2 дни, часов в них 384 часа.

Ноября в 11 день во дни 8 часов, а в нищи 16. Ноября ж по 27 число 2 недели 2 дни, часов в них 384.

Ноября в 27 день во дни 7 часов, а в нощи 17 часов. Декабря по 12 число 2 недели со днем, часов в них 360.

Декабря в 12 день оттоле дни прибывает. Отселе возрати<...> Солнце на лето, до селе отходит нощи 17 часов и 3 чет<...> часа, а во дни 6 часов с четвертью часа в день присудет<...>

Далее текст утрачен, в рукописи отсутствуют листы.

Библиографический список

1. *Буланин, Д.М.* Серков Диомид Яковлев [Текст] / Д.М. Буланин, А.А. Турилов // Словарь книжников и книжности Древней Руси. – СПб., 1998. – Вып. 3. – Ч. 3. – С. 351-354.
2. *Хромов, О.Р.* Русская лубочная книга XVII-XIX веков [Текст] / О.Р. Хромов. – М., 1998. – С. 96-99.
3. *Семячко, С.А.* Об автографах Диомида Серкова и сборнике "Крины сельные" [Текст] / С.А. Семячко // ТОДРЛ. – СПб., 2003. – Т. 54. – С. 613-622.
4. *Симонов, Р.А.* Неизвестный славяно-русский хронолого-арифметический трактат в списке конца XVII – начала XVIII в. [Текст]: в 2 ч. / Р.А. Симонов, О.Р. Хромов // Румянцевские чтения-2009. – М., 2009. – Ч. 2. – С. 162-166.
5. *Симонов, Р.А.* Данные о длительности дня и ночи для Москвы в материалах псковича Ивана Рыкова (ок. 1579 г.) [Текст] / Р.А. Симонов // Румянцевские чтения-2003. – М., 2003. – С. 227-231.
6. *Симонов, Р.А.* "Часы на кругу" – наиболее раннее точно датируемое 1663 годом листовое издание Московского печатного двора [Текст] / Р.А. Симонов, О.Р. Хромов // Древняя Русь. Вопросы медиевистики. – 2006. – № 3(25). – С. 19-34.
7. *Пипуныров, В.Н.* Развитие хронометрии в России [Текст] / В.Н. Пипуныров, Б.М. Чернягин. – М., 1977. – С. 15.
8. *Симонов, Р.А.* Косой, дневной, ночной час [Текст] / Р.А. Симонов // Русская речь. – 1993. – № 4. – С. 68-74.
9. Полное собрание русских летописей [Текст]. – СПб., 1841. – Т. 3. – С. 154.

10. *Каменцева, Е.И.* Хронология [Текст] / Е.И. Каменцева. – М., 2003. – С. 80-83.
11. *Герберштейн, С.* Записки о Московии [Текст] / С. Герберштейн. – М., 1988.
12. *Святский, Д.О.* Астрономия Древней Руси [Текст] / Д.О. Святский; автор предисловия, комментариев, дополнений М.Л. Городецкий. – М., 2007.
13. *Городецкий, М.Л.* Новый книжный источник, подтверждающий данные Герберштейна об астрономических наблюдениях в Москве первой четверти XVI в. [Текст]: в 4 ч. / М.Л. Городецкий, Р.А. Симонов, О.Р. Хромов // Материалы XII международной научной конференции по проблемам книговедения. – М., 2009. – Ч. 1. – С. 18-22.
14. *Буланин, Д.М.* Булев (Бюлов) Николай [Текст] / Д.М. Буланин // Словарь книжников и книжности Древней Руси. – Л., 1988. – Вып. 2. – Ч. 1. – С. 103.
15. *Симонов, Р.А.* Осмочастная книга [Текст] / Р.А. Симонов // Сборник статей научного семинара по геральдике и вспомогательным историческим дисциплинам им. Е.И. Каменцевой. – РГГУ, Гербовед, 2005. – Вып. 5. – № 7(85). – С. 40-53.
16. *Романова, А.А.* Состав и редакции "Предисловия святцам" [Текст] / А.А. Романова // Опыты по источниковедению. Древнерусская книжность: редактор и текст. – СПб., 2000. – Вып. 3. – С. 169;
17. *Романова, А.А.* Древнерусские календарно-хронологические источники XV-XVII вв. [Текст] / А.А. Романова. – СПб., 2002. – С. 136.
18. *Симонов, Р.А.* "[О часех] по-руски ж в Новгороде в Великом" [Текст] / Р.А. Симонов // Древняя Русь. Вопросы медиевистики (в печати).
19. *Симонов, Р.А.* Неизвестный русский рукописный текст по "народной" астрономии о длительности дня и ночи для северных широт [Текст] / Р.А. Симонов // Проблемы источниковедения истории книжного дела. – М., 2002. – Вып. 1(4). – С. 85-91.
20. РГБ, ф. 173.I, № 103.
21. *Симонов, Р.А.* Русские "пособия" XVII в. о бое часов как свидетельства наблюдений восходов и заходов Солнца [Текст] / Р.А. Симонов // Естественнонаучная мысль Древней Руси: избранные труды. – М., 2001. – С. 238-240.
22. *Симонов, Р.А.* Математическая и календарно-астрономическая мысль Древней Руси [Текст] / Р.А. Симонов. – М., 2007.
23. *Райнов, Т.И.* Наука в России XI-XVII вв. [Текст]. – М.-Л., 1940. – С. 105.

Геометрия, политология и аксиоматический метод

С.Н. Бычков

Хорошо известно, что первой дедуктивной наукой была геометрия, и многие века она оставалась, по сути, единственной такой наукой[1]. В начале прошлого столетия Гильберт выдвинул идею аксиоматизации как универсального метода научного мышления [1]. И хотя сам Гильберт имел в виду при этом в первую очередь физику, не в этой науке (вне математики) в XX веке идеи логической дедукции вышли на первый план. Парадоксальным образом наибольшее применение аксиоматический метод получил в экономике, где после работ нобелевского лауреата Ж. Дебре привычным стало аксиоматическое построение абстрактной структуры и последующее логическое выведение из нее экономических фактов. Одним из ярких примеров подобного рода исследований является знаменитая теорема К. Эрроу о невозможности демократического выбора решений, когда число альтернатив больше двух: *если конституция (общественные предпочтения) удовлетворяет условиям независимости от посторонних альтернатив и единогласия, то она является диктатурой.* Хотя Эрроу получил за этот результат Нобелевскую премию по экономике, сегодня эта теорема является одним из основных результатов и в теоретической политологии.

Идея самого, пожалуй, элегантного доказательства этой теоремы принадлежит Дж. Геанокоплосу. Пусть рассматривается некоторая альтернатива b. Тогда выполняются следующие утверждения.

Утверждение 1. *Если в каком-то профиле предпочтений каждый агент ставит b наверх или вниз своих предпочтений, то функция социального выбора тоже ставит b либо в самый верх, либо в самый низ социальных предпочтений.*

Утверждение 2. *Существует такой агент $n = n(b)$, что при некотором профиле его голос переносит b с самого низа общественных предпочтений на самый верх.*

Утверждение 3. *Агент $n(b)$ диктует обществу предпочтения относительно любой пары альтернатив a, c, не содержащей b.*

Утверждение 4. *Агент $n(b)$ диктует обществу предпочтения относительно любой пары альтернатив a,b.*

[1] Статика Архимеда являлась фактически разделом прикладной геометрии.

Доказательства сформулированных утверждений занимают всего пару страниц, так что даже не очень сильный студент в состоянии их запомнить и рассказать на экзамене. Свидетельствует ли, однако, подобная возможность воспроизвести доказательство о понимании студентом факта, отраженного в теореме?

Парадоксальность теоремы Эрроу в том, что "демократические" по внешнему виду условие единогласия по Парето и требование независимости от посторонних альтернатив приводят к чему-то совершенно недемократическому: среди агентов, принимающих решения, имеется такой, индивидуальное мнение которого совпадает с коллективным решением общества.

Формальный анализ доказательства мало чем может помочь, поскольку условия теоремы (аксиомы Эрроу) одинаково хороши (или одинаково несовершенны): аксиоматический метод нечувствителен к содержанию принимаемых за основу положений. Главное, чтобы они были в совокупности непротиворечивы. Но парадокс Эрроу в том и заключается, что если отрицание заключения теоремы поместить среди условий (как отрицание диктатуры), то совокупность естественных "демократических требований" к избирательной системе (конституции) окажется внутренне противоречивой.

Человеку, равнодушному к идее демократии, факт противоречивости "демократических аксиом" не добавит никаких эмоций – это лишь дополнительное подтверждение ее реальной невозможности. Для человека же, преданного идеям демократии, открытый Эрроу факт представляет эмоциональное потрясение, что должно привести его к поискам истоков недемократичности в самих исходных аксиомах. Ясно лишь одно: математика с принятым в ней аксиоматическим способом рассуждений помочь в этих поисках ничем не сможет. А что вместо математики могло бы оказать здесь помощь?

Здесь самое время вспомнить о геометрии, в которой только и мог зародиться аксиоматический метод [2]. Долгое время доказательства Евклида считались образцом рассуждений, однако в XVII в. в них усмотрели ряд недостатков. Одним из них посчитали то, что "для совершенного знания какой-либо истины недостаточно убеждения в том, что данное положение истинно, если мы не усматриваем в природе самой вещи, почему оно истинно" [3]. Выражаясь более философским языком, математика напрасно пренебрегала категорией причины.

Проявлением данного обстоятельства является то, что для опровержения некоторого утверждения в математике считается достаточно построить контрпример, а не искать причину, в силу которой оно, вообще говоря, неверно. Да и доказательство, если оно представлено, нередко не проясняет, а затемняет вопрос о причинах справедливости утверждения (в особенности это относится к рассуждениям от противного, которое используется, кстати, в доказательстве первого утверждения теоремы Эрроу).

Рассмотрим, например, доказательство третьего признака равенства треугольников. Многие по прошествии нескольких лет забывают идею доказательства, заключающуюся в приложении второго треугольника снизу к первому. И это не удивительно, поскольку усвоение доказательства в 7-м классе не сопровождалось пониманием причины равенства треугольников с равными сторонами.

Попробуем понять, какой известный к моменту изучения третьего признака равенства треугольников факт мог бы помочь в его доказательстве. Два треугольника равны, если у них равны соответственные стороны и углы. В условии дано только равенство сторон, а от него надо перейти как-то к равенству углов. Нам известно только одно предложение, приводящее от равенства сторон к равенству углов: теорема о равенстве углов при основании равнобедренного треугольника. Следовательно, желательно осуществить такое построение, при котором возникли бы равнобедренные треугольники. Существует два возможных способа прикладывания одного треугольника снизу к другому по общей стороне, но только один из них приводит к образованию равнобедренных треугольников. Соединение симметричных вершин отрезком теперь не может рассматриваться как новая дополнительная идея в доказательстве, поскольку оно уже подразумевается при поиске первоначального преобразования чертежа. Завершение доказательства после этого уже не требует особых усилий, поскольку опирается на отысканную в самом начале доказательства теорему.

На философском языке данный прием доказательства называется *опосредствованием.* Мы ищем опосредующее звено между равенством сторон и равенством углов и находим его в теореме об углах равнобедренного треугольника. Следовательно, правомерно сказать, что причину выполнения третьего признака можно видеть в равенстве углов, противолежащих равным сторонам треугольника.

Рассмотрим теперь вопрос о доказательстве теоремы о равнобедренном треугольнике. В упомянутой ранее книге Арно и Николя критикуется доказательство равенства углов при основании равнобедренного треугольника у Евклида: “Разве не смешно думать, что их равенство зависит от... внешних треугольников?" [3, с. 337]. И здесь для поиска причины равенства углов полезно воспользоваться идеей опосредствования. Нет другого способа использовать условие равенства сторон как попытаться совместить их. При совмещении сторон обязательно должны совместиться и углы, что сразу и доказывает теорему.

Недостатком, с точки зрения современной геометрии, является использование здесь предметного действия, которое применимо к нарисованным треугольникам, но ничего не дает для идеализированных треугольников, стороны которых не имеют ширины. Мы видим здесь, как идеальный характер геометрических объектов прямо-таки противится применению понятия причины к обоснованию справедливости утверждений. Евклид использует механическое действие в доказательствах только один раз – в предшествующем четвертом предложении при обосновании первого признака равенства треугольника[1].

Может ли принадлежащая философии идея опосредствования помочь при анализе теоремы Эрроу? Да, и притом весьма основательно. Ключевую роль в поиске диктатора $n(b)$ в утверждении 2 теоремы играет идея, используемая при доказательстве более простой теоремы Мэя, характеризующей правило большинства при наличии всего двух альтернатив и нечетного числа избирателей (агентов).

Главную роль при доказательстве этой теоремы играет понятие избирательной системы с квотой [4, с. 21]. При стандартном математическом изложении оно возникает довольно неожиданно, но с точки зрения идеи опосредствования, его появление выглядит не менее естественно, чем геометрические преобразования в разобранных выше примерах.

Для того, чтобы доказать, что некоторые условия (речь идет об условиях анонимности, нейтральности и монотонности избирательной системы, а также невозможности равного распределения голосов [4, с. 18-19]) влекут за собой совпадение системы с правилом большинства, полезно ввести понятие, опосредующее эти абстрактные условия и факт необходимого для победы количества голосов. Таким понятием как раз и оказывается понятие системы с квотой: легко показать, что при наличии всего двух альтернатив и произвольного (четного или нечетного) числа агентов это понятие равносильно свойствам анонимности, нейтральности и монотонности избирательной системы. Тем самым, оно совмещает в себе качественный характер посылок теоремы Мэя и количественный

[1] Первый признак равенства треугольников, заметим, не обязательно выполняется для начерченных на земле фигур.

характер ее заключения (сколько именно голосов – более половины – необходимо для победы одной из альтернатив).

Идея опосредствования облегчает усвоение математических фактов не только в геометрии, но и в политологии, но и она едва ли может чем-то помочь в объяснении парадокса Эрроу (противоречивости исходных "демократических аксиом"). На основе многолетних исследований парадоксов голосования Д. Саари [5] пришел к выводу, что "диктаторскими замашками" обладает аксиома независимости от посторонних альтернатив, предписывающая при определении коллективного предпочтения между альтернативами a и b учитывать индивидуальные предпочтения только относительно этих альтернатив. Впрочем, к подобному выводу можно придти и без детального математического анализа.

Действительно, информация о том, сколько раз избиратели поставили альтернативу a выше альтернативы b, а сколько раз – ниже, слишком бедна для вынесения коллективного вердикта о предпочтении. Может оказаться, что семнадцать раз a было всего на одну ступень выше b в индивидуальных предпочтениях, а шестнадцать раз – на десять ступеней ниже. Логично предполагать, что десятикратный разрыв в "качестве" предпочтений может оказаться более существенным, нежели минимальное количественное превосходство, тем не менее, аксиома независимости от посторонних альтернатив предписывает данное обстоятельство полностью игнорировать.

Подчеркнем, что с позиций аксиоматического метода данный аргумент мало что значит, но кто сказал, что идеи аксиоматики в политологии должны быть важнее здравого смысла? Если вспомнить, что естественным путем аксиоматический метод зарождается только в геометрии и, следовательно, в политологию переносится насильственным образом (по аналогии с геометрией), то нет никаких разумных оснований пренебрегать в этой науке идущими от жизни аргументами качественного характера. Но в таком случае теорема Эрроу лишается приписываемого ей много лет ореола парадоксальности.

Библиографический список

1. *Гильберт, Д.* Аксиоматическое мышление [Текст] / Д. Гильберт // Методологический анализ оснований математики. М., 1988. – С. 97-104.
2. *Бычков, С.Н.* Геометрия и аксиоматический метод [Текст] / С.Н. Бычков // Историко-математические исследования. – Серия 2, 1996. – Вып. 1 (36). – № 2. – С. 195-204.

3. *Арно, А.* Логика, или искусство мыслить [Текст] / А. Арно, П. Николь. – М., 1991. – С. 334.
4. *Клима, Р.* Математика выборов [Текст] / Р. Клима, Дж. Ходж. – М., 2007.
5. *Saari, D.G.* Decisions and Elections: Explaining the Unexpected. – Cambridge, 2001.

Методические особенности курса алгебры одногодичного потока СУНЦ МГУ им. М.В. Ломоносова – школы им. А.Н. Колмогорова

Ю.П. Николаев, А.А. Русаков

Созданный в 1963 году отцами-основателями академиками Исааком Константиновичем Кикоиным и Андреем Николаевичем Колмогоровым, в прошлом году СУНЦ МГУ им. М.В. Ломоносова отметил свое 45-летие. Одна из задач профильной школы – пропедевтика и мотивация учащихся, которые легко справляются с общеобразовательным курсом математики школьной программы “на отлично”. Для достижения этой цели предлагается ввести новые понятия, которые так или иначе иллюстрировали (давали новые примеры) элементам курса математики старших классов школы. В профильной старшей школе необходимы абстрактные понятия. Причем они должны вводиться на основе абстрактных структур, которые не сразу следуют из обыденного жизненного опыта или численного эксперимента.

Введение в содержание авторских элективных курсов элементов абстракции не ставит целью полностью изучить некоторое понятие из области высшей математики. Это больше методическое орудие, которое заставляет в процессе осмысления абстрактной структуры увидеть схожие элементы и новые нюансы уже знакомых “программных” понятий, теорий.

На примере одной задачи попытаемся познакомить вас с введением в школу понятия кольца. Из опыта ученик старшей школы может привести следующие примеры колец – множество целых, рациональных, действительных чисел (некоторые уже успевают узнать множество комплексных чисел). Мы предлагаем на примере конечного множества, являющимся кольцом, решить некоторые задачи обучения в школе:

- умение и навыки работы с новыми понятиями;
- мотивация к научно-исследовательской деятельности школьников;
- пропедевтика вузовской математики и др.

Постановка задачи

Следуя традициям преподавания алгебры в ФМШ № 18, заложенными еще такими преподавателями как А.А. Шершевский, А.Н. Земляков, и др., под кольцом мы понимаем непустое множество K на котором заданы две абстрактные бинарные алгебраические операции $+$ (“сложение”) и $\cdot$ (“умножение”), удовлетворяющие следующим аксиомам.

A1. $\forall a, b \in K : a + b = a + b$.

A2. $\forall a, b, \mathrm{c} \in K : (a + b) + \mathrm{c} = a + (b + c)$.

A3. $\exists 0 \in K($ нейтральный элемент$) : \forall a \in K : a + 0 = a$.

A4. $\forall a \in K \exists\, (-a) \in K($противоположный элемент$) : a + (-a) = 0$.

A5. $\forall a, b \in K : a \cdot b = a \cdot b$.

A6. $\forall a, b, \mathrm{c} \in K : (a \cdot b) \cdot \mathrm{c} = a \cdot (b \cdot c)$.

A7. $\forall a, b, c \in K : c \cdot (a + b) = c \cdot a + c \cdot b$.

Иначе говоря, $K = (K, +, \cdot)$ – ассоциативно-коммутативное кольцо. Множество K называется носителем кольца $(K, +, \cdot)$ [1].

Задача 1. Найти все кольца, носителем которых является двухэлементное множество $K = \{0; 1\}$ (трехэлементное множество $K = \{0; 1; 2\}$).

Вполне естественно, что ни один ученик в классе, за редким исключением, не может решить эту задачу сразу. Опыт показывает, что после первых попыток школьники даже не понимают ее условия. Поэтому на ближайшем занятии происходит беседа на тему что же такое операция и как можно задать операцию на конечном множестве.

Операцию на конечном множестве K удобно задавать в виде табличек, предварительно заномеровав элементы множества. В каждой клетке таблицы (на пересечении i-ой строки и j-го столбца) стоит результат операции i-ого с j-ым элементов K. В случае, когда носителем является двухэлементное множество $K = \{0; 1\}$ имеем:

$$\begin{array}{c|cc} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0+0 & 0+1 \\ 1 & 1+0 & 1+1 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} \cdot & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0\cdot 0 & 0\cdot 1 \\ 1 & 1\cdot 0 & 1\cdot 1 \end{array}.$$

По возможности на уроке, а может и как задание на дом, ставятся комбинаторные задачи о количестве операций на конечном множестве, о количестве структур с двумя операциями на конечном множестве и т.д. Итогом подсказок является идея рассмотреть все возможные варианты возникающих структур, которых конечное число, (с требованием задать табличками все возможные операции на K) и, опираясь на аксиомы кольца, путем полного перебора, найти все кольца.

На следующее занятие задачу решают один-два человека в классе. Тогда мы начинаем более детально разбирать свойства операций, нейтрального и противоположного элементов. Формулируются задачи для абстрактного кольца $K = (K, +, \cdot)$ и включаются в домашнее задание:

Задача 2. $\forall x \in K$ выполнено: $-(-x) = x$ (т.е. противоположный к противоположному элементу есть сам данный элемент).

Задача 3. $\forall x, y \in K$ выполнено: $(-x)\, y = -(xy)$ (т.е. результат "умножения" противоположного элементу x на элемент y есть элемент, противоположный "произведению" xy).

Задача 4. $\forall x, y \in K$ выполнено: $(-x) \cdot (-y) = xy$(т.е. результат "умножения" противоположного элементу x на противоположный элементу y есть элемент, равный "произведению" xy).

Задача 5. $\forall x \in K$ выполнено: $x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$ ("умножение" на нейтральный элемент всегда дает в результате нейтральный элемент).

После решения этих задач становиться ясно, что не всякая "табличка-операция" описывает операцию в кольце, и тем более не всякое сочетание "табличек" дает кольцо. В итоге наглядно показывается, что полный перебор сужается до разумного, с которым справится большинство учащихся. **Задача 1** продолжает оставаться на дом.

Полное решение задачи

Для решения нам потребуется результат **задачи 4**.

Лемма. $\forall x \in K$ *выполнено:* $x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$.

Доказательство леммы.

1. $a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0)$ – в силу определения нейтрального элемента в кольце.

2. $a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0$ – в силу дистрибутивности в кольце.

3. Получили, что $a \cdot 0 = a \cdot 0 + a \cdot 0$. Добавим к обеим частям равенства элемент $-(a \cdot 0)$ противоположный к $(a \cdot 0)$, который существует в кольце по аксиоме A4.

4. Получим $a \cdot 0 + (-(a \cdot 0)) = a \cdot 0 + a \cdot 0 + (-(a \cdot 0))$. Откуда по определению противоположного элемента $0 = a \cdot 0$.

Для умножения на нейтральный элемент справа в силу коммутативности операции умножения доказательство не требуется, но в виде закрепления и тренировки можно попросить учащихся доказать это, не используя коммутативность операции "умножение".

Лемма доказана.

Рассмотрим множество $K = \{0; 1\}$. Выберем элемент, который будет нейтральным в кольце. Пусть это будет 0. Тогда пользуясь Результатами леммы, начнем строить табличку для операции "умножение":

$$\begin{array}{c|cc} \cdot & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \end{array}.$$

Осталась незаполненной всего одна клетка: результат операции “умножение” $1 \cdot 1$, для которого есть две возможности 0 или 1.

Рассмотрим случай, когда результат операции $1 \cdot 1 = 1$. Тогда, учитывая, что нейтральным элементом является 0, получаем две таблички для операции “сложение”:

$$\begin{array}{c|cc} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array},$$

которые также отличаются значением операции на элементах 1 и 1 ($1 + 1$). Однако первая “табличка-операция” не является кандидатом на операцию “сложение” в кольце (не удовлетворяет аксиоме A4), т.к. элемент 1 не имеет противоположного, при таком задании операции. Таким образом, получилось задать одну структуру кольца с операциями:

$$\begin{array}{c|cc} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} \cdot & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}.$$

Аналогично рассматривается второй случай, когда результат операции “умножение” $1 \cdot 1 = 0$. Пользуясь теми же соображениями, получаем еще одну структуру кольца:

$$\begin{array}{c|cc} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} \cdot & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}.$$

Итак, в предположении, что нейтральным элементом является 0, мы получили два кольца на заданном множестве. Действуя аналогичным образом, мы сможем получить еще два кольца, рассмотрев предположение, что нейтральный элемент 1. Последнее утверждение легко доказать, просто заменив в полученных структурах 0 на 1 и 1 на 0.

Ответом задачи является число 4. На заданном носителе можно построить 4 кольца. (Следует отметить, что с точностью до изоморфизма колец с данным носителем 2, однако, понятие морфизма в курсе алгебры одногодичного потока СУНЦ МГУ не рассматривается [2].)

Хотелось отметить воспитательную роль этой задачи. Ее постановка уже ставит в тупик даже образованного матшкольника, иначе говоря, не зависимо от уровня подготовленности, образованности при решении этой задачи все попадают в равные условия. Однако процесс решения задачи иллюстрирует и призывает задуматься над такими человеческими качествами, как смелость, целеустремленность, настойчивость.

Нужно напомнить, прошло уже 20 лет со времени создания СУНЦ МГУ им. М.В. Ломоносова (до 1989 года СУНЦ был специализированной физико-математической школа-интернат Главного управления народного образования при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова, которая была открыта 2 декабря 1963 года) [2, 3]. В школе существуют пять специализаций обучения: физико-математическая, компьютерно-информационная, химическая, биологическая и биофизическая; для одногодичного обучения – только физико-математическая. Система обучения лекционно-семинарская. На каждом уроке по профилирующим дисциплинам работают одновременно два-три преподавателя, что позволяет обеспечить индивидуальный подход в учебном процессе и значительно повысить эффективность обучения. Подчеркнем, что в статье речь идет о преподавании алгебре школьникам, которые обучаются в школе ровно один год (одногодичный поток). Естественно, отобранные из различных школ 40 регионов России дети стартуют на уроках алгебры с различным багажом.

Приведенная задача, ставит еще одну проблему, с которой сталкивается педагог почти ежедневно в своей практике – проблема отметки и оценки. Если ученик решил задачу правильно – здесь все ясно, а если он не решил задачу: огромное количество вариантов. Когда урок начинается фразой: “Дети, кто не сделал домашнее задание?”, есть два варианта реакции в случае положительного ответа. Здесь стоит отметить, что такой ответ требует определенной смелости и должен быть оценен учителем. Первый вариант – наплевательское отношение учащегося к предмету, это означает потерю контакта ученика и учителя, здесь практически не уместно говорить об образовательном процессе. Второй вариант состоит в оправдании ученика в несделанном задании, которое может быть самым разным. Особенно, когда школьник утверждает, что много времени и сил потратил на домашнее задание и даже показывает 2-3 исписанных листка. Совершенно ясно, что эта ситуация не заслуживает неудовлетворительной отметки, а может даже достойна поощрения и высокой отметки. Возможно, что школьник во многом преуспел, занимаясь изучением и исследованием абстрактных колец и их свойств, а конкретно эта проблема не была доведена до ответа. А может, задача была забыта сразу после прочтения, потому что в голове сразу не возник план решения. Конечно, никто из нас преподавателей не ожидает, что сформулированная **задача 1** будет решена в полном объеме с первого раза (за неделю). Мы занимаемся ею в течение месяца, который отводится на изучение колец, их свойств и некоторых задач из накопленного дидактического материала [2]. Работа над этой задачей позволяет достигнуть несколько целей:

• напомнить способы задания отображений (операция-табличка);

• сделать очередное вкрапление изучения элементов комбинаторики (количество операций, коммутативных операции на n-элементном множестве), которая не выделяется отдельной темой в программе курса алгебры в силу ограниченности времени;

• приобрести и закрепить навыки работы с аксиомами;

• дифференцировать учащихся по уровню подготовленности, обучаемости, склонности и интересам в различных областях естественнонаучного знания.

Все это позволяет спроектировать для каждого учащегося индивидуальную траекторию дальнейшего обучения в одногодичном потоке. С 1 октября в школе на постоянной основе начинают работу различные спецкурсы, кружки и спецсеминары. С учетом выявляемых склонностей и желаний происходит профилезация, начиная с аннотации программ спецкурсов, знакомство с тематикой научно-исследовательских проектов, рекомендации к участию в олимпиадах математических соревнованиях, а по завершению обучения выбором вуза (факультета).

Библиографический список

1. *Земляков, А.Н.* Тезисы по алгебре [Текст] / А.Н. Земляков // Математическое образование. – М., 2000. – № 4(15). – С. 2-40.
2. *Русаков, А.А.* Проектирование методической системы обучения математически, творчески одаренных детей на основе реализации идей А.Н. Колмогорова [Текст]: дисс. . . д-ра пед. наук / А.А. Русаков. – М., 2006.
3. *Николаев, Ю.П.* Проблемы методики преподавания в профильной школе-интернат. Информационные технологии в образовании [Текст] / Ю.П. Николаев // Материалы международной научно-практической конференции “Информационные технологии в образовании” (“ИТО-Сибирь-2008”). – Томск, 2008.

Глава 2

Математика в ее многообразии

О t-энтропии на n-мерном вещественном проективном пространстве, $n \geqslant 2$

В.П. Одинец

Пусть S_1^{n-1} – $(n-1)$-мерная единичная сфера n-мерного пространства $l_1^n = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$ с нормой $\|x\|_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|, \ n \geqslant 3$.

Введем на S_1^{n-1} отношение эквивалентности D, считая эквивалентными любые две противоположные точки сферы S_1^{n-1}. Известно [1], что факторпространство S_1^{n-1}/D будет гомеоморфно $(n-1)$-мерному вещественному проективному пространству $\mathbb{R}P^{n-1}$. Этот гомеоморфизм обозначим через h. Итак, $h(S_1^{n-1}/D) = \mathbb{R}P^{n-1}$. Пусть p – отображение S_1^{n-1} на S_1^{n-1}/D, сопоставляющее любому элементу $x \in S_1^{n-1}$ класс в S_1^{n-1}/D, содержащий x.

В работах [2-4] на открытом цилиндре $M = S_1^{n-1} \times \mathbb{R}^+$, где $\mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$, вводилась функция $F(x,t), \ x \in S_1^{n-1}, \ t \in \mathbb{R}^+$, названная t-энтропией, формулой

$$F(x,t) = -\frac{t+1}{t} \ln \|x\|_{t+1}, \tag{1}$$

где

$$\|x\|_{t+1} = \left(|x_1|^{t+1} + \ldots + |x_n|^{t+1}\right)^{1/t+1}. \tag{2}$$

Заметим, что относительно первого аргумента, то есть x, функция F четная, то есть

$$F(-x,t) = F(x,t) \text{ для любых } x \in S_1^{n-1}, \ t \in \mathbb{R}^+ . \tag{3}$$

Определение 1. t-энтропией на $\mathbb{R}P^{n-1}, \ n \geqslant 3, \ t \in \mathbb{R}^+$ назовем функцию $\mathcal{F}(x,t) : \ \mathbb{R}P^{n-1} \times \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, задаваемую формулой

$$\mathcal{F}(x,t) = F(y,t), \tag{4}$$

где

$$h(py) = x. \tag{5}$$

Предложение 1. *Функция $\mathcal{F}(x,t)$ при фиксированном x будет невозрастающей функцией по t.*

Доказательство. Следует непосредственно из (4) и (5), а также того факта, что функция $F(y,t)$ при фиксированном y будет невозрастающей функцией [3, лемма 2].

Непосредственно из предложения 1 получаем

Следствие 1. *Функция $\mathcal{F}(x,t)$ субаддитивна по t, то есть для любого $x \in \mathbb{R}P^{n-1}$ и любых $t_1, t_2 > 0$ имеем*

$$\mathcal{F}(x,t_1) + \mathcal{F}(x,t_2) > \mathcal{F}(x,t_1+t_2). \tag{6}$$

Предложение 2. *Существуют x° и $x^{\circ\circ} \in \mathbb{R}P^{n-1}$ такие, что для всех $t > 1$*

$$\mathcal{F}(x^\circ + x^{\circ\circ}, t) > \mathcal{F}(x^\circ, t) + \mathcal{F}(x^{\circ\circ}, t). \tag{7}$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ и $\varepsilon < \frac{1}{2}$. Рассмотрим $y^\circ = (-1, \underbrace{0,\ldots,0}_{n-1 \text{ раз}}) \in S_1^{n-1}$ и $y^{\circ\circ} = (1-\varepsilon, \varepsilon, \underbrace{0,\ldots,0}_{n-2 \text{ раза}}) \in S_1^{n-1}$. Заметим, что $\|y^\circ + y^{\circ\circ}\|_1 = 2\varepsilon$. Пусть $x^\circ = h(py^\circ), x^{\circ\circ} = h(py^{\circ\circ})$. Тогда $\mathcal{F}(x^\circ + x^{\circ\circ}, t) = F\left(\frac{y^\circ + y^{\circ\circ}}{\|y^\circ + y^{\circ\circ}\|_1}, t\right) = -\frac{t+1}{t}\ln\left(\frac{\varepsilon^{t+1}+\varepsilon^{t+1}}{2}\varepsilon\right)^{\frac{1}{t+1}} = -\ln\varepsilon$ для любого $t > 1$. С другой стороны, $\mathcal{F}(x^\circ, t) = F(y^\circ, t) = 0$, а так как по выбору ε имеем $0 < \varepsilon < 1-\varepsilon$, то $\mathcal{F}(x^{\circ\circ}, t) = F(y^{\circ\circ}, t) = -\frac{t+1}{t}\ln(|-1+\varepsilon|^{t+1} + \varepsilon^{t+1})^{\frac{1}{t+1}} = -\ln(|-1+\varepsilon|^{t+1} + \varepsilon^{t+1})^{\frac{1}{t}} < -\ln(1-\varepsilon)$ для достаточно малых $\varepsilon > 0$. Так как для достаточно малых $\varepsilon > 0$ имеем $-\ln\varepsilon > -\ln(1-\varepsilon)$, то для этих $\varepsilon > 0$ справедливо

$$\mathcal{F}(x^\circ + x^{\circ\circ}, t) > \mathcal{F}(x^\circ, t) + \mathcal{F}(x^{\circ\circ}, t)$$

при всех $t > 1$.

Определение 2. Пусть K – пространство Лебега[1]. Пусть на $K \times \mathbb{R}^+$ определена функция $d(x,t)$ $(x \in K,\ t \in \mathbb{R}^+)$. Будем называть функцию $d(x,t)$ t-супераддитивной, если для любого $x \in K$ существует $t_0 \in \mathbb{R}^+$ и последовательность $(x^{(k)}) \subset K : x^{(k)} \xrightarrow[k\to\infty]{} x$ такая, что

$$d(x + x^{(k)}, t) > d(x,t) + d(x^{(k)}, t) \tag{8}$$

для всех $t > t_0$.

[1] Определение пространства Лебега есть, например в [5] или [6, с. 170].

Замечание 1. Конструкция, примененная в доказательстве предложения 2, может быть использована для доказательства следующего утверждения:

Предложение 3. *Пусть $x^\circ \in \mathbb{R}P^{n-1}$. Тогда функция $\mathcal{F} : \mathbb{R}P^{n-1} \times \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ t-супераддитивна при всех $t > 1$.*

Доказательство. Пусть $h^{-1}(x^\circ) = \pm y^\circ \in S_1^{n-1}$. Зафиксируем одну из двух точек $\{y^\circ, -y^\circ\}$, например, пусть $y^\circ = (y_1^\circ, \ldots, y_n^\circ)$. Пусть $|y_m| = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |y_i^\circ|$. Без нарушения общности пусть $y_m > 0$. Положим

$$y_\varepsilon = (-y_1^\circ, \ldots, -y_{m-1}^\circ, -y_m^\circ + \varepsilon, -y_{m+1}^\circ - \varepsilon, -y_{m+2}^\circ, \ldots, -y_n^\circ).$$

Положим $x_\varepsilon = h(py_\varepsilon)$. Аналогично доказательству предложения 2 можно показать, что существуют $\varepsilon_0 > 0$ и $t_0 > 0$ такие, что при всех $\varepsilon > 0,\ \varepsilon < \varepsilon_0$ и всех $t > t_0$

$$\mathcal{F}(x^\circ + x_\varepsilon, t) > \mathcal{F}(x^\circ, t) + \mathcal{F}(x_\varepsilon, t).$$

Возьмем $\varepsilon_n = \frac{\varepsilon_0}{n}$. Тогда последовательность $(x^{(n)})$, где $x^{(n)} = h(py_{\varepsilon_n})$ – искомая.

Замечание 2. Как показано в [4], t-энтропия на цилиндре $M = S_1^{n-1} \times \mathbb{R}^+$ совпадает с α-энтропией R_α Альфреда Реньи [7]. Точнее, для $\alpha > 1$

$$R_\alpha(\bar{x}) = F(\bar{x}, \alpha - 1),\ \text{где}\ \bar{x} = (x_1, \ldots, x_n),\ x_i \in (0, 1),\ i := 1, \ldots, n,\ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1, \tag{9}$$

а

$$R_\alpha(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{1-\alpha} \ln \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^\alpha \right). \tag{10}$$

Тем самым для $\alpha > 1$ можно ввести α-энтропию на $\mathbb{R}P^{n-1}$:

$$\mathcal{F}(x, \alpha) = F(y, \alpha - 1),\ \text{где}\ y \in h^{-1}(px). \tag{11}$$

Замечание 3. Пусть на S_1^{n-1} введена мера Лебега μ такая, что $\mu(S_1^{n-1}) = 1$. Очевидно, что множество $S_1^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ с мерой μ можно рассматривать как пространство Лебега. Пусть T – автоморфизм пространства (S_1^{n-1}, μ) и пусть $M_0 = M_0(T)$ – множество точек в S_1^{n-1} в которых автоморфизм T апериодичен, то есть для любого $x \in M_0$ в последовательности

$$\ldots, T^{-2}x, T^{-1}x, T^0 x = x, Tx, \ldots$$

все точки различны. Напомним [6, с. 176], что если $M_0(T) = S_1^{n-1}$, то автоморфизм T называется апериодическим.

В 1958 А.Н. Колмогоров ввел [8] для автоморфизмов пространств Лебега (и транзитивных динамических систем) свое понятие энтропии (энтропии Колмогорова). (См. также [9, 10].) Пусть T – апериодический автоморфизм $T : S_1^{n-1} \mapsto S_1^{n-1}$. В силу гомеоморфизма $h : S_1^{n-1}/D \mapsto \mathbb{R}P^{n-1}$ можно определить автоморфизм $\tilde{T} : \mathbb{R}P^{n-1} \mapsto \mathbb{R}P^{n-1}$

$$\tilde{T}(h(p(y))) = h(p(T(y))) \text{ для любого } y \in S_1^{n-1}. \tag{12}$$

Тем самым для таких автоморфизмов проективного пространства $\mathbb{R}P^{n-1}$ можно ввести энтропию по Колмогорову.

Библиографический список

1. *Рохлин, В.А., Фукс, Д.Б.* Начальный курс топологии. Геометрические главы [Текст] / В.А. Рохлин, Д.Б. Фукс. – М: Наука, 1977. 487 с.
2. *Odyniec, W.* Approximcyjne nierówności funkcji Boltzmana (entropii) // Dydaktyka Matematyki. Wrocław: AE, 2002. – №3. – S. 15-20.
3. *Одинец, В.П.* t-энтропия функции Больцмана и свойства ее сужений [Текст] / В.П. Одинец // Материалы научной конференции “Герценовские чтения-2008”. “Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования”. – СПб.: Изд-во БАН, 2008. – Т. LXI. – С. 152-157.
4. *Одинец, В.П.* О связи t и α-энтропии функции Больцмана [Текст] / В.П. Одинец // Материалы научной конференции “Герценовские чтения-2009”. “Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования”. – СПб.: Изд-во БАН, 2009. – Т. LXII. – С. 164-166.
5. *Рохлин, В.А.* Избранные вопросы метрической теории динамических систем [Текст] / В.А. Рохлин // УМН. – 1949. – Т. IV. – Вып. 2(30). – С. 57-128.
6. *Рохлин, В.А.* Избранные работы [Текст] / В.А. Рохлин. – М: МЦИМО, ВКМ НМУ, 1999. – 496 с.
7. *Rényi, A.* On Measures of Entropy and Information // Proc. 4-th Berkley Symp. Math. Stat. and Prob. – 1960. – V. 1 (1961). – P. 547-561.
8. *Колмогоров, А.Н.* Новый метрический инвариант транзитивных динамических систем и автоморфизмов пространств Лебега [Текст] / А.Н. Колмогоров //– ДАН СССР. – 1958. – Т. 119. – № 5. – С. 861-864.

9. *Farmer, J.D.* Dimension, fractal measure and chaotic dynamics // In "Evolution of Order and Chaos in Physic, Chemistry and Biology" / (Edit. by H.Haken). Berlin: Springer, 1982.
10. *Кувандиков, О.К., Куйлиев, Б.* Как изложить энтропию Колмогорова в хаотической динамике [Текст] / О.К. Кувандиков, Б. Куйлиев // Материалы IX международной конференции "Физика в системе современного образования (ФССО-07)". – СПб.: Изд-во РГПУ им. А.И. Герцена, 2007. – Т. 2. – С. 495-496.

Исследование комплексных канонических систем

В.Е. Балабаев

Рассмотрим последовательность комплексных матриц, заданную рекуррентно:

$$A_1 = z_1,$$

$$A_2(z_1, z_2) = \begin{pmatrix} z_1 & -\overline{z}_2 \\ z_2 & \overline{z}_1 \end{pmatrix}, \ldots$$

...

$$A_n = \begin{pmatrix} A_{n-1}(z_1, .., z_{n-1}) & -\overline{z_n E} \\ z_n E & A^*_{n-1}(z_1, .., z_{n-1}) \end{pmatrix}, n>1, \qquad (1)$$

где E – единичная матрица, A^*_{n-1} – эрмитово сопряженная к A_{n-1} матрица. Матрица A_n задает комплексную эллиптическую систему

$$A_n = \left(\frac{\partial}{\partial \overline{\overline{z_1}}}, .., \frac{\partial}{\partial \overline{\overline{z_n}}}\right) f(z_1,..,z_n) = 0, \qquad (2)$$

которую назовем *комплексной канонической системой.* При n=1 получаем систему Коши-Римана, при n=2 – систему Фуэтера, при n=3 – систему, аналогичную системе, изучавшейся автором [1, гл. 6] и А. Джураевым [2]. Комплексный вектор (f,0,..,0) будет решением (2) тогда и только тогда, когда f – голоморфная функция от n переменных $z_1,..,z_n$. Следовательно, каждый результат в теории комплексных канонических систем позволяет получить в качестве следствия некоторые утверждения в многомерном комплексном анализе. Очевидно, каждая компонента решения системы (2) в области $G \subset C^n$ является комплексной гармонической функцией. Поэтому для решения (2) справедливы принцип максимума модуля, теорема Лиувилля и ряд других свойств гармонических функций.

Пусть граница ∂G области $G \subset C^n$ гладкая и ориентированная.

Теорема 1. *Если f и g – векторы класса $C^1(G) \cap C(\overline{G})$, то*

$$\int\limits_{\partial G} \langle f(z), A(^*dz)g(z)\rangle = \frac{2}{(2i)^n} \int\limits_{G} \left[\left\langle A_n^*(\frac{\partial}{\partial \overline{z}})f(z), g(z)\right\rangle + \right.$$

$$\left. + \left\langle f(z), A_n(\frac{\partial}{\partial \overline{z}})g(z)\right\rangle\right] d\overline{z} \wedge dz,$$

где $^*dz = (^*dz_1, .., ^*dz_n), ^*$ *– оператор Ходжа* [3].

Эта формула следует из теоремы Стокса и равенства

$$d\left[\langle f, A_n(^*dz)g\rangle\right] = \langle df, A_n(^*dz)g\rangle + (-1)^{n-1}\langle f, A_n(^*dz) \wedge dg\rangle =$$

$$= (-1)^{n-1}\left[\langle A_n^*(^*dz) \wedge df, g\rangle + \langle f, A_n(^*dz) \wedge dg\rangle\right] =$$

$$= \frac{2}{(2i)^n}\left[\left\langle A_n^*(\frac{\partial}{\partial \overline{z}})f, g\right\rangle + \left\langle f, A_n(\frac{\partial}{\partial \overline{z}})g\right\rangle\right] d\overline{z} \wedge dz.$$

Следствие 1. *Если f и g класса $C^1(G)$ и supp $f \subset G$, supp $g \subset G$, то*

$$\int\limits_{G} \left[\left\langle A_n^*(\frac{\partial}{\partial \overline{z}})f(z), g(z)\right\rangle = \left\langle f(z), A_n(\frac{\partial}{\partial \overline{z}})g(z)\right\rangle\right] d\overline{z} \wedge dz = 0.$$

Рассмотрим сопряженную к (2) систему

$$A_n^* = (\frac{\partial}{\partial \overline{z}})f(z) = 0. \tag{3}$$

Следствие 2. *Если f, $g \in C^1(G) \cap C(\overline{G})$ удовлетворяют соответственно* (3) *и* (2), *то*

$$\int\limits_{\partial G} \langle f(z), A_n(^*dz)g(z)\rangle = 0.$$

Теорема 2. *Если $f \in C^1(G) \cap C(\overline{G})$, то*

$$\int\limits_{\partial G} A_n(^*dz)f(z) = \frac{2}{(2i)^n} \int\limits_{G} A_n(\frac{\partial}{\partial \overline{z}})f(z) d\overline{z} \wedge dz.$$

Доказательство получается из теоремы Стокса.

Следствие 1. *Если $f \in C^1(G)$, supp $f \in G$, то*

$$\int\limits_G A_n\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right) f(z) d\overline{z} \wedge dz = 0.$$

Следствие 2. *Если $f \in C^1(G) \cap C(\overline{G})$ удовлетворяет, то*

$$\int\limits_{\partial G} A_n(^*dz) f(z) = 0.$$

Обратное утверждение, аналогичное теореме Морера, доказывается так же, как и в [4].

Теорема 3. *Пусть $f \in C(G)$ и для любого шара $B \subset G$*

$$\int\limits_{\partial B} A_n(^*dz) f(z) = 0;$$

тогда f(z) удовлетворяет (2) *в G.*

Так как на границе шара B(z,R) справедливо равенство

$$^*d\zeta \left|_{\partial B(z,R)} = \frac{\zeta - z}{R} dS, \right. \tag{4}$$

где dS – элемент объема поверхности сферы $\partial B(z, R)$, то условие в теореме 3 эквивалентно условию

$$\int\limits_{\partial B(z,R)} A_n(\zeta - z) f(\zeta) dS = 0.$$

Введем матричную дифференциальную форму

$$\mathrm{H}\ (\zeta,\ \mathrm{z}) = A_n^*\left(\frac{\zeta - z}{|\zeta - z|^{2n}}\right) A_n^*(^*d\zeta).$$

Обозначим G через G^+ и $\mathbf{C}^n \backslash \overline{G}$- через G^-. Применяя теорему Стокса, тем же методом, как и в [4], получаем, что справедлива

Теорема 4. *Пусть $f \in C^1(G^+) \cap C(\overline{G}^+)$, тогда*

$$\frac{(n-1)!}{2\pi^n}\left[\int\limits_{\partial G^+} H(\zeta, z) f(\zeta) - 2\int\limits_{G^+} A_n^*\left(\frac{\zeta - z}{\left|\zeta - z\right|^{2n}}\right) A_n\left(\frac{\partial}{\partial \overline{\zeta}}\right) f(\zeta) dV_\zeta\right] =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} f(z), z \in G^+, \\ 0, z \in G^-, \end{array} \right. \tag{5}$$

где 0 *– нулевой вектор,* dV_ζ *– элемент объема.*

Теорема 5. *Пусть* f *удовлетворяет* (2) *в* G^+ *и класса* $C(\overline{G}^+)$; *тогда*

$$\frac{(n-1)!}{2\pi^n} \int\limits_{\partial G} H(\zeta, z) f(\zeta) = \left\{ \begin{array}{l} f(z), z \in G^+, \\ 0, z \in G^-. \end{array} \right.$$

Это интегральное выражение следует из (5).

Обозначим

$$g(\zeta, z) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{1-n} \left|\zeta - z\right|^{2-2n} + h(\zeta, z), n > 1, \\ 2\ln|\zeta - z| + h(\zeta, z), n = 1, \end{array} \right. \tag{6}$$

где h(ζ,z) – регулярная гармоническая функция в G, принимающая на границе ∂G значения $\frac{1}{1-n} \left|\zeta - z\right|^{2-2n}$ (n >1) и –2ln$|\zeta - z|$ (n =1), z∈G, $\zeta \in \partial G$.

Введем матрицы

$$\begin{array}{l} \mathrm{K(z,\zeta)} = \frac{(n-1)!}{\pi^n} A_n^*(\frac{\partial}{\partial \overline{z}}) A_n(\frac{\partial}{\partial \overline{z}}) \mathrm{g}(\zeta,\ \mathrm{z}), \\ \mathrm{L(z,\zeta)} = \frac{(n-1)!}{\pi^n} A_n(\frac{\partial}{\partial \overline{z}}) A_n^*(\frac{\partial}{\partial \overline{z}}) \mathrm{g}(\zeta,\ \mathrm{z}). \end{array} \tag{7}$$

Замечания. 1) Матрицы (7) регулярны при z, ζ ∈G и сингулярны при z=$\zeta \in \partial G$.

2) Справедливы соотношения K^*(z,ζ)=K(ζ,z), L^*(z,ζ)=L(ζ,z).

3) Равенства (7) сохранятся, если в них g(ζ,z) заменить на h(ζ,z). Это проверяется прямым подсчетом.

4) Если ζ ∈G фиксировано, то $A_n(\frac{\partial}{\partial \overline{z}})$K(z,$\zeta$)=0, $A_n^*(\frac{\partial}{\partial \overline{z}})$L(z,$\zeta$)=0.

Обозначим подпространства гильбертова пространства $\mathrm{L_2}$(G), состоящие соответственно из решений систем (2) и (3), символами B(G) и B^*(G).

Теорема 6. *Пусть* $f \in$ $\mathrm{L_2}$ (G)∩$\mathrm{C^1}$(G), *тогда операторы*

$$\mathrm{Kf} \equiv \int\limits_G K(z, \zeta) f(\zeta) dV_\zeta,\ \mathrm{Lf} \equiv \int\limits_G L(z, \zeta) f(\zeta) dV_\zeta \tag{8}$$

являются ортопроекторами в $\mathrm{L_2}$(G)∩$\mathrm{C^1}$(G) *соответственно на* B(G) и B^*(G).

В силу замечания 4 Kf и Lf отображают $\mathrm{L_2}$(G)∩$\mathrm{C^1}$(G) соответственно на B(G) и B^*(G). Пусть f∈B(G). Рассмотрим G_r= G $\setminus \{|z - \zeta| \le r\}$. Имеем

$$\int\limits_{G_r} K(z, \zeta) f(\zeta) = \frac{(n-1)!}{2\pi^n} \int\limits_{G_r} \left[A_n^*(\frac{\partial}{\partial \overline{z}}) A_n \left(\frac{\partial}{\partial \overline{\zeta}} \right) g(\zeta, z) \right] f(\zeta) dV_\zeta =$$

$$= \tfrac{(n-1)!}{2\pi^n} \int\limits_{G_r} d_\zeta \left[A_n^*(\tfrac{\partial}{\partial \overline{z}})A_n({}^*dz)g(\zeta,z)f(\zeta)\right]. \tag{9}$$

Применив теорему Стокса и используя граничное условие g(ζ,z)=0, $\zeta \in \partial G$, z$\in$G, находим из (9)

$$I_r = \int\limits_{G_r} K(z,\zeta)f(\zeta)dV_\zeta = \frac{(n-1)!}{2\pi^n} \int\limits_{\partial G_r} A_n^*(\frac{\partial}{\partial \overline{z}})A_n({}^*dz)g(\zeta,z)f(\zeta) =$$

$$= -\tfrac{(n-1)!}{2\pi^n} \int\limits_{\partial B(z,R)} A_n^*(\tfrac{\partial}{\partial \overline{z}})A_n({}^*dz)g(\zeta,z)f(\zeta), \tag{10}$$

где ∂B(z,R)=$\{|z-\zeta| = r\}$. Подставляя вместо g(ζ,z) его выражение (6), получим

$$I_r = \frac{(n-1)!}{2\pi^n} \int\limits_{\partial B(z,r)} A_n^*(\frac{\partial}{\partial \overline{z}})A_n({}^*dz)f(\zeta) + O(r),$$

где O(r) $= -\ \tfrac{(n-1)!}{2\pi^n} \int\limits_{\partial B(z,r)} A_n^*(\tfrac{\partial}{\partial \overline{z}})h(\zeta,z)A_n({}^*dz)f(\zeta)$.

Используя непрерывность f и G, в силу (4) имеем

$$I_r = -\ \tfrac{(n-1)!}{2\pi^n r^{2n+1}} \int\limits_{\partial B(z,r)} A_n^*(\tfrac{\partial}{\partial \overline{z}})A_n({}^*dz)g(\zeta,z)f(\zeta) + O(r) =$$

$$= \tfrac{(n-1)!}{2\pi^n r^{2n+1}} \int\limits_{\partial B(z,r)} f(z)dS + \alpha(r),$$

где $|\alpha(r)| \to$0 при r$\to$0. Итак, из (10) находим I_r =f(z)+α(r) и, устремляя r к нулю, получаем

$$\mathrm{Kf} = \lim_{r\to 0} \int\limits_{G_r} K(z,\zeta)f(\zeta)dV_\zeta = \mathrm{f(z)}. \tag{11}$$

Аналогично, когда f $\in$B*(G),

$$\mathrm{Lf} = \lim_{r\to 0} \int\limits_{G_r} L(z,\zeta)f(\zeta)dV_\zeta = \mathrm{f(z)}. \tag{12}$$

Таким образом, матрицы (7) обладают воспроизводящим свойством керн-функции Бергмана [5]. Отметим также, что операторы (8) самосопряженные.

Рассмотрим краевую задачу: найти в G решение u(z) системы

$$A_n(\tfrac{\partial}{\partial \overline{z}})\mathrm{u(z)} = \mathrm{F(z)}, \tag{13}$$

непрерывное в $\overline{G}$ по краевому условию $u\,|_{\partial G}$ =0.

Аналогичная задача рассматривается для системы

$$A_n^*(\tfrac{\partial}{\partial \overline{z}})\mathrm{u(z)} = \mathrm{F(z)}. \tag{14}$$

Очевидно, задачи (13) и (14) имеют решение не для всех F(z) $\in L_2(G)$. Предполагаем, что $F \in C^1(G) \cap L_2(G)$. Тогда, очевидно, компоненты $u_i(z)$ решения системы (13) являются решениями уравнений Пуассона:

$$\Delta u_i(z) = \left(4A_n^*(\frac{\partial}{\partial z})F(z)\right)_i .$$

Если Φ – проекция F на $B^*(G)$, то, обозначив f(z) = F(z)–Φ(z), имеем

$$\Delta u_i(z) = \left(4A_n^*(\frac{\partial}{\partial z})f(z)\right)_i .$$

Так как $u\,|_{\partial G} = 0$, то отсюда следует, что для любого z∈G

$$\mathrm{u(z)} = \tfrac{(n-1)!}{\pi^n} \int\limits_G g(\zeta, z) \left[A_n^* \left(\tfrac{\partial}{\partial \overline{\zeta}}\right) f(\zeta)\right] dV_\zeta,$$

где g(ζ,z) – функция, определенная формулой (6). Так как g(ζ,z)=0 при $\zeta \in \partial G$, z∈G, отсюда получим

$$\mathrm{u(z)} = \tfrac{(n-1)!}{2\pi^n} \left\{\int\limits_G d_\zeta \left[g(\zeta, z)A_n^*({}^*dz)f(\zeta)\right] - 2\int\limits_G \left[A_n^* \left(\tfrac{\partial}{\partial \overline{\zeta}}\right) g(\zeta, z)\right] f(\zeta)dV_\zeta\right\} =$$

$$= -\tfrac{(n-1)!}{\pi^n} \left\{\int\limits_G A_n^* \left(\tfrac{\zeta - z}{|\zeta - z|^{2n}}\right) f(\zeta)dV_\zeta + \int\limits_G \left[A_n^* \left(\tfrac{\partial}{\partial \overline{\zeta}}\right) h(\zeta, z)\right] f(\zeta)dV_\zeta\right\}. \quad (15)$$

Применяя к обеим частям (15) оператор $A_n(\frac{\partial}{\partial \overline{z}})$, используя (5) и замечание 3, получим тем же методом, что и в [4],

$$A_n(\tfrac{\partial}{\partial \overline{z}})\mathrm{u(z)} = \mathrm{f(z)} - \int\limits_G L(z, \zeta)f(\zeta)dV_\zeta.$$

Кроме того, в силу определения L(z,ζ) и замечания 3 имеем

$$\int\limits_G L(z, \zeta)f(\zeta)dV_\zeta = A_n(\frac{\partial}{\partial \overline{z}}) \left(\frac{(n-1)!}{\pi^n} \int\limits_G \left[A_n^* \left(\frac{\partial}{\partial \overline{\zeta}}\right) h(\zeta, z)\right] f(\zeta)dV_\zeta\right).$$

Следовательно,

$$\mathrm{F(z)} = \mathrm{f(z)} - \int\limits_G L(z, \zeta)f(\zeta)dV_\zeta =$$

$$= A_n(\tfrac{\partial}{\partial \overline{z}})\left[-\tfrac{(n-1)!}{\pi^n}\int\limits_G A_n^*\left(\tfrac{\zeta - z}{|\zeta - z|^{2n}}\right)f(\zeta)dV_\zeta - \tfrac{(n-1)!}{\pi^n}\int\limits_G \left[A_n^*\left(\tfrac{\partial}{\partial \overline{\zeta}}\right)h(\zeta, z)\right]f(\zeta)dV_\zeta\right] =$$

$$= A_n\left(\tfrac{\partial}{\partial \overline{z}}\right)\left[-\tfrac{(n-1)!}{\pi^n}\int\limits_G \left[A_n^*\left(\tfrac{\partial}{\partial \overline{\zeta}}\right)g(\zeta, z)\right]f(\zeta)dV_\zeta\right].$$

Применяя интегрирование по частям в последнем интеграле, получим

$$\mathrm{F(z)} = A_n(\tfrac{\partial}{\partial \overline{z}})\left[-\tfrac{(n-1)!}{2\pi^n}\left\{\int\limits_{\partial G} g(\zeta, z)A_n^*({}^*dz)f(\zeta) - 2\int\limits_G g(\zeta, z)\left[A_n^*\left(\tfrac{\partial}{\partial \overline{\zeta}}\right)f(\zeta)\right]dV_\zeta\right\}\right] =$$

$$=A_n\left[\frac{(n-1)!}{2\pi^n}\int\limits_G g(\zeta,z)\left[A_n^*\left(\frac{\partial}{\partial\overline{\zeta}}\right)f(\zeta)\right]dV_\zeta\right].$$

Таким образом, справедливы теоремы

Теорема 7. *Задачи* (13) *и* (14) *разрешимы тогда и только тогда, когда их правые части* F(z) *имеют соответственно вид*

$$\mathrm{F(z)}=\mathrm{f(z)}-\int\limits_G L(z,\zeta)f(\zeta)dV_\zeta, \tag{16}$$

$$\mathrm{F(z)}=\mathrm{f(z)}-\int\limits_G K(z,\zeta)f(\zeta)dV_\zeta$$

для любой $\mathrm{f(z)}\in\mathrm{L_2(G)}\cap\mathrm{C^1(G)}$.

Теорема 8. *Задачи* (13) *и* (14) *разрешимы тогда и только тогда, когда их правые части соответственно имеют вид*

$$\mathrm{F(z)}=A_n(\tfrac{\partial}{\partial\overline{z}})\left[-\frac{(n-1)!}{\pi^n}\int\limits_G\left[A_n^*\left(\frac{\partial}{\partial\overline{\zeta}}\right)g(\zeta,z)\right]f(\zeta)dV_\zeta\right], \tag{17}$$

$$\mathrm{F(z)}=A_n^*(\tfrac{\partial}{\partial\overline{z}})\left[-\frac{(n-1)!}{\pi^n}\int\limits_G\left[A_n\left(\frac{\partial}{\partial\overline{\zeta}}\right)g(\zeta,z)\right]f(\zeta)dV_\zeta\right] \tag{18}$$

для любой $\mathrm{f(z)}\in\mathrm{L_2}\ \mathrm{(G)}\cap\mathrm{C^1(G)}$.

Замечания. 1) Условия (17) и (18) эквивалентны соответственно условиям

$$\mathrm{F(z)}=A_n(\tfrac{\partial}{\partial\overline{z}})\left[\frac{(n-1)!}{\pi^n}\int\limits_G g(\zeta,z)\left[A_n^*\left(\frac{\partial}{\partial\overline{\zeta}}\right)f(\zeta)\right]dV_\zeta\right],$$

$$\mathrm{F(z)}=A_n^*(\tfrac{\partial}{\partial\overline{z}})\left[\frac{(n-1)!}{\pi^n}\int\limits_G g(\zeta,z)\left[A_n\left(\frac{\partial}{\partial\overline{\zeta}}\right)f(\zeta)\right]dV_\zeta\right].$$

2) Единственные решения задач (13) и (14) при условиях их разрешимости (17) и (18) даются соответственно формулами

$$\mathrm{u(z)}=-\frac{(n-1)!}{\pi^n}\int\limits_G\left[A_n^*\left(\frac{\partial}{\partial\overline{\zeta}}\right)g(\zeta,z)\right]f(\zeta)dV_\zeta, \tag{19}$$

$$\mathrm{u(z)}=-\frac{(n-1)!}{\pi^n}\int\limits_G\left[A_n\left(\frac{\partial}{\partial\overline{\zeta}}\right)g(\zeta,z)\right]f(\zeta)dV_\zeta. \tag{20}$$

3) Можно представить решения (19) и (20) соответственно в виде

$$\mathrm{u(z)}=\frac{(n-1)!}{\pi^n}\int\limits_G g(\zeta,z)\left[A_n^*\left(\frac{\partial}{\partial\overline{\zeta}}\right)f(\zeta)\right]dV_\zeta,$$

$$\mathrm{u(z)}=\frac{(n-1)!}{\pi^n}\int\limits_G g(\zeta,z)\left[A_n\left(\frac{\partial}{\partial\overline{\zeta}}\right)f(\zeta)\right]dV_\zeta.$$

4) Решения (19) и (20) еще можно записать так:

$$\mathrm{u(z)}=-\frac{(n-1)!}{\pi^n}\left[\int\limits_G A_n^*\left(\frac{\zeta-z}{|\zeta-z|^{2n}}\right)f(\zeta)dV_\zeta+\int\limits_G\left[A_n^*\left(\frac{\partial}{\partial\overline{\zeta}}\right)h(\zeta,z)\right]f(\zeta)dV_\zeta\right], \tag{21}$$

$$\mathrm{u(z)}=-\frac{(n-1)!}{\pi^n}\left[\int\limits_G A_n\left(\frac{\zeta-z}{|\zeta-z|^{2n}}\right)f(\zeta)dV_\zeta+\int\limits_G\left[A_n\left(\frac{\partial}{\partial\overline{\zeta}}\right)h(\zeta,z)\right]f(\zeta)dV_\zeta\right].$$

Теорема 9. *Задачи* (13) *и* (14) *разрешимы тогда и только тогда, когда их правые части* F *ортогональны соответственно подпространствам* $\mathrm{B}^*(\mathrm{G})\subset L^2(G)$ и $\mathrm{B}(\mathrm{G})\subset L^2(G)$.

Рассмотрим произвольный комплексный вектор, имеющий вид

$$\mathrm{F(z)} = \mathrm{f(z)} - \int\limits_G L(z,\zeta)f(\zeta)dV_\zeta$$

для любой $\mathrm{f(z)} \in \mathrm{L}_2\ (\mathrm{G})\cap \mathrm{C}^1(\mathrm{G})$, и пусть $\mathrm{H(z)} \in \mathrm{B}^*(\mathrm{G})$. Тогда имеем

$$\langle F,H\rangle=\int\limits_G F^t(z)\overline{H(z)}dV_z=\int\limits_G f^t(z)\overline{H(z)}dV_z-\int\limits_G\left(\int\limits_G (L(z,\zeta)f(\zeta))^t dV_\zeta\right)\overline{H(z)}dV_z. \quad (22)$$

Однако

$$\int\limits_G\left(\int\limits_G (L(z,\zeta)f(\zeta))^t dV_\zeta\right)\overline{H(z)}dV_z = \int\limits_G\left(\int\limits_G f^t(\zeta)L^t(z,\zeta)dV_\zeta\right)\overline{H(z)}dV_z =$$

$$=\int\limits_G f^t(\zeta)\left(\int\limits_G L^t(z,\zeta)\overline{H(z)}dV_z\right)dV_\zeta = \int\limits_G f^t(\zeta)\overline{H(\zeta)}dV_\zeta = \langle f,H\rangle,$$

так как в силу (12)

$$\int\limits_G L^t(z,\zeta)\overline{H(z)}dV_z = \int\limits_G \overline{L(\zeta,z)H(z)}dV_z = \overline{H(\zeta)}.$$

Значит, из (22) следует, что $\langle F,H\rangle=0$. Обратно, имеем

$$\int\limits_G F^t(\zeta)\overline{L(\zeta,z)}dV_\zeta = 0,$$

следовательно,

$$\int\limits_G \overline{L^t(z,\zeta)}F(\zeta)dV_\zeta = 0,$$

откуда

$$\int\limits_G L(z,\zeta)F(\zeta)dV_\zeta = 0.$$

Поэтому

$$\mathrm{F(z)} = \mathrm{F(z)} - \int\limits_G L(z,\zeta)F(\zeta)dV_\zeta,$$

и остается воспользоваться теоремой 7.

Теорема 10. *Задачи* (13) *и* (14) *разрешимы тогда и только тогда, когда*

$$\int\limits_G L(z,\zeta)F(\zeta)dV_\zeta = 0,$$

соответственно

$$\int\limits_G K(z,\zeta)F(\zeta)dV_\zeta = 0.$$

Действительно, по теореме 9, если (13) разрешима, то F ортогональна B*(G). Далее, как и при доказательстве обратного утверждения теоремы 9, имеем

$$\int\limits_G L(z,\zeta)F(\zeta)dV_\zeta = 0.$$

Обратное, очевидно, следует из теоремы 7.

Пример. Рассмотрим шар B={|z|<R} в C^n. Для шара, как известно,

$$h(\zeta,z) = -\tfrac{1}{1-n}\left(\tfrac{R(z)}{\left|\zeta|z|^2-zR^2\right|}\right)^{2n-2}, \ n>1,$$
$$h(\zeta,z) =\!-\ 2\ln\tfrac{\left|\zeta|z|^2-zR^2\right|}{R|z|},\ n=1,$$

и формула (21) в этом случае примет вид

$$\mathrm{u(z)} = -\ \tfrac{(n-1)!}{\pi^n}\int\limits_G\left[\tfrac{A_n^*(\zeta-z)}{|\zeta-z|^{2n}} - \tfrac{A_n^*(\zeta|z|^2-zR^2)|z|^{2n}R^{2n-2}}{\left|\zeta|z|^2-zR^2\right|^{2n}}\right]f(\zeta)dV_\zeta.$$

Условие разрешимости (17) здесь имеет вид

$$\mathrm{F(z)} = A_n(\tfrac{\partial}{\partial\overline{z}})\left[-\tfrac{(n-1)!}{\pi^n}\int\limits_B\left[\tfrac{A_n^*(\zeta-z)}{|\zeta-z|^{2n}} - \tfrac{A_n^*(\zeta|z|^2-zR^2)|z|^{2n}R^{2n-2}}{\left|\zeta|z|^2-zR^2\right|^{2n}}\right]f(\zeta)dV_\zeta\right].$$

Применим полученные результаты для исследования неоднородной системы Коши-Римана.

Рассмотрим в C^n задачу: найти по краевому условию $u|_{\partial G}$=0 непрерывное в $\overline{G}$ решение системы

$$\tfrac{\partial u}{\partial\overline{z_i}} = F_i(z),\quad F_i \in \mathrm{L}_2\ \mathrm{(G)} \cap \mathrm{C}^1\mathrm{(G)},\ \mathrm{i=1,\ldots,n}. \tag{23}$$

Теорема 11. *Если выполнены равенства*

$$\frac{\partial F_i(z)}{\partial\overline{z_j}} = \frac{\partial F_j(\overline{z})}{\partial\overline{z}_i},\quad i\neq j,$$

и комплексный вектор u(z) = $\{u_1,...,u_m\}$, где m = 2^{n-1}, *является решением задачи* (13) *с правой частью*

$$\mathrm{F(z)} =\{F_1,F_2,F_3,0,...,F_k,0,...,0,F_{k+1},0,...,F_n,0,...,0\}, \tag{24}$$

где между F_k *и* F_{k+1} *стоит* $2^{k-2}-1$ *нулей*, k = 3,…,n–1, *то функция* $u_1(z)$ *будет решением задачи* (23).

Доказательство легко следует из определения матрицы (1).

Теорема 12. *Задача* (23) *разрешима тогда и только тогда, когда* F ∈ L_2 (G) ∩ C^1(G), *имеющая вид* (24), *представляется равенством* (16) *для любой* f ∈ L_2 (G) ∩ C^1(G), *имеющей вид* (24) *с заменой* F_i *на* f_i, i = 1,…,n, *и удовлетворяющей условиям*

$$\frac{\partial f_i}{\partial \overline{z}_j} = \frac{\partial f_j}{\partial \overline{z}_i}, \quad i \neq j.$$

Единственное решение находится отделением первых компонент в равенстве (19):

$$\mathrm{u(z)} = -\frac{(n-1)!}{\pi^n} \int_G \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial g(\zeta,z)}{\partial \zeta_i}\right) f_i(\zeta) dV_\zeta. \tag{25}$$

Отсюда имеем результат, анонсированный в [2].

Теорема 13. *Задача* (23) *разрешима тогда и только тогда, когда правые части*

F_j ∈L_2 (G)∩C^1(G) *имеют вид*

$$F_j(z) = \frac{\partial}{\partial \overline{z}_j} \left(-\frac{(n-1)!}{\pi^n} \int_G \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial g(\zeta,z)}{\partial \zeta_i}\right) f_i(\zeta) dV_\zeta \right), \tag{26}$$

где $g(\zeta,z)$ *определяется равенством* (6), *f(z)* = $(f_1, ..., f_n)$ ∈L_2 *(G)* ∩C^1 *(G)* *– любой вектор, удовлетворяющий условиям* $\frac{\partial f_i}{\partial \overline{z}_j} = \frac{\partial f_j}{\partial \overline{z}_i}$, $i \neq j$, *причем решение единственно и имеет вид* (25).

Замечание. Краевая задача $A_n(\frac{\partial}{\partial \overline{z}})$v = H, $v|_{\partial G}$=Φ сводится заменой u = v–φ, F = H –$A_n(\frac{\partial}{\partial \overline{z}})\varphi$ к задаче (13), где φ – продолжение функции Φ, заданной на ∂G, до функции $C_2(G)$. Так же задача $A_n^*(\frac{\partial}{\partial \overline{z}})$v = H, $v|_{\partial G}$=Φ сводится к (14).

Библиографический список

1. *Балабаев, В.Е.* Элементы топологии и анализа [Текст] / В.Е. Балабаев. – Ярославль, 1990.
2. *Джураев, А.* ДАН, 1991. – Т. 319. – № 6. – С. 1292-1296.
3. *Шен-Шень, Чж.* Комплексные многообразия [Текст] / Чж. Шен-Шень. – М.: ИЛ, 1961.
4. *Балабаев, В.Е.* Дифференц. уравнения [Текст] / В.Е. Балабаев // Ярославль, 1991. – Т. 27. – № 12. – С. 2082-2094.
5. *Шабат, В.В.* Введение в комплексный анализ [Текст] / В.В. Шабат. – М.: Наука, 1976. Ч. 2.

Предельный переход α-устойчивых к максимум-устойчивым распределениям[1]

А.В. Лебедев

Параллели между теорией сумирования и теорией экстремумов случайных величин давно и хорошо известны. В теории суммирования важными объектами изучения являются устойчивые распределения: гауссовское и α-устойчивые [1, 2]. В теории экстремумов аналогичное место занимают максимум-устойчивые распределения трех экстремальных типов (Гумбеля, Фреше и Вейбулла) [3, 4]:

$$\begin{aligned}
&\Lambda(x) = \exp\{-e^{-x}\};\\
&\Phi_\gamma(x) = \exp\{-x^{-\gamma}\}, \quad x > 0, \gamma > 0;\\
&\Psi_\gamma(x) = \exp\{-(-x)^{\gamma}\}, \quad x < 0, \gamma > 0.
\end{aligned}$$

Обе теории в настоящее время развиваются относительно независимо. Однако еще в монографии В.М. Золотарева [5] была высказана идея построения единой теории для обобщенных операций суммирования, обладающих свойствами коммутативности и ассоциативности. Тогда сумма, максимум и другие аналогичные операции могут рассматриваться как частные случаи.

Возникает вопрос: нельзя ли построить "мост" между α-устойчивыми и максимум-устойчивыми распределениями? Для этого мы рассмотрим семейства операций, "промежуточных" между суммой и максимумом, а также устойчивые относительно них распределения, и получим из последних максимум-устойчивые предельным переходом.

Введем операцию

$$x \oplus_\nu y = (x^\nu + y^\nu)^{1/\nu}; \quad x, y \geq 0, \nu > 0.$$

При $\nu = 1$ получаем обычную сумму, а при $\nu \to +\infty$ имеет место предел $x \oplus_\nu y \to \max\{x, y\}$.

Теорема 1. *Пусть ξ_α, $0 < \alpha < 1$, – положительные α-устойчивые случайные величины с преобразованием Лапласа-Стилтьеса $\varphi_\alpha(t) = e^{-t^\alpha}$, и $\eta_{\alpha,\nu} = \xi_\alpha^{1/\nu}$. Тогда:*

1) случайные величины $\eta_{\alpha,\nu}$ устойчивы относительно $\oplus_\nu$;

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ, проекты № 07-01-00077, № 07-01-00373.

2) если $\alpha \to 0$, $\nu \to +\infty$ и $\alpha\nu \to \gamma > 0$, то $\mathbf{P}(\eta_{\alpha,\nu} \le x) \to \Phi_\gamma(x)$, $x > 0$.

Доказательство. Рассмотрим независимые случайные величины $\xi_\alpha^{(i)}$, $1 \le i \le n$, распределенные как ξ_α, тогда

$$\bigoplus_{i=1}^{n} (\xi_\alpha^{(i)})^{1/\nu} = \left(\sum_{i=1}^{n} \xi_\alpha^{(i)}\right)^{1/\nu} \stackrel{d}{=} n^{1/(\alpha\nu)} \xi_\alpha^{1/\nu}.$$

Таким образом, устойчивость доказана.

Далее используем две следующие модификации неравенства Чебышева. Пусть неотрицательная случайная величина ξ имеет преобразование Лапласа-Стилтьеса $\varphi(t)$, тогда для любых $x, t > 0$ верно:

$$\mathbf{P}(\xi \ge x) \le \frac{\mathbf{M}(1 - e^{-t\xi})}{1 - e^{-tx}} = \frac{1 - \varphi(t)}{1 - e^{-tx}}$$

и

$$\mathbf{P}(\xi \le x) = \mathbf{P}(e^{-t\xi} \ge e^{-tx}) \le \frac{\mathbf{M}e^{-t\xi}}{e^{-tx}} = \varphi(t) e^{tx}.$$

Обозначим $\eta_\alpha = \eta_{\alpha,1/\alpha} = \xi_\alpha^\alpha$. Тогда

$$\mathbf{P}(\eta_\alpha \ge x) = \mathbf{P}(\xi_\alpha \ge x^{1/\alpha}) \le \frac{1 - e^{-t^\alpha}}{1 - e^{-tx^{1/\alpha}}}.$$

Положим $t = x^{-1/\alpha}/\alpha$, тогда

$$\mathbf{P}(\eta_\alpha \ge x) \le \frac{1 - e^{1/(\alpha^\alpha x)}}{1 - e^{-1/\alpha}} \to 1 - e^{-1/x}, \quad \alpha \to 0,$$

откуда следует $\liminf_{\alpha\to 0} \mathbf{P}(\eta_\alpha < x) \ge e^{-1/x}$. С другой стороны,

$$\mathbf{P}(\eta_\alpha \le x) = \mathbf{P}(\xi_\alpha \le x^{1/\alpha}) \le e^{-t^\alpha} e^{tx^{1/\alpha}}.$$

При $t = \alpha x^{-1/\alpha}$ имеем

$$\mathbf{P}(\eta_\alpha \le x) \le e^{-\alpha^\alpha/x} e^\alpha \to e^{-1/x}, \quad \alpha \to 0,$$

откуда следует $\limsup_{\alpha\to 0} \mathbf{P}(\eta_\alpha \le x) \le e^{-1/x}$. Таким образом, из двусторонней оценки получаем предел $\mathbf{P}(\eta_\alpha \le x) \to e^{-1/x}$, $\alpha \to 0$, так что $\mathbf{P}(\eta_{\alpha,\nu} \le x) = \mathbf{P}(\eta_\alpha \le x^{\alpha\nu}) \to \Phi_\gamma(x)$, $\alpha \to 0$, $x > 0$.

После того, как мы получили предельное распределение Фреше, понятно, как можно получить распределения Гумбеля и Вейбулла. А именно, введем операции

$$x \otimes_\lambda y = \frac{1}{\lambda}\ln(e^{\lambda x} + e^{\lambda y}), \quad x, y \in \mathbf{R}, \lambda \neq 0,$$

и

$$x \odot_\mu y = -((-x)^{-\mu} + (-y)^{-\mu})^{-1/\mu}, \quad x, y \leq 0, \mu \neq 0.$$

В первом случае $x \otimes_\lambda y \to \max\{x, y\}$ при $\lambda \to +\infty$. К сожалению, при $\lambda \to 0$ данная операция не переходит непосредственно в сумму, однако сходится к ней при следующей линейной нормировке:

$$2\left(x \otimes_\lambda y - \frac{\ln 2}{\lambda}\right) \to x + y, \quad \lambda \to 0.$$

Аналогичные операции неоднократно рассматривались в работах В.П. Маслова, например, в [6].

Во втором случае $x \odot_\mu y \to \max\{x, y\}$ при $\mu \to +\infty$ и $x \odot_\mu y = x + y$ при $\mu = -1$. При переходе параметра через нуль возникает неопределенность, но более тонкий анализ показывает, что

$$2^{1/\mu}(x \odot_\mu y) \to -\sqrt{xy}, \quad \mu \to 0.$$

Следствие 1. *Пусть* $\zeta_{\alpha,\lambda} = \lambda^{-1}\ln \xi_\alpha$, *тогда:*
1) случайные величины $\zeta_{\alpha,\lambda}$ *устойчивы относительно* $\otimes_\lambda$*;*
2) если $\alpha \to 0$, $\lambda \to +\infty$ *и* $\alpha\lambda \to 1$, *то* $\mathbf{P}(\zeta_{\alpha,\lambda} \leq x) \to \Lambda(x)$, $x > 0$.

Следствие 2. *Пусть* $\delta_{\alpha,\mu} = -\xi_\alpha^{-1/\mu}$, *тогда:*
1) случайные величины $\delta_{\alpha,\lambda}$ *устойчивы относительно* $\odot_\mu$*;*
2) если $\alpha \to 0$, $\mu \to +\infty$ *и* $\alpha\mu \to \gamma$, *то* $\mathbf{P}(\delta_{\alpha,\lambda} \leq x) \to \Psi_\gamma(x)$, $x < 0$.

В обоих случаях устойчивость элементарно доказывается подстановкой, а предельные соотношения следуют из теоремы 1 и соответствующих преобразований для распределений.

Следствие 2 можно доказать и по-другому. Как отмечено в [1, гл. 13, § 8], распределение случайной величины $\xi_\alpha^{-\alpha}$ имеет преобразование Лапласа-Стилтьеса, заданное степенным рядом

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-t)^k}{\Gamma(1 + k\alpha)}.$$

При $\alpha \to 0$ оно переходит в $1/(1+t)$, что соответствует стандартному показательному распределению. С учетом знака "минус" получаем $\Psi_1(x) = e^x$, $x < 0$.

С помошью теоремы 1 можно вывести и некоторые новые интересные свойства максимум-устойчивых распределений.

Следствие 3. *Пусть τ – случайная величина с распределением Фреше Φ_1, не зависящая от ξ_β, $0 < \beta < 1$. Тогда*

$$(\tau\xi_\beta)^\beta \stackrel{d}{=} \tau.$$

Доказательство. Пусть ξ_α и ξ_β независимы, тогда согласно известному свойству произведения строго устойчивых случайных величин [1, гл. 6, § 2], верно $\xi_\alpha \xi_\beta^{1/\alpha} \stackrel{d}{=} \xi_{\alpha\beta}$. Тогда по теореме 1 при $\alpha \to 0$ случайная величина $(\xi_\alpha \xi_\beta^{1/\alpha})^{\alpha\beta} = (\xi_\alpha^\alpha \xi_\beta)^\beta$ сходится по распределению к τ, и первый множитель в скобках также сходится к τ.

Это соотношение можно доказать и непосредственно:

$$\mathbf{P}((\tau\xi_\beta)^\beta \le x) = \mathbf{P}(\tau \le x^{1/\beta}/\xi_\beta) = \mathbf{M}e^{-\xi_\beta/x^{1/\beta}} = e^{-1/x}, \quad x > 0,$$

однако при этом остается неясной его мотивировка.

Подобным образом можно получить и многомерные максимум-устойчивые распределения [7, гл. 5]. Пусть, например, τ', τ'' – независимые случайные величины со стандартным распределением Фреше, тогда для вектора $((\tau'\xi_\beta)^\beta, (\tau''\xi_\beta)^\beta)$ получаем совместную функцию распределения

$$G(x, y) = \exp\{-(x^{-1/\beta} + y^{-1/\beta})^\beta\}, \quad x, y > 0.$$

В данном случае компоненты вектора имеют стандартное распределение Фреше, а β определяет их зависимость: при $\beta \to 1$ получаем независимость, а при $\beta \to 0$ совершенную положительную зависимость (комонотонность).

Из соотношений между различными типами максимум-устойчивых распределений понятно, что для случайной величины $\theta = -1/\tau$ с распределением Вейбулла Ψ_1 будет выполнено

$$-(-\theta/\xi_\beta)^\beta \stackrel{d}{=} \theta,$$

а для случайной величины $\zeta = \ln \tau$ с распределением Гумбеля Λ

$$\beta(\zeta + \ln \xi_\beta) \stackrel{d}{=} \zeta.$$

Интересно, что α-устойчивые распределения с $\alpha \in [1,2]$ (включая гауссовское) оказываются в данной схеме “лишними”. Это связано с тем, что они рассредоточены по всей числовой прямой, а мы существенно использовали неотрицательность слагаемых (степеней и экспонент) в определениях операций.

Можно продолжить, например, операцию $\oplus_\nu$ на все $x, y \in \mathbf{R}$, полагая $f_\nu(x) = |x|^\nu \mathrm{sign} x$ и

$$x \oplus_\nu y = f_\nu^{-1}(f_\nu(x) + f_\nu(y)),$$

однако в таком случае при $\nu \to +\infty$ она перейдет не в максимум, а в операцию выбора числа, наибольшего по абсолютному значению, которую можно определить следующим образом:

$$x \diamond y = \begin{cases} x, & |x| > |y|; \\ (x+y)/2, & |x| = |y|; \\ y, & |x| < |y|. \end{cases}$$

Распределение Фреше Φ_γ по-прежнему устойчиво относительно этой операции, а распределения Вейбулла и Гумбеля – уже нет. Легко видеть, что относительно $\diamond$ окажутся устойчивы также распределения случайных величин вида $\eta = \kappa\tau$, где τ имеет распределение Фреше, а κ принимает значения ± 1; κ и τ независимы.

Следует также отметить, что о “типах” устойчивых распределений (как сдвигово-масштабных семействах) здесь можно говорить только применительно к сумме и максимуму. Для операций $\oplus_\nu$, $\odot_\mu$ и $\diamond$ устойчивые распределения образуют только масштабные семейства, а для $\otimes_\lambda$ – сдвиговые.

В [8] рассматривались строго α-устойчивые элементы в банаховых пространствах. Такие элементы могут быть построены с помощью представления Ле Паже. При этом различные пространства с их вероятностными аспектами представляют собой “параллельные миры”, в чем-то похожие, а в чем-то отличающиеся между собой. Особенность же настоящей работы в том, что мы движемся “поперек” множества этих миров и наблюдаем непрерывность в предельном переходе к “миру максимумов”.

Библиографический список

1. *Феллер, В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения [Текст] / В. Феллер. – М.: Мир, 1984. – Т. 2.

2. *Золотарев, В.М.* Одномерные устойчивые распределения [Текст] / В.М. Золотарев. – М.: Наука, 1983.
3. *Лидбеттер, М.* Экстремумы случайных последовательностей и процессов [Текст] / М. Лидбеттер, Г. Линдгрен, Х. Ротсен. – М.: Мир, 1989.
4. *Embrechts, P., Klüppelberg, C.P., Mikosh, T.* Modelling extremal events for insurance and finance. Springer, 2003.
5. *Золотарев, В.М.* Современная теория суммирования независимых случайных величин [Текст] / В.М. Золотарев. – М.: Наука, 1986.
6. *Маслов, В.П.* Нелинейное среднее в экономике [Текст] / В.П. Маслов // Математические заметки, 2005. – Т. 78. – № 3. – С. 377-395.
7. *Галамбош, Я.И.* Асимптотическая теория экстремальных порядковых статистик [Текст] / Я.И. Галамбош. – М.: Наука, 1984.
8. *Davydov, Yu., Molchanov, I., Zuyev, S.* Stable distributions and harmonic analysis on convex cones // C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I, 2007. – V. 344. – P. 321-326.

Американские опционы. Хеджирование

С.В. Жуленев

Введение. В данной заметке продолжается рассмотрение ситуации, связанной с модифицированным американским опционом колл, которое было начато в теореме 1 [1, с. 764] и продолжено в [2] и [3]. Здесь впервые мы предлагаем точные выражения для справедливой цены, динамики изменения капитала и оптимального момента предъявления опциона к исполнению. Сами же результаты и условия, в которых они получены, подробно описаны в п. 3. Добавим лишь, что сейчас они позволяют легко провести необходимые вычисления на компьютере, а также надеяться на получение аналогичных результатов и в более общей ситуации.

1. Общая постановка задачи хеджирования. В понятие хеджирования финансового инструмента американского типа с семейством

$$f = (f_n)_{1 \le n \le N}$$

F_n−измеримых платежных поручений f_n входят 3 объекта

справедливая цена хеджирования $C(f;\ P)$,
оптимальная самофинансируемая стратегия $(\pi,\ C)$,

с минимальным $(x,\ f,\ N)-$*хеджем* π и потреблением C, а также *динамика изменения капитала* $X_n^{\pi,\ C}$, $\ 0 \le n \le N$,

которые заметно отличаются от своих «европейских коллег». И, кроме того, появляется новый элемент, так называемый

оптимальный момент остановки наблюдений τ_0^N

(за процессом изменения цен (x_n)). Именно при таком выборе момента предъявления опциона к исполнению и «достигается» справедливая цена опциона, и как его продавец, так и владелец «оказываются в нулях». В [2, п. III.2.5], приведена теорема 3, в которой при некоторых условиях все 4 указанных элемента хеджирования уточняются.

2. Несколько менее общий частный случай. В данной работе мы используем другой результат этого же пункта, следствие 4, которое представляет справедливую цену $C(f;\ P)$, динамику изменения капитала $X_n^{\pi,\ C}$ и оптимальный момент остановки τ^* в виде:

$$C(f,\ P) = X_0^{\pi,\ C} = Q^N g(x), \quad X_n^{\pi,\ C} = \beta^n Q^{N-n} g(x_n), \quad 0 \le n \le N, \tag{1}$$

$$\tau^* = \min(0 \le n \le N:\ Q^{N-n} g(x_n) = g(x_n)), \tag{2}$$

где $X = (x_n)_0^N-$однородный марковский процесс со значениями в E,

$$Qg(x) = \max(g(x),\ \beta v Tg(x)), \quad Tg(x) = E_x g(x_1) \equiv E(g(x_1)|x_0 = x), \tag{3}$$

$\beta > 0,\ v > 0$, а числовая функция $g:\ E \to R$ удовлетворяет условию

$$E_x|g(x_n)| < \infty, \quad x \in E,\ 0 \le n \le N. \tag{4}$$

Именно этот результат и позволяет точно сформулировать

3. Цели работы. В силу (1), (2) все три вышеупомянутые элементы хеджирования полностью определяются последовательностью

$$Q^n g(y), \quad 0 \le n \le N, \quad y \in E, \tag{5}$$

преобразований конкретной функции $g(y)$ с помощью оператора Q. В частном случае американского опциона колл ниже мы даем точные выражения для всех этих функций и указываем некоторые их свойства.

Прежде всего система платежных функций нашего опциона имеет вид

$$f_n = \beta^n g(S_n), \quad 0 \le n \le N, \tag{6}$$

где $g(x) = (x-1)^+$, а $0 < \beta < 1$, некоторое число. Это означает, что рассматривается дискретный случай, когда срок жизни опциона T разбивается на N периодов. Цены базового актива $S(t)$ и выплаты по опциону интересуют нас лишь в моменты времени $t = n\tau,\ \tau = T/N$ и потому обозначаются через S_n. Кроме того, рассматривается не стандартный, а модифицированный опцион колл, поскольку $\beta \neq 1$.

Далее, упомянутый выше результат относится к так называемым полным рынкам, в которых существует единственная мартингальная мера, порождаемая процессом изменения цен базового актива. У нас эта мартингальная мера будет определяться следующим образом. Мы считаем, что наш $(B,S)-$рынок определяется равенствами

$$B_n = B_0(1+r)^n, \quad S_n = S_0\lambda^{\varepsilon_1+\dots+\varepsilon_n}, \qquad 0 \le n \le N. \tag{7}$$

Иными словами, деньги разных моментов времени можно сравнить с помощью постоянной безрисковой ставки r однократного начисления за период длины τ. С другой стороны, динамика изменения цен рискового актива (акции или базового актива опциона) описывается биномиальной моделью, поскольку представление в (7) является следствием равенств $S_l = S_{l-1}\lambda^{\varepsilon_l},\ 1 \le l \le n \le N$, в которых ε_l-н.о.р.с.в. с $P(\varepsilon_l = 1) = p,\ P(\varepsilon_l = -1) = 1 - p = q$. А единственная мартингальная мера среди всех возможных вероятностных мер, определяемых последовательностью $(\varepsilon_n)_1^N$ задается условием: средний прирост стоимости рискового актива за любой период длины τ совпадает с безрисковой ставкой r. Иными словами, вероятности p и q этой мартнгальной меры P определяются равенствами $E(S_l/S_{l-1}) = E\lambda^{\varepsilon_l} = 1 + r$ и равны

$$p = \frac{u-\mu}{\lambda-\mu}, \qquad q = \frac{\lambda-u}{\lambda-\mu}, \tag{8}$$

где $u = 1 + r = \lambda p + \mu q,\ \mu = \lambda^{-1}$. И пусть $v = (1+r)^{-1}$, а $\lambda > u > 1$.

Воспользоваться же результатами (1), (2) имеем полное право, поскольку в нашем случае процесс $X = (S_n)_0^N$ является однородным марковским. Кроме того, с начальной ценой $S_0 = \lambda^l$ при некотором целом l он принимает значения из множества $E = \{\lambda^k :\ -\infty < k < \infty\}$. Наконец отметим, что $\sigma-$алгебра из п. 1 $F_n = \sigma\{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n\}$.

4. Точные выражения. В силу (3) справедливы представления

$$Q^n g(y) = \max\{(\beta v)^k T^k g(y) :\ 0 \le k \le n\}, \qquad 1 \le n \le N. \tag{9}$$

Поэтому нам остается охарактеризовать степени оператора T.

1. Соотношение

$$T^k g(y) = \sum_{l=0}^{k} C_k^l p^{k-l} q^l \, g(\lambda^{k-2l} y), \quad k \geq 0, \quad q = 1 - p. \tag{10}$$

вытекает из того, что $Tg(x) = E(g(S_1)|S_0 = x) = E(g(S_k)|S_{k-1} = x)$ и потому $T^k g(x) = E(g(S_k)|S_0 = x),\ k \geq 1$.

2. В точках $y \in E$, где функция $g(y) > 0$, т.е. при $y = \lambda^s,\ s \geq 1$,

$$T^k g(\lambda^s) = \begin{cases} \lambda^s u^k - 1, & 0 \leq k \leq s, \\ \lambda^s u^k - 1 + \sum_{l=0}^{m-1} C_k^l p^l q^{k-l} (1 - \mu^{k-s-2l}), & k > s, \end{cases} . \tag{11}$$

В самом деле, если $k \leq s$, то можно считать, что $g(y) = \overline{g}(y) \equiv y - 1$ в (10), поскольку $\lambda^{k-2l} y = \lambda^{k+s-2l} \geq 1$, т.к. $k + s - 2l \geq s - k \geq 0$. Поэтому

$$T^k g(\lambda^s) = T^k \overline{g}(\lambda^s) = \sum_{l=0}^{k} C_k^l p^{k-l} q^l \, (\lambda^{k-2l+s} - 1) = \lambda^s (p\lambda + q\mu)^k - 1.$$

Если же $k > s$, то в последней сумме есть отрицательные слагаемые, которые в сумме $T^k g(\lambda^s)$ заменяются на 0. Эти слагаемые возникают при $k - 2l + s \leq -1$, т.е. при $s + m \leq l \leq k$, если $k = s + 2m - 1$, либо при $s + m + 1 \leq l \leq k$, если $k = s + 2m,\ m \geq 1$. Иными словами, добавлять к величине $\lambda^s u^k - 1$ из (11) при $k = s + 2m - 1,\ m \geq 1$, нужно сумму

$$\sum_{l=s+m}^{k} C_k^l p^{k-l} q^l \, (1 - \mu^{2(l-m-s)+1}) = \sum_{l=0}^{k-s-m} C_k^l p^l q^{k-l} \, (1 - \mu^{2(k-l-m-s)+1}),$$

а при $k = s + 2m,\ m \geq 1$, сумму

$$\sum_{l=s+m+1}^{k} C_k^l p^{k-l} q^l \, (1 - \mu^{2(l-m-s)}) = \sum_{l=0}^{k-s-m-1} C_k^l p^l q^{k-l} \, (1 - \mu^{2(k-l-m-s)}),$$

поскольку в первом случае $\lambda^{k-2l+s} = \lambda^{2(s+m-l)-1} = \mu^{2(l-m-s)+1}$, а во втором $\lambda^{k-2l+s} = \lambda^{2(s+m-l)} = \mu^{2(l-m-s)}$. Остается заметить, что обе добавленные суммы можно записать в виде (11), т.к.

$$\text{при } k - s = 2m - 1: \quad k - s - m = m - 1, \quad 2(k - l - m - s) + 1 = k - s - 2l,$$
$$\text{при } k - s = 2m: \quad k - s - m - 1 = m - 1, \quad 2(k - l - m - s) = k - s - 2l.$$

3. Из (11) вытекает, что при $0 \le k \le n \le N,\ s \ge 1$,

$$v^k T^k\, g(\lambda^s) = \lambda^s \sum_{l=m}^{k} C_k^l \overline{p}^l \overline{q}^{k-l} - v^k \sum_{l=m}^{k} C_k^l p^l q^{k-l} \ (= \lambda^s - v^k,\ k \le s), \quad (12)$$

$$v^k T^k\, g(\lambda^s) = \lambda^s - v^k + v^k \sum_{l=0}^{m-1} C_k^l p^l q^{k-l} (1 - \mu^{k-s-2l}), \qquad (12a)$$

если $\overline{p} = p\lambda/u = p\lambda v,\ \overline{q} = q\mu/u = q\mu v,\ m = [\frac{k-s+1}{2}]$ при $k > s$ ($[a]$—целая часть числа $a > 0$), и $m = 0$ при $k \le s$. Причем оба представления при $k \le s$ очевидны, а при $k > s$ справедливы, поскольку

$$v^k T^k\, g(\lambda^s) = \lambda^s - v^k + v^k \sum_{l=0}^{m-1} C_k^l p^l q^{k-l} - \lambda^s \sum_{l=0}^{m-1} C_k^l \overline{p}^l \overline{q}^{k-l},$$

а $v^k p^l q^{k-l} - \lambda^s (p\lambda v)^l (q\mu v)^{k-l} = v^k p^l q^{k-l} (1 - \mu^{k-s-2l})$.

5. Некоторые свойства функций (5). Покажем сначала, что 1. если $n = s + 2m$, то в последовательности

$$T_g(\lambda^s) \equiv (v^k T^k g(\lambda^s))_{k=0}^n = \{\lambda^s - 1,\ \lambda^s - v, \cdots, \lambda^s - v^s,\ \lambda^s \sum_1^{s+1} - v^{s+1} \sum_1^{s+1},$$

$$\lambda^s \sum_1^{s+2} - v^{s+2} \sum_1^{s+2}, \cdots, \lambda^s \sum_m^{s+2m} - v^n \sum_m^{s+2m} \}$$

первые $s+4$ элемента монотонно возрастают. В самом деле, первые $s+1$ элемента $\lambda^s - v^k$ с ростом k возрастают очевидно и, кроме того,

$$1)\ \lambda^s - v^s < \lambda^s \textstyle\sum_1^{s+1} - v^{s+1} \sum_1^{s+1} = \lambda^s (1 - \overline{q}^{s+1}) - v^{s+1} (1 - q^{s+1})$$
$$\Leftrightarrow\ \lambda^s (q\mu v)^{s+1} - v^{s+1} q^{s+1} = (qv)^{s+1} (\mu - 1) < v^s - v^{s+1}.$$

$$2)\ \lambda^s (1 - \overline{q}^{s+1}) - v^{s+1} (1 - q^{s+1}) < \lambda^s (1 - \overline{q}^{s+2}) - v^{s+2} (1 - q^{s+2})$$
$$\Leftrightarrow\ v^{s+1} [v(1 - q^{s+2}) - (1 - q^{s+1})] < \lambda^s \overline{q}^{s+1} (1 - \overline{q})$$
$$\Leftrightarrow\ v(1 - q^{s+2}) - (1 - q^{s+1}) < \mu q^{s+1} (1 - q\mu v)$$
$$\Leftrightarrow\ (1 - q^{s+2}) - u(1 - q^{s+1}) < \mu q^{s+1} (u - q\mu)$$
$$\Leftrightarrow\ q^{s+1} [u(1 - q) - p)] = q^{s+1} p(u - 1) < u - 1.$$

$$3)\ \lambda^s (1 - \overline{q}^{s+2}) - v^{s+2} (1 - q^{s+2}) <$$
$$\lambda^s (1 - \overline{q}^{s+3} - (s+3) \overline{q}^{s+2} \overline{p}) - v^{s+3} (1 - q^{s+3} - (s+3) q^{s+2} p)$$

$$\Leftrightarrow\ v^{s+2}[v(1-q^{s+3}-(s+3)q^{s+2}p)-(1-q^{s+2})]<\lambda^s[1-\overline{q}-(s+3)\overline{p}]\overline{q}^{s+2}$$
$$\Leftrightarrow\ v(1-q^{s+3}-(s+3)q^{s+2}p)-(1-q^{s+2})<\mu^2q^{s+2}[1-q\mu v-(s+3)p\lambda v]$$
$$\Leftrightarrow\ (1-q^{s+3}-(s+3)q^{s+2}p)-u(1-q^{s+2})<-(s+2)\mu q^{s+2}p$$
$$\Leftrightarrow\ q^{s+2}[(s+2)p\mu-q-(s+3)p+u]=q^{s+2}[(s+2)p(\mu-1)+u-1]<u-1.$$

2. Покажем далее, что в той же последовательности $T_g(\lambda^s)$ все «хвостовые» члены можно с определенной точностью представить с помощью функции распределения $\Phi(x)$ стандартного нормального распределения. Для этого прежде всего напомним условия перехода к пределу в биномиальной модели, скажем, в случае стандартного опциона колл.

Обычно предполагается, что $\tau = T/N \to 0$, а также выполнены и другие условия, обеспечивающие сходимость (см. [4, п. 9.3, с. 148])

$$\alpha N \to \nu T, \qquad \beta N \to \sigma^2 T \tag{13}$$

модельных характеристик к рыночным; здесь $\alpha = E\rho_l$, $\beta = D\rho_l$ где ρ_l определяется из равенства $e^{\rho_l} = \lambda^{\varepsilon_l}$ и потому имеет смысл доходности в смысле ставки непрерывного начисления. А это означает, что $\alpha = E\rho_l = (\ln\lambda)(2p-1)$ есть средняя доходность, $\beta = D\rho_l = 4pq(\ln\lambda)^2$ – волатильность (периода в модели), а величины ν и σ^2 рыночные ежегодные доходность и волатильность. Остается заметить, что обеспечивают сходимость в (13) условия (и мы будем их использовать ниже)

$$\lambda = e^{\sigma\sqrt{\tau}},\quad \mu = e^{-\sigma\sqrt{\tau}},\quad p=\frac{1}{2}(1+\frac{\nu}{\sigma}\sqrt{\tau}),\quad q=\frac{1}{2}(1-\frac{\nu}{\sigma}\sqrt{\tau}). \tag{14}$$

В этих условиях имеют место соотношения: при $k = s+2m-1$

$$v^kT^k\,g(\lambda^s) \equiv \lambda^s\sum_{l=m}^{k}C_k^l\overline{p}^l\overline{q}^{k-l} - v^k\sum_{l=m}^{k}C_k^lp^lq^{k-l} \cong (\lambda^s-v^k)\Phi\left(\frac{s-1}{\sqrt{k}}\right), \tag{15a}$$

$$k=s+2m:\quad v^kT^k\,g(\lambda^s)\cong(\lambda^s-v^k)\Phi\left(\frac{s}{\sqrt{k}}\right), \tag{15b}$$

поскольку, скажем, при

$$k=s+2m:\quad \sum_{l=m}^{k}C_k^l\overline{p}^l\overline{q}^{k-l}\cong\sum_{l=m}^{k}C_k^lp^lq^{k-l}\cong\Phi\left(\frac{s}{\sqrt{k}}\right);$$

здесь $1\le s\le k\le n\le N,\quad m=[(k-s+1)/2]$.

В самом деле, известно, что при больших $k \geq s$

$$\sum_{l=0}^{m-1} C_k^l p^l q^{k-l} = P(\mu_k < m) \cong \Phi(x), \quad x = \frac{m-kp}{\sqrt{kpq}},$$

если $\mu_k = \xi_1 + \cdots + \xi_k$, а для н.о.р.с.в. ξ_l $P(\xi_l = 1) = p,\ P(\xi_l = 0) = 1-p$. С другой стороны, если $p = q = 1/2$, то при

$$k = s + 2m: \quad x = \frac{m - (s+2m)/2}{\sqrt{k}/2} = -\frac{s}{\sqrt{k}},$$

$$k = s + 2m - 1: \quad x = \frac{m - (s+2m-1)/2}{\sqrt{k}/2} = -\frac{s-1}{\sqrt{k}}.$$

Поэтому достаточно заметить, что в наших условиях $p \to 1/2,\ q \to 1/2$ и потому $\overline{p} = p\lambda/u \to 1/2$, поскольку $\lambda \to 1,\ \mu \to 1,\ u = p\lambda + q\mu \to 1$ и

$$\textstyle\sum_{l=m}^{k} C_k^l p^l q^{k-l} = 1 - \sum_{l=0}^{m-1} C_k^l p^l q^{k-l} = 1 - \Phi(x) = \Phi(-x).$$

6. Заключение. В [3] было показано, что $T^k g(\mu^s) = 0,\ 0 \leq k \leq s$,

$$T^k g(\mu^s) = \sum_{l=0}^{m-1} C_k^l p^{k-l} q^l (\lambda^{k-2l-s} - 1) > 0, \quad 0 \leq s < k. \tag{16}$$

Причем в качестве аналога (12) отсюда нетрудно вывести, что

$$v^k T^k\, g(\mu^s) = \mu^s \sum_{l=0}^{m-1} C_k^l \overline{p}^{k-l} \overline{q}^l - v^k \sum_{l=0}^{m-1} C_k^l p^{k-l} q^l, \quad 0 \leq s < k. \tag{12b}$$

В силу (9) это означает, что $Q^n g(\lambda^s) = 0$ при $s \leq -n$, а положительные значения $Q^n g(\lambda^s)$ при $s > -n$ определяются с помощью (12) и (16). Тем самым все функции $Q^n g(y)$ определены на всем множестве E при $\forall \beta$. Можно лишь уточнить, что при $s \geq n$ в силу (9) и (12)

$$Q^n g(\lambda^s) = \max_{0 \leq k \leq n} \beta^k (\lambda^s - v^k) = \beta^l (\lambda^s - v^l), \qquad 0 \leq l \leq n, \tag{17}$$

если $\rho_{sl} < \beta \leq \rho_{s(l+1)}$, где $\rho_{sl} = (\lambda^s - v^{l-1})/(\lambda^s - v^l),\ 1 \leq l \leq n,\ \rho_{s0} = 0$, $\rho_{s(n+1)} = 1$.

Библиографический список

1. *Ширяев, А.Н.* Основы стохастической финансовой математики [Текст] / А.Н. Ширяев. – М.: Фазис, 2004. – Т. 1, 2. – 1024 с.

2. *Жуленев, С.В.* Стохастическая финансовая математика. Финансовые рынки в дискретном случае [Текст] / С.В. Жуленев. – М.: МГУ, 2004. – 104 с.
3. *Жуленев, С.В.* О некоторых свойствах американских опционов [Текст] / С.В. Жуленев // Труды VI Колмогоровских чтений. – Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2008. – С. 204-209.
4. *Лю, Ю.Д.* Методы и алгоритмы финансовой математики [Текст] / Ю.Д. Лю. – М.: Бином, Лаборатория знаний, 2007. – 752 с.

О линиях 2-го порядка, площадях и объемах

О.С. Ивашев-Мусатов

В заметке обсуждается положение дел в курсе “Высшая математика”, в котором предусмотрены эти разделы, но проблема заключается в том, что на него отведено мало времени. Нам хотелось бы относительно уравнения

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \qquad (1)$$

объяснить аргументировано – какие линии задаются этим уравнением. Здесь предлагается начать (в отличие от традиции) со случая B = 0 (к которому обычно все и сводят). Тогда разбираются возможные при условии B = 0 случаи и их варианты:

1) A $\neq$0 и C $\neq$0, уравнение (1) можно переписать в виде

$$\mathrm{A}(\mathrm{x} + D/A)^2 + \mathrm{C}(\mathrm{y} + \mathrm{E}/\mathrm{C})^2 = D^2/A + \mathrm{E}^2/\mathrm{C} - F = \mathrm{P},$$

и это эллипс при C/A $>$ 0 и P/A $>$ 0, ничего не задает при C/A $>$ 0 и P/A $<$ 0, задается точка при C/A $>$ 0 и P = 0, гипербола при C/A $<$ 0 и P $\neq$ 0, пара прямых при C/A $<$ 0 и P = 0.

2) A $\neq$0 и C = 0 (случай A = 0 и C $\neq$0 аналогичен) – это парабола при E $\neq$ 0, пара прямых при E = 0 и P/A $\geq$0, и ничего не задает при E = 0 и P/A $<$ 0.

Все это не выходит за пределы программы математики девяти классов базовой средней школы.

Примечание. Если время позволяет, то при B $\neq$0, как обычно, переходим к новой системе координат: начало O – общее, новая ось абсцисс Ou с осью Ox образует угол α. Каждая точка M(x, y) в новой системе координат имеет еще и координаты (u, v), положим ρ=OM и φ – угол между OM и Ou так что $x = \rho\cos(\varphi + \alpha)$=$\rho\cos\varphi\cos\alpha$–$\rho\sin\varphi\sin\alpha$=u$\cos\alpha$–v$\sin\alpha$, y=$\rho\sin(\varphi$+$\alpha)$=$\rho\sin\varphi\cos\alpha$+$\rho\cos\varphi\sin\alpha$=u$\sin\alpha$+v$\cos\alpha$. Подставив эти выражения для x и y в уравнение (1) после преобразований получаем коэффициент при произведении uv – число $2B_1 = 2B\cos 2\alpha - (\text{A} - C)\sin 2\alpha$. Отсюда получаем угол α, при котором в уравнении (1) имеем $B_1{=}0$. Этот случай уже разобран.

Можно еще найти и коэффициенты при u^2 и v^2 – числа

$$A_1 = \frac{A+C}{2} + \frac{A-C}{2}\cos 2\alpha + B\sin 2\alpha,$$

$$C_1 = \frac{A+C}{2} - \frac{A-C}{2}\cos 2\alpha + B\sin 2\alpha,$$

Отсюда следует: $A_1 + C_1 = A + C$ и $A_1C_1 - B_1^2 = AC - B^2$, а при $B_1{=}0$ числа A_1 и C_1 no теореме Виета есть корни уравнения $\lambda^2 - (A+C)\lambda + AC - B^2 = 0$.

Стоит ли тратить время в курсе “Высшая математика” на эти понятия? Ведь за прошлый век понятие меры множества научились так просто излагать (в случае конечной аддитивности), что это не сложнее теории, связанной с понятиями площади и объема и соответствующими теоремами. Дальнейший текст, надеюсь, сказанное подтверждает. Для простоты и наглядности удобнее начать с введения **меры для множеств на прямой.** Все множества лежат на фиксированном отрезке Ω, p – промежутки, и $|p|$ – их длины.

Для каждого множества A из Ω определим внешнюю меру множества A – число

$$\mu^*A = \inf\{\Sigma|p_i|;\ A \subset \cup p_i\}. \tag{1}$$

В (1) берутся любые счетные объединения промежутков. Для каждого множества $\mu^*A \geq 0$.

Пример. Множество A – конечно или счетно, тогда $\mu^*A = 0$. Действительно, $A = \{a_i\}$, для любого числа $\varepsilon > 0$ положим $p_i = (a_i - 4^{-i}, a_i + 4^{-i})$, ясно, что $A \subset \cup p_i$ и потому $\mu^*A < \Sigma|p_i| < \varepsilon$. Этим равенство $\mu^*A = 0$ доказано, т.к. ε – любое положительное число.

Теорема 1 (монотонность меры). $A \subset B \Rightarrow \mu^*A \leq \mu^*B$.

Для $\forall \cup p_i \supset B \Rightarrow$ это $\cup p_i \supset A \Rightarrow \mu^*A \leq \inf\{\Sigma|p_i|;\ \cup p_i \supset B\} = \mu^*B$.

Теорема 2 (полуаддитивность меры). $\mu^*(\cup A_i) \leq \Sigma\mu^*A_i$.

Если $\Sigma\mu^*A_i = \infty$, то неравенство очевидно. Пусть $\Sigma\mu^*A_i < \infty$. При любом фиксированном i существует $\cup p_{iv} \supset A_i$ и такое, что $\Sigma|p_{iv}| < \mu^*A_i + 2^{-i}\varepsilon \Rightarrow$ (при всех i) $\cup A_i \subset \cup p_{iv} \Rightarrow \mu^*(\cup A_i) < \Sigma|p_{iv}| < \Sigma\mu^*A_i + \eta$ и теорема доказана, т.к. число $\eta > 0$ и любое.

Упражнение 1. Если $\mu^* A = 0$, то $\mu^*(A \cup B) = \mu^* B$, и $\mu^*(B \backslash A) = \mu^* B$.

Симметрическая разность множеств A и B обозначается $A\Delta B$ и определяется равенством

$$A\Delta B = (A\backslash B) \cup (B\backslash A) \Leftrightarrow A\Delta B = (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A}), \qquad (2)$$

где $\bar{A} = \Omega\backslash A$ и $B = \Omega\backslash B$.

Теорема 3 (неравенство “треугольника”). *Для любых множеств* A, B *и* C *из* Ω:

$$(A\Delta B) \subset (A\Delta C) \cup (C\Delta B) \Rightarrow \mu^*(A\Delta B) \leq \mu^*(A\Delta C) + \mu^*(C\Delta B). \qquad (3)$$

По (2) $(A\Delta C) \cup (C\Delta B) = (A \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap C) \cup (\bar{C} \cap B)$, группируем: $(A \cap \bar{C}) \cup (C \cap \bar{B}) = ((A \cap \bar{C}) \cup C) \cap ((A \cap \bar{C}) \cup \bar{B}) \supset \bar{B} \cap (A \cup C) \cap (\bar{C} \cup C) \supset (B \cap \bar{A})$. Аналогично получаем: $(A \cap \bar{C}) \cup (B \cap \bar{C}) \supset B \cap \bar{A}$ и (3) доказано.

Множество A называют **измеримым** , если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует объединение *конечного числа* попарно не пересекающихся *интервалов* – множество P_ε, такое, что $\mu^*(A\Delta P_\varepsilon) < \varepsilon$. **Мерой измеримого множества** A называют **число** $\mu A = \mu^* A$. По определению $\mu\emptyset = 0$.

Теорема 4. *Если* $\mu^* A = 0$, *то* A *измеримо и* $\mu A = 0$.

Для любого числа $\varepsilon > 0$ $\exists \cup p_i \supset A$ такое, что $\Sigma|p_i| < \varepsilon$. Положим $P_\varepsilon = p_1$ (без его концов), тогда $A\Delta P_\varepsilon \subset (A\backslash p_1) \cup (p_1\backslash A) \subset \cup p_i \Rightarrow \mu^*(A\Delta P_\varepsilon) \leq \Sigma|p_i| < \varepsilon \Rightarrow A$ измеримо и $\mu A = 0$.

Пример. Множество A конечно или счетно $\Rightarrow \mu A = 0$.

Для дальнейшего отметим: $\mu A = 0 \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\ \exists \cup p_i \supset A$ такое, что $\Sigma|p_i| < \varepsilon$.

Объединение *конечного числа* попарно не пересекающихся *интервалов* и *множества меры нуль* называют **элементарным множеством**. При **определении измеримости** множества считаем P_ε **элементарным** (в силу упражнения 1).

Упражнение 2. Если A и B – элементарные множества, то $A \cup B$, $A \cap B$, $A\backslash B$ и отрезок – тоже элементарные множества.

Теорема 5. *Элементарное множество измеримо и:*

$$A = \cup p_i,\ p_i\ -\ \text{интервал},\ p_i \cap p_j = \emptyset \text{ при } i \neq j \Rightarrow \mu A = \Sigma|p_i|,\ \mu p = |p|.$$

Для любого $\varepsilon > 0$ положим $P_\varepsilon = A$, тогда $A\Delta P_\varepsilon = \emptyset$, $\mu^*(A\Delta P_\varepsilon) = 0 < \varepsilon$ и потому A измеримо. Для любого $\cup q_v \supset A$, $q_v =< a_v, b_v >$ и любого $\varepsilon > 0$ интервалы $J_v = (a_v - \varepsilon 2^{-v-1}, b_v + \varepsilon 2^{-v-1}) \supset q_v$ при любом v и $|q_v| < |J_v| - \varepsilon 2^{-v}$. Обозначим P_i отрезок, который получается из p_i после присоединения к нему его концов. Множество J_v – покрытие A и, следовательно, – покрытие для каждого P_i. По лемме Гейне-Бореля для каждого P_i из этих интервалов можно выделить конечное покрытие и потому $\cup P_i \subset \underset{\omega}{J_v}$, где ω – конечный набор номеров. Поэтому $\Sigma|P_i| < \sum\limits_{\omega} |J_v| \leq \sum |J_v| < \Sigma|q_v| + \varepsilon$, а т.к. ε – любое, то $\Sigma|P_i| \leq \Sigma|q_v|$ и потому $\Sigma|P_i| \leq \mu A$. Но $\cup p_i \supset A$ и потому $\Sigma|p_i| \geq \mu A$. Полученные неравенства приводят к равенству $\mu A = \Sigma|p_i|$.

Следствие 1. *A и B – элементарны и $A \cap B = \emptyset$, тогда $\mu(A \cup B) = \mu A + \mu B$.*

Следствие 2. *A и B – элементарны, тогда $\mu(A \cup B) = \mu A + \mu B - \mu A \cap B$.*

Теорема 6. *Если множество A измеримо, то измеримо и* $\bar{\mathrm{A}}$.

Для $\forall \varepsilon > 0$ существует элементарное множество P_ε такое, что $\mu^*(A\Delta P_\varepsilon) < \varepsilon$. Множество $Q_\varepsilon = \Omega \backslash P_\varepsilon$ – элементарное и $Q_\varepsilon \Delta A = A\Delta P_\varepsilon \Rightarrow \mu^*(Q_\varepsilon \Delta \bar{A}) = \mu^*(A\Delta P_\varepsilon) < \varepsilon$, ч.т.д.

Теорема 7. *Множества A_i измеримы – измеримы $\bigcup\limits_{n=1}^{n} A_i$ и $\bigcap\limits_{n=1}^{n} A_i$ $\forall\, n$.*

Доказательство начнем со случая $n = 2$. Для любого $\varepsilon > 0$ существуют элементарные множества P_i, $i = 1, 2$, такие, что $\mu^*(A_i \Delta P_i) < \varepsilon/2$. Т.к. $(A_1 \cup A_2)\Delta(P_1 \cup P_2) \subset (A_1 \Delta P_1) \cup (A_2 \Delta P_2)$, то $\mu^*((A_1 \cup A_2)\Delta(P_1 \cup P_2) \leq \mu^*(A_1 \Delta P_1) + \mu^*(A_2 \Delta P_2) < \varepsilon$ и измеримость $A_1 \cup A_2$ доказана, т.к. $P_1 \cup P_2$ – элементарное множество. Измеримость объединения при любом n отсюда следует по индукции. А т.к. любое $\bar{A}_i$ измеримо, то $\bigcap\limits_{n=1}^{n} A_i = \overline{\overline{\cap A_i}} = \overline{\cup \bar{A}_i}$ измеримо как дополнение к объединению измеримых множеств.

Следствие 3. *Если множества A и B измеримы, то измеримы $A \backslash B$ и $A\Delta B$.*

Теорема 8 (конечная аддитивность меры). *Множества A_i измеримы и $A_i \cap A_j = \emptyset$ при любых $i \neq j$. Тогда для любого объединения n этих множеств существует*

$$\mu(\cap A_i) = \Sigma \mu A_i. \tag{4}$$

Для доказательства потребуется формула: для любых множеств A и B

$$|\mu^*A - \mu^*B| \leq \mu^*(A\Delta B). \tag{5}$$

Действительно, из $A \subset B \cup (A\Delta B)$ следует: $\mu^*A \leq \mu^*B + \mu^*(A\Delta B)$, откуда $\mu^*A - \mu^*B \leq \mu^*(A\Delta B)$. И аналогично $\mu^*B - \mu^*A \leq \mu^*(A\Delta B)$. Этим (5) доказано.

Доказательство теоремы начинаем со случая $n = 2$. Оценим

$$r = \mu(A_1 \cup A_2) - \mu A_1 - \mu A_2. \tag{6}$$

Для любого $\varepsilon > 0$ существуют элементарные множества P_1 и P_2 такие, что $\mu(A_i\Delta P_i) < \varepsilon/6$. Но $0 = \mu(P_1 \cup P_2) - \mu P_1 - \mu P_2 + \mu(P_1 \cap P_2)$ (следствие 2) и вместе с (6) получаем:

$$|r| \leq |\mu(A_1 \cup A_2) - \mu(P_1 \cup P_2)| + |\mu A_1 - \mu P_1| + |\mu A_2 - \mu P_2| + \mu(P_1 \cap P_2), \tag{7}$$

где по выбору P_i и неравенству (5)

$$|\mu A_i - \mu P_i| \leq \mu(A_i\Delta P_i) < \varepsilon/6,\ i = 1, 2. \tag{8}$$

А т.к.(см.(3)) $(A_1 \cup A_2)\Delta(P_1 \cup P_2) \subset (A_1\Delta P_1) \cup (A_2\Delta P_2) \Rightarrow \mu((A_1 \cup A_2)\Delta(P_1 \cup P_2)) \leq \mu(A_1\Delta P_1) + \mu(A_2\Delta P_2) < \varepsilon/3$, то оценивается первое слагаемое в (7):

$$|\mu(A_1 \cup A_2) - \mu(P_1 \cup P_2)| \leq \mu((A_1 \cup A_2)\Delta(P_1 \cup P_2)) < \varepsilon/3. \tag{9}$$

Поскольку $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, то $P_1 \cap P_2 \subset (A_1\Delta P_1) \cup (A_2\Delta P_2) \Rightarrow \mu(P_1 \cap P_2) \leq \mu(A_1\Delta P_1) + \mu(A_2\Delta P_2) < \varepsilon/3$. Подставляя эту оценку, (9) и (8) в (7), получаем $|r| < \varepsilon$, так что $\varepsilon > 0$ – любое. Этим теорема доказана при $n = 2$. Отсюда по индукции следует все доказательство.

Построение **меры множеств на плоскости** основано на прямоугольниках, стороны которых параллельны осям координат. Это промежутки p на плоскости с площадью $|p|$. Стороны p имеют двумерную меру 0, множество внутренних точек p – интервал в $\mathbf{R}^2$.

В пространстве $\mathbf{R}^3$ промежутки p – параллелепипеды с ребрами, параллельными осям координат, $|p|$ – объем p. Грани и ребра p имеют меру μ_3, равную 0, множество внутренних точек p – интервал в $\mathbf{R}^3$. **В пространстве $\mathbf{R}^n$** интервал p – прямое произведение n интервалов $(a_k, b_k) \subset Ox_k$, $|p| = \prod(b_k - a_k)$. Все, сказанное про меру на прямой, сохраняется на плоскости и в пространстве.

Библиографический список

1. *Вулих, Б.З.* Краткий курс теории функций вещественного переменного [Текст] / Б.З. Вулих. – М., 1983.

Сходимость сеточно-интерполяционных аппроксимаций решения квазилинейной параболической краевой задачи на отрезке

И.А. Чернов

В статье рассматривается квазилинейная функциональная параболическая краевая задача III рода на отрезке: коэффициенты уравнения и правые части граничных условий нелинейно зависят от времени, точки и предыстории решения. Задача обобщает ряд моделей взаимодействия водорода с металлами. Для простейшей разностной схемы доказана при имеющих физический смысл ограничениях на входные данные задачи равномерная сходимость интерполяционных сеточных аппроксимаций к непрерывному обобщенному решению краевой задачи из соболевского пространства. Тем конструктивно доказана теорема существования обобщенного решения, а предложенная сходящаяся разностная схема может применяться для численных расчетов.

Постановка задачи. Рассматриваем следующую краевую задачу для параболического уравнения в частных производных в прямоугольнике $\Pi = [0,T] \times [0,L]$:

$$\partial_t c = A\partial_x^2 c + B\partial_x c - \hat{B}\partial_x c - Ec + F, \tag{1}$$

$$\partial_x c(t,x) = \pm G\big(t,x,c(t,x),c(\cdot,\cdot)\big), \quad x = 0, L, \quad t \in [0,T], \tag{2}$$

$$c(0,x) = \varphi(x) \in C^2([0,L]), \quad 0 \le \varphi \le 1, \quad x \in [0,L]. \tag{3}$$

Коэффициент $A = A\big(t,x,c(\cdot,\cdot)\big)$ является непрерывным функционалом на метрическом пространстве $txC = \Pi \times C(\Pi)$ (здесь и далее C – пространство непрерывных функций), обладающим следующими свойствами: $0 < A^- \le A \le A^+$, $A\big(\zeta,x,c(\cdot,\cdot)\big) = A\big(\zeta,x,u(\cdot,\cdot)\big)$ для любых непрерывных $c(t,x)$, $u(t,x)$ таких, что $c(t,x) = u(t,x)$ при $t \le \zeta$. Кроме того, производные по t и x существуют на txC и являются непрерывными функционалами, принимающим ограниченные значения. Коэффициенты B, $\hat{B}$, E и F также являются непрерывными функционалами на txC и обладают теми же свойствами, что и A, но со следующими отличиями: оценка снизу может равняться нулю; производная по t является функционалом, определенным и непрерывным на $txC^{1,0} = \Pi \times C^{1,0}(\Pi)$ (пространство $C^{1,0}$ состоит из непрерывных функций с непрерывной частной производной по t), причем $|\partial_t B(t,x,c)| \le K_1 + K_2\|\partial_t c\|_C$ в txC при некоторых K_i, не зависящих от (t,x) и c (аналогично и другие коэффициенты); $E^- > 0$ (либо $E \equiv 0$), $0 \le F \le E$, $\partial_x B \le 0$, а $\partial_x \hat{B} \le 0$ и не зависит от x. Без ограничения общности можно считать, что сумма частных производных по t от коэффициентов отрицательна при условии, что $\|\partial_t c\| \leq 1$ (этого всегда можно достичь заменой переменных t и x, сохраняющей остальные свойства коэффициентов). Граничные условия (2) – нелинейные III рода; в правой части знак «плюс» при $x = 0$, «минус» – при $x = L$, правые части G являются при $x = 0, L$ непрерывными вместе с $\partial_t G$ и $\partial_c G(t, x, u, c)$ функционалами на пространстве $[0, T] \times R \times C(\Pi)$, причем значения G ограничены, значения функции $c(t, x)$ при $t > \zeta$ не существенны, $G\big(t, x, c(t, x), c(\cdot, \cdot)\big) \geq 0$ при $c(t, x) \geq 1$, $G\big(t, x, c(t, x), c(\cdot, \cdot)\big) < 0$ при $c(t, x) \leq 0$ при $x = 0, L$, $\partial_c G(t, x, u, c) > 0$.

К таким задачам сводятся многие модели взаимодействия водорода с металлами, включая модели формирования или распада гидридов [1, 2, 3]. При этом $c(t, x)$ – концентрация водорода в образце. Ограничения на коэффициенты оправданы физическим смыслом. Примеры функционалов указанного вида доставляют подходящие ограниченные гладкие функции с ограниченными частными производными от t, x и $c(t, \xi)$ при фиксированном ξ или от интеграла от $c(t, x)$ (или от гладкой функции от c) по $x \in [0, L]$, возможна зависимость от значения c в определенной точке, запаздывание (зависимость от $c(t - \eta, \xi)$) и так далее. Функционалы типа коэффициента A должны допускать дифференцирование по t, что более ограничительно: примерами являются функции от t, x и вектор-функции $\eta(t)$, где $\dot{\eta} = R(t, c(\cdot, \cdot))$ и компоненты R – функционалы типа коэффициента B. Ограничимся двумя содержательными примерами компонент η. Это температура образца, меняющаяся вследствие тепловыделения поверхностных процессов в зависимости от теплоемкости образца, зависящей от количества содержащегося в нем водорода, в связи с чем в уравнение для температуры входит интеграл от $c(t, x)$ по $[0, L]$. Также при выпрямлении подвижного фронта в задачах с фазовым переходом положение свободной границы – компонента η, причем в уравнении возникает слагаемое с коэффициентом $\hat{B}$, зависящим от $c(t, 0)$.

О структуре статьи. Построим разностную схему и докажем равномерную ограниченность сеточного решения и его сеточных производных, применив аналог принципа максимума. Это влечет предкомпактность в пространстве непрерывных функций и слабую предкомпактность в соболевском пространстве непрерывных аппроксимаций – интерполяций сеточного решения. Предел удовлетворяет некоторому интегральному тождеству, то есть является обобщенным решением задачи. Метод заимствован из [4, с. 352]. Констатируем существование обобщенного решения и сходимость к нему разностной схемы.

Разностные аппроксимации. Введем в П равномерную сетку $\bar{D}_N$ с шагами h и τ, $0 \le n \le N$, $0 \le i \le I$. Узлы этой сетки (n,i) – это точки (t_n, x_i). Совокупность узлов при одном n назовем слоем и обозначим $\vec{c}_n$. Введем обозначения $c(t_n, x_i) = c_n^i$ и аналогичные. Пусть c_m^i задано в $\bar{D}_{n-1}$; построим в $[0, t_{n-1}] \times [0, L]$ непрерывную функцию $\tilde{c}_{n-1}(t,x)$ линейной интерполяцией точек c_m^i. Коэффициенты уравнения (1) на слое n аппроксимируем явно: $B_n^i = B\big(t_{n-1}, x_i, \tilde{c}_{n-1}(\cdot,\cdot)\big)$ и так же для остальных. Правые части (2) – неявным образом: $G_n^i = G(t_n, x_i, c_n^i, \tilde{c}_{n-1}(\cdot,\cdot))$ при $i = 0, I$.

Исключая граничные узлы, получаем множество D_N узлов (n,i) при $1 \le n \le N$, $1 \le i \le I-1$. Границу обозначим $\partial \bar{D}_N = \bar{D}_N \setminus D_N$. Введем также множество $\tilde{D}_N$, полученное из $\bar{D}_N$ удалением узлов $(0,0)$ и $(0,I)$. Введем обозначения

$$\partial_\tau c_n^i = \frac{c_n^i - c_{n-1}^i}{\tau}, \quad \partial_h c_n^i = \frac{c_n^{i+1} - c_n^i}{h}, \quad \partial_h^2 c_n^i = \partial_h(\partial_h c_n^{i-1})$$

Обозначим через $\bar{D}'_N$ и $\bar{D}^\circ_N$ подмножества $\bar{D}_N$, на которых определены сеточные производные $\partial_h c_n^i$ и $\partial_\tau c_n^i$. Введем также D'_N и D°_N аналогично D_N. Заменяя производные сеточными аналогами, получим неявную схему

$$\partial_\tau c_n^i = A_n^i \partial_h^2 c_n^i + B_n^i \partial_h c_n^i - \hat{B}_n^i \partial_h c_n^{i-1} - E_n^i c_n^i + F_n^i = \ell_n^i \vec{c}_n, \qquad (4)$$

$$\partial_h c_n^{I-1} = -G_n^I, \quad \partial_h c_n^0 = G_n^0, \quad c_0^i = \varphi(x_i). \qquad (5)$$

Погрешность аппроксимации этой разностной схемы $O(h+\tau)$.

Принцип максимума для сеточной задачи. Докажем аналог принципа максимума для параболических задач и ряд следствий. Экстремумы далее могут быть нестрогими.

Утверждение 1. *Пусть сеточная функция c_n^i определена в $\bar{D}_N$, удовлетворяет* (4) *в D_N и достигает в узле (n^*, i^*) максимума $C^+ > F_{n^*}^{i^*}/E_{n^*}^{i^*}$* (0 *при* $E = 0$) *или минимума $C^- < 0$. Тогда $(n^*, i^*) \notin D_N$ либо $c_n^i = \mathrm{const}$ в $\tilde{D}_{n^*}$.*

Доказательство. Пусть максимальное значение $C^+ \ge F_{n^*}^{i^*}/E_{n^*}^{i^*}$ достигнуто в узле $(n^*, i^*) \in D_N$. Применим (4). Левая часть неотрицательна, первые три слагаемые слагаемые правой части – неположительны, сумма двух последних – также. Поэтому $\partial_\tau c_{n^*}^{i^*} = \partial_{hh} c_{n^*}^{i^*} = 0$ в частности. Так как в (n^*, i^*) достигается максимальное значение, $c_{n^*}^{i^*\pm 1} = c_{n^*}^{i^*}$ и $c_{n^*-1}^{i^*} = c_{n^*}^{i^*}$. Продолжаем рассуждение для узлов $(n^*, i^* \pm 1)$, (n^*-1, i^*)

и далее, пока не получим, что $c^i_{n^*} = c^{i^*}_{n^*}$ в $\tilde{D}_{n^*}$. Для неположительного минимума доказательство такое же.

Утверждение 2. *Пусть сеточная функция c^i_n определена в $\bar{D}_N$ и удовлетворяет* (4)–(5)*. Тогда* $0 \le c^i_n \le 1$ *в* $\bar{D}_N$.

Доказательство. Пусть c^i_n достигает максимума $C > 1$ в $\bar{D}_N$; утверждение 1 гарантирует, что оно достигается в граничном узле; проверим их. Пусть в узле вида $(n^*, 0)$ достигнут максимум $c^0_{n^*} = C \ge 1$. Из (5) с учетом условий на G получаем, что $\partial_h c^0_{n^*} \ge 0$ и потому $c^1_{n^*} \ge c^0_{n^*}$, что противоречит наличию максимума. Аналогично рассуждение для узлов вида (n^*, I). Начальное распределение $\varphi(x) < 1$, поэтому $c^{i^*}_0 < 1$. Полученное противоречие показывает, что $c^i_n < 1$ в $\bar{D}_N$. Для нижней оценки рассуждения аналогичны.

Полученная оценка имеет физический смысл. Отметим, что параметры задачи можно переопределять для значений $c \notin [0, 1]$.

Утверждение 3. *Пусть c^i_n удовлетворяет* (4)–(5) *в $\bar{D}_N$ при достаточно малых h и τ. Тогда $|\partial_h c^i_n| < Z$ в $\bar{D}'_N$, причем константа Z не зависит от h и τ.*

Доказательство. Произведем сеточное дифференцирование уравнения (4) по h с учетом $\partial_h c^{i+1}_n = \partial_h c^i_n + \partial_h \partial_h c^i_n h$:

$$\partial_\tau \partial_h c^i_n + \partial_x \hat{B} \partial_h c^i_n = A^i_n \partial^2_h \partial_h c^i_n + \big(\partial_x A + B^i_n + \partial_x B h\big) \partial_h \partial_h c^i_n - \\ - \hat{B}^i_n \partial_h \partial_h c^{i-1}_n + \big(\partial_x B - E^i_n\big) \partial_h c^i_n - \partial_x E c^i_n + \partial_x F. \quad (6)$$

Производные коэффициентов – в точках вида $x_i + \varepsilon h$. Введем сеточную функцию времени M_n рекуррентно: $M_n = M_{n-1}/(1 + \tau \partial_x \hat{B}_n)$, $M_0 = 1$. Здесь используем независимость $\partial_x \hat{B}$ от x. Функция M_n – сеточный аналог экспоненты: $\partial_\tau M_n = -\partial_x \hat{B} M_n$. Рассмотрим левую часть (6), обозначая $U^i_n = \partial_h c^i_n / M_n$:

$$\partial_\tau \left(\frac{M_n}{M_n} \partial_h c^i_n \right) + \partial_x \hat{B} \partial_h c^i_n = M_n \partial_\tau U^i_n + U^i_n \partial_\tau M_n - \tau \partial_\tau U^i_n \partial_\tau M_n + \partial_x \hat{B} \partial_h c^i_n = \\ = M_{n-1} \partial_\tau U^i_n + U^i_n \partial_\tau M_n + \partial_x \hat{B} \partial_h c^i_n = M_{n-1} \partial_\tau U^i_n.$$

Поскольку $\partial_x \hat{B}$ отрицательна и ограничена, то при достаточно малом шаге τ (обеспечивающем положительность знаменателя) функция $M_n > 1$. Запишем (6) в виде

$$\frac{M_{n-1}}{M_n}\partial_\tau U_n^i = A_n^i\partial_h^2 U_n^i - \hat{B}_n^i\partial_h U_n^{i-1} + \big(\partial_x B - E_n^i\big)U_n^i - \\ - \partial_x E\frac{c_n^i}{M_n} + \frac{\partial_x F}{M_n} + \big(\partial_x A + B_n^i + \partial_x Bh\big)\partial_h U_n^i.$$

Пусть U_n^i – максимальное положительное значение. Тогда левая часть неотрицательна; рассмотрим правую. Первые три слагаемые неположительны. По условиям $\partial_x B \le 0$, либо $E > 0$ повсюду, либо $E \equiv 0$, $0 \le F \le E$ и $\partial_x E$, $\partial_x F$ ограничены; $c_n^i \in [0,1]$, $M_n > 1$. Поэтому при достаточно больших U_n^i сумма первых пяти слагаемых отрицательна. Если величина $P = \partial_x A + B_n^i + \partial_x Bh \ge 0$, то последнее слагаемое также неположительно. Противоречие показывает, что положительный максимум функции U_n^i, если и достигается в D_N, то ограничен независимо от h и τ, а только от функционалов E и F. Рассмотрим случай $P < 0$. Заметим, что $\partial_h U_n^{i-1} \ge 0$ и $h\partial_h^2 U_n^i = \partial_h U_n^i - \partial_h U_n^{i-1} \le \partial_h U_n^i$. Поэтому $P\partial_h U_n^i \le Ph\partial_h^2 U_n^i$ и

$$\frac{M_{n-1}}{M_n}\partial_\tau U_n^i \le \big(A_n^i + Ph\big)\partial_h^2 U_n^i - \partial_x\hat{B}\partial_h c_n^i + \big(\partial_x B - E_n^i\big)U_n^i - \partial_x E\frac{c_n^i}{M_n} + \frac{\partial_x F}{M_n}.$$

Поскольку $A \ge \bar{A} > 0$, а P ограничено, то при достаточно малом h скобка при $\partial_h^2 U_n^i$ положительна; противоречие получается аналогично.

Мы доказали, что максимальное положительное значение функции U_n^i в D_N ограничено независимо от шагов, если они достаточно малы. Отсюда следует и ограниченность положительного максимума функции $\partial_h c_n^i = M_n U_n^i$. В самом деле, при $\tau \le \tau_0$

$$M_n \le (1 - \mu\tau)^{-\frac{T}{\tau}} \le (1 - \mu\tau_0)^{-\frac{T}{\tau_0}},$$

где $\mu = \max|\partial_x\hat{B}|$. Здесь использована монотонность функции $(1 - x)^{-1/x}$ при $x \in (0,1)$.

Теперь проверим ограниченность $\partial_h c_n^i$ в граничных узлах: в силу (5) $\partial_h c_0^i = \varphi'(x_i + \theta)$, $0 \le \theta \le h$, ограничена, а ограниченность G влечет ограниченность производных $\partial_h c_n^{I-1}$ и $\partial_h c_n^0$. Для отрицательного минимума доказательство дословно такое же.

Утверждение 4. *Пусть c_n^i удовлетворяет (4)–(5) в $\bar{D}_N$ при достаточно малых h и τ. Тогда $|\partial_\tau c_n^i| < W$ в $\bar{D}_N^\circ$, причем константа W не зависит от h и τ.*

Доказательство. Пусть максимальное по модулю значение достигается во внутреннем узле (n, i); предположим, что это максимум (для минимума рассуждение такое же) и продифференцируем (4) сеточно по τ:

$$\partial_\tau\partial_\tau c_n^i = A_n^i\partial_h^2\partial_\tau c_n^i + B_n^i\partial_h\partial_\tau c_n^i - \hat{B}_n^i\partial_h\partial_\tau c_n^{i-1} - E_n^i\partial_\tau c_n^i + \\ + \partial_t A_n^i\partial_h^2 c_n^i + \partial_t B_n^i\partial_h c_n^i - \partial_t\hat{B}_n^i\partial_h c_n^{i-1} - \partial_t E c_n^i + \partial_t F \le \partial_t A_n^i\partial_h^2 c_n^i + \\ + \partial_t B_n^i\partial_h c_n^i - \partial_t\hat{B}_n^i\partial_h c_n^{i-1} - \partial_t E c_n^i + \partial_t F. \quad (7)$$

Без ограничения общности считаем $Z \le 1$; тогда, выражая $\partial_h^2 c_n^i$ из (4) и учитывая отрицательность суммы производных, получаем, что при достаточно больших $\partial_\tau c_n^i$ правая часть отрицательна, тогда как левая – положительна. Противоречие показывает, что максимальное значение функции $\partial_\tau c_n^i$ в D_N° ограничено независимо от шагов сетки.

Осталось проверить граничные узлы. Для $n = 1$ рассмотрим (4) с учетом $c_1^i = c_0^i + \tau\partial_\tau c_1^i$:

$$\partial_\tau c_1^i = \ell_1^i c_0^i + \tau\ell_1^i\partial_\tau c_1^i$$

Если $\partial_\tau c_1^i > 0$ – максимальное значение, то $\partial_\tau c_1^i \le \ell_1^i c_0^i$. Однако правая часть ограничена независмо от шагов (это следует из ограниченности коэффициентов уравнения (1) и второй производной начального распределения $\varphi(x)$). Для $i = I$ или $i = 0$ продифференцируем на сетке соответствующее условие (5):

$$\partial_h\partial_\tau c_n^0 = \partial_t G + \partial_c G(t, 0, u, c)\partial_\tau c_n^0.$$

С учетом ограниченности частных производных и положительности $\partial_c G$ получаем, что $\partial_h\partial_\tau c_n^0 > 0$ при достаточно большом положительном максимальном значении $\partial_\tau c_n^0$, что противоречит максимальности. Второе граничное условие рассматривается аналогично.

В итоге сеточная производная $\partial_\tau c_n^i$ ограничена в $\bar{D}_N^\circ$ независимо от шагов сетки.

Решение системы. Построим алгоритм решения системы (4)-(5). Система содержит много линейных уравнений (4) с трехдиагональной матрицей. Исключим часть неизвестных методом прогонки. Пусть c_{n-1}^i уже известны; найдем c_n^i. Обозначим $X = c_n^0$, $Y = c_n^I$ и выразим c_n^i, $i = 1,\ldots, I-1$ через c_n^{i+1} и X линейно:

$$c_n^i = \alpha_n^i c_n^{i+1} + \beta_n^i + \gamma_n^i X. \quad (8)$$

Отсюда следует $\alpha_n^0 = \beta_n^0 = 0$, $\gamma_n^0 = 1$. Подставим (8) в (4) вместо c_n^{i-1} при $i = 2, \ldots, I-1$ и получим ($d_n^i = 2A_n^i + (B_n^i + \hat{B}_n^i)h + E_n^i h^2 + S - (A_n^i + \hat{B}_n^i h)\alpha_n^{i-1}$, $S = h^2/\tau$):

$$\alpha_n^i = \frac{A_n^i + B_n^i h}{d_n^i}, \quad \beta_n^i = \frac{Sc_{n-1}^i + (A_n^i + \hat{B}_n^i h)\beta_n^{i-1} + F_n^i h^2}{d_n^i},$$

$$\gamma_n^i = \frac{A_n^i + \hat{B}_n^i h}{d_n^i}\gamma_n^{i-1}. \tag{9}$$

Теперь выразим c_n^i, $i = 1,\ldots, I-1$ через c_n^{i-1} сходным образом:

$$c_n^i = \tilde{\alpha}_n^i c_n^{i-1} + \tilde{\beta}_n^i + \tilde{\gamma}_n^i Y, \quad \tilde{\alpha}_n^I = \tilde{\beta}_n^I = 0, \quad \tilde{\gamma}_n^I = 1. \tag{10}$$

Аналогичные выкладки приводят к (при $i = 1, 2, \ldots, I-1$)

$$\tilde{d}_n^i = 2A_n^i + (B_n^i + \hat{B}_n^i)h + E_n^i h^2 + S - (A_n^i + B_n^i h)\tilde{\alpha}_n^{i+1},$$

$$\tilde{\alpha}_n^i = \frac{A_n^i + \hat{B}_n^i h}{\tilde{d}_n^i}, \quad \tilde{\beta}_n^i = \frac{Sc_{n-1}^i + (A_n^i + B_n^i h)\tilde{\beta}_n^{i+1} + F_n^i h^2}{\tilde{d}_n^i},$$

$$\tilde{\gamma}_n^i = \frac{A_n^i + B_n^i h}{\tilde{d}_n^i}\tilde{\gamma}_n^{i+1}.$$

Утверждение 5. *Пусть h достаточно мало и $\tau = o(h)$. Коэффициенты (8) и (10) при $1 \le i \le I-1$ положительны и меньше единицы, причем γ_n^i и $\tilde{\gamma}_n^i$ убывают по i.*

Доказательство проводим по индукции. Сначала докажем неравенство $0 < \alpha_n^i < 1$. Знаем, что $\alpha_n^0 = 0$. Предположим, что $0 \le \alpha_n^{i-1} < 1$ и рассмотрим (9) для i. Знаменатель $d_n^i > A_n^i + B_n^i h$, что с учетом положительности коэффициентов дает $0 < \alpha_n^i < 1$. Положительность β_n^i и γ_n^i очевидна. В силу утверждения 2 и положительности слагаемых (8) получаем $\beta_n^i < 1$. Теперь рассмотрим γ_n^i. Знаменатель $d_n^i > A_n^i + B_n^i h + S$, а $h = o(S)$, поэтому при достаточно малых h

$$\frac{A_n^i + \hat{B}_n^i h}{d_n^i} \le \frac{A_n^i + \hat{B}_n^i h}{A_n^i + B_n^i h + S} < 1.$$

Доказательство для коэффициентов (10) дословно такое же.

Подставим (8) при $i = I-1$ и (10) при $i = 1$ в (5):

$$Y(1 - \alpha_n^{I-1}) + hG(t_n, L, Y, \tilde{c}_{n-1}(\cdot,\cdot)) = \beta_n^{I-1} + \gamma_n^{I-1}X, \tag{11}$$

$$X(1 - \tilde{\alpha}_n^1) + hG(t_n, 0, X, \tilde{c}_{n-1}(\cdot,\cdot)) = \tilde{\beta}_n^1 + \tilde{\gamma}_n^1 Y. \tag{12}$$

Это – система двух алгебраических нелинейных уравнений с двумя неизвестными X и Y.

Замечание 1. В силу утверждения 2 значения функций G и g при $c > 1$ и $c < 0$ несущественны; поэтому без потери общности можно считать, что $\lim\limits_{c\to\infty} G(t,x,c,u)/c = \infty$.

Утверждение 6. *Система уравнений* (11) *и* (12) *имеет решение.*

Доказательство. Выразим Y через X из (12). Ясно, что $Y(0) < 0$ и $y(+\infty) = +\infty$. Рассмотрим функцию

$$F(X) = Y(X)(1-\alpha_n^{I-1}) + hG\big(t_n, L, Y(X), \tilde{c}_{n-1}(\cdot,\cdot)\big) - \beta_n^{I-1} - \gamma_n^{I-1}X.$$

Пара $\big(X^*, Y(X^*)\big)$, где $F(X^*) = 0$, и есть требуемое решение. Существование нуля непрерывной функции $F(X)$ следует из того, что $F(0) < 0$ и $F(\infty) = \infty$.

Сходимость аппроксимаций и обобщенное решение. Итак, сеточные функции c_n^i, $\partial_h c_n^i$ и $\partial_\tau c_n^i$ равномерно ограничены независимо от шагов сетки. Построим в Π функцию $\tilde{c}(t,x)$ кусочно-линейной интерполяцией сеточной функции c_n^i. По построению $\tilde{c} \in H_1(\Pi)$ (соболевское пространство функций, обладающих первыми обобщенными производными из $L_2(\Pi)$ [4, 5, 6]) при любых (достаточно малых) шагах h и $\tau = o(h)$, причем семейство $\tilde{c}_\tau^h$ ограничено по норме $H_1(\Pi)$. Выберем последовательность шагов (τ_k, h_k), сходящуюся к нулю, и соответствующую последовательность $\tilde{c}_k(t,x)$ (она ограничена в $H_1(\Pi)$). Пространство H_1 гильбертово, поэтому из ограниченной последовательности можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность, за которой сохраним прежнее обозначение; ее предел обозначим $c(t,x) \in H_1(\Pi)$. Эта функция непрерывна, так как равномерно ограниченные непрерывные $\tilde{c}_k(t,x)$, обладая равномерно ограниченными кусочно-постоянными производными, равностепенно непрерывны, что влечет равномерную сходимость (возможно, после перехода к подпоследовательности – теорема Арцела).

Назовем функцию $c(t,x) \in H_1(\Pi)$ обобщенным решением [4-6] краевой задачи (1)-(3), если $c(t,x)$ удовлетворяют интегральному тождеству

$$\int_0^L v(0,x)\varphi(x)\,dx + \int_\Pi c\partial_t v\,dxdt - \int_0^T A\big(t,0,c(\cdot,\cdot)\big)v(t,0)G\big(t,0,c(t,0),c(\cdot,\cdot)\big)\,dt -$$

$$-\int_0^T A\big(t,L,c(\cdot,\cdot)\big)v(t,L)G\big(t,L,c(t,L),c(\cdot,\cdot)\big)\,dt - \int_\Pi \partial_x\big(A(t,x,c(\cdot,\cdot))v\big)\partial_x c\,dxdt +$$

$$+\int_\Pi (B-\hat{B})v\partial_x c\,dxdt - \int_\Pi \Big(Ec-F\Big)v\,dxdt$$

при любой непрерывной $v(t,x) \in H_1(\Pi)$, такой, что $v(T,x)=0$.

Построенная функция $c(t,x)$ является решением в смысле данного определения: на аппроксимациях тождества выполняются с погрешностью $O(h,\tau)$, а равномерная сходимость аппроксимаций позволяет перейти к пределу. Предложенный сеточный метод решения краевой задачи сходится к обобщенному решению, существование которого тем доказано.

Библиографический список

1. *Castro, F.J., Meyer, G.* // Journal of Alloys and Compounds. – 2002. – V. 330-332. – P 59-63.
2. *Заика, Ю.В.* [Текст] / Ю.В. Заика, Н.И. Родченкова // Математическое моделирование. – 2008. – Т. 20. – № 11. – С. 67-79.
3. *Chernov, I., Bloch, J., Gabis, I.* // International Journal of Hydrogen Energy. – 2008. – V. 33. – P. 5589-5595.
4. *Ладыженская, О.А.* Краевые задачи математической физики [Текст] / О.А. Ладыженская. – М., 1973.
5. *Михайлов, В.П.* Дифференциальные уравнения в частных производных [Текст] / В.П. Михайлов. – М., 1976.
6. *Evans, L.C.* Partial differential equations. – AMS, 1991.

Гидродинамическое описание процесса контактов

М.Б. Аверинцев

Цель настоящей работы состоит в выводе гидродинамических уравнений исходя из анализа эволюции системы взаимодействующих частиц. При этом уравнения, содержащие только первые производные, являются аналогом гидродинамических уравнений Эйлера, а уравнения, содержащие вторые производные являются аналогом уравнений Навье-Стокса. Можно подчеркнуть, что возможность выводить уравнения гидродинамического типа и связывать с ними реальные явления не является прерогативой только статистической физики. Такие уравнения естественно возникают во многих моделях статистической динамики, естественно, что вид этих уравнений может сильно отличаться от вида уравнений обычной гидродинамики.

В настоящей работе в качестве модели статистической динамики рассматривается одномерный процесс контактов с дискретным временем на множестве целых чисел $\mathbf{Z}$. В работе [1] рассматривались подобные процессы, которые описывают эволюцию ансамбля взаимодействующих частиц, при этом взаимодействие описывалось формулами гиббсовского распределения. В работе [2] рассматривались марковские процессы с локальным взаимодействием и непрерывным временем. Основное внимание уделяется выводу аналогов гидродинамических уравнений. При этом выбор в качестве конфигураций распределений на множестве целых чисел не является принципиальным и сделан из соображений удобства изложения. Обобщение на случай пространства большего числа измерений может быть проведено с помощью незначительных изменений.

Значением процесса является функция $f(x)$, $x \in \mathbf{Z}$, принимающая значения 0 и 1. Обозначим множество таких функций через $2^{\mathbf{Z}}$. Случайный процесс ξ_t, $t \in \{0, 1, 2, ...\}$ принимает значения в множестве $2^{\mathbf{Z}}$, начальное значение $\xi_0 = g(x)$ задано. Если $\xi_t = f(x)$, обозначим через $\xi_t(x)$ значение $f(x)$. Одной из интерпретаций процесса контактов является модель эпидемии. Предполагается, что в точках множества $\mathbf{Z}$ находятся некоторые индивидуумы, которые могут находиться в двух состояниях: здоров и инфицирован. Если индивидуум, находящийся в точке x в момент времени t здоров, то $\xi_t(x) = 0$, если инфицирован, то $\xi_t(x) = 1$. Здоровые индивидуумы заражаются с вероятностью пропорциональной числу их инфицированных соседей, инфицированные поправляются с постоянной вероятностью. Можно также рассматривать этот случайный процесс как процесс эволюции системы взаимодействующих частиц, каждая из которых может находиться в двух состояниях.

Предполагается, что процесс ξ_t является марковским, переходные вероятности определяются следующим образом. Предположим, что в момент времени t процесс меняет свои значения только в точках $x_1, x_2, ...,$ x_n, причем вероятности этих изменений задаются формулой

$$P\{\xi_{t+1}(x_1) = i_1, ..., \xi_{t+1}(x_n) = i_n | \xi_t\} = \prod_{k=1}^{n} P\{\xi_{t+1}(x_k) = i_k | \xi_t\}. \qquad (1)$$

Таким образом, вероятность изменения значений процесса в n точках равна произведению вероятностей изменения конфигурации процесса в одной точке. Для процесса контактов эти вероятности имеют следующий вид:

$$P\{\xi_{t+1}(x)=1|\xi_t\}=a_{-1}\xi_t(x-1)+a_0\xi_t(x)+a_1\xi_t(x+1). \tag{2}$$

Коэффициенты a должны выбираться так, чтобы всегда выполнялись неравенства:

$$1\geq P\{\xi_{t+1}(x)=0|\xi_t\}=1-P\{\xi_{t+1}(x)=1|\xi_t\}\geq 0. \tag{3}$$

Из соотношения (2) следует равенство для математических ожиданий:

$$M\xi_{t+1}(x)=a_{-1}M\xi_t(x-1)+a_0M\xi_t(x)+a_1M\xi_t(x+1). \tag{4}$$

Если рассмотреть ансамбль частиц, описываемых данным случайным процессом, то математическое ожидание процесса в данной точке равно средней плотности частиц в этой точке.

Идея гидродинамического описания состоит в том, что меняется масштаб времени и пространственный масштаб. Простейший вариант получается, когда эти масштабы меняются одинаково: $\tau=\frac{t}{\varepsilon}$, $r=\frac{x}{\varepsilon}$, где ε – малое число. Положим

$$\rho(t,x)=M\xi_{[\tau]}([r]), \tag{5}$$

где $[z]$ означает целую часть числа z, и составим дифференциальное уравнение для плотности числа частиц. Для этого рассмотрим приращение функции ρ и воспользуемся равенствами (4) и (5):

$$\rho(t+\varepsilon,x)-\rho(t,x)=a_{-1}\rho(t,x-\varepsilon)+a_0\rho(t,x)+a_1\rho(t,x+\varepsilon)-\rho(t,x).$$

Раскладывая функцию ρ в ряд Тейлора по второй переменной с точностью до первого порядка малости относительно ε, деля все выражение на ε и переходя к пределу при $\varepsilon\to 0$, получим дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=a\frac{\partial\rho}{\partial x}+b\rho, \tag{6}$$

где $a=a_1-a_{-1}$, $b=\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\frac{a_{-1}+a_0+a_1-1}{\varepsilon}$. При выводе данного уравнения мы предполагаем, что коэффициенты зависят от ε так, чтобы существовал указанный предел. Заметим, что для существования пределов в данном уравнении требуется, чтобы в случае, когда все соседи данного индивидуума инфицированы, он сам был бы инфицирован с вероятностью близкой к единице. Уравнение (6) описывает процесс в крупном пространственном масштабе и может служить для описания волн эпидемии. Более детальное описание в более мелком масштабе дает так называемый диффузионный предел.

Этот предел получается, если $a_{-1} + a_0 + a_1 = 1$, $r = \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}$, $a = 0$, $D = (a_{-1} + a_1)$ – коэффициент диффузии. Соответствующее уравнение имеет вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{2} D \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}. \tag{7}$$

Заметим, что при выводе этих уравнений, мы определяем функцию ρ только на счетном множестве точек, в остальных точках прямой эту функцию можно определить путем интерполяции так, чтобы она имела непрерывные частные производные до второго порядка включительно.

По сравнению с обычной гидродинамикой [3], полученные здесь уравнения имеют особый вид. Более подробно эти вопросы рассмотрены в работах [4, 5]. В работе [4] рассматриваются гидродинамические уравнения для модели твердых стержней, при этом предельный переход, приводящий к уравнению (5), называется переходом к уравнениям эйлерова типа. Предельный переход, приводящий к уравнению (7), называется предельным переходом Навье-Стокса. Как отмечено в работе [5], математический анализ ситуаций, возникающих в различных науках, приводит к необходимости рассматривать системы, состоящие из большого числа однородных элементов. Можно сказать, что эти системы находятся вне сферы профессиональных интересов физиков. Однако, отказ от ориентации на физические приложения позволяет значительно расширить круг рассматриваемых математических моделей. Конечно, с точки зрения физики эти модели можно назвать примитивными, тем не менее, рассмотрение таких моделей может добавить важные черты к пониманию реальных задач.

Библиографический список

1. *Аверинцев, М.Б.* Взаимодействующие марковские процессы и гиббсовские случайные поля [Текст] / М.Б. Аверинцев // Труды третьих колмогоровских чтений. – Ярославль, 2005. – С. 182-184.
2. *Liggett, T.M.* Interacting Particle Systems. – Springer-Verlag New York, Berlin, Heidelberg, Tokio, 1989.
3. *Лойцянский, Л.Г.* Механика жидкости и газа [Текст] / Л.Г. Лойцянский. – М.: Дрофа, 2003.
4. *Boldrighini, C., Dobrushin, R.L., Sukhov, Yu.M.* One-Dimensional Hard Rod Caricature of Hydrodynamics // J. Stat. Phis., 1983. – V. 31. – № 3.

5. *Dobrushin, R.L.* Caricatures of hydrodynamics // Proc. 9th. Int. Congress on Math. Phys. Bristol: Adam Higler, 1989.

Численный метод решения задачи диффузии в неоднородной среде

А.В. Чекулаев

Рассматривается модель развития раковых опухолей. Она основана на методе клеточных автоматов. Этот метод позволяет получить картину поведения группы клеток при помощи моделирования поведения отдельных клеток. При этом главным регуляторным фактором, влияющим на все процессы жизнедеятельности клеток, является локальная концентрация кислорода. Поэтому в этой модели большое значение имеет задача диффузии кислорода в неоднородной среде (сложное расположение сосудов). Уравнение диффузии в однородной среде на плоскости имеет вид

$$\frac{\partial c}{\partial t} = K_d \left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \right) + f\,(x, y, t)\,, \tag{1}$$

где c – концентрация вещества, K_d – коэффициент диффузии, $f\,(x, y, t)$ – функция возмущения (источники и потребители частиц вещества).

В данной задаче функция возмущения – это сосуды (источники кислорода) и клетки (потребители). Форма сосудов имеет нерегулярную структуру, а потребление кислорода клетками зависит от момента времени. Функция возмущения не может быть выражена аналитически, и само уравнение диффузии нельзя решить аналитически.

Для решения этого уравнения можно воспользоваться методом сеток. Но так как основная задача (моделирование развития раковых опухолей) решается методом клеточного автомата, то и для задачи диффузии был разработан численный метод решения на основе клеточного автомата. Метод оригинален своим построением, но по форме решения очень близок к методу сеток с явной схемой.

Задача решается в следующих допущениях: так же как и в методе сеток плоскость разбивается равномерной сеткой на ячейки (квадратные или любой другой формы), время разбивается на интервалы (итерации). В течение интервала концентрация вещества в ячейке считается постоянной. Для определения концентрации в следующий момент времени для каждой пары соседних ячеек в явном виде моделируется диффузный аналог закона Ньютона-Рихмана: *“тепловой поток на границе тел* *пропорционален разности их температур".* Для нашей задачи диффузии этот закон примет вид

$$\Delta V = K_{in} \cdot \Delta c, \tag{2}$$

где ΔV – объем кислорода, диффундирующего из одного элемента пространства Δr в другой за время Δt, K_{in} – внутренний коэффициент диффузии. $K_{in} \in \left[0, \frac{1}{9}\right]$. Правая граница отрезка определяется из соображения: если на пустом поле ячеек есть одна ячейка с некой концентрацией вещества (например, 9 единиц), то, поделившись им с восемью соседями (по 1 каждому соседу), в ней должно остаться вещества не меньше чем в любом из соседей (см. рис. 1). Δc – разница концентраций в двух соседних элементах пространства. В данной задаче концентрация имеет ту же размерность, что и объем – [м^3]. Сам термин *концентрация* имеет значение *объем в одной ячейке.*

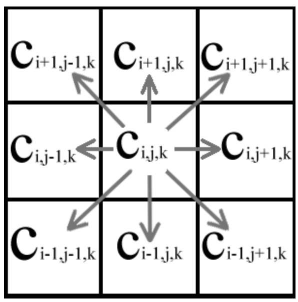


Рис. 1. Влияние ячейки на соседние

Такой метод можно считать в некотором роде обобщением метода сеток в случае явной схемы, потому что он позволяет иметь дело с ячейками произвольной формы и произвольным числом соседних ячеек: можно рассматривать n-угольники, у которых будет n или $2n$ соседей (ячейки, имеющие с данной только одну общую вершину, можно считать соседями, а можно и не считать в зависимости от типа модели). В данном случае ячейка имеет форму квадрата и восемь соседей.

Для моделирования диффузии таким способом нам нужно знать внутренний коэффициент диффузии K_{in}. Определим его с помощью решения уравнения диффузии (1). Сначала покажем, что уравнение (2) и уравнение диффузии (1) могут быть получены из одного общего источника.

Уравнение диффузии мы выводим из уравнения потока вещества

$$\vec{\Phi} = -K_d \cdot \operatorname{grad} c \tag{3}$$

и уравнения неразрывности на плоскости

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \mathrm{div}\vec{\Phi} = f\left(x, y, t\right),$$

где $\vec{\Phi}$ – поток вещества ($\vec{\Phi} = c \cdot \vec{v}$, $\vec{v}$ - скорость), а $\mathrm{div}\vec{\Phi}$ – относительная скорость убывания плотности частиц во время движения.

Так же дифференциальное уравнение (3) можно переписать в виде разностного уравнения (2) (уже упоминавшийся закон Ньютона-Рихмана). Из этого можно заметить родство искомого внутреннего коэффициента диффузии K_{in} с коэффициентом диффузии K_d из уравнения диффузии (1)

Для нахождения K_{in} рассмотрим задачу Коши: уравнение (1) с начальным условием

$$c\left(x, y,\ 0\right) = 0.$$

Аналитическое решение будет иметь вид

$$c\left(x, y, t\right) = \frac{1}{4\pi K_d} \int\limits_0^t \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{f\left(\xi, \eta, \tau\right)}{t - \tau} e^{-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{4K_d(t-\tau)}}\, d\xi\, d\eta\, d\tau.$$

Если функция возмущения $f(\xi, \eta, \tau)$ представляет собой δ-функцию по переменным ξ и η с особенностью в начале координат ($\xi = 0,\ \eta = 0$) и массой M, то выражение для $c\left(x, y, t\right)$ примет вид

$$c\left(x, y, t\right) = \frac{M}{4\pi K_d\, t} e^{-\frac{x^2 + y^2}{4K_d t}}.$$

Нас будет интересовать только удаленность от начала координат, поэтому запишем

$$c_r\left(r, t\right) = \frac{M}{4\pi K_d\, t} e^{-\frac{r^2}{4K_d t}}.$$

Построим теперь с помощью описанного метода аналогичную $c_r\left(r, t\right)$ функцию $c_r^*\left(r, t\right)$. Для этого возьмем пустое поле ячеек и поместим в ячейку с координатами (0,0) тот же объем вещества, что и в δ-функции для уравнения диффузии (1). Запустим клеточный автомат на несколько итераций. Получим набор ступенчатых фигур (рис. 2).

На каждой итерации в ступенчатой фигуре появляется новая ступень. Длина Δr каждой ступени фиксирована (задается из условия размера клетки ткани), а высота каждой ступени c определяется итеративно – текущая высота (в начальный момент равная нулю для всех ячеек кроме той, в которой сосредоточено вещество) плюс вещество полученное от соседей с большей концентрацией, минус вещество отданное соседям с меньшей концентрацией.

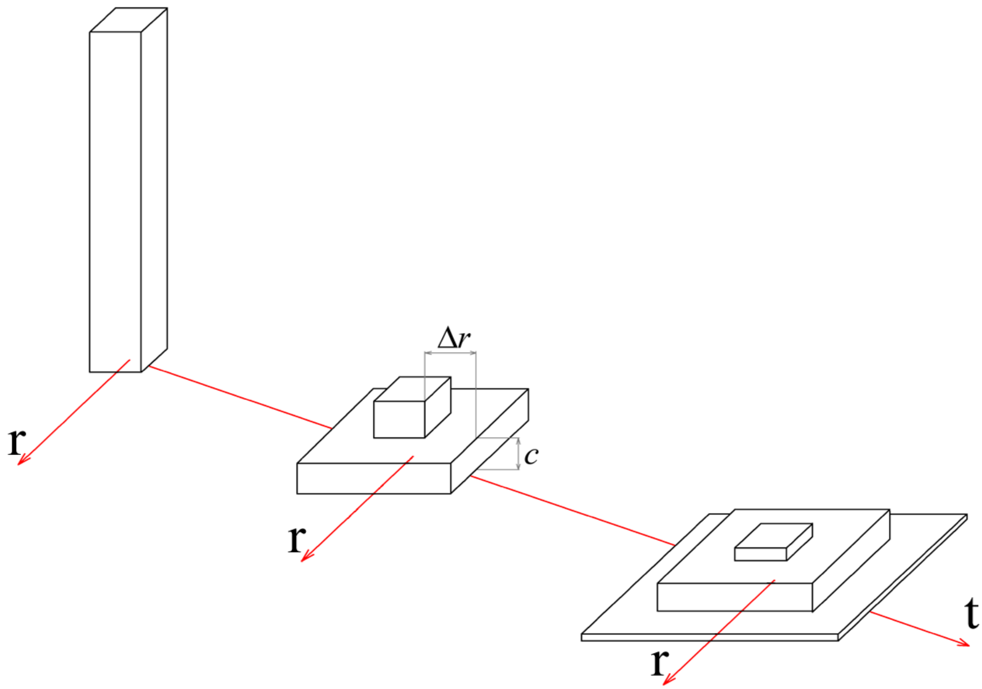


Рис. 2. Процесс диффузии в виде последовательности ступенчатых фигур

Для данного набора ступенчатых фигур мы так же можем построить функцию $c_r^*(r,\ t,\ K_{in},\ \Delta r,\ \Delta t)$ зависимости концентрации от радиуса и времени. Эта функция зависит от пяти переменных: расстояния r от начала координат, времени t, внутреннего коэффициента диффузии K_{in} и размера шагов по пространству и времени Δr и Δt. Параметры K_{in}, Δr, и Δt не изменяются в процессе построения набора ступенчатых фигур, они фиксированы и исполняют роль постоянных параметров. Поэтому в дальнейшем эту функцию будем записывать в виде $c_r^*(r,\ t)$ (иногда в виде $c_r^*\left(r,\ t, K_{in}\right)$), подразумевая, что она строится при ранее зафиксированных значениях K_{in}, Δr, и Δt.

В одномерном случае функцию $c_r^*(r,t)$ можно выразить явно, но для многомерного случая аналитическая запись невозможна в связи с необходимостью учета взаимного влияния всех соседних клеток. Поэтому функция $c_r^*(r,t)$ задается таблицей, которая заполняется в программе рекурсивно прямым моделированием правила (2):

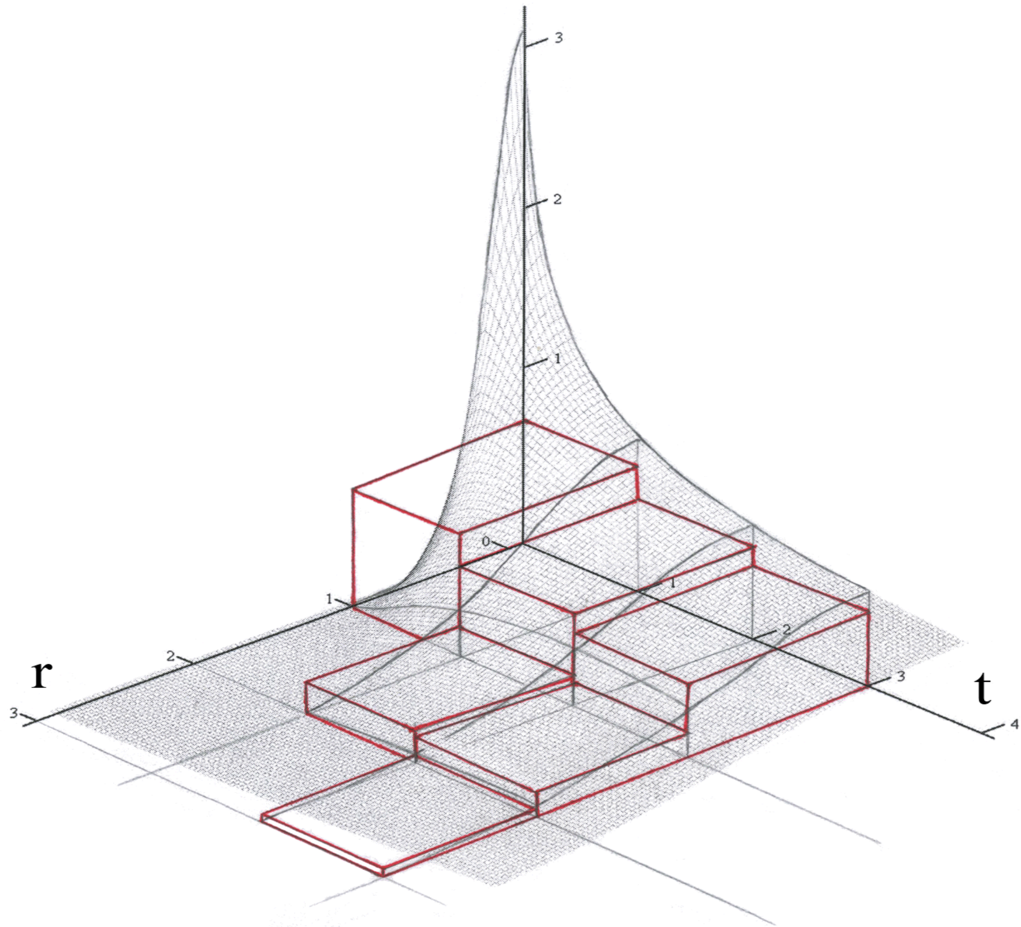


Рис. 3. Графики функций $c_r(r,t)$ и $c_r^*(r,t)$ изображенные в одних координатах

Для решения центральной задачи данной работы – определения внутреннего внутреннего коэффициента диффузии K_{in} – необходимо максимально приблизить ступенчатую функцию $c_r^*(r,t)$ к функции $c_r(r,t)$, представляющей решение дифференциального уравнения. Определим функционал, характеризующий близость этих двух функций:

$$J[c_r^*] = \sum_{j=1}^{jCnt} \sum_{i=1}^{iCnt} \left| \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} \int\limits_{r_{i-1}}^{r_i} c_r(r,t)drdt - c_r^*(r_i, t_j, K_{in})\Delta r \Delta t \right|.$$

Нужно найти $c_r^*(r,t)$, доставляющую минимум этому функционалу. Первообразная от функции $c_r(r,t)$ является функцией Лапласа

$\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{r_1}^{r_2} c_r(r,t)drdt$, она определяется численно. По этим значениям и по значениям $c_r^*(r_i,t_j,K_{in})$ определяется значение функционала $J[c_r^*]$ в любой области $t \in (0,\,T)$, $r \in [0,\,R)$ и для любого $K_{in} \in \left[0,\,\frac{1}{9}\right]$. Поэтому при фиксированных R и T функционал превращается в функцию от K_{in}

$$J[c_r^*]|_{T=T_{\text{fix}},\ R=R_{\text{fix}}} = j(K_{in})$$

и достигает минимума при том же значении K_{in}, что и функция $j(K_{in})$. Это значение внутреннего коэффициента диффузии обозначим K_{in}^*.

Для того, чтобы найти K_{in}^*, нужно решить оптимизационную задачу. Нам известно, что для двумерного случая $K_{in} \in \left[0,\,\frac{1}{9}\right]$, поэтому можем воспользоваться, например, методом половинного деления. После нахождения K_{in}^*, его можно будет использовать в основном численном методе.

При применении предложенного метода важную роль играет выбор параметра δt по заданному δr. Анализ показал, что существует значение $\delta t_{\max}$ такое, что при $\Delta t \geq \Delta t_{\max}$ предложенный метод неприменим.

Например, при численном моделировании диффузии кислорода в жидкости с $K_d = 0.32 \cdot 10^{-8}\ \frac{\text{м}^2}{\text{с}}$, при начальной массе $M = 10^{-6}\text{м}^3$ за время одной итерации $\Delta t = 4 \cdot 10^{-3}$с кислород диффундирует в кляксу радиусом $r = 2 \cdot 10^{-5}$м. Если задан размер клетки $\delta r = 1 \cdot 10^{-5}$ м, то мы получаем, что с помощью предложенного метода кислород успеет диффундировать только на радиус одной клетки, в то время как физически за то же время он распространится в два раза дальше. Поэтому нужно взять меньший интервал времени. В приведенном примере моделирование диффузии будет физично при $\Delta t \leq 0.5 \cdot 10^4$.

Таким образом удалось выявить закономерность

$$\Delta t_{\max} \cong \frac{(\Delta r)^2}{K_d}.$$

Это соответствует ограничению на шаг по времени в явной схеме метода сеток.

Для определения $\Delta t_{\max}$ по заданным K_d и Δr был разработан отдельный метод. Выбирается наименьшее значимое количество вещества c_{eps} такое что, если $c_r(r,t) < c_{eps}$, то считается, что в точке (r,t) вещество отсутствует. Введя это допущение можно построить функцию

$$t = \mathrm{T}(r).$$

Эта функция ставит в соответствие любому расстоянию время, которое понадобится, чтобы вещество распространилось на это расстояние. Фактически эта функция – пересечение функции $c(r,t)$ с плоскостью $c = c_{eps}$. После этого можно легко определить $\Delta t_{\max}$:

$$\Delta t_{\max} = \mathrm{T}(\Delta r).$$

После того как будет выполнено условие $\Delta t \leq \Delta t_{\max}$ и найден внутренний коэффициент диффузии K_{in} – метод готов к применению.

Автор выражает признательность своему дипломному руководителю профессору А.С. Братусю за руководство при написании данной работы и проверку полученных результатов, и доценту Г.А. Зверкиной за помощь в оформлении и за общую поддержку в работе.

Распределение m-мерных линейных элементов в пространстве аффинно-метрической связности

Т.Г. Аленина

В работе показано, что регулярное гиперполосное распределение $m-$мерных линейных элементов $(m < n-1)$ в $P_{n,n}$ во второй дифференциальной окрестности внутренним инвариантным образом индуцирует пространство проективной связности $\bar{P}_{n,n}$, двойственное пространству $P_{n,n}$. При некоторых предположениях найдено необходимое и достаточное условие, при котором пространства $\underset{n,n}{\overset{0}{\mathrm{M}}}$, $\underset{n,n}{\overset{0}{\bar{\mathrm{M}}}}$ являются двойственными пространствами аффинно-метрической связности без кручения.

В работе индексы принимают следующие значения:

$$\bar{I}, \bar{J}, \bar{K} = \overline{0,n}; \quad I, J, S, T, K = \overline{1,n}; \quad i, j, k = \overline{1,m}; \quad u, v = \overline{m+1, n-1};$$

$$\alpha = \overline{m+1, n}.$$

Рассмотрим пространство аффинной связности $\mathrm{A}_{n,n}$, определяемое системой $n(n+1)$ форм Пфаффа $\left\{\theta^I, \theta^I_J\right\}$, подчиненных структурным уравнениям [2]

$$D\theta^I = \theta^K \wedge \theta^I_K + \frac{1}{2} r^I_{ST} \theta^S \wedge \theta^T, \quad D\theta^I_J = \theta^K_J \wedge \theta^I_K + \frac{1}{2} r^I_{JST} \theta^S \wedge \theta^T,$$

где r^I_{ST}, r^I_{JST} – тензоры соответственно кручения и кривизны этого пространства. Известно, что с пространством $\mathrm{A}_{n,n}$ ассоциируется пространство проективной связности $P_{n,n}$, определяемое системой из $(n+1)^2$ пфаффовых форм $\left\{\omega^{\bar{I}}_{\bar{J}}\right\}$

$$\omega_0^I = \theta^I, \omega_0^0 = -\frac{1}{n+1}\theta_K^K, \omega_J^I = \theta_J^I - \frac{1}{n+1}\delta_J^I\theta_K^K, \omega_J^0 = 0,$$

удовлетворяющих структурным уравнениям

$$D\omega_{\bar{J}}^{\bar{I}} = \omega_{\bar{J}}^{\bar{K}} \wedge \omega_{\bar{K}}^{\bar{I}} + \frac{1}{2}R_{\bar{J}ST}^{\bar{I}}\omega_0^S \wedge \omega_0^T,\ \omega_{\bar{K}}^{\bar{K}} = 0.$$

В пространстве $P_{n,n}$, ассоциированном с пространством аффинной связности $\mathrm{A}_{n,n}$, рассмотрим регулярную неголономную гиперполосу H, то есть регулярное гиперполосное распределение $m-$мерных линейных элементов, $m < n-1$ [3]; при этом будем говорить, что распределение H задано в исходном пространстве аффинной связности $\mathrm{A}_{n,n}$. Известно [3], что относительно репера R первого порядка подмногообразие H определяется системой дифференциальных уравнений

$$\omega_i^n = \Lambda_{iK}^n\omega_0^K, \omega_i^v = \Lambda_{iK}^v\omega_0^K, \omega_v^n = \mathrm{A}_{v\alpha}^n\omega_0^\alpha, \omega_v^i = \mathrm{N}_{vK}^i\omega_0^K,$$

где каждая из систем функций $\{\Lambda_{iK}^n\}$, $\{\Lambda_{iK}^v, \Lambda_{iK}^n\}$, $\{A_{v\alpha}^n\}$ на распределении H образует геометрический объект первого порядка, а система функций $\left\{N_{vK}^i, A_{v\alpha}^n\right\}$ – геометрический объект второго порядка.

Справедливы следующие предложения:

Теорема 1. *Регулярное гиперполосное распределение m-мерных линейных элементов* H*, заданное в пространстве аффинной связности* $\mathrm{A}_{n,n}$ *индуцирует: 1) пространство проективной связности $\bar{P}_{n,n}$, двойственное ассоциированному с* $\mathrm{A}_{n,n}$ *пространству проективной связности $P_{n,n}$ относительно инволютивного преобразования форм связности, $J_a : \omega_{\bar{j}}^{\bar{i}} \to \overset{p}{\omega}{}_{\bar{j}}^{\bar{i}}$, причем пространства $P_{n,n}$ и $\bar{P}_{n,n}$ могут быть плоскими лишь одновременно; 2) многообразие* $\bar{\mathrm{H}}$ *в $\bar{P}_{n,n}$ двойственное исходному.*

Теорема 2. *Для того чтобы при задании регулярного гиперполосного распределения m-мерных линейных элементов* H *в* $\mathrm{A}_{n,n}$ *индуцировалось пространство аффинной связности* $\bar{\mathrm{A}}_{n,n}$*, двойственное исходному, необходимо и достаточно, чтобы слоевые формы θ_n^k, θ_n^v пространства* $\mathrm{A}_{n,n}$ *обращались в нуль.*

Согласно [1], ассоциированное с $\mathrm{A}_{n,n}$ пространство проективной связности $P_{n,n}$ называется пространством проективно-метрической связности $\mathrm{K}_{n,n}$, если оно обладает инвариантным полем локальных гиперквадрик Q_{n-1}^2. Доказано [4], что критерием того, что $\mathrm{P}_{n,n}$ есть пространство проективно-метрической связности $\mathrm{K}_{n,n}$ с полем локальных абсолютов Q_{n-1}^2

$$a_{IK}x^Ix^K + \frac{1}{c}\left(g_{I0}x^I + cx^0\right)^2 = 0, a_{[IK]} = 0, g_{0I} = g_{I0}, g_{00} = c = const \neq 0,$$

отличных от сдвоенных гиперплоскостей, является выполнение уравнений

$$dg_{I0} - g_{K0}\omega_I^K - c\omega_I^0\,(\equiv 0) = a_{IK}\omega_0^K,$$

$$da_{IJ} - a_{IK}\omega_J^K - a_{KJ}\omega_I^K = -\tfrac{1}{c}\left(a_{IK}g_{J0} + a_{JK}g_{I0}\right)\omega_0^K;$$

при этом форма ω_0^0 является главной:

$$\omega_0^0 = -\frac{1}{c}g_{K0}\omega_0^K.$$

Известно [4], что наличие инвариантного поля локальных гиперквадрик (2) приводит к конечным соотношениям для компонент тензора кривизны-кручения пространства $\mathrm{K}_{n,n}$:

$$R^0_{0ST} + \tfrac{1}{c}g_{K0}R^K_{0ST} = 0,\ g_{K0}R^K_{IST} + a_{IK}R^K_{0ST} + cR^0_{IST}\,(\equiv 0) = 0,$$

$$a_{IK}R^K_{JST} + a_{KJ}R^K_{IST} - \tfrac{1}{c}\left(a_{IK}g_{J0} + a_{JK}g_{I0}\right)R^K_{0ST} = 0.$$

Пространство $\mathrm{A}_{n,n}$ называется пространством аффинно-метрической связности, если пространство проективной связности $\mathrm{P}_{n,n}$, ассоциированное с исходным пространством аффинной связности $\mathrm{A}_{n,n}$, является пространством проективно-метрической связности. Ниже пространство аффинно-метрической связности обозначим через $\mathrm{M}_{n,n}$.

Будем говорить, что в пространстве аффинно-метрической связности $\mathrm{M}_{n,n}$ задано гиперполосное распределение H m-мерных линейных элементов, если это подмногообразие задано в соответствующем пространстве проективно-метрической связности $\mathrm{K}_{n,n}$.

Имеет место следующее предложение:

Теорема 3. *Для того чтобы пространство проективно-метрической связности* $\underset{n,n}{\overset{0}{\bar{\mathrm{K}}}}$ *без кручения (двойственное пространству* $\mathrm{K}_{n,n}$ *без кручения), являлось ассоциированным по схеме (1) с некоторым пространством аффинно-метрической связности* $\underset{n,n}{\overset{0}{\bar{\mathrm{M}}}}$ *без кручения, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения* $\theta_n^k = \theta_n^v = 0$ *для пространства аффинно-метрической связности* $\underset{n,n}{\overset{0}{\mathrm{M}}}$ *без кручения; при этом пространства* $\underset{n,n}{\overset{0}{\mathrm{M}}}$ *и* $\underset{n,n}{\overset{0}{\bar{\mathrm{M}}}}$ *являются двойственными пространствами аффинно-метрической связности без кручения.*

Библиографический список

1. *Лаптев, Г.Ф.* Дифференциальная геометрия погруженных многообразий [Текст] / Г.Ф. Лаптев // Тр. Моск. матем. об-ва. – 1953. – Т. 2. – С. 275-382.
2. *Лаптев, Г.Ф.* О выделении одного класса внутренних геометрий, индуцированных на поверхности пространства аффинной связности [Текст] / Г.Ф. Лаптев // ДАН СССР. – 1943. – Т. 41. – № 8. – С. 329-331.
3. *Столяров, А.В.* Проективно-дифференциальная геометрия регулярного гиперполосного распределения m-мерных линейных элементов [Текст] / А.В. Столяров // Проблемы геометрии. Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР. 1975. – Т. 7. – С. 117-151.
4. *Столяров, А.В.* Пространство проективно-метрической связности [Текст] / А.В. Столяров // Известия вузов. Математика. – 2003. – № 11. – С. 70-76.

N-мерные нелинейные волны-барисоны

А.В. Бородин

Данная работа является развитием работ [1-6] в сторону увеличения порядка дифференциальных уравнений (ДУ) и размерности пространственных переменных.

Для автономности приведем необходимый минимум бариоперационных понятий из [4-7]. Пусть $\mathbf{A}$ – коммутативная ассоциативная алгебра с делением над полем $\mathbf{P}$ (с единицей e). Рассмотрим множество $\mathbf{A}^{n+1}$, элементами которого являются упорядоченные $(n+1)$-ки чисел из $\mathbf{A}$ вида

$$\langle x\rangle = \langle x_0; \bar{x}\rangle\,, \tag{1}$$

где $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A^n$. Для элемента (1) определим баримоменты $k-$го порядка:

$$x^k = x_0 x_1\ \cdots\ x_k \quad (k \in n = \{0, 1, \ldots, n\}); \tag{2}$$

и обозначим их символами $\mu^k\left(\langle x\rangle\right) \quad (k \in n)$. Посредством (2) элемент (1) можно записать в канонической форме:

$$\langle x\rangle = \left\langle x^0; x^1/x^0, x^2/x^1, \ldots, x^n/x^{n-1}\right\rangle. \tag{3}$$

При этом возможный нуль в знаменателе (соответственно нуль в числителе слева) будем называть нестандартным и обозначать символом $\langle 0\rangle$ ($\langle 0\rangle^{-1}$ – нестандартной бесконечностью и обозначать символом $\langle\infty\rangle$). Элементы $\langle x\rangle = \langle x_0;\bar{x}\rangle$, $\langle y\rangle = \langle y_0;\bar{y}\rangle \in\mathbf{A}^{n+1}$ называются бариравными, если

$$\mu^k\left(\langle x\rangle\right)=\mu^k\left(\langle y\rangle\right) \qquad (k\in n)\,. \tag{4}$$

Линейные алгебраические операции над элементами множества $\mathbf{A}^{n+1}$ определим так: $(\forall\lambda\in P,\ \ \langle x\rangle\,,\ \langle y\rangle\in \mathrm{A}^{n+1})$

$$\lambda\left\langle x\right\rangle=\left\langle \lambda x_0;\bar{x}\right\rangle, \quad \mu^k\left(\langle x\rangle+\langle y\rangle\right)=\mu^k\left(\langle x\rangle\right)+\mu^k\left(\langle y\rangle\right)(k\in n); \tag{5'}$$

$$\mu^k\left(\langle x\rangle\langle y\rangle\right)=\sum_{j=0}^{k}x^{k-j}y^j+s\sum_{j=k+1}^{n}x^{k-j+n+1}y^j, \tag{5}$$

где $s=\pm1$. Операции (5'), (4) удовлетворяют аксиомам коммутативной ассоциативной алгебры, причем нулевым является элемент вида $\langle\tilde{0}\rangle = \langle 0;\bar{x}\rangle$, противоположным к $\langle x\rangle = \langle x_0;\bar{x}\rangle$ – элемент вида $-\langle x\rangle = \langle -x_0;\bar{x}\rangle$, единицей – элемент вида $\langle e\rangle = \langle e;\bar{0}\rangle$. С этого момента элементы вида (12) (или (14)) называются бариэлементами n-го порядка (БЭЛ), а множество $\langle A\rangle_s^n$ таких БЭЛ – при $s=+1$ ($s=-1$) *эллиптической* (*гиперболической*) *бариалгеброй* (БА) n-го порядка над полем $\mathbf{P}$. Поскольку компоненты БЭЛ (12) являются элементами из $\mathbf{A}$, то наряду с умножением БЭЛ (12) на скаляр $\lambda\in\mathbf{P}$ можно определить его умножение на элемент $a\in\mathbf{A}$ по формуле

$$a\left\langle x\right\rangle=\left\langle ax_0;\bar{x}\right\rangle. \tag{6}$$

Поэтому множество $\mathbf{A}^{n+1}$ можно трактовать еще, как барилинейное пространство (БЛП) над алгеброй $\mathbf{A}$.

Если $\mathbf{A}$ – алгебра с инволюцией: $x\to x^*$ [6], то инволюцию $\langle x\rangle\to\langle x\rangle^*$ можно определить и на $\langle A\rangle_s^n$ так:

$$\mu^0\left(\langle x\rangle^*\right)=\left(x^0\right)^*, \quad \mu^k\left(\langle x\rangle^*\right)=s\left(x^{n-k+1}\right)^*(k\in n)\,. \tag{7}$$

При этом БЭЛ $\langle x\rangle$ называется бариэрмитовым, если $\langle x\rangle=\langle x\rangle^*$, т.е. если

$$x^0=\left(x^0\right)^*, \quad x^k=-\left(x^{n-k+1}\right)^*(k\in n)\,. \tag{8}$$

Рассмотрим бариэрмитовые БЭЛ вида

$$\langle e\rangle_0=\langle e;\ \bar{0}\rangle\,, \quad \langle e\rangle_k=\langle\langle 0\rangle\,;\ e,\ \ldots,\ e,\ \langle\infty\rangle\,,\ 0,\ \ldots,\ 0\rangle \quad (k\in n)\,, \tag{9}$$

где $\langle\infty\rangle$ стоит на k-ом месте. В силу (13), (15) $\mu^j\left(\langle e\rangle_k\right)\quad \mu^j\left(\langle e\rangle_k\right)=\delta_k^j\, e$, где δ_k^j – стандартный символ Кронекера. Поэтому ввиду (4), (5') (6) $(\forall\langle x\rangle\in\langle\mathbf{A}\rangle^{n+1})$:

$$\langle x\rangle=\sum\nolimits_{k=0}^{n}x^k\,\langle e\rangle_k\,.$$

Следовательно, (9) – это естественный барибазис в $\langle\mathbf{A}\rangle^{n+1}$, а (2) – естественные барикоординаты БЭЛ (1) относительно него.

Далее, функция вида

$$\langle\, u\rangle=\langle u(x,t)\rangle=\langle u_0(x,t);\bar u(x,t)\rangle\,, \tag{10}$$

где $\langle\, u\rangle\in\langle\mathrm{C}\rangle_s^n$ – зависимая барипеременная, $x=(x_1,x_2,\ldots,x_m)\in\mathrm{R}^{\mathrm{m}}$, $t\in\mathrm{R}$ – независимые переменные, называется барифункцией (БФ) вещественных переменных. Частная бари-производная k-го порядка $\partial_j^k\langle u(x,t)\rangle=\partial_{x_j}^k\langle u(x,t)\rangle$ (при $k=1\partial_j^1=\partial_j$) от БФ (10) по переменной x_j (при $j=0,\ x_0=t$) определяется так:

$$\mu^i(\partial_j^k\langle u\rangle)=\partial_j^k(\mu^i(\langle u(x,t)\rangle)),\quad (i=0,\,1,\,\ldots\,,n). \tag{11}$$

Множество непрерывно дифференцируемых (k раз по $x\in\mathrm{R}^{\mathrm{m}}$ и один раз по $t\in\mathrm{R}$) в области $D\subseteq\mathrm{R}^{m+1}$ БФ (15) обозначается через $\left\langle C^{(m,1)}(D)\right\rangle$. Подробнее обо всех этих понятиях см. [7]. Дальше ради простоты записи $n=1,\quad m=2$ и вместо переменных с индексами используются переменные без индексов, а именно, вместо $\langle u_0;\,u_1\rangle$ – $\langle v\,;\,u\rangle$, вместо $\langle x_1;\,x_2\rangle$ – $\langle x\,;\,y\rangle$ (однако, все результаты верны для произвольного $m=N$).

Рассмотрим относительно барифункции (БФ)

$$\langle w(x,y,t)\rangle=\langle v(x,y,t);\,u(x,y,t)\rangle\in\left\langle C^{(3,1)}(R^2\times R_+)\right\rangle$$

над БА $\langle C\rangle_s^2$ линейное баридифференциальное уравнение (ЛБДУ) в частных производных (ЧП) третьего порядка вида

$$\partial_t^1\langle w\rangle=a_1\partial_x^3\langle w\rangle+a_2\partial_y^3\langle w\rangle+c_1\partial_x^1\langle w\rangle+c_2\partial_y^1\langle w\rangle\,, \tag{12}$$

которое согласно (1)-(11) барисвязывает в одно целое систему “обычных” ДУЧП относительно первой v и второй u барикомпонент БФ $\langle w\rangle$:

$$\partial_t^1 v=a_1\partial_x^3 v+a_2\partial_y^3 v+c_1\partial_x^1 v+c_2\partial_y^1 v; \tag{13}$$

$$\begin{gathered}\partial_t^1 u=a_1\partial_x^3 u+a_2\partial_y^3 u+3a_1v_1\partial_x^2 u+3a_2v_2\partial_y^2 u+\\ +(3a_1\partial_x^1 v_1+3a_1v_1^2+c_1)\,\partial_x^1 u+(3a_2\partial_y^1 v_2+3a_2v_2^2+c_2)\,\partial_y^1 u\,,\end{gathered} \tag{14}$$

где a_k , b_k $(k = 1\,,\ 2)$ – не зависящие от x и y параметры БДУ (12),

$$v_1 = \partial_x^1 v/v\,, v_2 = \partial_y^1 v/v\,,. \tag{15}$$

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. *Множества V и U решений v ДУ* (13) *и соответствующих решений u ДУ* (14) *в барисвязке $\langle v\,;\ u\rangle$ образуют барилинейное пространство $\langle\, W\rangle = \langle\, V\ ;\ U\rangle$ барирешений $\langle w\rangle = \langle v\,;\ u\rangle$ БДУ (12), т.е. если для каждого $\xi \in \Xi$ $\ v\,(x, y, t;\, \xi)$ – решение ДУ* (13), *а $u\,(x, y, t;\, \xi)$ – соответствующее решение ДУ* (14), (15), *то для любой допустимой функции $C(\xi)$ $(\xi \in \Xi)$ функции*

$$v(x, y, t) = \int\limits_{\Xi} C(\xi)\, v(x, y, t; \xi)\, d\xi\,,$$

$$u(x, y, t) = \int\limits_{\Xi} C(\xi)\, v(x, y, t; \xi)\, u(x, y, t; \xi) d\xi \Big/ v(x, y, t)$$

решения ДУ (13) *и* (14), (15) *соответственно.*

Теорема 2. *Если v – решение ДУ* (13), *то* (15) *– решение системы нелинейных ДУЧП 3-го порядка*

$$\begin{aligned}\partial_t v_1 &= \partial_x \bigl(a_1 \partial_x^2 v_1 + a_2 \partial_y^2 v_2 + 3a_1 v_1 \partial_x v_1 + 3a_2 v_2 \partial_y v_2 + a_1 v_1^3 + a_2 v_2^3 + c_1 v_1 + c_2 v_2\bigr),\\ \partial_t v_2 &= \partial_y \bigl(a_1\, \partial_x^2 v_1 + a_2 \partial_y^2 v_2 + 3a_1 v_1 \partial_x v_1 + 3a_2 v_2 \partial_y v_2 + a_1 v_1^3 + a_2 v_2^3 + c_1 v_1 + c_2 v_2\bigr),\end{aligned} \tag{16}$$

удовлетворяющее условию потенциальности $\partial_y^1 v_1 = \partial_x^1 v_2$ [8].

Система (16) является обобщением на двумерный случай одномерного ДУ (16) из работы [1]. Из теорем 1, 2 вытекают.

Следствие 1. *Если для каждого $\xi \in \Xi$ $\ v\,(x, y, t;\, \xi)$ – решение ДУ* (13), *то для любой допустимой функции $C(\xi)$ $(\xi \in \Xi)$ функции*

$$v_1(x, y, t) = \int\limits_{\Xi} C(\xi)\, \partial_x v(x, y, t; \xi)\, d\xi \Big/ \int\limits_{\Xi} C(\xi)\, v(x, y, t; \xi)\, d\xi,$$

$$v_2(x, y, t) = \int\limits_{\Xi} C(\xi)\, \partial_y v(x, y, t; \xi)\, d\xi \Big/ \int\limits_{\Xi} C(\xi)\, v(x, y, t; \xi)\, d\xi$$

– решение системы ДУ (16).

Следствие 2. *Если* $v(x, y, t)$ *– решение ДУ* (13) *являющееся одновременно по переменным* x *и* y *(*t *играет роль параметра) решением однородного ЛДУЧП 2-го порядка*

$$\partial_y^2 v(x, y, t) - a\partial_x^2 v(x, y, t) + bv(x, y, t) = 0, \tag{17}$$

где

$$a = (a_1 a_{02})/(a_2 a_{01}), \quad b = (c_2 - c_1 a_{02}/a_{01})/(3a_2),$$

a_{01}, a_{02} *– произвольные числа, то функция*

$$u = (3a_1\partial_x^2 v/v + c_1)/(6a_{01}) = (3a_2\partial_y^2 v/v + c_2)/(6a_{02}) \tag{18}$$

является решением нелинейного ДУЧП 3-го порядка вида

$$\partial_t^1 u - 6a_{01}u\,\partial_x^1 u - 6a_{02}u\partial_y^1 u - a_1\partial_x^3 u - a_2\partial_y^3 u = 3a_1 v_1\partial_x^2 u + 3a_2 v_2\partial_y^2 u, \tag{19}$$

где v_1 *и* v_2 *определены через* v *по формулам* (15).

Заметим, что при $a > 0$, $b > 0$ ДУ (17) является уравнением Клейна-Гордона (при $b = 0$ – волновым уравнением), а при $a < 0$ – уравнением Гельмгольца (при $b = 0$ – уравнением Лапласа). Соответственно нелинейное ДУ (19) является двумерным аналогом одномерного нелинейного ДУ

$$\partial_t^1 u - 6a_{01}u\,\partial_x^1 u - a_1\partial_x^3 u = 3a_1 v_1\partial_x^2 u,$$

из работ [5, 6], где оно трактовалось как возмущенное "переменнным" диффузионным членом $3a_1 v_1\partial_x^2 u$ классическое одномерное уравнение КдФ. Поэтому естественно и ДУ (19) трактовалось как "формальное" двумерное уравнение КдФ

$$\partial_t^1 u - 6a_{01}u\partial_x^1 u - 6a_{02}u\partial_y^1 u - a_1\partial_x^3 u - a_2\partial_y^3 u = 0, \tag{20}$$

возмущенное "переменным" диффузионным членом

$$(3a_1 v_1(x, y, t)\,\partial_x^2 + 3a_2 v_2(x, y, t)\,\partial_y^2)\,u.$$

$$v(x, y, t) = V(\xi\,x + \eta\,y + \tau\,t + \alpha) = V(s) \quad (s = \xi\,x + \eta\,y + \tau\,t + \alpha), \tag{21}$$

где ξ, η, τ, α – параметры (произвольные числа). Подставляя (21) в (13) и решая полученное ДУ, найдем, что

$$V(s) = C_1 + C_2 ch\left\langle \lambda\,s + \beta\right\rangle, \tag{22}$$

где

$$\lambda = \sqrt{(\tau - c_1\xi - c_2\eta)\,/\,(a_1\xi^3 + a_2\eta^3)},$$

C_1, C_2, β – произвольные постоянные. Затем, подставляя (22) в (17), получим, что параметры ξ, η, τ связаны отношением

$$(\eta^2 - a\xi^2)\,\lambda^2 + b = 0. \tag{23}$$

$$b = 0. \tag{24}$$

Тогда из (23) следует, что

$$\eta = \pm\sqrt{a}\,\xi, \tag{25}$$

а τ – любое число. Подставляя (25) в (22), получим сначала решение ДУ (13) типа бегущей волны

$$v(x, y, t) = C_1 + C_2 ch \left\langle \lambda\,(\xi\, x \pm \sqrt{a}\,\xi\, y + \tau\, t) + \beta \right\rangle, \tag{26}$$

а потом, согласно (18), решение ДУ (19) вида

$$u(x, y, t) = \frac{1}{6a_{01}} \left(c_1 + 3a_1\lambda^2\xi^2 - 3a_1 C_1 \lambda^2\xi^2 \left(C_1 - C_2 + \right.\right.$$

$$\left.\left. +2C_2 ch^2 \left(\frac{\lambda}{2}\,(\xi\, x \pm \sqrt{a}\,\xi\, y + \tau\, t) + \beta\right)\right)^{-1}\right), \tag{27}$$

где с$_1$, C_1, C_2, ξ, τ, β – произвольные постоянные. Полагая в (27) $C_1 = C_2$, получим

$$u(x, y, t) = \frac{1}{6a_{01}}\left(c_1 + 3a_1\lambda^2\xi^2 - \frac{3}{2}a_1\lambda^2\xi^2 ch^{-2}\left(\frac{\lambda}{2}(\xi x \pm \sqrt{a}\xi y + \tau t) + \beta\right)\right), \tag{28}$$

где c_1, ξ, τ, β – произвольные постоянные. Понятно, что решения (27), (28) – это двумерные уединенные волны – двумерные барисоны, скорость движения которых

$$\vec{v} = -\,\tau \big/ \left(\xi\sqrt{1 + a}\right)\,\vec{e}\,, \quad \vec{e} = (1\,,\ a)\big/\sqrt{1 + a} \tag{29}$$

пропорциональна их амплитуде (свойство характерное солитонам), а направление $\vec{e}$ фиксировано и зависит только от параметра a. Заметим, что условие (24), при котором получен этот результат, выполняется, если, например, $c_1 = c_2 = 0$.

Теперь второй случай – условие (24) не выполняется. Тогда из (23) находим

$$\tau = c_1\xi + c_2\eta + (a_{01}c_1 - a_{02}c_2)\big/\left(a_{01}a_1\xi^2 - a_{02}a_2\eta^2\right). \tag{30}$$

В этом случае решение (18) ДУ (19) имеет вид аналогичный (27) (при $C_1 = C_2$ – (28)), а именно,

$$u(x,y,t)=\frac{1}{6a_{01}}\left(c_1+3a_1\lambda^2\xi^2-\frac{3}{2}a_1\lambda^2\xi^2 ch^{-2}\left(\frac{\lambda}{2}(\xi x+y\eta+\tau t)+\beta\right)\right), \qquad (31)$$

где параметр τ – по формуле (30), а c_1, c_2, ξ, η, β – произвольные постоянные. Но теперь скорость (29) имеет вид

$$\vec{v} = -\tau \Big/ \left(\sqrt{\xi^2+\eta^2}\right) \vec{e}\,, \quad \vec{e} = (\xi\,,\ \eta)\Big/\sqrt{\xi^2+\eta^2},$$

и ввиду произвольности параметров ξ, η может иметь, в отличие от случая (24), любое направление.

Понятно, что рассмотренные два случая не исчерпывают всех решений типа двумерных барисонов у ДУ (19). Но в обоих этих случаях переменный диффузионный член в правой части ДУ (19) имеет вид (при $C_1 = C_2$)

$$3\,(a_1 v_1(x,y,t)\,\partial_x^2 + a_2 v_2(x,y,t)\,\partial_y^2) = 3\lambda\, th\left(\frac{\lambda}{2}\,(\xi\, x + \,y\,\eta + \tau\, t) + \beta\right)\cdot$$

$$\cdot(a_1\xi\,\partial_x^2 + a_2\eta\,\partial_y^2) \qquad (32)$$

и, тем самым, определяет параметры ξ, η барисона (31) ("управляет" им). Далее, переменные коэффициенты диффузии в (32) выражаются через решения (15) системы ДУ (16). Отметим следующее вытекающее из теоремы 1 полугрупповое свойство решений этой системы.

Теорема 3. *Если* $\vec{v}_k = (v_1\,,\ v_2)_k = (v_{1k}\,,\ v_{2k})\quad (k = 1\,,\ 2)$ *– решения системы ДУ* (16) *и*

$$p_{1k}(y,t)=\exp\left(\int_0^t\left(\begin{matrix}a_1\partial_x^2 v_{1k}+a_2\partial_y^2 v_{2k}+3a_1 v_{1k}\partial_x v_{1k}+3a_2 v_{2k}\partial_y v_{2k}+\\+a_1 v_{1k}^3 + a_2 v_{2k}^3 + c_1 v_{1k} + c_2 v_{2k}\end{matrix}\right)\Bigg|_{x=x_0} dt\right),$$

$$p_{2k}(x,t)=\exp\left(\int_0^t\left(\begin{matrix}a_1\partial_x^2 v_{1k}+a_2\partial_y^2 v_{2k}+3a_1 v_{1k}\partial_x v_{1k}+3a_2 v_{2k}\partial_y v_{2k}+\\+a_1 v_{1k}^3 + a_2 v_{2k}^3 + c_1 v_{1k} + c_2 v_{2k}\end{matrix}\right)\Bigg|_{y=y_0} dt\right),$$

то

$$\vec{v}=\vec{v}_1\dot{+}\vec{v}_2=\left(\frac{\sum_{k=1}^2 v_{1k}p_{1k}\exp\int_{x_0}^x v_{1k}dx}{\sum_{k=1}^2 p_{1k}\exp\int_{x_0}^x v_{1k}dx}, \frac{\sum_{k=1}^2 v_{2k}p_{2k}\exp\int_{x_0}^x v_{2k}dx}{\sum_{k=1}^2 p_{21k}\exp\int_{x_0}^x v_{2k}dx}\right) \qquad (33)$$

– решение системы ДУ (16).

Тем самым, множество решений системы (16) образуют относительно операции “сложения” (33) коммутативную полугруппу без “нуля”. Кроме того, формула (33) позволяет по известным решениям системы ДУ (16) строить ее новые решения, а заодно исследовать такой важный вопрос как “взаимодействие” барисонов вида (27) ((28)). Но об этом и других решениях ДУ (16), (19) (и (20)) будет рассказано в последующих работах автора (одномерный случай подробно исследован в [5, 6]).

Библиографический список

1. *Бородин, А.В.* Барианализ и многомерные уравнения типа Бюргерса и Навье-Стокса [Текст] / А.В. Бородин // Труды пятых Колмогоровских чтений. – Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2007. – С. 70-77.
2. *Бородин, А.В.* Барианализ и точные решения уравнения типа Навье-Стокса [Текст] / А.В. Бородин // сб. тр. XIX МНК ММТТ-21. В 10-и т. – Т. 1. – Саратов: СГТУ, 2008.
3. *Бородин, А.В.* Многомерные нелинейные уединенные волны – барисоны [Текст] / А.В. Бородин // сб. тр. XXII МНК ММТТ-22. В 10-и т. – Т. 1. – Псков: Изд-во ПГПИ, 2009.
4. *Бородин, А.В.* Барианализ точных решений нелинейных эволюционных уравнений [Текст] / А.В. Бородин // Ярославский педагогический вестник, 2007. – № 3 (52). – С. 72-79.
5. *Бородин, А.В.* Спектральные бариалгебры и их приложения. I [Текст] / А.В. Бородин // Вестник ЯГТУ: сб. науч. тр. – Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2004. – Вып. 4. – С. 192-206.
6. *Бородин, А.В.* Спектральные бариалгебры и их приложения. II [Текст] / А.В. Бородин // Вестник ЯГТУ: сб. науч. тр. – Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2005. – Вып. 5. – С. 93-114.
7. *Бородин, А.В.* Многомерный барианализ и его приложения [Текст] / А.В. Бородин. – Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2005. – Ч. I. – 432 с.
8. *Инфельд, Э.* Нелинейные волны, солитоны и хаос [Текст] / Э. Инфельд, Дж. Роуландс. – М.: Физматлит, 2006. – 480 с.

Задачи классификации и H-полярное разложение матрицы

Ю.И. Большаков

Пусть матрицы X, $H \in \mathbb{C}^{n\times n}$; $det\, H \neq 0$, $H^* = H$. Определим H-сопряженную к X матрицу $X^{[*]}$ следующим соотношением: $X^{[*]} = H^{-1}X^*H$. Матрицу $S \in \mathbb{C}^{n\times n}$ назовем H-самосопряженной, если $S^{[*]} = S$, матрицу $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ – H-унитарной, если $U^{[*]}U = I$.

Хорошо известно, что если H – положительно определенная матрица, то $X = US$, где U – унитарная, S – положительно определенная.

В общей же ситуации, когда H лишь невырожденная самосопряженная, представления матрицы $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ в виде

$$X = US, \tag{1}$$

где U – H-унитарная, S – H-самосопряженная, не существует, в чем легко убедиться на следующем примере.

Пример. Пусть $X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Поскольку матрица $X^{[*]}X$ имеет собственные числа $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = -1$, то корень квадратный из $X^{[*]}X$ не существует, откуда непосредственно следует, что представления (1) для матрицы $X \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ не существует. То же самое утверждение имеет место для пары $(X, -H)$. Однако, как нетрудно убедиться, для матриц $(Y, G) = (X \oplus X, H \oplus (-H))$. Имеет место G-полярное разложение $Y = US$, где $U = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Более того, $Z^{[*]}Z = S$. Здесь $Z = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, сопряжение $[*]$ берется относительно матрицы $G = H \oplus (-H)$. На самом деле этот факт имеет место в общей ситуации. Именно, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Если матрица $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ допускает H-полярное разложение (1), то X допускает и разложение* (2):

$$X = \tilde{U}\tilde{S}, \tag{2}$$

где $\tilde{U}$ – H-унитарная, $\tilde{S}$ – H-самосопряженная и не имеющая отрицательных собственных чисел матрица.

Доказательство. Не нарушая общности в рассуждениях будем считать, что в разложении (1) матрица S имеет канонический вид: $S = \begin{bmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} H_1 & 0 \\ 0 & H_2 \end{bmatrix}$; S_1 – прямая сумма всех жордановых клеток, отвечающих всем отрицательным собственным числам S S_2 – оставшая часть прямой суммы S. S_i, $H_i \in \mathbb{C}^{n_i\times n_i}$, $S_1^{[*]_1} = S_1$, $S_2^{[*]_2} =$

S_2, $H_1^* = H_i$, $det\ H_i \neq 0$, $i = 1, 2$; $n_1 + n_2 = n$. Для матрицы $U = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 \\ U_3 & U_4 \end{bmatrix}$, в которой $U_1 \in \mathbb{C}^{n_1 \times n_1}$ $U_2 \in \mathbb{C}^{n_1 \times n_2}$, $U_3 \in \mathbb{C}^{n_2 \times n_1}$ $U_4 \in \mathbb{C}^{n_2 \times n_2}$, требование $U^{[*]}U = I$ равносильно системе:

$$\begin{cases} H_1^{-1}U_1^*H_1U_1 + H_1^{-1}U_3^*H_2U_3 = I, \\ H_1^{-1}U_1^*H_1U_2 + H_1^{-1}U_3^*H_2U_4 = 0, \\ H_2^{-1}U_2^*H_1U_1 + H_2^{-1}U_4^*H_2U_3 = 0, \\ H_2^{-1}U_2^*H_1U_2 + H_2^{-1}U_4^*H_2U_4 = I. \end{cases} \tag{3}$$

Рассмотрим матрицы $\tilde{U} = UJ$, $\tilde{S} = JS$, где $J = \begin{bmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$ и $(-I) \in \mathbb{C}^{n_1 \times n_1}$, $I \in \mathbb{C}^{n_2 \times n_2}$. Очевидно, что $\tilde{U}\tilde{S} = US$ и, кроме того, $\tilde{S} = \begin{bmatrix} -S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{bmatrix}$, $\tilde{S}^{[*]} = \begin{bmatrix} -H_1S_1^*H_1 & 0 \\ 0 & H_2S_2^*H_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{bmatrix} = \tilde{S}$. Поскольку $\tilde{U}$ получается из матрицы U заменой $U_1 \mapsto -U_1$, $U_3 \mapsto -U_3$, $U_2 \mapsto U_2$, $U_4 \mapsto U_4$, то при этой замене система (3) не изменится, и, следовательно, будет иметь место соотношение $\tilde{U}^{[*]}\tilde{U} = I$.

Из теоремы 2.2. работы [1] следует, что H-самосопряженная матрица S', не имеющая отрицательных собственных чисел, представима в виде: $S = Z^{[*]}Z$.

Следствие 1. *Если матрица X допускает H-полярное разложение* (1), *то X допускает и разложение* (2) *с H-унитарной матрицей $\tilde{U}$ и H-самосопряженной $\tilde{S}$ вида $\tilde{S} = Z^{[*]}Z$, $Z \in \mathbb{C}^{n \times n}$.*

Заметим, что разложение (2), как это видно из следствия 1, служит естественным обобщением полярного разложения матрицы оператора, действующего в унитарном пространстве, поскольку в последнем случае $H = I$ и $\tilde{S} = Z^*Z$ – неотрицательно определенная матрица.

Задачей нашего ближайшего рассмотрения является нахождение критерия существования разложения (1). С этой целью введем два отношения эквивалентности $\sim$ и ρ на множестве $\mathbb{C}^{n \times n}$: 1) $X \sim Y \quad \Leftrightarrow$ существует пара H-унитраных матриц $(U,\ V)$ такая, что $Y^{[*]} = UXV$; 2) $X\rho Y \quad \Leftrightarrow$ существует H-унитарная матрица W такая, что $Y^{[*]}Y = W^{-1}X^{[*]}XW$; $X, Y, U, V, W \in \mathbb{C}^{n \times n}$.

Из леммы А.И. Мальцева [2, с. 242-244], обобщенной на случай H-унитарного пространства, следует, что $Y = UXV$, что равносильно, (4). Имеем

$$\begin{cases} Y^{[*]}Y = V^{-1}X^{[*]}XV \\ V(KerY) = KerX. \end{cases} . \tag{5}$$

Следовательно, каждый класс по эквивалентности ρ состоит из классов эквивалентности $\sim$ и их, как будет ясно из дальнейшегор, канечное число.

Возвращаясь к задаче H-полярного разложения, заметим, что матрица X допускает H-полярное разложение тогда и только тогда, когда аналогичные разложения допускает любая матрица из класса по эквивалентности $\sim$ ее содержащего. В самом деле, пусть $X = WS$. Тогда $Y = UXV \Leftrightarrow Y = \tilde{U}SV = \tilde{U}VV^{-1}SV = \tilde{W}\tilde{S}$, где $\tilde{W} = \tilde{U}V$ – H-унитарная, $\tilde{S} = V^{-1}SV$ – H-самосопряженная матрицы.

Заметим, что система (5) выгодно отличается от (4) тем, что матрицы $X^{[*]}X$ и $Y^{[*]}Y$ являются H-самосопряженными.

Зафиксируем класс по эквивалентности ρ с помощью канонической пары $(X^{[*]}X,\ H)$. Рассмотрим подгруппу G, состоящую из H-унитарных матриц, оставляющих на месте пару $(X^{[*]}X,\ H) \mapsto (V^{-1}X^{[*]}V,\ H)$. Поскольку $V(Ker\ X^{[*]}X) = Ker\ X^{[*]}X$ и $Ker\ X \subset Ker\ X^{[*]}X$, то, согласно (5), для решения задачи классификации по эквивалентности $\sim$ достаточно зафиксировать класс по эквивалентности ρ, т.е. фиксировать H-самосопряженную матрицу $X^{[*]}X$, после чего перечислить все неэквивалентные подпространства $L \subset Ker\ X^{[*]}X$ относительно G. Два пространства $L_1,\ L_2 \subset KerX^{[*]}X$ эквивалентны, если существует $V \in G$ такая, что $VX^{[*]}X = X^{[*]}XV$ и $V(L_1) = L_2$.

В работе [1] проведена эта классификация для случая нильпотентной матрицы $X^{[*]}X$.

Теорема 2. *Существует биекция между классами эквивалентности подпространств $L \subset Ker\ X^{[*]}X$ и целочисленными $3 \times 2s$ матрицами вида*

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} n_1 & n_2 & \dots & n_s & l_1^0 & l_2^0 & \dots & l_s^0 \\ k_1^+ & k_2^+ & \dots & k_s^+ & l_1^+ & l_2^+ & \dots & l_s^+ \\ k_1^- & k_2^- & \dots & k_s^- & l_1^- & l_2^- & \dots & l_s^- \end{array}\right). \tag{6}$$

Здесь левая $(3\times s)$-матрица определяет каноническую форму матрицы $X^{[*]}X:\ k_i^+$ – число жордановых клеток матрицы $X^{[*]}X$, отвечающих собственному числу $\lambda = 0$ размера $n_i \times n_i$, и значения $\varepsilon_i = 1$ соответствующего прямого слогаемого из H; k_i^- – аналогичное число клеток с $\varepsilon_i = -1,\ i = 1, 2,\ \dots, s;\ \ n_1 > n_2 > \dots > n_s$. Правая $(3 \times s)$-матрица определяет подпространство $L \subset Ker\ X^{[*]}X:\ l_i^+$ – число первых векторов из числа k_i^+ векторов канонической структуры $X^{[*]}X,\ l_i^0$ – число векторов, каждое из которых является суммой двух векторов: первый вектор суммы из числа k_i^+, а второй – из числа k_i^-. Причем элементы матрицы (6) должны удовлетворять следующей системе целочисленных неравенств:

$$\begin{cases} l_i^+ + l_i^0 \le k_i^+ \\ l_i^- + l_i^0 \le k_i^-, \end{cases} \quad l = 1, 2, \ldots, s. \tag{7}$$

Для формулировки критерия H-полярного разложения матрицы X введем следующее определение.

Определение 1. Матрицу $X^{[*]}X$, определенную в (6), назовем цепью, если $n_2 = n_1 - 1,\ n_3 = n_1 - 2,\ \ldots, n_i = n_1 - i + 1, \ldots, n_s = n_1 - s + 1,$

В [3] показано, что критерий существования H-полярного разложения достаточно сформулировать для максимальных цепей, из которых составлена матрица $X^{[*]}X$.

Теорема 3. *Пусть H – невырожденная комплексная самосопряженная $n \times n$-матрица и пусть для заданной матрицы $X \in \mathbb{C}^{n \times n}$ матрица $X^{[*]}X$ представляет собой цепь, состоящую из четного числа нильпотентных звеньев, если цепь не содержит звеньев длины* 1, *и без ограничения на их количество, если цепь содержит звенья длины* 1. *При этом тройка $(X^{[*]}X,\ H,\ Ker\, X)$ определена целочисленной матрицей K вида* (6) *с натуральными $n_j = p - j + 1,\ j = 1, 2, \ldots, s$. Тогда матрица X допускает H-полярное разложение тогда и только тогда, когда целочисленные параметры, составляющие матрицу K, удовлетворяют системе*

$$\begin{cases} k_t^+ = l_t^+ + l_{t-1}^+ + l_t^0, \\ k_t^- = l_t^- + l_{t-1}^- + l_t^0, \end{cases} \quad t = 1, 2, \ldots, s, \tag{8}$$

если $n_s = 1$. Здесь $l_0^+ = l_0^- = 0$. Если же $n_s > 1$, то исключением в формуле (8) *будут служить лишь параметры k_s^+ и k_s^-, для которых $l_s^+ = l_s^- = 0$.*

Остаетется ответить на вопрос: как найти все H-полярные разложения $(U,\ S)$ данной матрицы X, если известно одно из них $(U_0,\ S_0)$? Для нахождения второй составляющей S достаточно перечислить все H-унитарные W и такие, что

$$WS_0W = S_0. \tag{9}$$

В самом деле, если $US = U_0S_0$, то $S = U^{-1}U_0S_0 = WS_0$, где $W = U^{-1}U_0$ – H-унитарная матрица. Требование $S^{[*]} = S$ приводит к равенству (9). Обратно, если $S = WS_0$, где W удовлетворяет (9), то к равенству (1) приводит пара $(U_0W^{-1},\ WS_0) = (U,\ S)$: $US = U_0S_0 = X$. Пусть нам удалось перечислить все матрицы S, для которых существует H-унитарная U и такая, что $US = X$. Зафиксируем $S = S_0, U = U_0$. Найдем все такие H-унитарные V такие, что

$$VS_0 = U_0S_0. \tag{10}$$

Соотношение (10) равносильно требованию

$$V|Im\ S_0 = U_0|Im\ S_0. \tag{11}$$

Иначе говоря, для нахождения всех H-унитарных V достаточно построить все продолжения Витта на подпространство $Im\ S_0$. А последняя задача решена в работе [4].

Библиографический список

1. *Bolshakov, Y.* Unitary equivalence in an indefinite skalar product: an analogue of singular-value decomposition // Linear alg. appl. / Y. Bolshakov, B. Reichstein. – 222; 1995. – P. 155-226.
2. *Мальцев, А.И.* Основы линейной алгебры [Текст] / А.И. Мальцев. – М.: Наука, 1970. – 400 с.
3. *Большаков, Ю.И.* Критерий существования H-полярного разложения заданной матрицы при условии самосопряженности и кососамосопряженности матрицы H [Текст] / Ю.И. Большаков // – Труды пятых колмогоровских чтений. – Ярославль, 2007. – С. 66-70.
4. *Bolshakov, Yu.* Extension of isometries in finite-dimensional indefinite scalar product spaces and polar decompositions / Y. Bolshakov, C.V.M. van der Mee, A.C.M. Ran, B. Reichstein, L. Rodman. – SIAM I. Matrix anal. / appl, 1997. – V. 18. – № 3. – P. 752-774.

Полиномиальное квантование на комплексном гиперболоиде

О.В. Гришина

Группа $G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ состоит из комплексных матриц второго порядка вида:

$$g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

Для $\lambda \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, обозначим

$$a^{\lambda,k} = |a|^{\lambda}\big(\frac{a}{|a|}\big)^{k}.$$

Также мы будем использовать следующие обозначения “обобщенных степеней”:

$$a^{(n)} = a(a-1)\dots(a-n+1), \quad a^{[n]} = a(a+1)\dots(a+n-1).$$

Для комплексного σ и полуцелого m обозначим через $\mathcal{D}_{\sigma,m}$ пространство функций $\varphi(z)$ таких, что $\varphi(z), \widehat{\varphi}(z) \in C^\infty$, где $\widehat{\varphi}(z) = z^{2\sigma,2m}\varphi(-1/z)$. Представление $T_{\sigma,m}$ группы G действует на $\mathcal{D}_{\sigma,m}$ по формуле

$$\big(T_{\sigma,m}(g)\varphi\big)(z) = \varphi\Big(\frac{\alpha z+\gamma}{\beta z+\delta}\Big)(\beta z+\delta)^{2\sigma,2m}.$$

Меняя местами α с δ и β с γ, получаем контраградиентное представление $\widehat{T}_{\sigma,m}$:

$$\big(\widehat{T}_{\sigma,m}(g)\varphi\big)(z) = \varphi\Big(\frac{\delta z+\beta}{\gamma z+\alpha}\Big)(\gamma z+\alpha)^{2\sigma,2m}.$$

Представления $T_{\sigma,m}$ и $\widehat{T}_{\sigma,m}$ эквивалентны, эквивалентность задается отображением $\varphi \mapsto \hat{\varphi}$.

Оператор с ядром $(z-w)^{-2\sigma-4,-2m}$ сплетает $T_{\sigma,m}$ и $T_{-\sigma-2,-m}$. Нам удобнее использовать оператор с ядром $(1-zw)^{-2\sigma-4,-2m}$, который сплетает $T_{\sigma,m}$ и $\widehat{T}_{-\sigma-2,-m}$:

$$\widehat{T}_{-\sigma-2,-m}(g)A_{\sigma,m} = A_{\sigma,m}T_{\sigma,m}(g), \quad g \in G,$$

а также $\widehat{T}_{\sigma,m}$ и $T_{-\sigma-2,-m}$.

Введем на $\mathbb{C}^3$ билинейную форму $[x,y] = -x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$. Обозначим через $\mathcal{X}$ гиперболоид $[x,x]=1$. Это пространство может быть реализовано как пространство матриц

$$x = \frac{1}{2}\left(\begin{array}{cc} 1-x_3 & x_2-x_1 \\ x_2+x_1 & 1+x_3 \end{array}\right),$$

с определителем $\mathrm{detx} = 0$. Группа G действует на пространстве $Mat(2,\mathbb{C})$ следующим образом: $x \to g^{-1}xg$. На $\mathcal{X}$ она действует транзитивно, стационарной подгруппой точки $x^0 = (0,0,1)$ является подгруппа H диагональных матриц группы G. Под действием группы точка x^0 переходит в точку

$$x = (\alpha\gamma+\beta\delta, \alpha\gamma-\beta\delta, \alpha\delta+\beta\gamma).$$

Введем на $\mathcal{X}$ орисферические координаты ξ, η:

$$x = N^{-1}(\xi+\eta, \xi-\eta, 1+\xi\eta),$$

где $N = 1 - \xi\eta$, в матричной реализации:

$$x = \frac{1}{N}\begin{pmatrix} -\xi\eta & -\eta \\ \xi & 1 \end{pmatrix}.$$

Точка x^0 имеет координаты $\xi = 0,\ \eta = 0$. Элемент $g \in G$ переводит x^0 в точку x с координатами $\xi = \gamma/\delta,\ \eta = \beta/\alpha$, откуда $N = 1/\alpha\delta$.
На $\mathcal{X}$ имеются два оператора Лапласа Δ и $\overline{\Delta}$ (образующие в алгебре инвариантных дифференциальных операторов), где

$$\Delta = N^2\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta} \text{ и } \overline{\Delta} = \overline{N}^2\frac{\partial^2}{\partial\overline{\xi}\partial\overline{\eta}}.$$

Применим схему [1] квантования по Березину к пространству $\mathcal{X}$. В качестве алгебры операторов возьмем операторы $D = T_{\sigma,m}(X)$, где X – элементы универсальной обертывающей алгебры для алгебры Ли группы G, действующие на функциях от ξ, и $m \in (Z)$.

В качестве переполненной системы возьмем ядро сплетающего оператора $A_{-\sigma-2,-m}$, а именно

$$\Phi(\xi,\eta) = N^{2\sigma,2m} = (1-\xi\eta)^{2\sigma,2m}.$$

Определения ковариантных и контравариантных символов в точности повторяют определения из [1]. Например, ковариантный символ оператора D есть следующий многочлен на $\mathcal{X}$:

$$F(x) = F(\xi,\eta) = \frac{1}{\Phi(\xi,\eta)}(D \otimes 1)\Phi(\xi,\eta).$$

Предположим, что многочлены F и F_1 являются соответственно контравариантными и ковариантными символами одного и того же оператора D. Отображение $\mathcal{B} : F \mapsto F_1$ называется преобразованием Березина. Для многочленов F преобразование Березина $\mathcal{B}$ является дифференциальным оператором.

Теорема 1. *Преобразование Березина выражается через операторы Лапласа:*

$$\mathcal{B}(\Delta,\bar{\Delta}) = \frac{\Gamma(-\sigma-m+\lambda)\Gamma(-\sigma-m-\lambda-1)}{\Gamma(-\sigma-m)\Gamma(-\sigma-m-1)}\cdot$$
$$\cdot\frac{\Gamma(-\sigma+m+\mu)\Gamma(-\sigma+m-\mu-1)}{\Gamma(-\sigma+m)\Gamma(-\sigma+m-1)}\ \Big|_{\Delta=\lambda(\lambda+1),\bar{\Delta}=\mu(\mu+1)}\ .$$

Следовательно, при $\sigma \to -\infty$ преобразование Березина имеет асимптотику:

$$\mathcal{B} \sim 1 - \frac{1}{\sigma}(\Delta + \overline{\Delta}).$$

Таким образом, мы получаем

$$F_1 * F_2 = F_1F_2 - \frac{1}{\sigma}(N^2\frac{\partial F_1}{\partial \eta}\frac{\partial F_2}{\partial \xi} + \overline{N}^2\frac{\partial F_1}{\partial \overline{\eta}}\frac{\partial F_2}{\partial \overline{\xi}}) + \dots$$

Отсюда следует выполнение принципа соответствия.

Теорема 2. *Справедливо следующее разложение преобразования Березина:*

$$\mathcal{B} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Delta(\Delta - 1\cdot 2)(\Delta - 2\cdot 3)\dots(\Delta - (k-1)k)}{k!}\cdot\frac{1}{(-\sigma - m - 2)^{(k)}}\cdot$$

$$\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\overline{\Delta}(\overline{\Delta} - 1\cdot 2)(\overline{\Delta} - 2\cdot 3)\dots(\overline{\Delta} - (n-1)n)}{n!}\cdot\frac{1}{(-\sigma + m - 2)^{(n)}}.$$

Таким образом, в отличие от вещественного случая, для комплексного гиперболоида мы имеем счетное число полиномиальных квантований, они нумеруются целым числом n.

Библиографический список

1. *Molchanov, V.F., Volotova, N.B.* Finite dimensional analysis and polynomial quantization on a hyperboloid of one sheet. Вестник Тамбовского университета. Сер. естеств. и техн. науки, 1998. – Т. 3. – Вып. 1. – С. 65-78.

Дополнительное свойство тензора Вейля на слабо косимплектическом многообразии

Е.В. Кусова

Тензор Вейля является одним из инструментов исследования свойств многообразия. Он представляет собой часть тензора Римана с нулевым следом. В данной статье рассматривается тензор Вейля на слабо косимплектических структурах, вычисление компонент которого в присоединенной G-структуре позволило обнаружить ряд интересных фактов.

Пусть M^{2n+1} – нечетномерное гладкое многообразие размерности $2n+1$, $C^\infty(M)$ – алгебра гладких функций на M, $\mathrm{X}(M)$ – модуль гладких векторных полей на M, $g = \langle\cdot,\cdot\rangle$ – риманова метрика, d – оператор внешнего дифференцирования алгебры Грассмана гладкого многообразия M.

Определение. Контактной структурой на многообразии M^{2n+1} называется дифференциальная 1-форма η на M, такая, что в каждой точке многообразия

$$\eta \wedge \underbrace{d\eta \wedge \ldots \wedge d\eta}_{n \text{ раз}} \neq 0.$$

Многообразие с фиксированной на нем контактной структурой называется контактным многообразием [3]. Если на многообразии фиксирована четверка (η, ξ, Φ, g), где η – 1-форма, называемая *контактной*, ξ – структурный вектор, Φ – эндоморфизм модуля $\mathrm{X}(M)$ (*структурный эндоморфизм*). При этом:

$$\begin{aligned} &1)\, \eta(\xi) = 1; \quad 2)\, \eta \circ \Phi = 0; \quad 3)\, \Phi(\xi) = 0; \quad 4)\, \Phi^2 = -id + \eta \otimes \xi; \\ &5)\, \langle \Phi X, \Phi Y \rangle = \langle X, Y \rangle - \eta(X) \cdot \eta(Y), \quad X, Y \in \mathrm{X}(M). \end{aligned} \tag{1}$$

Многообразие с заданной четверкой называется *почти контактным метрическим многообразием.*

Почти контактная метрическая структура (η, ξ, Φ, g) называется *слабо косимплектической*, если $\nabla_X(\Phi)X = 0, X \in \mathrm{X}(M)$. Тензор $\Omega(X,Y) = \langle X, \Phi Y \rangle$ является дифференциальной 2-формой на M и называется *фундаментальной формой структуры.* Слабо косимплектической многообразие с замкнутой контакной формой называется *точнейше косимплектическим многообразием.*

Как известно [5], задание метрической AC$-$структуры на M внутренним образом определяет распадение модуля $\mathrm{X}(M)$ в прямую сумму фундаментальных распределений L и M: $\mathrm{X}(M) = \mathrm{L} \oplus \mathrm{M}$. Очевидно, L и M инвариантны относительно Φ и взаимно ортогональны, $dim\mathrm{L}{=}2n$, $dim\mathrm{M}{=}1$. Более того, пара $\left\{ \Phi|_{\mathrm{L}}, g|_{\mathrm{L}} \right\}$ на распределении L определяет почти эрмитову структуру.

В модуле $\mathrm{L}^{\mathrm{C}} = \mathrm{L} \otimes \mathrm{C}$ естественно определены взаимно-дополнительные проекторы $\pi = \frac{1}{2}\left(id - \sqrt{-1}\, \Phi|_{\mathrm{L}}\right)$ и $\bar{\pi} = \frac{1}{2}\left(id + \sqrt{-1}\, \Phi|_{\mathrm{L}}\right)$ (под оператором $\Phi|_{\mathrm{L}}$, вообще говоря, понимается его комплексификация $\Phi^{\mathrm{C}} = \left(\Phi|_{\mathrm{L}}\right) \otimes id_{\mathrm{C}}$) [2].

Зафиксировав точку $p \in \mathrm{M}$, выберем в $\mathrm{L}|_p$ унитарный относительно эрмитовой метрики репер $\{p, e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. Построим репер модуля $\mathrm{L}_p^{\mathrm{C}} \oplus \mathrm{M}_p$:

$$\{p, \varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, \varepsilon_{\hat{1}}, \ldots, \varepsilon_{\hat{n}}\},$$

где $\varepsilon_0 = \xi_p, \varepsilon_a = \sqrt{2}\pi(e_a), \varepsilon_{\hat{a}} = \sqrt{2}\bar{\pi}(e_a), a = 1, \ldots, n,\ \hat{a} = a + n$. Построенный репер называется *репером, адаптированным структуре*, или A-

репером [5]. Как известно [5, 6], совокупность таких реперов определяет *G-структуру* на M. Эта G-структура называется *присоединенной.*

Хорошо известно, что на любом римановом многообразии M размерности больше двух внутренним образом определен тензор $W = W^i_{jkl}$ типа (3;1) называемый *тензором Вейля* или *тензором конформной кривизны многообразия.* Тензор Вейля обладает интересным свойством: он остается инвариантным при конформных преобразованиях метрики. То есть, если для данной метрики g ввести новую метрику $\tilde{g}_{ij} = e^{-2\Omega} g_{ij}$ при помощи некоторой функции Ω, то тензор Вейля не изменится. По этой причине тензор Вейля называют конформным тензором. Ковариантный тензор Вейля $W = W_{\overline{ij}kl} g_{ri} W^r_{jkl}$ при конформных преобразованиях метрики преобразуется по формуле $\tilde{W}_{\overline{ij}kl} e^{-2\Omega} W_{ijkl}$, то есть ковариантный тензор Вейля, вообще говоря, не является конформно инвариантным тензором, но условие равенства его нулю конформно инвариантно. Таким образом, тензор Вейля называют относительно конформным. Компоненты тензора Вейля на пространстве присоединенной G-структуры вычисляются по формуле

$$W_{\overline{ij}kl} R_{ijkl} + \frac{1}{2n-1}(r_{ik}g_{jl} + r_{jl}g_{jk} - r_{il}g_{jk} - r_{jk}g_{il}) + \frac{k(g_{jk}g_{il} - g_{jl}g_{ik})}{2n(2n-1)},$$

где R – тензор Римана-Кристоффеля, r – тензор Риччи, g – метрический тензор. Тензор Вейля может иметь нетривиальную форму только в пространствах размерости не меньше трех. В двухмерном и трехмерном пространствах тензор Вейля тождественно равен нулю.

Тензор Вейля обладает классическими свойствами тензора Римана–Кристоффеля. На слабо косимплектическом многообразии тензор Вейля обладает дополнительным свойством симметрии, а именно:

Теорема 1.

$$\langle W(\Phi X, \Phi Y)\Phi Z, \Phi V\rangle = \left\langle W\left(\Phi^2 X, \Phi^2 Y\right)\Phi^2 Z, \Phi^2 V\right\rangle.$$

где Φ-структурный эндоморфизм; X, Y, Z, V – векторные поля из модуля X(M).

Теорема 2. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1) *на просранстве присоединенной G-структуры компонента тензора Вейля $W_{\hat{a}0b0} = 0$;*

2) *тензор Вейля $W(X, \xi)\xi = 0$, где ξ – характеристическое векторное поле;*

3) *слабо косимплектическое многообразие является точнейше косимплектическим.*

Следствие. *Точнейшая косимплектичность многообразия есть конформно инвариантное свойство.*

Библиографический список

1. *Gray, A.* Curvature identities for Hermitian and almost Hermitian manifolds // Tohoku Math.J. – 1976. – V. 28. – P. 601-612.
2. *Blair, D.E., Showers, D.K.* Almost contact manifolds with Killing structures tensors // J. Diff. Geom. – 1974. – V. 9. – P. 577-582.
3. *Кириченко, В.Ф.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях [Текст] / В.Ф. Кириченко // М.: МПГУ, 2003. – 495 с.
4. *Kirichenko, V.F.* Sur le geometrie des variates approximativement cosymplectiques // C.r.Acad. Sci. Paris. – 1982. – 295-1. – C. 673-676.
5. *Кириченко, В.Ф.* Методы обобщенной эрмитовой геометрии в теории почти контактных многообразий [Текст] / В.Ф. Кириченко // Итоги науки и техники. Проблемы геометрии. – М.: ВИНИТИ, 1986. – Т. 18. – С. 25-71.
6. *Кириченко, В.Ф.* Аксиома Ф-голоморфных плоскостей в контактной геометрии [Текст] / В.Ф. Кириченко // Известия АН СССР. Сер. мат. 48. – 1984. – № 4. – С. 711-734.

Преобразования Беклунда и их аналоги в элементарной математике

И.И. Нараленкова, Е.В. Шивринская

В последнее время ряд фундаментальных результатов в различных разделах физики и механики сплошных сред удалось получить с помощью групповых методов анализа нелинейных дифференциальных уравнений, которые часто позволяют выявить скрытые инварианты симметрии рассматриваемой системы уравнений и находить их новые решения [1, 2].

В групповых методах поиска решений нелинейных дифференциальных уравнений важную роль играют преобразования Беклунда по имени шведского математика, применившего в 1875 г. подобные преобразования в задаче дифференциальной геометрии по теории поверхностей с постоянной отрицательной кривизной, описываемой уравнением sin-Гордон. Прежде чем для этого конкретного примера выписать преобразования Беклунда заметим, что иногда для нелинейного уравнения удается найти подходящую замену переменных, превращающую его в линейное. Подобным приемом были получены уравнения Чаплыгина и Трикоми, играющие важную роль в задачах околозвуковой газовой динамики, математический тип которых (эллиптический при дозвуке и гиперболический при сверхзвуке) определяется одним безразмерным параметром – числом Маха для уравнения Чаплыгина или областью течения (верхняя или нижняя полуплоскость) для уравнения Трикоми [3].

Однако попытка в общем случае найти преобразование, приводящее нелинейное уравнение к линейному, по-видимому, безнадежна. Возможна другая задача: найти преобразования, которые исходное уравнение переводят в самих себя. Такие преобразования называют преобразованиями типа Беклунда, позволяющие из простых решений получать новые и все более сложные решения исходного нелинейного уравнения.

Для уравнения sin-Гордон $u_{xy} = \sin u$ преобразования Беклунда имеют вид:

$$v_x = u_x + 2p \sin \frac{v+u}{2}, \quad v_y = -u_y + \frac{2}{p} \sin \frac{v-u}{2}, \tag{1}$$

где p – произвольный параметр. Из этих соотношений дифференцированием по x и y можно получить

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{xy} = u_{xy} + p\,(v_y + u_y) \cos \frac{v+u}{2} \\ v_{xy} = -u_{xy} + \frac{1}{p}\,(v_x - u_x) \cos \frac{v-u}{2} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} v_{xy} = u_{xy} + 2 \sin \frac{v-u}{2} \cos \frac{v+u}{2} \\ v_{xy} = -u_{xy} + 2 \sin \frac{v+u}{2} \cos \frac{v-u}{2} \end{array} \right. .$$

Вычитая эти соотношения друг из друга, получим $u_{xy} = \sin u$, т.е. уравнение sin-Гордон относительно неизвестной u; а складывая эти же соотношения, получаем $v_{xy} = \sin v$, т.е. тоже самое уравнение, но относительно неизвестной v. Таким образом, преобразования Беклунда оставляют уравнение sin-Гордон (с точностью до замены u на v) неизменным.

Покажем, как с помощью преобразований (1) получить новые решения уравнения sin-Гордон. Возьмем тривиальное решение $u \equiv 0$, тогда соотношения (1) принимают вид

$$v_x = 2p \sin \frac{v}{2}, \quad v_y = \frac{2}{p} \sin \frac{v}{2},$$

откуда следует, что $v_x = p^2 v_y$ и, следовательно, v можно искать в виде $v = f\left(px + \frac{y}{p}\right)$. Тогда $v_x = 2p \sin \frac{v}{2} \Leftrightarrow f_\xi = 2 \sin \frac{f}{2}$, где $\xi = px + \frac{y}{p}$, откуда, интегрируя, получим

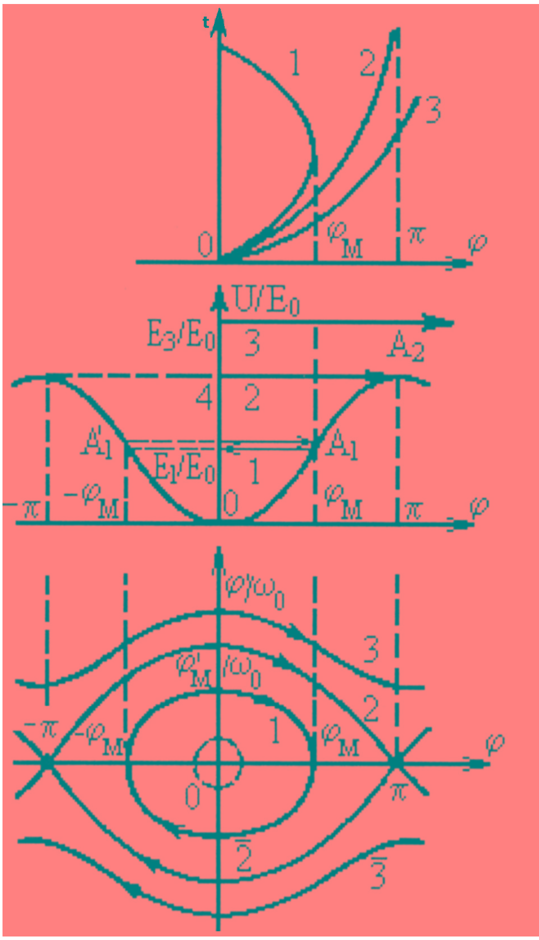
$$v = \pm 4 arctg \left[C \cdot \exp\left(px + \frac{y}{p} \right) \right] \tag{2}$$

– решение, отвечающее солитону в виде уединенной волны. Если теперь это решение подставить в преобразования (1) вместо переменной u и проинтегрировать получившиеся уравнения, то можно получить новое решение

$$v_* = 4arctg\left\{\frac{p^2-1}{p^2+1}\cdot\frac{sh\left[\frac{x+y}{2}\left(p+\frac{1}{p}\right)\right]}{ch\left[\frac{x-y}{2}\left(p-\frac{1}{p}\right)\right]}\right\}, \qquad (3)$$

отвечающее взаимодействию двух солитонов типа уединенных волн.

Подчеркнем, что элементарному введению в теорию солитонов и их удивительным свойствам посвящен один из выпусков серии "Библиотечка "Квант" [4], откуда позаимствован "фазовый портрет" математического маятника (рис. 1).



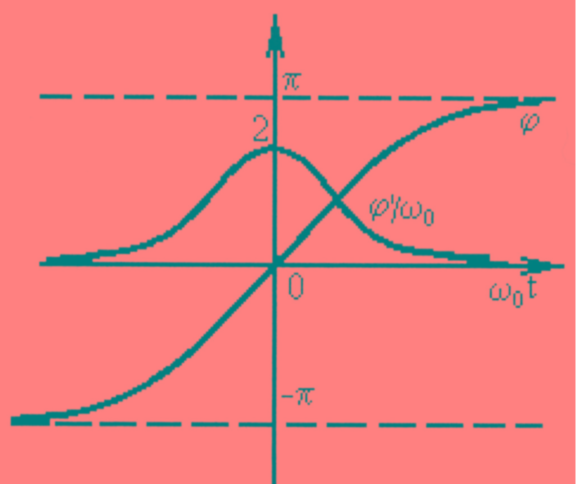


Рис. 1 Рис. 2

Уравнение движения маятника хорошо известно:

$$\varphi_{tt} = -\omega_0^2 \sin \varphi,$$

где $\omega_0^2 = \frac{g}{L}$, φ – угол отклонения от вертикали, L – длина маятника, g – ускорение свободного падения. Закон сохранения энергии в безразмерных переменных можно представить в форме

$$\left(\frac{\varphi'}{\omega_0}\right)^2 + 4\sin^2\frac{\varphi}{2} = \frac{E}{E_0}, \quad E_0 = \frac{1}{2}m\frac{\omega_0^2}{L^2}.$$

В самом интересном случае, когда E=4E$_0$ уравнение энергии можно свести к более простому виду:

$$\varphi' = 2\omega_0 \cos\frac{\varphi}{2} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \varphi = \pi - 4arctg\left(L^{-\omega_0 t}\right) \\ \varphi' = \frac{4\omega_0}{L^{\omega_0 t} + L^{-\omega_0 t}} \end{array} \right. , \tag{2*}$$

графики которых дают уединенную волну и так называемый “кинк” (рис. 2).

“Столкновение” кинка с антикинком, когда они проходят друг сквозь друга, не изменяя своей формы легко построить суперпозицией двух решений типа (2*). Пульсирующее связанное состояние кинка и антикинка называют “бионом” или “бризером”.

Более сложные решения, чем (2) или (2*) можно получить из связи между четырьмя решениями (φ_0, φ_1, φ_2 и φ_3) уравнения sin-Гордон из соотношения

$$tg\left(\frac{\varphi_3 - \varphi_0}{2}\right) = \left(\frac{c_2 + c_1}{c_2 - c_1}\right) tg\left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right), \tag{4}$$

где c$_1$ и c$_2$ – const. Применение (4) при трех известных решениях φ_0, φ_1 и φ_2 позволяет находить новое φ_3 решение уравнения sin-Гордон.

Заметим, что сведение нелинейного уравнения Бюргерса (модель вязкой жидкости при постоянном давлении) к линейному уравнению теплопроводности или диффузии

$$u_t + u \cdot u_x = v \cdot u_{xx} \Rightarrow \psi_t = v \cdot \psi_{xx}$$

подстановкой Коула-Хопфа $u = -2v \cdot (\ln\psi)_x = -2v \cdot \frac{\psi_x}{\psi}$ тоже можно записать как преобразование типа Беклунда: $\psi_x = -\frac{1}{2v}u \cdot \psi$, $\psi_t = -\left(2vu_x - u^2\right) \cdot \frac{\psi}{4v}$.

Выше основное внимание было уделено уравнению sin-Гордон, однако исторически первым “солитонным” уравнением было уравнение Кортвега и де Фриза (КдФ), которое описывает уединенные волны [2] на “мелкой воде”:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial z} + \beta\frac{\partial^3}{\partial x^3}\right)u = 0, \quad u = u(x,t),$$

а метод обратной задачи рассеивания [1] обычно связывают с нелинейным уравнением Шредингера (НУШ)

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial z^2} + G|\psi^2|\right)\psi(z,t) = 0,$$

где G – параметр нелинейности, $\frac{\hbar^2}{2m}$ – параметр, характеризующий дисперсию. Такое уравнение используется для описания явлений самофокусировки в нелинейной оптике, одномерной автомодуляции монохроматической волны в плазме и других задачах физики.

Элементарным аналогом преобразований Беклунда в курсе школьной математики являются некоторые задачи с параметром [5, 6], где основным приемом для их решения выступают свойства четности и симметрии переменных. О подобной аналогии очень кратко говориться в [3, 7] и приложении “Конкурсные примеры с параметрами как аналог научно-исследовательских задач прикладной математики” в учебном пособии [5]. Данная работа является конкретизацией построения упомянутой аналогии и попыткой авторов внести свою лепту или ответить делом на призыв ректора МГУ им. М.В. Ломоносова, академика В.А. Садовничего: “*Я предлагаю сосредоточить внимание на “ничейной” земле – той математике, которая располагается где-то между границами школьной и университетской*” [8].

В ходе чтения спецкурса по методам решения задач с параметрами учащиеся СУНЦа с большим интересом воспринимают многие аналогии из [3] и приложения в [5], которые являются своеобразными “мостиками” между элементарной и приложениями высшей математики в других областях знаний.

Обычно симметрия переменных (СП) и четность функций (ЧФ) используется в задачах со следующими признаками:

1) в каждой задаче обязательно фигурирует аналитическое выражение, геометрический образ которого имеет ось симметрии (плоскость симметрии, точку симметрии);

2) во всех задачах в той или иной форме требуется найти, как правило, единственное решение.

В таких случаях: если описываемые аналитические выражения конструируют уравнения и координаты точки М являются его решением, то обязательно найдется еще одна точка M_1, координаты которой также будут являться решением.

Таким образом необходимо, чтобы точки М и M_1 совпадали, т.е. точка М должна лежать на оси симметрии. Однако это требование не является достаточным, например, на оси может лежать не одна точка.

Все вышесказанное является основой идеей решения задач.

Пример 1 (*мех-мат МГУ*, 1990). Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$$x^2 - 2a\sin(\cos x) + a^2 = 0$$

имеет единственное решение.

Решение. В данном уравнении присутствуют функции разных классов, поэтому стандартных методов решения нет. Тогда надо найти что-то, что бы позволило все-таки решить эту задачу. Одним из хороших приемов является поиск СП и ЧФ.

Заметим, что $y = x^2$и $y = \sin(\cos x)$ – четные функции. Значит, если x_0 – решение уравнения, то $(-x_0)$ – также решение уравнения. Следовательно, *необходимым* условием единственности решения является $x = 0$. Т.е.

$$0^2 - 2a\sin(\cos 0) + a^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0; a = 2\sin 1.$$

Теперь проверим *достаточность* этого условия.

1) Рассмотрим $a = 0$, тогда уравнение принимает вид

$$x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Получаем единственное решение уравнения.

2) Осталось разобрать случай $a = 2\sin 1$, тогда уравнение принимает вид:

$$x^2 - 4\sin 1 \cdot \sin(\cos x) + 4\sin^2 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4\sin^2 1 = 4\sin 1 \cdot \sin(\cos x).$$

Опять возвращаемся к ситуации, когда надо решить уравнение, но стандартных методов решения у него нет. Часто в задачах подобного вида выручает оценка отдельно левой и правой части уравнения. Если минимум, например, левой части будет совпадать с максимумом правой, то решение уравнения будет равносильно системе двух (уже стандартных) уравнений (т.е. $\min f(x) = \max g(x)$).

В нашем случае: очевидно, что для всех x: $x^2 \geq 0$, тогда $x^2+4\sin^2 1 \geq 4\sin^2 1$. Тогда как правая часть $4\sin 1 \cdot \sin(\cos 1) \leq 4\sin^2 1$ (!). Поэтому последнее уравнение равносильно системе:

$$\left\{\begin{array}{l} x^2+4\sin^2 1 = 4\sin^2 1 \\ 4\sin 1 \cdot \sin(\cos x) = 4\sin^2 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=0 \\ \sin(\cos x) = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=0.$$

Т.е. при $a = 2\sin 1$ уравнение также имеет единственное решение.

Ответ: $a = 0$; $a = 2\sin 1$.

Пример 2. Найти все значения параметра а, при которых система $\left\{\begin{array}{l} a\left(x^4+1\right) = y+1-|x| \\ x^2+y^2=1 \end{array}\right.$ имеет единственное решение.

Комментарии к решению. Не смотря на то, что внешний вид уравнений вполне стандартный, но, во-первых, систему не требуется решить, а лишь указать количество решений при некоторых значениях параметра а. Во-вторых, система зависит от трех переменных (параметр считаем также переменной), а условий всего в системе всего два. Заметив, что переменная х входит в уравнения только в четных функциях, можно записать *необходимое* условие: х=0. Однако при проверке достаточности может либо не выполняться единственность решения, либо задача вообще может не иметь решения. И, как правило, проверка *достаточности* условия занимает большую часть времени при решении подобных задач.

Ответ: а=2.

Пример 3 (*биологический ф-т МГУ*, 1991). Найти все значения параметра а, при каждом из которых система

$$\left\{\begin{array}{l} z\cos(x-y) + (2+xy)\sin(x+y) - z = 0 \\ x^2+(y-1)^2+z^2 = a+2x \\ \left(x+y+a\sin^2 z\right)\left[(1-a)\ln(1-xy)+1\right] = 0 \end{array}\right.$$

имеет единственное решение.

Решение. Первое уравнение пока не трогаем. Попытаемся получить информацию из второго уравнения, в нем, хотя бы, бросаются в глаза отдельно стоящие x^2 и $2x$, тогда как y и z находятся под полными квадратами. Выделим во втором уравнении полный квадрат по х. Внешний вид третьего уравнения наводит на мысль вообще отложить его анализ на самый последний этап. Получаем:

$$\left\{\begin{array}{l} z\cos(x-y)+(2+xy)\sin(x+y)-z=0 \\ (x-1)^2+(y-1)^2+z^2=a+1 \\ \left(x+y+a\sin^2 z\right)[(1-a)\ln(1-xy)+1]=0 \end{array}\right. .$$

Видимые трудности данной системы очевидны:

1) четыре переменных (включая в их число и параметр a) на три уравнения;

2) присутствуют функции различных типов, изучаемых в школе.

Учитывая это, приходим к выводу, что решать стандартными методами систему мы не сможем (и не будем). В последней системе "видно", что если переменные x и y поменять местами, ничего не измениться. Т.е. если (x_0, y_0, z_0) – решение системы, то и (y_0, x_0, z_0) – также ее решение. Поэтому для единственности решения *необходимо*, чтобы $x = y$. Тогда

$$\left\{\begin{array}{l} \left(2+x^2\right)\sin 2x=0 \\ 2(x-1)^2+z^2=a+1 \\ \left(2x+a\sin^2 z\right)\left[(1-a)\ln\left(1-x^2\right)+1\right]=0 \end{array}\right. .$$

Из первого уравнения получаем, что $\sin 2x = 0$, а так как в последнем уравнении логарифм существует только при $|x| < 1$, получаем $x = 0 = y$. Т.е.

$$\left\{\begin{array}{l} x=0 \\ z^2=a-1 \\ a\sin^2 z=0 \end{array}\right., \quad \text{т.е.} \quad z{=}0.$$

Подставив $x = y = z = 0$ в исходную систему, получим, что $a{=}1$.

Проверим *достаточность* того условия (даже не смотря на то, что получили всего одно значение параметра!).

$$\left\{\begin{array}{l} z\cos(x-y)+(2+xy)\sin(x+y)-z=0 \\ (x-1)^2+(y-1)^2+z^2=2 \\ x+y+\sin^2 z=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} z\cos(x-y)+(2+xy)\sin(x+y)-z=0 \\ x^2+y^2+z^2-2(x+y)=0 \\ x+y=-\sin^2 z \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} z\cos(x-y)+(2+xy)\sin(x+y)-z=0 \\ x^2+y^2+z^2+2\sin^2 z=0 \\ x+y=-\sin^2 z \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} z\cos(x-y)+(2+xy)\sin(x+y)-z=0\\ x=y=z=0\\ x+y=-\sin^2 z\end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow x=y=z=0$ – единственное решение системы.

Заметим, что третье уравнение системы мы так ни разу и не решали. Только при исследовании *необходимости* условия мы воспользовались областью определения логарифмической функции. А при a=1 оно вообще сильно упростилось.

Ответ: a=1.

Аналогичным методом можно решить следующие задачи:

1. (*факультет психологии МГУ*, 1995). Найти все значения а, при которых неравенство

$$\cos x-2\sqrt{x^2+9}\le -\frac{x^2+9}{a+\cos x}-a$$

имеет единственное решение.

Ответ: $a=2$.

2. (*экономический факультет МГУ*, 1990). Найти все значения а, при которых система

$$\left\{\begin{array}{l} \left(3-2\sqrt{2}\right)^y+\left(3+2\sqrt{2}\right)^y-3a=x^2+6x+5\\ y^2-\left(a^2-5a+6\right)x^2=0\\ -6\le x\le 0\end{array}\right.$$

имеет единственное решение.

Ответ: $a=-1$; $a=2$.

3. (*экономический факультет МГУ*, 1987). Найти все значения параметра а, при каждом из которых система

$$\left\{\begin{array}{l} 3\cdot 2^{|x|}+5\cdot|x|+4=3y+5x^2+3a\\ x^2+y^2=1\end{array}\right.$$

имеет единственное решение.

Ответ: $a=\frac{4}{3}$.

В заключение приведем еще одну задачу, как аналог преобразований Беклунда, где нахождение корней возможно лишь только из поиска различных видов симметрий.

Пример 4. Решить уравнение $\frac{\left(x^2-x+1\right)^3}{\left(5-\sqrt{5}+1\right)^3}=\frac{x^2(x-1)^2}{5\left(\sqrt{5}-1\right)^2}$.

Комментарии к решению. Один корень этого уравнения очевиден: $x=\sqrt{5}$. И так как это рациональное уравнение 6 степени с иррациональными коэффициентами, то осталось найти (угадать) оставшиеся пять корней. Опять внешний вид уравнения говорит о том, что решать стандартными способами мы его не будем. Попытаемся угадать, какие виды симметрии здесь присутствуют. Сам процесс поиска мы здесь опустим, укажем лишь результат: если x_0 – корень, то и $\frac{1}{x_0}$, $1-x_0$ – корни уравнения.

Ответ: $\sqrt{5}$, $\frac{1}{\sqrt{5}}$, $1-\sqrt{5}$, $1-\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\frac{1}{1-\sqrt{5}}$, $1-\frac{1}{1-\sqrt{5}}$.

Авторы выражают благодарность В.Л. Натяганову за саму идею подобной аналогии и ценные советы в работе.

Библиографический список

1. *Захаров, В.Е.* Теория солитонов: метод обратной задачи [Текст] / В.Е. Захаров, С.В. Манаков, С.П. Новиков, Л.П. Питаевский. – М.: Наука, 1980.

2. *Ньюэлл, А.* Солитоны в математике и физике [Текст] / А. Ньюэлл. – М.: Мир, 1989.

3. *Лужина, Л.М.* Научно-исследовательские задачи механики и прикладной математики как аналоги конкурсных примеров с параметрами [Текст] / Л.М. Лужина, В.Л. Натяганов, Е.В. Шивринская. – М.: Из-во ЦПИ при механико-математическом ф-те МГУ, 2002.

4. *Филиппов, А.Т.* Многоликий солитон [Текст] / А.Т. Филиппов // Биб-ка “Квант”. – М.: Наука, 1986. – Вып. 48.

5. *Лужина, Л.М.* Методы решения задач с параметрами [Текст] / Л.М. Лужина, В.Л. Натяганов. – М.: Из-во МГУ, 2003.

6. *Горнштейн, П.И.* Задачи с параметрами [Текст] / П.И. Горнштейн, В.Б. Полонский, М.С. Якир. – К.: РИА “Текст”; МП “ОКО”, 1992.

7. *Натяганов, В.Л.* Взаимозамена в симметричных соотношениях как элементарный аналог преобразований Беклунда [Текст] / В.Л. Натяганов, Е.В. Шивринская // Тезисы докладов VIII международной конференции “Образование. Экология. Экономика. Информатика”. – Астрахань: ГУП Издательско-полиграфический комплекс “Волга”, 2003.

8. *Садовничий, В.А.* Математическое образование: настоящее и будущее [Текст] / В.А. Садовничий // Всероссийская конференция “Математика и общество. Математическое образование на рубеже веков”. – Дубна, 2000.

Конформные преобразования почти косимплектических многообразий

С.В. Харитонова

В данной статье рассмотрены локально конформно почти косимплектические (далее $lc\mathcal{AC}_{\mathcal{S}}$-) многообразия. Получена первая группа структурных уравнений данных многообразий. Более подробно изучены нормальные $lc\mathcal{AC}_{\mathcal{S}}$-многообразия, вычислены компоненты тензора римановой кривизны и тензора Риччи таких многообразий. Найдены необходимые и достаточные условия постоянства кривизны нормальных $lc\mathcal{AC}_{\mathcal{S}}$-многообразий. В частности, показано, что нормальное $lc\mathcal{AC}_{\mathcal{S}}$-многообразие, являющееся пространственной формой, имеет неположительную кривизну.

Введение

Изучение свойств почти контактных метрических (короче $\mathcal{AC}$-) многообразий, инвариантных относительно конформных преобразований структуры, привлекает значительное внимание исследователей. В частности, много работ посвящено изучению конформно-инвариантных свойств почти косимплектических многообразий. Объектом исследования данной работы являются локально конформно почти косимплектические (далее $lc\mathcal{AC}_{\mathcal{S}}-$) многообразия. Изучением свойств этого класса многообразий занимались З. Олчек и Р. Роска [1], Д. Чинеа и Дж. Мареро [2] и другие.

Предварительные сведения

Пусть M^{2n+1} – гладкое нечетномерное многообразие размерности свыше трех; $C^\infty(M)$ – алгебра гладких функций многообразия M^{2n+1}; $\mathsf{X}(M)$ – $C^\infty(M)$-модуль гладких векторных полей на M^{2n+1}, d – оператор внешнего дифференцирования.

Почти контактной метрической (короче, $\mathcal{AC}$-) структурой на многообразии M называется совокупность (η, ξ, Φ, g) тензорных полей на этом многообразии, где η – дифференциальная 1-форма, называемая контактной формой структуры; ξ – векторное поле, называемое характеристическим; Φ – поле тензора типа (1;1), называемое структурным эндоморфизмом модуля $\mathsf{X}(M)$, $g = \langle\cdot,\cdot\rangle$ – риманова метрика. При этом

$$1)\ \eta(\xi)=1;\ 2)\ \Phi^2=-id+\eta\otimes\xi;\ 3)\ \langle\Phi X,\Phi Y\rangle=\langle X,Y\rangle-\eta(X)\eta(Y);\, X,Y\in\mathsf{X}(M).$$

Многообразие, на котором фиксирована $\mathcal{AC}$-структура, называется *$\mathcal{AC}$-многообразием.*

Напомним [3], что $\mathcal{AC}$-структура $S = (\eta, \xi, \Phi, g)$ называется *почти косимплектической* ($\mathcal{AC}_{\mathcal{S}}$-) структурой, если 1) $d\eta = 0$; 2) $d\Omega = 0$, где тензор $\Omega(X,Y) = g(X, \Phi Y)$ кососимметричен и называется фундаментальной формой $\mathcal{AC}$-структуры.

В $C^\infty(M)$–модуле $\mathsf{X}(M)$ гладких векторных полей на $\mathcal{AC}$-многообразии внутренним образом определены два взаимно дополнительных проектора $\mathfrak{l} = id - \eta \otimes \xi = -\Phi^2$ и $\mathfrak{m} = \eta \otimes \xi = id + \Phi^2$ на распределения $\mathcal{L} = \mathrm{Im}\Phi = \ker\eta$ и $\mathcal{M} = \ker \Phi = L(\xi)$ размерностей $2n$ и 1, соответственно, причем $\mathsf{X}(M) = \mathcal{L} \oplus \mathcal{M}$. Более того, комплексификация модуля $\mathsf{X}(M)$, именно $\mathsf{X}^C(M) = \mathbf{C} \otimes \mathsf{X}(M)$ распадается в прямую сумму собственных подмодулей эндоморфизма Φ^C: $\mathsf{X}^C(M) = D_\Phi^{\sqrt{-1}} \oplus D_\Phi^{-\sqrt{-1}} \oplus D_\Phi^0$, где $D_\Phi^0 = \mathcal{M}^C$. Проекторами на слагаемые этой прямой суммы будут, соответственно, эндоморфизмы $\pi = -\frac{1}{2}(\Phi^2 + \sqrt{-1}\Phi)$, $\overline{\pi} = \frac{1}{2}(-\Phi^2 + \sqrt{-1}\Phi)$ и $\mathfrak{m} = id + \Phi^2$.

Доказано [4], что к $(2n+1)$-мерному $\mathcal{AC}$-многообразию, как метрическому f-многообразию дефекта 1, внутренним образом присоединяется G-структура, структурной группой которой является группа Ли $U(n) \times \{e\}$. Тотальное пространство этой G-структуры состоит из модифицированных A-реперов, то есть комплексных реперов вида $(p, \varepsilon_0, \varepsilon_1, ..., \varepsilon_n, \varepsilon_{\hat{1}}, ..., \varepsilon_{\hat{n}})$, где $\varepsilon_0 = \xi_p$, $\varepsilon_a = \sqrt{2}\pi(e_a)$, $\varepsilon_{\hat{a}} = \sqrt{2}\overline{\pi}(e_a)$, $(e_1, ..., e_n)$ – комплексный ортонормированный базис пространства $\mathcal{L}_p$, как C-модуля, $p \in M$. Эти реперы характеризуются тем, что матрицы тензоров Φ и g в этих реперах принимают вид:

$$(\Phi_i^j) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{-1}I_n & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{-1}I_n \end{pmatrix}, (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_n \\ 0 & I_n & 0 \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

где I_n – единичная матрица порядка n. Здесь и далее индексы i, j, k пробегают значения от 0 до $2n$, индексы a, b, c, d – значения от 1 до n, $\widehat{a} = a + n$. Обозначим компоненты формы смещения через $\{\omega^i\}$ и введем обозначения $\omega_a = \omega^{\hat{a}}$, $\omega = \omega^0$.

$\mathcal{AC}$-структура называется *нормальной* [5], если тензор Нейенхейса N_Φ ее структурного эндоморфизма Φ удовлетворяет тождеству $2N_\Phi + d\eta \otimes \xi = 0$, где

$$N_\Phi(X,Y) = \frac{1}{4}([\Phi X, \Phi Y] + \Phi^2[X,Y] - \Phi[\Phi X, Y] - \Phi[X, \Phi Y]).$$

Нормальная почти косимплектическая структура называется *косимплектической* [6].

Локально конформно почти косимплектические многообразия

Конформным преобразованием $\mathcal{AC}$-структуры $S = (\eta, \xi, \Phi, g)$ на многообразии M [7] называется переход от S к $\mathcal{AC}$-структуре $\tilde{S} = (\tilde{\eta}, \tilde{\xi}, \tilde{\Phi}, \tilde{g})$, при этом $\tilde{\eta} = e^{-\sigma}\eta$, $\tilde{\xi} = e^{\sigma}\xi$, $\tilde{\Phi} = \Phi$, $\tilde{g} = e^{-2\sigma}g$, где σ – определяющая функция соответствующего конформного преобразования. Если $\sigma = const$, конформное преобразование называется тривиальным, или гомотетией.

$\mathcal{AC}$-структура S на многообразии M называется *локально конформно почти косимплектической*, короче $lc\mathcal{AC_S}$-структурой, если сужение этой структуры на некоторую окрестность U произвольной точки $p \in M$ допускает конформное преобразование в почти косимплектическую структуру. Многообразие, на котором фиксирована $lc\mathcal{AC_S}$-структура, называется *$lc\mathcal{AC_S}$-многообразием.* Заметим, что при $\sigma = const$ получаем $\mathcal{AC_S}$-многообразие.

Из определения $\mathcal{AC_S}$-структуры получаем, что для $lc\mathcal{AC_S}$-многообразий определяющими являются соотношения:

$$1)\ d\eta = d\sigma \wedge \eta; \quad 2)\ d\Omega = 2d\sigma \wedge \Omega.$$

С учетом вышесказанного, на пространстве присоединенной G-структуры найдена первая группа структурных уравнений $lc\mathcal{AC_S}$-многообразий:

$$1)\ d\omega^a = -\omega^a_b \wedge \omega^b + B^{ab}{}_c\omega^c \wedge \omega_b + B^{abc}\omega_b \wedge \omega_c + B^a{}_b\omega \wedge \omega^b + B^{ab}\omega \wedge \omega_b;$$

$$2)\ d\omega_a = \omega_a^b \wedge \omega_b + B_{ab}{}^c\omega_c \wedge \omega^b + B_{abc}\omega^b \wedge \omega^c + B_a{}^b\omega \wedge \omega_b + B_{ab}\omega \wedge \omega^b; \quad (2)$$

$$3)\ d\omega = C_b\omega \wedge \omega^b + C^b\omega \wedge \omega_b.$$

При этом:

$$1)\ B^{[abc]} = B_{[abc]} = 0; \quad 2)\ B^{[ab]} = B_{[ab]} = 0; \quad 3)\ B_a{}^b = B^b{}_a = \sigma_0\delta^b_a;$$

$$4)\ B^{ab}{}_c = 2\sigma^{[a}\delta^{b]}_c; \quad 5)\ B_{ab}{}^c = 2\sigma_{[a}\delta^c_{b]}; \quad 6)\ C^b = -\sigma^b; \quad 7)\ C_b = -\sigma_b; \ (3)$$

где $\{\omega^j_i\}$ – компоненты римановой связности, а $B^{ab}{}_c$, $B_{ab}{}^c$, B^{abc}, B_{abc}, B^{ab}, B_{ab} $B^a{}_b$, $B_b{}^a$ C^b, C_b – гладкие функции на пространстве присоединенной G-структуры, служащие компонентами первого, второго, третьего, четвертого и пятого структурных тензоров (тензоров Кириченко) [4].

С учетом (3) получим соотношения для $\{\Phi^i_{j,k}\}$ – компонент ковариантного дифференциала оператора Φ в римановой связности [4] для $lc\mathcal{AC_S}$-многообразий:

$$1)\Phi^a_{0,b}=-\Phi^0_{\hat{a},b}=-\sqrt{-1}\delta^a_b\sigma_0;\ 2)\Phi^{\hat{a}}_{0,\hat{b}}=-\Phi^0_{a,\hat{b}}=\sqrt{-1}\delta^b_a\sigma_0;\ 3)\Phi^a_{0,0}=-\Phi^0_{\hat{a},0}=\sqrt{-1}\sigma^a;$$
$$4)\Phi^{\hat{a}}_{0,0}=-\Phi^0_{a,0}=-\sqrt{-1}\sigma_a;\ 5)\Phi^a_{\hat{b},c}=4\sqrt{-1}\sigma^{[a}\delta^{b]}_c;\ 6)\Phi^{\hat{a}}_{b,\hat{c}}=-4\sqrt{-1}\sigma_{[a}\delta^c_{b]};$$
$$7)\Phi^a_{\hat{b},\hat{c}}=4\sqrt{-1}B^{cab};\ 8)\Phi^{\hat{a}}_{b,c}=-4\sqrt{-1}B_{cab};\ 9)\Phi^0_{a,b}=-\Phi^{\hat{a}}_{0,b}=-\sqrt{-1}B_{ab};$$
$$10)\ \Phi^0_{\hat{a},\hat{b}}=-\Phi^a_{0,\hat{b}}=\sqrt{-1}B^{ab};\quad 11)\ \Phi^a_{\hat{b},0}=\Phi^{\hat{a}}_{b,0}=0. \tag{4}$$

Нормальные локально конформно почти косимплектические многообразия

Известно [4], что $\mathcal{AC}$-структура нормальна тогда и только тогда, когда на пространстве присоединенной G-структуры $\Phi^{\hat{a}}_{b,c}=\Phi^a_{\hat{b},\hat{c}}=\Phi^{\hat{a}}_{b,0}=\Phi^a_{\hat{b},0}=\Phi^0_{a,b}=\Phi^0_{\hat{a},\hat{b}}=\Phi^0_{a,0}=\Phi^0_{\hat{a},0}=0$.

В силу соотношений (4) $lc\mathcal{AC_S}$-многообразие является нормальным тогда и только тогда, когда $B^{abc}=B_{abc}=B^{ab}=B_{ab}=\sigma^a=\sigma_a=0$.

Отсюда, с учетом (2) и (3), первая группа структурных уравнений нормального $lc\mathcal{AC_S}$-многообразия будет иметь вид:

$$1)d\omega^a=-\omega^a_b\wedge\omega^b+\delta^a_b\sigma_0\omega\wedge\omega^b;\ 2)d\omega_a=\omega^b_a\wedge\omega_b+\delta^b_a\sigma_0\omega\wedge\omega_b;\ 3)d\omega=0. \tag{5}$$

В данном случае при $\sigma=const$, что равносильно $\sigma_0=0$, получим нормальное $\mathcal{AC_S}$-многообразие, то есть косимплектическое многообразие.

Используя процедуру дифференциального продолжения, с учетом (5) нами получена вторая группа структурных уравнений нормального $lc\mathcal{AC_S}$-многообразия

$$d\omega^a_b=-\omega^a_c\wedge\omega^c_b+A^{ac}_{bd}\omega^d\wedge\omega_c;\quad d\sigma_0=\sigma_{00}\omega; \tag{6}$$

где A^{ac}_{bd}, σ_{00} – гладкие функции. При этом $A^{[ac]}_{bd}=A^{ac}_{[bd]}=0$.

С учетом (4) компоненты формы римановой связности [4] нормальных $lc\mathcal{AC_S}$-многообразий примут вид:

$$1)\ \omega^a_{\hat{b}}=\omega^{\hat{a}}_b=0;\ 2)\ \omega^a_0=\delta^a_b\sigma_0\omega^b;\ 3)\ \omega^0_a=-\delta^b_a\sigma_0\omega_b;\ \ 4)\ \omega^{\hat{a}}_0=\delta^b_a\sigma_0\omega_b;$$
$$5)\ \omega^0_{\hat{a}}=-\delta^a_b\sigma_0\omega^b. \tag{7}$$

Рассмотрим вторую группу уравнений связности в главном расслоении реперов [4]:

$$d\omega^i_j=-\omega^i_k\wedge\omega^k_j+\frac{1}{2}R^i_{jkl}\omega^k\wedge\omega^l, \tag{8}$$

где $\{R^i_{jkl}\}$ – компоненты тензора римановой кривизны. Хорошо известно [8], что компоненты тензора римановой кривизны обладают свойствами:

$$1)\ R_{ijkl} = -R_{ijlk};\ 2)\ R_{ijkl} = -R_{jikl};\ 3)\ R_{ijkl} = R_{klij};$$

$$4)\ R^i_{jkl} + R^i_{klj} + R^i_{ljk} = 0 \text{ – тождество Риччи.}$$

Расписывая соотношение (8) на пространстве присоединенной G-структуры нормального $lc\mathcal{AC}_{\mathcal{S}}$-многообразия, с учетом свойств компонент тензора римановой кривизны, (5) и (7), получим следующие выражения для ненулевых компонент тензора римановой кривизны нормального $lc\mathcal{AC}_{\mathcal{S}}$-многообразия:

$$R^a_{\hat{b}cd} = -4\delta^a_{[c}\delta^b_{d]}\sigma_0^2;\quad R^a_{bc\hat{d}} = A^{ad}_{bc} - \delta^a_c\delta^d_b\sigma_0^2;\quad R^a_{0b0} = -\sigma_{00}\delta^a_b - \sigma_0^2\delta^a_b. \tag{9}$$

Как известно [9], компоненты тензора Риччи вычисляются по формуле $r_{ij} = -R^k_{ijk}$. Зная выражения для компонент тензора римановой кривизны на пространстве присоединенной G-структуры, получим выражения для компонент тензора Риччи нормального $lc\mathcal{AC}_{\mathcal{S}}$-многообразия на пространтсве присоединенной G-структуры:

$$\begin{gathered} r_{ab} = r_{\hat{a}\hat{b}} = r_{\hat{a}0} = r_{0\hat{a}} = r_{a0} = r_{0a} = 0; \\ r_{00} = -2n(\sigma_{00} + \sigma_0^2);\quad r_{\hat{a}b} = r_{b\hat{a}} = A^{ac}_{bc} - 2n\sigma_0^2\delta^a_b - \delta^a_b\sigma_{00}. \end{gathered} \tag{10}$$

Нормальные $lc\mathcal{AC}_{\mathcal{S}}$-многообразия постоянной кривизны

Пусть M – $\mathcal{AC}$-многообразие постоянной кривизны k. Тогда компоненты тензора римановой кривизны на пространстве расслоения реперов удовлетворяют соотношениям: $R_{ijkl} = k(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk})$.

Расписав их на пространстве присоединенной G-структуры, получим, что ненулевые компоненты тензора римановой кривизны многообразия постоянной кривизны имеют вид:

$$R_{\hat{a}\hat{b}cd} = k\delta^{ab}_{cd};\quad R_{\hat{a}bc\hat{d}} = k\delta^a_c\delta^d_b;\quad R_{\hat{a}0c0} = k\delta^a_c. \tag{11}$$

Сравнивая соотношения (9) и (11) получим:

Теорема 1. *Нормальное* $\mathrm{lc}\mathcal{AC}_{\mathcal{S}}$*-многообразие является многообразием постоянной кривизны k тогда и только тогда, когда $A^{ad}_{bc} = \sigma_{00} = 0$. При этом $k = -\sigma_0^2$.*

Многообразие постоянной кривизны называют *пространственной формой.* Многообразие нулевой постоянной кривизны называют *плоским.*

Следствие. *Нормальное* lc$\mathcal{AC}_\mathcal{S}$*-многообразие* M*, являющееся пространственной формой, имеет неположительную кривизну. Причем,*

1) $k=-1$ *тогда и только тогда, когда* M *– конформно плоское многообразие Кенмоцу;*

2) $k=0$ *тогда и только тогда, когда* M *– плоское косимплектическое многообразие.*

Доказательство. 1) Пусть M – конформно плоское многообразие Кенмоцу. Заметим, что [10] конформно плоское многообразие Кенмоцу является пространством постоянной кривизны $k=-1$. Согласно [10] первая группа структурных уравнений многообразий Кенмоцу имеет вид:

$$1)\ d\omega^a=-\omega^a_b\wedge\omega^b+\omega\wedge\omega^a;\ 2)\ d\omega_a=\omega^b_a\wedge\omega_b+\omega\wedge\omega_a;\ 3)\ d\omega=0. \quad (12)$$

Сравнивая эти уравнения со структурными уравнениями нормальных $lc\mathcal{AC}_\mathcal{S}$-многообразий (5), заключаем, что M – это нормальное $lc\mathcal{AC}_\mathcal{S}$-многообразие при $\sigma_0=1$. Для многообразий Кенмоцу, являющихся пространствами постоянной кривизны $k=-1$, $A^{ab}_{cd}=0$ [11]. Следовательно, в силу теоремы 1, M – нормальное $lc\mathcal{AC}_\mathcal{S}$-многообразие постоянной кривизны $k=-1$.

Обратно, пусть M – нормальное $lc\mathcal{AC}_\mathcal{S}$-многообразие постоянной кривизны $k=-1$. Следовательно, $\sigma_0=\pm1$ и $A^{ab}_{cd}=0$. При $\sigma_0=1$ структурные уравнения M примут вид (12). То есть M – многообразие Кенмоцу, а значит, в силу выше сказанного, M – конформно плоское многообразие Кенмоцу. При $\sigma_0=-1$ структурные уравнения M примут вид

$$1)\ d\omega^a=-\omega^a_b\wedge\omega^b-\omega\wedge\omega^a;\ 2)\ d\omega_a=\omega^b_a\wedge\omega_b-\omega\wedge\omega_a;\ 3)\ d\omega=0. \quad (13)$$

Обозначим $\tilde\omega=-\omega$. Данные уравнения примут вид:

$$1)\ d\omega^a=-\omega^a_b\wedge\omega^b+\tilde\omega\wedge\omega^a;\ 2)\ d\omega_a=\omega^b_a\wedge\omega_b+\tilde\omega\wedge\omega_a;\ 3)\ d\tilde\omega=0. \quad (14)$$

То есть и в этом случае M – конформно плоское многообразие Кенмоцу.

Справедливость (2) очевидна.

Библиографический список

1. *Olszak, Z., Rosca, R.* Normal locally conformal almost cosymplectic manifolds, Pabl. Math. Debrecen, 39/3-4, 1991. – P. 315-323.
2. *Chinea, D., Marrero, J.C.* Conformal changes of almost cosymplectic manifolds, Demonstratio Mathematica, 25. – 1992. –№ 3. – P. 641-656.

3. *Goldberg, S., Yano, K.* Integrability of almost cosymplectic structures, Pacific J. Math. 31. – 1969. – № 2. – P. 373-382.
4. *Кириченко, В.Ф.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях [Текст] / В.Ф. Кириченко. – М.: МПГУ, 2003. – 495 с.
5. *Sasaki, S., Hatakeyama, Y.* On differentiable manifolds with certain structures which are closely related to almost contact structure II , T$\hat{o}$hoku Math. J. 13, 1961. – P. 281-294.
6. *Blar, D.E.* The theory of quasi-Sasakian structures. J. Diff. Geom. 1, 1967. – P. 333-345.
7. *Баклашова, Н.С.* Геометрия контактной формы Ли и контактный аналог теоремы Икуты [Текст] / В.Ф. Кириченко, Н.С. Баклашова // Матем. заметки, 82. – 2007. – Вып. 3. – № 4. – P. 347-360.
8. *Бишоп, Р.* Геометрия многообразий [Текст] / Р. Бишоп, Р.Дж. Криттенден. – М.: Мир, 1967.
9. *Картан, Э.* Риманова геометрия в ортогональном репере [Текст] / Э. Картан. – М.: МГУ, 1960. – 94 с.
10. *Кириченко, В.Ф.* О геометрии многообразий Кенмоцу [Текст] / В.Ф. Кириченко // Доклады академии наук, 380. – 2001. – № 5. – С. 585-587.
11. *Умнова, С.В.* О точечном постоянстве Ф-голоморфной секционной кривизны многообразий Кенмоцу [Текст] / С.В. Умнова // М.: МПГУ, 2002. – Деп. в ВИНИТИ 21.03.02. – № 514-В2002. – 16 с.

Дисперсия логики

Н.А. Трубников, Ж.Н. Трубникова

Из всех обсуждаемых источников генезиса логики наифундаментальным кажется приобретающая деонтологический характер присущая всему живому интенция жить, универсальное сознательное проявление которой на всех этажах потребностей как раз и нуждается в объяснении и предсказании происходящего “на самом деле”. Это нуждается в истине как (терминология А. Эйнштейна) во “внутренне совершенном” (непротиворечивом) и “внешне оправданном” знании, обеспечивающем эти объяснение и предсказание, представленные в знании со стороны логики, главным образом, помимо импликации $\Rightarrow$, следованием (вывод) $\succ \equiv \,)\!\!=$(сукценция, вывод содержательный) $\oplus \,)\!-$ (доказательство, секвеция, вывод формальный) и прагматически оцениваемые мерами, подобными (про)эффективности ω=0$\div$1. Насыщенная и нередко жестокая драма, разъединяющая человечество в походе за истиной, разъединила и математиков, отряды которых, имея по сути, общую и, кстати, биологически оправданную цель познания, прокладывают разные пути и атакуют разные преграды. Ревизия методов, построение надежных программ, исчисление истины, отбраковка, шлифовка и, наконец, отбор наинадежных ресурсов, отличающий формальную аксиоматику, финитизм, интуиционизм, конструктивизм и даже логицизм – этот базар подходов – патогномоничный признак биологической толерантности.

Когнитивная, познающая система организма – биогност имеет два основных аспекта: физический физиогност и ментальный креагност. Первый включает перцептивно-праксеологические констатации (восприятие ощущениями и чувствами) в их биофизической природе (исследовании и представлении). Второй – мысленные когнитивные феномены и их системы и преобразования. Здесь выделяются уровни фактов, понятий и категорий (суперконцепты), где два последних можно назвать онтологическими. Фактификат как результат взаимодействия внешней и внутренней среды подвластен ей, будучи связан констатациями и запротоколирован, но концептификат подвластен Я в следующем смысле и мере: Я может строить аппарат понятий, задавая его произвольно выбранными начальными и лишь рамочными условиями и в дальнейшем, имея возможность, выводя следствия и доказывая теоремы, познакомиться с более полным содержанием заданного. Ментально (интуитивно-мысленно видимым) креагност представляет для Я практическое и теоретическое содержание всех наук, погруженных в философский бульон. Появление и развитие мысли происходит в этой среде. Креагност представляется потенциально плодотворной почвой и материалом формирования кирпичей, связей и блоков этого аппарата, почвой, существование и функционирование которой обеспечивается жизнедеятельностью физиогноста, т.е. комплексом генетических, молекулярно-биохимических и физиологических механизмов ровно так же как и другие, некогнитивные психические явления взаимодействуют с биохимией и физиологией высшей нервной деятельности (подобные отношения описаны как эмерджентная интеракция). Существование, материал и функции креагноста как остальных частей организма детерминируются контингентно средой , консервативно наследственностью и абсолютно консервативно интерсубъективной биоорганизацией. Остановимся на некоторых характеристиках этой жемчужины Homo sapiens.

Биогностическая инфраструктура – креаканон – проявляется лишь наиобще (биоорганизационно), например в квазиаксиоматическом контурном формировании концептификата, минимум дуктивных степов (шаг вывода) которого может наиболее откровенно считаться логикой. Что же касается математики, а также философии, теоретической части всех наук, мифологии и художественных фантазий поэзии и беллетристики, то все это на этом поле и растет. Из преобразований, ориентируемых метафизической троицей: добро, красота и истина, к последней креаканон пробивается через математику. Эта инфраструктура как и все биоструктуры рамочно-генетически заложена как тенденция (в этом отношении она априорна) и в ходе взаимодействия со средой живет и кристаллизуется подчас суровым практическим опытом выживания – целедостижения, реагируя на ограничения и помехи не редко конкурентной среды (и в этом смысле она апостериорна).

Стремление к надежности и безопасности несомненно участвует в становлении менталитета креагноста, в его универсальной деонтологии, входящей в интуицию истины. Математика и тавтологичная вершина креагноста – логика не могут избежать этих влияний, имеющих текущий, индивидуальный и биогенетический характер. Турбулентность среды не позволяет застывать на одной догме, но с приближением к вершине это слабеет. Отбраковка из классической математики инструментов, подозреваемых как помехи истине, некоторым образом роднит финитизм с интуиционизмом и конструктивизмом. Но и утративший чистоплотность в поисках истинной природы математики логицизм до сих пор озадачивает представлением “...всей... математики с помощью... простой... системы аксиом...” (А. Черч, цит. по [1, с. 301]).

Возможно ли, несмотря на методологические разногласия, резюмировать то, что объединяет всех искателей истины в их требованиях к средствам и технологии поиска. Критерий истины проступает как дизъюнкция транспарентности τ (ясность и непротиворечивость) и проэффективности ω (объяснение и прогноз). Дизъюнкты коммутативны и дополнительны в смысле Н. Бора. Акцент на τ при жертвовании ω дает всю природу, включая математику, вместе с их антиномиями; акцент на ω при жертвовании τ обнаруживает, что через микроскоп видно не все: “...математик сочтет правым Гильберта, если... заняться... построением мира; если же предоставить его самому себе, то он примет сторону Брауэра и ограничится интуитивными истинами” (Г. Вейль, цит. по [2, с. 237]). Однако, разобраться в себе – это, тем более разобраться с миром, к тому же с самой сложной его частью. В этой всеозабоченности Я-исследователя экспликанды логического следования и тождественная истинность универсальных модусов логики практически делают именно ее главным оружием, которое надо оттачивать. Из этих двух идентификаторов логики проблематичным является следование, гностическая ценность которого состоит в полноте передачи истины от антецедента к консеквенту. Лимитирующим эту полноту узким местом квазитеории (знания) оказывается квазииндукция, к которой стоит отнести 1) обобщение и $\forall$ – введение среди "логических постулатов" (аксиомы $\oplus$ правила вывода) и 2) все виды индукции (неполная, энумеративная, элиминативная, бесконечная, математическая, полная) среди "нелогических постулатов".

В таком развороте дыхание границы между логикой и математикой можно ощутить уже в логике и прежде всего в следовании.

Любой предикат, скажем A(x,y), двусмысленен по трактовке переменных.

СФ (фиксированность): переменные x и y – это *неизвестные (параметры)*, но конкретные предметы из области (Д) определения этих переменных и при *варьировании* подстановок в A(x,y), дающих то истинное, то ложное высказывание (*двузначность*). Только подстановка лишь этих неизвестных гарантирует истинное высказывание. Так что СФ: x и y – ***параметры*** – **свободны** в формуле, являющей поэтому предикат; ***значение переменной*** **фиксировано** (это некто), но неизвестно, что приводит к вариации значений формулы (то 1 – истина, то 0 – ложь).

СВ (вариабельность): x и y – это *варианты* подстановок всевозможных сочетаний x и y и при подстановке в A(x,y) любых предметов из Д *однозначно* возникает или всегда истинное или всегда ложное высказывание. Так что СВ: x,y – **варианты** – **связаны**, например, кванторами – **варьируют** в зоне связывания (например, квантификации), т.е. под зонтом *однозначности формулы* (всегда 1 – истина или всегда 0 – ложь), создаваемой связывателями, возможны любые ***значения переменных*** из области (областей) их значений.

При СФ варьирует значение формулы (1-0) при фиксированных значениях переменных или переменной, при СВ варьирует значение переменных при фиксированном значении формулы.

СФ: При неизвестно фиксированном значении свободной переменной значение открытой формулы ($1 \ominus 0$) неустойчиво (переменчиво, варьирует) к череде значений переменных. СВ: При связывании переменной значение замкнутой формулы устойчиво к варьированию значений переменной.

При отсутствии свободных переменных в A, когда A – это высказывание, а не предикат, все выводы $A \succ B$ оказываются завершенными (“обеспечивающими истинность заключения при истинности посылок” [3, с. 94] и наисильными. При наличии в А свободных переменных интерпретация каждой получателем выводов из А (зависящая от того, какую роль он придает А и какой смысл – высказываниям), влияет на выводимость. Если принята СВ, то вывод $A \succ B$ завершен, если СФ – вывод невозможен, но... Интенсиональная неопределенность, уравнивающая основания в выборе осмысливания переменных, оставляет место другим соображениям, по которым для одной части (одной или нескольких) переменных принята СФ, а для другой – СВ и тогда возможен незавершенный, менее сильный вывод, ограничивающий полноту передачи истинности или обеспечивающий передачу лишь части истинности.

В выбранной доле свободных переменных последние рассматриваются как варианты, например x в $A(x,y)$, и, в силу вытекающей из СВ эквиваленции $A(x) \equiv \forall_x(x)$, $A(x,y)$ можно рассматривать как $\forall_x A(x,y)$, где эта доля переменных, у нас это x, оказывается связанной и эта квантификация как бы диверсифицирует предикат $A(x,y)$, выделяя в нем статор $\forall_x A(x)$. При поиске и утверждении вывода $A(x,y){\scriptstyle)}{=}B$ анализируются таблицы истинности формул $A(x,y)$, B и $\forall_x A(x)$ с целью обнаружения случаев, когда там, где $\forall_x A(x)$ дает 1 остальные формулы также показывают 1 и это как раз тот случай, когда вывод $A(x,y){\scriptstyle)}{=}^{x}B$ “обоснован при СВ для x” или при СФ только для y [2, с. 130]. Исходно же в логике везде вне $\forall A(x)$ переменные, если это не оговаривается, интерпретируются в СФ, т.е. более осторожно, как *произвольные* постоянные (параметры), “...при фиксации всех переменных (свободно входящих в А ...” [2, с. 132, 134]. Отношения же между $A(x)$ и $\forall_x(x)$ в этом случае уясняются следующими результатами [2, с. 118-156; 4, с. 129-136; 5, с. 29, 34, 54; 6, с. 61,63,66; 7, с. 153, 171-178, 440-443, 481, 484-486; 8, с. 200, 214-216; 3, с. 69-70, 79-81, 88-95], сокращаемыми с учетом $\succ \equiv {\scriptstyle)}{=} \oplus {\scriptstyle)}{-}$ и теоремы К. Геделя о полноте функционального исчисления.

При x не свободной в посылках: 1) если $\succ B \Rightarrow A(x)$, то $\succ B \Rightarrow \forall_x A(x)$, откуда 2) если $\succ A(x)$, то $\succ \forall_x A(x)$ и, более того, 3) $A(x) \succ \forall_x A(x)$.

В итоге всего сказанного: 1) завершенные выводы: 1а: $A(x,y) \succ^{x,y} \forall A(x,y)$; 1б: $A(x) \succ \forall A(x)$; 2) незавершенный вывод $A(x,y) \succ^{x} \forall_x A(x,y)$.

Взаимозависимость истинности и следования подчеркивает ущерб, какой наносит истине неубедительность следования в его locus minoris resistentia – квазииндукции, именно в тех ее видах где возникают угрозы характеристическому признаку логики - безупречности передачи истины от антецедента к сукценденту. В частности “при незавершенности вывода не обеспечена истинность заключения при истинности посылок”

[3, с. 94] и $\succ$ не воспроизводит логическое следование. Математическая индукция избегает этого. Представленный в формализме исчисления предикатов принцип $A(0) \Rightarrow (\forall_x (A(x) \Rightarrow A(x^1)) \Rightarrow \forall_x A(x)$, посредством modus ponens дает формальное правило индукции: если $A(0)$ и $\forall_x (A(x) \Rightarrow A(x^1)$, то $\forall_x A(x)$ [6, с. 116]. Отличие здесь от обычного гипотетического суждения связано со смысловым различием между ним и, оказывающейся второй посылкой, импликацией, *истинной* при *всяком* значении x [9, с. 127]. Но откуда следует ее истинность? В связи с 3) казалось бы из логики, но при свободной x в A(x) вывод $\succ A(x) \Rightarrow \forall x\, A(x)$ через $A(x) \succ \forall x\, A(x)$ (теорема дедукции) не проходит. Если источник – интеллектуальная интуиция, то не пустой вопрос о ее связи с практикой счета, а здесь она неубедительна как логическое следование. Тем более это относится к неполной индукции, которая хотя и "...не является логически обоснованным рассуждением" [10, с. 2] фактически используется небиологическим естествознанием.

Что касается биовключающего естествознания (медицина, педагогика, юриспруденция, экономика, социология и т.п.), то недостижимая для репрезентирующих живые объекты ассерторических (действительностных) теорий аподиктическая логика служит там маяком, реально приближаемым индуктивными системами высказываний с логикой, среди силлогизмов которой имеется индуктивное обобщение $pa, pb, \ldots \succ \forall_x\, px$. Однако, и этот уровень истинности характерен в основном для небиологических фрагментов, тогда как подавляющий в биовключающем естествознании уровень прогностичности – объяснимости оставляет желать лучшего, что соответствует общему гностическому положению "неточного" естествознания.

Метанаучный анализ естественно должен обратить внимание на логическую структуру этого знания и, в частности, на универсальные силлогизмы во многом определяющие тип дедукции.

Анализ прагматики мышления в человековключающих, а потому рискованных (репраксивных) областях жизнедеятельности естественно обнаруживает явное или замаскированное присутствие формул обобщений, ведь присущий Homo sapiens, биогностический механизм [11], остается тем же, что и при познании неживого мира и он использует для багажирования знаний те же økономящие пространство мозга схемы универсальных выводов и генезиса универсалий. Однако в продуцировании знания логические обобщения здесь выглядят парадоксально, ибо производятся и используются, игнорируя прецеденты:

$$pa \bullet pb \bullet \ldots \bullet \exists ?_x \neg\, px \succeq \forall_x\, px,\ \exists ?\text{-“редкие”}.$$

В этом, назовем его кондуктивным [11], обобщении безапелляционная трактовка квантора $\forall$ ослабляет индукцию до кондукции, а трактовка с предикатом "в принципе" – сохраняет ее.

Было бы неосмотрительно не замечать эту обширную практику, реально функционирующую наряду и/или на месте логики. Исторические предложения легализовать подобные интенции естествознания не теряют актуальности. Только что приведенный факт, если все оставлять в рамках логики, может быть учтен в рамках тривалентной логики со значениями "истинно" – 1, "правдоподобно" – 0,9 и "ложно" – 0 с истинностной таблицей для импликации, скажем,

A 1 - 0 - 0 - 1 - 0,9 - 0 - 0,9 - 1 - 0,9

B 1 - 0 - 1 - 0 - 0,9 - 0,9 - 0 - 0,9 - 1

A $\Rightarrow$ B 1 - 1 - 1 - 0 - 0,9 - 0,9 - 0 - 0,9 - 1

Слабое звено с $\succeq$ понижает не только силу всех выводов такого исчисления, но характер импликации, ибо A$\succeq$B влечет $\succeq$A$\Rightarrow$*B.

В аналогичных предложениях трудности возможны и с другими союзами, хотя интуитивно семантика выглядит заманчиво для естествоиспытателя. Если все это остается, например, "предметной логикой", а не "…использованием логических понятий и символов для моделирования некоторых отношений реальности" [12, с. 113], то имеются попытки избежать упомянутых трудностей путем погружения подобных дополнений в ткань классической логики [13, с. 2].

В репраксивных вероятностных контекстах логика, если это она, поливалентна, ибо истинность ее формул градирована как и обеспечиваемая этим объяснимость и прогностичность использующих такую логику прагматичных теорий. Здесь истощается юрисдикция непререкаемого рационализма. Но в этой зоне истощения глупо игнорировать даже остатки логики, ибо они умножаются на судьбоносность ситуации, увы, именно здесь и обостряющуюся.

Библиографический список

1. *Кондаков, Н.И.* Логический словарь-справочник [Текст] / Н.И. Кондаков. – 2-е изд. – М: Наука, 1975. – 720 с.
2. *Клини, С.К.* Математическая логика [Текст] / С.К. Клини; пер. с англ. – М: Мир, 1973. – 488 с.
3. *Войшвилло, Е.К.* Понятие [Текст] / Е.К. Войшвилло – М: Изд-во МГУ, 1967. – 287 с.
4. *Стол, Р.Р.* Множества. Логика. Аксиоматические теории [Текст] / Р.Р. Стол; пер. с англ. – М: Просвещение, 1968. – 232 с.

5. *Шенфилд, Дж.* Математическая логика [Текст] / Дж. Шенфилд; пер. с англ. – М: Наука, 1975. – 528 с.
6. *Мендельсон, Э.* Введение в математическую логику [Текст] / Э. Мендельсон; изд. 2-е, исправ.; пер. с англ. – М: Наука, 1976. – 320 с.
7. *Карри, Х.* Основания математической логики [Текст] / Х. Карри; пер. с англ. – М: Мир, 1969. – 568 с.
8. *Новиков, П.С.* Элементы математической логики [Текст] / Н.С. Новиков; издание 2-е, исправ. – М: Наука, 1973. – 400 с.
9. *Бернайс, П.* Основания математики. Логические исчисления и формализация арифметики [Текст] / Д. Гильберт, П. Бернайс; пер. с нем. – М: Наука, 1979. – 558 с.
10. *Новоселов, М.М.* Индукция (в логике) [Электронный ресурс] www// dic.academic. ru. / dic. rist / bse / 905 33. Большая Советская энциклопедия, 2002. РС с последнего издания БСЭ, вышедшего в 1970-1977 гг. – 2002 disc.
11. *Трубников, Н.А.* Биогностика в основаниях фармакологии [Текст] / Н.А. Трубников. – Ярославль, 1991. – 439 с. – Деп. в ВИНИТИ 31.01.91. – № 499-В 91.
12. *Перминов, В.Я.* Философия и основания математики [Текст] / В.Я. Перминов. – М: Прогресс-Традиция, 2001. – 320 с.
13. *Анисов, А.М.* Логика неопределенности и неопределенности во времени [Электронный ресурс] www//Khazarvar. skeptic. net/books/arisov 03 htm.

Био(неопределенность)

Н.А. Трубников, Ж.Н. Трубникова

Вопрос о первоисточнике всех видов научной неопределенности мало волнует специалистов, работающих внутри своей предметной области, но как показывают события, разворачивающиеся в становлении новейший физической теории, перенос акцента со “ЗНАЕМ” на “МЫ знаем” (Б. Рассел) не лишен интереса. Возможно у оснований математики это еще впереди, но в биологии – это вечно актуально.

Исследовательская ситуация, и математика – не исключение, представляет эффектор: Я-субъект + ресурсы + действия → объект Ф (живой Б-биос или неживой L-эллипсис) как событийный репрезент бытия

Д → факт-эффекты (экстерьер). После фактографии объекта на суд истины выставляются изобретаемые Я фактуально и внутренне непротиворечивые логические версии его интерьера. Критерием являются степени $v = 0 \div 1$ про(гнозо)истинности (нетолерантности, неустойчивости, податливости), определяющие уровни предсказуемости и объяснимости $v \sim 1/\text{т}$ (толерантность Ф против Т-познания) силой логического вывода $v \sim 1/\ \eta$ (неопределенность Т-знания Ф). Побеждающие теории Т выявляют в природознании два уровня знаемости, определенности:
σ''(эллиптика)=LT$''$(Т с индукцией р$\alpha\bullet$р$\beta\bullet\ldots||\Rightarrow \forall_x$px),
σ'''(биогностика)=БТ$'''$(Т с кондукцией px$\bullet$р$\beta\bullet\ldots\exists_x\neg$px$\ldots|||\Rightarrow\forall_x$px).

Первый – небиологическое естествознание или физика (реминесценции по Ньютону), где присутствуют и, возможно, неспроста, и индуктивность "дедукции" и неуничтожимость (даже в классической механике) неопределенности $\eta'' \geq$1 (логон). Второй – (пан)биология, т.е. биос(истемы), человек (в т.ч. как субъект) и включающие его системы в политэкономике, юриспруденции, психологии, социологии, педагогике,..., где обобщение игнорирует редкие контрпримеры и тем заметно ослабляет вывод, увеличивая неопределенность до η''' [1]. Эта "...умеренно удовлетворительная картина мира получена дорогой ценой изъятия из этой картины нас самих и отступления назад, в позицию ненаблюдаемых наблюдателей" (Э. Шредингер, цит. по [2, с. 33]. Действительно:

1) Вековые попытки построить БТ$''$ оказываются неудачными и η''' остается высокой.

2) Элиминация из объектива "нас самих", понижает η''' до η'', дискредитируя субъекта как источника η''', без чего "...исследователь не будет знать, какая часть...наблюдений вызвана им самим и какая относится к...интересующей его системе" [3, с. 671]. Физика есть стремление осознать сущее как нечто независимое от восприятия [4, с. 238] и "...в объективном описании...представление о...субъекте...не находит...места...", что достигается абстракцией "субъект-объект" даже в классическом пределе [5, с. 110]. Но объективным, т.е. невмешательством в искусственное изгнание из объектива субъективности, должно быть и фактографическое задание Ф, а это требует "...описать также сам процесс наблюдения...функции аппаратуры и самого исследователя" [3, с. 672], ибо даже в современной физике "...объектом исследования служит уже не сама природа, а изучение природы человеком" (В. Гейзенберг, цит. по [2, с. 33]). Так что полнокорректным Ф науки всегда, а не только в панбиологии, является Б, а L оказывается его усеченным рекапитулянтом.

3) Но и предельная десубъективация не устраняет η'' уже потому, что, помимо неточности начальных условий [6], при наблюдении всегда возникает возмущение и экспериментальную ошибку нельзя сделать сколь угодно малой, ибо она относится к действительности эксперимента и должна включаться в теорию ее составной частью. Эти неизбежные ошибки есть существенная часть наших познаний об окружающем мире [6].

4) если любой Ф (в том числе L) будет задан полностью, без вычесывания из объектива методолого-технологических и др. субъективных предикатов (т.е. как Б), то его теория обречена иметь подлинную, полномасштабную (биологическую) η''', для L же она (оставаясь биологической) загнана неполнокорректным заданием под плинтус и $\eta'' < \eta'''$ вплоть до нанонеопределенности l, обеспечивающей *практические* достоверность и надежность.

В этой связи, биогностический тезис [1]: card Г=card Б, (card – уровень организационной сложности Ф, Г (гнозис) – когнитивная система субъекта) становится еще более уместным.

Получается, что существует некое препятствие индуктивной версификации субъектом роскошных панбиологических биоантроповключающих (и тем объективирующих субъекта равнобогатыми его биоантропорепрезентами) фактификатов Ф=Б=Г, исчезающее при их обеднении заменой на L или десубъективацией. Факт этой биогностической толерантности фиксируется неравенством

$$l < \eta'' < \eta''' \geq b \;\; \text{(непреодолимый min бион(еопределенности))} \qquad (*)$$

как ограничительный принцип био- и само- познания.

Какова природа этого препятствия?

Диагноз Р. Декарта: "Cogito ergo sum" по отношению к Я-субъекту остается клиническим: "...существование самой жизни следует рассматривать... как основной постулат биологии, не поддающийся дальнейшему анализу..." [5, с. 37].

То есть существует $Б \equiv \lambda\,_{Д}Б^{+}$ – неинъективное многозначное отображение, "содержащее быть может переменную" [7, с. 18] д∈Д и задающее в Д пространство т-толерантности [8, с. 143] БА (биоантропность)=<Д,т> ($\forall_{д}$((дтд)•(д1тд2⇒д2тд1)•(д1тд2•д2тд3⇒ ¬д1тд3))), ибо непустые множества Б-образов элементов д могут иметь непустые пересечения, создающие нетранзитивность в Д, где к.(т) – предкласс в <Д,т> , если для каждого д существует толерантный к нему, а к(т)-

класс толерантности, если к(т)=к.(т) и для любого д, расширяющего к.(т) найдется нетолерантный к нему [9, с. 92-102].

В этой же БА-зоне Д существует $<$к(т)$>$-множество Б-прообразов элементов из $Б^+$, являющихся к(т) в Д [9, с. 92] (БА-зона), в связи с чем существует и множество Г=$Б^{cog}$$<$Кк(т)$>$, состоящее из всех непустых подмножеств Кк(т) множества $<$к(т)$>$ классов толерантности пространства $<$Д,т$>$ и существует неинъективное многозначное отображение λ $_Д$Г=λ $_Д$$Б^{cog}$, для которого доказана [9, с. 93-95] классификационная теорема: д1т д2≡$К_1$к(т)т$К_2$к(т).

Комментарии. Если д∈Д в области БА *как-то* образуют к(т)-стуктуры Бк(т)∈Б, то это себетождественное множество $<$к(т)$>$⊂Б *как-то* идентифицирует входящие в него д от невхожих. Я-субъект, отображающий экзистенциальные структуры события посредством их свободных комбинаций Кк(т) в Г=$Б^{cog}$, будучи способным отличать $<$к(т)$>$⊄Б от $<$к(т)$>$⊂Б, не способен различать $к_1$(т) и $к_2$(т) из Б, эквикардинального его собственной Г=$Б^{cog}$-организации. Впрочем, принцип (*) оставляет не много надежд на плодотворность всех подобных спекулятивных претензий на фундаментальность в области абстрактной биологической теории, в лучшем случае уточняющих наблюдаемое.

В металогике известен аналог обозначаемой ситуации. Это ауторефентность. В "...системах управления ауторефентность... принадлежит к числу фундаментальных возможностей системы", но в "...формальных языках...она приводит к логическим кругам, парадоксам или...к демонстрации неполноценности..." [10, с. 87] Эта субсидируемая биологией интриганка стоит не только за неуничтожимой неопределенностью в физике и самой биологии, она скрывается за фундаментальными невозможностями в математике от диагональных процессов и теорем А. Тарского и К. Геделя до незавершившихся походов логицизма и формализма к основанию математики. Очарование этой дамы в том, что она рождает жизнь, а капризами завораживает ее течение.

Что касается математики, то природа ее корней остается онтологической тайной. "Специалисты по основаниям математики зарылись в землю так глубоко, что их просто не видно" [11, с. 385]. Может вообще "...самое главное не в том, чтобы докопаться до корня вещей, а в том, чтобы знать как в том мире, какой он есть, жить" (А. Камю), ведь "...тупик, в который зашел...спор...какая школа математической мысли является наиболее последовательной..." не останавливает легкомысленных математиков, строящих "...в разных направлениях здание математической науки, игнорируя шаткость фундамента и рискуя ...что новые теоремы могут оказаться... неверными" [11, с. 384]. Осторожность требует квалифицировать обе альтернативы дополнительными в духе Н. Бора, т.е. допустимыми, но взамомодерирующими.

По поводу "философии" в рамках изложенных выше взглядов и (*)-ограничений резюмируется следующее.

Как трансцедентальная цельность Б⊂Д, но, в отличие от Д, Б утонченно организован и, непример, счетен; тогда как в со-бытии этот blac box Б задан конечным экстерьером фактов, действий или условий (являя со-бытийные экзистенциальные сгущения кристаллизацией бытия) как конечна и необходима практика. Бытие тела Б задано перцептивным и проприоцептивным экстерьер-со-бытием, а бытие интеллекта – интуитивным экстерьер-со-бытием. Реакция Б=Г в ответ на выбранные действия в эксперименте или постулированные аксиомы и, быть может, логику, эта реакция, в ее предсказуемости или целедостижимости, фиксируется экстерьерным результатом в диапазоне v∼1/т∼v∼1/η ∼0÷1, в зависимости не только от изобретательности версифицирователя, но и от упертости (т) затаившегнося в интерьере (заданно-избранного фрагмента) БГ неизвестного deix ex machina математики. "Человеческий разум открыт в бесконечное, его целью является постижение человеком, который конечен, бесконечного с помощью знаков" (Г. Вейль).

Библиографический список

1. *Трубников, Н.А.* Биогностика в основаниях фармакологии [Текст] / Н.А. Трубников. – Деп ВИНИТИ. – 1991. – № 499. – В91. – 499 с.
2. *Уоддингтон, К.Х.* Основные биологические концепции [Текст] / К.Х. Уоддингтон // На пути к теоретической биологии 1 Пролегомены; пер. с англ. – М: Мир, 1970. – 182 с.
3. *Бом, Д.* Квантовая теория [Текст] / Д. Бом; пер. с англ. – М: гос. издат. физ.-мат. литературы, 1961. – 728 с.
4. *Эйнштейн, А.* Собрание научных трудов [Текст] / А. Эйнштейн. – М: Наука, 1967. – Т. 4. – 599 с.
5. *Бор, Н.* Атомная физика и человеческое познание [Текст] / Н. Бор; пер. с англ. – М: ИЛ, 1961. – 152 с.
6. *Бриллюэн, Л.* Научная неопределенность и информация [Текст] / Л. Бриллюэн; пер. с англ. – М: Мир, 1966. – 284 с.
7. *Барендрегт, Х.* Ламбда-исчисление. Его синтаксис и семантика [Текст] / Х. Барендрегт; пер. с англ. – М: Мир, 1985. – 606 с.

8. *Бьюнеман, О.* Толерантные пространства и мозг [Текст] / Э. Зиман, О. Бьюнеман // На пути к теоретической биологии 1 Пролегомены; пер. с англ. – М: Мир, 1970. – 182 с.
9. *Шрейдер, Ю.А.* Равенство, сходство, порядок [Текст] / Ю.А. Шрейдер – М: Наука, 1971. – 256 с.
10. *Манин, Ю.И.* Доказуемое и недоказуемое [Текст] / Ю.И. Манин. – М: Советское радио, 1979. – 168 с.
11. *Клайн, М.* Математика. Утрата определенности [Текст] / М. Клайн; пер. с англ. – М: Мир, 1984. – 434 с.

Глава 3

Теория и методика обучения математике в школе и вузе

Реализация компететностного подхода в подготовке учителя математики и информатики: практический аспект

Р.М. Асланов, А.В. Синчуков

Модернизация и реформирование системы высшего профессионального образования России на сегодняшний день обусловлены двумя ведущими факторами, тесно связанными друг с другом: переходом на двухуровневую систему образования "бакалавр-магистр" с одной стороны и внедрением в подготовку будущего специалиста идей компетентностного подхода с другой. Особую роль играет второй из заявленных факторов в подготовке будущего учителя, в частности – учителя математики: с одной стороны, в период обучения в вузе студент является объектом реализации компетентностного подхода, с другой – по окончании профессиональной подготовки в стенах высшего учебного заведения ему предстоит реализация этого подхода в практике школьного преподавания.

Ведущая цель реализации компетентостного подхода в образовании – формирование у выпускника набора компетенций, не в полной мере согласуется с традиционными для высшего профессионального образования целями, которые определяются набором знаний, умений, навыков, которыми должен владеть выпускник: сегодня такой подход оказывается недостаточным. Обществу, и в первую очередь работодателю, нужны выпускники, готовые к включению в дальнейшую жизнедеятельность, способные практически решать встающие перед ними жизненные и профессиональные проблемы. А это во многом зависит не от полученных знаний, умений и навыков, а от неких дополнительных качеств, для обозначения которых и употребляются понятия "компетенции" и "компетентности", более соответствующие пониманию современных целей образования.

Определение выпускника, владеющего компетенциями, то есть тем, что он может делать, каким способом деятельности овладел, к чему он готов, – называют ***компетентностным подходом***. Компетентностный подход означает постепенную переориентацию доминирующей образовательной парадигмы с преимущественной трансляцией знаний, формированием навыков на создание условий для овладения комплексом компетенций, означающих потенциал, способности выпускника к выживанию и устойчивой жизнедеятельности в условиях современного многофакторного социально-политического, рыночно-экономического, информационно и коммуникационно насыщенного пространства.

Компетенция по сравнению с понятиями "знания, умения, навыки" рассматривается как более сложная социально-дидактическая личностная структура, основанная на ценностях, направленности, знаниях, опыте, приобретенных личностью как в процессе обучения, так и вне его. Она выражается в мобилизации личностью полученных знаний, опыта, поведенческих отношений в конкретной ситуации для решения разнообразных задач, в том числе решения сложных реальных задач. В структуру компетенции входит сформированность у личности внутренней мотивации, психологической и практической готовности к достижению более качественных результатов в своей профессиональной деятельности, социальной жизни.

Понятия компетенции и компетентности – системные, многокомпонентные. Они характеризуют определенный круг предметов и процессов, реализуются на различных уровнях, то есть включают различные умственные операции (аналитические, критические, коммуникативные), а также практические умения, здравый смысл и имеют свою классификацию и иерархию. Содержательный аспект термина "компетенция" включает три составляющих: когнитивную (владение знаниями); операциональную (сформированность способов деятельности, технологической грамотности); аксиологическую (освоение ценностей, ценностное отношение к профессиональному труду и личностному росту). Такая точка зрения на сущность компетенции преобладает в работах российских исследователей (В.А. Болотов, А.В. Хуторской, В.В. Краевский, В.В. Сериков, А.А. Пинский, И.А. Зимняя и др.)

Формирование ключевых и специальных профессиональных компетенций будущих учителей математики и информатики требует интегративного подхода и реализуется в ходе всего учебно-воспитательного процесса, в котором нельзя жестко закрепить конкретные дисциплины или виды деятельности "ответственными" за решение названых задач. Вместе с тем, очевидна особая роль в данном отношении разных групп дисциплин. Так, социально-гуманитарным и общенаучным дисциплинам

(1-й и 2-й блоки учебного плана) принадлежит приоритетная роль в формировании социальных, коммуникативных компетенций, компетенций в сфере познавательной деятельности, в развитии интеллектуальной любознательности, в "научении жизни" – через общее развитие, творчество, художественно-эстетическую подготовку и т.д.

Прерогативой преимущественно специальных дисциплин является задача формирования компетенций в сфере будущей профессиональной деятельности. При подготовке учителя в учебном плане выделяется перечень общепрофессиональных, специальных дисциплин и дисциплин специализаций. Изучение специальных общепрофессиональных дисциплин обеспечивает, прежде всего, фундаментальную подготовку в основной и смежной областях, создает резерв знаний, который позволяет адаптироваться к переменам. Развитие интеллекта, его социальной и практической направленности, его абстрактно-логических качеств, рациональности и критичности мышления, овладение методологией познания в профессиональной сфере – таков далеко неполный перечень развивающего потенциала специальных дисциплин общенаучного цикла.

Специальные дисциплины направлены на развитие профессиональных умений и навыков по выполнению конкретных производственных функций. Хотя соответствующий профессиональный уровень формируется на протяжении всей профессиональной деятельности, уже на студенческой скамье закладываются основы того, что называется "научиться делать", т.е. определенный уровень мастерства в решении профессиональных задач, творчество в нестандартных ситуациях, поиск нестандартных и эффективных решений. На это направлено постоянное обновление содержания специальных дисциплин, стремление кроме предметных знаний раскрыть для студентов процесс их получения (историко-методологический аспект специальных знаний), предоставление возможности студентам системного обучения, обоснование рациональности различных методических приемов, используемых средств деятельности, знакомство с профессиональным опытом путем сравнительного анализа, знакомство с новыми технологиями и т.д.

Активно-развивающий характер преподавания специальных дисциплин находит свое отражение как в содержании, так и в используемых формах обучения.

Анализ современной практики подготовки учителя математики и информатики на математическом факультете Московского педагогического государственного университета позволяет сделать вывод о том, что компетентностный подход не является для нас абсолютно новаторским, элементы этого подхода достаточно активно используются и развиваются в учебно-воспитательном процессе на факультете. В частности, кафедрой математического анализа эффективной организации работы студента – будущего учителя математики и информатики - в процессе профессиональной подготовки разрабатывается методическое обеспечение ряда дисциплин, содержание которого составляют:

– Study Guide учебного курса (своего рода “навигатор” по изучаемому курсу);

– практикум по курсу (содержащий дифференцированные индивидуальные задания);

– тестовые задания, выполнение которых направлено на контроль усвоения теоретического материала.

В процессе аудиторной работы широко используются такая форма работы как вовлечение студента в квазипрофессиональную деятельность: студентам предлагается самостоятельно разработать и провести практическое занятие по определенной теме, подобрать задачи, рассмотрение которых иллюстрирует новые методические приемы и т.п.

Использование указанных форм в учебном процессе согласуется с требованиями компетентностного подхода к подготовке кадров, поскольку они направлены на приобретение опыта решения разнообразных задач и выполнения социально-профессиональных функций на основе сформированных обобщенных знаний, универсальных способностей и видов готовности, относящимся к различным сферам жизнедеятельности человека, видам профессиональной деятельности.

Библиографический список

1. *Байденко, В.И.* Концептуальная модель государственных образовательных стандартов в компетентностном формате [Текст] / В.И. Байденко.– М.: ИЦ ПКПС. – 2004.
2. *Зимняя, И.А.* Ключевые компетенции – новая парадигма результата образования [Текст] / И.А. Зимняя // Высшее образование сегодня. – М., 2003. – № 5.
3. *Коган, Е.Я.* Компетентностный подход и новое качество образования [Текст] / Е.Я. Коган // Современные подходы к компетентностно-ориентированному образованию: Материалы семинара / под ред. А.В. Великановой. – Самара, 2001.
4. *Пинский, А.А.* Ключевые компетенции: философский подход и политическое решение [Текст] / А.А. Пинский // Современные подхо-

ды к компетентностно-ориентированному образованию: Материалы семинара / под ред. А.В. Великановой. – Самара, 2001.

5. *Татур, Ю.Г.* Компетентность в структуре модели качества подготовки специалиста [Текст] / Ю.Г. Татур // – Высшее образование сегодня. – М., 2004. – № 3.

О проблеме оценки качества различных образовательных моделей

В.А. Тестов

В последние годы, как в России, так и в других европейских странах уделяется много внимания проблеме качества образования, как среднего, так и высшего, разрабатываются различные модели и технологии оценки качества подготовки специалистов, создаются многочисленные службы управления качеством. Однако уже имеющийся опыт не позволяет пока говорить об эффективности работы новой системы. Сказывается, прежде всего, нерешенность ряда исходных методологических вопросов. Хотя понятие "качество образования" широко используется в современном обществе, сущность и значение этого понятия до конца не раскрыты ни наукой, ни практикой, ни администраторами от образования, ни педагогической общественностью. В научных исследованиях по этой тематике наблюдается не только отсутствие единства в понимании основных терминов, но и неоднозначность целого ряда исходных положений. Однако как администраторы, так и многие ученые с качеством работают, пытаются его измерить.

С философской точки зрения качество объекта или явления обнаруживается в совокупности его свойств. Качество связано с предметом как целым, охватывает его полностью и неотделимо от него. Предмет не может, оставаясь самим собой, потерять свое качество. Применительно к образованию это означает, что с философской точки зрения качество образования – его неотъемлемая черта, его суть, т.е. если есть образование, то есть и качество, нет качества – нет фактически и самого образования.

Между тем, большинство современных исследователей философское определение качества отвергли. На первый план было выдвинуто требование измеряемости качества образования. Было высказано мнение, что в философии категория качества не носит оценочного характера и при такой трактовке бессмысленно ставить вопрос об измерении или иной оценке качества, различении плохого или хорошего качества. На этом основании рядом авторов за основу было принят совсем другой подход к качеству, подход, используемый для объектов и процессов, формируемых и реализуемых в производственной практике. В наиболее концентрированном виде этот подход представлен в концепции Всеобщего управления качеством, международных и основанных на них российских стандартах качества (ISO 9001:2000, ISO 9000), он трактует результат образования как удовлетворение потребности в нем потребителей – государства, работодателей, студентов и их семей, общества в целом.

В разработанных на основе этой позиции моделях и технологиях оценки качества прослеживается хорошо знакомый технократический подход. Все-таки в образовании первичным является его качество, а оценка качества, не смотря на всю ее важность, вторична. Однако зачастую картина перевернутая, например, так произошло с введением в России ЕГЭ: полезность его для оценки качества превысила в глазах администраторов его вред для самого качества образования. Отсутствует понимание или желание понимать, что результаты в образовании бывают разные: не только те, которые измеряются количественно в ходе контроля, но и иные, с трудом подвергающиеся аналитическому разложению, связанные в первую очередь с воспитывающей и развивающей функциями образования.

Результаты образования, особенно фундаментального, проявляются далеко не сразу, поэтому дать им объективную внешнюю оценку сразу на выпуске или даже через год после выпуска весьма затруднительно. Система образования следует не столько конъюнктуре рынка, сколько традициям развития культуры общества, своим внутренним тенденциям. Разумеется, между успехами в профессиональной деятельности и образованием имеется определенная и весьма существенная связь, но на возможность успеха в индивидуальной карьере и жизни в целом оказывают влияние и другие факторы, весьма далекие от качества полученного образования (характер, личные связи и даже внешность человека). Таким образом, ни результаты обучения, зафиксированные в виде ЕГЭ или Интернет-тестирования, ни устроенность выпускников сразу после окончания учебного заведения не могут служить надежными критериями качества образования. В идеале должен сравниваться уровень воспитанности и уровень обучаемости как на входе учебного заведения, так и на выходе. О хорошей работе образовательного заведения можно говорить только в том случае, если возрастает культурный, нравственный и интеллектуальный потенциал обучающихся.

Образование – это объект достаточно сложных и тонких антропосоциокультурных отношений. Поэтому к определению качества образования необходим принципиально другой подход, учитывающий не только потребности различных внешних сторон, но, прежде всего, внутренние процессы в образовании, его сущность, его природу.

Внутренняя природа педагогической системы, ее сущностная организация отражается в понятии образовательной модели. Понятие модели уже давно используется в педагогической науке, его появление в педагогике было вполне закономерным, поскольку мир образования стал намного сложнее. В науке, в том числе и в педагогике, было осознано, что возможны разные модели и схемы одной и той же системы, соответствующие разным научным концепциям и парадигмам.

Все педагогические модели можно подразделить на жесткие и мягкие. Впервые об этих двух типах моделей было заявлено в выступлениях и статьях крупнейшего российского математика В.И. Арнольда, который убедительно показал полезность мягких экономических, экологических и социологических моделей, в которых присутствует неопределенность, многозначность путей развития, и опасность жестких моделей, для которых предопределен единственный путь развития [1]. О значении для образования понятий жесткой и мягкой моделей ранее писал автор данной статьи [3]. Модель отражает внутреннюю, сущностную организацию педагогической системы, которая определяется, прежде всего, ее целями. Если в жесткой модели цели ставятся весьма конкретно и должны обязательно достигаться заданным путем, то в мягкой модели цели носят более общий характер, к ним можно стремиться, не достигая их, притом разными возможными путями. Поэтому результаты обучения в жесткой модели, в отличие от мягкой, проверить сравнительно легко, сличив их с поставленными целями.

В науке долгое время, со времен Р. Декарта и И. Ньютона, преобладала детерминированность, строгая предопределеность конструкций. Детерминированность, в частности, проникла в педагогику, начиная с Я.А. Коменского. Следствием такой детерминированности была попытка организовать образование как идеально функционирующую машину. Согласно доминирующим тогда представлениям для обучения (воспитания) человека надо лишь научиться управлять такой машиной, т.е. превратить обучение в своего рода производственно-технологический процесс. Акцент стал делаться на стандартизированных учебных процедурах и фиксированных эталонах усвоения знаний. То есть было положено начало технокрагическому подходу в обучении, а тем самым преобладанию в обучении репродуктивной деятельности учащихся. Важнейшим современным достижением технологического подхода в обучении считается постановка четких конкретных диагностируемых целей, которые должны обязательно достигаться за определенный промежуток учебного времени. Поэтому большинство созданных за последние годы технологий обучения могут служить примерами жестких моделей обучения. К таким же жестким моделям могут быть отнесены и существующие технологии оценки качества обучения.

Жесткие модели всегда предполагают соответствие результата и цели, творчество же, наоборот, предполагает рассогласование цели и результата. Если же цели обучения ставятся на длительный промежуток времени (например, на учебный год или на несколько лет), то четко определенные, жесткие цели могут оказаться или недостижимыми или даже вредными, их необходимо менять или в этом случае нужны цели общего характера. Жесткие модели – это путь к ошибочным предсказаниям. Более того, стремление все заранее, на несколько лет вперед, распланировать и оптимизировать может при определенных условиях привести к катастрофе. Жесткая модель образования предполагает принуждение учеников и самого учителя к достижению определенных целей. А принуждение всегда неэффективно и разрушительно.

При построении педагогических моделей, в том числе и оценки качества обучения, необходимо учитывать быстро меняющиеся социально-экономические условия, появление принципиальной неопределенности, многозначности возможных жизненных ситуаций, когда необходимо научиться умению жить и действовать в условиях выбора.

В последние десятилетия на основе открытий в естествознании (И. Пригожин, Г. Хакен и др.) произошли изменения во всем стиле мышления: произошел переход от образов порядка к образам хаоса, наука более не отождествляется с определенностью, развились идеи недетерминированности, непредсказуемости путей эволюции сложных систем. В математике также появились новые разделы (теория катастроф, геометрия фракталов, теория нечетких множеств, многозначная логика и др.), послужившие основой математической теории мягких моделей. Полезность такой математической теории была открыта сравнительно недавно, поэтому у многих ученых новое научное видение еще не сложилось, по-прежнему преобладает стремление к детерминированности конструкций, к построению жестких моделей.

Педагоги также далеко не все осознают полезность и необходимость использования мягких моделей обучения, хотя еще в 1980-е гг. российский ученый-педагог Э.Н. Гусинский сформулировал принцип неопределенности для гуманитарных систем, согласно которому результаты их взаимодействия и развития не могут быть детально предсказаны [2]. В процессе обучения всегда происходят незапланированные малые изменения, флуктуации различных педагогических систем (и отдельной личности, и коллектива учащихся, и системы знаний). Поэтому в основе современных образовательных моделей должен лежать принцип неопределенности ряда учебных параметров и параметров управления.

В силу этого оценка состояния дел, обратная связь необходима для принятия решений в зависимости от реального состояния дел, а не только от планов. Значит, цели обучения должны или все время меняться или носить общий неконкретный характер с тем, чтобы к цели могли вести разные пути. Точку разветвления различных путей принято в науке называть точкой бифуркации. Наличие бифуркаций является особенностью систем, способных к самоорганизации. В последние десятилетия бурно развивалась наука о самоорганизации различных систем – синергетика. Как и любая новомодная теория, синергетика вызвала массу не только научных, но и околонаучных публикаций. Однако умение давать глубокие ответы на простые вопросы, обнаружение ряда замечательных эффектов заставили воспринимать синергетический подход всерьез. Именно в синергетике впервые появились мягкие модели.

Развитие синергетических представлений не могло сказаться и на развитии педагогической науки. В последние полтора – два десятилетия интерес к теории самоорганизации в педагогической среде неуклонно рос. Однако пока лишь отдельные энтузиасты пытаются перейти от теории самоорганизации к педагогической практике.

Традиционная педагогика, основанная на жестких моделях, не понимает, что в школе и в вузе должна быть определенная доля хаоса, что флуктуации на микроуровне играют существенную роль в определении наличных тенденций, целей обучения на ближайшую перспективу. Хаос предстает в качестве механизма выхода на структуры-аттракторы эволюции.

Вывод, к которому приходит синергетика, состоит в следующем: эффективное управление самоорганизующейся системой возможно только в случае вывода ее на собственные пути развития, а не как не навязывание жестких планов и схем, присущих жестким моделям. В этом и состоит суть подхода к построению мягких моделей в образовании, в том числе и при оценке качества, подхода, основанного на поиске и использовании внутренних тенденций развития образовательных систем, их саморазвития, самоорганизации, не навязывающего этим системам не свойственных им путей развития.

Мягкие модели – это мудрость мягкого управления учебным процессом, управления через советы и рекомендации, фактически управления как самоуправления. Лучшее управление качеством – это самоуправление, а лучший контроль – это самоконтроль. Ведь главное в образовании – не передача знаний, а овладение учащимися способами пополнения знаний, способами поиска нужной информации, способами самообразования. Одним из проявлений самообразования являются эвристики. Эврика, инсайд, озарение – это типичный пример нелинейного мышления, точно планировать результат которого невозможно, можно лишь подводить к нему ученика, невозможно и точно его измерить.

Оба вида образовательных моделей: и жесткие и мягкие давно присутствуют в образовании. На протяжении столетий оба типа моделей соперничали и в то же время дополняли друг друга. Скажем, система обучения Сократа являла собой пример мягкой модели. Из современности яркими примерами мягких моделей являются педагогическая система известного российского педагога-новатора М.П. Щетинина и специализированная школа им. А.Н. Колмогорова при Московском государственном университете. И по образовательным целям и по методам работы с учащимися такие школы совершенно не похожи на обычные школы. Соответственно и технологии оценки качества обучения в них должны быть совершенно отличными от обычных школ или профтехучилищ. Стремление же ряда современных педагогов с детерминированным линейным мышлением весь педагогический процесс и определение качества образования свести к построению только жестких моделей с измеряемыми результатами, к тестированию знаний представляется весьма опасным.

Те унифицированные подходы к определению качества образования, которые навязываются нашим школам и вузам, могут нанести определенный вред. Для обеспечения системности, принципа полноты и всеобъемлющего характера оценки качества образовательной модели необходимо использовать целый комплекс методов. Для мягких моделей на первый план, кроме самоконтроля, выдвигаются такие методы, как метод экспертной оценки, метод портфолио и др. Особое внимание следует уделить методам коллективной экспертной оценки итогового качества образования (по типу педагогического консилиума). Только такой подход позволяет системно оценить реальные результаты образования и является оперативным по времени реализации.

Библиографический список

1. *Арнольд, В.И.* “Жесткие” и “мягкие” математические модели [Текст] / В.И. Арнольд. – М.: МЦНМО, 2000. – 32 с.
2. *Гусинский, Э.Н.* Построение теории образования на основе междисциплинарного системного подхода [Текст] / Э.Н. Гусинский. – М., 1994.
3. *Тестов, В.А.* “Жесткие” и “мягкие” модели обучения [Текст] / В.А. Тестов // Педагогика. – 2004. – № 8 – С. 35-39.

Об опыте формирования логической грамотности студентов математического факультета МПГУ в рамках “Вводного курса математики”

И.Л. Тимофеева, И.Е. Сергеева

В 2006/07 уч. году на математическом факультете МПГУ после многолетнего перерыва возрожден *Вводный курс математики* (ВКМ) с существенно обновленным содержанием [4].

Прежний *Вводный курс математики*, который недолго существовал в МПГУ около двадцати лет назад, по сути, был использован для увеличения количества часов на математические дисциплины, изучаемые на первом курсе. Как такового, *Вводного курса математики* с самостоятельной программой не было. Вскоре он и вовсе прекратил свое существование. Несколько лет назад было принято решение восстановить *Вводный курс математики*, однако, уже в новом качестве.

В связи с этим мы разработали новую программу курса, отражающую следующую *позицию авторов*: 1) необходимо обучать студентов логическим инвариантам математического языка, в первую очередь, логическим единицам математического языка и понятиями логического характера; 2) необходимо использовать обучение логическим элементам математического языка как средство формирования логической грамотности студентов и обучения математике в целом.

Отличие изучаемых в вузе математических курсов от школьного курса математики состоит, прежде всего, в богатстве и сложности используемого математического языка со специфическими для него логическими конструкциями. Часто проблемы, возникающие у студентов при изучении математических дисциплин, по существу, имеют логический характер и обусловлены тем, что студенты с большим трудом овладевают этим языком. Очень важно, чтобы *в начале обучения* в педвузе студенты активно овладевали базовыми логическими знаниями, и, в первую очередь, логическими элементами математического языка (кванторами, логическими связками, логическими символами) и понятиями логического характера (предложение, обратное данному; необходимые и достаточные условия и т.п.).

В связи с этим возникает необходимость в *специально организованной и целенаправленной логической подготовке* студентов первого курса математического факультета педвуза к изучению математических дисциплин. Действительно, результаты исследований специалистов в области методики преподавания математики свидетельствуют о том, что такую подготовку нельзя обеспечить непосредственно при изучении конкретных математических дисциплин, поэтому необходимо заниматься этим специально – целенаправленно организовывать обучение студентов логическим знаниям и умениям. Логическую грамотность также практически невозможно сформировать стихийно, в процессе изучения других математических дисциплин. Для этого требуется организовать специальную целенаправленную работу, которую мы осуществляем в рамках *Вводного курса математики.*

Перечислим основные *цели* дисциплины "Вводный курс математики":

– *адаптация* абитуриентов к изучению математических дисциплин в педвузе, заключающаяся в формировании у них способности свободно оперировать с логическими конструкциями, специфическими для языка высшей математики;

– *обеспечение* теоретической базы для формирования основных логических компетенций студентов: формирование у студентов минимума логических и теоретико-множественных знаний и умений, необходимых для изучения математических дисциплин в педвузе и для будущей педагогической деятельности, а также готовности применять полученные знания и умения как в изучении, так и в преподавании математики в дальнейшем;

– *формирование* логической грамотности студентов, в первую очередь, логической грамотности математической речи; развитие логического мышления, логической интуиции, логической рефлексии и воспитание логической культуры студентов.

Разработанная *программа Вводного курса математики* содержит следующие основные разделы: Введение. Язык теории множеств. I. Математические предложения и их логическое строение. II. Математические определения и теоремы, их логическое строение. III. Математические рассуждения и их логическое строение. Методы доказательства. IV. Бинарные отношения. Функции.

При создании программы мы учитывали ГОС ВПО по дисциплине "Вводный курс математики" [1]. Однако если при разработке содержания курса руководствоваться только этими стандартами, то этот курс можно превратить в изложение элементов математической логики, лишенное практических применений. В связи с этим, при разработке содержания курса мы в первую очередь ориентировались на практические применения ВКМ – знания, полученные в этом курсе, должны ощутимо помогать студентам при изучении других математических дисциплин.

Нами разработана система задач по *Вводному курсу математики*, адекватная целям этого курса. При ее создании мы использовали не только традиционные задачи из разных пособий, например, [2, 3], но и разработали большое количество *новых* задач практически по всем темам *Вводного курса математики*. В систему задач включены логико-ориентированные задачи, использующие как содержание вузовских математических дисциплин, так и содержание школьного курса математики. Благодаря последнему осуществляется *преемственность* ВКМ и школьного курса математики. Кроме того, разработанная система задач направлена на реализацию *межпредметных связей* ВКМ с другими математическими дисциплинами, изучаемыми на первом курсе педвуза: математическим анализом, алгеброй, геометрией. Опыт преподавания ВКМ показал, что эти межпредметные связи способствуют повышению эффективности обучения как этим дисциплинам, так и *Вводному курсу математики*.

Приведем *примеры типичных задач*, которые предлагаются в разных темах ВКМ.

В теме "Математические определения и их логическое строение" (раздел II) предлагаются, например, задачи следующих типов.

Задача 1. Запишите определение понятия "ограниченное сверху числовое множество" на естественном языке; проанализируйте его логическое строение и запишите его с помощью логических символов.

Задача 2. Для предложения "Числовое множество M не является ограниченным сверху" запишите равносильное ему предложение в позитивной форме на естественном языке, а затем с помощью логических символов.

Выполнение подобных задач позволяет сформировать у студентов представления о логическом строении математических определений. Это способствует лучшему усвоению смысла математических понятий, изучаемых в других дисциплинах; дает возможность оперировать этими понятиями более осознанно; позволяет работать не только с рассмотренными определениями, но и дает метод для логически-ориентированной работы над математическими определениями.

Приведем типичные ошибки студентов при работе над определениями: опускание определяемой части; опускание слова "называется" или его синонимов, а также замена его словом "является"; перестановка в определяющей части определения разноименных кванторов; искажение кванторных (обобщенных) законов де Моргана при построении позитивной формы для отрицания определяющей части. Отметим, что была проведена специальная работа по разъяснению сути этих ошибок.

В теме "Обратное, противоположное и контрапозитивное данному предложения" (раздел II) предлагается, например, задача следующего типа.

Задача. Для теоремы "Всякая сходящаяся числовая последовательность ограничена" сформулируйте обратное предложение и укажите, является ли оно теоремой.

Если исходное предложение сформулировано в безусловной (категоричной) форме, то для того чтобы правильно сконструировать обратное ему предложение, необходимо уметь переходить от безусловной формы теоремы к ее условной форме. При выполнении задач такого типа студенты допускали ошибки, в основном, связанные с тем, что они не понимают структуру данной теоремы. Например, многие студенты предлагали в качестве условной формы данной теоремы следующее предложение: "Если всякая числовая последовательность сходится, то она ограничена", ошибочно относя квантор общности только к посылке импликации. В результате они получали в качестве обратного предложения следующее: "Если числовая последовательность ограничена, то всякая числовая последовательность сходится". При правильном переходе к условной форме квантор общности относится ко всей импликации: "Какой бы ни была числовая последовательность, если она сходится, то она ограничена". Разумеется, обратное предложение формулируется следующим образом: "Какой бы ни была числовая последовательность, если она ограничена, то она сходится" или в безусловной форме: "Всякая ограниченная числовая последовательность сходится" (и теоремой не является).

При построении обратного предложения встречалась также следующая ошибка: когда студенты меняли местами посылку и заключение теоремы, они также "двигали" и союз "если". Так, в предыдущем примере они получали предложение "Какой бы ни была числовая последовательность, она ограничена, если она сходится", являющееся переформулировкой исходного предложения, а не обратным ему.

Большое внимание в курсе уделяется формированию понятий *необходимое условие* и *достаточное условие.* Эти понятия используются при изучении практически всех математических дисциплин. Владение этими понятиями является неотъемлемой частью грамотной математической речи (как устной, так и письменной). Однако эти понятия студенты усваивают с трудом, поэтому в курсе ВКМ уделяется особое внимание их изучению и формированию умения ими пользоваться.

В теме "Необходимые и достаточные условия" (раздел II) предлагается, например, задача следующего типа.

Задача. Вставьте вместо многоточия одно из следующих условий: xM9 и xM2; xM9; xM36 так, чтобы получилось верное предложение: "Для того чтобы xM18, *необходимо*, *но недостаточно*, чтобы...". Ответ обоснуйте.

Чаще всего у студентов возникали трудности при обосновании ответа, что свидетельствует о непонимании сути понятий *необходимое условие* и *достаточное условие.*

При изучении математики важно уметь распознавать правильные и неправильные рассуждения. Признание рассуждения правильным или неправильным зависит только от его формы, а вовсе не от его содержания. Выявлению и анализу формы рассуждения в курсе ВКМ уделяется большое внимание.

В теме "Правильные и неправильные рассуждения" (раздел III) предлагается, например, задача следующего типа.

Задача. Выясните, является ли правильным следующее рассуждение: "График всякой четной функции симметричен относительно оси ординат. Данная функция не является четной. *Следовательно*, график данной функции не симметричен относительно оси ординат".

Распространенной ошибкой студентов является признание данного рассуждения правильным. Многие студенты часто рассуждают подобным образом. Однако можно привести пример рассуждения, имеющего такую же форму, что и данное рассуждение, посылки которого истинны, а заключение ложно, – что будет доказывать неправильность данного рассуждения. Действительно, в имеющем такую же форму рассуждении "Всякое делящееся на 4 число делится на 2. Число 6 не делится на 4. *Следовательно*, число 6 не делится на 2" обе посылки истинны, а заключение ложно.

К особенностям проведения ВКМ можно отнести *непрерывный контроль* усвоения студентами знаний и умений, формируемых в этом курсе. До изучения курса проводилась *стартовая* диагностирующая работа, анализ результатов которой продемонстрировал полную беспомощность первокурсников в вопросах логического характера и отсутствие логической грамотности, что является следствием недостаточной логической подготовки школьников.

В процессе изучения ВКМ практически на каждом занятии студентам предлагались небольшие пятиминутные самостоятельные работы, содержащие одну-две типичные задачи по теме предыдущего занятия. Проведение такого непрерывного *текущего* контроля позволяло своевременно выявлять трудности студентов при изучении курса и исправлять допускаемые ими ошибки. После изучения курса при анкетировании студенты отмечали, что регулярно проводимые самостоятельные работы помогли большинству из них вовремя выявить то, что ими усвоено, а что не усвоено при изучении материала, а это, в свою очередь, помогло им при подготовке к контрольным работам и зачету.

Наконец, спустя почти четыре месяца после изучения курса (в апреле-мае), мы проводили *отсроченную* диагностирующую работу, на которой студенты первого курса продемонстрировали достаточно уверенное владение материалом ВКМ. Анализ результатов этой работы позволил сделать вывод, что знания и умения, полученные студентами при изучении ВКМ, прочно сформированы, а также, что студенты активно используют их при изучении других математических дисциплин – проверяемые знания и умения не перешли в пассив и активно используются. Таким образом, можно считать, что формирование основ логической грамотности у большинства студентов происходило успешно. Проверка остаточных знаний проводилась также спустя два года после изучения ВКМ (на третьем курсе). Она показала, что студенты прочно овладели логическими знаниями и умениями.

Результаты ежегодного (с 2006 по 2009 годы) анкетирования студентов-первокурсников, изучавших ВКМ, показывают, что они в целом оценивают этот курс положительно, понимают важность и полезность этого курса (понимают, что изучение ВКМ помогает им восполнить пробелы в знаниях школьного курса математики, а также помогает в освоении вузовских математических дисциплин), с интересом его изучали и хотели бы продолжить изучать логические основы математики.

Кроме того, мы проводили опрос студентов 3 курса, не изучавших ВКМ. Он показал, что студентам не хватает систематических знаний о логическом строении предложений, определений, рассуждений и теорем. Логические знания, имеющиеся у них, носят бессистемный и интуитивный характер. Они осознают, что при изучении математических дисциплин они испытывали трудности логического характера, которые было бы проще преодолеть, имея соответствующие логические знания. Опрос также показал, что студенты сожалеют, что у них не было этого курса, т.к. он облегчил бы изучение математического материала; логическая работа с формулировками определений и теорем позволила бы глубже понять их смысл.

Итак, за три года преподавания ВКМ у нас накопился немалый положительный опыт, в результате которого: 1) скорректирована первоначально разработанная нами программа *“Вводного курса математики”*; 2) по этому курсу разработана система задач, которая реализует межпредметные связи с вузовскими математическими дисциплинами и преемственность со школьным курсом математики; 3) разработаны проверочные материалы для непрерывного контроля; 4) выявлены типичные ошибки студентов и намечены пути их предотвращения; а также экспериментально подтверждено, что изучение ВКМ способствует повышению уровня логической грамотности студентов, необходимой им для успешного изучения других математических дисциплин.

Библиографический список

1. Государственный образовательный стандарт высшего профессионального образования. Специальность 032100 – Математика [Текст]. – М., 2005.
2. Математический язык в задачах [Текст]: сб. задач / А.Б. Михайлов, А.И. Плоткин, Е.А. Рисс, Е.Ю. Яшина. – СПб.: Изд-во РГПУ им. А.И. Герцена, 2000. – 236 с.
3. *Моторинский, Ю.А.* Вводный курс математики: метод. разработка [Текст] / Ю.А. Моторинский, Б.Д. Пайсон. – Барнаул: Изд-во БГПУ, 2002. – 70 с.
4. *Тимофеева, И.Л.* О содержании “Вводного курса математики” в Московском педагогическом государственном университете [Текст] / И.Л. Тимофеева, И.Е. Сергеева // Труды V Колмогоровских чтений. – Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2007. – С. 158-164.

О фундировании знаний и умений в профессионально-математической подготовке будущих магистров образования

Л.П. Латышева

Осуществляемая в настоящее время модернизация высшего образования на компетентностной основе акцентирует внимание на результате обучения, когда в качестве его итога рассматривается не сумма усвоенной информации, а способность человека действовать в проблемных ситуациях, связанных с профессиональной деятельностью. При этом в учебную программу или курс изначально закладываются параметры описания того, что студент должен знать и уметь "на выходе", поскольку компетентностный подход ориентирует на построение преподавания в соответствии с прогнозируемым результатом. Признается, что, с одной стороны, компетентность выступает как новообразование субъекта, формирующееся в процессе вузовской подготовки, представляющее собой системное проявление знаний, умений, способностей и личностных качеств, позволяющее успешно решать функциональные задачи профессиональной деятельности. А с другой стороны, профессиональная компетентность воспринимается как система знаний, умений, личностных качеств, практического опыта, которая, по сути, определяет готовность личности к успешной профессиональной деятельности. В целом, компетентность будущего профессионала – учителя математики – есть результат педагогико-математического образования. И так как ее основу вместе с философско-мировоззренческим и аутопсихологическим составляет общепрофессиональный уровень знаний, содержащий, в частности, знания о специфических особенностях математики, необходимо в ходе преподавания как математических, так и педагогических дисциплин уделять особое внимание формированию этого структурного элемента названной компетентности. Представляется важным в профессиональной компетентности учителя (преподавателя) математики выделить профессионально-предметную компетентность, связанную со способностью и готовностью решать профессиональные задачи на основе владения содержательными и процессуальными компонентами деятельности, связанной с преподаванием учебного предмета. Как известно, мало знать, что должно быть, необходимо уметь это достичь. Поэтому умения, входящие в структуру профессионально-предметной компетентности будущего учителя (преподавателя) математики, естественно отнести к профессионально-математическим умениям.

Комплекс профессионально-математических умений, являющихся компонентами профессионально-предметной компетентности будущего учителя математики, составляют так называемые гностические умения (обобщение и систематизация полученных знаний, анализ собственной деятельности); проектировочные умения (формулирование конечной цели и результата); коммуникативные умения (установление целесообразных взаимоотношений в педагогическом процессе, мотивирование к занятию математической деятельностью); конструктивные умения (отбор и построение изучаемого математического материала, проектирование собственной деятельности); организаторские умения (организация работы с математическим материалом для реализации замысла).

Вместе с тем, одной из базовых компетентностей учителя математики является информационная компетентность. Ее структура включает две составляющие: компетентность в предмете преподавания, проявляющаяся в глубоком знании математики наряду с общей культурой человека, в сочетании теоретического знания с его практическим применением; компетентность в методах преподавания, обеспечивающая эффективное обучение знаниям и умениям, предусмотренным программой, в сочетании с индивидуальным подходом и развитием личности обучаемого.

Обеспечение синтеза упомянутых составляющих в формировании профессионально-математических умений может быть достигнуто на основе идей концепции фундирования в подготовке учителя (преподавателя) математики [1]. Фундирование (от лат. *fundare* – основание) – это процесс создания условий (психологических, педагогических, организационно-методических) для актуализации базовых учебных элементов школьной и вузовской математики с последующим теоретическим обобщением структурных единиц, раскрывающим их сущность, целостность и трансдисциплинарные связи в направлении профессионализации знаний и формирования личности педагога. Углубление теоретической и практической составляющих профессионально-предметной подготовки будущего учителя (преподавателя) математики на базе принципа фундирования происходит в направлении практической реализации теоретического обобщения школьного знания. Основу для фундирования в виде базовых учебных элементов школьной математики составляют семь содержательных линий: числовая, функциональная, геометрическая, тождественных преобразований, уравнений и неравенств, стохастическая и алгоритмическая. Каждая содержательная линия определяет базовые знания, умения, навыки и методы вузовской математики, распределенные по оптимальному набору учебных предметов и дисциплин.

Существует три компонента процесса фундирования базового учебного элемента школьной математики: глобальный, локальный и модульный. В частности, основной задачей локального фундирования является создание педагогических условий для целостного профессионально-ориентированного когнитивного процесса структурного анализа видового обобщения школьного учебного элемента. Реализация локального фундирования в процессе обучения математике ведет к пониманию обучающимися существа (сущности) математического знания (явления, процесса) и затем к его освоению в триаде: понимание, устойчивость, применение. Главной идеей фундирования знаний и умений в учебном процессе педвуза является то, что педагог вместе со студентом, уже владеющим предметной стороной, начинает отрабатывать с ним методическую сторону преподавания.

Реализация этой идеи нашла отражение в подготовке будущих магистров по направлению "Физико-математическое образование" (по магистерской программе "Математическое образование") на математическом факультете Пермского государственного педагогического университета в рамках преподавания дисциплин "Математика (математический анализ: понятия, взаимосвязи и обобщения)" и "Методика преподавания математики в вузе".

Одна из специфических особенностей математического анализа заключается в том, что его системообразующие начала оказываются глубоко скрытыми в содержательных рассуждениях, которые рассматриваются при обучении будущих бакалавров образования в базовом курсе, и требуют для своего описания специального языка и теорий значительно более высокого уровня абстрагирования. С другой стороны, именно понимание и обобщение сути основных идей, понятий и конструкций математического анализа (а не владение специфическими его "тонкостями") крайне и в первую очередь необходимо специалисту для успешного преподавания математики в профильных классах с углубленным изучением математики, в которых предстоит работать будущим магистрам образования.

Задача углубления знаний студентов, обучающихся в магистратуре, по первой из названных дисциплин обретает, таким образом, два основных аспекта: развитие и обобщение научных представлений об основных понятиях и обогащение набора детально рассмотренных частных теорий математического анализа, дополняющих базовый курс в пределах, полезных для будущего магистра. Это осуществимо, если учебный курс приобретает характер дисциплины методологического профиля, цель которой – углубление и обобщение основных понятий математического анализа (функция, предел, непрерывность, производная, мера, интеграл) и формирование представлений об их структуре и взаимосвязях, а также теоретической и прикладной роли. Естественным представляется в ходе преподавания данной дисциплины решение следующих задач: расширить представления об основных понятиях математического анализа на основе понятия о математических структурах; показать взаимосвязи между понятиями математического анализа, рассматриваемыми в различных его разделах; дополнить теоретические сведения аналогами понятий, изучаемых в базовом курсе математического анализа, их свойствами, теоремами и обобщениями; выработать умение решать задачи на основе дополнения, углубления и обобщения основных понятий курса математического анализа. В результате обучения студенты будут иметь представление о структурах по Н. Бурбаки, об основных типах математических структур и о различных приемах описания конструкций математического анализа, о значении понятия предела в дифференциальном и интегральном исчислении; знать общее понятие функции и его частные случаи, важнейшие типы отображений, классификацию функций по свойствам и взаимосвязи между ними, формулировки понятий предела функции и последовательности с общих позиций и для различных типов отображений, различные формулировки понятия непрерывности множества действительных чисел и отображений (в различных пространствах), а также свойства непрерывных отображений, идею обобщения понятия предела с использованием понятия базы фильтра множества, обобщения понятия производной для абстрактных пространств, ее взаимосвязь с другими понятиями и роль ее приложений в дифференциальном исчислении, структуру понятия интеграла Римана, его общие свойства и взаимосвязи между интегралами разных типов, а также основные обобщения понятия интеграла Римана; уметь приводить примеры различных конструкций предельного перехода и применять их в задачах, использовать понятия производной, интеграла и меры в прикладных задачах; иметь навыки решения задач с использованием изученных обобщений и взаимосвязей.

В рамках второй дисциплины обеспечивается профессиональная подготовка студентов, освоивших базовые курсы высшей математики (алгебры, геометрии, математического анализа), а также методики преподавания математики в школе в области, относящейся к методике преподавания высшей математики, в том числе, классических разделов математического анализа. Основной ее целью является формирование представлений о закономерностях, особенностях вузовской системы преподавания математики и связанных с ними видах профессиональной деятельности специалиста, имеющего степень магистра физико-математического образования. Достижение цели обеспечивается решением следующих главных задач: расширить представления об основных понятиях методики преподавания математики на основе знаний о специфике вузовского процесса обучения; показать особенности работы вузовского преподавателя математических дисциплин, связанной с объяснением, закреплением, применением и контролем усвоения учебного материала; дополнить теоретические сведения о закономерностях процесса усвоения математического учебного материала, отмеченного высоким уровнем обобщения и абстракции; познакомить с современными концепциями и технологиями, нацеленными на совершенствование методики вузовского преподавания математики; выработать умения осуществлять подготовку и проведение лекций и практических занятий по вузовским математическим дисциплинам. В результате изучения дисциплины будущий магистр образования получит возможность иметь представление о закономерностях и особенностях педагогического процесса обучения математике в вузе, о современных концепциях и технологиях обучения математике в вузе, нацеленных на повышение качества подготовки специалистов; знать основные методические требования к введению понятий, формулировке и доказательству теорем высшей математики; уметь построить план и реализовать его при проведении лекций и практических занятий по вузовской математике; владеть методикой проведения текущего и итогового контроля по математике в вузе.

Обе дисциплины играют важную роль в системе наук и выступают в качестве основы для овладения теоретическими знаниями и практическими умениями, которые не только необходимы в будущей профессии, но и могут эффективно использоваться в качестве межпредметных при изучении других фундаментальных математических и прикладных дисциплин. Первая из них является фундаментом, а вторая завершающим звеном в процессе фундирования интегративных профессионально-математических умений. Например, важным для будущего учителя математики, является собственное умение использовать и умение обучать учащихся применению геометрических интерпретаций в процессе изучения математического анализа. Примером локального фундирования обозначенного умения в подготовке магистров математического образования может служить проведение идеи теоретического обобщения в обучении понятию об отображении, когда на основе первичных представлений о числовой функции, о понятии взаимно однозначного соответствия, о геометрических образах множеств действительных и комплексных чисел формируется общее умение рассматривать геометрический смысл того или иного математико-аналитического объекта. Другой пример – фундирование знаний и умений в процессе изучения раздела "Пределы", в котором достаточно подробно рассматриваются следующие темы: предел последовательности и предел функции – единая точка зрения; роль понятия предела в построении основ дифференциального и интегрального исчисления; предельный переход в метрических пространствах; предел по фильтру.

Содержание второй дисциплины включает в себя следующие разделы:

1. Методологические основы методики преподавания математики в вузе.

2. Вопросы общей методики преподавания математики в вузе.

3. Формы обучения и контроля в преподавании математики в вузе.

4. Вопросы частной методики преподавания математики в вузе.

5. Актуальные проблемы методики преподавания математики в вузе.

Теоретические сведения по методике преподавания математики в вузе, сформированные на базе полученных знаний в специальных математических дисциплинах, благодаря организации занятий с применением идей фундирования и последующей научно-педагогической практики трансформируются в практические умения. В дополнение к сказанному приведем предлагаемую студентам небольшую памятку лектору, помогающую "сконцентрироваться" на важных аспектах.

• Твердо знать математическое содержание лекции.

• Видеть "тонкие места" (наиболее сложные, существенные, требующие особого внимания, сосредоточенности) в учебном материале. Уметь обратить на это внимание студентов.

• Выделять главное (голосом, в записи: подчеркиванием, обведением в рамочку и пр.).

• Производить перефразировки и использовать иерархию в представлении учебного материала (идея – указание основных этапов – полная реализация замысла).

• Подводить итоги на каждом этапе, где этого требует логика лекции.

• Грамотно излагать свои мысли.

• Продуманно распределять записи на доске (с учетом того, что потребуется для дальнейшего, при подведении итогов, краткого повторения, осмысления, при переходе к следующему этапу лекции).

• Чертежи, рисунки, записи на доске выполнять четко, красиво, достаточно крупно.

• При формулировке определений и формул основное записывать на доске, "озвучивая" записываемое.

• Интересоваться пониманием учебного материала студентами. Задавать вопросы. Смотреть в лица студентов, стремиться увидеть в них, достигается ли понимание.

• Заботиться о конспектах студентов. Обозначать голосом, темпом речи, интонацией и другими способами, что надо, а что не надо записывать, а также то, что требуется каким-то образом выделить для придания конспекту четкой структуры.

• Делать паузы при задании вопросов, диктовке материала, чтобы студенты могли осмыслить вопрос, успели записать необходимое.

• Стараться меньше заглядывать в конспект лекции.

• Уметь создать психологически добрый, хороший настрой на работу для себя и студентов.

• Не бояться. Владеть голосом: говорить в меру громко (не пищать и не мямлить).

Таким образом, в комплексе преподавание приведенных выше дисциплин в рамках профессиональной подготовки будущих магистров образования с использованием идей концепции фундирования способствует формированию профессонально-математических умений, необходимых профессионалу – преподавателю математики.

Библиографический список

1. Подготовка учителя математики: Инновационные подходы [Текст]: учеб. пособие / под ред. В.Д. Шадрикова. – М.: Гардарики, 2002. – 383 с.

Развитие креативности магистров физико-математических специальностей университетов при изучении элементов фрактальной геометрии и теории хаоса

В.С. Секованов

Метод итераций имеет огромное значение в приближенных вычислениях и решениях уравнений. Особую важность он приобрел при бурном развитии направлений современной математики – фрактальной геометрии и теории хаоса. В работе [1] указана характеристика классического множества Кантора с помощью орбит точек функции $f(x) = \begin{cases} 3 \cdot x, & x \leq \frac{1}{2} \\ 3 - 3 \cdot x, & x > \frac{1}{2} \end{cases}$. Причем доказательство нестрого и имеет неточности. В данной работе дается альтернативный метод доказательства более общего утверждения. Следует отметить, что метод итераций имеет большое значение при построении фрактальных множеств, создании художественных композиций и развитии дивергентного мышления (см. [2]).

Сначала мы рассматриваем различные множества Кантора и даем им характеристику с помощью спектра итерированных функций. При этом охватывается и случай, рассмотренный в [1]. Нам неизвестна работа, где бы была описана аналогичная, приводимой здесь, характеристика модификаций множества Кантора.

На наш взгляд, данная статья имеет интерес и с методической точки зрения, поскольку изучение магистрами данной темы будет способствовать решению одной из важнейших задач обучения – развитию их креативности. Остановимся на данном моменте подробнее.

Во-первых, понятия самоподобное множество, фрактал, хаос становятся в настоящее время общекультурными понятиями, но в рамках вузовской программы не изучаются; во вторых, при изучении данной темы магистры имеют возможность развивать гибкость мышления (характеристика модификаций множества Кантора разными способами), вычисление дробных размерностей (размерность самоподобия), преодоление стереотипов мышления (долгое время господствовал стереотип, что существует только одна топологическая размерность; однако кроме топологической размерности существуют фрактальные размерности, характеризующие те свойства множества, которые "не улавливаются" топологической размерностью), установление неожиданной связи между орбитами точек определенных функций и соответствующих им множеств Кантора, магистры имеют возможность рассматривать не только классическое множество Кантора, но и его модификации (спектр множеств Кантора, что приводит к появлению новых интересных задач).

Анализ научной и учебной литературы указывает, что на Западе фрактальная геометрия и теория хаоса интенсивно изучаются. Причем большое значение уделяется как научным исследованиям, так и написанию учебных курсов. Данная работа, на наш взгляд, будет способствовать вхождению Российского образования в мировое образовательное пространство.

Перейдем к изложению вопроса.

Пусть $n \geq 3$. Определим n-ую модификацию множества Кантора K^n по следующей схеме: пусть K_0^n – начальный отрезок единичной длины ($K_0^n = [0;1]$). Разделим отрезок K_0^n на n частей и выбросим из отрезка $n-2$ интервала $\left(\frac{1}{n};\ \frac{2}{n}\right)$ ...... $\left(\frac{n-2}{n};\ \frac{n-1}{n}\right)$. Оставшуюся часть обозначим через K_1^n $\left(K_1^n = \left[0;\ \frac{1}{n}\right] \cup \left[\frac{n-1}{n};1\right]\right)$. Из оставшихся отрезков вновь удалим $n-2$ интервала. Обозначим оставшуюся часть через множество K_2^n $\left(K_2^n = \left[0;\ \frac{1}{n^2}\right] \cup \left[\frac{n-1}{n^2};\ \frac{1}{n}\right] \cup \left[\frac{n-1}{n};\ \frac{n^2-n+1}{n^2}\right] \cup \left[\frac{n^2-1}{n^2};1\right]\right)$. Повторим данную процедуру многократно, на каждом шаге выбрасывая $n-2$ интервала из оставшихся отрезков. Обозначим через K^n пересечение множеств $K_0^n, K_1^n, K_2^n, ..., K_i^n, ...$, то есть $K^n = \bigcap\limits_{i=0}^{\infty} K_i^n$ (см. рис. 1 при $n = 3$).

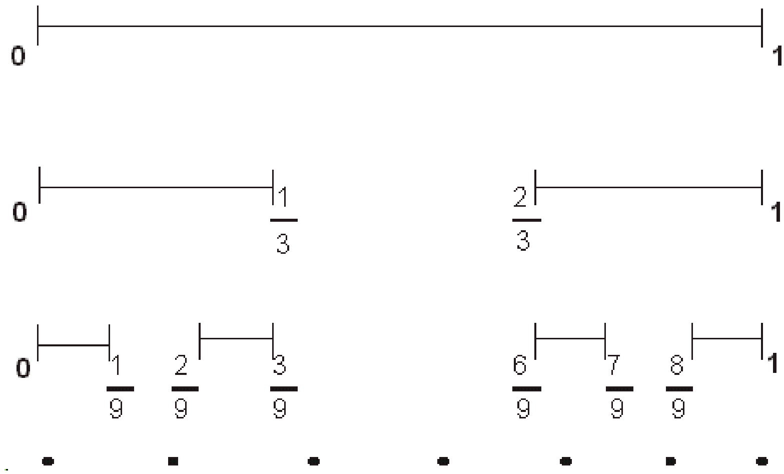


Рис. 1

Точки $0, 1, \frac{1}{n^2}, \frac{n-1}{n^2}, \frac{1}{n}, \frac{n-1}{n}, \frac{n^2-n+1}{n^2}, \frac{n^2-1}{n^2}, ...$ – концы выбрасываемых интервалов.

Подобно представлению чисел в десятичной системе, запись числа в n-ичном виде не является однозначной. Например, при $n = 3$ дробь $\frac{1}{3}$ в троичной системе можно записать либо как 0,0(2) $\left(\frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \frac{2}{3^4} + ... = \frac{\frac{2}{9}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\right)$, где двойка в скобках означает бесконечную последовательность двоек, либо 0,1. Одним из способов придать однозначность представлению чисел в троичной системе может стать запрет дробей, содержащих единицу, т.е. записывать $\frac{1}{3}$ не в виде 0,1, а использовать представление 0,0(2). Более точно: для того, чтобы сделать запись троичных дробей однозначной условимся не использовать представления дробей, в которых вслед за единицей идут одни только нули или двойки. Например, дробь $\frac{2}{3}$следует представить в виде 0, 2, но не 0, 1(2). Чтобы сделать запись $n-$х дробей, входящих в множество K_n (концы выбрасываемых интервалов), однозначной условимся использовать только числа 0 и $n-1$, исключив использование чисел: 1, 2, 3, 4, ..., $n-2$. Например, при $n=5$ число $\frac{101}{125}=0,808_{(10)}$ следует считать в пятеричной системе счисления, записанным не в виде $0,401_{(5)}$ $\left(\frac{4}{5}+\frac{1}{125}=\frac{101}{125}\right)$, а в виде $0,40\,(4)_{(5)}\left(\frac{4}{5}+\frac{\frac{4}{625}}{1-\frac{1}{5}}=\frac{101}{125}\right)$.

Нетрудно заметить, что все числа в открытых $n-2$ интервалах $\left(\frac{1}{n};\frac{2}{n}\right)\ldots\left(\frac{n-2}{n};\frac{n-1}{n}\right)$ – это те числа, которые в $n-$ой системе счисления первым знаком после запятой имеют числа $1\vee 2\vee\ldots\vee n-2$соответственно. Стирая их на пути к множеству K^n, мы оставляем нетронутыми числа, n-ая запись которых начинается либо с 0,0, либо с 0, $n-1$. Аналогично вторым стиранием мы исключаем все числа, в которых числа $1\vee 2\vee\ldots\vee n-2$ стоят на втором месте после запятой (в n-ой записи). После этого шага останутся нетронутыми числа, n-ая запись которых начинается либо с 0,00, либо с 0,0 $n-1$, либо $0,n-1\,0$, либо $0,n-1\;n-1$. Продолжая данную процедуру, мы получим множество K^n, в котором все $n-$е дроби не будут содержать ни одного из чисел $1,2,...,n-2$.

Оказывается, что каждая модификация множества Кантора K^n есть самоподобное множество, размерность которого равна $\log_n 2$ Действительно, при уменьшении модификации множества Кантора K^n в n раз в результате получается ровно одна его половинка. А раз множество Кантора можно составить из двух его копий, уменьшенных в n раз, то, последовательно развивая данную идею, мы должны приписать ему дробную размерность, равную числу $\log_n 2$ (информацию о самоподобных множествах можно найти в [2]).

Задача 1. Будет ли множество K^n счетным?

Задача 2. Будет ли множество K^n связным?

Задача 3. Будет ли множество K^n содержать интервалы?

Задача 4. Найти размерность Минковского множества K^n.

Задача 5. Найти размерность Хаусдорфа множества K^n.

Задача 6. Указать суммарную длину выкинутых интервалов из отрезка $[0;1]$ при построении K^n.

При исследовании множеств Кантора большую роль играет лемма 1.

Лемма 1. *Пусть* $n\geq 3$. *Рассмотрим тентообразную функцию* $f_n(x)=\begin{cases} n\cdot x, & x\leq\frac{1}{2}\\ n-n\cdot x, & x>\frac{1}{2}\end{cases}$ *и число* $x=0,\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_i\ldots_{(n)}$, *записанное в* n*-ой системе счисления. Пусть* i *– наименьшее натуральное число,* *при котором $\alpha_i = 1 \vee \alpha_i = 2 \vee ... \vee \alpha_i = n-2$ и число x в n–й системе счисления нельзя представить без использования хотя бы одного из чисел $1, 2, ..., n-2$. Тогда $f_n^{(i)}(x) > 1$.*

Доказательство. Применим метод математической индукции. При $i = 1$, имеем: $x = 0, 1\alpha_2^1\alpha_3^1 ... \vee x = 0, 2\alpha_2^2\alpha_3^2 ... \vee ... \vee x = 0, (n-3)\,\alpha_2^{n-3}\alpha_3^{n-3} ... \vee x = 0, (n-2)\,\alpha_2^{n-2}\alpha_3^{n-2} ...$

Пусть сначала n – четное число. Заметим, что $f_n\left(\frac{\left[\frac{n}{2}\right]}{n}\right) = n \cdot \frac{1}{2} = \frac{n}{2} > 1$ Тогда при $x < 0, \frac{\left[\frac{n}{2}\right]}{n} = \frac{1}{2}$ будем иметь: $f_n(x) = 1, \alpha_2^1\alpha_3^1 ... > 1$, $\quad f_n(x) = 2, \alpha_2^2\alpha_3^2 ... > 1 ... f_n(x) = \left(\left[\frac{n}{2}\right] - 1\right), \alpha_2^{\left[\frac{n}{2}\right]-1}\alpha_3^{\left[\frac{n}{2}\right]-1} ... > 1$.

При $x > 0, \frac{\left[\frac{n}{2}\right]}{n} = \frac{1}{2}$ получим: $f_n(x) = n - n\left(\frac{\left[\frac{n}{2}\right]}{n} + \frac{\alpha_2^{\left[\frac{n}{2}\right]}}{n^2} + \frac{\alpha_3^{\left[\frac{n}{2}\right]}}{n^3} + ...\right) = n - \left[\frac{n}{2}\right] - \left(\frac{\alpha_2^{\left[\frac{n}{2}\right]}}{n} + \frac{\alpha_3^{\left[\frac{n}{2}\right]}}{n^2} + ...\right) > 1, ..., f_n(x) = n - n\left(\frac{n-2}{n} + \frac{\alpha_2^{n-2}}{n^2} + \frac{\alpha_3^{n-2}}{n^3} + ...\right) = 2 - \left(\frac{\alpha_2^{n-2}}{n} + \frac{\alpha_3^{n-2}}{n^2} + ...\right) > 1$.

Пусть теперь n – нечетное число. Тогда положим $n = 2k+1$. В данном случае имеем: $\left[\frac{n}{2}\right] = \left[k + \frac{1}{2}\right] = k$ и $0, \left(\left[\frac{n}{2}\right]\right)_n = \frac{k}{n} + \frac{k}{n^2} + ... = \frac{\frac{k}{n}}{1-\frac{1}{n}} = \frac{k}{2k} = \frac{1}{2}$. Заметим еще, что $f_n\left(0, \left(\left[\frac{n}{2}\right]\right)\right) = k + \frac{k}{n} + ... = \frac{k}{1-\frac{1}{n}} = \frac{n}{2} > 1$.

Таким образом, при $x \leq 0, \left(\left[\frac{n}{2}\right]\right)$ имеем: $f_n(x) = 1, \alpha_2^1\alpha_3^1 ... > 1$, $f_n(x) = 2, \alpha_2^2\alpha_3^2 ... > 1 ... f_n(x) = \left[\frac{n}{2}\right], \alpha_2^{\left[\frac{n}{2}\right]}\alpha_3^{\left[\frac{n}{2}\right]} ... > 1$. При $x > 0, \left(\frac{\left[\frac{n}{2}\right]}{n}\right) = \frac{1}{2}$ будем иметь: $f_n(x) = n - n\left(\frac{\left[\frac{n}{2}\right]}{n} + \frac{\alpha_2^{\left[\frac{n}{2}\right]}}{n^2} + ...\right) = n - \left[\frac{n}{2}\right] - \left(\frac{\alpha_2^{\left[\frac{n}{2}\right]}}{n} + ...\right) > 1, \ldots, f_n(x) = 2 - \left(\frac{\alpha_2^{n-2}}{n} + \frac{\alpha_3^{n-2}}{n^2} + ...\right) > 1$.

Предположим теперь, что лемма справедлива при $i = k > 1$. То есть для каждого n-го представления числа $x = 0, \alpha_1\alpha_2 ... \alpha_{k-1}\alpha_k\alpha_{k+1} ...$, у которого $\alpha_k = 1 \vee \alpha_k = 2 \vee ... \vee \alpha_k = n-2$, а $\alpha_i = 0$ или $\alpha_i = n-1$ при $i = 1, 2, 3, ..., k-1$ будет иметь место: $f_n^{(k)}(x) > 1$. Покажем тогда, что лемма справедлива и при $i = k+1$. Именно: для каждого n–го представления числа $x = 0, \alpha_1\alpha_2 ... \alpha_k\alpha_{k+1}\alpha_{k+2} ...$, у которого $\alpha_{k+1} = 1 \vee \alpha_{k+1} = 2 \vee ... \vee \alpha_{k+1} = n-2$, а $\alpha_i = 0$ или $\alpha_i = n-1$ при $i = 1, 2, 3, ..., k$ будет иметь место: $f_n^{(k+1)}(x) > 1$. Согласно нашему предположению $\alpha_1 = 0$ или $\alpha_1 = n-1$.

Пусть сначала $\alpha_1 = 0$. То есть $x = 0,0\alpha_2^0...\alpha_k^0\alpha_{k+1}^0\alpha_{k+2}^0....$ Тогда $u = f_n(x) = nx = 0,\alpha_2^0\alpha_3^0...\alpha_k^0\alpha_{k+1}^0\alpha_{k+2}^0... = 0,\beta_1\beta_2\beta_3...\beta_{k-1}\beta_k\beta_{k+1}...$, где $\beta_k = 1 \vee \beta_k = 2 \vee ... \vee \beta_k = n-2$, $\beta_i = \alpha_{i+1}^0$, $i = 1, 2, 3, ...$ Согласно индуктивному предположению $f_n^{(k)}(u) > 1$. Так как $f_n^{(k+1)}(x) = f_n^{(k)}(f_n(x)) = f_n^{(k)}(u)$, то $f_n^{(k+1)}(x) > 1$.

Пусть теперь $\alpha_1 = n-1$. В данном случае $x = 0,\ n-1\alpha_2^{n-1}...\alpha_k^{n-1}\alpha_{k+1}^{n-1}$ $\alpha_{k+2}^{n-1}...$ Далее получим: $v = f_n(x) = n - nx = n - n\left(\frac{n-1}{n} + \frac{\alpha_2^{n-1}}{n^2} + ... + \frac{\alpha_{k-1}^{n-1}}{n^{k-1}} + \frac{\alpha_k^{n-1}}{n^k} + \frac{\alpha_{k+1}^{n-1}}{n^{k+1}} + ...\right) = \left(\frac{n-1}{n} + \frac{n-1}{n^2} + \frac{n-1}{n^3} + ...\right) - \left(\frac{\alpha_2^{n-1}}{n} + ... + \frac{\alpha_{k-1}^{n-1}}{n^{k-2}} + \frac{\alpha_k^{n-1}}{n^{k-1}} + \frac{\alpha_{k+1}^{n-1}}{n^k} + ...\right) = \left(\frac{n-1-\alpha_2^{n-1}}{n} + \frac{n-1-\alpha_3^{n-1}}{n^2} + \frac{n-1-\alpha_4^{n-1}}{n^3}...\right) = \left(\frac{\mu_1}{n} + \frac{\mu_2}{n^2} + ... + \frac{\mu_{k-3}}{n^{k-3}} + \frac{\mu_{k-2}}{n^{k-2}} + \frac{\mu_{k-1}}{n^{k-1}} + \frac{\mu_k}{n^k}...\right)$ где $\mu_i = n - 1 - a_{i+1}^{n-1}$, $i = 1, 2, 3, ...$

Очевидно, что в последнем выражении при $i = 1, 2, 3, ..., k-1 \mu_i = 0$ или $\mu_i = n-1$, а $\mu_k = 1 \vee \mu_k = 2 \vee ... \vee \mu_k = n-2$. По предположению индукции $f_n^{(k)}(v) > 1$. Поскольку $f_n^{(k+1)}(x) = f_n^{(k)}(f_n(x)) = f_n^{(k)}(v)$, то $f_n^{(k+1)}(x) > 1$. Согласно принципу математической индукции лемма 1 доказана.

Пусть вновь $f_n(x) = \begin{cases} n \cdot x, & x \leq \frac{1}{2} \\ n - n \cdot x, & x > \frac{1}{2} \end{cases}$ и x_0^n – начальная точка, а $x_i^n = f_n(x_{i-1}^n) = f_n^{(i)}(x_0^n)$.

Последовательность $\{x_i^n\}_{i=0}^{\infty}$ мы будем называть орбитой точки $x_0^n \in R$. Рассмотрим множество W^n, состоящее из тех и только тех точек $x_0^n \in R$, орбиты которых $\{x_i^n\}_{i=0}^{\infty}$, ограничены.

Теорема 1. *Множество Кантора (канторова пыль) совпадает с начальными точками, орбиты которых ограничены (то есть $K^n = W^n$).*

Доказательство. Пусть $x_0^n \in W^n$. Тогда $x_0^n \in [0;\ 1]$. Действительно, если $x_0^n > 1$ или $x_0^n < 0$, то орбита $\{x_i^n\}_{i=0}^{\infty}$ неограниченна и, следовательно, $x_0^n \notin W^n$, что противоречит выбору точки x_0^n из множества W^n. Следовательно в n-ой системе счисления $x_0^n = 0,\lambda_1^n\lambda_2^n\lambda_3^n...$, где λ_i^n равно одному из значений 0,1,2, ..., $n-1$. Далее в десятичной системе счисления имеем: $x_0^n = \frac{\lambda_1^n}{n} + \frac{\lambda_2^n}{n^2} + \frac{\lambda_3^n}{n^3} + ...$ Возможны два случая:

1) число x_0^n можно представить без использования хотя бы одного из чисел 1, 2, ..., $n-2$ То есть при каждом $i \in N \quad \lambda_i = 0 \vee \lambda_i = n-1$. Тогда, исходя из построения множества $K^n \quad x_0^n \in K^n$;

2) число x_0^n нельзя представить без использования, по крайней мере одного из чисел 1, 2, ..., $n-2$. То есть существует такое наименьшее натуральное число i_0, что $i_0 = 1 \vee i_0 = 2 \vee ... \vee i_0 = i-2$. Согласно лемме 1 $f_n^{(i_0)}(x_0^n) > 1$. А тогда орбита точки x_0^n неограниченна и $x_0^n \notin W^n$, что противоречит выбору точки x_0^n.

Таким, образом, в n-ом разложении числа x_0^n отсутствуют числа $1, 2, ..., n-2$. Откуда заключаем, что $x_0^n \in K^n$ и, следовательно,

(1) $W^n \subset K^n$.

Пусть теперь $y_0^n \in K^n$. Тогда $y_0^n = 0,\sigma_1^n\sigma_2^n\sigma_3^n...$, где $\sigma_i^n = 0$ или $\sigma_i^n = n-1$ при каждом $i = 1, 2, 3, ...$ Предположим, что $\sigma_1^n = 0$. Тогда $f_n(y_0^n) = ny_0^n = 0,\sigma_2^n\sigma_3^n... \in K^n$. Пусть теперь $\sigma_1^n = n-1$. Тогда будем иметь $f_n(y_0^n) = n - ny_0^n = \left(\frac{n-1}{n} + \frac{n-1}{n^2} + \frac{n-1}{n^3} + ...\right) - \left(\frac{\sigma_2^n}{n} + \frac{\sigma_3^n}{n^2} + \frac{\sigma_4^n}{n^3} + ...\right) = \frac{n-1-\sigma_2^n}{n} + \frac{n-1-\sigma_3^n}{n^2} + \frac{n-1-\sigma_4^n}{n^3} + ... + \frac{n-1-\sigma_i^n}{n^{i-1}} + ...$

Поскольку каждый числитель в последнем выражении принимает значение 0 или $n-1$, то $f_n(y_0^n) \in K^n$. Рассуждая аналогично, получим, что $f_n^{(2)}(y_0^n) \in K^n$, $\quad f_n^{(3)}(y_0^n) \in K^n, ..., f_n^{(i)}(y_0^n) \in K^n, ...$ Таким образом, $|y_i^n| \le 1$ при каждом $i = 0, 1, 2, ...$ Следовательно,

(2) $K^n \subset W^n$.

Из (1) и (2) заключаем, что $K^n = W^n$. Теорема 1 доказана.

Пусть $n \ge 3$. Рассмотрим тентообразную функцию

$$f_n(x) = \begin{cases} n \cdot x, & x \le \frac{1}{2}; \\ n - n \cdot x, & x > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Лемма 2. *На каждом частичном отрезке множества K_i^n i–я итерация $f_n^{(i)}(x)$ линейна и принимает на его концах значения, равные нулю или единице.*

Доказательство поведем методом математической индукции по i. При $i = 1$ имеем:

$f_n(0) = 0$, $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = n \cdot \frac{1}{n} = 1$, $f_n\left(\frac{n-1}{n}\right) = n - n\frac{n-1}{n} = 1$, $f_n(1) = n - n \cdot 1 = 0$.

Причем на отрезках $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ и $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ функция $f_n(x)$ линейна. Поскольку выполняются включения $\left[0, \frac{1}{n}\right] \subset \left[0; \frac{1}{2}\right]$ и $\left[\frac{n-1}{n}; 1\right] \subset \left[\frac{1}{2}; 1\right]$, то функция $f_n(x)$ линейна на K_1^n. Таким образом, при $i = 1$ лемма 2 справедлива. (Рис. 2 иллюстрирует доказательство леммы, при $n = 3$ для случаев $i = 1, i = 2$.)

Для $i = 1 K_1^3 = \left[0; \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}; 1\right]$. $f_3(0) = 0$, $f_3\left(\frac{1}{3}\right) = 1$, $f_3\left(\frac{2}{3}\right) = 1$, $f_3(1) = 0$.

Для $i = 2$ имеем:

$$K_2^3 = \left[0;\ \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9};\ \frac{3}{9}\right] \cup \left[\frac{6}{9};\ \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9};\ 1\right].$$

Значения функции $f(x)$ на концах частичных отрезков множества K_2^3 равны: $f_3\left(0\right) = 0,\ f_3\left(\frac{1}{9}\right) = 1,\ f_3\left(\frac{2}{9}\right) = 1,\ f_3\left(\frac{1}{3}\right) = 0,\ f_3\left(\frac{2}{3}\right) = 0,\ f_3\left(\frac{7}{9}\right) = 1,\ f_3\left(\frac{8}{9}\right) = 1,\ f_3\left(1\right) = 0.$

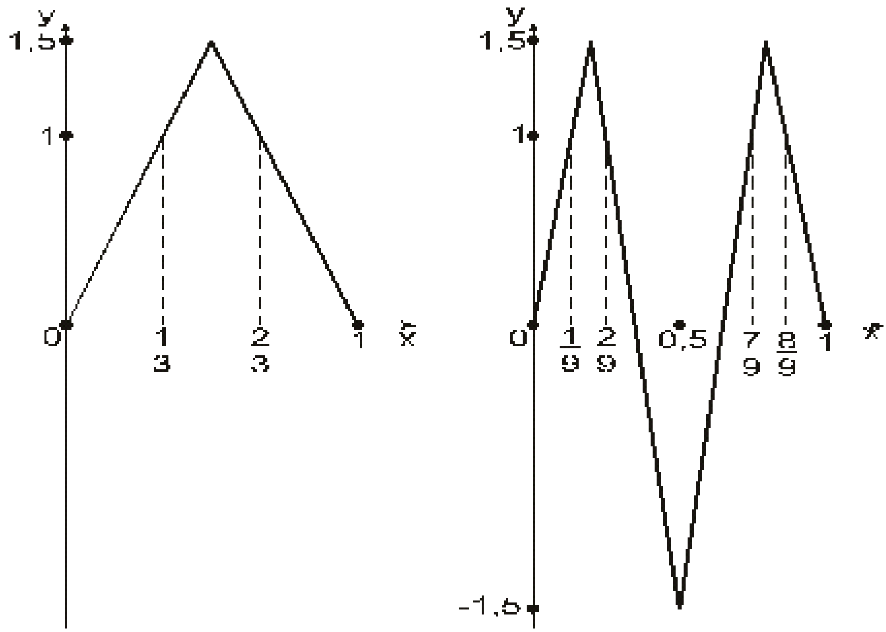


Рис. 2

Предположим, что $(i-1)$-ая итерация $f_n^{(i-1)}(x)$ линейна на каждом частичном отрезке $[\alpha;\ \beta]$ множества K_{i-1}^n и $f_n^{(i-1)}(\alpha) = 0$, $f_n^{(i-1)}(\beta) = 1$ или же $f_n^{(i-1)}(\alpha) = 1$, $f_n^{(i-1)}(\beta) = 0$. Не нарушая общности рассуждений, будем считать, что $f^{(i-1)}(\alpha) = 0$, $f^{(i-1)}(\beta) = 1$. Покажем, что тогда i–я итерация $f_n^{(i)}(x)$ линейна на отрезках $\left[\alpha;\ \alpha + \frac{\beta-\alpha}{n}\right]$, $\left[\alpha + \frac{(n-1)\cdot(\beta-\alpha)}{n};\ \beta\right]$, являющихся частичными отрезками множества K_i^n (левой n-ой части и соответственно правой n-ой части отрезка $[\alpha;\ \beta] \subset K_{i-1}^n$) и $f_n^{(i)}(\alpha) = 0$, $f_n^{(i)}\left(\alpha + \frac{\beta-\alpha}{n}\right) = 1$, $f_n^{(i)}\left(\alpha + \frac{(n-1)\cdot(\beta-\alpha)}{n}\right) = 1$, $f_n^{(i)}(\beta) = 0$.

Доказательство. Предположим, что $f_n^{(i-1)}(x) = kx + b,\ x \in [\alpha;\ \beta]$. Тогда мы имеем $f_n^{(i-1)}(\alpha) = k\alpha + b = 0$, $\quad f_n^{(i-1)}(\beta) = k\beta + b = 1$ (см. рис. 3 для случая $n = 3$).

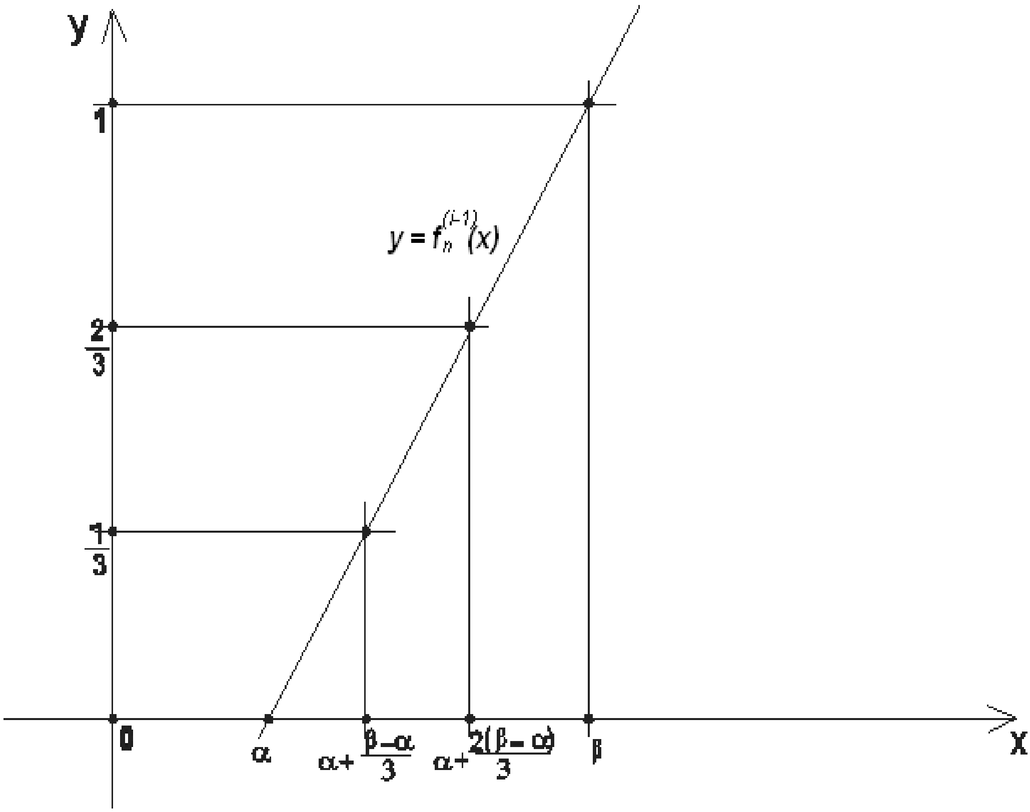


Рис. 3

Тогда $f_n^{(i)}(x)=nf_n^{(i-1)}(x)=n(kx+b)=nkx+nb$ при $x\in\left[\alpha;\ \alpha+\frac{\beta-\alpha}{n}\right]$, а при $x\in\left[\ \alpha+\frac{(n-1)\cdot(\beta-\alpha)}{n};\ \beta\right]$ $f_n^{(i)}\left(x\right)=n-n\left(kx+b\right)=n-bn-nkx$. То есть на каждом из частичных отрезков $\left[\alpha;\alpha+\frac{\beta-\alpha}{n}\right]$ и $\left[\alpha+\frac{(n-1)(\beta-\alpha)}{n};\beta\right]$, входящих в множество K_n^i, функция $f_n^{(i)}\left(x\right)$ линейна.

Причем: $f_n^{(i)}\left(\alpha\right) = f_n\left(f_n^{(i-1)}\left(\alpha\right)\right) = f_n\left(0\right) = 0$; $f_n^{(i)}\left(\alpha+\frac{\beta-\alpha}{n}\right) = f_n\left(f_n^{(i-1)}\left(\alpha+\frac{\beta-\alpha}{n}\right)\right)=f_n\left(\frac{1}{n}\right)=1$.

Далее имеем: $f^{(n)}(\beta)=f\left(f^{(n-1)}\left(\beta\right)\right)=f\left(1\right)=0$, $f_n^{(i)}\left(\alpha+\frac{(n-1)(\beta-\alpha)}{n}\right)= f_n\left(f_n^{(i-1)}\left(\alpha+\frac{(n-1)\cdot(\beta-\alpha)}{n}\right)\right) = f_n\left(\frac{n-1}{n}\right) = 1$. Таким образом, мы замечаем, что на отрезках $\left[\alpha;\ \alpha+\frac{\beta-\alpha}{n}\right]$, $\left[\ \alpha+\frac{(n-1)\cdot(\beta-\alpha)}{n};\ \beta\right]$ $f_n^{(i)}(x)$ линейна и на концах каждого из них принимает значения 0 или 1. Согласно принципу полной математической индукции лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Пусть линейная функция $y=f(x)$, отличная от функции $\varphi(x)=x$, проходит через точки $M_1\left(x_1,0\right)$, $M_2(x_2,1)$, $0\le x_1\le 1$,*

$0 \le x_2 \le 1$. *Тогда функция* $f(x)$ *имеет единственную неподвижную точку.*

Доказательство. Предположим для определенности, что $0 \le x_1 < x_2 \le 1$ (при $x_1 = x_2$ график нашей функции будет параллелен оси oy и неподвижная точка найдется). Тогда существуют такие точки $x_1^1 \in (x_1; x_2)$ и $x_2^2 \in (x_1; x_2)$, что $f(x_1^1) = x_1$ и $f(x_2^2) = x_2$ (рис. 4).

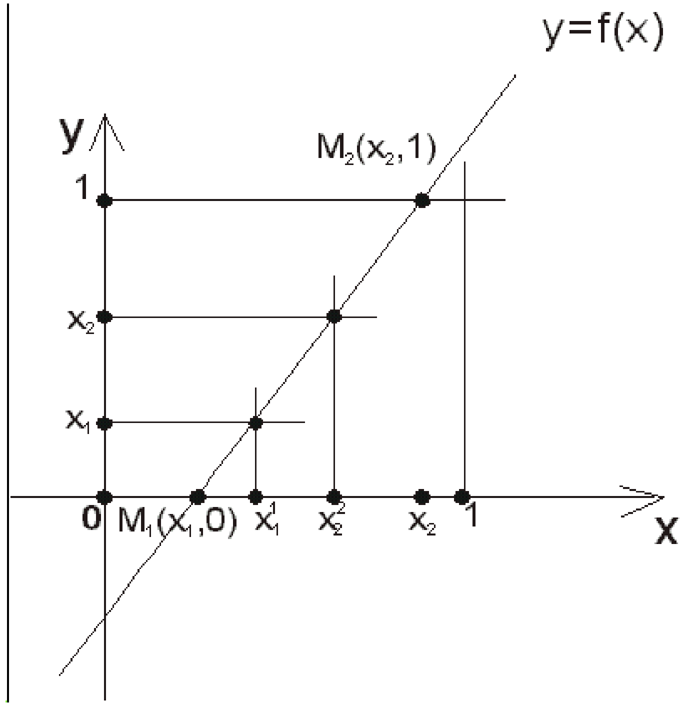


Рис. 4

Рассмотрим функцию $\varphi(x) = f(x) - x$ на отрезке $\left[x_1^1; x_2^2\right]$. Тогда $\varphi(x_1^1) = f(x_1^1) - x_1^1 = x_1 - x_1^1 < 0$ и $\varphi(x_2^2) = f(x_2^2) - x_2^2 = x_2 - x_2^2 > 0$. По теореме Коши о промежуточном значении непрерывной функции $\varphi(x)$, заданной на отрезке $\left[x_1^1; x_2^2\right]$, существует такая точка $g \in \left(x_1^1; x_2^2\right)$, что $\varphi(g) = 0$. Откуда находим, что точка g является неподвижной точкой функции f.

Данная неподвижная точка будет единственной, поскольку линейное уравнение $f(x) = x$ имеет только одно решение.

В настоящее время бурно развивается теория хаоса. Как оказалось, между фрактальными множествами и хаосом существует тесная связь. Существуют различные определения хаоса для отображений. Следуя Кроноверу [1], приведем определение хаотичного отображения по Девани.

Определение 1. Пусть (X, ρ) – метрическое пространство и $f : X \mapsto X$. Будем говорить, что отображение f обладает существенной зависимостью от начальных условий (данное определение в отличие от [1], записано на языке ε, δ) если $\exists\varepsilon > 0 : \forall x \in X, \forall\delta > 0\, \exists\, n_\delta \in N,\ \exists\, y_\delta \in X :\ \rho(x,\, y_\delta) < \delta,\ \ \rho(f^{(n)}(x),\ f^{(n)}(y_\delta)) > \varepsilon.$

Определение 2. Отображение fназывается транзитивным (перемешивание, перемежевываемость), если для любой пары U, Vоткрытых множеств существует такое $n \geq 0$, что пересечение$f^{(n)}(U) \cap V$ не является пустым множеством.

Пусть M – множество периодических точек отображения f в метрическом пространстве X.

Определение 3. Отображение f называется хаотическим, если оно обладает тремя свойствами:

а) f обладает существенной зависимостью от начальных условий;

б) f транзитивно;

в) замыкание множества M совпадает с множеством X (то есть $\overline{M} = X$).

Обычно свойство в) называют свойством регулярности.

Как оказалось, условие а) является избыточным. То есть из б) и в) следует а) (см. [1]).

Фальконер [3] приводит определение хаотичной функции в виде:

f определенно может считаться хаотической на F, если справедливы следующие правила:

Орбита $\left\{f^{(k)}(x)\right\}$ плотна в F для некоторого $x \in F$.

Периодические точки f в F (точки, для которых $f^{(p)}(x) = x$ при некотором положительном целом p) плотны в F.

f имеет *существенную зависимость от начальных условий*; то есть существует число $\delta > 0$ такое, что для любого xиз F имеются точки y в F как угодно близкие к x такие, что $\left|f^k(x) - f^k(y)\right| \geq \delta$ для некоторого k. Таким образом, точки, первоначально близкие друг к другу, не остаются близкими при итерациях f.

Фальконер [3] указывает, что условие (i) означает, что F не может быть разбито на меньшие замкнутые инвариантные множества, (ii) предполагает скелет регулярности в структуре F, и (iii) отражает непредсказуемость итераций точек на F. В частности, (iii) означает, что точное многоразрядное численное приближение орбит невозможно в том смысле, что малейшая числовая ошибка проявится при итерациях.

Докажем, что функция $f_n(x) = \begin{cases} n\cdot x, & x \le \frac{1}{2} \\ n - n\cdot x, & x > \frac{1}{2} \end{cases}$ хаотична на множестве Кантора K^n.

Мы будем следовать определениям 1-3 хаотичного отображения.

Проверим сначала существенную зависимость от начальных условий. Возьмем $x \in K$, $\varepsilon = \frac{1}{3}$ и произвольное $\delta > 0$. Пусть $U-$ открытое множество, содержащее точку x. Тогда существуют такие числа $n_\delta \in N,\ \alpha \in R,\ \beta \in R,\ x \in [\alpha;\ \beta] \subset U$и $[\alpha;\ \beta] \subset K^n_{n_\delta}$(здесь $[\alpha;\ \beta]$ – один из составляющих отрезков множества $K^n_{n_\delta}$).

Из леммы 2 вытекает, что $f_n^{(n_\delta)}([\alpha;\ \beta]) = [0;1]$, где $f_n^{(n_\delta)}(x)$ есть линейная функция на отрезке $[\alpha;\beta]$, принимающая на его концах значение равное либо нулю либо единице. Так как $\alpha \in K_n^{n_\delta}$, $\beta \in K_n^{n_\delta}$, то либо $\left|f_n^{(n_\delta)}(\alpha) - f_n^{(n_\delta)}(x)\right| > \frac{1}{3}$, либо $\left|f_n^{(n_\delta)}(\beta) - f_n^{n_\delta}(x)\right| > \frac{1}{3}$. Существенная зависимость от начальных условий для функции $f_n(x)$ установлена.

Проверим теперь транзитивность отображения f_n. Пусть U, V – открытые множества в K^n. Тогда существуют такие $n_0 \in N,\ \alpha_1 \in R,\ \beta_1 \in R:\quad [\alpha_1;\ \beta_1] \subset U$ и $[\alpha_1;\ \beta_1] \subset K^n_{n_0}$. Кроме того, существуют такие $m_0 \in N,\ \alpha_2 \in R,\ \beta_2 \in R$, что $[\alpha_2;\ \beta_2] \subset V$ и $[\alpha_2;\ \beta_2] \subset K^n_{\text{т}0}$. Поскольку $f_n^{(n_0)}([\alpha_1;\ \beta_1]) = [0;1]$ (лемма 2), а $0 \le \alpha_2 \le 1$, $0 \le \beta_2 \le 1$, то пересечение $f_n^{(n_0)}(U) \cap V$ не пусто.

Теперь приступим к установлению регулярности отображения $f_n(x)$.

Покажем сначала, что на каждом частичном отрезке $[\alpha_i;\beta_i] \subset K_i^n$ функция $f_n^{(i+1)}(x)$ имеет две периодические точки. Замечаем, что график функции $f_n^{(i)}(x)$, заданной на отрезке $[0;1]$, является ломаной, состоящей из 2^i звеньев (она линейна на каждом из 2^i частичных отрезков K_i^n). Кроме того, звено данной ломаной $l_n^{(i)}(x)$ отображает каждый частичный отрезок $[\alpha_i;\beta_i] \subset K_i^n$ на отрезок $[0;1]$ (лемма 2). На каждом из отрезков $\left[\alpha_i;\alpha_i + \frac{\beta_i-\alpha_i}{n}\right]$ и $\left[\alpha_i;\alpha_i + \frac{(n-1)\cdot(\beta_i-\alpha_i)}{n}\right]$ содержащихся в K_{i+1}^n мы имеем два звена $l_{n1}^{(i+1)}(x)$ и $l_{n2}^{(i+1)}(x)$ ломаной $l_n^{(i+1)}(x)$, каждое из которых задается линейной функцией, которая принимает согласно лемме 2 на каждом из концов отрезка $\left[\alpha_i;\alpha_i + \frac{\beta_i-\alpha_i}{n}\right]$и $\left[\alpha_i;\alpha_i + \frac{(n-1)\cdot(\beta_i-\alpha_i)}{n}\right]$ нуль или единицу. Согласно лемме 3, каждая из ломаных $l_{n1}^{(i+1)}(x)$ и $l_{n2}^{(i+1)}(x)$ пересекается с биссектрисой первого координатного угла в двух точках. Поскольку орбита неподвижных точек ограничена, то в силу теоремы 1 каждая неподвижная точка принадлежит множеству Кантора K^n. Таким образом, каждый частичный отрезок разбиения $[\alpha_i;\beta_i] \subset$

K_n^i имеет две неподвижные точки для отображения $f_n^{(i+1)}(x)$. Нетрудно заметить, что каждая неподвижная точка $i-$ой итерации имеет период i для функции $f_n\left(x\right)$. Пусть теперь $x_0^n \in K^n$ и U – произвольная окрестность данной точки. Тогда существуют $n_0 \in N,\ \alpha \in R,\ \beta \in R,\ x_0^n \in [\alpha;\ \beta] \subset U$ и $[\alpha;\ \beta] \subset K_{n_0}^n$. В силу выше приведенных рассуждений отрезок $[\alpha; \beta]$ имеет две, принадлежащие множеству K^n, неподвижные точки для функции $f_n^{(i+1)}(x)$, которые являются периодическими для функции $f_n(x)$ с периодом, равным $i+1$. Пусть точка p – одна из них. Тогда $p \in U$, что указывает о плотности периодических точек в множестве K^n. Пусть M – множество всех периодических точек функции $f_n(x)$. Тогда в силу приведенных выше рассуждений $\overline{M} = K^n$. То есть множество периодических точек функции $f_n(x)$ плотны в K^n.

Таким образом, $f_n(x) = \begin{cases} n \cdot x, & x \le \frac{1}{2} \\ n - n \cdot x, & x > \frac{1}{2} \end{cases}$ хаотична на множестве Кантора K^n.

Важно отметить, что функция $f_n(x)$ должна удовлетворять условию: $f_n\left(X\right) \subseteq X$. Если данное условие не будет выполнено, то хаотичности данной функции на множестве X может не быть. Покажем, например, что на отрезке $[0; 1]$ функция $f_3(x)$ хаотичной не будет.

Возьмем открытые множества $V = \left(0; \frac{1}{10}\right)$ и $U = \left(\frac{11}{30}; \frac{19}{30}\right)$. Пусть точка $y \in U$. Возможны два случая: 1) $\frac{11}{30} < y \le \frac{1}{2}$ и 2) $\frac{1}{2} < y \le \frac{19}{30}$.

В первом случае имеем: $f_3\left(y\right) = 3y$. Т.о., $\frac{11}{10} < f_3\left(y\right) < \frac{3}{2}$. Далее $f_3^{(2)}\left(y\right) = 3 - 3f_3\left(y\right) < 0$, Следовательно, $f_3^{(3)}\left(y\right) < 0,\ f_3^{(4)}\left(y\right) < 0, ...,\ f_3^{(n)} < 0, ...$

Во втором случае имеем: $f_3\left(y\right) = 3 - 3y$. Т.о. и в данном случае $1\frac{1}{10} < f_3\left(y\right) < 1\frac{1}{2}$. Далее $f_3^{(2)}\left(y\right) = 3 - 3f_3\left(y\right) < 0$ имеем $f_3^{(3)}\left(y\right) < 0,\ f_3^{(4)}\left(y\right) < 0, ...,\ f_3^{(n)} < 0, ...$

Следовательно, для каждого натурального $n \ge 2,\ f_3^{(n)}(U) \cap V = \emptyset$. Если $z \in f_3(U)$, то $z > 1$. Следовательно, $f_3(U) \cap V = \emptyset$ И, наконец, $f_3^{(0)}(U) \cap V = U \cap V = \emptyset$. Таким образом, нарушается условие транзитивности. И, следовательно, функция $f_3(x) = \begin{cases} 3 \cdot x, & x \le \frac{1}{2} \\ 3 - 3 \cdot x, & x > \frac{1}{2} \end{cases}$ не является хаотичной на отрезке $[0; 1]$.

Задача. Будет ли функция $f_n(x) = \begin{cases} n \cdot x, & x \le \frac{1}{2} \\ n - n \cdot x, & x > \frac{1}{2} \end{cases}$ при $n \ne 3$ хаотична на отрезке $[0;\ 1]$.

Библиографический список

1. *Кроновер, Р.М.* Фракталы и хаос в динамических системах [Текст] / Р.М. Кроновер; пер. с англ. под ред. Т.Э. Крэнкеля. – М.: Постмаркет, 2000. – 352 с.
2. *Секованов, В.С.* Методическая система формирования креативности студента университета в процессе обучения фрактальной геометрии [Текст] / В.С. Секованов. – Кострома: КГУ им. Н.А. Некрасова, 2006. – 279 с.
3. *Falconer, K.* Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications. – New York: John Wiley, 1990. – 367 p.

Проблемы конструирования тестовых заданий по методике обучения математике

И.Е. Малова, С.К. Горохова, Г.А. Яцковская

Прецедент увековечивает принцип
Бенджамин Дизраэли
(1804-1881)

В соответствии с требованиями, предъявляемыми к разработке аттестационно-педагогических измерительных материалов (сайт www.fepo.ru, раздел “Методическая поддержка”), тестовые задания должны соответствовать стандарту учебной дисциплины, контролируемое содержание должно носить общепризнанный характер, чтобы тестовые задания можно было использовать в различных вузах. На сегодняшний день имеются существенные различия в изучении методических дисциплин в вузах России. Кроме того, с введением бакалавриата была введена новая дисциплина “Технология и методика обучения математике” и существенно изменился стандарт, причем не в направлении улучшения методической подготовки студента. Таким образом, *обсуждение методической общественностью страны содержания тестовых заданий по методике обучения математике с целью выделения общих позиций является весьма актуальной задачей.*

Представим проблемы, обнаруженные при конструировании тестовых заданий по методике обучения математике.

Проблема 1. Можно ли разработать такие тестовые задания, чтобы можно было их использовать и в бакалавриате, и в специалитете, и в магистратуре при изучении соответствующих методических дисциплин?

Анализ стандартов показал, что если за основу взять стандарт для бакалавриата и реализовать принцип преемственности с курсом методики для специалитета, то указанная проблема решится положительно. Можно учесть традиционное выделение разделов методики обучения математике, если с каждой дидактической единицей (ДЕ) стандарта связать тот или иной раздел методики обучения математике: с ДЕ 1 "*Методика обучения математике как учебный предмет*" связать общую методику обучения математике; с ДЕ 2 "*Современные образовательные технологии*" – методику алгебры; с ДЕ 3 "*Возможные технологии и методики построения урока математики, ориентированного на развитие ключевых компетенций школьников*" – методику геометрии; с ДЕ 4 "*Методическая система обучения профильному предмету*" – методику изучения начал математического анализа.

Проблема 2. Какими должны быть цели системы тестовых заданий, чтобы был смысл в их разработке?

Авторами были определены следующие цели. Система тестовых заданий должна предоставлять студентам возможность, во-первых, проверить свои базовые методические знания и их применение к реальным ситуациям, во-вторых, обогатить себя методическим опытом других, в-третьих, развить свое методическое мышление.

Проблема 3. Какие методические знания считать базовыми?

Согласно исследованию [1, с. 30], базовый компонент методической подготовки учителя математики включает: базовые методики обучения; методики изучения содержательных линий; методики конструирования и анализа урока математики.

Авторами базовые методики обучения математике выделены в отдельные темы ДЕ 1, кроме того, задания на их знание включены в другие единицы, поскольку эти методики являются основой успешной работы учащихся.

Например, задание по методике обучения решению задач из ДЕ 1: *поиск способа решения задачи алгебраическим методом современная методика рекомендует начинать с:*

А) составления уравнения; Б) введения переменной; В) выбора условия для составления уравнения; Г) краткой записи условия задачи.

Задание по методике формирования умений из ДЕ 2: *Установите последовательность этапов изучения квадратных неравенств:*

А) выясняется, какая информация о функции нужна, чтобы решить соответствующее квадратное неравенство; Б) выполняется задание на чтение графика квадратной функции; В) составляется алгоритм решения квадратных неравенств; Г) ставится задача исследования промежутков знакопостоянства функции, которая приводит к необходимости решения квадратного неравенства; Д) выясняется изменение ответа в связи с изменением знака неравенства на противоположный; на нестрогий; Е) демонстрируется образец записи решения неравенства по составленному алгоритму.

Задание по методике изучения теорем из ДЕ 4: *при самостоятельном изучении доказательства, предложенного в учебнике, методически грамотно предложить учащимся задания:*

1) прочитайте доказательство и перепишите его в тетрадь; 2) выделите основную идею, этапы доказательства и используемые обоснования; 3) прочитайте доказательство и подготовьтесь к ответу у доски.

Задание по методике формирования понятий из ДЕ 4: *на этапе изучения первообразной предлагаются задачи, в которых надо определить, является ли заданная функция первообразной другой заданной функции на указанном промежутке:*

А) введения определения; Б) усвоения определения; В) закрепления понятия.

Если необходимость изучения базовых методик является общепризнанной (они отражены во всех современных учебниках по методике обучения математике, хотя и на разном уровне технологичности), то в изучении методик содержательных линий нет единства. Потому предлагаем обсудить следующий список вопросов методики изучения содержательных линий математики, раскрытие которых должно изучаться в вузах. При составлении предлагаемого списка руководствовались тем, чтобы список включал ориентиры, которые могут помочь учителю в его практической деятельности, и ориентиры, которые могут помочь учащимся в их математической деятельности.

Общие вопросы изучения содержательных линий.

1. Каковы *содержательные линии* школьного курса алгебры (геометрии, начал математического анализа)?

2. Каковы *основные понятия* соответствующей содержательной линии и методики их формирования?

По методике изучения алгебры.

3. На какие *основные вопросы* в связи с изучением того или иного вида: а) чисел; б) тождественных преобразования; в) уравнений (неравенств) и их систем г) функций учащийся должен знать ответ?

4. Каково математическое содержание на следующих *этапах изучения*: а) числовых систем: введение "новых" чисел, изучение сравнения, операций, свойств операций; б) понятия функции: введение определения, усвоение определения, способы задания функций; в) формул: мотив введения тождества; обоснование тождества; введение формулы; обучение распознаванию, введение алгоритма использования, изучение применения формулы в стандартных и нестандартных ситуациях?

5. Каковы возможные *мотивы введения*: а) того или иного вида числа; б) той или иной операции с числами; в) того или иного тождества; г) того или иного вида уравнений; д) той или иной функции?

6. Какие *виды и схемы их анализа*: а) числовых и буквенных выражений; б) уравнений (неравенств) и их систем в) функций изучаются в школьном курсе математики?

7. Каковы возможные *способы*: а) решений уравнений (неравенств) и их систем б) построения графика функции; в) выполнения того или иного преобразования числовых и буквенных выражений?

8. Каково возможное *математическое обоснование*: а) выполнения той или иной операции с числами; б) выполнения той или иной операции с буквенными выражения того или иного вида; в) решения того или иного вида уравнений (неравенств) и их систем; д) наличия у функции того или иного свойства?

9. Каковы *идеи* (и *этапы* им соответствующие) в выводе формул корней: а) квадратных уравнений; б) простейших тригонометрических уравнений?

По методике изучения начал математического анализа.

10. Каковы *основные подходы* к введению определения производной?

11. Каково математическое содержание на следующих *этапах изучения:* а) производной: введение определения; вычисление производной по определению; вычисление производной функций с помощью таблицы производных; вычисление производной с помощью правил вычисления производных; б) первообразной: введение определения; вычисление первообразной по определению; вычисление первообразной функций с помощью таблицы первообразных; вычисление первообразной с помощью правил вычисления первообразных; в) криволинейной трапеции: введение определения; усвоение определения; закрепления понятия; вычисление площади криволинейных фигур?

12. Каковы *основные виды задач* по теме "Производная" ("Приложения производной", "Первообразная и интеграл"), *ориентировочные основы* их решения и как на их основе конструируется *этап поиска* способа их решения?

13. Каковы *идеи* (и *этапы* им соответствующие) в доказательстве теорем: а) правила вычисления производных; б) уравнение касательной; в) формула для приближенных вычислений; г) достаточный признак возрастания (убывания) функции; д) необходимое условие экстремума; е) признак максимума (минимума) функции; ж) основное свойство первообразной; з) правила нахождения первообразных; и) равенство площади криволинейной трапеции приращению первообразной?

По методике изучения геометрии.

14. В чем сущность *аксиоматического метода*?

15. На какие *основные вопросы* в связи с изучением каждой геометрической фигурой (каждого вида движения, параллельности, перпендикулярности и др.) учащиеся должны знать ответ?

16. Каково математическое содержание на следующих *этапах плана изучения*: а) геометрических фигур: определение; элементы; построение; свойства; признаки; виды; измерения; б) видов движения: определение; способы задания; свойства; применение; в) параллельности или перпендикулярности фигур: обсуждение взаимного расположения соответствующих фигур; определение; построение; свойства; признаки?

17. Каковы *идеи* (и этапы им соответствующие) доказательства признаков равенства треугольников (подобия треугольников, параллельности, перпендикулярности фигур и др.), вывода формул для вычисления площадей фигур (объемов тел) по учебнику под редакцией Л.С. Атанасяна; по учебнику А.В. Погорелова?

18. Каковы схемы *методов*, применяемых в геометрии (от противного, координатного, векторного, доказательства равенства фигур и др.), мотивы выбора соответствующего метода, и как на их основе конструируется этап поиска способа решения задачи или доказательства теоремы?

19. Каковы *этапы работы с геометрической задачей*?

20. На каких примерах можно показать удобство использования для *поиска способа решения* геометрической задачи следующих вопросов: а) "Какие фигуры образовались на чертеже? Что о них известно? Могут ли они помочь решить задачу?"; б) "Как нужный элемент связан с другими фигурами?"; в) "Какие существуют стандартные дополнительные построения? Какое (какие) можно использовать в данной задаче, чтобы "разрозненные" элементы образовали удобную для решения задачи фигуру?"?

21. Каковы мотивы выбора того или иного метода решения *задач на построение* в планиметрии и схемы поиска способа их решения?

22. Каковы схемы поиска способа решения задач на *построение сечений*?

23. Каковы схемы *построения сложных для учащихся геометрических объектов* (пирамиды; углов в пространстве; отрезков, соответствующих расстояниям в пространстве и др.)?

24. На каких примерах можно показать реализацию следующей *технологии конструирования комплекса геометрических задач*: 1) проводится анализ задачного материала и выбирается геометрическая конструкция, повторяющаяся в различных задачах ШКГ; 2) определяется ключевая информация для выбранной конструкции и на ее основе формулируется первое задание комплекса; 3) конструируется серия заданий, помогающих учащимся сформулировать вычислительные задачи по данной конструкции (используются приемы: открытое условие или заключение; обобщение; дополнение; конкретизация и др.); 4) преобразовывается геометрическая конструкция и формулируется задание, помогающее учащимся составить вычислительные задачи по новой конструкции)?

Проблема 4. Как с помощью тестовых заданий проверить применение базовых знаний к конкретной ситуации?

Можно предложить следующие варианты конструирования тестовых заданий:

– по тексту задачи из школьного учебника установить: а) вид задачи; б) вопрос, который может помочь начать поиск способа решения; в) метод решения; г) последовательность решения;

– по информации, связанной с фрагментом урока, определить: а) применяемую на уроке технологию или метод обучения; б) методически грамотный вариант действий учителя; в) соответствие между методическими действиями учителя и анализом этих действий; г) соответствие между методическими действиями учителя и психолого-педагогическими основами обучения; д) этап реализации базовой методики; е) цель предъявляемого задания; ж) теоретический факт, соответствующий подборке заданий или записям на доске; е) соответствие между этапами доказательства и их оформлением; ж) соответствие между идеями доказательства и их реализацией;

– по указанной теме и типу урока установить: а) цель, соответствующую такому типу урока; б) последовательность этапов урока; в) вопрос учителя, соответствующий целям такого типа урока; г) используемое средство, соответствующее целям такого типа уроков; д) мотивацию деятельности учащихся; е) вопросы, соответствующие этапу подведения итогов урока;

– по указанному математическому затруднению учащегося выбрать методически грамотный вариант его преодоления;

– по указанной математической ошибке учащихся определить причину ее возникновения;

– из предложенного списка упражнений выбрать те, которые относятся к обязательным результатам обучения.

Проблема 5. Как должны быть сконструированы тестовые задания, чтобы они обогащали методический опыт студентов?

Известно, что учебного времени хватает только на изучение базовых вопросов методических курсов, в то время, как накоплен значительный опыт в решении тех или иных методических вопросов. Данное противоречие применительно к тестовым заданиям было разрешено следующим образом: обучающая информация включена в текст заданий. Постарались проанализировать учебные пособия по методике обучения математике различных лет издания и соответствующие идеи авторов методической литературы включить в тестовые задания.

Пример задания, составленного на основе анализа книг [2, 3]. *Методическая система обучения математике, созданная А.М. Пышкало и включающая в себя цели, принципы, содержание, методы, формы, средства обучения, сегодня должна быть дополнена такими компонентами*:
а) учебник математики; б) субъектный опыт учащихся; в) субъектный опыт учителя; г) использование компьютера.

К этому же типу заданий относится задание, в котором нужно установить соответствие между видом технологии обучения и ее характеристиками.

Из следующего задания студенты узнают о современных требованиях к процессу постановки целей урока совершенствования. Изучение данных требований не входит в программу обучения, но без них трудно сконструировать современный урок.

Задание. Установите последовательность в конструировании целей урока совершенствования в связи с решением задач:

а) конструирование результатов обогащения опыта учащихся по работе с задачами выделенных групп; б) формулировка целей урока совершенствования; в) анализ задачного материала с целью выделения групп задач; г) конструирование образовательного результата по работе с заданиями выделенных групп.

Проблема 6. Как должны быть сконструированы тестовые задания, чтобы они способствовали развитию методического мышления?

Развитию методического мышления способствуют задания на сопоставление имеющейся информации с имеющимися методическими знаниями с целью определения правильного методического решения. Примеры таких заданий приведены выше.

Библиографический список

1. *Малова, И.Е.* Непрерывная методическая подготовка учителя математики [Текст]: автореферат дис. ...д-ра пед.наук / И.Е. Малова. – Ярославль, 2007.
2. Методика и технология обучения математике. Курс лекций [Текст]: пособие для вузов / под научн. ред. Н.Л. Стефановой, Н.С. Подходовой. – М.: Дрофа, 2005.
3. *Саранцев, Г.И.* Методика обучения математике в средней школе [Текст]: учеб. пособие для студентов мат. спец. пед. вузов и ун-тов / Г.И. Саранцев. – М., 2002.

Реализация преемственности математической подготовки в многоуровневой системе "колледж-вуз" инженерно-технического профиля

Р.М. Зайниев

Возросшие требования к уровню подготовки специалистов инженерно-технического профиля создали условия для инновационной деятельности технических вузов и колледжей. Техническое переоснащение крупных предприятий и производств, усложнение организационной и эксплуатационной деятельности предприятий определяют необходимость перехода на новый уровень кадрового обеспечения. Новая техника и новые технологии, применяемые на современном производстве, требуют специалистов с новыми профессиональными качествами: "специалистов, объединяющих в себе лучшие традиции среднего профессионального и высшего образования (хорошую практическую подготовку техников и глубокую теоретическую подготовку инженеров)" [8, с. 6].

В настоящее время вузы в системе высшего образования, опираясь на ГОС ВПО второго поколения, разрабатывают свои учебные планы и программы. То же самое происходит в системе среднего профессионального образования. Таким образом, мы приходим к рассмотрению непрерывного образования в системе "школа-колледж-вуз" и в ее подсистеме "колледж-вуз".

Особую тревогу вызывает подготовка специалистов в непрерывной системе “колледж-вуз” инженерно-технического профиля. Вновь открытые и перепрофилированные учебные заведения в последние годы в нашей стране, реализующие одновременно несколько образовательных программ, оказались, как справедливо отмечает А.М.Новиков, на правах “левши”. “Эти образовательные учреждения не вписываются в типологию Министерства образования РФ, и отстаивать свое право на существование им становится все труднее и труднее. Точно такие же проблемы приходится решать и интегративным учреждениям профессионального образования, реализующим одновременно несколько уровней профессиональных образовательных программ: начального и среднего профессионального образования. . . ” [10, с. 127].

Несмотря на трудности организационно-правого характера, образовательные учреждения как высшего, так и среднего профессионального образования, переходят к подготовке специалистов в многоуровневой системе непрерывного образования. Так, например, Камская государственная инженерно-экономическая академия (ИНЭКА) как высшее учебное заведение осуществляет подготовку техников на уровне СПО в колледжах, открытых при факультетах автоматизации и прогрессивных технологий, автомеханическом, строительном. Затем, на уровне ВПО осуществляется подготовка инженеров по соответствующим направлениям по сокращенной программе [3, 4]. А Набережночелнинский профессиональный торгово-технологический колледж (ранее он назывался техникумом) перешел к подготовке специалистов высшего профессионального образования. С 2004 года колледж приобрел статус государственного вуза и стал Набережночелнинским государственным торгово-технологическим институтом (НГТТИ). НГТТИ одновременно осуществляет подготовку специалистов начального, среднего, высшего и послевузовского профессионального образования на основе государственных стандартов [3, с. 31]. Таких примеров в Закамском регионе Республики Татарстан немало.

Но основная трудность в подготовке специалистов в системе “колледж-вуз” заключается в несогласованности образовательных стандартов и учебных планов СПО и ВПО даже по одному и тому же направлению подготовки специалистов, хотя, как отмечает А.М. Новиков, “в законе Российской Федерации об образовании система образования трактуется как совокупность взаимодействующих: преемственных образовательных программ и государственных образовательных стандартов различного уровня и направленности; сети реализующих их образовательных учреждений и органов управления образованием. Тем самым подчеркивается не организационно-структурная основа, а прежде всего ее содержательная основа" [10, с. 127-128]. Поэтому, модернизируя содержание профессионального образования как на уровне СПО, так и на уровне ВПО, мы, в первую очередь, приходим к совершенствованию учебных планов, программ и технологий обучения. "Именно они обеспечат максимальную эффективность образовательной деятельности, направленной на получение качественных знаний развития личности" [8, с. 6-7].

Рассмотрим несколько вариантов математической подготовки обучающихся в интегрированной системе непрерывного образования "колледж-вуз" инженерно-технического профиля. В рассматриваемой системе для сравнения рассмотрим учебный план ВПО по специальности 190601 "Автомобили и автомобильное хозяйство" и учебный план СПО 1705 "Техническое обслуживание и ремонт автомобильного транспорта", принятые в Камской государственной инженерно-экономической академии в настоящее время. Именно выпускники колледжа при автомеханическом факультете ИНЭКА (специальность 1705) продолжают обучение по сокращенной программе в ИНЭКА по специальности 190601. Заметим, что рассматриваемые учебные планы предназначены только для выпускников средней (полной) школы, продолжающих учебу по дневной форме обучения.

Применяемый в настоящее время в ИНЭКА учебный план по математике для специальности 190601 "Автомобили и автомобильное хозяйство" и учебный план СПО по математике для специальности 1705 "Техническое обслуживание и ремонт автомобильного транспорта" представлен в табл. 1.

Формально из табл. 1 следует, что математическая подготовка обучающихся в системе "колледж-вуз" выглядит более привлекательной, но при внимательном рассмотрении видно, что аудиторные занятия по математике со студентами, окончившими колледж, меньше на 113 часов. Самостоятельная работа студентов в количестве 408 часов не может быть организована со студентами в таком объеме в течение трех семестров. К организации самостоятельной работе студентов пока еще не подготовлены и сами студенты, которые перешли в вуз сразу после окончания колледжа, и сама система подготовки специалистов в вузе.

Тем не менее, по этому учебному плану организован учебный процесс, и результаты такой работы не могут удовлетворить ни самих студентов, ни организаторов учебного процесса на уровнях СПО и ВПО.

Таблица 1

	СПО						ВПО					
	ы	ы	ы	Пы ы	ы ы	ы	Вы	ы	ы	Пы ы	ы ы	ы
Математика а ае з вєз аанз												
Математика а ае з вєз аанз з итеме кєз з												

На уровне СПО студент колледжа не может получить полноценную математическую подготовку в течение 40 аудиторных часов. Это в среднем 2,5 часа в неделю в течение одного (второго) семестра. А ГОС СПО охватывает такие разделы математики, как дифференциальное и интегральное исчисление, обыкновенные дифференциальные уравнения, дифференциальные уравнения в частных производных и т.д. В этом мы видим грубое нарушение преемственности математической подготовки обучающихся как при переходе со школы в технический колледж, так и при переходе с колледжа в технический вуз, т.к. ГОС ВПО предполагает, кроме вышеназначенных разделов математики в ГОС СПО, аналитическую геометрию и линейную алгебру, последовательности и ряды, векторный анализ и элементы теории поля и т.д. Все эти нарушения преемственности математической подготовки обучающихся можно привести в соответствие в предлагаемом интегративном совмещенном учебном плане двухуровневой системе “колледж-вуз” подготовки специалистов инженерно-технического профиля.

Предлагаемый интегративный совмещенный учебный план двухуровневой системы “колледж-вуз” подготовки специалистов инженерно-технического профиля для специальностей СПО 1705 и ВПО 190601 представлен в табл. 2.

Таблица 2

	СПО						аПО					
	а	а а	а	Па а	Са а	а	а	а а	а	Па а	Са а	а
Паа												
аа а а а а												
аа												
Оа а аа а												
аа аа а												
а												

В табл. 2 предлагается два варианта учебного плана, причем в обоих вариантах общее число часов на изучение математики в интегративной системе “колледж-вуз” определено из общего количества часов, отводимых в системе СПО – 58 часов и в системе ВПО – 612 часов. Таким образом, общее количество часов на изучение математики в системе “колледж-вуз” равно 670 часов. А количество часов на аудиторные занятия для всей этой системы взято из ныне действующего в ИНЭКА учебного плана ВПО по математике для специальности 190601, применяемого для обучения выпускников, окончивших средние общеобразовательные школы, и равняется 357 часам (см. табл. 1). Вместо 58 часов, из которых 40 аудиторных часов, предложенных ГОС СПО [2], рекомендуется 255 часов, из них аудиторных занятий – 119 часов, которые разбиты на лекционные и практические занятия. Особенностью обоих вариантов учебного плана является изучение основного курса математики, предусмотренного стандартами СПО и ВПО в течение первых двух семестров колледжа со сдачей экзамена за первый и второй семестры (возможен вариант сдачи дифференцированного зачета в первом семестре и экзамена во втором семестре).

В обоих вариантах учебного плана СПО мы предлагаем в начале семестра рассмотреть вопросы школьного курса математики в объеме 34 аудиторных часов, в первом варианте внутри основного курса математики, во втором варианте - в виде отдельного курса “Основы школьной математики” (см. также [5]). Рекомендуемая программа по математике “Основы школьной математики” составлена на основе изучения многочисленных заданий вступительных экзаменов по математике для поступающих на инженерно-технические специальности различных лет, заданий централизованного тестирования и ЕГЭ прошлых лет с учетом ГОС СПО по математике для технических специальностей и направлений. Необходимость введения этого курса диктуется тем, что “анализ результатов тестирования студентов 1-го курса ряда технических вузов по элементарной математике указывает на существования разрыва между имеющимися у учащихся математическими знаниями и умениями по школьной программе и требованиями к ним со стороны курса высшей математики” [9, с. 348]. По отношению технических колледжей диагностика знаний учащихся по школьной математике у поступивших в колледж показывает значительное отставание, чем у студентов, поступивших в технические вузы. Нами было проведено диагностическое тестирование у учащихся колледжей, принятых в 2008 году по десяти заданиям элементарной математики, что и для студентов технических специальностей ИНЭКА. Результаты ответов учащихся колледжей выглядят следующим образом: полных ответов по всем заданиям не дал никто, 50% и более заданий выполнили 2% учащихся колледжа, менее половины заданий выполнили около 35% из числа принявших участие в тестировании. Более 60% учащихся колледжа не смогли решить правильно ни одного задания. Это говорит о том, что с учащимися колледжа необходимо провести дополнительные занятия по материалам школьной математики. Разработанная нами программа курса “Основы школьной математики” содержит следующие разделы:

– вычисления и преобразования;
– уравнения и неравенства;
– основные элементарные функции;
– элементы векторной алгебры и геометрии.

Наиболее эффективной формой организации данного курса “Основы школьной математики” является концентрированное обучение [7], предполагающее изучение в течение наиболее короткого времени одного основного предмета- математики в начале учебного года на первом курсе СПО. На изучение этого курса можно отвести от одной до двух недель в зависимости от подготовленности учащихся колледжа по математике, принятых на первый курс. Следуя Г.И. Ибрагимову, для изучения этого курса мы можем принять также первую модель концентрированного обучения [7, с. 276].

В течение нескольких дней подряд (от двух до трех недель) учащиеся колледжа изучают математику согласно рекомендованной программе. Для этого в расписании занятий выделяется по одной паре (2 часа) ежедневно. Для изучения этого материала можно использовать модульные технологии. Один из вариантов модульной системы для изучения курса "Введение в высшую математику", "Основы школьной математики" рассмотрен в статье автора [6].

Особый акцент при изучении этого курса должен быть направлен на реализацию преемственности математической подготовки обучающихся при переходе из колледжа в вуз на основе фундаментальных понятий школьной математики, так как они составляют основу для дальнейшего продвижения учащегося из колледжа в вуз.

Оставшиеся 85 аудиторных часов курса математики СПО можно разбить на два семестра в течение первого курса.

В курс математики СПО, на наш взгляд, можно включить следующие разделы:

– линейная и векторная алгебра;

– аналитическая геометрия;

– введение в математический анализ;

– дифференциальное и интегральное исчисление функции одной переменной;

– основные понятия обыкновенных дифференциальных уравнений;

– основы теории вероятностей и математической статистики и некоторые другие разделы математики, предусмотренные ГОС СПО.

Заметим, что первые четыре раздела математики изучается более основательно, остальные разделы – ознакомительно и для общего понятия и применения при изучении общепрофессиональных и специальных дисциплин СПО.

Интегрированные образовательные программы непрерывного многоуровневого профессионального образования широко применялись и применяются во многих регионах РФ (см., например [8, 1]), но они в своем решении содержат ряд противоречий и недостатков.

Какие же эти противоречия и недостатки?

Стандарт СПО предполагает подготовку специалиста среднего звена для выполнения своей профессиональной деятельности на современном производстве. Так, например, выпускник СПО по специальности 1705 "Техническое обслуживание и ремонт автомобильного транспорта", "должен быть готов к профессиональной деятельности по техническому обслуживанию и ремонту автомобильного транспорта в качестве техника на предприятиях и организациях автотранспортного комплекса различных организационно-правовых форм собственности, в научно-исследовательских, конструкторско-технологических организациях, автотранспортных и авторемонтных предприятиях" [2]. В стандарте СПО также определены возможности продолжения образования выпускника:

– к освоению основной профессиональной образовательной программы СПО повышенного уровня;

– к освоению основной профессиональной образовательной программы ВПО;

– к освоению основной профессиональной образовательной программы ВПО по специальностям направления подготовки 653300 "Эксплуатация транспорта и транспортного оборудования", 150200 "Автомобили и автомобильное хозяйство", 171000 "Сельскохозяйственные машины и оборудование" в сокращенные сроки.

Колледжи (техникумы), осуществляющие подготовку специалистов, особенно те колледжи, которые открыты при технических вузах, в основном работают на выпуск специалистов для продолжения обучения в вузах в сокращенные сроки. В этом кроется основное противоречие в качественной подготовке специалистов в техническом колледже. Студент колледжа настроен не на освоение специальности СПО, а на продолжение обучения по программе ВПО в сокращенные сроки. Выпускник колледжа без практического опыта сразу становится студентом технического вуза. При этом если мы осуществляем изучение математики в колледже в объеме 40 аудиторных часов, как это показано в табл. 1, то выпускник колледжа очень смутно представляет пройденный материал. Это и естественно, так как за 40 аудиторных часов нельзя изучить материал по математике, предусмотренный стандартом СПО. Поэтому пройденный студентом материал по математике в колледже никак не может служить основанием для продолжения обучения математике в сокращенные сроки даже по соответствующим в СПО направлениям подготовки в системе высшего профессионального образования. При этом не учитываются рекомендации физиологов по продолжительности и устойчивости работоспособности выпускников колледжей. Если выпускник общеобразовательной школы в 17-18 лет поступает в вуз, то он легко и без особого напряжения приступает к изучению математики в вузе. При этом недельная аудиторная нагрузка в вузе определена в объеме 6 часов (3 часа – лекции, 3 часа – практические занятия) на первом курсе, которая несколько сокращается на втором курсе. Выпускник колледжа в возрасте 20-21 года, продолжающий учебу в техническом вузе в сокращенные сроки, приступает к изучению математики с недельной аудиторной нагрузкой 4 часа (2 часа – лекции, 2 часа – практические занятия) в течение трех семестров. Если студент, поступивший в вуз сразу после школы, не имеет временного разрыва при изучении математики, то у выпускника колледжа этот разрыв составляет два-три года, причем эти годы выпадают на 18-20 летний возраст молодого человека. Студент технического вуза при таком длительном разрыве в изучении математики не может полноценно и эффективно продолжить дальнейшее изучение математики. К сказанному добавим, что математическая подготовка в колледже осуществляется в минимальном (ознакомительном) объеме.

Из сказанного следует, что при переходе выпускника колледжа в вуз происходит временной разрыв в течение двух и более лет. Поэтому на первом курсе мы предлагаем краткосрочный курс под названием "Введение в высшую математику". Этот курс составляет в объеме 35 часов, из которых 17 – аудиторные занятия. В течение этого времени студенты первого курса технического вуза, окончившие технические вузы снова в обзорном порядке знакомятся в основными категориями школьной математики, а также с пройденным материалом по программе СПО (введение в математический анализ, дифференциальное и интегральное исчисления функции одной переменной). Такое распределение материала ГОС ВПО позволяет в течение первых трех семестров вуза изучить весь программный материал по математике и приступить к изучению общепрофессиональных и специальных дисциплин на основе достижений математической науки.

Таким образом, преемственность математической подготовки в многоуровневой системе "колледж-вуз" инженерно-технического профиля может быть реализована, если:

– осуществляется переход к интегрированному совмещенному учебному плану двухуровневой системы "колледж-вуз" инженерно-технического профиля и перевод основных разделов математики первого курса ВПО на первый курс СПО в объеме, определенном в табл. 2;

– систематическое изучение математики в курсе СПО начинается с изучения вводного курса "Основы школьной математики", а в курсе ВПО – с изучения краткосрочного курса "Введение в высшую математику" в виде отдельных курсов (второй вариант из табл. 2) или внутри основного курса математики (первый вариант из табл. 2); вводимые курсы “Основы школьной математики” в СПО и “Введение в высшую математику” в ВПО наиболее эффективно могут быть организован в форме концентрированного обучения в течение двух-трех недель в колледже и от одной до двух недель в вузе при ежедневной организации обучения.

Библиографический список

1. *Бекренев, А.Н.* Интегрированная система многоуровневого высшего образования [Текст] / А.Н. Бекренев, В.Н. Михелькевич // Высшее образование в России. – 1995. – № 2. – С. 111-129.
2. ГОС СПО специализация 1705 “Техническое обслуживание и ремонт автомобильного транспорта” [Текст]. 22 февраля 2002 г.
3. *Зайниев, Р.М.* Многоуровневые системы непрерывного инженерно-технического образования [Текст] / Р.М. Зайниев // Образование в техническом вузе в XXI веке: международный межвузовский научно-методический сборник. – Набережные Челны: Изд-во ИНЭКА, 2008. – Вып. 3. – С. 24-36.
4. *Зайниев, Р.М.* Непрерывное инженерно-техническое образование: опыт ИНЭКА [Текст] / Р.М. Зайниев // Высшее образование в России. – 2008. – № 8. – С. 93-99.
5. *Зайниев, Р.М.* Преемственность математического образования в техническом вузе [Текст] / Р.М. Зайниев // Высшее образование сегодня. – 2008. – № 4. – С. 28-30.
6. *Зайниев, Р.М.* Преемственность содержания математического образования в системе “школа-колледж-вуз” [Текст] / Р.М. Зайниев // Высшее образование сегодня. – 2008. – № 9. – С. 28-32.
7. *Ибрагимов, Г.И.* Формы организации обучения: теория, история, практика [Текст] / Г.И Ибрагимов. – Казань: Изд-во “Матбугат йорты”, 1998. – 244 с.
8. *Малыгин, Е.А.* Научно-методологические основы формирования интегрированных образовательных программ непрерывного многоуровненевого профессионального образования [Текст] / Е.А. Малыгин. – Екатеринбург: Ур ГУПС, 2007. – 182 с.
9. *Малыгина, О.А.* О проблемах обучения высшей математике [Текст] / О.А. Малыгина // Труды 3-й Международной конференции, посв. 85-летию Л.Д. Кудрявцева. – М.: МФТИ, 2008. – С. 347-349.
10. *Новиков, А.М.* Развитие отечественного образования [Текст] / А.М. Новиков // Полемические размышления. – М.: Изд-во “Эгвес”, 2005. – 176 с.

Основные математические принципы и методика их изучения в специализированной школе

М.Е. Колоскова

Одна из основных задач любой школы – научить учиться думать, то есть развить способность учащихся грамотно использовать информацию, полученную в процессе обучения, а также развить определенные навыки и определенный склад ума. Достигнуть этого можно только, научив школьника самостоятельно решать задачи. Выдающийся математик и педагог Д. Пойа писал об этом: "Решение задач – специфическое достижение разума, разум же – особый дар, которым наделен человек. Способность к преодолению препятствий, к нахождению обходного маневра там, где не видно прямого пути, возвышает умное животное над тупым, человека – над самым умным животным и талантливых людей – над другими людьми". Что же такое задача? Задача "представляет необходимость сознательного поиска соответствующего средства для достижения ясно видимой, но непосредственно недоступной цели". А решение задачи и состоит в поиске этого средства. Обучение решениям задач должно являться важнейшей составной частью всего курса математики каждой специализированной школы. Одну же из главных ролей в умении решать задачи играют *восемь основных математических принципов*, а именно:

- Принцип математической индукции;
- Принцип Дирихле;
- Принцип включения-исключения;
- Принцип исключенного третьего;
- Принцип суперпозиции;
- Принцип двойственности;
- Принцип непрерывности;
- Принцип (метод) Декарта.

Остановимся немного подробнее на каждом из них.

Принцип математической индукции

Метод индукции в широком его понимании состоит в переходе от частных наблюдений к универсальной, общей закономерности или общей формулировке. В таком толковании метода – это, конечно, основной прием проведения исследований в любой экспериментальной естественнонаучной деятельности человека. *Метод (принцип) математической индукции* в простейшей его форме применяется тогда, когда нужно доказать некоторое утверждение для всех натуральных чисел. Сам термин *индукция* происходит от латинского слова induction (наведение), которое означает переход от единичного знания об отдельных предметах данного класса к общему выводу о всех предметах данного класса, что является одним из основных методов познания.

Принцип математической индукции в привычной форме двух шагов впервые появился в 1654 году в работе Блеза Паскаля “Трактат об арифметическом треугольнике”, в которой индукцией доказывается простой способ вычисления числа сочетаний (биномиальных коэффициентов). Д. Пойа в книге [2] цитирует Б. Паскаля с небольшими изменениями, данными в квадратных скобках:

“Несмотря на то, что рассматриваемое предложение [явная формула для биномиальных коэффициентов] содержит бесчисленное множество частных случаев, я дам для нее совсем короткое доказательство, основанное на двух леммах.

Первая лемма утверждает, что предположение верно для основания – это очевидно. [При n=1 явная формула справедлива. . .]

Вторая лемма утверждает следующее: если наше предположение верно для произвольного основания [для произвольного n], то оно будет верным и для следующего за ним основания [для n+1].

Из этих двух лемм необходимо вытекает справедливость предложения для всех значений n. Действительно, в силу первой леммы оно справедливо для n=1; следовательно, в силу второй леммы оно справедливо для n=2; следовательно, опять-таки в силу второй леммы оно справедливо для n=3 и так до *бесконечности*”.

Итак, логическая схема, состоящая из двух шагов:

• первый шаг – ***базис индукции*** (проверка предположения для основания),

• второй шаг – ***индуктивный переход*** или шаг индукции, включающий в себя предположение (утверждение верно при n=k) и заключение (утверждение верно при n=k+1), и позволяющая заключить, что рассматриваемое утверждение верно для всех натуральных чисел (или для всех, начиная с некоторого), так как справедливы и базис, и переход, называется *принципом математической индукции*, на котором и *основан метод математической индукции*. Параметр n называется параметром индукции.

Метод математической индукции широко применяется при решении самых разнообразных задач.

Принцип Дирихле

При решении задача часто бывает полезен, так называемый “принцип Дирихле”, названный в честь немецкого математика Петера Густава

Лежена Дирихле; по-другому этот принцип еще называют “принципом ящиков” или “принципом голубятни”. Этот принцип часто является хорошим средством при доказательстве важнейших теорем в теории чисел, алгебре, геометрии.

Наиболее часто принцип Дирихле формулируется в следующей форме (или аналогичной):

Если пять кроликов помещены в четыре клетки, то в одной из клеток находятся не менее двух кроликов; или, другими словами, нельзя посадить пять кроликов в четыре клетки так, чтобы в каждой клетке находилось не более одного кролика.

Более общая форма принципа Дирихле такова:

Если $(kn+1)$ кролик помещен в n клетках, то в одной из клеток находятся не менее $(k+1)$ кролика; или в эквивалентной форме – нельзя посадить $(kn+1)$ кролика в n клеток так, чтобы в каждой клетке находилось не более k кроликов.

Принцип включения-исключения

Наряду с рассмотренными выше принципами, принцип (формула) включения-исключения является важнейшим математическим инструментом. Особенно, в комбинаторике, когда, зная число элементов в каждом из конечных данных множеств, нужно найти число элементов другого множества, которое составлено из данных при помощи некоторых операций (объединений, пересечений и т.д.).

Если множества A_1 и A_2 состоят из конечного числа элементов, то

$$n(A_1 \cup A_2) = n(A_1) + n(A_2) - n(A_{12}), \tag{1}$$

где $n(X)$ обозначает число элементов множества X, $A_{12} = A_1 \cap A_2$.

Это одна из важных формул в комбинаторике; ее называют также *правилом сложения.* С ее помощью можно получить формулу для числа элементов объединения любого числа конечных множеств. Например, для трех множеств имеем (обозначения вида A_{ij} и A_{123} здесь и всюду в дальнейшем обозначают пересечения двух и трех указанных индексами множеств):

$n(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = n(A_1 \cup (A_2 \cup A_3)) =$

$= n(A_1) + n(A_2 \cup A_3) - n((A_1 \cap (A_2 \cup A_3)) =$

$= n(A_1) + n(A_2) + n(A_3) - n(A_{23}) - n(A_{12} \cup A_{13}) =$

$= n(A_1) + n(A_2) + n(A_3) - n(A_{23}) - n(A_{12}) - n(A_{13}) + n(A_{12} \cap A_{13})$.

Таким образом,

$$n(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = n(A_1) + n(A_2) + n(A_3) - n(A_{12}) - n(A_{13}) - n(A_{23}) + n(A_{123}).$$

Здесь мы применили два раза правило сложения для двух множеств и использовали то, что $A_1 \cap (A_2 \cup A_3) = A_{12} \cup A_{13}$.

Полученная формула, как и формула (1), являются частными случаями общего *принципа (формулы) включений-исключений.* В общем виде принцип включения-исключения выглядит следующим образом: Пусть имеется n объектов и $n(\alpha)$ из них обладают некоторым свойством α; подобным же образом через $n(\beta)$, $n(\gamma), \ldots$ обозначим, соответственно, число тех объектов, которые обладают свойствами β, γ,... Если через $n(\alpha,\beta)$, $n(\alpha,\gamma)$, $n(\beta,\gamma)$, $n(\alpha,\beta,\gamma), \ldots$ обозначить число объектов, которые обладают теми свойствами, которые указаны в скобках, то число объектов, которые *не обладают ни одним из свойств α, β, γ, ...* равно

$$n - n(\alpha) - n(\beta) - n(\gamma) + n(\alpha,\beta) + n(\alpha,\gamma) + n(\beta,\gamma) - n(\alpha,\beta,\gamma) + \ldots$$

Этот общий прием (формула) имеет место, конечно, для любого конечного числа свойств объектов. При этом, если свойств у объектов много, то число членов в написанном выражении, естественно, возрастает. Например, для числа объектов, не обладающих четырьмя свойствами справедлива формула

$$n - n(\alpha) - n(\beta) - n(\gamma) - n(\delta) +$$

$$+ n(\alpha,\beta) + n(\alpha,\gamma) + n(\alpha,\delta) + n(\beta,\gamma) + n(\beta,\delta) + n(\gamma,\delta) -$$

$$- n(\alpha,\beta,\gamma) - n(\alpha,\beta,\delta) - n(\alpha,\gamma,\delta) - n(\beta,\gamma,\delta) + n(\alpha,\beta,\gamma,\delta).$$

Принцип исключенного третьего

Принцип исключенного третьего впервые был сформулирован Аристотелем и представляет собой принцип классической формальной логики, утверждающий, что *всякое суждение или истинно, или ложно, третьего не дано* " ("tertium non datur").

Придерживаясь терминологии математической логики этот *закон (принцип) исключенного третьего* утверждает что дизъюнкция $A \vee \neg A$ является *тавтологией* для любого высказывания A: любое высказывание такой формы будет истинным в силу одной своей структуры.

Закон противоречия, который выражается тавтологией $\neg(A \wedge \neg A)$, является проявлением принципа двойственности в алгебре высказываний и исчислении предикатов.

Известное под не совсем удачным названием доказательство "от противного" представляет собой, в действительности, *косвенное доказательство.* Такое доказательство некоторой теоремы T состоит в том, что исходят из отрицания T, называемого допущением косвенного доказательства и выводят из него два противоречащих друг другу предложения (типа P и $\neg$P). Это выведение называется "приведением к абсурду (нелепости)" – "reductio ad absurdum. В конце такого доказательства обычно говорят: "Полученное противоречие доказывает теорему". Что значит "противоречие доказывает"? Каков точный смысл этих слов? Смысл этих слов можно уточнить так. Ввиду того, что противоречие $P\wedge\neg P$ тождественно ложно, его отрицание $\neg(P\wedge\neg P)$ общезначимо и после получения противоречия мы можем дополнить его до вывода теоремы следующим образом: $\neg T\Rightarrow(P\wedge\neg P)$, $\neg(P\wedge\neg P)\Rightarrow \neg(\neg\, T)$, то есть T. Следовательно, точный смысл слов "полученное противоречие доказывает теорему" нужно понимать как возможность достраивания доказательства после противоречия до доказываемого предложения T.

С принципом исключенного третьего тесно связан и метод доказательства, опирающийся на ***эквивалентность*** доказываемой теоремы и теоремы противоположной к обратной данной. Заметим, что построение *контрпримера* (и роль) является классическим способом опровержения гипотез и также тесно связано с принципом исключенного третьего.

Принцип суперпозиции

Сущность *принципа суперпозиции* (термин происходит от латинского слова superposito – наложение) заключается в *получении общего решения путем объединения решений в частных случаях.* Или другими словами, этот принцип состоит *в обнаружении* (выделении) того частного случая, который является основой для обобщения и развития в разных направлениях.

С использованием данного принципа каждый ученик сталкивается, например, при обычном доказательстве хорошо известной теоремы планиметрии, утверждающей, что "центральный угол равен удвоенному вписанному углу, опирающемуся на ту же дугу". Ее доказательство, в главном, основано на рассмотрении *частного случая*, когда одна из сторон вписанного угла совпадает с диаметром. К нему сводятся также и утверждения об измерении углов, связанных с дугами окружности, в случаях произвольного расположения вершины угла на плоскости.

Важными примерами проявления этого принципа (и принципа математической индукции) является рассмотрение треугольников площади 1/2, все вершины которых находятся в узлах клетчатой бумаги, при доказательстве обшей формулы Пика. А также, выделение случаев треугольника и квадрата, и двух квадратов при доказательстве общей формулы Пика для произвольного простого многоугольника. Все эти вопросы включены в программу лекционного курса.

Отметим также, что рассмотрение частных примеров при анализе той или иной задачи – это важнейший методический прием на любом уровне преподавания математики.

Принцип двойственности

Принцип двойственности – принцип, формулируемый в некоторых разделах математики и заключающийся в том, что *каждому верному утверждению этого раздела отвечает двойственное утверждение, которое может быть получено из первого путем замены входящих в него понятий на другие, так называемые двойственные им понятия.*

В школе с принципом двойственности учащиеся в основном сталкиваются при изучении следующих разделов математики:

- алгебра множеств;
- проективная геометрия;
- теория многогранников.

Принцип непрерывности

Принцип непрерывности, широко используемый в математическом анализе и в геометрии, заключается в следующем: *пусть некоторая величина F зависит от положения точки x на отрезке (ломаной или другой линии). Если при одном положении x на отрезке $F<0$, а при другом положении x на отрезке $F>0$, то найдется такое положение x на этом отрезке, при котором $F=0$.*

Данный принцип лежит в основе доказательств многих теорем.

Теорема Брауэра. *Всякое непрерывное отображение f отрезка в себя имеет по крайне мере одну неподвижную точку, то есть такую точку x_0, что $f(x_0) = x_0$.*

Теорема Больцано. *Если f – непрерывная функция, заданная на отрезке $[a,b]$, и такая что $f(a)<f(b)$, и если число c удовлетворяет неравенствам $f(a)<c<f(b)$, то на отрезке найдется такая точка x_0, $f(x_0) = c$.*

Доказательство этих теорем основано на принципе стягивающих отрезков. Заметим, что теорема Брауэра и теорема Больцано эквивалентны, то есть одна из них может быть получена в качестве следствия другой.

Метод Декарта

Метод Декарта или *метод геометрических мест является* важнейшим методом решения задач на построение.

Геометрическим местом точек (сокращенно ГМТ) называется фигура, которая состоит из всех точек плоскости, обладающих определенным свойством. Метод ГМТ состоит в следующем: решение задачи на построение сводят к нахождению некоторой точки, подчиненной двум независимым условиям. Отбрасываем одно из этих условий и ищем ГМТ, удовлетворяющих второму условию. Назовем полученную фигуру F_1. Затем отбрасываем второе условие и ищем ГМТ, удовлетворяющих первому условию. Пусть это будет фигура F_2. Очевидно, что обоим условиям удовлетворяет каждая точка пересечения фигур F_1 и F_2, а всякая точка, не принадлежащая пересечению этих фигур, не удовлетворяет хотя бы одному из этих условий.

В работе приведена методика изучения вышеперечисленных принципов, которая уже используется при преподавании математики в школе им. А.Н. Колмогорова Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова.

Библиографический список

1. *Колмогоров, А.Н.* Математика-наука и профессия [Текст] / А.Н. Колмогоров. – М.: Наука, 1988.
2. *Вавилов, В.В.* Школа математического творчества [Текст] / В.В. Вавилов. – М.: РОХОС, 2003.
3. *Вавилов, В.В.* Математические коллоквиумы [Текст]: в 2 ч. / В.В. Вавилов, П.М. Красников. – М.: Школа им. А.Н. Колмогорова, 2007.

Проблемы подготовки учебной и учебно-вспомогательной литературы

А.К. Алексеева, В.Н. Алексеев

> Заблуждения, заключающие в себе некоторую
> долю правды, самые опасные.
> *Адам Смит*

Отметим, что отсутствие правильно выстроенной стратегии в деле развития образования в России привело к катастрофическим последствиям. В частности, по отношению к математическим и информационным дисциплинам это наиболее заметно. Погнавшись за “признаваемым дипломом” мы получили поколение “не признаваемых специалистов”. Демагогические рассуждения об усилении роли самостоятельной работы студентов в приобретении знаний привело к тому, что фактически уже утрачена российская школа математиков. Поверхностные, формальные представления о математике и математических основах информатики – вот тот "урожай", который обильно пожинаем сейчас из-за повального сокращения часов на фундаментальную подготовку и тлетворного (иначе не скажешь) влияния ЕГЭ.

Не обсуждая более другие негативные проявления "нового подхода к образованию" отметим только, что студентов первых курсов стало практически невозможно учить – поверхностность знаний, нежелание работать и другие малосимпатичные черты – вот тот материал, который формируется сегодняшней системой школьного образования.

По отношению к вузовскому образованию нельзя не отметить пагубное стремление к засилью "наукообразности" в деятельности вузов. Для учебных учреждений, под прикрытием "трескучих лозунгов", подменяют основную задачу – обучение специалистов, на второстепенную (или даже третьестепенную) – занятие профессорско-преподавательского состава якобы "наукой". Взглянув на параметры комплексной проверки вуза, мы со всей отчетливостью ощущаем эту тенденцию. В числе прочих параметров проверки – издание монографий, учебников и учебных пособий. Являясь заложником ситуации, вузы *обязаны* выпускать такого рода продукцию. В силу наличия единого стандарта, в разных вузах переписывают (более или менее талантливо, с большим или меньшим количеством ошибок) один и тот же материал. Возможно, такие пособия хороши для использования внутри вуза, но они получают различные грифы и "рекомендуются для студентов высших учебных учреждений, обучающихся по специальности". Между тем, на многих из них слово "рекомендуется" следовало бы поменять на слово "не рекомендуется". В качестве иллюстрации приведем примеры, причем из достаточно неплохих книг, что дает возможность составить представление об уровне других изданий.

В статьях [1-5], одного из авторов, эта проблема обсуждалась по отношению к различным материалам, включая КИМы централизованного тестирования, издания ФИПИ и т.д. Например, анализируя описание алгоритма работы цикла с параметром, приведенное в [7] (опираясь на работу [1]), обнаруживаем многочисленные ошибки. Укажем несколько из них: не там расположена точка инициализации управляющего параметра цикла стартовым значением, проверяется не то условие завершения вычислений, ложным является утверждение о значении управляющего параметра по завершении цикла и т.д. Все это легко проверить с помощью тестов, приведенных в [1] или проведением дизассемблирования.

Приведем еще две цитаты. Первая взята из учебника [6, с. 169] имеющего рекомендацию УМО по специальностям педагогического образования. Вот она: "*Математическая суть отмеченной выше проблемы связана со следующим фактом: многие дробные рациональные десятичные числа в других системах счисления оказываются иррациональными*" (выделение авторов).

Вторая цитата взята из книги [8, с. 90], имеющей гриф того же УМО. "*Соответственно, рациональное число в исходной системе может после перехода превратиться в иррациональное. Справедливо и обратное утверждение: число иррациональное в исходной системе счисления в иной системе может оказаться рациональным*".

Видимо, авторы не различают понятий "переход к новой позиционной системе счисления" и "изменение масштабной единицы для установления соответствия между числами и их изображениями на числовой прямой".

В первую очередь напомним, что рациональные числа в позиционных системах счисления могут быть представлены в различных формах записи. Мы отметим здесь два важнейших и распространенных способа записи – отношение целых чисел и систематические дроби. В систематических дробях рациональные числа (если исключить возможность использования дробей с периодом, представленным наибольшей цифрой системы) представимы единственным образом в виде конечных дробей, или же бесконечных периодических. Взяв рациональное число, заданное обыкновенной дробью, и осуществляя в p-ичной системе счисления деление (с добавлением нулевых разрядов для получения дробной части, как в десятичной системе), мы получим систематическую p-ичную дробь. А так как по теореме о делении с остатком получается остаток, меньший делителя, то, следовательно, таких остатков конечное число. Поэтому при делении получится либо конечная p-ичная дробь, либо какой-то из остатков повторится, что приведет к "зацикливанию" деления, т.е. бесконечной периодической дроби.

Обратные преобразования конечной p-ичной дроби и/или бесконечной периодической p-ичной дроби к виду обыкновенной дроби ничем не отличаются от соответствующих преобразований в десятичной системе и легко обосновываются.

Правило (*преобразования периодических дробей в обыкновенные дроби*).

Чтобы бесконечную периодическую дробь преобразовать в обыкновенную дробь, достаточно:

в числителе взять число равное разности чисел, первое из которых записано всеми цифрами целой части, предпериода и одного периода, а другое записано цифрами целой части и предпериода;

в знаменателе взять число, записанное таким количеством цифр (p–1), сколько цифр в периоде и таким количеством нулей, сколько цифр в предпериоде.

Вкратце рассмотрим вопрос о преобразовании записей рациональных чисел из одной позиционной системы счисления в другую.

Самый простой способ – использовать представление рационального числа в исходной q-ичной системе счисления в виде отношения целых чисел. Затем эти числа преобразовать в другую, p-ичную систему счисления (по любому правилу), и мы получим запись данного рационального числа в p-ичной системе счисления в виде отношения целых чисел. Теперь абсурдность выше процитированных утверждений становится очевидной.

Отметим, что рациональные числа, представленные в разных системах счисления в виде систематических дробей могут встречаться в различных комбинациях:

- обе дроби конечны, например, $0{,}25=0{,}01_2$;
- обе дроби периодические, например, $0{,}(3)=0{,}(01)_2$;
- в одной системе счисления дробь конечная, в другой периодическая, например, $4{,}2=100{,}(0011)_2$.

К чему может привести, например, равенство $0{,}2=0{,}(0011)_2$ для программиста описано в работе [1].

Рассмотрим пособие [9, с. 97, 138]. Здесь даются определения двойного и тройного интегралов соответственно. Приведем для примера только “определение” двойного интеграла (для тройного оно аналогичное):

Двойным интегралом от функции $z = f(x, y)$ по области (D) называется предел полученной интегральной суммы при неограниченном увеличении числа разбиений области на части и стремлении площадей всех элементарных участков к нулю.

$$\iint\limits_{(D)} f(x, y)ds = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \cdot \Delta s_i.$$

Как видим, в этом определении (и нигде в тексте) нет упоминания о стремлении к нулю максимального диаметра элементов разбиения, без чего даже “хорошие” функции не будут интегрируемы.

В упомянутых выше работах [1-5] приведены другие примеры из разных разделов математики, свидетельствующие о снижении качества издаваемой учебной и учебно-вспомогательной литературы. Причем некоторые из "образчиков" такого творчества нельзя читать без смеха (или слез?). Но позволю себе еще раз упомянуть о том, что вузы *вынуждены* это делать, т.к. хотят жить. Один из авторов данной статьи также планирует работу над аналогичным проектом с заранее не определенным результатом. Считаем, что подобное "давление" на вузы (насаждение наукообразия) – эффективное средство разрушения образования.

Библиографический список

1. *Алексеев, В.Н.* "Загадки" цикла с параметром в системах программирования QBasic и Turbo Pascal [Текст] // Информатика: еженедельная методическая газета для учителей информатики. – 2004. – № 41. – С. 18-24.
2. *Алексеев, В.Н.* О "типовых" заданиях по математике [Текст] // Математика: методическая газета для учителей математики. – 2005. – № 21. – С. 46-48.
3. *Алексеев, В.Н.* Задачи на измерение информации в материалах ЦТ [Текст] // XV Ершовские чтения: межвузовский сборник научно-методических статей. – Ишим: ИГПИ им. П.П. Ершова, 2006. – С. 17-19.
4. *Алексеев, В.Н.* Парадокс Бертрана и задачи студенческих математических олимпиад [Текст] // XVII Ершовские чтения: межвузовский сборник научно-методических статей. – Ишим: ИГПИ им. П.П. Ершова, 2007. – С. 16-20.
5. *Алексеев, В.Н.* О качестве методических материалов для подготовки к ЕГЭ по математике [Текст] // XVIII Ершовские чтения: межвузовский сборник научно-методических статей. – Ишим: ИГПИ им. П.П. Ершова, 2008. – С. 60-61.
6. *Лапчик, М.П.* Методика преподавания информатики [Текст]: учеб. пособие для студ. пед. вузов / М.П. Лапчик, И.Г. Семакин, Е.К. Хеннер; под ред. М.П. Лапчика. – М.: Издательский центр "Академия", 2001. – 624 с.
7. *Немнюгин, С.А.* Turbo Pascal [Текст] / С.А. Немнюгин. – СПб.: Питер, 2000.
8. *Стариченко, Б.Е.* Теоретические основы информатики [Текст]: учебное пособие для вузов / Б.Е. Стариченко. – 2-е изд. перераб. и доп. – М.: Горячая линия – Телеком, 2003. – 312 с.
9. *Терехина, Л.И.* Высшая математика [Текст]: в 4 ч. Ч 3. Неопределенный интеграл. Определенный интеграл. Кратные, криволинейные и

поверхностные интегралы. Векторное поле: учеб. пособие / Л.И. Терехина, И.И. Фикс. – Томск: Изд-во Томского государственного университета, 2002. – 256 с.

Спецкурсы по геометрии как средство углубленной подготовки будущего учителя математики

Т.В. Капустина

Широкое распространение специализированных школ с углубленным изучением математики, профильных математических классов требует соответствующей подготовки учителя математики, которая должна характеризоваться фундаментальностью, многоплановостью и хорошей методической основой. Целесообразно формировать и развивать у студентов способности, которые позволяли бы им в последующем быстро адаптироваться как к разным уровням и объему математического материала, так и к индивидуальным особенностям обучаемых. Задача педагогического вуза должна заключаться в планомерном и как можно более полном развитии математических, методических и психолого-педагогических знаний и умений студентов.

Сокращение объема часов, предусмотренных учебным планом на такую фундаментальную математическую дисциплину, как геометрия, которое произошло в последние годы, привело к необходимости искать новые пути углубленной подготовки будущих учителей математики. Одним из этих путей является перестройка методической системы преподавания геометрии, заключающаяся в интенсификации процесса обучения посредством внедрения информационных технологий. Модернизация технологии обучения должна быть распространена и на спецкурсы по геометрии, которые в настоящее время могут рассматриваться как одно из средств углубления фундаментальной математической и методической подготовки студентов.

Применение информационных технологий в преподавании спецкурсов по геометрии не только позволяет эффективно использовать геометрическое моделирование и компьютерную графику в режиме дифференцированного обучения, но и создает у студентов динамический стереотип и потребность в подобном способе изучения математики. В будущем они смогут легче и естественнее использовать навыки применения информационных технологий в своей работе.

Покажем на примере спецкурса “Теория поверхностей”, сколь эффективно могут применяться информационные технологии на основе компьютерной системы *Mathematica* в перечисленных выше целях.

Если чисто теоретический материал спецкурса не допускает никакого другого способа изложения, кроме традиционного (за исключением иллюстрирующих его примеров), то практический материал спецсеминара не может быть эффективно и полно пройден без применения информационных технологий. Объясняется это громоздкостью символьных вычислений даже в самых простых случаях и совершенной невозможностью визуализировать трехмерные геометрические образы без компьютера. И в целях решения этих проблем *Mathematica* незаменима.

Первый пример – практическое задание на визуализацию развертывающейся поверхности, образованной касательными к винтовой линии $x = 2\cos t, y = 2\sin t, z = t$. Если составить параметрические уравнения этой поверхности несложно и "вручную", то построить эту поверхность без компьютера невозможно. После визуализации ясно видно, как выглядит ребро возврата развертывающейся поверхности и что оно состоит из особых точек поверхности.[1]

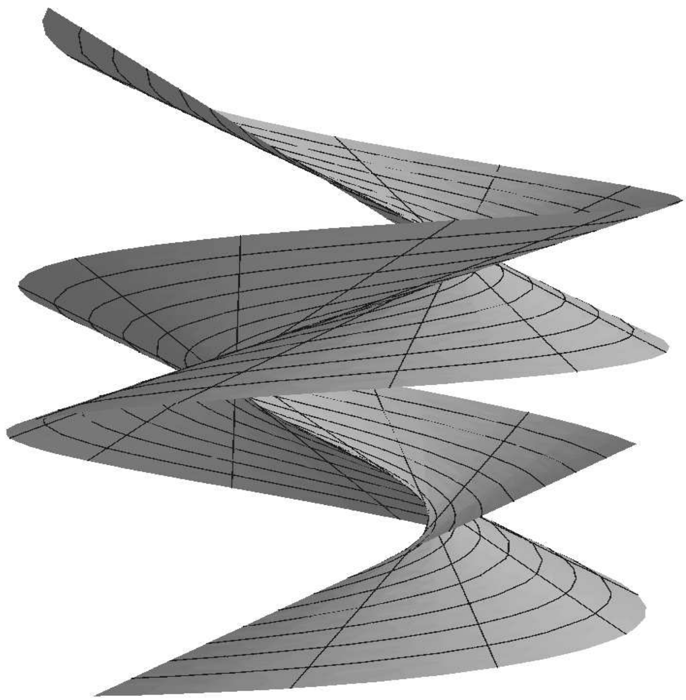


Рис. 1. Развертывающаяся поверхность, образованная касательными к пространственной кривой

[1] В примерах входные ячейки напечатаны полужирным шрифтом, выходные – светлым; так это выглядит в документах системы *Mathematica*.

D[{2 Cos[t], 2 Sin[t], t}, t]
{−2 Sin[t], 2 Cos[t], 1}
Нашли направляющий вектор касательной к винтовой линии.
rp1 = {2 Cos[t], 2 Sin[t], t} + v {−2 Sin[t], 2 Cos[t], 1}
{2 Cos[t] −2*v* Sin[*t*], 2 v Cos[t] + 2 Sin[*t*], $t + v$}
Составили параметрические уравнения развертывающейся поверхности, образованной касательными к винтовой линии.
ParametricPlot3D[{2 Cos[t] −2 v Sin[t], 2 v Cos[t] + 2 Sin[t],
t + v}, {t, 0, 3 π}, {v, −3, 3}, Boxed -> False, Axes -> False]
Визуализировали эту поверхность (см. рис. 1).

Второй пример – практическое задание на составление параметрических уравнений и визуализацию полярной поверхности для винтовой линии. Полярная поверхность данной пространственной кривой – это огибающая семейства ее нормальных плоскостей. Даже для такой простой кривой, как винтовая линия, составление параметрических уравнений полярной поверхности без помощи компьютера трудоемко. Сэкономить учебное время здесь необходимо, и делается это с помощью системы *Mathematica*.
r[u_] := {a Cos[u], a Sin[u], b u}
Ввели параметрические уравнения винтовой линии в общем виде (с параметрами a и b).

Касательный вектор кривой (производная радиуса-вектора по параметру кривой):
tangr[u_] := D[r[u], u]

Левая часть уравнения нормальной плоскости кривой в произвольной точке (или однопараметрического семейства нормальных плоскостей):
eqn1[u_] := tangr[u]·({x, y, z} − r[u]) // Expand
eqn1[u] == 0
−b^2 u + b z + a y Cos[u] −a x Sin[u] == 0

Дифференцирование по параметру кривой:
eqn2[u_] := D[eqn1[u], u] // Expand
eqn2[u] == 0
−b^2 −a x Cos[u] −a y Sin[u] == 0

Составление параметрических уравнений полярной поверхности в общем виде:
Solve[{eqn1[u] == 0, eqn2[u] == 0}, {x, y}] // Simplify
{{x -> −(b (b Cos[u] + (b u − z) Sin[u]))/a, y -> (b ((b u − z) Cos[u] - b Sin[u]))/a}}

% /. z -> v
{{x -> −(b (b Cos[u] + (b u − v) Sin[u]))/a, y -> (b ((b u − v) Cos[u] − b Sin[u]))/a}}
polar[u_, v_] := {−(b (b Cos[u] + (b u − v) Sin[u]))/a, (b ((b u − v) Cos[u] − b Sin[u]))/a, v}

Подстановка значений параметров a и b:

polar[u, v] /. {a -> 2, b -> 2}
{-2 Cos[u] − (2 u − v) Sin[u], (2 u − v) Cos[u] − 2 Sin[u], v}

Визуализация полярной поверхности

gr1 = ParametricPlot3D[{−2 Cos[u] − (2 u − v) Sin[u],
 (2 u − v) Cos[u] − 2 Sin[u], v}, {u, 0, 3 π}, {v, −8, 20},
 Boxed -> False, Axes -> False]

и винтовой линии

gr2 = ParametricPlot3D[{2 Cos[u], 2 Sin[u], 2 u}, {u, 0, 3 π}, PlotStyle -> {Red, Thickness[0.01]}]

Совмещение изображений:

Show[gr1,gr2]

В результате получается совмещенное изображение винтовой линии и ее полярной поверхности (рис. 2):

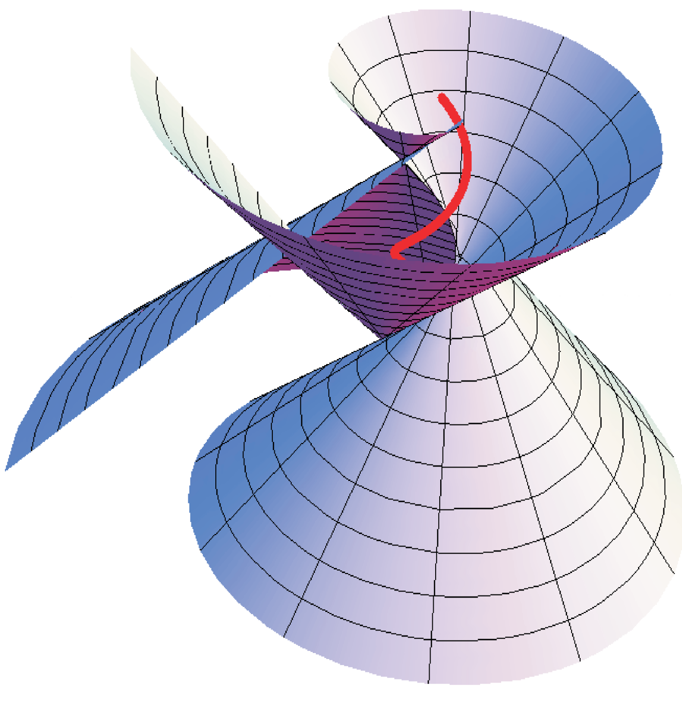


Рис. 2. Полярная поверхность винтовой линии

Mathematica 6.0 позволяет рассмотреть пространственное изображение в разных ракурсах путем использования манипулятора “мышь” (рис. 3):

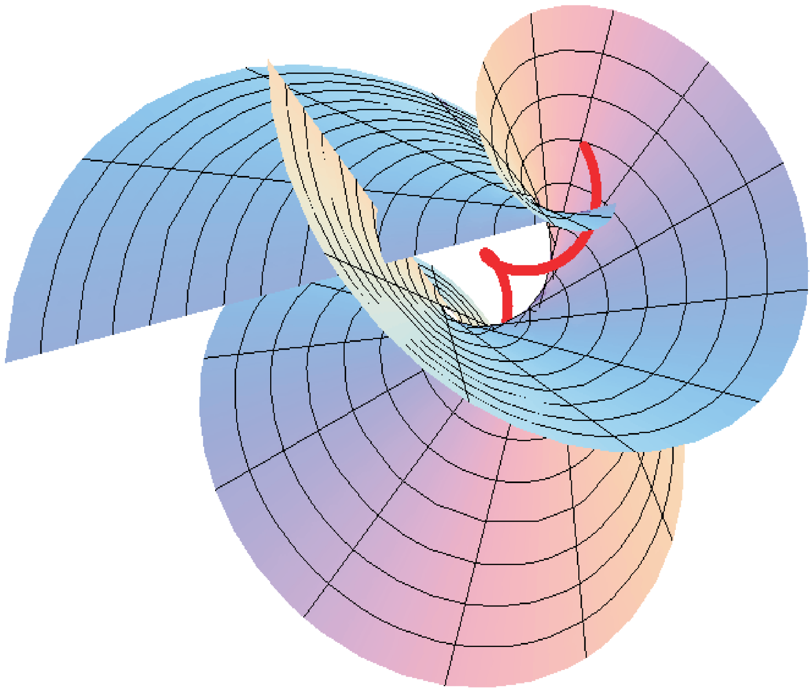


Рис. 3. Повернутая полярная поверхность винтовой линии

Весьма эффективным является выполнение студентами индивидуальных заданий по решению конкретных геометрических задач, иллюстрирующих теоретический материал и предусматривающих символьные вычисления и визуализацию в среде *Mathematica*. Организационное оформление такой работы хотя и сопряжено с определенными трудностями, все же в современных условиях вполне достижимо. Спецсеминары должны проходить в компьютерных классах, а специалист-математик, ведущий их, обязан сам безупречно владеть информационными технологиями изучения математики и обучения математике.

Библиографический список

1. *Воробьев, Е.М.* Введение в систему символьных, графических и численных вычислений “Математика-5” / Е.М. Воробьев. – М.: Диалог-МИФИ, 2005. – 368 с.
2. *Капустина, Т.В.* Компьютерная система Mathematica 3.0 для пользователей / Т.В. Капустина. – М.: СОЛОН-Р, 1999. – 240 с.

Формирование профессиональной самостоятельности студентов – будущих учителей математики

Е.С. Петрова

Профессиональная самостоятельность выражается: в умении самостоятельно ориентироваться в производственной обстановке и, когда нужно, принимать правильное решение; в способности выбирать самостоятельно наиболее эффективные в данный момент способы выполнения работы; в умении самостоятельно планировать, корректировать и контролировать выполняемую работу [2, с. 263].

Профессиональную самостоятельность следует формировать с первых дней пребывания студента в педвузе, в процессе обучения любым дисциплинам и воспитательной работы в любой форме. Но в наибольшей степени этому следует уделять внимание на занятиях по методическим дисциплинам. В последние годы, говоря об организации самостоятельных работ для студентов, методисты-математики на конференциях самых различных уровней от внутривузовских до международных, обычно дают подробную характеристику организации специальных самостоятельных работ как на занятиях, так и во внеаудиторных формах обучения, способствующих самореализации творческих способностей студентов. Немало новшеств внесено в линии: самостоятельная работа – креативность, самостоятельная работа – коммуникативность и т.д. [3-7]. Упоминают о проектной деятельности студентов как об одном из активных видов обучения при реализации компетентностно-ориентированного подхода [3, с. 75-77; 7, с. 39]. Разрабатывается технология подготовки будущих учителей математики к работе с одаренными детьми [5, с. 78]. Изучается исследовательская деятельность будущих учителей математики на занятиях по методическим дисциплинам, организация самостоятельной групповой работы студентов, имеющих повышенный интеллектуальный потенциал [4, с. 95]. Составляются дифференцированные задания для самостоятельной работы студентов, ориентированные на их творческую работу [6, с. 97-98]. Словом, чаще всего речь идет об организации самостоятельных работ, порождающих методическое творчество студентов.

Спустимся, однако, с "креативных высот" в будничную практическую работу студентов. Театр, как известно, начинается с вешалки. Самостоятельная работа студентов начинается с обычной рутинной работы: составления планов-конспектов уроков, проведения анализа уроков, сравнительного анализа школьных альтернативных учебников по разным параметрам. Формирование профессиональной самостоятельности начинается именно здесь, а не на специально организованных преподавателем учебных занятиях, именуемых “самостоятельная работа по теории и методике обучения математике”. И если студент не постигнет названных азов, – он не сможет правильно понять основные направления своей возможной творческой деятельности по методическим дисциплинам.

У преподавателя методических дисциплин, ведущего практические занятия, на этапе составления студентами планов-конспектов возникают следующие трудности. Во-первых, студенты не понимают необходимость формирования у каждого названных профессиональных учебных умений, мотивируя свое нежелание работать в указанном направлении тем, что давно существуют планы-конспекты уроков на любую тему, которые предлагаются соответствующими сборниками и сайтами, публикуются на страницах газеты “Математика” и журнала “Математика в школе” в самых разнообразных вариантах. Перед преподавателем встает проблема: как избежать простого дословного списывания с соответствующих информационных источников? Во-вторых, в целях обеспечения личностно-ориентированного подхода к обучению каждого студента необходима индивидуальная работа с каждым по консультированию и осуществлению проверки выполнения заданий. Как это сочетается с необходимостью экономии времени преподавателем?

Первоначально план-конспект урока математики на конкретную тему составляется по образцу. Преподаватель дает соответствующие методические указания. Затем вносятся коррективы, дополнения, возникают вопросы по усовершенствованию этих учебных материалов, составленных студентами. Например:

• что делать, если часть школьников класса уже решила задачу, предложенную учителем, часть – не приступала к решению, а часть – решает самостоятельно, но ждет результатов, полученных на доске, одобренных или раскритикованных учителем или товарищами по классу;

• нужны ли дополнительные задания сильным по математике учащимся, какие, на уроке или дома, по новому материалу, в процессе подготовительной работы к изучению нового материала;

• в какой форме проводить закрепление изученного материала, можно ли ограничиться только вопросами, касающимися формулировок определений вновь вводимых математических понятий?

С попыток получить ответы на возможные вопросы начинается первая ступенька профессиональной самостоятельности студентов. При составлении студентами (на занятии) их первых планов-конспектов желательно обсуждение каждого этапа урока. Это не только способствует широкому общению студентов группы, но и дает возможность каждому студенту активизировать свою познавательную деятельность, почувствовать себя личностью, внести некоторый вклад в общее дело, формирует гибкость мышления каждого обучаемого. Из всех возможных типов уроков, планы-конспекты которых составляются первый раз, выбирается комбинированный урок, чтобы охватить разнообразие форм учебной работы на уроке.

При изучении технологий обучения математике каждому студенту дается индивидуальное задание: составить план-конспект урока на избранную им конкретную тему с использованием заданной технологии (например: урок проблемного характера; использование эвристических методов поиска решению задач; составление системы многокомпонентных упражнений обучающего характера).

После изучения конкретной темы, отражающей одну из содержательных линий школьного курса математики, сфера работы над составлением плана-конспекта урока существенно расширяется: полезна разработка плана-конспекта **обобщающего** урока. Здесь важно, чтобы студент выделил следующие важные моменты:

• реализацию идеи мотивации изучения школьниками данной темы;

• работу над формулировками определений вновь вводимых понятий;

• выделение главного и второстепенного в содержании темы;

• выявление уровня логической строгости доказательств, вывода формул, формулировок правил;

• Опорные задачи и задачи, решение которых существенно расширяет содержание теоретического материала;

• формы контроля знаний учащихся по данной теме, обеспечивающие качественную проверку знаний и не отнимающего лишнего времени учителя.

При работе по подобному плану, предложенному преподавателем, с одной стороны, – каждый студент имеет возможность проявить свою познавательную активность, а с другой стороны, – исключаются случаи формального копирования сайтов Интернета и, следовательно, – прямого плагиата.

Профессиональное умение: **дать анализ урока математики** формируется следующим образом.

Первый час практического занятия отводится на информацию преподавателя о сущности и значении анализа урока математики. Всем студентам предлагаются одинаковые распечатки плана-конспекта урока математики. Устанавливается, в каких случаях анализ урока целесообразно проводить. В дальнейшем студенту это будет необходимо для самоанализа урока математики, проводимого им в период педагогической практики. Подобно этому, шахматист после каждой игры анализирует шахматную партию, чтобы учесть сделанные ошибки во избежание их повторения, и, наоборот, отметить положительные стороны игры: своей и соперника. Именно с этого начинается творческое саморазвитие личности учителя, что В.И. Андреев определяет как "степень осознания и самопознания своих сильных и слабых сторон профессиональных качеств" [1, с. 87].

Далее студентам раздают планы-конспекты уроков математики, разработанные учителями, и каждому в порядке индивидуальной работы предлагается дать анализ урока в письменном виде. При этом предлагается выделить анализ: *целевой, содержательной, методической и процессуальной* модели урока. Данная работа предлагается студентам для домашнего выполнения с целью коллективного обсуждения выполнения задания на следующем занятии. Организация исследования моделей урока осуществляется по следующей схеме:

• фронтальная работа студентов по составлению предписания к самоанализу урока математики;

• осуществление самоанализа плана-конспекта урока, разработанного ранее самим студентом;

• взаимоанализ уроков математики (на основе их планов-конспектов);

• сопоставление самоанализа урока математики и анализа этого урока, данного товарищем по группе.

Учебная деятельность студентов, организованная преподавателем по данной схеме, позволяет студенту глубоко продумать свои учебные действия и обеспечивает исключение плагиата. В дальнейшем в целях закрепления умения давать анализ урока студентам предлагается на занятиях, не посвященным данной теме, делать фрагменты анализа урока по конкретным темам школьного курса математики в процессе изучения частной методики.

Следующий этап профессиональной подготовки будущих учителей математики – педагогическая практика. Здесь студенты обязаны составлять планы-конспекты уроков, которые им предстоит провести, и давать анализ как этих уроков, так и уроков своих товарищей. И здесь естественно появление новых проблем. Ситуация, возникающая при подготовке и проведении урока, отлична от той, которой соответствовали составленные им "абстрактные" планы-конспекты. Например, был запланирован урок комбинированного типа. Ученики слабо отвечали по теоретическому материалу домашней работы, плохо решили домашние задачи. Таким образом, было отнято время, отведенное практикантом на объяснение нового материала, и учащиеся не усвоили его. Драгоценное время урока может быть отнято и иными способами. Например, учащиеся "нарочно или нечаянно" задавали молодому педагогу много лишних, ненужных вопросов или плохо вели себя на уроке в связи с событиями в классе или школе, не имеющему к данному уроку никакого отношения. Что делать? Здесь возникает новая проблема: гибкости педагогических суждений, умения быстро ориентироваться в изменяющейся обстановке.

Вторая, часто возникающая проблема: учитель навязывает свою канву составления плана-конспекта урока, не считаясь с мнением практиканта, даже если им "урок разработан лучше, чем учителем", по утверждению студента. Здесь возникает педагогическая проблема толерантности, если угодно, – "дипломатии", и необходимо решение вопроса: как все-таки реализовать "эту замечательную разработку урока", задуманную практикантом, не конфликтуя с учителем, не отнимая личного времени учителя, учеников и своего собственного?

Формирование *профессиональной самостоятельности студентов* осуществляется путем правильной организации их работы с учебной и методической литературой. Первым шагом названной деятельности студентов является их работа с альтернативными школьными учебниками. Прежде, чем учить будущих учителей методике обучения математике, нужно их ознакомить с имеющейся методической базой. Студенты должны быть знакомы с содержанием, структурой, организацией учебного материала и оформлением каждого из альтернативных учебников, наиболее часто используемых в школах Российской Федерации.

Студентам сообщается план анализа учебника:

• в соответствии с какой программой учебник используется, в каких классах;

• обеспечение в учебнике мотивационной стороны обучения математике;

• уровень логической строгости изложения материала в теоретической части учебника;

• уровень доступности содержания учебника;

• последовательность и систематичность изложения материала в учебнике;

• особенности практической части учебника (система упражнений);

• возможность осуществлять обучение через задачи;

- обеспечение преемственности в обучении математике;
- возможность организации уровневой дифференциации и индивидуализации обучения математике;
- наличие исторического материала;
- наличие элементов занимательности;
- возможности реализации межпредметных связей;
- особенности оформления учебника;
- достоинства и недостатки учебника с позиции студента (с аргументацией).

Далее осуществляется сравнительный анализ школьных учебников по вышеназванным параметрам.

Опыт работы по изучению студентами альтернативных школьных учебников свидетельствует о том, что названного анализа по программе общей методики обучения математике недостаточно. Необходима аналогичная работа по отдельным вышеназванным вопросам при рассмотрении методики изучения основных содержательных линий в процессе обучения частной методике. Подобный концентризм обеспечивает прочность и осознанность обучения, решение проблем профессиональной самостоятельности будущих учителей математики.

Знакомство с учебно-методической литературой студентов на занятиях по методическим дисциплинам необходимо, но встречает на своем пути немалые трудности. Первая из них состоит в том, что следует определить, на каком этапе и как осуществить это знакомство. Положение дел усложняется тем, что с 1993 года библиотеки вузов перестают в обязательном порядке снабжаться методической литературой. Поэтому многие ценные научно-методические работы могут пройти мимо внимания методистов-математиков – преподавателей педагогических вузов, а, следовательно, и студентов – будущих учителей математики. Чтобы это происходило, по возможности, реже, – желательно вменить в обязанность студентам как одно из условий успешной отчетности по методическим дисциплинам, к каждому практическому занятию готовить список не менее пяти информационных источников по теме занятия, не названных преподавателям. Краткая характеристика этих информационных источников записывается студентом в специальную тетрадь по типу “читательского дневника” школьника, которой будущие учителя пополнят свой “портфолио”. Студентам сообщается, что материал частично может быть найден на сайтах “Интернета” и в профессиональной периодической печати (журналы “Математика в школе”, “Математика для школьников”, “Педагогика”, газета “Математика” и др.).

Следует отметить, что при написании курсовых и дипломных работ студенты часто обращаются к литературе, изданной 15 и более лет тому назад. Необходимо обучать студентов критическому подходу к литературным источникам, многие из которых уже давно морально устарели (не соответствуют ныне действующим школьным программам; написаны в соответствии с определенными политическими установками того времени и т. д.) Использование пособий, изданных после 1990 года, несет в себе другую опасность: в эти годы в большом количестве, совершенно бесконтрольно издаются безграмотные методические рекомендации, справочники, "шпаргалки по математике", задачники и решебники с неверными или нерациональными решениями задач, которыми нельзя пользоваться. Поэтому, начиная с работы над анализом альтернативных учебников, студентов необходимо обучать критическому подходу при знакомстве с каждым информационным источником.

С трудами "классиков методики обучения математике" (Д. Пойа, Г. Фройденталя, С.И. Шохор-Троцкого и др.) преподаватель знакомит фрагментарно студентов на лекциях и практических занятиях.

Приведенные примеры показывают некоторые пути формирования профессиональной самостоятельности будущих учителей математики в условиях будничной работы на практических занятиях по теории и методике обучения математике. Так часто бывает, что мы ищем инновации в заоблачных высях творчества, а они с нами рядом в нашей повседневной деятельности. Но для отыскания этих путей требуются совместные активные исследования педагогов, психологов, методистов.

Библиографический список

1. *Андреев, В.И.* Педагогика [Текст]: учебный курс для творческого саморазвития / В.И. Андреев. – 2-е изд. – Казань: Центр инновационных технологий, 2000.
2. *Вишнякова, С.М.* Профессиональное образование [Текст]: словарь ключевых понятий, термины, актуальная лексика / С.М. Вишнякова. – М.: НМЦ СПО, 1999.
3. Гуманитаризация среднего и высшего математического образования: состояние, перспективы (методическая подготовка учителя математики в педвузе в условиях фундаментализации образования) [Текст] // под ред. Г.И. Саранцева. – Материалы всероссийской научной конференции. – Саранск, 2005. – Саранск, 2005.
4. Новые средства и технологии обучения математике в школе и вузе [Текст] // Материалы XXVI всероссийского семинара преподавателей математики университетов и педагогических вузов. – М.-Самара: МГПУ, Самарский филиал МГПУ, 2007.

5. Проблемы многоуровневой подготовки учителя математики для современной школы [Текст] // Материалы XXVII всероссийского семинара преподавателей математики университетов и педагогических вузов, посвященная 70-летию со дня рождения доктора педагогических наук профессора Игоря Дмитриевича Пехлецкого. – Пермь: Изд-во Перм. гос. пед. ун-та, 2008.
6. Проблемы теории и практики обучения математике [Текст] // под ред. В.В. Орлова. – Сборник научных работ международной научной конференции "LX Герценовские чтения" // – СПб.: Изд-во РГПУ им. А.И. Герцена, 2007.
7. Проблемы теории и практики обучения математике [Текст] // под ред. В.В. Орлова. – Сборник научных работ международной научной конференции "62 Герценовские чтения". – СПб.: Изд-во РГПУ им. А.И. Герцена, 2009.

Опыт развития исследовательской математической компетентности учащихся в системе "школа-вуз"

Л.В. Форкунова

Понятие "исследовательская компетентность" определялось в диссертационных исследованиях С.Н. Скарбич [1] и А.А. Ушакова [2]; в статьях преподавателей Малой инженерной академии Государственного университета цветных металлов и золота г. Красноярска С.И. Осиповой [3] и Е.В. Феськовой [4]. Все эти авторы, несмотря на небольшие различия в определениях, понимают *исследовательскую компетентность (ИК)* как интегральное качество личности, определяющее готовность и способность учащегося к осуществлению исследовательской (учебно-исследовательской) деятельности.

Формирование этого интегративного качества личности происходит, по мнению специалистов в области теории и методики обучения математике, в условиях *включения учащихся в учебно-исследовательскую деятельность (УИД)* и *вовлечения их в научно-исследовательскую работу (НИР)*. Образовательные функции УИД учащихся и методические условия их реализации раскрыты в научно-методических работах достаточно полно.

1. Выделены и описаны (Н.А. Меньшикова, М.В. Таранова, Л.Н. Тимофеева, А.В. Ястребов и др.) виды исследовательских задач, использование которых при обучении математике приводит к формированию у учащихся таких исследовательских умений как производить наблюдения математических объектов и сравнивать результаты наблюдений; выполнять анализ наблюдаемых фактов и синтезировать на основе наблюдений и анализа новые умозаключения; проводить математический

эксперимент (выполнять вычисления, построения, измерения, моделировать объекты); проводить классификацию объектов по выбранному основанию; проводить дедуктивные и индуктивные рассуждения; осуществлять доказательство; обобщать полученные факты; определять область применения полученных фактов и др.

2. Доказано (С.Н. Скарбич), что использование исследовательского метода обучения при включении учащихся в деятельность решения исследовательских задач, позволяет формировать целостные компоненты ИК: мотивационный, когнитивный, личностный и деятельностный (организационный, операциональный, рефлексивный, сотрудничества).

В последнее время учителя и специалисты в области предметных методик все больше обращают внимание на образовательный потенциал *НИР*, а также на методические условия его реализации.

1. Доктор педагогических наук, эксперт секции "Математика" Российской конференции "Открытие" (г. Ярославль), А.В. Ястребов [5] считает, что в процессе проведения школьником исследовательской работы, с последующим представлением ее на научно-исследовательской конференции, возможно формирование практически всех ключевых компетенций (по А.В. Хуторскому). Этот образовательный эффект достигается за счет выполнения школьниками умственных действий, типичных для профессионального математика: формулировка проблемы, составление программы решения и ее реализация, вывод важных следствий из полученного результата [5]. Для того чтобы научно-исследовательская работа была доступна и интересна учащимся "научная математическая проблема, решаемая школьником, должна иметь своим источником либо материал школьной программы, либо дополнительный материал такой же сложности, что и школьная программа" [5, с. 72].

К сходному выводу приходит в своем докторском диссертационном исследовании и Н.И. Мерлина [6], ныне доктор педагогических наук, профессор ЧГУ им. И.Н. Ульянова. По ее мнению тематика НИР может быть связана с возможностями учеников, интересами научного руководителя, потребностями учебного процесса. Темами НИР школьников могут служить: конструирование новых задач методом их модификации и обобщения известных теорем и формул из школьного учебника математики, вхождение в начальные главы высшей математики, попытки построения теории малоразработанных классов задач и т.д. Исходя из возрастных особенностей школьников, работа над той или иной темой должна заканчиваться "осязательным результатом" [6, с. 130].

Сегодня ученые склонны рассматривать УИД и НИР как отдельные этапы подготовки учащихся к исследовательской деятельности в сфере будущей профессиональной деятельности. Например, Т.В. Авгусманова в своем диссертационном исследовании пишет: "...учебно-исследовательская и научно-исследовательская деятельность учащихся взаимодополняют друг друга. Если учебно-исследовательская деятельность дает возможность учащимся приобщиться к научным исследованиям, то научно-исследовательская, опирающаяся на реальные факты деятельности в разных научных областях, позволяет сформировать необходимые качества активного ученика-исследователя" [7, с. 15].

Проведенный нами анализ опыта работы учителей математики школ г. Архангельска и Архангельской области подтвердил правильность этих выводов. Включение учащихся на уроках математики в УИД чаще всего используется учителями для отбора школьников, наиболее склонных к исследовательской деятельности и их вывода в исследовательскую позицию по отношению к изучаемому материалу. Формирование ИК учащихся они предпочитают осуществлять в рамках их целенаправленной подготовки к написанию научно-исследовательских работ. Например, В.В. Паршева, учитель математики СОШ № 24 г. Северодвинска считает, что "темы исследовательской работы часто находятся на уроке, если на нем правильно сформулировать проблему" [8, с. 22] (см. табл. 1).

Таблица 1

Класс	**Урок-исследование**	**Тема исследовательской работы**
6-8	Правильные многоугольники. Теорема Пифагора. Пентаграмма глазами математика.	"Всегда ли можно плоскость уложить правильными многоугольниками?", "Пифагор. Легендарность имени", "Пентаграмма глазами математика", "Пентаграмма и золотое сечение", "Пентаграмма, как воплощение отличия живого от неживого", "Золотое сечение в архитектуре", "Золотое сечение в искусстве", "Золотое сечение в живой природе".
10-11	Касательная к кривым второго порядка (параболе и гиперболе). Бином Ньютона и треугольник Паскаля. Свойства треугольника Паскаля и их применение.	"Касательные к кривым второго порядка", "Графики функций второго порядка и вписанные в них треугольники", "Вокруг треугольника Паскаля".

Теоретические основы использования образовательного потенциала НИР учащихся для формирования их исследовательской математической компетентности (т.е. ИК в области математики и ее приложений) пока разработаны недостаточно. Мы поставили перед собой задачу разработки методики формирования исследовательской математической компетентности в условиях НИР школьников в области приложений математики.

В рамках нашего исследования под НИР учащегося мы понимаем такую разновидность исследовательской деятельности учащегося, главную ценность которой составляет результат исследования, в силу его научной новизны, теоретической и/или практической значимости. Мы считаем, что специфика вклада НИР в развитие исследовательской компетентности состоит в интеграции ее отдельных компонент, сформированных в рамках УИД, т.е. в формировании готовности осуществлять исследовательскую деятельность с определенной степенью самостоятельности учащихся. Эти представления позволили нам выделить в процессе формирования исследовательской математической компетентности учащихся этапы, характеризующиеся различной степенью самостоятельности учащихся в НИР в области приложений математики (табл. 2).

Таблица 2

Этапы формирования	**Степень самостоятельности учащегося в НИР**	**Сходство с НИР ученых**
1. Формирования исследовательских процедур	Учащийся выполняет исследовательские действия практического характера: сбор данных, доказывающих существование практической проблемы (проведение опросов, наблюдений и др.), сбор по заданию руководителя литературных источников данных о математических и внематематических методах и средствах решения сходных проблем, регистрация собранных данных по указанной схеме (заполнение баз данных), проведение вычислений, измерений по заданному плану, и т.п.	Выполнение функций лаборанта-исследователя в прикладном исследовании.

2. Формирования интеллектуальных исследовательских умений	Учащийся выполняет информационные преобразования: изучение математической и другой научной литературы по проблеме исследования с целью ознакомления с теоретическими основами ее решения, уточнение проблемы исследования в научных терминах, построение ее математической модели, обоснованный выбор методов исследования этой модели, интерпретация результатов применения различных методов, получение индуктивных и дедуктивных выводов на основе систем данных в соответствии с поставленной задачей исследования или высказанной гипотезой и т.п.	Выполнение функций младшего научного сотрудника в прикладном исследовании.
3. Формирования готовности к саморегуляции исследовательской деятельности	Учащийся принимает на себя функции не только исполнителя, но координатора работы участников исследовательской группы, включающей в себя специалистов в различных областях научной и практической деятельности (или ответственных за эти области), а также людей заинтересованных в постановке и решении практической проблемы. Он планирует совместную работу, осуществляет контроль за ходом и результатами ее выполнения, корректирует планы и программы проведения исследовательских работ (в частности, принимает обоснованное решение о необходимости уточнения математической модели, изменения методов ее обработки и т.д.).	Выполнение функций старшего научного сотрудника в прикладном исследовании.
4. Формирования готовности к самоопределению и самооценке в исследовании	Учащийся самостоятельно ставит перед собой практические проблемы и разрешает их средствами математики, оценивает личностную и общественную значимость решения обнаруженных проблем, проводит критический анализ собственных возможностей в их решении.	Готовность к выполнению функций ведущего научного сотрудника в прикладном исследовании.

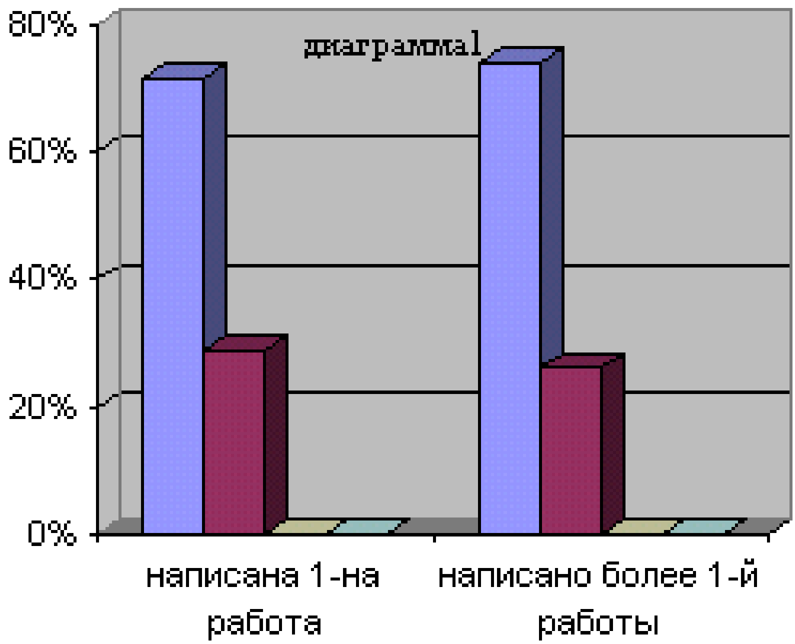
Описанная нами динамика развития ИК школьников согласуется с описанием требований Госстандартов II поколения [9] к уровням развития ИК по ступеням обучения. Совмещая эти требования с представленным выше описанием этапов развития ИК мы пришли к выводу, что переход к новому этапу формирования ИК обеспечивается появлением у учащихся не характерных для данного этапа элементов исследовательской компетенции (табл. 3).

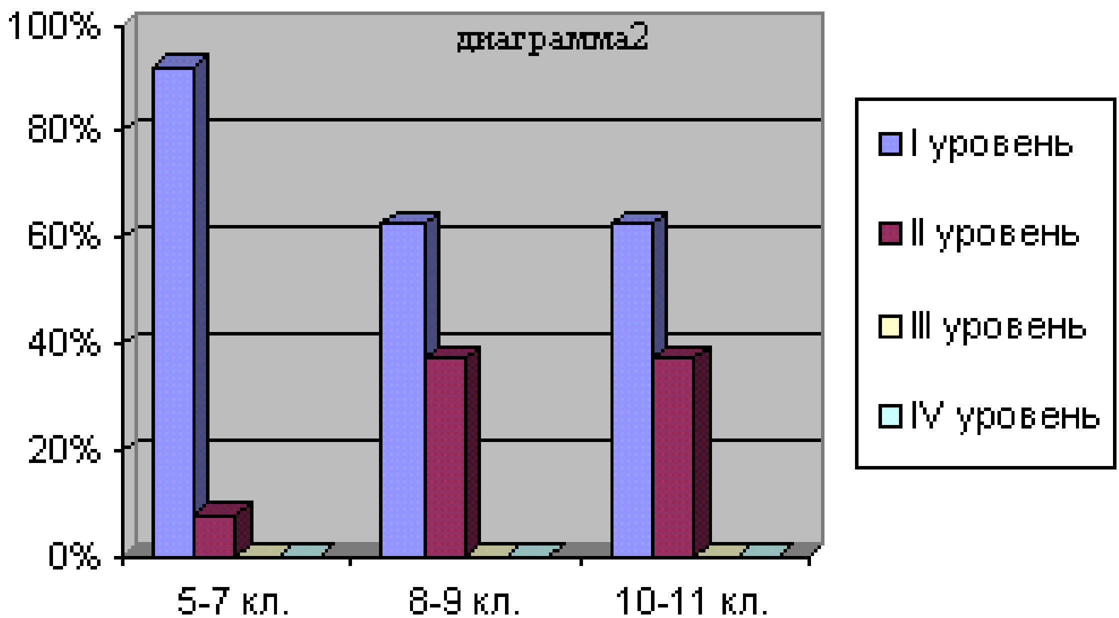
Таблица 3

Название уровня	**Характеристика уровня**		
	Новообразования в составе ИК	**Расширение области приложения**	**Новообразования в структуре ИК**
1. Формирования исследовательских процедур	Готовность самостоятельно осуществлять практические исследовательские действия по заданному плану на основе представления об особенностях исследовательского отношения к действительности, знаний о видах исследовательских действий.	Использование простейших измерительных и конструктивных приборов, работа с библиотечными каталогами, поисковыми системами Интернет.	Структура ИК представлена функциональными связями ранее сформированных элементов ключевых компетенций.
2. Формирования интеллектуальных исследовательских умений	Готовность самостоятельно применять общенаучные методы (классификация, сравнение, ранжирование, дедуктивные и индуктивные выводы и др.), а также реализовывать основные шаги метода математического моделирования на основе знаний об основных теоретических методах и этапах исследования.	Решение поставленных исследовательских задач, связанных с анализом и систематизацией научных фактов, частных мнений; выдвижением гипотез; с описанием объекта исследования в научных терминах; использованием математической модели для получения новых знаний об объекте исследования, для обоснования гипотез.	Структура ИК представлена функциональным комплексом практических и интеллектуальных исполнительских действий.

3. Готовности к саморегуляции исследовательской деятельности	Готовность самостоятельно осуществлять планирование и организацию исследования, ставить исследовательские задачи, оценивать результаты их исследования, осуществлять выбор методов, принимать решения о корректировке (в том числе принимать решения о выборе математического аппарата решения исследовательской задачи, введении допущений, необходимости уточнения или упрощения модели) на основе знаний о методологических основах исследовательской деятельности, признаков целесообразности использования математических средств.	Организация исследовательской деятельности, направленной на решение указанных научных проблем.	В структуру ИК включается функциональная система интеллектуальной саморегуляции деятельности.
4. Готовности к самоопределению и самооценке в исследовании	Готовность самостоятельно определять направление и выделять проблему прикладного математического исследования, обосновывать актуальность темы исследования, оценивать новизну, теоретическую и практическую значимость результатов на основе представлений о проблемной области научного знания; знаний критериев оценки результатов научного исследования, требований к их представлению; знаний о роли и месте математики в системе научного знания.	Ориентация в проблемной области, связанной с учебной деятельностью и общественной практикой людей, входящих в ближайшее окружение.	В структуру ИК включается функциональная система целеполагания деятельности и личностной ее регуляции.

Проведенный нами констатирующий эксперимент (диагр. 1, диагр. 2) показал, что в отсутствие целенаправленной работы учителя по развитию ИК появление новообразований, характерных для 3 и 4 уровней практически не происходит. Причем на уровень развития ИК учащихся практически не влияет количество подготовленных и защищенных им исследовательских работ. Возрастные изменения учащихся с 8 по 11 класс также не оказывают существенного влияния на развитие ИК.





В ходе формирующего эксперимента нами было доказано, что главными условиями появления у учащихся, представленных в таблице новообразований являются: 1) коллективно-распределенный характер НИР (что обеспечивает передачу опыта от более компетентных членов исследовательской группы менее компетентным); 2) максимальная самостоятельность учащихся в ходе НИР (что обеспечит полную реализацию накопленного учащимися потенциала и их мотивацию к дальнейшему обогащению опыта).

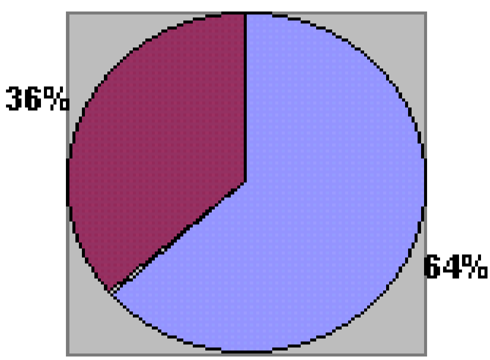
Таким образом, степень самостоятельности учащегося в НИР должна быть согласована как с актуальным уровнем развития его исследовательской компетентности (характеризуется тем, какие задания ученик может выполнить вполне самостоятельно), так и с потенциальным уровнем (уровень, которого ребенок может достигнуть, решая задачи под руководством взрослого и в сотрудничестве со сверстниками).

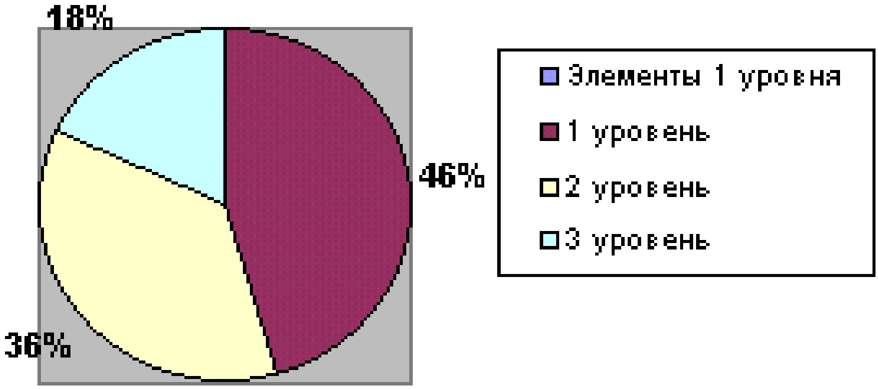
Каждый цикл экспериментального обучения школьников НИР в области приложений математики в системе "школа-вуз" состоял из следующих этапов:

1. Входящая диагностика уровня развития ИК (диагр. 3).

2. Вовлечение учащихся в УИД в рамках научно-популярного лектория "Приглашаем к исследованию" (проводимого студентами – будущими научными консультантами) с целью выбора учащихся склонных к исследовательской деятельности и выведения их в исследовательскую позицию.

3. Вовлечение учащихся в коллективно-распределенную НИР (исследовательский коллектив может состоять из преподавателя вуза, аспиранта, студента, школьного учителя и учащегося) с целью развития ИК всех участников коллектива.





4. Вовлечение учащихся в деятельность представления и защиты результатов НИР в рамках региональной научно-практической конференции школьников по математике и ее приложениям, проводимой на базе Поморского государственного университета им. М.В. Ломоносова.

5. Исходящая диагностика уровня развития ИК (диагр. 4).

Правильность разработанной нами методики подтверждается и результатами формирующего эксперимента, несмотря на то, что он в силу специфики исследование не носил массового характера.

Библиографический список

1. *Скарбич, С.Н.* Формирование исследовательских компетенций учащихся в процессе обучения решению планиметрических задач в условиях личностно-ориентированного подхода [Текст]: автореферат дис. ...канд. пед. наук / С.Н. Скарбич. – Омск, 2006. – 23 с.
2. *Ушаков, А.А.* Развитие исследовательской компетентности учащихся общеобразовательной школы в условиях профильного обучения [Текст]: автореферат дис. ...канд. пед. наук / А.А. Ушаков. – Майкоп, 2008. – 33 с.
3. *Осипова, С.И.* Развитие исследовательской компетентности одаренных детей [Текст] / С.И. Осипова // Материалы XV краевой научно-практической конференции с международным участием "Космос и Одаренность" в Филиале ГОУ ВПО КГПУ им. В.П. Астафьева г. Железногорск, 2006.
4. *Фесъкова, Е.В.* Составляющие элементы исследовательской компетентности [Текст] / Е.В. Феськова // Материалы городской научно-практической конференции "Культура. Интеллект. Наука", г. Железногорск.
5. *Ястребов, А.В.* Школьный учебник как источник исследовательских задач [Текст] / А.В. Ястребов // Учебный год. – 2007. – № 1. – С. 72-77.

6. *Мерлина, Н.И.* Теоретические основы дополнительного математического образования школьников [Текст]: дис.... д-ра пед. наук / Н.И. Мерлина. – Чебоксары, 2000. – 289 с.
7. *Августманова, Т.В.* Педагогические условия развития исследовательской деятельности старшеклассников в инновационном образовательном учреждении [Текст]: дис.... канд. пед. наук / Т.В. Августманова. – Иркутск, 2003. – 241 с.
8. *Паршева, В.В.* Урок-исследование по математике как один из активных методов формирования творческого мышления по предмету [Текст] / В.В. Паршева // Научно-исследовательская деятельность школьников в области математики и ее приложений: материалы Первой региональной научно-практической конференции / составитель С.Н. Котова; отв. ред. М.В. Шабанова. – Архангельск: Поморский университет, 2009. – С. 17-26.
9. Сборник нормативных документов [Текст] / составители Э.Д. Днепров, А.Г. Аркадьев. – М.: Дрофа, 2004. – 443 с.

Графическое решение неравенств

Н.Б. Яновская, Г.Б. Яновский

Основным достоинством школьных учебников по алгебре, написанных под руководством и при непосредственном участии заслуженного деятеля науки РФ А.Г. Мордковича на основе технологии проектирования учебного процесса академика В.М. Монахова, а также отличием этих учебников от других является выбор в качестве основной содержательно-методической линии функционально-графической. И потому какие бы уравнения и методы их решения ни рассматривались в указанных учебниках, в них всегда присутствует функционально-графический метод.

Как указано в учебниках, идея графического метода решения уравнения $f(x)=g(x)$ проста и понятна: нужно построить графики функций $y=f(x)$, $y=g(x)$ и найти точки их пересечения – корнями уравнения служат абсциссы этих точек. Ввиду того, что в некоторых случаях построение графиков функций можно заменить опорой на какие-либо свойства функций, данный метод решения уравнений называют не графическим, а функционально-графическим методом решения уравнений.

Ценность метода состоит в том, что он позволяет определить число корней уравнения, угадать значение корня, найти приближенные, а иногда и точные значения корней [1, с. 306-307]. Именно последнее позволяет утверждать, что функционально-графический метод решения уравнений всегда должен быть первым и одним из главных методов решения уравнений любых типов.

В то же время функционально-графический метод, по нашему мнению, необходимо распространить и на решение неравенств. Это настолько логично и очевидно, что не вызывает никаких сомнений. Причем если указанный метод применим при решении уравнений любых типов, то очевидно, что он применим и для решения неравенств любых типов, то есть как алгебраических, так и трансцендентных.

Основываясь на собственном опыте применения функционально-графического метода при решении неравенств, предлагаем демонстрационные примеры, включающие все типы неравенств. Условия примеров взяты из задачников авторов А.Я. Симонова [2], А.С. Зеленского [3] и М.И. Сканави [4].

Дробно-линейные неравенства

1. Определить наименьшее целое положительное значение x, удовлетворяющее неравенству $\frac{1}{x} < 3$.

Решение. Введем функции $y = \frac{1}{x}$ и у = 3. Графиком первой функции является равнобочная гипербола с асимптотами – осями координат, расположенная в I и III четвертях. Графиком второй функции является прямая, параллельная оси x на расстоянии от нее, равном 3. Из рисунка видно, что ординаты гиперболы меньше ординат прямой в интервале $(-\infty; 0)$ и $(\frac{1}{3}; \infty)$. Наименьшее целое положительное значение x=1 (рис. 1).

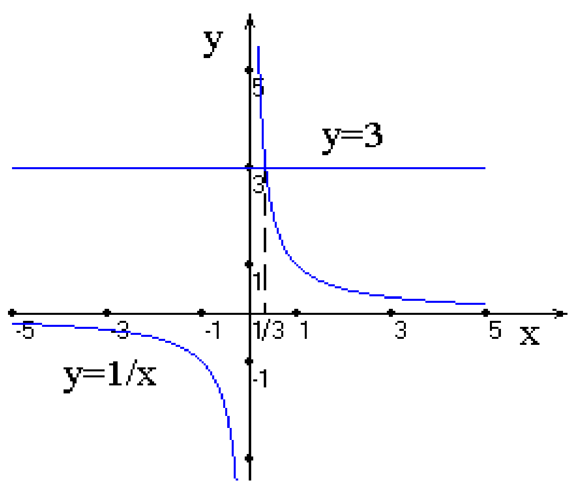


Рис. 1

Иррациональные неравенства

2. [2, № 104]. Решить неравенство $\sqrt{4x-x^2} > x$.

Решение. Введем две функции $y = \sqrt{4x-x^2}$, $y = x$. Графиком первой функции является верхняя часть дуги окружности с центром в точке (2;0) и радиусом R=2, так как $y^2 = 4x-x^2$; $x^2-4x+y^2 = 0$; $(x-2)^2+y^2 = 4$. Графиком второй функции является прямая – биссектриса I и Ш координатных углов. Из рисунка наглядно видно, что ординаты точек верхней дуги окружности расположены выше ординат биссектрисы на промежутке (0;2).

Для сравнения приведем аналитическое решение данного неравенства.

$$\sqrt{4x-x^2} > x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x>0, \\ 4x-x^2>x^2 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x<0, \\ 4x-x^2\geq 0 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x>0, \\ x(2-x)>0 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x<0, \\ x(4-x)\geq 0 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} 0<x<2 \\ \emptyset \end{array}\right. \Leftrightarrow 0<x<2.$$

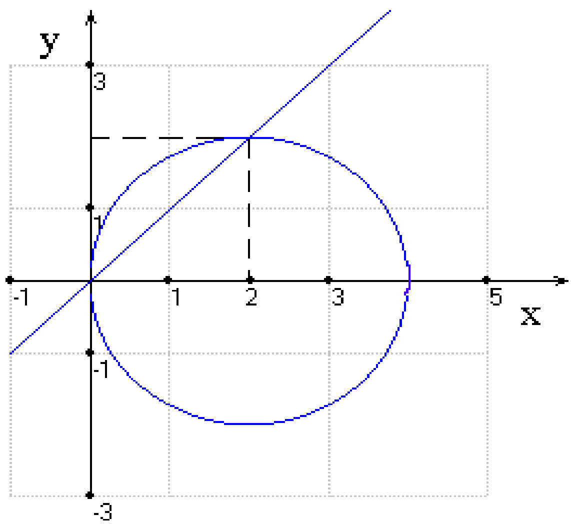


Рис. 2

3. [2, № 103, с. 57]. Решить неравенство $\sqrt{x^2-16} \leq x-2$.

Аналитическое решение:

$$\sqrt{x^2-16} \leq x-2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} \mathrm{x}-2>0, \\ \mathrm{x}^2-16\leq(\mathrm{x}-2)^2, \\ \mathrm{x}^2-16>0, \end{array}\right. \\ x=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x>2, \\ x\leq 5, \\ |x|>4, \end{array}\right. \\ x=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow 4\leq x\leq 5.$$

Графическое решение. Введем функции $y = \sqrt{x^2 - 16}$ и $y = x - 2$. Из равенства $y = \sqrt{x^2 - 16}$ следует $\begin{cases} y^2 = x^2 - 16, \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 16, \\ y \geq 0. \end{cases}$
Полученная система определяет верхние ветви гиперболы с вершинами на оси x в точках $(-4; 0)$ и $(4; 0)$.

Вторая функция $y = x - 2$ является линейной, то есть ее графиком является прямая с угловым коэффициентом $k = 1$, пересекающая ось y в точке $(0; -2)$.

Решением неравенства является та часть гиперболы, которая расположена ниже данной прямой, то есть часть гиперболы, абсциссы которой расположены в промежутке $4 \leq x \leq 5$.

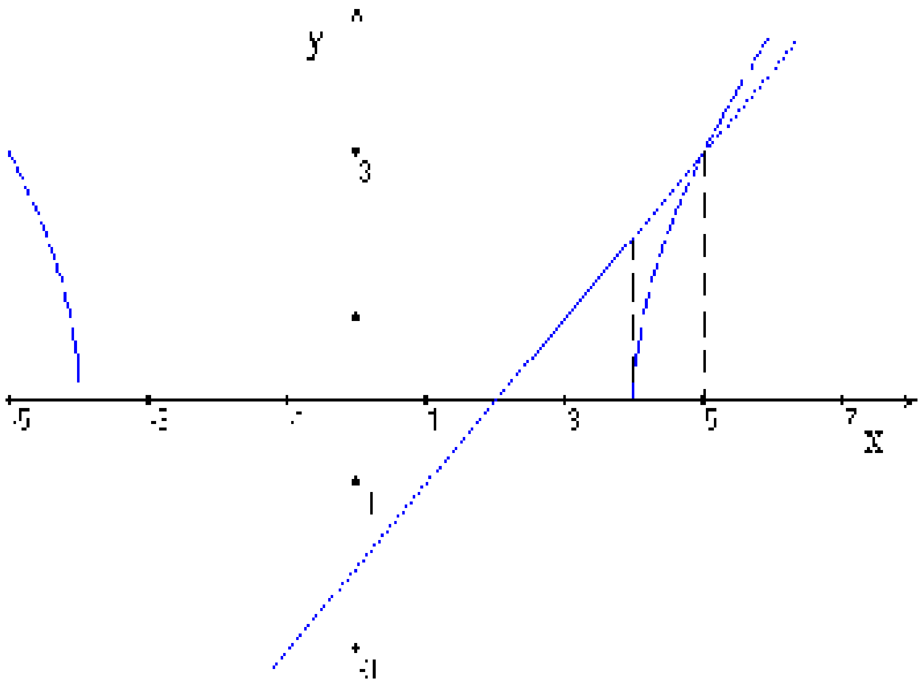


Рис. 3

Неравенства, содержащие неизвестное под знаком модуля

4. [4, № 9.033]. Решить неравенство $\left|x^2 - 5\,x\right| < 6$.

Графическое решение.

Введем две функции $y = \left|x^2 - 5\,x\right|$ и $y = 6$.

Графиком первой функции является та часть квадратной параболы $y = x^2 - 5x$, для точек которой справедливо $y \geq 0$.

Вначале строим параболу y $= x^2 - 5x$, ветви которой направлены вверх, так как коэффициент при старшем члене положителен. Если уравнение параболы записать в виде y=x(x–5), то очевидно, что ветви параболы пересекают ось x в точках x=0 и x=5, а вершина параболы находится в точке (2,5;–6,25). Уравнение y = 6 определяет прямую, параллельную оси x и отсекающую на оси y отрезок, равный 6. Очевидно, решением данного неравенства являются те значения x, при которых ветви параболы расположены ниже прямой (рис. 5), то есть $x \in (-1\ ;\ 2) \cup (3\ ;\ 6)$.

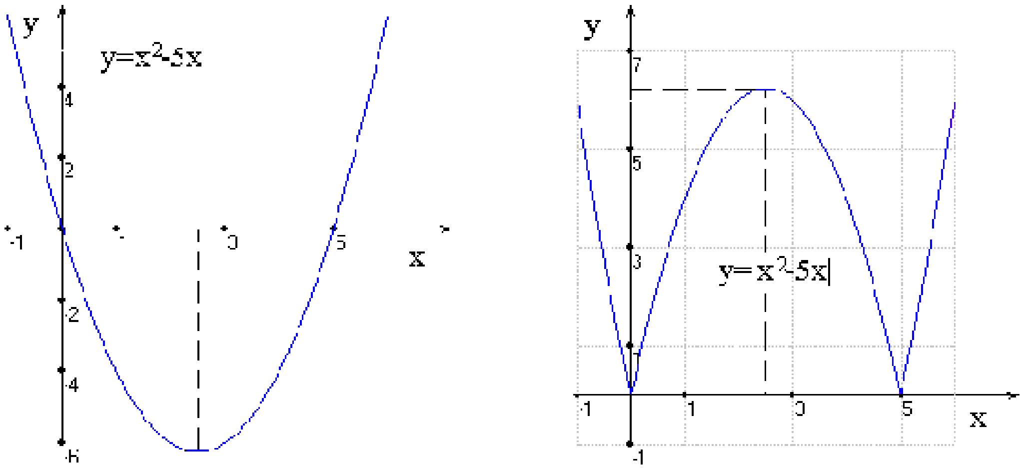


Рис. 4

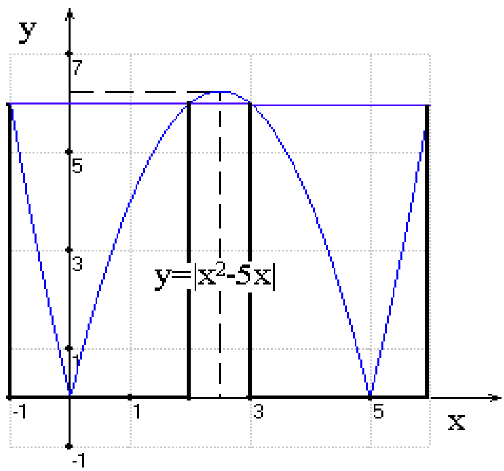


Рис. 5

Способ 1.

Так как обе части неравенства положительны, то неравенство можно возвести в квадрат, не нарушая его равносильности:

$$\left|x^2-5x\right|<6 \Leftrightarrow \left(x^2-5x\right)^2<36 \Leftrightarrow \left(x^2-5x\right)^2-36<0 \Leftrightarrow \left(x^2-5x+6\right)\times$$

$$\times\left(x^2-5x-6\right)<0 \Leftrightarrow (x-2)(x-3)(x+1)(x-6)<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1<x<2, \\ 3<x<6. \end{array}\right.$$

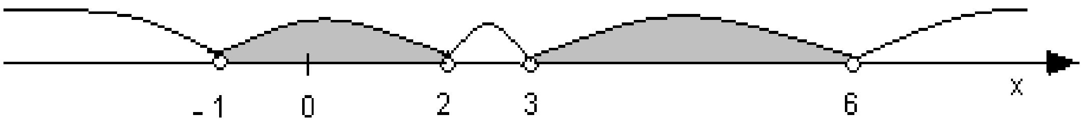


Рис. 6

Способ 2.

Используя определение абсолютной величины, получим равносильное двойное неравенство, а из него – систему двух квадратных неравенств, решаемую методом интервалов:

$$\left|x^2-5x\right|<6 \Leftrightarrow -6<x^2-5x<6 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-5x>-6, \\ x^2-5x<6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-5x+6>0, \\ x^2-5x-6<0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (x-2)(x-3)>0, \\ (x+1)(x-6)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1<x<2, \\ 3<x<6. \end{array} \right.$$

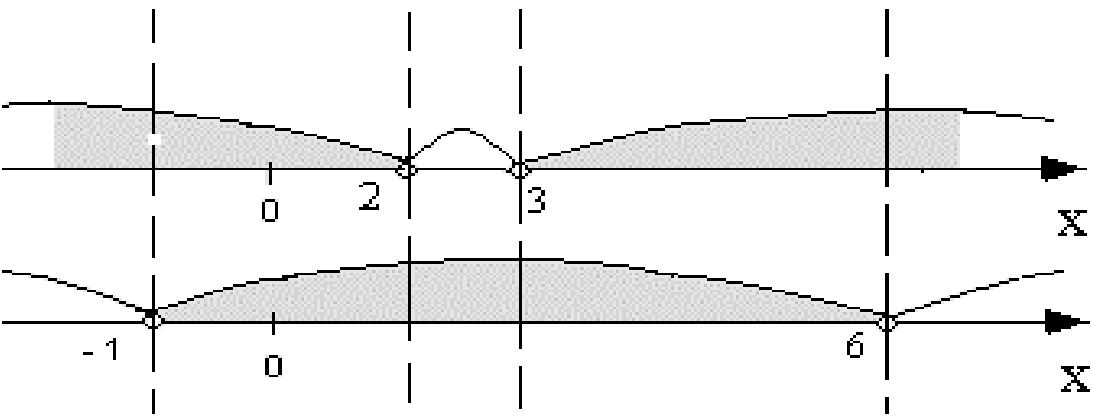


Рис. 7

Способ 3.

Используя определение абсолютной величены, получим объединение двух систем. Каждая система решается, используя метод интервалов.

$$\left|x^2-5x\right|<6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2-5x\geq 0 \\ x^2-5x<6 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2-5x<0 \\ -(x^2-5x)<6 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x(x-5)\geq 0 \\ (x+1)(x-6)<6 \end{cases} \\ \begin{cases} x(x-5)<0 \\ (x-2)(x-3)<0 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} -1<x\leq 0 \\ 5\leq x<6 \end{cases} \\ \begin{cases} 0<x<2 \\ 3<x<5 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1<x<2, \\ 3<x<6. \end{array} \right.$$

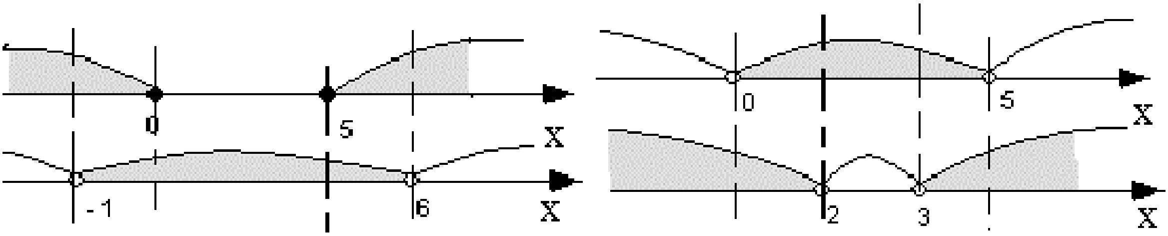


Рис. 8

Дробные алгебраические неравенства

5. [2, № 028]. Решить неравенство $\frac{x-1}{x+3} > 3$.

Графическое решение.

Введем две функции: линейную $y = 3$и дробно-линейную $y = \frac{x-1}{x+3}$, графиком которой является гипербола. Определим асимптоты графика функции. Так как функция не определена при $x+3 = 0$, то график функции имеет вертикальную асимптоту $x = -3$. Если уравнение гиперболы преобразовать к виду $y = \frac{(x+3)-4}{x+3}$, $y = 1 - \frac{4}{x+3}$, то легко установить, что при возрастании аргумента x значение функции y стремится к значению 1, то есть уравнение вертикальной асимптоты $y = 1$. Первая введенная функция имеет уравнение y=3 (рис. 9).

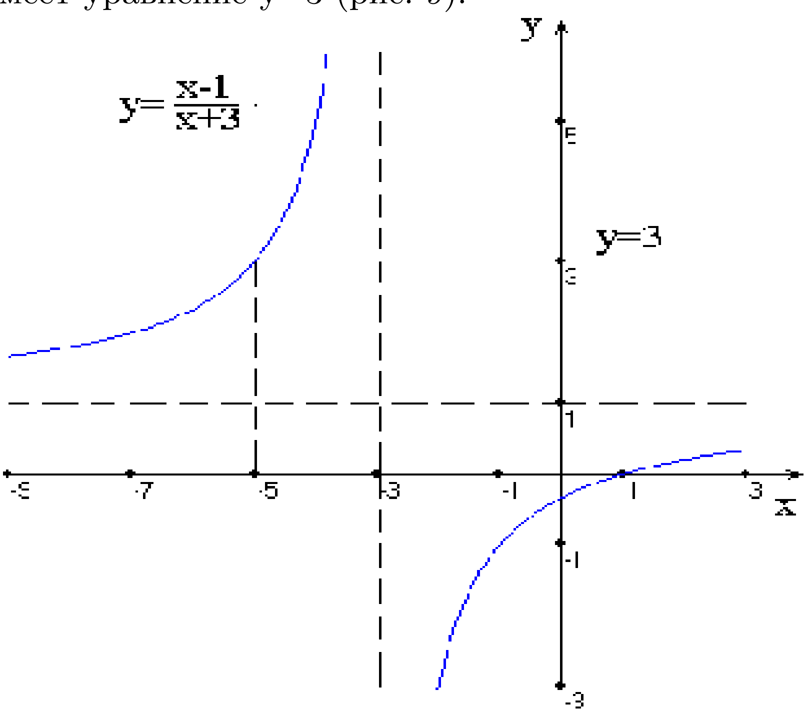


Рис. 9

Определим точку пересечения гиперболы и прямой $y = 3$:

$$\begin{cases} y = \frac{x-1}{x+3}, \\ y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = \frac{x-1}{x+3}, \\ y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5, \\ y = 3. \end{cases}$$

Из рисунка видно, что решением данного неравенства являются те значения аргумента x, при которых график дробно-линейной функции расположен выше графика прямой y=3, то есть $x \in (-5; -3)$.

6. [2, № 043]. Определить наименьшее целое число, входящее в область определения функции $y = \sqrt{x - \frac{15}{x+2}}$.

Решение. Область определения функции определяется из условия

$$x - \frac{15}{x+2} \geq 0 \text{ или } x \geq \frac{15}{x+2}.$$

Введем функции $y = x$ и $y = \frac{15}{x+2}$. Графиком первой функции является биссектриса I и III координатных углов, графиком второй функции – гипербола с вертикальной асимптотой $x + 2 = 0$ и горизонтальной асимптотой $y = 0$. Абсциссы точек пересечения гиперболы и прямой определяются решением уравнения:

$$x = \frac{15}{x+2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 + 2x - 15 = 0 \\ x + 2 \neq 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = -5 \end{array} \right. ;$$

Ординаты точек гиперболы находятся ниже ординат точек прямой на интервалах (–5;–2) и (3;∞). Наименьшее целое число, входящее в область определения данной функции $x = -5$ (рис. 10).

7. [2, № 047]. Определить наименьшее целое число, входящее в область определения функции $y = \sqrt{4 + x + \frac{3}{x}}$.

Решение. Областью определения функции является промежуток, определяемый условием $4 + x + \frac{3}{x} \geq 0$, откуда следует $4 + x \geq -\frac{3}{x}$.

Введем функции $y = 4 + x$ и $y = -\frac{3}{x}$. Графиком первой функции является прямая, пересекающая оси координат в точках (0;4) и $(-4; 0)$; графиком второй – гипербола с асимптотами – осями координат, расположенная во II и IV четвертях (рис. 11). Ординаты прямой расположены выше ординат точек гиперболы при $x \in (-3;-1) \cup (0;\infty)$, а наименьшее целое значение, входящее в область определения функции, $x = -3$.

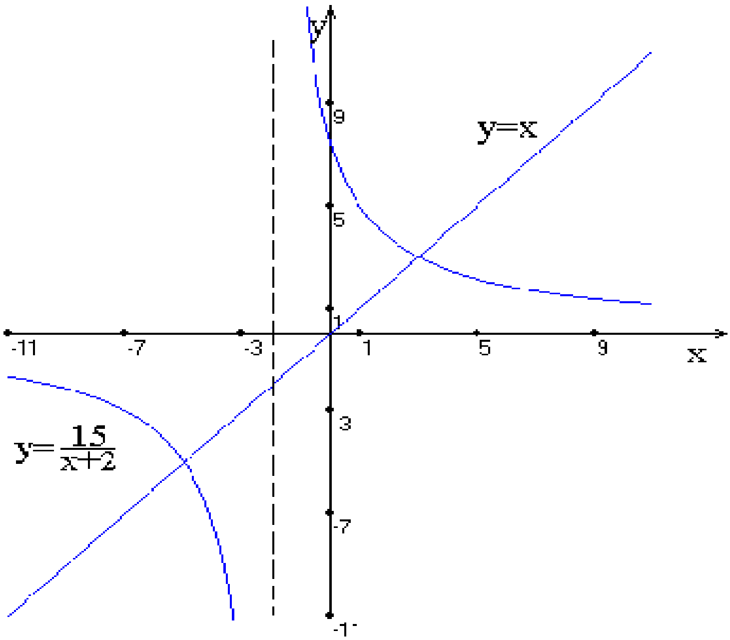


Рис. 10

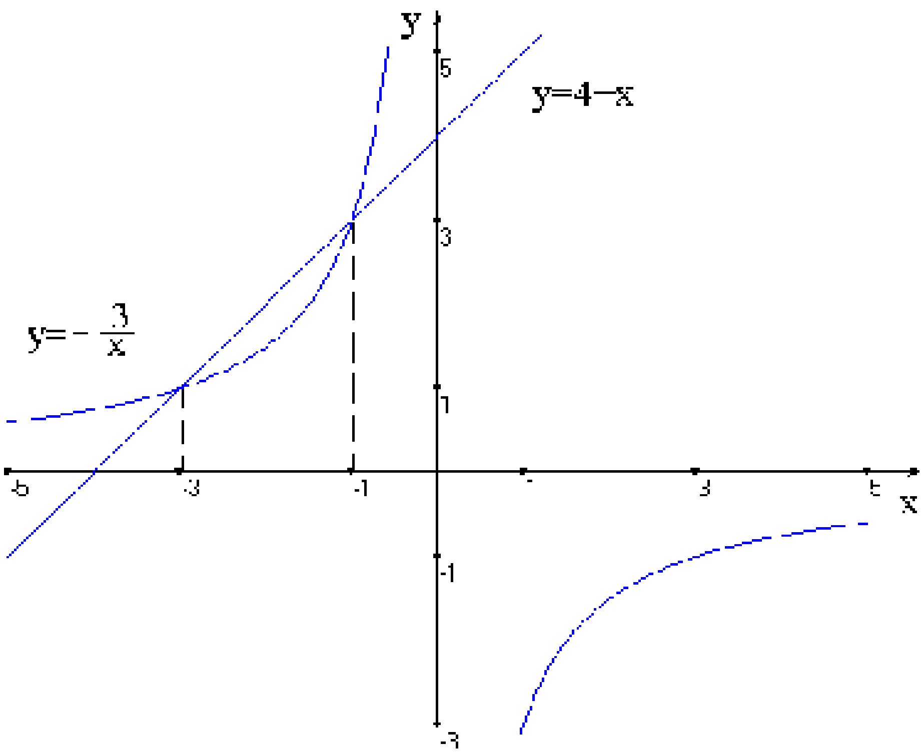


Рис. 11

Точки, являющиеся границами промежутка, проверяются в конце решения для каждой граничной точки отдельно!!!

8. [2, № 023]. Определить длину интервала, на котором выполняется неравенство $\frac{x^2+4x+4}{x^2+5x+6} < 0$.

Решение. Данное неравенство приводим к виду $\frac{(x+2)^2}{(x+2)(x+3)} < 0$.

Введем функции $y = (x+2)^2$ и $y = (x+2)(x+3)$, графиком каждой из которых является квадратная парабола.

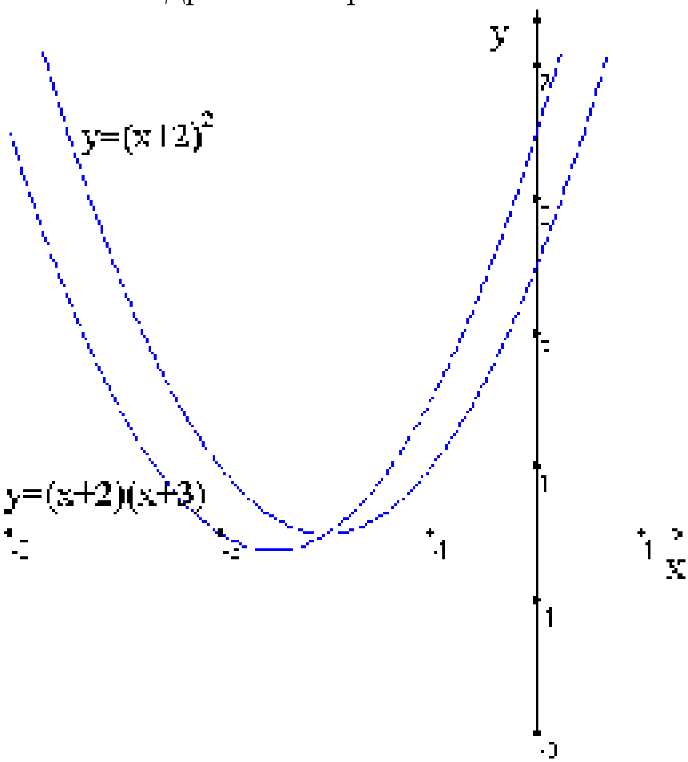


Рис. 12

Ординаты парабол разных знаков при изменении x в интервале $(-3; -2)$, длина интервала равна 1.

9. [2, № 040]. Определить наибольшее целое отрицательное решение неравенства $\frac{x^2-x-2}{x} \geq 0$.

Решение. Введем функции $y = x^2 - x - 2$ и $y = x$, графиками которых являются квадратная парабола и прямая. Ветви квадратной параболы направлены вверх, точки пересечения параболы с осью x $x = -1$и $x = 2$. Ординаты точек параболы и прямой одного знака на интервалах $(-1; 0) \cup (2; \infty)$. Проверка конечных точек интервалов показывает, что решением данного неравенства являются промежутки $[-1; 0) \cup [2; \infty)$ и наибольшее целое отрицательное решение $x = -1$.

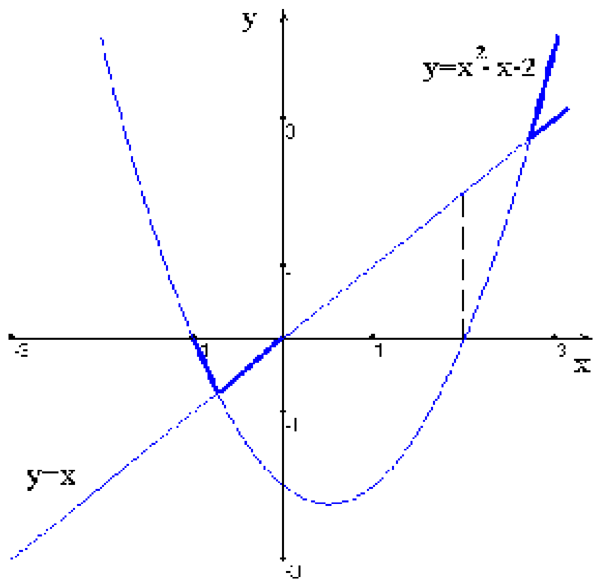


Рис. 13

Показательные неравенства

10. [3, № 13.19]. Определить число целых чисел, удовлетворяющих неравенству $5^{|x|} \cdot 3^x \leq 3^{x+3}$.

Решение. По свойству показательной функции $3^x > 0$. Следовательно, данное неравенство можно разделить на 3^x, не изменяя знака неравенства, и получить неравенство $5^{|x|} \leq 27$. Решим неравенство графически, для чего определим точки пересечения графиков функций $y = 5^{|x|}$ и $y = 27$. Функция $y = 5^{|x|}$ четная, так как значения функции от знака x не зависят. Следовательно, график функции симметричен относительно оси y. Графиком функции $y = 27$ является прямая, параллельная оси x (рис. 14).

Из рисунка видно, что число целых корней решения неравенства равно 5, а именно $x = -2; -1; 0; 1; 2$.

Иррациональные неравенства

11. [2, № 089]. Решить неравенство и указать наименьшее целое решение $\sqrt{5-x} > \sqrt{x+1}$.

Решение. Введем функции $y = \sqrt{5-x}$ и $y = \sqrt{x+1}$. Если возвести обе части равенств в квадрат, то получим уравнения $y^2 = 5 - x$ и $y^2 = x + 1$, каждое из которых определяет квадратную параболу с осью симметрии – осью x. Следовательно, уравнения $y = \sqrt{5-x}$ и $y = \sqrt{x+1}$ определяют верхние ветви парабол с вершинами в точках x=5 и $x = -1$.

Определим абсциссу точки пересечения парабол, то есть решим уравнение $\sqrt{5-x}=\sqrt{x+1}$. Получим $5-x=x+1$, откуда x=2.

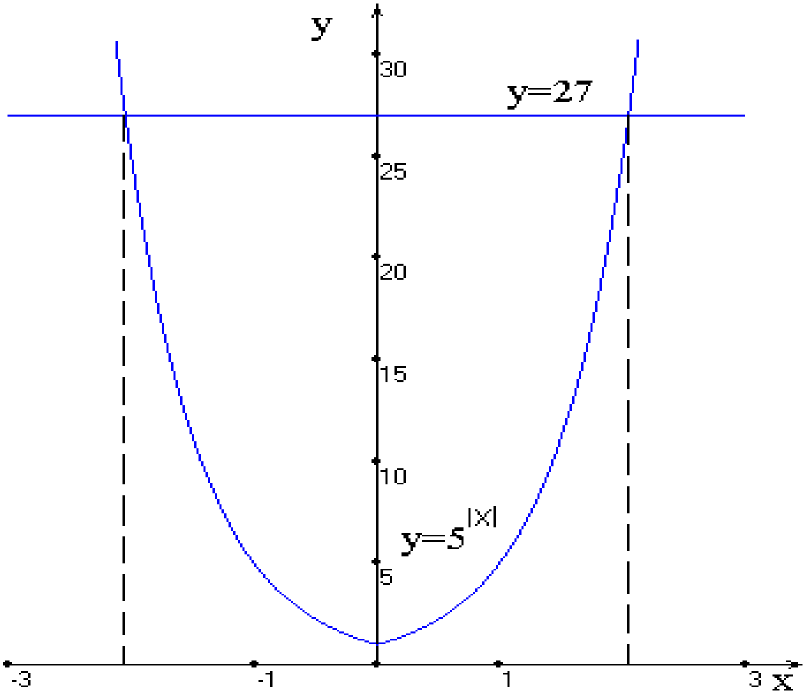


Рис. 14

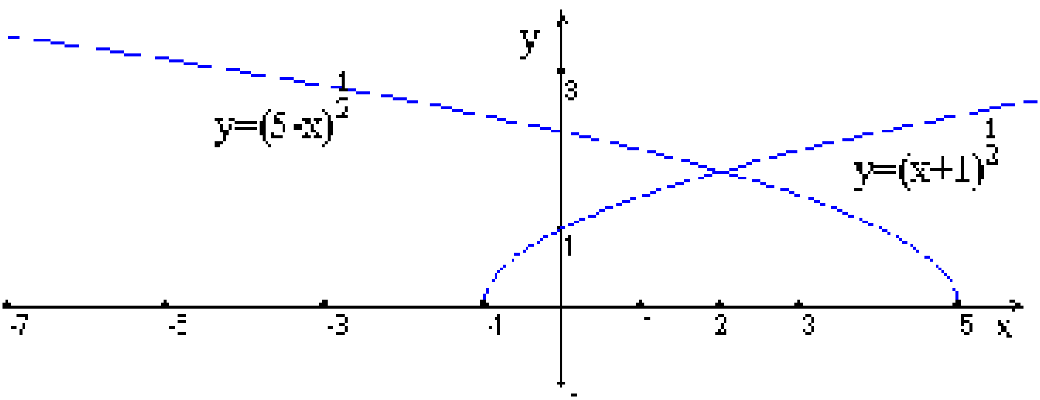


Рис. 15

Из рисунка видно, что ординаты графика $y=\sqrt{5-x}$ расположены выше ординат графика $y=\sqrt{x+1}$ в интервале $[-1;2)$, а наименьшее целое решение данного неравенства $x=-1$.

12. [2, № 120]. Определить наибольшее решение неравенства $\frac{\sqrt{-x+11}}{x+3}\leq 0$.

Решение. Введем функции $y = \sqrt{-x+11}$ и $y = x + 3$. Графиком первой является верхняя ветвь параболы $y^2 = 11 - x$, графиком второй – прямая $y = x + 3$. Из данного неравенства следует, что область изменения первой функции – положительные и равные нулю значения ординат параболы, то есть $y \geq 0$,а область изменения второй функции – отрицательные значения ординат прямой $y = x + 3$, то есть $y < 0$. Из рисунка видно, что решением данного неравенства является интервал $(-\infty; -3)$, на котором ординаты первого графика положительны, а второго отрицательны, и точка x=11. Следовательно, наибольшее решение неравенства $x = 11$.

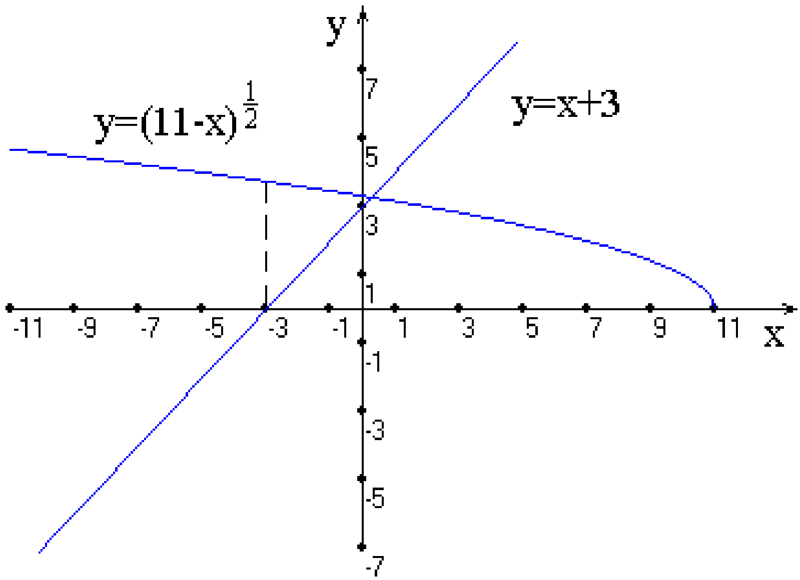


Рис. 16

13. [2, № 087]. Решить неравенство и указать наименьшее целое решение $\frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+2} < 0$.

Решение. Введем функции $y = \sqrt{x}-3$ и $y = \sqrt{x}+2$. Из записи уравнений в виде $y + 3 = \sqrt{x}$ и $y - 2 = \sqrt{x}$ следует, что для первой кривой значение функции определяется неравенством $y + 3 \geq 0$, а для второй кривой – неравенством $y - 2 \geq 0$. Из записи уравнений кривых в виде $(y + 3)^2 = x$ и $(y - 2)^2 = x$ следует, что уравнения определяют квадратные параболы с вершинами в точках соответственно (0;–3) и (0;2) и осями симметрии, параллельными оси *ox*. Решение данного неравенства определяет те значения x, при которых ординаты парабол разных знаков, что выполняется на интервале [0;9), наименьшее целое решение $x = 0$.

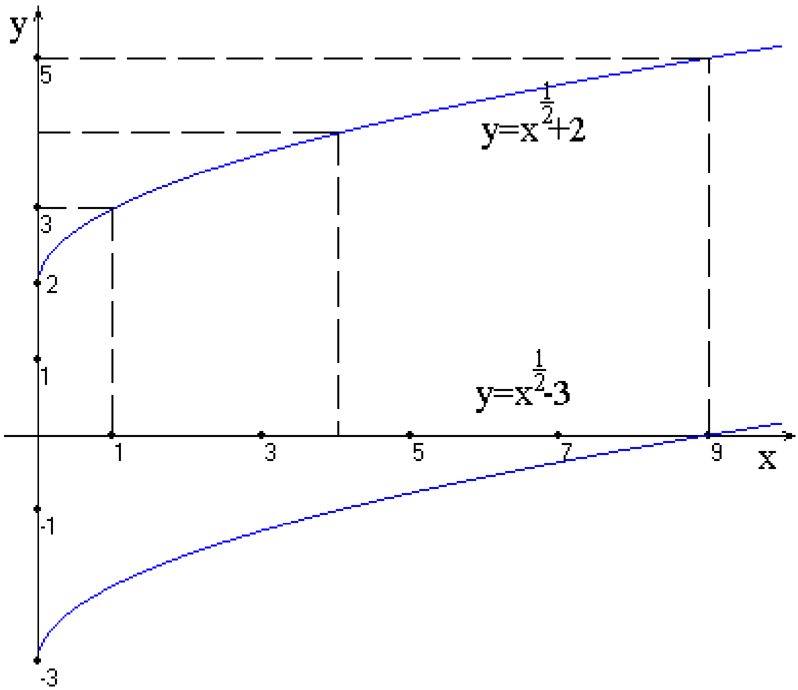


Рис. 17

Логарифмические неравенства

14. [2, № 019]. Определить наименьшее целое решение неравенства log_2(2x-1)$>log_2(x+1)$.

Решение. Введем функции $y{=}log_2(2x-1)$ и $y{=}log_2(x+1)$, построим графики функций и сравним ординаты. Область определения функции $y{=}log_2(2x-1)$ – интервал $(\frac{1}{2};\infty)$, то есть прямая уравнения $y=\frac{1}{2}$ – вертикальная асимптота графика функции. Область определения функции $y{=}log_2(x+1)$ – интервал $(-1;\infty)$, то есть прямая уравнения $x+1=0$ – вертикальная асимптота графика функции.

Определим точку пересечения графиков функций $y{=}log_2(2x-1)$ и $y{=}\ log_2(x+1)$, то есть решим уравнение $log_2(2x–1){=}log_2(x+1)$. Получим $x=2$ (рис. 18).

Из рисунка видно, что решением данного неравенства являются те значения аргументов, при которых ординаты графика функции $y{=}log_2(2x-1)$расположены выше ординат графика функции $y{=}\ log_2(x+1)$. Следовательно, решение неравенства – интервал (2;∞), а наименьшее целое решение неравенства $x=3$.

15. [2, № 004]. Определить наибольшее значение переменной, удовлетворяющее неравенству: $\log_{0.7}(2x-7)-\log_{0.7}x\geq 0$.

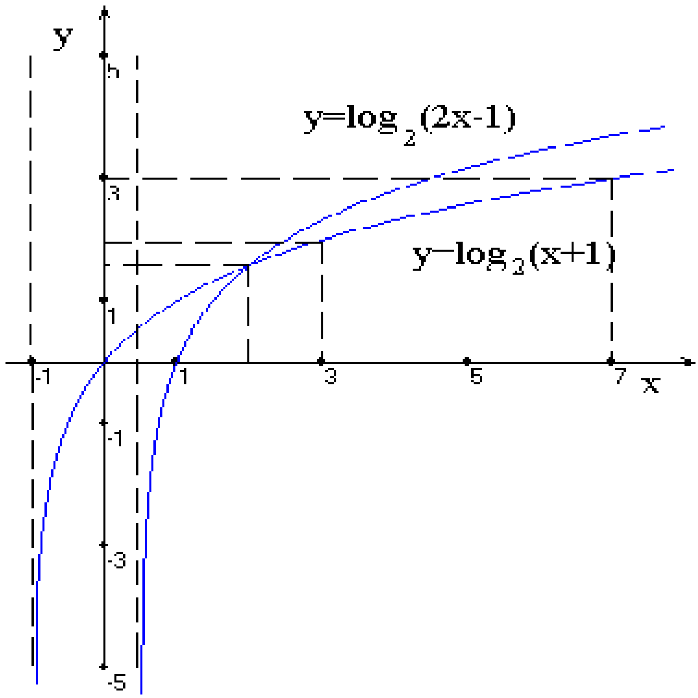


Рис. 18

Решение. Введем функции $y = \log_{0.7}(2x - 7)$ и $y = \log_{0,7} x$. Так как основания логарифмических функций меньше единицы, то функции убывающие. Область определения первой функции 2x–7>0 или x>3,5, второй –x>0. Первая функция пересекает ось *ox* в точке x=4, вторая – в точке x=1. Графики функций пересекаются при x=7. Из рисунка 19 видно, что точки первого графика расположены выше точек второго графика в интервале (3,5;7), наибольшее значение переменной в этом промежутке x=7.

Тригонометрические неравенства

16. [3, № 181]. Решить неравенство *5sinx–sin2x>0.*

Решение. Введем функции *y=5sinx* и *y=sin2x* и построим их графики. Первая функция y=5sinx имеет период T=2π, а вторая функция *y=sin2x* имеет период T=π. Из рисунка 20 видно, что ординаты первого графика расположены выше ординат второго графика в пределах периода функции T=π на интервале (0;π), а решением неравенства на всей числовой оси является интервал (2πn;π+2πn) при n$\in$Z.

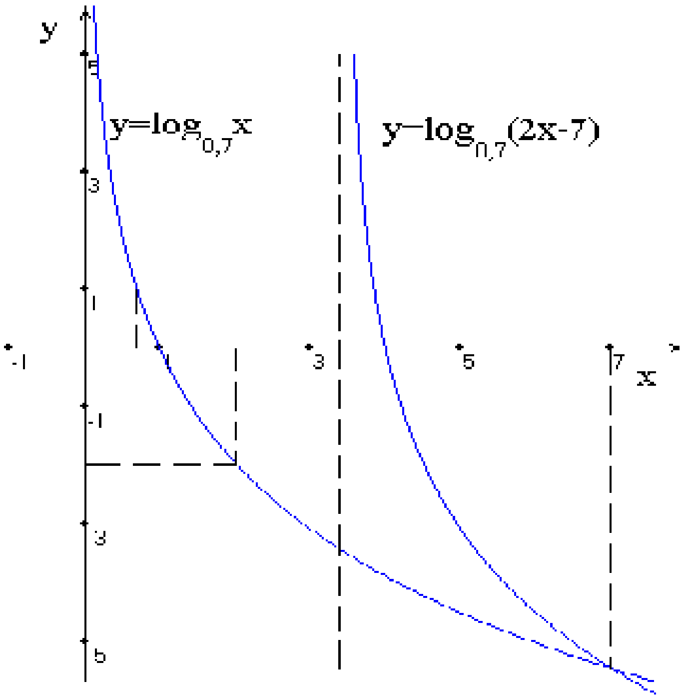


Рис. 19

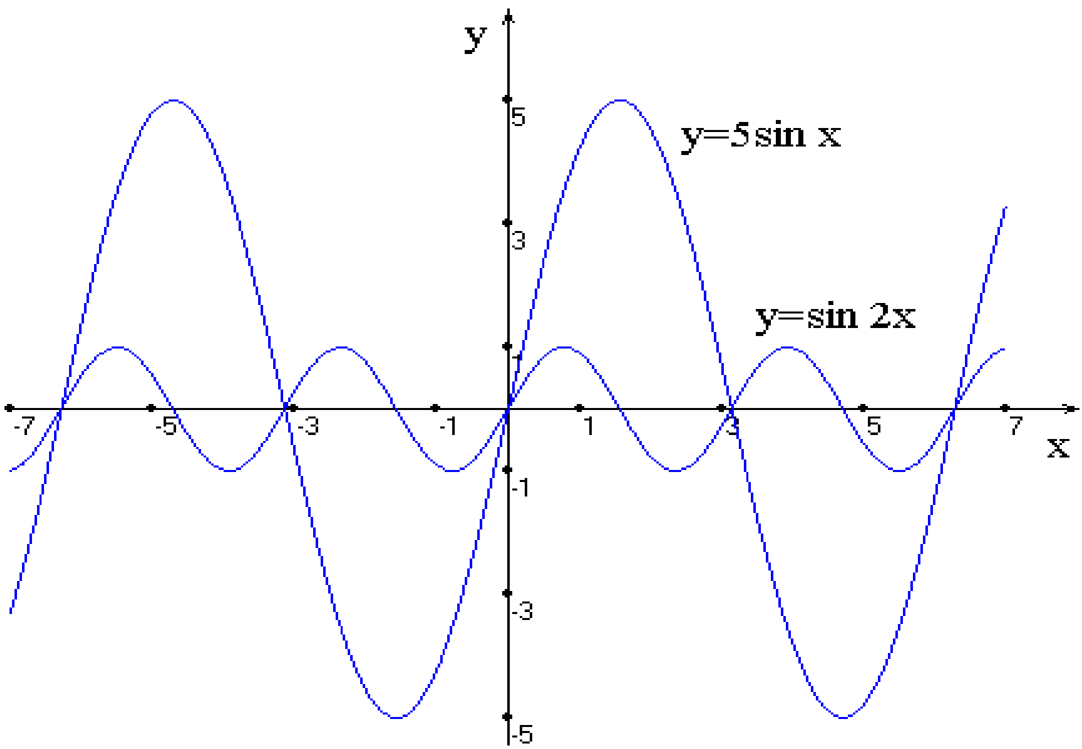


Рис. 20

Библиографический список

1. *Мордкович, А.Г.* Алгебра и начала анализа. 10-11 кл.: Учеб. для общеобразоват. учреждений [Текст] / – М.: Мнемозина, 2000.
2. *Бакаев, Д.С.* Система тренировочных задач и упражнений по математике [Текст] / А.Я. Симонов, Д.С. Бакаев, А.Г. Эпельман [и др.] – М.: Просвещение, 1991.
3. *Зеленский, А.С.* Сборник конкурсных задач по математике 1992-1995 годов [Текст] / А.С. Зеленский. – 2-е изд. – М.: АСТ-ПРЕСС, 1996.
4. *Егерев, В.К.* Сборник задач по математике для поступающих во втузы [Текст]: учеб. пособие / В.К. Егерев, Б.А. Кордемский, В.В. Зайцев [и др.] / под ред. М.И. Сканави. – 6-е изд. испр. и доп. – М.: Столетие, 1997.

Замечательные триады в математике, их применение в школьном и вузовском курсе математики

А.Б. Эрдниев, Е.Н. Джахнаева

В данной статье мы рассматриваем возможность фундаментализации математической и информационной подготовки как будущего учителя математики, так и других специальностей посредством систематизации работ по теме “Замечательные триады в математике”.

Проблема фундаментализации образования является насущной проблемой последнего десятилетия. Это связано с социально – экономическими изменениями в обществе и как следствие – с изменившимися требованиями к образованию личности.

Фундаментализация предметной подготовки будущих учителей математики и информатики является актуальной задачей современного высшего образования. Для того, чтобы учитель математики был способен гибко перестраивать направление и содержание своей деятельности.

Под фундаментализацей понимается направленность образования на создание одного или нескольких образцов цельного, обобщающего знания, которое носило не только профессиональный, но просветительский характер вне зависимости от будущих профессий студентов, и объединяло бы получаемые знания в единую информационную картину.

Фундаментализация и информатизация, наряду с гуманизацией и гуманитаризацией, являются основными направлениями модернизации образовательного пространства, в котором сегодня осуществляется подготовка учителя математики в вузах [5].

В укрупнении информационных единиц – shancking informational units – так переведено российскими учеными данное понятие. В книге Р. Солсо “Когнитивная психология” пояснено, в чем заключается сущность УИЕ (S.I.U.). Для рассматриваемой темы - это систематическое использование буквенных и числовых триад, когда отдельная триада мыслится как единое целое. Например, ABC,. . . ,xyz: по одной букве воспроизводятся две другие, мыслится как единое целое: ΔABC, кирпич a$\times$b$\times$c, координаты x,y,z и так далее.

Цель нашей работы выделить основные типы триад, за которыми учащийся и студент может увидеть важное информационное сообщение, а также показать возможность построения информационно-математических таблиц (ИМТ). Они должны избавить преподавателей и учителей от лишнего функционального многообразия, семантико-синтаксической сложности и запутанности аналитических выражений, зачастую сводящихся к философской математической эквилибристике, а не к законченным прикладным заключениям и апробированным рекомендациям. Со временем, информационно очистив дальнейшее развитие математики от философско – математического хаоса, запутанности и эквилибристик, отбросив аналогичное прошлое, можно создать такую ИМТ, которая будет удобным научным пособием для исследователей и инженеров, являющимся как бы таблицей умножения в информационно-физико- математической теории и практике, аналогичной таблице Менделеева по химии [4].

В математике под *триадой* понимают целочисленную тройку взаимно простых чисел, являющуюся компонентом систематизированного математического факта: понятия, теоремы и даже гипотезы.

Некоторые из триад образуют теорему Пифагора. Заметим, что в данное время далеко не все студенты могут привести примеры пифагоровых триад. И если дают ответ, то вспоминают только 3,4,5 (египетский) и редко 5,12,13 (китайский).

Мы усваиваем и запоминаем не просто отдельные элементы информации, а конструируем систему знаний, которая помогает нам приобретать, хранить и использовать обширный запас сведений.

Психолог Дж. Миллер приводит два простых, но весьма убедительных примера укрупнения информационных единиц [1].

1. 26 букв латинского алфавита легко представить в виде последовательности 10 триад: ABC, USA,. . . , каждая из них будет занимать одно место в кратковременной памяти. Это не случайные, а знаковые триады[1].

[1]Эти триады знаковые и защищены авторским правом в США.

2. Для того чтобы запомнить семизначный номер телефона, каждый из нас разбивает его на удобные ему триады и пары, причем неосознанно мы стремимся выбрать в чем-то значимые для нас сочетания.

Выделим следующие типы триад, чтобы сразу у многих возникала ассоциация.

1) Большинство студентов и даже учеников имеют мобильный телефон, на котором обозначены цифры от 1 до 9. Их расположение можно рассматривать как "телефонную" матрицу размером 3 на 3, убрав четвертую строку.

Рассмотрим триады, которые можно выделить в такой матрице.

Видно, что наибольшая из них 4,5,6. Тогда мы должны знать, что определитель матрицы, состоящих из первых 9 цифр, равен **нулю**, то есть объем параллелепипеда построенного на векторах a=(1,2,3), b=(4,5,6), c=(7,8,9), равен нулю.

Таблица 1

1	2	3
4	**5**	6
7	8	9
*	0	#

Также видно, что по правилу треугольников нахождения определителя можно получить интересные числовые факты.

Во-первых, для студентов, изучающих тему "Определитель":

а) $1\cdot5\cdot9+7\cdot2\cdot6+3\cdot4\cdot8=225$, где 1,5,9 – главная диагональ; 7,2,6 и 3,4,8 – тройки чисел, образующие вершины треугольников с основаниями параллельными главной диагонали.

б) $3\cdot5\cdot7+2\cdot4\cdot9+1\cdot8\cdot6=225$, где 3,5,7 – побочная диагональ; 2,4,9 и 1,8,6 – тройки чисел, образующие вершины треугольников с основаниями параллельными побочной диагонали.

Во-вторых, интересен тот факт, что определитель данной матрицы равен нулю. Если задуматься, есть ли связь между числами, стоящими в одной строке, то можно сделать предположение, что она существует. Первая строка 1,2,3 – это подряд идущие числа, а так же можно сказать, что третий элемент строки получен суммированием двух предыдущих ему: $1+2=3$. Но если мы посмотрим на вторую строку, то это правило здесь не применимо, так как $4+5\neq6$. В данном случае наблюдается другая закономерность:

$2\cdot2–1=3$ (третий элемент первой строки);

$5\cdot2–4=6$ (третий элемент второй строки);

$8\cdot2–7=9$ (третий элемент третьей строки).

Таким образом, получается, что третий столбец есть линейная комбинация первого и второго столбцов. То же наблюдается и со строками.

И здесь же можно поставить перед студентами следующую задачу: “Каким образом надо расположить числа, чтобы значение определителя было наибольшим?”. Данную задачу можно решить на занятиях информатики, составив определенную программу на языке программирования.

В-третьих, тройки чисел в математике прямо ассоциируются с геометрией треугольника. Для учащихся можно поставить вопрос: все ли эти тройки чисел образуют треугольники? Используя правило треугольников, получаем, что не все.

2) Триады Ло-Шу[1].

Теперь числа расположены как показано в табл. 2

Таблица 2

1	**2**	*3*
4	**5**	**6**
7	**8**	**9**

Определитель такой матрицы равен 360. Наибольшая из этих триад 8,9,7.

Нужно заметить, что триады Ло-Шу связаны с теоремой о неравенстве треугольника и теоремой о взаимосвязи объема и площади параллелепипедов, имеющих одинаковую длину [1].

Также их можно выделить из так называемых “магических” квадратов. Магические квадраты – одна из древнейших задач, поражающих воображение и мышление всех начинающих изучение математики.

Если мы введем буквенные обозначения a,b,c для матриц Ло-Шу или же, например, магического квадрата 3×3, то мы выходим на понятие параллелепипеда. Напомним, что здесь сумма чисел любой строки или столбца равна пятнадцати. Тогда $\mathbf{a+b+c=15}$, а длина каркаса $\mathbf{K}=4\cdot(a+b+c)=4\cdot15=60$. Из всех параллелепипедов $a\times b\times c$ с длиной каркаса 60 наибольший объем имеет куб $\mathbf{5\times5\times5}$.

Рассмотрим магический квадрат 3×3. Напомним содержание задачи: “Пусть квадрат разделен на девять клеток (малых квадратов). Требуется расположить в них числа от 1 до 9 так, чтобы сумма чисел в каждой строке, в каждом столбце, в каждой диагонали составляла 15. Такая задача может быть рассмотрена уже в 2-4 классах.

[1] Ло шу в переводе с китайского языка означает документ из реки Ло.

3) Выводы (проблема) математика Б.А. Кордемского.

Б.А. Кордемский указал, что максимальное значение определителя, составленного из этих девяти цифр, равно 442. Он также заметил, что числа из диапазона от 0 до 442 являются значениями определителей составленных из этих цифр, но не все и не указал какие именно.

Можно предложить обратную задачу, какие числа не являются значением нашего определителя?

Из этих определителей можно выделить магический квадрат. И не факт, что он будет равен 360, и в таком квадрате возможно не получатся триады Ло-шу.

4) Пифагоровы триады.

В своих работах Б.П. Эрдниев и В.М. Горяев сделали классификацию пифагоровых триад на четные и нечетные, основываясь на формулах Я.И. Перельмана $a=p^2-q^2$, $b=2pq$, $c=p^2+q^2$.

В этом случае можно предложить студентам составить программу упаковки данных триад следующим образом (табл. 3, 4). Плотная упаковка триад позволяет противопоставить их с другими триадами чисел в качестве головоломок. Назовем эти таблицы таблицами Перельмана, так как $mn < \frac{m^2-n^2}{2} < \frac{m^2+n^2}{2}$, где n,m разной четности. В этой таблице важно, что можно сделать окраску по признакам. В настоящее время существует две технологии обучения математике: основная и расширенная с применением компьютера. Для второго метода уже предпринимались попытки создать разработки.

Таблица 3

Нечетные Пифагоровы триады, катет a – нечетный

n ^{m}	**1**	**3**	**5**	**7**
3	3 4 5			
5	5 12 13			
7	7 24 25			
9	9 40 41			
11	11 60 61	33 56 65		
13	13 84 85	39 80 89	65 72 97	
15	15 112 113			
17	17 144 145	51 140 149	85 132 157	119 120 169
19	19 180 181	57 176 185	95 168 193	133 156 205
21	21 220 221		105 208 233	

Таблица 4

Четные Пифагоровы триады, катет a – четный

n m	**1**	**2**	**3**	**4**
2				
3				
4	8 15 17			
5		20 21 29		
6	12 35 37			
7		28 45 53		
8	16 63 65		48 55 73	
9		36 77 85		
10	20 99 101		60 91 109	
11		44 117 125		
12	24 143 145			
13		52 165 173		104 153 185
14	28 195 197		84 187 205	
15		60 221 229		120 209 241

Если мы рассматриваем треугольник со сторонами 3,4,5, то видим угол равный 37 и 53. Важно, чтобы те угольники, которые его окружают, находились в этой таблице (табл. 5).

Таблица наша расширяющаяся. Если рассматривать значения в пределах первой сотни и эйлеровой триады (44,117,125), то видим, что значения угла A уменьшается по нечетным триадам, а по четным возрастают. Таблица 5 является лишь частью от большой таблицы, в ней показаны результаты расчетов до n=7, m=33. Итак, на этом примере мы видим, как арифметическая характеристика влияет на геометрическую.

Эта работа была начата А. Правдиным [2], который составил более восьмидесяти таблиц. Своей целью мы поставили упорядочить, а кое-где сделать небольшие исправления в его таблицах, которые были напечатаны в газете “Математика”. Во-первых, выделим четко примитивы: пифагоровы тройки взаимно простых чисел, точное их количество и классификацию, а самое главное, добавим угловой коэффициент или значение острого угла (табл. 5). Считаем, что значение площади треугольников S не нужно в данном случае, как показано в таблице А. Правдина на странице восемь. А указанные триады 6,8,10 и 9,12,15 избыточны. В пределах первой сотни пропущена тройка 13,84,84 в его таблице № 2.

Таблица 5

m\n	1				3				5				7			
	a	**b**	**C**	*A*	**a**	**b**	**c**	*A*	**a**	**b**	**c**	*A*	**a**	**b**	**c**	*A*
3	3	4	5	36,87												
5	5	12	13	22,62	8	15	17	28,07								
7	7	24	25	16,26	20	21	29	43,60	12	35	37	18,92				
9	9	40	41	12,68					28	45	53	31,89	16	63	65	14,25
11	11	60	61	10,39	33	56	65	30,51	48	55	73	41,11	36	77	85	25,06
13	13	84	85	8,80	39	80	89	25,99	65	72	97	42,08	60	91	109	33,40
15	15	112	113	7,63									88	105	137	39,97
17	17	144	145	6,73	51	140	149	20,02	85	132	157	32,78	**119**	**120**	**169**	44,76
19	19	180	181	6,03	57	176	185	17,95	95	168	193	29,49	133	156	205	40,45
21	21	220	221	5,45					105	208	233	26,78				
23	23	264	265	4,98	69	260	269	14,86	115	252	277	24,53	161	240	289	33,86
25	25	312	313	4,58	75	308	317	13,69					175	288	337	31,28
27	27	364	365	4,24					135	352	377	20,98	189	340	389	29,07
29	29	420	421	3,95	87	416	425	11,81	145	408	433	19,56	203	396	445	27,14
31	31	480	481	3,70	93	476	485	11,06	155	468	493	18,32	217	456	505	25,45
33	33	544	545	3,47					165	532	557	17,23	231	520	569	23,95

В таблице на странице три он берет упорядочение по катету а. У нас же упорядочение по четности и нечетности триад, угловому коэффициенту. Также в нашу таблицу можно добавить радиус вписанной окружности. Считаем, что если же дано в таблице значение площади треугольника S, то желательно указать и значения, например, площадей луночек Гиппократа S_1 и S_2. Аналогичную работу мы сделали по теме "Пифагоровы четверки". Эту работу можно выполнить со студентами на компьютере.

5) Пифагоровы четверки.

Тройки чисел в математике ассоциируются также с измерениями прямоугольного параллелепипеда. Их можно строить как композиции пифагоровых триад, например, в пределах первой сотни. Например, две триады $3\times4\times5$ и $5\times12\times13$ при их композиции образуют пифагорову четверку, которая численно обозначает грани египетского прямоугольника $12\times15\times16$, 25 и $9\times12\times20$, 25. Необходимо соблюдать правило: два числа кратны 3, но диагональ d не кратна 3, и наоборот. Хороший пример такой четверки $23\times24\times24$, 41. Заметим, что диагональ равную 41 имеют несколько четверок, представляющих числовые параметры параллелипеда.

Далее будем использовать определение тетрады, которая является целочисленной четверкой взаимно простых чисел, образующих пространственную теорему Пифагора.

Приведем несколько примеров примечательных тетрад первого десятка: $1\times4\times8$, 9 – 1/6 куба, $1\times2\times2$,3 – полукуб, $6\times6\times7$,11 – кубоид.

Всего существует сто пятьдесят разных параллелепипедов при измерениях меньших либо равных девяти. А это фундаментальное утверждение: на вопрос "сколько?", дается точный ответ.

Прямоугольные параллелепипеды в зависимости от соотношений между ребрами, исходящими из одной вершины, бывают только трех видов: параллелепипеды с тремя равными ребрами (кубы), параллелепипеды, у которых только два ребра равны между собой (параллелепипеды с квадратным основанием), параллелепипеды с тремя разными ребрами. Тема "Прямоугольный параллелепипед" богата математическим содержанием, интересными задачами и связями с другими разделами курса математики. Между тем в школе прямоугольному параллелепипеду уделяется мало внимания. Обычно изучение этого вопроса ограничивается объяснением приемов вычисления объема и площади его поверхности. Примеры на вычисление объема и площади даются разрозненно, а полученные числа не используются. Если же такого рода упражнения выполнять в определенной системе, применяя подробную запись этапов вычислений, и обращать внимание на сравнение полученных результатов, то учащиеся на доступном им конкретном материале смогут сделать ряд логических выводов. Наблюдения за результатами вычислений, помещенными в таблицах, познакомят учащихся с различным характером изменения величин. Интерес к вычислениям будет стимулироваться желанием найти ответ на возникший вопрос [7].

Известен также систематизированный факт, что у куба наибольший объем и наибольшая площадь поверхности.

В статье В.Г. Болтянского дана таблица одиннадцати пифагоровых тетраэдров, у которых все ребра целые числа. Выделим пять из них из первой тысячи. Пользуясь общим символическим обозначением, обозначим тетраэдр как $a \times b \times c$, с лицевыми диагоналями d_1, d_2, d_3 и пространственной d (не всегда целое) [6].

Таблица 6

Матрица параллелепипедов Эйлера

№	a	b	c	d_1	d_2	d_3	P	S
1	85	132	720	157	725	732	807	56797,73329
2	44	240	117	125	267	244	318	15219,246893
3	231	792	160	825	808	281	957	112800,08234
4	275	240	252	365	373	348	495	43677,455283
5	693	480	480	707	843	500	1025	176478,10771

Известны следующие классические формулы (*). Пусть заданы параметры m,n,t $(m,n,t \in Z)$, удовлетворяющие условию $m^2+n^2=t^2$. Тогда формулы

$$a=n(4m^2-t^2),\ b=m(4n^2-t^2),\ c=4mnt \qquad (*)$$

задают прямоугольный параллелепипед, длины ребер которого a,b,c и длины диагоналей всех боковых граней – целые числа. Такой параллелепипед называют эйлеровым.

Действительно, обозначим диагонали боковых граней d_1, d_2, d_3:

$$a^2+b^2=d_1^2;\ b^2+c^2=d_2^2;\ a^2+c^2=d_3^2. \qquad (**)$$

Выполнив соответствующие преобразования в левых частях формул (**) и учтя условия, наложенные на параметры, придем к формулам:

$$\begin{gathered} a^2+b^2=t^6,\ d_1=t^3; \\ b^2+c^2=m^2\ (m^2+5n^2)^2,\ d_2=m(m^2+5n^2)=m(4n^2+t^2); \qquad (***) \\ a^2+c^2=n^2(5m^2+n^2)^2,\ d_3=n(5m^2+n^2)=n(4m^2+t^2). \end{gathered}$$

Таким образом, d_1, d_2, d_3 принимают целые значения.

Пусть $(m,n,t)=(3,4,5)$. По формулам (*) и (**) получим кубоид:

$$(a,b,c)=(44,\ 117,\ 240);\ (d_1,\ d_2,\ d_3)=(125,\ 267,\ 244).$$

Этот параллелепипед имеет возможные наименьшие размеры среди всех эйлеровых параллелепипедов [3]. Отметим, что в математической литературе всегда дается только один пример параллелепипеда Эйлера.

Интересен тот факт, что существуют целочисленные параллелепипеды, числовое значение объема которых равно площади их поверхности. Таких параллелепипедов ровно десять (табл. 4). Данный факт также относится к фундаментальным утверждениям.

Таким образом, получается содержательное информационное насыщение.

Арифметические модели позволяют нам четко выделить дидактические единицы. Таких параллелепипедов много, и у нас они персонализировались.

№	Длины ребер			S=V
1	3	7	42	882
2	3	8	24	576
3	3	9	18	486
4	3	10	15	450
5	3	12	12	432
6	4	5	20	400
7	4	6	12	288
8	4	8	8	256
9	5	5	10	250
10	6	6	6	216

Интересен тот факт, что, например, для первой тройки в таблице истинно равенство 1/3+1/7+1/42=1/2, так как для всех параллелепипедов, имеющих площадь поверхности равную его объему верно соотношение abc=2(ab+ac+bc)/(2abc) при a<b<c. Откуда вытекает другое интересное равенство: 1/2=1/b+1/c+1/a.

Считаем, что с помощью замечательных триад можно закрепить их школьные знания так, чтобы они легко ориентировались в любом числовом материале.

В заключение хотелось бы сказать, что у учащихся и студентов слабо развита информационная культура, объем ее незначителен и не упорядочен. Поэтому для развития информационных компетенций необходимо упорядочение числовых триад, связанных с ними числовыми закономерностями, геометрическими понятиями, является культурологическим укрупнением информационных, а значит и дидактических единиц. Нам хотелось показать, что некоторые комбинации чисел могут иметь различное информационное насыщение, которое повышает общую информационную культуру, как студентов, так и будущих преподавателей.

Библиографический список

1. *Горяев, В.М.* Матричная параметризация Пифагоровых триад и треугольников Гарднера [Текст]: метод. пособие / Б.П. Эрдниев, В.М. Горяев. – Элиста, 2007. – С. 10-12.
2. *Правдин, А.* Составляем упражнения по математике [Текст] / А. Правдин // Газета "Математика". – 1996. – № 29.
3. *Гельфанд, М.С.* Об эйлеровых кубоидах [Текст] / М.С. Гельфанд // Математика в школе. – 1993. – № 1. – С. 66.
4. *Горяев, В.М.* Информационная упорядоченность и ценность как критерии отбора содержания в личностно- ориентированном обучении математике [Текст] / Б.П. Эрдниев, В.М. Горяев // XII региональные психолого- педагогические чтения Юга России "Развитие личности в образовательных системах южно-российского региона". – Южное отделение Российской академии образования, Пятигорский государственный лингвистический ун-т, 1998. – Ч. 2. – С. 127.
5. *Садовников, Н.В.* Теоретико-методические основы методической подготовки учителя математики в педвузе в условиях фундаментализации образования [Текст]: автореферат / Н.В. Садовников. – Саранск, 2007. – С. 10.
6. *Болтянский, В.Г.* Пифагоровы тетраэдры [Текст] / В.Г. Болтянский // Квант. – 1986. – № 8. – С. 29.
7. *Компанийц, Л.П.* о прямоугольных параллелепипедах, у которых число кубических единиц равно числу квадратных единиц в поверхности [Текст] / Л.П. Компанийц // Математика в школе. – 1962. – № 4. – С. 66-67.

Развитие познавательного интереса как одна из составляющих предпрофильной подготовки учащихся по математике

Г.В. Шумская

Предпрофильная подготовка представляет собой систему педагогической, психологической информационной поддержки учащихся основной школы, содействующей их самоопределению по завершении основного общего образования и более обоснованному выбору пути продолжения дальнейшего образования.

Цели предпрофильной подготовки:

1. Образовательные:

– сделать обучение полезным, осмысленным и интересным;

– повысить успеваемость учащихся по математике;

– усилить мотивацию к изучению предмета;

– научить применять теоретические знания на практике;

– сориентировать учащихся на продолжение обучения в ФМК;

– подготовить (или приблизить) к выбору будущей профессии.

2. Воспитательные:

– научить самостоятельной организации учебной деятельности и оцениванию своих учебных достижений

3. Развивающие:

– способствовать развитию индивидуальности учащегося, общих и специальных способностей, творческого мышления, познавательного интереса (любознательности).

К задачам предпрофильной подготовки учащихся по математике можно отнести:

1) создание условий для дифференциации обучения;

2) достижение более высокого качества общеобразовательной подготовки по математике и подготовки в классах с углубленным изучением математике;

3) формирование творческой самостоятельности и критичности мышления, исследовательских умений и навыков;

4) умение использовать полученные знания в качестве основы и средства для приобретения новых знаний, их дальнейшего расширения и углубления;

5) поддержание интереса к предмету.

На современном этапе развития математического образования наиболее распространена дифференциация по интересам и склонностям учащихся, т.е. вовлечение их в творческие, исследовательские работы (проекты), а также элективная дифференциация, которая в основной школе возможна при ведении курсов по выбору.

Такая работа содействует развитию творческой мысли, наблюдательности, мышления, способностей учащихся, а также создает условия, позволяющие учащемуся реально оценить свои возможности обучения в старшей школе и сделать осознанный выбор профиля.

Дифференциация обучения:

• помогает всестороннему развитию личности, является базой для подготовки учащихся к практической деятельности;

• повышает качество знаний не только по математике, но и по всем другим предметам;

• дает учащимся хорошую специальную подготовку к практической деятельности;

• обеспечивает подготовку к дальнейшему продолжению обучения в профильных классах и в классах с углубленным изучением математики.

Предпрофильная дифференциация включает глубину изложения и изучения материала, объем его вопросов и задач выше обязательного уровня, и осуществляется через кружки, факультативы и спецкурсы.

Познавательную деятельность учащихся стимулирует использование различных форм организации учебного процесса, например: написание рефератов, создание проектов в электронном виде, творческие работы и презентации учащихся.

В нашей школе большое внимание уделяется олимпиадному движению. Олимпиады являются важным элементом школьной жизни. Вообще математические олимпиады – это один из серьезных и очень своеобразных видов математической деятельности, успехи в них – одно из проявлений математических способностей и математического развития. Хотя олимпиады действительно позволяют выделить одаренных ребят, однако при этом далеко не всех, т.к. при решении олимпиадных задач надо проявить кроме способностей некоторые волевые качества, а также быстро работающую изобретательность, что совсем не обязательно для успехов в математике. Многие из наших учеников обладают волевыми и эмоциональными качествами, в частности, целеустремленностью, трудолюбием, склонностью заниматься предметом на высоком уровне, что переходит в страстную увлеченность, чувство некоторого удовлетворения. Олимпиадное движение охватывает детей, проявляющих повышенный интерес к математике и детей способных научиться решать конкурсные и олимпиадные задачи.

Основными задачами олимпиадного движения являются:

• Обеспечение поддержки учащихся в изучении школьных программ;

• Помощь в усвоении учащимися соответствующего курса математики;

• Развитие навыков решения математических задач олимпиадного характера;

• Работа по достижению учащимися уровня углубленного изучения математики;

• Стремление учащихся к самостоятельности и самоконтролю;

• Поиск рационального решения задачи – “красивого” решения.

В итоге обучающиеся совмещают в себе математику, спорт и психологическую устойчивость.

Многие учащиеся занимаются научно-исследовательской деятельностью, целями которой являются – актуализация интереса к фундаментальным наукам, а также предметам учебного плана и развитие представлений о междисциплинарных связях, развитие интеллектуальной инициативы учащихся в процессе обучения, становление научного мышления, творческого подхода к собственной деятельности, профессиональное самоопределение учащихся, обучение новым информационным технологиям.

Формы научно-исследовательской работы включают:

• организацию и проведение различных исследовательских работ;

• издание сборников научно-исследовательских работ;

• изготовление компьютерных программ, видео-пособий, приборов;

• обеспечение преемственности в обучении исследовательским навыкам;

• проведение конференций.

Таким образом, предпрофильная подготовка позволяет обеспечить психологическую устойчивость учащихся, способствует осознанному выбору будущей профессии.

Библиографический список

1. *Купцов, Л.П.* Математические олимпиады школьников [Текст] / Л.П. Купцов, Ю.В. Нестеренко [и др.]. – М.: Просвещение, 1998. – 256 с.
2. *Смирнова, И.М.* Научно-методические основы преподавания геометрии в условиях профильной дифференциации обучения [Текст] / И.М. Смирнова. – М.: Прометей, 1994. – 152 с.
3. *Унт, И.Э.* Индивидуализация и дифференциация обучения [Текст] / И.Э. Унт. – М.: Педагогика, 1990. – 192 с.

Прикладная направленность школьного курса математики как средство реализации предпрофильной подготовки

О.В. Соловьева

Понятие “*предпрофильная подготовка учащихся*” является достаточно новым для отечественной педагогической науки и практики: впервые оно прозвучало в Концепции профильного обучения. Ранее, на фазе общественно-профессиональных обсуждений проекта Концепции, отдельные специалисты высказывались, что введение профильного обучения в 10-11-х классах не должно никак затрагивать основную школу, что профильное обучение может состояться “само собой”, то есть без проведения системной подготовительной работы в конце основной школы и фактического включения основной школы в процесс профилизации.

Однако эта точка зрения не нашла поддержки. Концепция профильного обучения отмечает, что реализация идеи профилизации обучения на старшей ступени ставит выпускника основной ступени перед необходимостью совершения ответственного выбора – предварительного самоопределения в отношении профилирующего направления собственной деятельности. Действительно, если ключевой идеей профильного обучения является идея существенного роста возможностей выбора, то очевидно, что ученик к таковому выбору должен быть подготовлен. Важность подготовки к этому ответственному выбору – в предстоящих условиях более вариативного и дифференцированного профильного обучения на старшей ступени, чем это имеет место в унифицированной традиционной школе сегодня – определяет серьезное значение предпрофильной подготовки в основной школе.

На сегодня здесь достигнут существенный прогресс. Предпрофильная подготовка в основной школе, во-первых, состоялась как особое педагогическое понятие и, во-вторых, получает широкую и интенсивную экспериментальную апробацию. Сейчас уже можно дать ее следующее общее определение. Предпрофильная подготовка – это система педагогической, психолого-педагогической, информационной и организационной деятельности, содействующая самоопределению учащихся старших классов основной школы относительно избираемых ими профилирующих направлений будущего обучения и широкой сферы последующей профессиональной деятельности (в том числе в отношении выбора профиля и конкретного места обучения на старшей ступени школы или иных путей продолжения образования). Практически всеми ныне признается, что предпрофильная подготовка необходима для рациональной и успешной организации профильного обучения в старшей школе.

Одним из ключевых средств предпрофильной подготовки учащихся по математике мы считаем *прикладную направленность обучения математике*, что в практике преподавания выражается в широком использовании на уроках математики в среднем звене *прикладных задач.*

Мы исходим из *содержательного понимания* термина “прикладная задача” считая, что в определении понятия “прикладная задача” доминирующей является содержательная компонента, указывающая область человеческой деятельности, из которой взята задача (“жизненная” или “практическая” ситуация, производство, “задачи из быта” и т.д.). Представителями этого направления являются Е.Я. Жак, Х.О. Поллак, А.А. Канеканян, М.В. Крутихина, а также Ю.М. Колягин и В.В. Пикан, для которых задачи прикладного характера – это задачи, возникающие в "технике и смежных науках; в профессиональной деятельности; в народном хозяйстве и быту".

Исходя из предложенного определения, сформулируем общие принципы подбора и составления прикладных задач:

- четкая постановка проблемы;
- простота содержания;
- возможность обоснования с точки зрения известного математического аппарата;
- отражение используемым аппаратом практического содержания задачи;
- объяснимость результатов решения с точки зрения жизненного опыта.

Проведенные исследования позволили сформулировать концепцию прикладной направленности преподавания математики, которая подчеркивает ее двойственный, диалектический характер: с одной стороны, прикладные задачи, на которые она опирается, снижают уровень общности знаний, при их решении происходит переход от общего к частному, от абстрактного к конкретному, этот путь ведет к прагматизму; с другой стороны, математические знания при решении прикладной задачи включают в себя конкретные знания, способствуя этим самым повышению уровня их общности, объединению знаний, их интеграции, образованию единой системы естественного, математического и технического знания; эта единая система знаний, интегрирующая в сознании учащегося знания по различным дисциплинам, служит для него основой в выборе дальнейшего профиля обучения.

Приведем пример задачи, которая была использована нами в курсе алгебры 9 класса. Задачи такого типа, на наш взгляд, не только актуализировали знания учащихся, повышали их мотивацию к обучению, но и способствовали предпрофильной подготовке.

Задача. *Из орудия, расположенного под углом α к горизонту, произведен выстрел с начальной скоростью v_0. Определите, при каком α дальность полета снаряда будет максимальной (сопротивление воздуха и высоту орудия не учитываем).*

Решение. Введя прямоугольную систему координат, разложим вектор начальной скорости v_0 на горизонтальную и вертикальную составляющие. Пользуясь известными из курса физики формулами, получим:

$$x = v_0 t \cos\alpha, \tag{1}$$

$$y = v_0 t \sin\alpha - \frac{gt^2}{2}. \qquad (2)$$

Найдем время t движения снаряда. В момент t_0 падения его на землю $y = 0$. Следовательно, $0 = v_0 t_0 \sin\alpha - \frac{gt_0^2}{2}$. Отсюда $t_0 = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}$. Подставляя t_0, в уравнение (1), найдем дальность полета: $x_{\max} = v_0 t_0 \cos\alpha = \frac{2v_0^2 \sin\alpha\cos\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$. Дальность максимальна, когда $\sin 2\alpha = 1$, $2\alpha = 90^\circ$, $\alpha = 45^\circ$, тогда $l = \frac{v^2}{g}$. Анализируя полученную формулу, можно заметить, что при возрастании α от 0 до 45° дальность полета снаряда будет возрастать, так как будет возрастать $\sin 2\alpha$ от 0 до 1, при дальнейшем же возрастании α от 45 до 90° $\sin 2\alpha$ будет убывать от 1 до 0 и, следовательно, дальность полета будет уменьшаться.

Предпрофильная подготовка, основанная на реализации прикладной направленности школьного курса математики, что в практике обучения математике выражается в использовании задач такого типа, наиболее успешно способствует выбору учащимися профилирующих направлений в дальнейшем обучении.

Библиографический список

1. *Смирнова, И.М.* Профильная модель обучения математике [Текст] / И.М. Смирнова // Математика в школе. – 1997. – № 1. – С. 32-36.
2. *Терешин, Н.А.* Прикладная направленность школьного курса математики [Текст]: книга для учителя / Н.А. Терешин. – М.: Просвещение, 1990. – 96 с.
3. *Якутова, М.И.* Пути реализации прикладной направленности курса алгебры восьмилетней школы [Текст]: дисс. ...канд. пед. наук / М.И. Якутова. – М., 1988. – 219 с.

Исследовательские задания в обучении математике

С.Ф. Митенева

Во внеурочной работе со школьниками, проявляющими повышенный интерес к математике целесообразно использовать задачи, в которых требуется произвести поиск и исследование новых для учащихся свойств некоторой геометрической фигуры или функции и изложить проделанную работу в виде самостоятельно сформулированных и доказанных теорем, следствий, задач. Эта работа у различных учащихся может отличаться как по объему, так и по конечным результатам.

Задание. Исследовать некоторые свойства произведения двух последовательных натуральных чисел и составить задачи, основанные на этих свойствах.

Решение. До тех пор, пока учащиеся не приобретут некоторого опыта в выполнении заданий подобного типа, им нужна помощь в виде наводящих вопросов или аналогий. В данном случае можно задать такой наводящий вопрос: какой цифрой может оканчиваться произведение двух последовательных натуральных чисел? (Ответ: произведение двух последовательных натуральных чисел может оканчиваться 0, 2 или 6).

Кроме того, важно и то, что из двух последовательных натуральных чисел либо одно делится на 3, либо оба не делятся на 3. Таким образом, произведение двух последовательных натуральных чисел либо делится на 3 (когда один из сомножителей делится на 3), либо при делении на 9 дает в остатке 2 (когда ни один из сомножителей не делится на 3).

В результате ученики могут составить следующие задачи.

1. Доказать, что ни при каком натуральном n число вида $\mathrm{n}^2+\mathrm{n}+1$ не делится на 5.

Решение. Так как число вида $\mathrm{n}(\mathrm{n}+1)$ всегда оканчивается на одну из цифр 0,2,6, то число вида $\mathrm{n}^2+\mathrm{n}+1$ всегда оканчивается на одну из цифр 1,3,7, т.е. не делится на 5.

2. Доказать, что при любой перестановке цифр в числе 54178931 не получится числа, являющегося произведением двух последовательных натуральных чисел.

Решение. Так как среди цифр данного числа нет 0, 2 или 6, то при любой перестановке цифр не получится числа, являющегося произведением двух последовательных натуральных чисел.

3. Доказать, что при любой перестановке цифр в числе 12345670 не получится числа, являющегося произведением двух последовательных натуральных чисел.

Решение. Так как сумма цифр данного числа равна 28, а оно не делится на 3 и не дает при делении на 9 в остатке 2, то при любой перестановке цифр не получится числа, являющегося произведением двух последовательных натуральных чисел.

4. Доказать, что уравнение $9^n=2\mathrm{k}^2+\mathrm{k}-2$ не имеет решений в натуральных числах.

Решение. Запишем данное уравнение в виде $9^n+2=2\mathrm{k}^2+\mathrm{k}$ и умножим обе части на 2, получим $2\cdot 9^n+4=2\mathrm{k}(2\mathrm{k}+1)$. Видим, что в правой части записано произведение двух последовательных натуральных чисел, а число в левой части не делится на 3 и при делении на 9 дает в остатке 4, а не 2. Следовательно, данное уравнение не имеет решений в натуральных числах.

5. Доказать, что число вида 5999994000002 является произведением двух последовательных натуральных чисел.

Решение. Так как сумма цифр числа равна 56, а при делении на 9 оно дает в остатке 2, то данное число можно представить в виде произведения двух последовательных натуральных чисел.

На подобных заданиях школьники учатся находить пути последовательного углубления в исследование той или иной проблемы.

Применение информационно-коммуникационных технологий в процессе обучения математике

Ю.А. Митенев

Одним из направлений реформирования системы образования является информатизация, основанная на внедрении в учебно-воспитательный процесс информационно-коммуникационных технологий. Это внедрение открывает широкие перспективы для повышения эффективности обучения и интенсификации педагогической деятельности.

В настоящее время применение компьютера в школе находит более широкое распространение. Компьютер служит не только предметом изучения на уроках информатики, но и хорошим помощником учителя по многим школьным предметам. Учитель, владеющий компьютерной грамотностью, имеет возможность разнообразить процесс обучения, сделать его более наглядным и динамичным. Использование компьютерных технологий на уроках математики способствует улучшению качества знаний учащихся, расширению их кругозора, а также повышению интереса к предмету.

Применение компьютера в обучении математике очень разнообразно.

1) Компьютер может использоваться как средство обучения.

Отличительной особенностью современного учебного процесса является сочетание традиционных форм обучения с новыми формами, основанными на применении современных компьютерных технологий. Обучающие компьютерные программы получают все большее распространение в образовании. Учителю, владеющему основами компьютерной грамотности, достаточно иметь одну из инструментальных систем, которые обладают большими дидактическими возможностями: интересной формой представления информации с использованием рисунков, звуков, видеоизображений; организацией диалога ученика с системой; возможностью для учителя реализовать свою методику, свои педагогические приемы в процессе преподавания предмета.

2) Компьютер может использоваться как средство, облегчающее вычислительную деятельность учащихся.

Как средство вычисления компьютер можно применять уже в 5-6 классах при изучении действий с дробями, в 8 классе – при вычислении корней квадратных уравнений и др.

3) Компьютер может использоваться как средство, помогающее визуализировать математическую информацию.

Наиболее успешно применение компьютера на уроках геометрии. Изображение геометрических фигур, построение сечений с использованием компьютера меняет характер преподавания этого предмета. Учащиеся предпочитают черно-белым иллюстрациям в учебнике красочные объемные фигуры, менять расположение которых можно простым движением мыши, так же просто можно изменять и параметры этих фигур – быстро и удобно, а главное, наглядно и интересно.

4) Компьютер может использоваться как средство контроля знаний учащихся.

Широкое применение информационно-коммуникационные технологии находят в процессе компьютерного тестирования в целях оценки качества знаний учащихся. Также одним из средств реализации контролирующей функции обучения являются интерактивные презентации. Однако их разработка требует особой подготовки учителя в плане компьютерной грамотности.

Библиографический список

1. *Дьяконов, В.П.* Компьютерная математика [Текст] / В.П. Дьяконов // Статьи Соросовского Образовательного журнала в текстовом формате. – 2001. – № 1. – С. 116-121.
2. *Хеннер, Е.К.* Формирование ИКТ-компетентности учащихся и преподавателей в системе непрерывного образования [Текст] / Е.К. Хеннер. – БИНОМ, лаборатория знаний, 2008.

Вариативность содержания раздела “Начала анализа” в среднем общем образовании

А.М. Маскаева

Одной из актуальных проблем современного математического образования является реализация принципа вариативности при проектировании образовательного процесса. Вариативность выступает как необходимое условие расширения возможностей развития личности при решении жизненных задач в ситуациях роста разнообразия. Вариативность образования рассматривается как тенденция характеризующая, во-первых, способность образования соответствовать мотивам и возможностям различных групп учащихся и индивидуальным особенностям отдельных учащихся; во-вторых, возможность управления изменениями, инновациями в едином образовательном пространстве как пространстве разнообразия. Вариативное образование – это поисковое образование, апробирующее иные, не общие пути выхода из различных неопределенных ситуаций в культуре; это процесс, направленный на расширение возможностей компетентного выбора личностью жизненного пути и на саморазвитие личности [2].

В структуре вариативного обучения математике, как и в любой методической системе обучения, можно выделить 6 основных компонент: цели (результаты), содержание, методы, формы, средства, контроль. Учитывая специфику обучения математике, были выделены дополнительные компоненты: учебно-материальный, нормативно-правовой, контрольно-диагностический компоненты.

В содержании курса математики средней школы можно выделить три блока:

I. содержание соответствующее государственному стандарту образования, обязательное для предъявления всем учащимся и подлежащее усвоению на уровне не ниже удовлетворительного в сроки, отведенные для среднего образования;

II. содержание, которое углубляет и расширяет материал стандарта. Это содержание готовит учащихся к более комфортному изучению важнейших вопросов дальнейшего курса математики, способствует более глубокому и осознанному овладению знаниями, соответствующими стандарту, дает возможности для развития познавательного интереса и математических способностей;

III. содержание этого блока выходит за пределы линий (тем), обозначенных в стандарте. Оно включает в себя вопросы, связанные с историей возникновения математических знаний и их развитием, нестандартные задачи, в частности логического, комбинаторного характера, более широко геометрический материал и т.д. Это является компонентом для развития у учащихся интеллектуальных способностей, творческого мышления и положительной мотивации учения.

Ориентация на новые ценности требует пересмотра содержания образования. Содержанием образования должны стать не только предметные знания и умения, не только способы решения типовых предметных задач, но и способы, механизмы самоизменения и саморазвития учащихся. А для этого важен не только прагматический результат, но, прежде всего, сам процесс движения к этому результату.

Остановимся на рассмотрении вариативности содержания обучения математике на примере изучения элементов математического анализа.

В 1965-1976 гг. осуществляется широкая апробация элементов математического анализа в школьном курсе (в т.ч. на факультативах и в математических кружках), постепенное введение элементов дифференциального и интегрального исчисления в массовую среднюю школу, поиск наиболее рациональной конструкции модели (объема, содержания и порядка изложения).

С 1977 года до конца 80-х гг. происходит стабилизация содержания сведений из математического анализа в школьном курсе, массовое включения начал дифференциального и интегрального исчисления в среднюю школу, введение стабильного учебника "Алгебра и начала анализа" под редакцией А.Н. Колмогорова. Несмотря на контрреформацию содержания математического образования начала 80-х гг., элементы математического анализа в школьном курсе были сохранены. В это время создана современная методика обучения математическому анализу в средней школе Ю.М. Колягиным, Г.Л. Луканкиным, Н.А. Терешиным и др.

Можно выделить следующие основные факторы, обусловившие включение разделов дифференциального и интегрального исчисления в школьную программу в дореволюционной и советской школе:

1. Потребности социально-экономического развития, повлекшие за собой развитие педагогической мысли, рост международного движения за реформу математического образования наравне с умножением естественно-математического знания, а также человеческий фактор (заинтересованность конкретных персоналий, в частности М.Г. Попружен-

ко, К.А. Поссе и др.) способствовали массовому внедрению в отечественную среднюю школу элементов высшей математики в начале XX века.

2. В связи с различными изменениями в образовательной ситуации (переход на восьмилетнее обязательное образование, ориентир на связь обучения с жизнью, переход к систематическому изучению основ наук с V класса и т.п.) в России 50-60-х гг. XX века, вызванными различными, в первую очередь, социально-экономическими и политическими, условиями, пересматривались учебные планы и программы, в т.ч. и по математике. Идеологическая установка на коммунистическое воспитание учащихся и декларация приоритета практической направленности обучения стимулировали положительное решение вопроса о включении элементов дифференциального и интегрального исчислений в школьную программу. Именно математический анализ должен был способствовать формированию научного (диалектико-материалистического) мировоззрения и демонстрировать обширные приложения математики к различным областям естествознания и техники. Помимо этого, традиционно указывалось на широкое образовательное значение этой науки, ее приближенность к современному состоянию математики.

С начала 90-х и по настоящее время происходит поиск оптимального объема и конструкции начал математического анализа в средней школе в условиях фуркации старшей ступени школы на курсы A и B. В целом характеризуется ослаблением составляющей начал математического анализа.

Анализ содержания математического среднего общего образования по разделу "Начала анализа" (курс A) проводился по следующим программам:

1. программа по математике для средней общеобразовательной школы на 1982/83 учебный год;

2. программа по математике для общеобразовательных учреждений на 1996-1997 учебный год;

3. программа по математике для общеобразовательных школ, гимназий, лицеев на 2002-2003 учебный год;

4. программа по математике для общеобразовательных учреждений на 2006-2007 учебный год.

В таблице представлены темы (изучаемые единицы) и отмечено наличие или отсутствие их в содержании раздела "Начала анализа" в программах для общеобразовательных школ за следующие периоды: 1982-1983, 1996-1997, 2002-2003 и 2006-2007 годы.

Таблица

Анализ содержания раздела “Начала анализа” в среднем общем образовании

№	ГОДА ТЕМЫ	1982-1983	1996-1997	2002-2003	2006-2007
1	Понятие о пределе последовательности	+	-	-	*
2	Понятие о пределе функции	+	*	-	-
3	Понятие о непрерывности функции	-	*	-	*
4	Производная суммы и произведения	+	+	+	+
5	Производная частного	+	*	-	+
6	Геометрический смысл производной	+	+	+	+
7	Касательная к графику функции	+	*	-	+
8	Механический смысл производной	+	+	+	+
9	Понятие о производной второго порядка, ее физический смысл	-	*	-	+
10	Таблица производных элементарных функций	-	+	+	+
11	Производная степенной функции с показателем	+	-	-	-
12	Производная функции вида $f(ax+b)$	-	*	+	-
13	Производные обратной функции и композиции данной функции с линейной	-	-	-	*
14	Признак возрастания и убывания функции	+	+	+	+
15	Метод интервалов	+	-	-	-
16	Применение производной к нахождению экстремумов функции	+	+	+	+

17	Построение графиков функции	+	+	+	+
18	Решение задач на максимум и минимум с помощью производной	+	-	-	-
19	Приближенное вычисление значений функции с помощью производной	-	*	-	-
20	Производная в физике и технике	-	*	-	-
21	Простейшие правила нахождения первообразной	+	+	+	-
22	Основное свойство первообразной	-	+	-	-
23	Таблица первообразных элементарных функций	+	+	-	-
24	Площадь криволинейной трапеции	+	+	+	+
25	Интеграл как предел интегральных сумм	+	-	-	-
26	Формула Ньютона-Лейбница	+	+	-	+
27	Применение интеграла к решению простейших геометрических задач	+	+	-	+
28	Интеграл в физике	-	*	-	+
29	Примеры использования производной для нахождения наилучшего решения в прикладных, в том числе социально-экономических, задачах	-	-	-	+
30	Нахождение скорости для процесса, заданного формулой или графиком	-	-	-	+

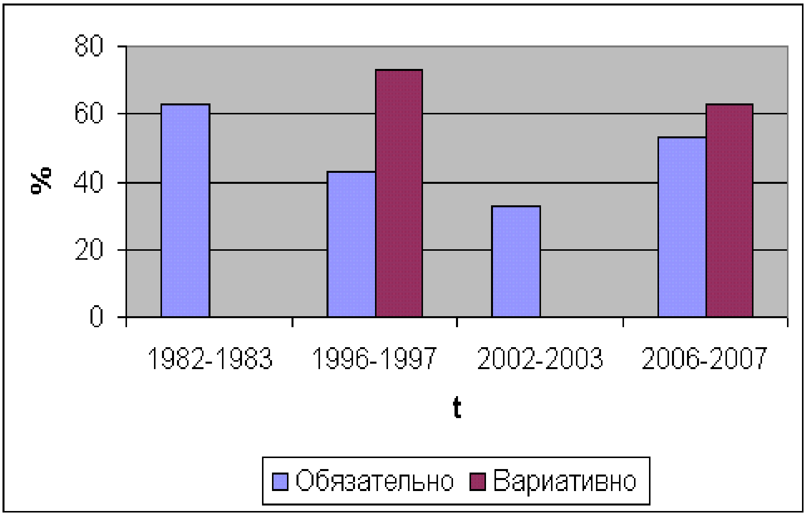
Обозначения:

“+” означает наличие данной темы в обязательном содержании программы;

“-” – отсутствие в обязательном содержании данной изучаемой единицы;

“*” означает, что данная тема допускает вариативность в изучении, т.е. является необязательной (дополнительной).

Был установлен процентный состав обязательного и дополнительного материала за четыре рассмотренных периода, который наглядно представлен на столбчатой диаграмме.



Проведенный анализ содержания темы "Начала анализа" показывает, что в ней присутствует вариативный аспект и наиболее полно отражены принципы вариативного обучения математике. Большая часть содержания темы относится к дополнительному материалу.

Важность изучения данной темы неоспорима. Огромное число приложений производной и интеграла в технике, физике, экономике, медицине и других областях приводит к необходимости их изучения в школе. Хотя большой объем темы остается на самостоятельное изучение школьников, которое должно быть организовано учителем.

Нестабильность содержания раздела "Начала анализа" в средней школе, с одной стороны, и важность его изучения в Высшей школе, с другой стороны, приводит к противоречию в методике обучения математике средней школы, поэтому возникает проблема разработки технологии вариативного обучения математике по разделу "Начала анализа" в общеобразовательных и средних профессиональных учреждениях.

Библиографический список

1. *Асмолов, А.Г.* Стратегия развития вариативного образования: мифы и реальность [Текст] / А.Г. Асмолов // Магистр: независимый психолого-педагогический журнал. – 1995. – № 1. – С. 23-32.
2. Методика обучения высшей математике в средней школе России: история становления [Текст]: хрестоматия для студ. физико-мат. фак.

высш. учеб. заведений / составители Р.З. Гушель, В.П. Кузовлев, О.А. Саввина. – Елец: ЕГУ им. И.А. Бунина, 2002. – 144 с.

3. *Пикан, В.В.* Управление вариативным образованием в школе [Текст] / В.В. Пикан. – М.: АПКиППРО, 2005.

Исследовательские проекты студентов как одно из средств формирования творческой активности будущих инженеров

Е.А. Зубова

В современных условиях интенсивного применения математических методов в естествознании, технике и смежных науках, которые непременно находят свое отражение в изменяющихся программах вузовского математического образования, настоятельно стоит проблема более эффективного использования и развития в обучении математике интеграционных процессов в системе психофизиологических закономерностей и механизмов восприятия сложной информации личностью обучаемого, формирования творческой активности будущих инженеров, развития его творческих способностей, мышления и культуры.

Успешная деятельность будущего инженера зависит от профессиональной компетентности как совокупности внешних и внутренних условий, позволяющих грамотно решать возникающие профессиональные проблемы. К внешним условиям деятельности относится социальная среда. К внутренним условиям – качества специалиста, приобретаемые в процессе обучения, личностный опыт как результат собственной деятельности.

Разработанные вузом образовательные стандарты профессионального образования свидетельствуют о том, что будущий инженер должен отвечать следующим требованиям: уметь на научной основе организовать свой труд, владеть компьютерными методами сбора, хранения и обработки информации, применять их в сфере своей профессиональной деятельности: обладать творческими способностями в профессиональной сфере; на основе системного подхода уметь строить и использовать модели для описания и прогнозирования различных явлений, осуществлять их качественный и количественный анализ; методически и психологически быть готовым к изменению вида и характера своей профессиональной деятельности, работе над междисциплинарными проектами. С другой стороны, исходя из специфики инженерной деятельности, студент технического вуза должен уметь на основе фундаментальных знаний естественнонаучных, социально-экономических, гуманитарных и специальных наук профессионально решать задачи по профилю профессиональной деятельности; обладать развитым творческим мышлением; инициативой и настойчивостью, потребностью к постоянному обновлению и обогащению своих знаний, способностью смело и ответственно принимать нестандартные решения и активно проводить их в жизнь, высоким уровнем общей и профессиональной культуры.

Формирование творческой активности будущих инженеров начиналось с первых дней обучения математики. Так, на первой лекции по математике студентам предлагалось подготовить исследовательские проекты. В исследовательском проекте необходимо было рассмотреть, как происходили великие открытия в исторических аспектах, имеющие связь и влияние на будущую профессиональную деятельность будущих инженеров, и как при их открытии использовался математический аппарат. Сущность исследовательских проектов заключается в следующем: вместе со студентами разбираются образцы творческой деятельности, т.е. примеры того, как выдающиеся ученые "делали открытия", что предшествовало и способствовало этому открытию и т.п. При самостоятельной разработке исследовательского проекта творчество является звеном и механизмом, которое предметно интегрирует математические и специальные знания студентов, мотивирует студентов на творческую деятельность.

Внедрение докладов осуществлялось по мере прохождения новых тем математического аппарата. Например, после изучения темы дифференциальные уравнения студенты выступали с исследовательским проектом, где в результате исторического открытия использовались дифференциальные уравнения.

Пример одного из исследовательских проектов "математические основы изучения фильтрации подземных вод" имеет следующее содержание. Для исследования конкретного процесса фильтрации необходимо составить замкнутую систему уравнений, которая обеспечит получение единственного решения дифференциального уравнения. Для этого надо записать условия однозначности решения или дополнительные условия, включающие: 1) характеристику геометрических размеров исследуемой области фильтрации; 2) характеристику строения фильтрационной среды и числовые или функциональные значения ее физических параметров; 3) исходные граничные условия; 4) при нестационарной фильтрации начальные условия, описывающие форму пьезометрической поверхности в момент времени, принятый за начало отсчета. Для относительно простых гидрогеологических условий получают решения строгими гидромеханическими или аналитическими способами. Во многих случаях используют приближенные методы: гидравлические, численные, метод фрагментирования и др. В сложных гидрогеологических условиях, когда аналитические методы применять трудно или невозможно, используют моделирование.

Студентам так же предлагалось решить задачи, рассматриваемые и поставленные в проекте, самостоятельно. Для этого студенты разбивались на малые группы. Так при групповой форме работы студенты имеют возможность проявлять надситуационную активность и реализовать приемы активизации творческого мышления во взаимной зависимости, актуализируя динамику творческого процесса: интуиция, вербализация, наглядное моделирование, формализация, рефлексия, верификация, – на основе синтеза конвергентного и дивергентного мышления [2].

"Креативность является свойством, которое актуализируется лишь тогда, когда это позволяет окружающая среда...Поэтому формирование креативности возможно лишь в специально организованной среде" [1].

Успех творческой деятельности студентов при работе в малых группах зависит от преподавателя: как он умеет распределять свое внимание среди групп студентов, а также среди каждого студента в группе отдельно. Преподаватель не должен оставаться пассивным во время работы студентов в группах, он должен регулировать межличностные отношения студентов, вселять уверенность и надежду слабым студентам.

Таким образом, внедрение исследовательских проектов в процессе обучения математике являться эффективным средством для формирования творческой активности будущих инженеров.

Однако здесь имеет место и личностный аспект мышления – это мотивация и способности человека (т.е. его отношение к решаемой проблеме, к другим людям и т.д., в чем проявляются и формируются его пробуждения к мыслительной деятельности и его умственные способности).

Таким образом, в ходе учебного процесса происходит наращивание математического и прикладного ресурсов, что способствует реализации профессиональной направленности в обучении математике будущих инженеров технического вуза.

Библиографический список

1. *Дружинин, В.Н.* Психология общих способностей [Текст] / В.Н. Дружинин. – СПб, 1999. – 356 с.
2. *Зубова, Е.А.* Критерии отбора исследовательских профессионально ориентированных задач [Текст] / Е.А. Зубова, В.Н. Осташков,

Е.И. Смирнов // Ярославский педагогический вестник.– Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2008. – № 4(57). – С. 16-22.

Приемы проведения лекционных занятий по математике студентам гуманитарных факультетов

О.Р. Воронцова, С.Ф. Катержина

В вузе традиционной формой передачи знаний студентам является лекция. Лекция (lectio-чтение) – систематическое устное изложение преподавателем учебного материала, в основном теоретического характера. “Лекция – дрожжи интеллектуальной деятельности”, – П. Флоренский. “Лекция направляет учебный процесс, определяет его содержание и уровень. Поэтому от качества лекции зависит и качество обучения в целом. Усвоение хорошо прочитанных лекций достаточно для приобретения студентами необходимых знаний” [1]. Для студентов гуманитарных специальностей (“Юриспруденция”, “Социально-культурный сервис и туризм”) курс математики не является профилирующим и согласно принятым стандартам, как правило, отводится один семестр. Главная цель обучения математике студентов-гуманитариев – психологическая. Эта цель состоит не столько в сообщении знаний, сколько в расширении психологии обучающегося, в привитии ему строгой дисциплины мышления. Поэтому лекция является основным источником учебной информации, а чтение дополнительной литературы не является обязательным.

Статистика такова: 10% аудитории усвоит лекцию в любом случае, 10% не усвоит ни при каких обстоятельствах и 80% – та основная масса, которая воспринимает лекцию именно так, как преподнесет ее лектор. На эту аудиторию и должны быть направлены все усилия лектора. Неотъемлемой частью преподавательской работы должна стать тщательная подготовка к каждой лекции с целью изложения материала на высоком научном и методическом уровне. В лекции должен быть представлен материал, отображающий современное состояние науки (новые численные методы, статистические методы исследования, прогнозирование и др.).

Все это вынуждает преподавателя учиться применять: во-первых, различные педагогические *методы и приемы,* а во-вторых, современные информационные *технологии* и электронные ресурсы в образовательном процессе.

Какие приемы способствуют эффективному проведения лекционных занятий по математике для студентов гуманитарных специальностей?

1. Чтение лекции в режиме Power Point.
2. Эмоциональное изложение.
3. Наглядность, схематизированость материала.
4. Прикладная направленность. Постановка проблем в изложении.
5. Портфолио.

1. Лекции в режиме Power Point

Чтение хорошо подготовленной лекции превращается в спокойную, приятную процедуру. Лектор, использующий в своей работе средства мультимедиа, кликая мышкой не прилагает больших усилий, а пульт дистанционного управления помогает из любой точки аудитории переключиться на следующий слайд, что дает возможность лектору не стоять у доски, а спокойно передвигаться по аудитории в любом направлении. Подготовка таких лекций – трудоемкая работа по созданию слайдов. Как и в традиционных лекциях, где студент занимается списыванием с доски, студенты переписывая лекцию со слайда, часто не успевают осознать того, что они переписывают, а лектор своими комментариями лишь отвлекает их от этого процесса. Чтобы избежать этого, мы предлагаем два выхода:

1. Лекция предварительно помещается в Интернете на учебном сайте кафедры высшей математики. Студенты предварительно знакомятся с материалом лекции и переписывают опорный конспект, т.е. на лекцию приходят уже более или менее знакомыми с материалом.

2. Студентам выдается готовый конспект. В аудитории преподаватель расставляет нужные акценты, обращает внимание на “тонкие” моменты в обсуждаемом материале, приводит примеры, решает задачи, отвечает на вопросы, возникшие по ходу такой лекции. То есть идет живое обсуждение изучаемого материала, в ходе которого определяется уровень усвоения и понимания. Время, затрачиваемое на лекцию, уменьшается, и остаток можно потратить на тестирование, решение задач, увеличение объема лекционного материала. Предлагаемый способ “чтения” лекции лучше для студентов в плане того, что учебный материал слушается и осознается, а не быстро пишется. Однако, это большая предварительная самостоятельная работа для студентов и преподавателей. А самостоятельность – важнейшая компетентность выпускника учебного заведения, т.к. компетентностный подход акцентирует внимание не на сумме усвоенной информации, а на способности выпускника

самостоятельно действовать в профессиональных, жизненных, проблемных ситуациях [2].

2. Эмоциональное изложение

Эмоции – необходимый фактор продуктивной деятельности мозга. Удивление, возмущение, вдохновение, чувство прекрасного и даже чувство юмора – постоянные "попутчики" полноценной интеллектуальной деятельности человека. Очевидна необходимость создания и постоянной поддержки в процессе обучения благоприятного эмоционального фона через постановку проблем, противоречий, парадоксальных ситуаций, включение в лекционный процесс изучения математики элементов литературы, поэзии, музыки, юмора. В качестве примера на лекции можно рассмотреть пример – отрывок басни Крылова " Квартет":

Проказница Мартышка
Осел, Козел, да косолапый Мишка
Затеяли играть квартет
...
Стой, братцы стой! – кричит Мартышка, – погодите!
Как музыке идти? Ведь вы не так сидите...
И так, и этак пересаживались – опять музыка на лад не идет.
Тут пуще прежнего пошли у низ раздоры, и споры, кому и как сидеть...

Вероятно, крыловские музыканты так и не перепробовали всех возможных мест. Однако способов не так уж и много. Сколько? Здесь идет перестановка из четырех, значит, возможно: $P_4 = 4! = 24$ варианта перестановок.

Учебный материал, освоенный в благоприятной атмосфере, лучше запоминается и обладает устойчивыми связями с соответствующим эмоциональным состоянием. Более того, эмоциональный фактор стимулирует мышление и творческий потенциал обучаемого [3].

3. Наглядность, схематизированость материала

Нужно учитывать особенности гуманитарной аудитории, их наглядно-образное мышление и визуально-пространственную память. Мозг оперирует, как минимум, двумя системами памяти: системой визуально-пространственной памяти и системой "зубрежки". Первая – более природна, более естественна для функционирования мозга обучаемого. Вторая – более искусственна и трудоемка. Например, нам не стоит особого труда воспроизвести картину того, где и как мы провели вчерашний вечер. Здесь не требуется особых приемов запоминания информации, ибо она размещается и кодируется визуально-пространственной системой памяти. Вторая система памяти, условно названная американскими нейропедагогами системой “зубрежки”, оказывает нам неоценимую помощь в тех случаях, когда необходимо запомнить отдельные, разрозненные между собой фрагменты информации (даты, номера, имена, числа, фразы). Чем более оторваны элементы информации от прежних знаний и опыта человека, от конкретного контекста, тем больше усилий требуется мозгу для ее запоминания. Недостаток этой системы очевиден: знания, поступившие в “хранилища” памяти через систему “зубрежки”, неустойчивы и непродуктивны. Они, как правило, располагаются в ячейках памяти бессистемно и хаотично. Поэтому, чем больше такого рода информации “складируется” в памяти, тем труднее мозгу отыскать ее. Напротив, визуально-пространственная система памяти систематизирована таким образом, что вся информация, как в библиотеке, хранится строго “по каталогу и контексту”. В этом случае удобно не только “складировать” ее, но и быстро находить и воспроизводить.

Студент понимает и запоминает лучше тогда, когда знания и умения “запечатлеваются” в системе визуально-пространственной памяти [3]. На лекциях материал структурирован в логические схемы отдельных отрезков учебного материала (математических разделов, тем). В них каждый логический элемент рассуждения (понятие или математическое действие) обозначен прямоугольником с соответствующим названием (обозначением). Соединяются они стрелками согласно логическим связям элементов в отрезке материала. Отрадно, что студенты порой находят более оригинальные решения, в перекодировании, переконструировании учебной информации по теме лекционного занятия в визуальную форму (схемы, рисунки, чертежи. . .), обусловленные свежестью взгляда, отсутствием неизбежных профессиональных штампов.

Конструирование структурно-логических схем опирается на принцип когнитивной визуализации, согласно которому визуализация должна выполнять не просто иллюстративную функцию, а “способствовать естественно-интеллектуальному процессу получения нового знания” (А.А. Зенкин [4]).

4. Прикладная направленность. Постановка проблем в изложении

Повышение внимания интереса студентов способствуют связь теории с практикой, обращение к дисциплинам основной специальности (в виде прикладных задач и примеров), апелляции к непосредственным интересам аудитории. Примеры комбинаторных математические задачи с профильным контекстом:

Задача 1. В компьютере адвоката N появился вирус, который предложил пользователю ответить на семь вопросов, записанных с помощью древнеегипетских иероглифов. На каждый вопрос можно ответить только "ДА" или "НЕТ". Если в течение двух с половиной часов правильная комбинация ответов не будет введена, то вся хранимая в компьютере информация уничтожится. Адвокат решил перебрать все возможные комбинации ответов "ДА","НЕТ" на 7 непонятных вопросов, пока не обнаружится правильный вариант. На составление комбинации и ввод ее в компьютер адвокат тратит одну минуты. Успеет ли он сохранить информацию, если верная комбинация окажется последней? (Сколько времени потребуется, чтобы перебрать все комбинации?).

Задача 2. Преступник знает, что шифр составлен из цифр 1,2,6,9, но не знает, в каком порядке их набирать. Какова вероятность того, что:

1) преступник откроет сейф с первой попытки;

2) первые две цифры преступник наберет верно.

5. Портфолио – образовательная биография студента

Метод портфолио представляет собой педагогическую технологию сбора и систематизации объектов, созданных с определенной целью. Информация, включаемая в портфолио каждого студента, классифицируются нами следующим образом:

– работы студентов, созданные в ходе обычных аудиторных занятий (конспекты лекций, семинарских занятий, лабораторные работы);

– самостоятельные работы студентов, созданные вне аудитории (презентации лекционного и практического материала, рефераты, доклады, математические кроссворды и т.п.);

– оценки и отзывы (результаты семестровых самостоятельных и контрольных работ, сертификаты, дипломы, публикации, а также указания и наблюдения преподавателей о работе студента) [5].

Цели создания портфолио могут быть разными:

– формирование умения самооценки образовательного уровня студента;

– самоорганизация учебной, познавательной, исследовательской деятельности;

– развитие навыков отбора для портфолио презентабельного материала;

– сбор документации, отражающей прогресс обучающихся;

– отчет студентов перед администрацией;

– принятие решения об итоговой оценке на основе анализа учебной деятельности.

Портфолио-метод развивает: дисциплинированность, аккуратность, ответственность, целеустремленность, плановость, соперничество и др.

Портфолио как метод оценки основан на том, что студента в течение определенного периода собирают в рабочие папки (портфолио) и систематизируют все выполненные работы, а также комментарии и внешние оценки этих работ. Для наиболее эффективного использования этого метода необходимо тщательно подбирать критерии оценки портфолио и знакомить с ними студентов еще до начала работы над своими портфолио. Портфолио позволяет проводить оценку всего учебного процесса с самого начала, поскольку оно периодически пополняется в течение всего периода обучения.

Метод портфолио может быть реализован по типу презентации, при этом каждому отдельному этапу выполненной работы может соответствовать слайд, содержащий информацию в виде текстовой записи, таблицы или графического изображения.

Библиографический список

1. *Кудрявцев, Л.Д.* Мысли о современной математике и ее преподавании [Текст] / М.: Физматлит, 2008. – С. 39.
2. Стратегия модернизации содержания общего образования: Материалы для разработки документов для обновления общего образования [Текст] / М.: ООО “Мир книги”, 2001. – С. 66.
3. *Блейк, С.* Использование достижений нейропсихологии в педагогике США [Текст] / С. Блейк, С. Пейп, М.А. Чошанов. – http://portalus.ru (c), 2007.
4. *Чошанов, М.А.* Гибкая технология проблемно-модульного обучения [Текст] / М.: Народное образование, 1996. – С. 157.
5. *Андресен, Б.Б.* Мультимедиа в образовании [Текст] / Б.Б. Андресен, К. Ван ден Бринк. – М.: Дрофа, 2007.

Принцип вариативности в проектировании спиралей фундирования знаний по математическому анализу

Е.И. Смирнов, А.И. Шабалина

Педагогический процесс подготовки учителя естественно-научного профиля нужно рассматривать как формирование целостной системы профессионально-педагогической деятельности. На первом, профессиональном, этапе должны формироваться предметные знания и умения, предназначенные для формирования ближайшего видового обобщения базовых учебных элементов школьной математики, на втором этапе, фундаментализации, осуществляется их глубокое теоретическое обобщение, которое на третьем, методическом, этапе включается в структуру профессиональной деятельности как средство реализации учебно-воспитательных функций педагога. Чтобы включение обобщенных знаний происходило безболезненно, они должны быть организованы в форме, наиболее удобной для их освоения школьниками. Именно эту функцию перестройки освоения предметных знаний в соответствии с целями и задачами педагогической деятельности выполняет фундирование и наглядное моделирование. Структурообразующим фактором проектируемой дидактической системы профессиональной подготовки учителя естественно-научного профиля является ***концепция фундирования***, разработанная В.Д. Шадриковым и Е.И. Смирновым. В связи с выявленными тенденциями было предложено углубить теоретическую и практическую составляющие математического образования будущего учителя естественно-научного профиля, изменив содержание и структуру естественно-научной и методической подготовки в направлении усиления школьного компонента естественно-научного образования с последующим фундированием знаний и опыта личности на разных уровнях.

Фундирование – это процесс приобретения, освоения и преобразования опыта личности при создании механизмов и условий (психологических, педагогических, организационно-методических, материально-технических) для актуализации и интеграции базовых учебных элементов школьных и вузовских знаний и видов деятельности с последующим теоретическим обобщением и расширением практического опыта освоения структурных единиц, раскрывающих их сущность, целостность и трансдисциплинарные связи в направлении профессионализации знаний и вариативности индивидуального опыта, формирования профессиональных компетентностей будущего педагога.

Концепция фундирования школьных математических элементов (знаний, умений, навыков, математических методов) предполагает развертывание в процессе математической подготовки студентов следующих компонентов:

– определение содержания уровней базового школьного учебного элемента (знания, умения, навыки, математические методы, идеи, алгоритмы и процедуры);

– определение содержания уровней и этапов (профессионального, фундаментального и технологического) развертывания базового вузовского учебного элемента;

– определение технологии фундирования (диагностируемое целеполагание, наглядное моделирование уровней глобальной структуры, локальной модельности, управления познавательной и творческой деятельностью студентов, блоки мотивации базовых учебных элементов);

– определение методической адекватности базовых школьных и вузовских (фундированных) учебных элементов на основе современных методологических концепций.

Фундирование как механизм и метод формирования нового качества профессиональных компетентностей будущего учителя характеризуется следующим компонентным составом:

1. *Освоение современных областей науки на основе выявления генезиса базовых учебных элементов и способов деятельности от истоков до настоящего состояния:*

– представленность, освоенность и генезис научного знания и приемов научной деятельности: нанотехнологии и фрактальная геометрия, информационно-коммуникационные технологии и вейвлеты, комплексность геоэкологического картографирования и геоинформационных систем, дистанционное зондирование экосистем, восприятие поликодовой информации и брендинговые модели в рекламе и др.;

– вскрытие историко-генетических оснований значимости базовых учебных элементов раздела науки в интегративной связи с дидактикой учебного предмета;

– реализация исследовательского подхода, в том числе проектного метода (с презентациями и использованием компьютерных технологий и мультимедиа) по широкому спектру современных достижений науки и возможностей применения в профессиональной деятельности;

– формирование элементов научного мышления и методологической культуры освоения элементов научного познания в решении учебных и профессиональных задач.

2. *Создание условий (психологических, педагогических, организационно-методических, материально-технических) для обеспечения целостности, иерархичности и уровневости, спиралевидности и направленности развертывания содержания профессионально-педагогической подготовки учителя в опоре на выделение и освоение базовых учебных элементов и приемов деятельности в единстве структурно-образующих компонентов:*

– развертывание целостной системы дидактических модулей содержания предметной подготовки “ риманова поверхность модуля” со структурообразующим школьным компонентом;

– освоение содержания дидактического модуля учебного предмета в единстве теоретического, практического, прикладного, эвристического, конкретно деятельностного и школьного компонентов;

– выделение, обоснование и освоение базовых учебных элементов школьного (довузовского предметного опыта) и вузовских учебных элементов с последующим теоретическим обобщением и практическим расширением структурных единиц, раскрывающих их сущность, целостность, вариативность, сквозные и трансдисциплинарные связи.

3. *Преемственность содержательных линий школьного и вузовского предметного образования и вариативность способов решения педагогических и учебных задач на уровне трансдисциплинарных взаимодействий:*

– определение содержания (фундаментального и технологического) уровней и этапов развертывания базовых школьных учебных элементов и приемов деятельности (довузовского предметного опыта) в вузовском учебном предмете (знания, умения, навыки, частно-предметные методы, идеи, алгоритмы и процедуры);

– проектирование взаимопереходов знаково-символической деятельности (вербальной, логической, наглядно-образной, наглядно-действенной) в дидактическом анализе базовых учебных элементов и действий;

– актуализация передового педагогического опыта предметной деятельности в интерактивном режиме с использованием ИКТ адекватно педагогическим целям и задачам;

– интеграция содержания, приемов и методов освоения школьного и вузовского учебного материала, трансдисциплинарных взаимодействий на уровне связей, системной интеграции и содержательно-процессуального симбиоза.

4. *Создание условий (психологических, педагогических, организационно-методических, материально-технических) для развития креативности, поисковой и творческой активности студентов в решении учебных и профессионально-ориентированных задач, в том числе с использованием ИКТ:*

– освоение научного и педагогического знания в его новейших проявлениях с использованием информационно-коммуникационных технологий, ресурсов телекоммуникаций, глобальных и локальных информационных сетей, и в интегративной связи со школьным знанием и приемами деятельности;

– создание и освоении новых учебно-лабораторных комплексов, специальных курсов, учебных дисциплин и методических материалов, форм организации учебной и научной деятельности студентов на стыке моделирования-практики, новейших теории – технологии-средств и интеграции наук, в том числе с использованием ИКТ и для интересов региона и корпоративного сектора;

– творческое освоение практико-ориентированного поля будущей профессиональной деятельности: зондирование экосистемы и инженерно-экологические изыскания; полевые и фольклорные , вычислительные и технологические, педагогические практики; создание банков информации с помощью ИКТ (диалектный материал, карты Атласа говоров, геологические карты, технологический цикл подготовки и изготовления издательской продукции на современном техническом уровне, подготовка рекламных проектов и анализ готовых рекламных продуктов и др.

Принципиальным отличием структурообразующего принципа фундирования является определение основы для спиралевидной схемы моделирования базовых знаний, умений, навыков естественно-научной (в том числе, математической) подготовки студентов педвузов. Начиная со школьного предмета через послойное фундирование его в разных теоретических дисциплинах, объем, содержание и структура естественно-научной подготовки должны претерпеть значительные изменения в направлении практической реализации теоретического обобщения школьного знания по принципу "бумеранга". Такое фундирование знаний выводит на уровень, когда педагог вместе со студентом, уже владеющим предметной стороной, начинает отрабатывать с ним методическую сторону преподавания. Школьные знания станут выступать структурообразующим фактором, позволяющим отобрать теоретические знания из естествознания более высокого уровня, через которые происходит фундирование школьного знания. Другой слой фундирования может образовать совершенствование и углубление практических умений, постановки эксперимента, исследовательского поведения студентов, проектируемых ориентировочной основной учебной деятельности. Целостность и направленность проектируемой дидактической системе придает развертывание спиралей фундирования базовых школьных учебных элементов (БУЭШ) посредством построения родового теоретического обобщения и технологического осмысления видовых его проявлений.

Рассмотрим более подробно третий компонент, который характеризует фундирование как механизм и метод формирования нового качества профессиональных компетентностей.

Необходимо, чтобы учебная деятельность была адекватна формируемым знаниям. Поэтому обобщенность, гибкость оперирования знаниями зависят не только от уровня операционального развития личности, но и от предметно-специфических знаний, которые определяются структурой и способами формирования знаний.

Основная задача ***локального фундирования*** – создание педагогических условий для целостного профессионально-ориентированного когнитивного процесса структурного анализа видового обобщения школьного учебного элемента.

Учебная деятельность, включая осуществление режима, связанного с ней, способы коммуникации, предполагает употребление и освоение разных систем знаково-символических средств, использование формализованного языка, научной символики и широко применяет визуальные средства представления информации – схемы, диаграммы, графики, карты, чертежи.

Эффективное усвоение любых знаний необходимо предполагает использование системы визуальных, вербальных и других знаково-символических средств. Визуальные (и другие) знаково-символические структуры – оптимальное и эффективное средство концентрации знания и психопедагогических импульсов для разнотипных людей.

Сопоставление вербальных и визуальных символических систем раскрывает сложное взаимодейтсвие и использование в зависимости от задач и обозначаемых объектов. В обучении должен широко использоваться перевод вербально представленной информации в различные знаково-символические визуальные системы (кодирование) и обратно (декодирование).

Характерной особенностью структурного анализа видового обобщения является взаимопереход когнитивных сфер: знаково-символической, вербальной, графической, тактильно-кинестетической и деятельностной (наглядно-действенной). Каждая из деятельностей связана с активизацией соответствующих когнитивных структур мышления индивида, влияние которых на понимание существенных связей в объекте восприятия неоднократно подчеркивалось психологами. Этим определяется вариативность в развертывании спиралей фундирования по модальностям восприятия.

Например, для учебного элемента "производная" функции одного действительного переменного как видового обобщения школьного учебного элемента "производная" В.В. Афанасьевым, Е.И. Смирновым, В.Д. Шадриковым разработана следующая модель (рис. 1).

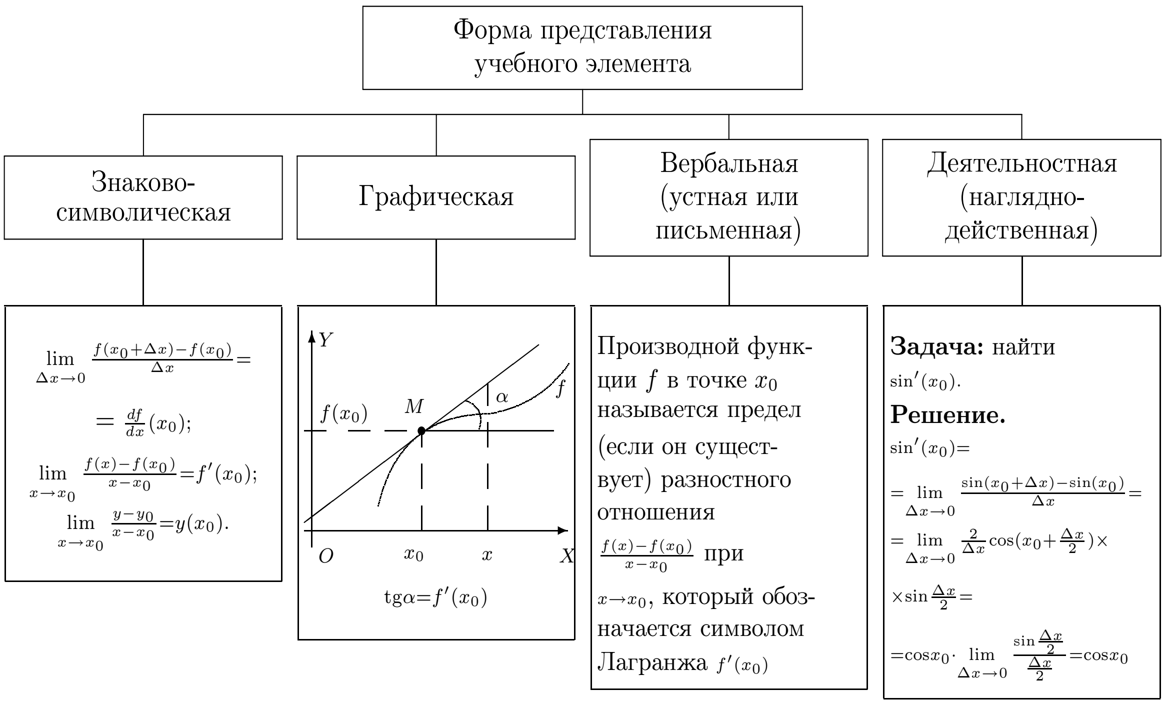


Рис. 1

Проектировать спирали фундирования можно по содержательному принципу: дифференцирование в классе рациональных функций, дифференцирование в классе иррациональных функций, дифференцирование в классе трансцендентных функций.

Фундирование – это есть постоянное углубление теоретических знаний, направленное на развитие и дальнейшее совершенствование профессиональных качеств педагога. Фундирование характеризуется постоянным углублением способностей педагога исходя из требований к школьному образованию. Основу фундирования образует теоретическое обобщение, ориентированное на поэтапное ("спираль фундирования") движение к познанию сущности. Благодаря такому поэтапной реализации образовательной программы формируется устойчивая система понятий в области построения высшего образования.

Наиболее адекватной формой и средством развертывания дидактических процессов фундирования и наглядного моделирования является структура дидактического модуля. Дидактический модуль, являясь целостной структурой совместной деятельности учителя и ученика в процессе решения педагогических задач, может быть исследован также как компонент педагогической системы и, более того, психологической системы деятельности ученика. С точки зрения деятельностной теории учения дидактический модуль должен содержать ориентировочную, исполнительскую и контрольно-коррекционную части. Это определяет четыре основных компонента дидактического модуля (ДМ):

– ориентировочную основу деятельности (как учителя так и ученика);

– информационную основу деятельности (как учителя так и ученика);

– блок управления и контроля учителем когнитивной деятельности ученика;

– блок рефлексивного контроля и внешних связей.

Например, первый блок содержит:

– введение (описание структуры и состава деятельности, особенности учебного предмета, интеллектуальная разминка и актуализация мотивов);

– базу данных и базу знаний, необходимых для освоения нового материала (преемственность деятельности);

– аннотированную учебную программу, детализированную по уровням усвоения знаний, ступеням абстракции и практической деятельности, мотивации и продуктивности учебной деятельности (развернутость содержания);

– пласты спиралей фундирования (и их локальные фрагменты в динамике), структурированные по учебным элементам и необходимо содержащие школьный (профессионально-направленный) и мотивационный компонент (обобщенность деятельности);

– интегративную экзаменационную программу (интегративные ЗУНМА, творческие задания, общеучебные умения, профессионально-предметный базис) как свернутость деятельности и условие для преемственности ДМ.

Требования к проектированию ДМ включают в себя: преемственность содержательных линий школьного и вузовского предметов; использование современных форм и средств представления знаний (логической, реляционной, семантической, продукционной, фреймовой); развертывание и свертывание спиралей фундирования базовых учебных элементов школьного предмета; блоки мотивационно прикладных задач, оснащающих спирали фундирования и др.).

При этом возможна такая спираль фундирования базового школьного понятия производной в фундаментальном математическом образовании:

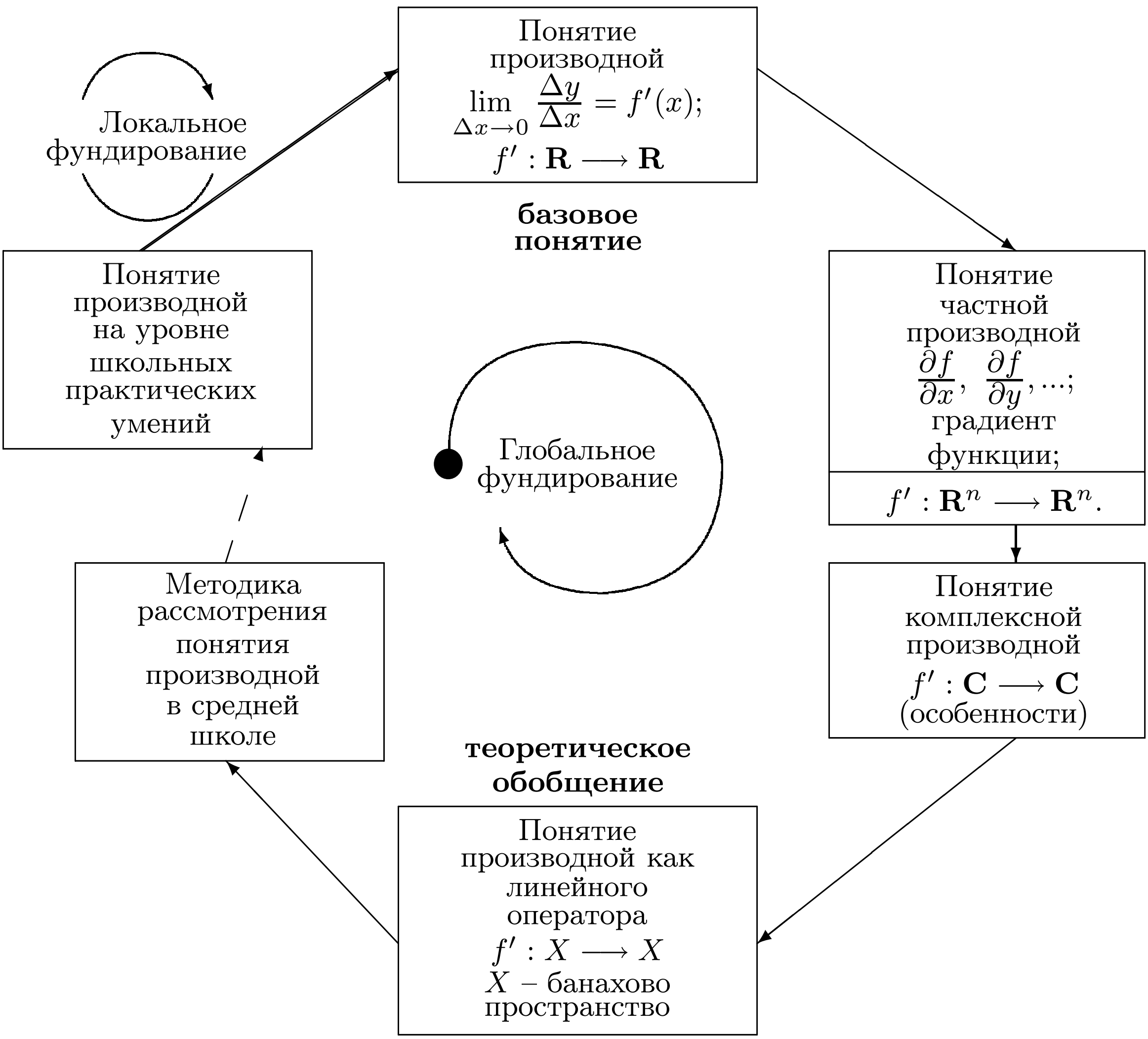


Рис. 2. Схема фундирования школьного знания (понятие производной)

В данном примере необходимо построить теоретическое обобщение производной на уровне банаховых пространств. Пусть X,Y – банаховы пространства, $U \subset X$ – открытое множество в X, $f : U \to Y$ и $x_0 \in U$. Говорят, то существует производная f' функции f в точке x_0, если выполнено условие (f' – линейный оператор из X в Y)

$$f(x_0+h)–f(x_0)=f'(x_0)h+o(h),$$

где $\lim_{h\to 0}(o(h) \,/\, ||h||)=0$.

Теперь, если X=Y=$\mathbf{R}$, то f' – одномерная производная (число); если X=$\mathbf{R}^n$, Y=$\mathbf{R}$, то f'=($\partial f/\partial x_1$,..., $\partial f/\partial x_n$) – градиент функции f в точке x_0, а его компоненты – частные производные f по переменным; если X=$\mathbf{R}$, Y=$\mathbf{R}^n$, то f' – вектор-столбец производных компонентных функций; если X=Y=**C**, то f' – комплексная производная (комплексное число); если X=$\mathbf{R}^n$, Y=$\mathbf{R}^m$, то f' – матрица Якоби частных производных первого порядка.

Существование производной функции f в точке $x_0 \in X$ означает нечто большее, чем просто существование особого вида действительного числа tg α, вектора $(\partial f/\partial x, \partial f/\partial y)$, комплексного числа (тоже вектора) $(\partial u/\partial x, -\partial u/\partial y)$, матрицы Якоби $(\partial f_i/\partial x_j)_{ij}$ линейного оператора $A{:}\Omega \to Y (x_0 \in \Omega)$. Это прежде всего возможность аппроксимации (приближения) функции f в окрестности точки x_0 линейным отображением так, что сущность понятия производной заключена в самой возможности линеаризации функции в окрестности исследуемой точки.

Построение такой модели несет в единичном и особенном своем проявлении все основные черты теоретического знания о процессе фундирования базовых учебных элементов школьной математики. Создание системо-генетического блока спиралей фундирования БУЭШ позволяет определить устойчивое ядро содержания учебной информации, проектирующее элементы ориентировочной основы учебной деятельности студентов.

С другой стороны, проецирование теоретического обобщения (родовое понятие) на видовое разнообразие частных случаев в форме актуализированных практических приложений создает устойчивый мотивационный эффект в процессе усвоения школьного математического знания (в данном примере – понятия производной).

Основу для фундирования в виде базовых учебных элементов школьной математики (БУЭШМ) составляют 7 содержательных линий: числовая, функциональная, геометрическая, тождественных преобразований, уравнений и неравенств, стохастическая и алгоритмическая. Каждая содержательная линия определяет базовые знания, умения, навыки и методы вузовской математики, распределенные по оптимальному набору учебных предметов и дисциплин.

Спираль фундирования для понятия производной развертывается в течение 3-х лет обучения в вузе в курсе математического анализа. Она включает в себя несколько блоков. На протяжении I и II семестров изучается производная функции одной переменной. Таким образом, происходит освоение материала всеми студентами как части глобальной спирали.

Но даже развернутая во времени и смоделированная спираль фундирования не будет нести позитивную познавательную и профессиональную компоненту будущей деятельности, если не спроектировать приемы и элементы учебной деятельности в течение всего процесса обучения, проявляющие ее компонентный состав, на структуру, особенности восприятия и понимания, стимулирование мотивационной и эмоциональной сферы обучаемых, определение контрольно-коррекционных механизмов развертывания спиралей фундирования.

Студенты должны изначально видеть целостность спирали фундирования, понимать цель и последовательность ее изучения. Каждый блок должен быть оснащен мотивационным блоком, должна быть продумана методика рассмотрения понятия производной.

Технологическими компонентами управления усвоением являются:

Правило 1. Математическое знание должно рассматриваться по возможности в четырех сферах: *знаково-символической, вербальной, графической и конкретно-деятельностной.*

Правило 2. Математическое знание должно проявляться в процессе освоения обучаемым не менее чем в 10 конкретизациях (5 качественных).

Правило 3. Математическое знание предполагает как компонент обучающей деятельности с ним *логический анализ* содержания и формы.

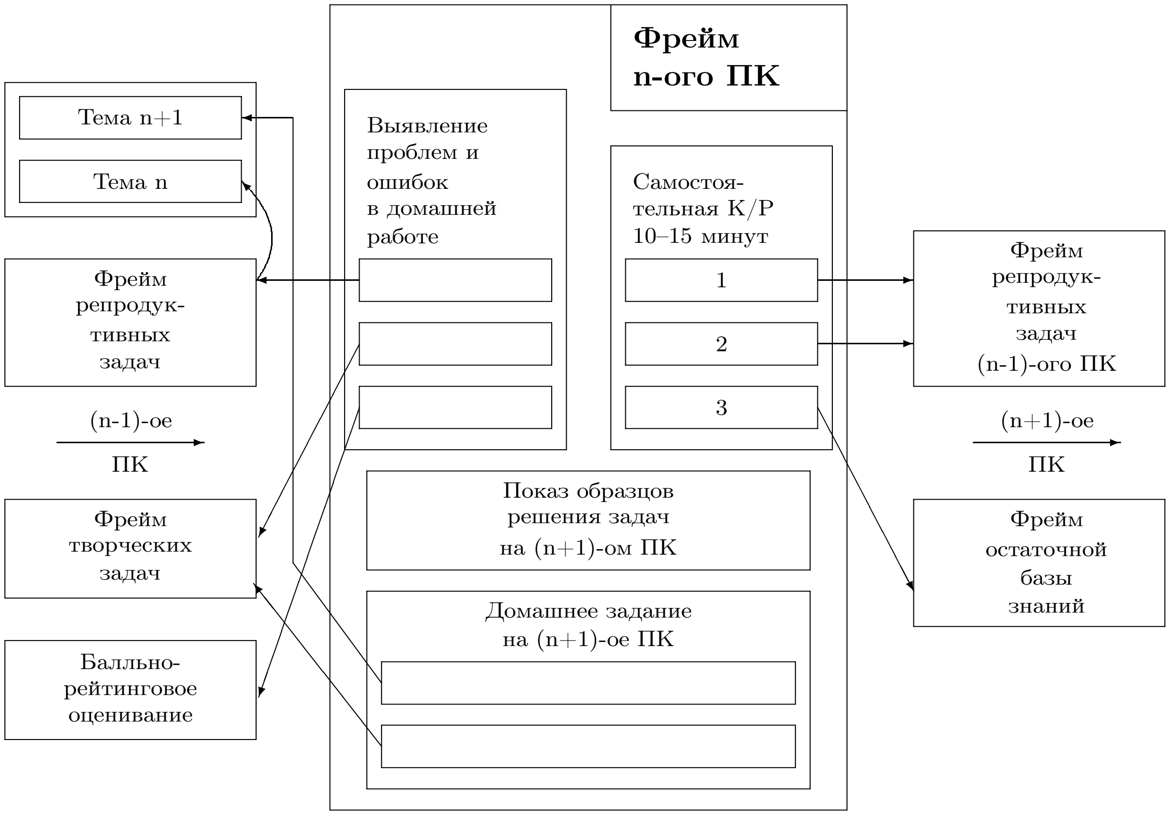
Правило 4. *Мотивационная сфера* обучаемого в процессе освоения математического знания должна быть материализована 2–3 *модельными задачами* (в том числе для спиралей фундирования).

Правило 5. Математическое знание должно проявляться *как часть более общего целого знания*, в котором оно имеет свои особенности, ограничения и форму.

Правило 6. Математическое знание должно рассматриваться *в генезисе* своего становления, во взаимосвязи с историческим аспектом формы и содержания.

Правило 7. Математическое знание должно иметь форму представления посредством *числа (действительного или комплексного), геометрической фигуры в процессе конкретно-деятельностных процедур.*

Практическое занятие проводится по следующей схеме (ПК – практические занятие):



В формировании мотивационной сферы обучения математики немаловажную роль играет проявление познавательного интереса у студентов путем развертывания генезиса математических идей в историческом аспекте. Работа в малых группах дает возможность, в частности, оптимизировать число разрабатываемых исторических тем, равно как и их целостность раскрытия сущности математического факта. Например, семестровые рефераты, отражающие историю становления математических понятий в содержательном, прикладном, хронологическом аспектах, создают основы для обсуждения на коллоквиумах, научных конференциях, стимулируют развитие творческой активности студентов, умение работать с научной и художественной литературой.

Результативность обучения математике при условии диагностируемого целеполагания и определенной системы измерителей качества усвоения учебного материала выявляется организацией различных средств контроля и обратной связи, каждый из которых имеет свою специфику и качественные отличия.

Итак, в качестве мотивационных блоков для внедрения спирали фундирования понятия производной в образовательный процесс вуза на первом году обучения могут быть использованы следующие формы:

– лекции и практические занятия;

– исторические рефераты, научные доклады на предмет изучения комплексной производной;

– рассмотрение реальных задач и определение важности знания понятия производной при их решении (задачи о сохранении углового растяжения, о подъемной силе крыла и пр.);

– работа в малых группах (3-4 студента), индивидуальные консультации; обмен информацией между малыми группами, анализ и публичная оценка;

– публичные защиты рефератов-исследований с помощью процедур презентаций;

– вопросники в качестве системы контроля;

– интерактив в блогах (компьютерные технологии, Internet).

Лекции и практика, научные доклады, задачи должны отображать связь со спиралью фундирования. Рефераты после их рассмотрения и представления студентами должны претерпеть совместное обсуждение студентами информации в малых группах для лучшего усвоения материала.

Помимо традиционных форм можно использовать компьютерные технологии и Internet для организации интерактива в блогах по рассматриваемой теме.

Библиографический список

1. *Афанасьев, В.В.* Формирование творческой активности студентов в процессе решения математических задач [Текст] / В.В. Афанасьев. – Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 1996. – 168 с.

2. *Смирнов, Е.И.* Технология наглядно-модельного обучения математике [Текст] / Е.И. Смирнов. – Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 1998. – 335 с.

3. *Афанасьев, В.В.* Подготовка учителя математики: инновационные подходы [Текст] / В.В. Афанасьев, Ю.П. Поваренков, Е.И. Смирнов, В.Д. Шадриков. – М.: Изд-во ” Гардарики “, 2001. – 384 с.

4. *Буракова, Г.Ю.* Дидактический модуль по математическому анализу: теория и практика [Текст] / Е.И. Смирнов, А.Ф. Соловьев, Г.Ю. Буракова. – Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2002. – 181 с.

Исторический компонент математико-методической культуры учителя

М.Ф. Гильмуллин

Многие исследователи профессионально-педагогической направленности математической подготовки будущих учителей требуют объединять общенаучную и методическую линии. Но на практике эти линии часто оказываются связанными только формально. Характерно, например, даже при выделении целей профессионально направленной историко-математической подготовки разделяются цели формирования общей, математической и методической культуры.

Под методической культурой обычно понимается овладение основами проектирования и конструирования учебно-воспитательного процесса, умение организовать учебно-познавательную деятельность школьников. Содержание понятия методической культуры учителя математики специализируется к историко-математической подготовке С.В. Белобородовой [1] как умения и навыки, которые требуется сформировать:

– мотивации введения новых понятий средствами истории математики;

– выбора оптимального варианта изложения данной темы на основе историко-генетического метода;

– оптимального сочетания исторического и логического при изложении содержания;

– варьирования уровней строгости, используя историко-математические сведения;

– привлечения историко-математических сведений для установления межпредметных связей;

– привлечения историко-математических сведений для реализации эвристического метода обучения;

– грамотного отбора историко-математического материала;

– привлечения опыта использования историко-математических сведений других учителей.

Мы считаем, что в рамках историко-математической подготовки следует выделить единый компонент, нацеленный на овладение будущим учителем историко-математических знаний, а также эффективную организацию учебной математической деятельности учащихся, используя исторический опыт добывания знаний. Такую составляющую подготовки учителя будем называть формированием исторического компонента математико-методической культуры будущего учителя.

В основу понимания математико-методической культуры закладывается основное назначение современного учителя – средствами обучения предмету оказывать учащемуся своевременную помощь в комплексном развитии его личности [4]. Формирование и развитие ученика будет действенной, если и только если учитель сможет воздействовать на все сферы качеств его личности – мотивационно-ценностную, деятельностно-волевую, образно-знаниевую – в их взаимосвязях. Для этого учителю необходимо умело организовать познавательную учебную математическую деятельность учащихся с помощью, прежде всего, средств своей математико-методической культуры, которая должна быть развита у него на соответствующем уровне.

Таким образом, математико-методическая культура учителя нами понимается как специальный вид профессиональной культуры. Она формируется, по определению А.Л. Жохова, в трехмерной модели образовательного процесса [3]. В первую очередь, это результат взаимопроникновения и взаимного дополнения двух процессов: ознакомления со сведениями из соответствующей области профессиональных знаний ("образованность") и совершенствования операционных основ своей профессии ("мастерство"). С таким представлением в той или иной мере согласуются и данные исследований других ученых (В.П. Беспалько, В.М. Монахов, И.С. Якиманская и др.). В диалектическом сочетании этих двух составляющих – сущность и профессионализма, и любой педагогической технологии. В результате учащийся овладевает определенным набором социальных навыков – компетенций. Но культура профессионала требует присутствия и третьей составляющей образовательного пространства, его общекультурной основы – диалога культур, сопричастности и творчества ("содуховность"). Так организованный образовательный процесс называется культуросообразным.

Дальнейшее развитие математико-методической культуры будущего учителя должно стать сквозной идеей и направленностью профессиональной подготовки.

Для определения исторического компонента математико-методической культуры учителя А.Л. Жохов употребляет элементарный объект знания, называя его "это". Под "это" понимается попадающий в поле познавательной деятельности учащегося или учителя математический объект, метод решения задачи, способ рассуждения, метод деятельности, фрагмент теории и т.п. Применительно к предмету курса истории математики он считает, что минимально необходимый уровень математико-методической культуры современного учителя задается его умениями обоснованно и действенно отвечать на следующие вопросы, группированные по двум основным составляющим методики – это:

1. владение учебным математическим материалом;

2. владение методами обучения и воспитания средствами обучения предмету.

Первая составляющая отвечает на следующие вопросы:

1. Что это? Каковы его связи с другими это? (Умение давать содержательную характеристику свойств, состава и отношений объекта с другими объектами).

2. Зачем это, где и для чего применяется внутри и вне математики, что дает человеку, Вашему ученику?

3. Как, когда и с помощью чего познавать это? Как возможно развить это, как творить новое в математике?

4. Как и где, при разрешении каких ситуаций возникло или возникает это? Кто был у истоков его возникновения? Как объясняет или может объяснить это ученик? В каких задачах это "живет"? Какова логика становления и развития знаний об этом и способов оперирования с ним?

Вторая составляющая отвечает на следующие вопросы:

5. Что это за метод? (Умение характеризовать различные методы, приемы, технологии, используемые в обучении математике, их возникновение и опыт использования).

6. Как это смоделировать? (Умение моделировать фрагменты уроков и деятельность учащихся с использованием отдельных методов и технологий).

7. Как это реализовать? (Умение целенаправленно использовать отдельные методы и технологии в конкретных условиях деятельности учителя).

8. Как совершенствовать это и творить новое в методике? (Умение совершенствовать известные технологии и создавать свои в изменившихся условиях).

Каждое из поставленных вопросов характеризует некоторые компоненты профессиональной культуры учителя математики и их взаимосвязи.

Таким образом, определяется главная цель историко-математической подготовки для студентов – формировать и развивать у себя профессионализм учителя и довести его до необходимого минимального уровня математико-методической культуры в ее историческом аспекте. Это значит, требуется формировать умения:

– изучать факты и закономерности развития математических знаний в плане культуры профессионала;

– работать с историко-математической литературой;

– использовать исторические знания и умения в обучении математике;

– представлять логику и механизмы овладения учащимися математической культурой, способами и средствами математического познания.

В целом, формирование элементов математико-методической культуры учителя в процессе обучения студентов истории математики не противоречит принципам профессионально-педагогической направленности обучения А.Г. Мордковича (фундаментальности, бинарности, непрерывности, ведущей идеи) [5]. Но при этом подчеркивается главенствующая роль принципа фундаментальности. Культуросообразное диалектическое единство образованности и мастерства специалиста строится на основе мировоззренчески направленного обучения истории математики.

Формирование исторического компонента математико-методической культуры будущего учителя основано на профессионально-направленной методической системе обучения истории математики. Ее компонентами являются цели обучения истории математики, содержание историко-математического образования, методы, формы и средства обучения истории математики. По аналогии с методикой обучения математике Г.И. Саранцева [6], в число компонентов включается результат обучения истории математики и изучение предмета на основе деятельностного подхода. Внешняя среда методической системы обучения истории математики составляется общими целями среднего, высшего профессионального образования, предметом математики и истории математики, гуманизацией и гуманитаризацией образования, другими образовательными идеями, связью с педагогикой, психологией, философией, историей и др. В методике обучения истории математики устанавливаются тесные связи с историей математического образования и историей методики обучения математике.

Профессиональная направленность обучения истории математики отражается во всех компонентах методической системы. Особое внимание уделяется методам, формам и средствам обучения, с помощью которых, в первую очередь, происходит формирование операционных основ профессии. Некоторые условия такой методической подготовки выделены также Ю.А. Дробышевым [2]. Анализ всех существующих методических систем обучения истории математики позволяет выделить в них и модернизировать такие модули, которые направлены на формирование математико-методической культуры учителя. Например, подготовка двуединых рефератов, планов уроков, тематических планов, историко-математических внеклассных мероприятий, курсовых и выпускных квалификационных работ. Нами разработаны новые формы работы студентов: историко-математический анализ учебного материала, историко-математическое краеведение, музей истории математики, сочинения, проекты и элективные курсы по истории математики и др. На самом деле, в формировании исторического компонента математико-методической культуры будущего учителя математики системно участвуют все компоненты методической системы обучения истории математики. Наши исследования показывают, что студенты овладевают не только фактологическими знаниями по истории математики, но они развиваются также во всех направлениях профессиональной культуры.

Библиографический список

1. *Белобородова, С.В.* Профессионально-педагогическая направленность историко-математической подготовки учителей математики в педвузах [Текст]: дис.... канд. пед. наук / С.В. Белобородова. – М., 1999. – 163 с.
2. *Дробышев, Ю.А.* Историко-математический аспект в методической подготовке учителя [Текст] / Ю.А. Дробышев. – Калуга: Изд-во КГПУ, 2004. – 156 с.
3. *Жохов, А.Л.* Познание математики и основы научного мировоззрения: мировоззренчески направленное обучение математике [Текст]: учебное пособие / А.Л. Жохов. – Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2008. – 183 с.
4. *Жохов А.Л.* Из опыта постановки курса “История математики (и математического образования)” на математических факультетах педагогических вузов [Текст] / А.Л. Жохов // Материалы Всерос. науч.-прак. конф. “Проблемы качества подготовки учителя математики и информатики”. – Н.-Новгород, 2002. – С. 131-134.
5. *Мордкович, А.Г.* Профессионально-педагогическая направленность специальной подготовки учителя математики в педагогическом институте [Текст]: дис. ... д-ра пед. наук / А.Г. Мордкович. – М.: 1986. – 355 с.

6. *Саранцев, Г.И.* Методология методики обучения математике [Текст] / Г.И. Саранцев. – Саранск: Тип. "Красный Октябрь", 2001. – 144 с.

Организация текущего повторения на уроках математики как средство формирования общепредметных учебных компетенций[1]

Т.В. Сергеева

С введением государственных стандартов основного общего и среднего общего образования, в основу которых положен деятельностный подход, изменилась структура требований к уровню подготовки выпускников. Вместе с требованиями к знаниям и умениям по конкретному учебному предмету включено также использование приобретенных знаний и умений в практической деятельности и повседневной жизни. Применительно к математике изменение коснулось, прежде всего, формы итоговой аттестации учащихся, что, в свою очередь, потребовало изменений в методике преподавания.

Макет Федеральных государственных образовательных стандартов общего образования (ФГОС ОО) дает установку на выраженность результатов образования не только в предметном формате, но и в характере универсальных (метапредметных) умений, обеспечивающих общекультурную направленность общего образования, универсализацию и интеграцию знаний и представлений. В частности, это можно рассмотреть как направленность стандартов на усиление межпредметных связей в процессе обучения. Действительно, ограничиваться достижением высоких результатов по отдельно взятому учебному предмету "математика" для каждого обучающегося недостаточно. Роль математического аппарата в других учебных дисциплинах таких, как физика, химия, технология, информатика, биология, география высоко оценивается и самими учащимися.

Говоря о межпредметных связях, будем понимать "взаимную согласованность учебных программ, обусловленную системой наук и дидактическими целями" [2, с. 296]. Выделяют фактические, понятийные, теоретические и философские межпредметные связи. Рассматривая связь математики с другими учебными дисциплинами, с нашей точки зрения,

[1]Работа выполняется при поддержке Российского гуманитарного научного фонда, грант № 08-06-00302.

целесообразно рассмотреть отдельно *инструментальные связи, в качестве которых выступают общепредметные учебные компетенции*, формирование которых целенаправленно осуществляется именно на уроках математики.

По нашему мнению, *под учебными компетенциями следует понимать совокупность компетенций учащегося, позволяющих связывать и применять получаемые знания в соответствии с практическими учебными потребностями.* Они являются более узкими по сравнению с образовательными компетенциями и имеют четкую направленность на определенный предмет или группу предметов. Их можно разделить на общепредметные (межпредметные) и предметные компетенции.

При анализе требований к подготовке выпускников основного общего образования по математике нами выделена следующая группа общепредметных учебных компетенций:

1) алгоритмическая учебная компетенция;
2) вычислительная учебная компетенция;
3) графическая учебная компетенция;
4) логическая учебная компетенция;
5) проектировочная учебная компетенция.

Эти общепредметные компетенции формируются на математическом содержании образования. Процесс формирования соответствующих предметных и общепредметных компетенций обучающегося должен идти одновременно. Начальной является предметная компетенция, а на ее основе при подборе соответствующих заданий, в идеальном случае – при параллельном прохождении материала в других учебных дисциплинах мы формируем общепредметную компетенцию. Однако, в практике обучения этот баланс редко соблюдается. Промежуток времени от "прохождения темы", т.е. начала формирования какой-либо составляющей предметной компетенции на уроках математики до обобщения и перерастания в общепредметную на базе имеющихся учебных пособий оказывается слишком большим. Если не создаются ситуации для проявления предметной учебной компетенции вне содержания предмета, она, во-первых, не перерастет в общепредметную, и, во-вторых, останется в ряду потенциальностей, скрытых возможностей [5, с. 83].

Рассмотрим указанный процесс на примере изучения темы "Отношения и пропорции" в курсе математики 6 класса по учебнику Н.Я. Виленкина [1]. Для этого воспользуемся Рабочей программой по математике для 6 класса (2006-2007 учебный год), составленной автором статьи на основе Федерального компонента государственного стандарта общего образования [4] и программы авторского коллектива учебно-методического комплекта.

На изучение всего материала темы отведено 22 часа. Непосредственно на изучение отношений и пропорций – 17 часов. На данном этапе обучения есть возможность применения конкретных заданий только с географическим содержанием на использование масштаба.

Таблица 1

Фрагмент рабочей программы по математике для 6 класса

Тема 4	**Отношения и пропорции**
1	Отношения: определение, уяснение математического смысла понятия
2	Отношения: примеры практического применения
3	Решение задач на вычисление отношений
4	Решение задач на вычисление отношений: задачи геометрического содержания
5	Пропорции: определение, основное свойство пропорций
6	Пропорции: проверка истинности
7	**Контрольная работа за I полугодие (№7)**
8-9	Решение уравнений с использованием основного свойства пропорций
10	Повторительно-обобщающий урок по теме “Отношения и пропорции”
11	Прямо пропорциональные величины: решение задач с помощью пропорций
12	Обратно пропорциональные величины: решение задач с помощью пропорций
13	Решение задач с помощью пропорций
14	Масштаб
15	Масштаб: работа с примерами из географии
16	Масштаб: практическое построение плана комнаты в заданном масштабе (возможно как домашнее задание)
17-20	Длина окружности. Площадь круга. Шар. Решение задач на вычисления, связанные с геометрическими объектами
21	Обобщающий урок по теме “Отношения и пропорции”
22	**Контрольная работа №8 по теме “*Отношения и пропорции*”**

Характер задач, которые приведены в учебнике, трудно соотнести с дальнейшим применением пропорций в конкретных учебных предметах. Они направлены на формирование предметной вычислительной компетенции. Курс алгебры 7 класса включает изучение линейной функции и прямой пропорциональности, что позволяет учащимся узнавать, определять этот вид зависимости по формуле, а изучение функции $y = \frac{k}{x}$, обратной пропорциональности, большинством учебных пособий отнесено к курсу алгебры 8 класса.

В то же время, анализ учебного материала по физике в 7 классе позволяет выделить ряд формулировок, требующих свободного владения понятиями “прямая пропорциональность” и “обратная пропорциональность”, то есть, фактически, работы общепредметных вычислительной и логической компетенций обучающихся. Примером могут служить закон Гука ($F_{\text{упр}} = k\Delta l$) и правило равновесия рычага.

Задачи на решение пропорций часто встречаются и на уроках химии. В условиях пропедевтического изучения химии с 6 класса учителя, работающие по таким программам, отмечают почти 100% справляемость при решении задач с использованием пропорций в 6 классе. Однако, уже в 7 классе процент справляемости с такими заданиями становится значительно меньше.

Возможной причиной таких трудностей является именно отсутствие общепредметных учебных компетенций. Для того, чтобы выяснить, как сами обучающиеся оценивают свою готовность к действиям математического содержания на других предметах, проведен опрос группы школьников. В анкетировании приняли участие 50 учащихся 8 “В” и 8 “Г” классов МОУ СОШ № 58 г. Ярославля.

Результаты анкетирования показывают, что большинство школьников не уверены, в адекватности применения имеющихся математических знаний на других предметах, у учащихся есть потребность в напоминании им необходимых знаний. Причину появления трудностей они видят все же в недостаточности повторения на уроках математики и пробелах в знаниях, которые могли возникнуть, например, из-за пропуска урока. Восполнить такие пробелы самостоятельно большинство учащихся не могут. Это ведет не только к снижению успеваемости по математике, но и по другим смежным дисциплинам.

Таблица 2

Результаты анкетирования обучающихся

№	[illegible]	[illegible]	[illegible]
	[illegible]	[illegible]	
		[illegible]	
		[illegible]	
	[illegible]	[illegible]	
		[illegible]	
		[illegible]	
		[illegible]	
	[illegible]	[illegible]	
		[illegible]	
		[illegible]	
		[illegible]	
		[illegible]	
		[illegible]	
		[illegible]	
		[illegible]	
		[illegible]	
	[illegible]	[illegible]	
		[illegible]	
		[illegible]	
		[illegible]	
		[illegible]	
		[illegible]	
		[illegible]	

Таким образом, *проблемы формирования общепредметных учебных компетенций связаны с качеством изучения математическо-*

го содержания образования, созданием конкретных условий реализации этих компетенций, в том числе на уроках математики, и систематическим поддержанием определенного уровня готовности к применению изученного.

Остановимся подробнее на последней из перечисленных проблем. С помощью каких средств можно достичь такой готовности? Какие конкретные действия учителя математики могут способствовать формированию общепредметных учебных компетенций школьников? Например, *использование заданий межпредметного содержания*, требующих применения изученного материала. Однако, стоит учесть, что таких заданий практически нет, их должен составлять учитель или группа учителей-предметников, к таким заданиям нужно специально готовить учащихся. Кроме того, ограниченность во времени и необходимость прохождения собственно программы по математике существенно затрудняет систематичность использования межпредметных заданий.

В качестве другого средства рассмотрим *повторение*. В педагогической литературе термин “повторение” трактуется как “возвращение к ранее пройденному учебному материалу; необходимое условие прочного , глубокого и системного усвоения содержания обучения” [3, с. 156-157]. Эффективность повторения зависит от его систематичности, способа организации учебного материала, а также от включения элементов новизны, как в содержание, так и в методы обучения. “Новизна при повторении достигается путем показа знакомых объектов в новых аспектах, привлечения внутрипредметных и межпредметных связей, сведений, получаемых самими учащимися в практической деятельности, работе с различными средствами массовой информации. Возвращение к пройденному должно сочетаться с углублением и совершенствованием знаний, умений, убеждений, вести к их систематизации и обобщению. Приводя в конечном итоге к перестройке знаний, повторение не только способствует прочному усвоению, но и создает основы мировоззрения учащихся” [3, с. 157]. Следовательно, правильно организованное повторение действительно содержит возможности для формирования учебных общепредметных компетенций.

В методике различают текущее и итоговое повторение. В качестве средства формирования общепредметных учебных компетенций целесообразно рассмотреть *текущее повторение* на уроках математики. Текущее повторение проходит параллельно с изучением нового материала, не занимает большого количества времени урока, его можно организовать с учетом требований других предметов.

Типы уроков, на которых возможно проведение такого вида работы: урок совершенствования ЗУН, урок обобщения и систематизации, комбинированные уроки (по классификации М.И. Махмутова [2, с. 626]). Методика проведения текущего повторения должна основываться на согласованности рабочих программ учителей-предметников школы, единстве требований к формулировкам математических правил, взаимных ссылках на изучение той или иной темы.

Перечислим виды заданий, которые целесообразно использовать для формирования некоторых учебных общепредметных компетенций.

Задания на формирование *вычислительной компетенции:*

1. устные вычисления с целыми числами, обыкновенными дробями, числами, записанными в стандартном виде (в том числе, в качестве пропедевтики до изучения в курсе алгебры);
2. перевод единиц измерения длины, площади, объема, массы;
3. действия с десятичными дробями, в том числе – округление и прикидка ответа;
4. задачи на проценты;
5. решение пропорций;
6. вычисление среднего арифметического нескольких чисел.

Задания на формирование *логической компетенции:*

1. нахождение неизвестных компонентов;
2. работа с формулами;
3. определение вида пропорциональной зависимости по описанию, формуле;
4. простейшие логические заключения.

Задания на формирование *графической компетенции:*

1. чтение графика процесса;
2. определение вида пропорциональной зависимости по графику;
3. чтение диаграмм;
4. работа с таблицей.

На основе вышесказанного можно сделать вывод о возможности практического формирования общепредметных учебных компетенций на уроках математики через организацию текущего повторения материала, связанного тематически или инструментально с изучаемым материалом по смежным учебным дисциплинам.

Библиографический список

1. *Виленкин, Н.Я.* Математика [Текст]: учебник для 6 кл. средней школы / Н.Я. Виленкин, В.И. Жохов, А.С. Чесноков, С.И. Шварцбурд. – 15-е изд., перераб. – М.: Мнемозина, 2005.

2. Педагогика: Большая современная энциклопедия [Текст] / составитель Е.С. Рапацевич. – Мн.: Соврем.слово, 2005. – 720 с.
3. Российская педагогическая энциклопедия [Текст] / в 2 т. – М.: Научное изд-во “Большая Российская энциклопедия”, 1999. – Т. II.
4. Сборник нормативных документов. Математика [Текст] / составители Э.Д. Днепров, А.Г. Аркадьев. – 2-е изд., стереотип. – М.: Дрофа, 2008. – 128 с.
5. *Кальней, В.А.* Школа: мониторинг качества образования [Текст] / С.Е. Шишов, В.А. Кальней. – М.: Педагогическое общество России, 2000. – 320 с.

Понятие “математико-методологические умения” как дидактическая категория

Е.Л. Черемных

В настоящее время наблюдается смещение акцентов в характеристиках качества и результатов обучения в сторону овладения методологией изучаемых наук. Интерес к проблеме формирования методологических знаний и умений студентов возрос в связи с задачами подготовки будущих специалистов, способных быстро ориентироваться в новых социальных, экономических и производственных ситуациях, непрерывно повышать свой профессиональный уровень, самосовершенствоваться.

Анализ научных работ показывает, что категория “методологические умения” еще недостаточно разработана в дидактике. В исследованиях авторами чаще употребляется термин “методологические знания”, содержание которого составляют знания о методах, процессе и истории познания, о конкретных методах науки, о различных способах деятельности (И.Я. Лернер). При этом указывается, что методологические знания представляют собой процессуально-деятельностный механизм, они ответственны “за разработку стратегий познавательной деятельности”. Эти стратегии, будучи освоенными обучающимся, становятся схемами его мышления [10]. Л.В. Лободина описывает методологические знания как “совокупность интеллектуальных инструментальных средств, обеспечивающих восприятие новой информации, осмысливание, понимание и встраивание ее в субъективную модель знаний индивидуума, которые, развивая семантическую память, определяют основу познавательной активности обучающегося” [6, с. 8]. М.В. Шабанова, рассматривая методологические знания в виде элемента содержания математического образования, определяет их как "общенаучные понятия и категории, принципы и методы, регулирующие процесс учебного математического познания на рефлексивном уровне и являющиеся отражением методологических средств научного математического познания, функционирующих в системе методов обучения" [13, с. 12].

Деятельностный характер методологических знаний, а также многоаспектная дидактическая роль умений как средства усвоения и преобразования знаний, развития потенциальных способностей личности и качеств мышления, как основы формирования компетенций и готовности к деятельности говорят о целесообразности выделения в качестве центральной категории исследования понятия "*методологические умения*". Например, среди формируемых у обучающихся в процессе изучения математики умений можно выделить такие, – которые по отношению к умениям низших уровней выполняют регулирующую, организующую функцию. К ним относятся: владение общими, универсальными схемами построений в математике (например, логическими схемами доказательств, аксиоматическим методом построения теории), типовыми подходами к решению задач, способами рациональной организации интеллектуальной, в том числе поисковой, деятельности (например, методом восходящего анализа, методом "разбиения на подзадачи"). К таким умениям следует отнести также умения контроля и самооценки собственной учебной математической деятельности, способы взаимодействия с другими субъектами учебного процесса (например, умение формулировать, объяснять, приводить примеры, грамотно используя математический язык). В комплексе эти умения образуют методологическую базу для успешного изучения математики, они имеют особую значимость, определяемую сущностью математики, ее ролью как языка науки и инструмента познания действительности. Обозначим указанные умения термином "*математико-методологические*" и предпримем попытку дать им дидактическую характеристику.

В психологии понятие "умение", рассматриваемое в деятельностном аспекте – как умение осуществлять какую-либо деятельность, имеет многокомпонентную структуру. Последняя, в частности, включает представления, ощущения, теоретические и методические знания, различные навыки (например, интеллектуальные), творческое мышление (поскольку проявляется при решении новых задач) [3, с. 139]. Анализ различных трактовок понятия "умение" показывает, что имеется несколько общих базовых положений, определяющих его суть: 1) умение формируется в деятельности и определяется ее особенностями; 2) умение осуществляется сознательно, на основе имеющихся у субъекта знаний, навыков, возможно, других умений и опыта; 3) структура умения включает операции и действия; 4) умение обладает свойством переноса в новые условия, ситуации; 5) умение обеспечивает достижение поставленных целей деятельности; 6) умение является структурным компонентом личности, определяющим возможность осуществления конкретной деятельности. Л.Ю. Степашкиной [11] представлено психолого-дидактическое понимание категории "умение", которое учитывает все ключевые признаки данного понятия. Взяв это определение за основу, будем понимать под *умением* качество личности, характеризующее ее способность к владению сложной системой психических и практических операций и действий, необходимых для целесообразной регуляции деятельности по достижению результата, обладающее свойством переноса в новые условия, на основе имеющихся у субъекта знаний и опыта.

Рассмотрим с позиций общей теории систем и концепции их структурно-количественного анализа (И.Д. Пехлецкий) смысл понятия "методологический". Процесс обучения в самом общем виде можно рассматривать как функционирование, взаимодействие между собой и средой трех основных систем участвующих в нем: "учитель", "ученик", "объект изучения" [9, с. 48]. Анализ процесса обучения предполагает рассмотрение иерархической последовательности уровней функционирования сложной системы в среде: "первый (детерминированный) характеризуется существованием однозначной функциональной зависимости производного воздействия от исходного при фиксированной памяти; второй – может возникать у систем, способных продолжить функционирование за счет вариации памяти без изменения своей структуры при возникновении состояния, при котором продолжение функционирования на первом уровне невозможно; третий - аналогично использует вариацию среды при невозможности продолжения функционирования на втором уровне" [8, с. 11]. Согласно концепции "в иерархически структурированных системах часто возникает ситуация, когда аппарат функционирования, происходящий из более высокого уровня, может быть использован и при организации функционирования компонентов более низкого уровня". В этом случае его называют *методологическим* по отношению к последнему [4, с. 18].

Говоря о функционировании систем "ученик" и "объект изучения" в соответствии с приведенной выше схемой, естественно полагать, что каждый из трех уровней функционирования требует задействования в той или иной мере системой "ученик" определенных познавательных структур: специально-научных (уже сформированные знания в конкретной сфере науки), интеллектуальных и др., в том числе методологических [5]. К числу последних относятся, например, общенаучные знания, общеучебные умения, обобщенные способы предметной деятельности, представления, связанные с фундаментальными идеями, содержательными линиями предмета и т.д. Будем обозначать *предметно-методологическими структурами* те, которые формируются в процессе усвоения содержания предмета и неразрывно связаны с ним, становятся характеристиками системы "ученик" и представляют собой "методы организации функционирования объекта изучения учеником": методы и приемы, используемые учеником и позволяющие ему сформировать навыки и культуру правильного, эффективного "рассмотрения" задачи, работы с учебным материалом (схемы рассуждений, методы организации предметной познавательной деятельности и т.д.) [9, с. 60].

Специально-научное содержание учебного предмета представляет собой отражение фундаментальной подсистемы некоторой области научного знания. Идеальным результатом обучения можно считать перенос указанной подсистемы в сознание обучаемых в виде изоморфной ей системы знаний. На практике эта цель не достижима, поэтому возникает задача отражения в сознании обучаемых наиболее значимых взаимосвязей, существенных свойств "глобального" объекта изучения. Структурирование и иерархическое упорядочение этих свойств создает в сознании учащегося "образ" объекта изучения в виде некоторой системы [8]. К таким наиболее важным свойствам, придающим системе знаний обучаемого целостность, имеющим конструктивный характер по отношению к другим элементам знаний, в частности, относятся фундаментальные понятия дисциплины, стержневые линии, универсальные схемы построения рассуждений, методы познания. Выделение в содержании предметов такого рода методологических структур с помощью дидактических компонентов, стимулирующих их усвоение учеником, создает предпосылку для формирования в сознании обучаемых системных моделей знаний [5, 13]. Однако получение системного представления об изучаемом объекте еще недостаточно для того, чтобы ученик мог применять знания на практике в нестандартных ситуациях. Для этого необходимо наличие у системы "ученик" структур, обеспечивающих ее эффективное функционирование в среде (в данном случае среда выступает как система воздействий на рассматриваемую систему) [9, с. 41]. Здесь возможны два пути приспособления к среде: повышение степени соответствия структур системы "ученик" к воздействиям среды за счет обогащения памяти системы. Это можно понимать как обогащение памяти системы за счет новых знаний, способов действий соответствующих конкретным ситуациям и т.п. Второй путь – создание структуры системы "ученик", допускающей широкое множество возможных состояний и способов их вариации, то есть повышение возможностей системы по изменению воздействий в случае возникновения неустойчивых ситуаций [9, с. 44-45]. Например, создание новых познавательных структур системы "ученик" более высокого уровня, обеспечивающих ее функционирование на нижележащих уровнях. К числу таких структур относятся и предметно-методологические структуры. Еще П.Я. Гальперин указывал, что все приобретения в процессе учения можно разделить на две неравные части. Одну составляют конкретные факты и законы изучаемой области, конкретный материал науки, другую – новые "общие схемы вещей", которые обусловливают новое их видение и новое мышление о них, "обобщенные схемы действительности", которые становятся "объединяющими схемами отдельных действий", новыми структурами мышления [1, с. 24]. В обоих случаях речь идет о развитии системы "ученик": детерминированном (первый путь), недетерминированном (второй путь) [5, с. 23]. Если в ответ на внешние воздействия перестройка или образование новых структур системы "ученик" индуцируются ей самой, то речь идет о ее саморазвитии. Как отмечено М.В. Шабановой, в первом случае формирование новых структур идет экстенсивным путем, во втором – интенсивным [13, с. 31-32] Ею показана правомерность этой интерпретации с точки зрения положений современной когнитивной психологии (В.В. Давыдов, М.А. Холодная, В.Д. Шадриков). В соответствии с теорией интеллекта как формы организации умственного опыта (М.А. Холодная) выделенные методологические структуры системы "ученик" можно соотнести с когнитивными схемами, отвечающими за "прием, сбор и преобразование информации в соответствии с требованием воспроизведения устойчивых, нормальных, типичных характеристик происходящего" (когнитивными картами, фреймами, сценариями и т.д.), а также ментальными структурами метакогнитивного опыта, позволяющими "осуществлять непроизвольную и произвольную регуляцию интеллектуальной деятельности" (в виде целеобразования, планирования, прогнозирования, принятия решений и т.д.) [12, с. 113-127].

Предметно-методологические структуры обеспечивают функционирование системы "ученик" на первых двух уровнях в процессе взаимодействия с объектом изучения, а при наличии комплекса других структур (в том числе, высокой мотивации, познавательной активности и креативности) осуществить выход на более высокий уровень функционирования, связанный с творчеством. Одним из примеров иллюстрации данного положения служит тот факт, что на этапе зарождения нового методологического знания оно часто существует в неявном виде, в форме эвристической идеи [13]. Учитывая данные когнитивной психологии, М.В. Шабанова отмечает, что именно опыт творческой деятельности является "основным носителем "вертикальных" репрезентативных структур, обеспечивающих действенность методологических компонент знаний (об источниках проблемных ситуаций, способах преодоления интеллектуальных затруднений и приемах поиска этих способов т.п.), накопленных человеком в процессе предыдущей познавательной деятельности" [13, с. 63].

Возникающие в процессе взаимодействия с "объектом изучения" предметно-методологические структуры системы "ученик" являются не только средством повышения качества и эффективности усвоения предмета, но и результатом развития и саморазвития системы "ученик" в процессе изучения предмета (например, развития мышления, личностных качеств, системности научных представлений и т.д.). Диалектическое единство этих двух положений позволяет рассматривать формирование предметно-методологических структур ученика как необходимый компонент процесса обучения. В соответствии с анализируемыми дидактическими проблемами такие структуры могут обозначаться разными терминами. Например, А.Л. Жохов [2], анализируя содержание образования с точки зрения раскрытия его мировоззренческого потенциала, определяет его ведущими носителями "предметно-мировоззренческие умения", М.В. Шабанова, Л.В. Лободина в качестве центральной категории своих исследований выделяют "методологические знания". Концентрируя основное внимание на деятельностном компоненте методологических структур, мы считаем правомерным интерпретировать его как "предметно-методологические умения". Предметно-методологическое умение основано на знании методологических норм, принципов и представляет собой освоенные, обобщенные способы предметной деятельности, способность к реализации этих норм, принципов и методов в деятельности. Здесь следует отметить, что такие умения в обучении определяются не только предметным, но и метапредметным содержанием обучения: спецификой и условиями учебной деятельности, индивидуально-личностной адаптацией, восприятием и переработкой учебного материала. Поэтому, обобщая выше сказанное, естественно считать, что формируемый у обучаемых в процессе изучения предмета комплекс умений, связанный с овладением предметными методологическими структурами, включает предметные (непосредственно соотносимые с методологией предмета, важнейшими его фундаметнальными понятиями и стержневыми линиями) и метапредметные (выполняющие роль инструментария учебной предметной деятельности, являющиеся необходимыми для самоорганизации умственной и учебно-познавательной деятельности и т.д.) методологические умения. Такие умения при соответствующих условиях их формирования позволяют обеспечить эффективное взаимодействие ученика с объектом изучения в разнообразных условиях среды.

В этой связи нами предлагается следующее формальное системно-структурное описание *предметно-методологических умений* как особой подсистемы методологических структур ученика, 1) формируемой при изучении предмета; 2) представляющей собой освоенные учеником способы организации эффективного взаимодействия с объектом изучения, в основе которых лежат соответствующие знания (предметные и метапредметные); 3) позволяющей при наличии комплекса других структур (мотивация к творчеству, познавательная активность, креативность, высокая рефлексивность мышления и др.) осуществить субъекту выход на уровень творческой предметной деятельности. Соответствующие умения, формируемые в обучении математике, будем называть "математико-методологическими".

Выделяемые в науке смыслы понятия "методология" (как учение о методах познания и как учение об организации деятельности) указывают на объективное существование, по крайней мере, двух видов рассматриваемых умений. Если основной задачей деятельности выступает выделение, осознание, конструирование, оценка методологических **знаний** (норм, принципов и методов), то методологические умения имеют явно выраженный рефлексивный характер, а потому могут быть обозначены как *рефлексивно-методологические.* Если на первый план выходит задача организации деятельности (актуализация соответствующих методологических знаний, проектирование, построение, управление, регуляция на их основе системы действий по достижению цели), овладение ее **методами**, то соответствующие умения могут быть обозначены как *организационно-методологические.* Деятельностной основой рефлексивно-методологических умений выступает методологическая рефлексия как вид учебно-познавательной деятельности; деятельностной основой организационно-методологических умений выступает процесс организации (в широком смысле) учебно-познавательной предметной деятельности (в том числе ее рефлексивной составляющей). В реальной учебной практике организационно-методологические и рефлексивно-методологические умения взаимно дополняют друг друга, поскольку рефлексия является необходимым актом методологической деятельности [7], роль которого возрастает с повышением проблемности возникающих перед субъектом задач.

Таким образом, математико-методологические умения можно условно разделить на два вида: *рефлексивно-методологические умения* (направленные на рефлексивное осознание деятельности с целью выделения методологических норм, принципов, правил, методов деятельности, т.е. на получение методологических знаний) и *организационно-методологические умения* (направленные на организацию деятельности с целью упорядочения ее в логическую и временную структуру: выбор средств, методов, форм, последовательности осуществления стадий и этапов деятельности на основе методологических знаний, т.е. на применение методологических знаний в действии). По типу осуществляемой методологической рефлексии (по М.В. Шабановой) можно выделить следующие виды рефлексивно-методологических умений: конструктивные, реконструктивные, управляющие, интегративные, перспективные. Организационно-методологические умения естественно классифицировать в соответствии с организационными этапами деятельности (по А.М. Новикову): проектировочные, поисковые, преобразовательные, контрольно-оценочные, регулятивные.

Возможен и другой подход в делении рассматриваемого понятия. Содержание обучения предмету включает следующие методологические компоненты: методологию предмета как совокупность методов научного познания, используемых в данной науке; принципы "предметного" мышления (например, физического, математического) как методы умственной деятельности; методы обучения предмету как способы организации учебно-познавательной предметной деятельности; специально-научный язык дисциплины как средство познания и особый способ коммуникации. Это означает, что в комплексе предметно-методологических умений можно условно выделить несколько блоков, отражающих базовые методологические компоненты содержания изучения дисциплины. Для математико-методологические умений таких блоков нами было выделено пять: *предметно-теоретический* – включает умения, характеризующие владение общематематическими и специфическими для конкретных математических дисциплин методами, в том числе способами рассуждений, построения доказательств, алгоритмов и др.; *предметно-*

прикладной – составляют умения математического (знаково-символического, графического, геометрического и др. видов) моделирования различных процессов, явлений, а также умения интерпретации математических конструкций в исследуемой области приложения; *общеметодологический* – задают умения общенаучного и философско-рефлексивного уровня, выделяемые в процессе математической деятельности. Они связаны с овладением универсальными методами познания и преобразования действительности, в том числе методами построения классических видов формально-логических умозаключений (индукцией, аналогией, рекурсией и др.); *умения самоорганизации учебно-познавательной* (анализ, планирование, поиск математической информации, организация работы с различными объектами математической информации: текстом, задачей, теоремой, понятием и т.д.) и *умственной* (владение приемами стимулирования, самоанализа рассуждений и т.п.) *деятельности в процессе изучения математики*; *коммуникативные умения, формируемые в процессе изучения математики,* подразумевающие владение математическими языком и речью (устной и письменной) как специфическими способами коммуникации, использование и преобразование системы знаково-символических средств математики для передачи математической информации. Каждый из этих компонентов представляет собой комплекс умений, образующих иерархическую структуру.

В целом, математико-методологические умения можно охарактеризовать как подсистему математических умений обучающегося, связанную с овладением комплексом математических методов, процедур и алгоритмов, методами организации собственной учебно-познавательной математической деятельности. Здесь под методом понимается способ достижения какой-либо цели, решения конкретной задачи, а также совокупность приемов, операций практического или теоретического освоения (познания) действительности [7]; “организация деятельности” (по А.М. Новикову) рассматривается как упорядочивание деятельности в систему в соответствии с ее логическим (на уровне обеспечения средств и методов) и временным (на уровне осуществления фаз, стадий, этапов) строением.

Библиографический список

1. *Гальперин, П.Я.* К исследованию интеллектуального развития ребенка [Текст] / П.Я. Гальперин // Вопросы психологии. – 1969. – № 1. – С. 15-25.

2. *Жохов, А.Л.* Научное мировоззрение в контексте духовного развития личности (образовательный аспект) [Текст] / А.Л. Жохов. – М.: ИСОМ, 2004. – 329 с.
3. *Ильин, Е.П.* Умения и навыки: нерешенные вопросы [Текст] / Е.П. Ильин // Вопросы психологии. – 1986. – № 2. – С. 138-148.
4. Компоненты индивидуального стиля преподавания учителя математики: Практикум [Текст] / составитель И.Д. Пехлецкий. – Пермь: изд-во Перм. педин-та, 1990. – 48 с.
5. *Лебедева, И.П.* Теория взаимодействия систем "ученик" и "объект изучения" [Текст] / И.П. Лебедева. – Пермь: Изд-во Перм. ун-та, 2001. – 200 с.
6. *Лободина, Л.В.* Методика формирования системы методологических знаний учителя физики-информатики (на примере изучения образовательной области "Математика") [Текст]: автореф. дис. ... канд. пед. наук / Л.В. Лободина. – Тамбов, 2004. – 19 с.
7. *Новиков, А.М.* Методология [Текст] / А.М. Новиков, Д.А. Новиков – М.: СИНТЕГ, 2007. – 668 с.
8. *Пехлецкий, И.Д.* Количественный анализ и структурные модели в процессе обучения [Текст]: учеб. пособие / И.Д. Пехлецкий. – Пермь: изд-во Пермского педин-та, 1983. – 58 с.
9. *Пехлецкий, И.Д.* Общая теория систем и анализ процесса обучения [Текст] / И.Д. Пехлецкий. – Пермь, 1976. – 120 с.
10. *Самоненко, Ю.А.* Функции, содержание и дидактические условия формирования научных методологических знаний у школьников [Текст]: автореф. дис. ... д-ра пед. наук / Ю.А. Самоненко. – М., 2002. – 48 с.
11. *Степашкина, Л.Ю.* Педагогическое управление развитием общих учебных умений и навыков учащихся основной школы [Текст]: дис. ... канд. пед. наук / Л.Ю. Степашкина. – Омск, 2005. – 246 с.
12. *Холодная, М.А.* Психология интеллекта. Парадоксы исследования [Текст] / М.А. Холодная. – СПб.: Питер, 2002. – 272 с.
13. *Шабанова, М.В.* Формирование методологических знаний при изучении математики в системе "школа-вуз" [Текст]: дис. ... д-ра пед. наук / М.В. Шабанова. – М., 2005. – 422 с.

Глава 4

История математики и математического образования

О некоторых арабских математических рукописях в библиотеках Санкт-Петербурга

М.М. Рожанская

Хорошо известно, что в трех библиотеках Санкт-Петербурга имеется довольно большое количество арабских средневековых рукописей математического, точнее физико-математического содержания. Настоящее сообщение посвящено некоторым из них, ставших в разной степени предметом исследований автора. Речь идет о пяти рукописях: трех, хранящихся в рукописном отделе Российской Национальной Библиотеки, одной – в библиотеке Восточного факультета Санкт-Петербургского университета и одной – в библиотеке Института восточных рукописей РАН.

1. Ал-Хазини. Книга весов мудрости (Китаб мизан ал-хикма). Российская Национальная библиотека, Фонд Н.В. Ханыкова, № 117. Этот фонд представляет собой коллекцию арабских рукописей, главным образом, собранную известным ученым, востоковедом и историком Н.В. Ханыковым в бытность его на дипломатической службе в Иране, российским консулом в Тебризе. Нами описано большинство математических и астрономических рукописей фонда Ханыкова [1]. "Книга весов мудрости" – одна из "жемчужин" этой знаменитой коллекции.

Ал-Хазини (XII в.) – один из крупнейших ученых-энциклопедистов эпохи мусульманского Ренессанса, математик, механик, астроном, последователь ал-Бируни, ар-Рази, Омара Хайама, автор, кроме "Книги весов мудрости", Санджарского зиджа и трактата об астрономических инструментах, а также нескольких натурфилософских сочинений. Однако "Книга весов мудрости" занимает особое место как в истории физико-математических наук, так и в истории науки вообще. Это не просто теория и описание конструкции универсальных "весов мудрости", которыми можно было пользоваться и в обычной практике взвешивания, и в специальных целях. По существу это – исчерпывающее изложение основ современной ал-Хазини теоретической и практической статики и гидростатики (теория весов и взвешивания, удельный вес и плавание тел в жидкости и др.), а также тех проблем математики, на которые эти основы опираются. Изложению собственных результатов автора предшествует подробный обзор всего, что было создано в этом направлении его предшественниками, античными и средневековыми учеными. Она содержит сведения о многих не дошедших до нас или малоизвестных сочинениях античных и средневековых авторов. О некоторых из них имеются упоминания в других источниках, о других мы узнаем только из трактата ал-Хазини. Из сочинений античных авторов это несохранившиеся трактаты Архимеда, Менелая, Паппа Александрийского, псевдо-Евклида и псевдо-Аристотеля. Из трудов его предшественников в странах ислама это сочинения Сабита ибн Корры (IX), ал-Кухи и Ибн ал-Хайсама (X), ар-Рази и ал-Бируни (X-XI), его учителей – Омара Хайяма и ал-Исфизари (XI).

Один из разделов "Книги весов мудрости" вызывает особый интерес. Он содержит существенную часть текста трактата ал-Бируни об удельных весах под названием "Книга об отношениях между металлами и драгоценными камнями по объему и весу", который считался утерянным. Уникальная рукопись этого сочинения находилась в Бейруте и утрачена во время событий Первой мировой войны. Но сохранилась фотокопия рукописи, правда, очень плохой сохранности. В нашем распоряжении оказалась фотокопия этой фотокопии. Сравнение ее с текстом ал-Хазини позволило в значительной степени реконструировать полный текст трактата ал-Бируни. ,

"Книга весов мудрости" стала известна европейской науке только в середине XIX-го столетия благодаря Н.В.Ханыкову, который опубликовал ее обзор и перевод некоторых отрывков из нее на английский язык. Долгое время рукопись Ханыкова считалась уникальной, и лишь в начале прошлого столетия в Индии были обнаружены еще две копии, Бомбейская и Хайдарабадская, на основании которых в 1940-1941 годах в Хайдарабаде было предпринято издание "Книги весов мудрости", к сожалению, весьма небрежное, со многими фактическими и текстологическими недочетами. Конечно, необходимо полное критическое издание этого сочинения, в основе которого должна лежать рукопись Ханыкова. Об этом говорил еще И.Ю.Крачковский. Но до сих пор эта задача не решена. Нет и перевода его на западноевропейские языки. Нами выполнен первый комментированный перевод этого сочинения на европейский язык – русский [2].

2. Насир ад-Дин ат-Туси (1201-1274). Фонд Ханыкова, №№ 139-144. Насир ад-Дин ат-Туси – не только один из крупнейших ученых мусульманского средневековья, но и глава широко известной в XII-XIV вв. Марагинской научной школы. В 1259 году в городе Марага (Южный Азербайджан), столице чингизида Хулагу-хана, ат-Туси основал обсерваторию. В ней были собраны многие ученые, оказавшиеся на территории, завоеванной монголами. При обсерватории размещалась и большая библиотека, в которой было собрано свыше 400 тысяч рукописей. Обсерватория была оснащена первоклассными по тому времени инструментами, описание которых оставил ученик и сотрудник ат-Туси – ал-Урди. Значительная часть их была создана в самой Мараге.

Ат-Туси оставил огромное научное наследие. Его труды, список которых насчитывает более 64 названий, посвящены философии, географии, музыке, медицине, минералогии. Однако большинство его сочинений посвящены математике и астрономии. Среди них обработки и комментарии к "Началам" Евклида, содержащие важнейшие для истории науки результаты самого автора, фундаментальные труды по тригонометрии, арифметике и алгебре, обработка и комментарий к "Алмагесту" Птолемея и "Памятка по астрономии", сыгравшие важнейшую роль в предистории классической механики. Известны его труды по конструированию астрономических инструментов: астролябии, синус-квадранта и др.

Практически все его основные труды посвящены математике и астрономии. Это в первую очередь обработки "Начал" Евклида, в частности, попытка доказательства знаменитого пятого постулата. Доказательство ат-Туси и связанные с ним идеи занимают существенное место в истории учения о параллельных и неевклидовой геометрии. В своем "Изложении Евклида" он впервые в истории математики сформулировал то, что в настоящее время называют "аксиомами существования" и "аксиомами выбора". Развивая евклидову теорию отношений, ат-Туси внес существенный вклад в расширение понятия числа и распространение этого понятия на отношения непрерывных величин.

Среди математических сочинений ат-Туси особое место занимает его "Трактат о фигуре секущих" - первый в истории математики труд, в котором тригонометрия трактуется как самостоятельная наука, начиная от основных понятий и кончая алгоритмом решения всех основных задач. Существенные результаты он получил в совершенствовании вычислительных методов.

В цикле астрономических сочинений ат-Туси создает собственную, "нептолемеевскую" модель движения небесных тел, основанную на так называемой "лемме Туси", с помощью которой прямолинейное движение можно представить как результат сложения двух вращений. Исходным механизмом в его модели является “пара Туси”, т.е. механизм, состоящий из пары звеньев-векторов равной длины, вращающихся с постоянной угловой скоростью так, что конец второго вектора совершает гармоническое колебание, переводя вращательное движение в прямолинейное. С помощью различных комбинаций нескольких “пар Туси” можно было описывать движение Луны и планет и позволило объединить “небесную” и “земную” механику (механику “местного” движения) в единую науку, законы которой должны быть универсальны для всех видов механического движения. Именно это легло впоследствии в основу классической механики.

Обратимся теперь к рукописи № 144 фонда Ханыкова, которая стала предметом изучения автора настоящего сообщения и которая представляет особый интерес. Это сборник, состоящий из 17 трактатов физико-математического содержания, автором большинства из которых в той или иной степени является ат-Туси. Рукопись переписана в Тебризе в 1817 году [3].

Большая часть трактатов этого сборника представляет собой практически полную арабскую версию широко распространенных на средневековом Среднем и Ближнем Востоке так называемых средних или промежуточных книг в обработке ат-Туси. В позднеэллинистическую эпоху сочинения предшественников Птолемея (Евклида, Архимеда, Гипсикла, Аристарха Самосского, Автолика, Феодосия, Менелая) изучение которых считалось необходимым условием полноценного астрономического образования, были объединены в собрание, называемое “Малая астрономия”. Их следовало изучать после “Начал” Евклида для облегчения последующего понимания “Алмагеста” Птолемея. В средневековой арабоязычной литературе они получили название “промежуточных” или “средних” (мутавассита) книг. Арабские версии “Малой астрономии” появились одновременно с первыми арабскими переводами классических греческих сочинений. Позже они неоднократно комментировались. Среди переводчиков и комментаторов этого собрания были выдающиеся математики и астрономы своего времени Коста ибн Лука, ал-Махани, Сабит ибн Корра, Ибн Ирак и, наконец, сам ат-Туси. Это были, собственно не переводы и комментарии. Сам перевод уже был не вполне переводом. Сами авторы именовали его “изложением” или “обработкой” (тахрир), т.е. в большинстве случаев изначально этапом было его “улучшение–совершенствование” (ислах) и лишь последний этап именовался собственно комментарием (шарх) к тексту источника. Этот порядок не всегда строго соблюдался. Но в целом обработки и комментарии в значительной степени содержат собственные оригинальные результаты переводчиков и комментаторов. Именно эта специфика характерна для рассматриваемого сборника.

3. Особого внимания заслуживает уникальная рукопись № 6600 Национальной библиотеки, так называемая "Куйбышевская находка" [3], история которой почти детективна. Это том большого формата в 400 с лишним листов, состоящий из 16 разделов. Каждый раздел представляет собой отдельный трактат. Три из этих трактатов были известны только по названию, а один вообще неизвестен. Авторы этих трактатов – крупнейшие ученые мусульманского средневековья: Ибн ал-Хайсам (X в.), ал-Бируни (X-XI вв.), ат-Туси (XIII в.), ал-Фариси(XIV в.), ал-Каши (XV в.). Рукопись была обнаружена в отделе редких книг Самарской (бывшей Куйбышевской) областной библиотеки и переправлена в Санкт-Петербург в 70-х годах прошлого столетия. Происхождение ее – тема специального исследования, которое ведется в настоящее время. Рукопись описана, а некоторые ее фрагменты изучены известным историком математики Б.А. Розенфельдом [3].

4-5. Большой интерес у исследователей вызывают две рукописи сочинений средневековых западно-арабских математиков. Одна из них, "Талхис ал-хисаб" (Краткое изложение арифметических действий), обнаружена мною в библиотеке Восточного факультета Санкт-Петербургского университета. Автор этого трактата – известный западно арабский математик XIII-го века Ибн ал-Банна. Это компактное, энциклопедическое по характеру излжения руководство по арифметике и, главным образом, по алгебре. Оно было хорошо известно в западно-арабском регионе средневекового мира и породило множество комментариев. В частности, сам Ибн ал-Банна написал комментарий к собственному трактату. Оно легло в основу более поздних руководств, и, в частности, алгебраического трактата "последнего андалусийского математика" ал-Каласади (XV в.), рукопись одного из математических трактатов которого была обнаружена мною в библиотеке Института восточных рукописей. Оба сочинения имеют чрезвычайно важное значение для истории математики, и в особенности в нашей стране, поскольку у нас большинство исследований относится преимущественно к истории математики в восточной части средневекового мира ислама. О математике же западной ее части мы знаем очень мало. Изучение этих источников позволяет реконструировать некоторые этапы эволюции не только проблем истории средневековой математики, но и математики в целом. К таким узловым проблемам относится так называемый "метод чаш весов", послуживший отправной точкой развития теории линейных уравнений, а также начальный этап введения и развития математической символики. Эти трактаты переведены на русский язык и опубликованы в сопровождении комментария и историко-математического исследования.

Библиографический список

1. *Лютер, И.О.* Насир ад-Дин и его труды по математике и астрономии в библиотеках Санкт-Петербурга, Казани, Ташкента и Душанбе [Текст] / М.М. Рожанская, Г.П. Матвиевская, И.О. Лютер. – М., 1999.
2. *Ал-Хазини.* Книга весов мудрости [Текст] / Ал-Хазини / перевод М.М. Рожанской, И.С. Левиновой // Научное наследство. – М., 1983. – Т. 6. – С. 15-140.
3. *Розенфельд, Б.А.* Важная находка по истории математики, астрономии и оптики [Текст] / Б.А. Розенфельд // Вопросы истории естествознания и техники. – 1974. – Вып. 2-3. – С. 47-48.
4. *Аль-Хамза, М.* Ибн ал-Банна и его "Краткое изложение арифметических действий" [Текст] / М.М. Рожанская, М. Аль-Хамза // Историко-математические исследования. – Вторая серия. – М., 2005. – Вып. 9(44). – С. 330-347.
5. *Ибн ал-Банна, А.* Краткое изложение арифментических действий [Текст] / А. Ибн ал-Банна / перевод с араб. и примечания М.М. Рожанской и М. Аль-Хамзы // Историко-математические исследования. – Вторая серия. – М., 2005. – Вып. 9(44). – С. 347-375.
6. *Аль-Хамза, М.* О Трактате ал-Каласади "Раскрытие тайн науки цифр губар" [Текст] / М.М. Рожанская, М. Аль-Хамза // Историко-математические исследования. – Вторая серия. – М., 2007. – Вып. 12(47). – С. 215-236.

О периодизации истории математики

Г.А. Зверкина

Общепринятая в настоящее время в отечественной истории науки периодизация истории математики имеет своим источником статью академика А.Н.Колмогорова "Математика" в Большой советской энциклопедии. Эта статья имеет огромное значение не только как источник сведений об одной из древнейших наук, но и как обобщающий научный итог развития математики к середине XX века [1, 2].

Андрей Николаевич Колмогоров (1903-1987), известный ученый, академик многих академий мира, был разносторонним и широко образованным человеком; и история математики была важной частью его научной биографии. Он был знаком со всеми областями современной ему математики и, конечно с доступной в то время историко-математической литературой.

Его интерес к истории был неслучаен – в студенческие годы Колмогоров посещал семинар С.В. Бахрушина (1882-1950), и выполнил самостоятельное исследование, привлекая математические методы к обработке больших массивов архивных данных.

Итак, Колмогоров разделил развитие математики на следующие периоды:

1. Зарождение математики (развитие математики в древнем Египте и в древней Месопотамии).

2. Период элементарной математики (начиная с развития греческой математики, и до XVII в.).

3. Период создания математики переменных величин (с XVII в. до начала XIX в.).

4. Современная математика.

Таким образом, развитие математики оценивается периодами, ограниченными *временными* рамками, хотя, как известно, знание в разных цивилизациях мира развивалось с разной скоростью и в разные периоды времени, следуя, впрочем, общему вектору направления своего развития – и именно сравнительный анализ развития математики разных регионов в разные периоды времени дает возможность по-иному взглянуть на периодизацию развития математики, привязав ее не ко временным рамкам, а к структуре математического знания в те или иные периоды.

Периодизация Колмогорова основана на сведениях о развитии, в первую очередь, математики Египта, Месопотамии, Греции, частично стран арабского Востока: о развитии математики Китая, Индии, и, Центральной Америки было известно крайне мало. История древней математики в то время ориентировалась, в основном, на античную традицию, и на возникшее в средневековой Европе и в период Возрождения преклонение перед греческой наукой.

Отметим, что и сама история математики к середине XX века была еще весьма молодой научной дисциплиной (хотя первый историко-математический труд Евдема Родосского датируется III в. до н.э.), основанной, в первую очередь, на письменных математических источниках (малодоступных и касающихся, в основном, математики стран Средиземноморья) и практически не обращавшейся к археологическим и иным источникам. Наиболее авторитетное отечественное издание по истории математики [3] также опирается, в основном, на письменные источники и исследования ученых XIX-XX вв. Тем не менее, сравнение приведенных в нем данных о развитии математики в различные периоды времени в различных цивилизациях древности, в Средние века и в эпоху Возрождения дает возможность заметить некоторые закономерности в развитии математики и по-новому задуматься о ее периодизации.

На фоне роста интереса к “косвенным” (в основном археологическим) источникам, обнародования ранее неизвестных историкам науки старинных математических текстов и компаративного анализа развития математики различных регионов и периодов времени, мы можем по-иному взглянуть на пути развития и природу математического знания.

Например, всегда, когда имеется достаточное количество исторических данных, можно говорить об этапе геометрической алгебры в развитии математики всех регионов мира. В Китае мы видим циркуль и линейку в руках мифических прародителей Фу-си и Нюй-ва: эти инструменты являлись атрибутом знания задолго до создания известных нам письменных источников. В Древней Индии трактат “Шульба-Сутра” посвящен именно методам геометрического решения различных математических задач. В шумеро-вавилонской математике использование геометрической алгебры дало следы в виде терминологии при решении квадратных уравнений.

Общим для периода использования геометрической алгебры было отсутствие удобной нумерации: первые нумерации были иероглифическими или алфавитными, крайне неудобными в вычислениях. Повышенный интерес к геометрическим методам мы видим и в средневековой Европе, пользовавшейся римской нумерацией. Но как только неудобная нумерация сменяется позиционной (а тяготение к этому можно увидеть во многих древних цивилизациях), математика переходит, в основном, на арифметико-алгебраические методы решения задач независимо от их структуры.

Но и здесь отсутствие удобной символики тормозит развитие науки. И такая символика начинает создаваться практически одновременно в самых различных уголках Европы (а к этому времени мировая наука уже становится единой).

Надо сказать, что и постановка математических задач в разных цивилизациях была схожей и имела своим источником развитие технологий и экономики.

То есть, во-первых, развитие математики тесно связано с развитием человеческого общества (в сходных условиях решаются сходные задачи). А, во-вторых, оно проходит сходные этапы: накопление практики решения задач – усовершенствование соответствующей символики и численных методов – новое накопление методов – новое усовершенствование и т.д..

Итак, на основе анализа развития математики в *различных* цивилизациях в *разное* время можно предложить такой подход к периодизации основных этапов истории математики.

1. Период накопления первоначальных математических сведений и создание первых письменных (почти повсеместно непозиционных и громоздких) систем нумерации. Вследствие высокой сложности вычислений в таких системах нумерации – развитие геометрических методов решения задач, т.е. начало развития геометрической алгебры. Геометрические построения часто заменяли сложные и путаные вычисления, и результат таких геометрических "подсчетов" легко было измерить на чертеже или специальном геометрическом приборе.

2. Переход от непозиционных систем нумерации к позиционным (обычно десятичным), связанный с распространением знаний в широких слоях населения. Причиной этому было развитие торговли и ремесел и необходимость многочисленных регулярных вычислений, которые естественным образом в ходе массовой вычислительной деятельности упрощались. Но естественному прогрессу нумераций часто препятствовали представители религии и власти: создающаяся новая удобная нумерация не использовалась в официальных и сакральных текстах.

Этот период характеризуется активным развитием арифметико-алгебраических методов, что вскоре приводит к созданию удобных алгебраических обозначений.

Надо отметить, что указанные выше периоды происходили в различных цивилизациях в разные века – не все цивилизации возникали и развивались синхронно. К концу эпохи Возрождения, когда европейские страны колонизировали значительные территории, а также установили постоянные контакты со всеми развитыми государствами мира, математика всех стран стала развиваться как единая наука. И последующие периоды развития математики имеют четкие временные границы.

Дальнейшая периодизация соответствует периодизации Колмогорова, но она может быть уточнена в ходе дальнейших исследований.

3. Накопление методов арифметико-алгебраического решения задач и последующее создание алгебраической символики.

В этот период, кроме традиционно решавшихся математиками задач, особую роль приобретают методы ориентирования по небесным светилам (эпоха великих географических открытий), и изучение движения планет ставит перед математикой новые задачи, связанные с исследованием скоростей и ускорений. Сложные численные методы решения подобных задач приводят к созданию новой символики – символики функций и операций над ними. И мы переходим к следующему этапу.

4. Период математики переменных величин в XVII-XIX вв.

Но в конце XIX – начале XX в. появляется большое количество профессиональных математиков-теоретиков, никогда не решивших в своей жизни ни одной прикладной задачи (учителя и преподаватели вузов). Их интерес к развитию математики обращен только на чисто теоретические вопросы, и сама математика начинает восприниматься как нечто абстрактное, являющееся порождением, в первую очередь, человеческой мысли, но не вследствии развития методов решения практических задач (такая точка зрения на греческую науку уже давно существовала в Европе). Аксиоматизация математики представляется теперь главной задачей теоретиков, и это становится основной идеей развития математики XX в.

5. Период современной математики (XIX-XXI вв.).

Это совпадает с периодизацией А.Н. Колмогорова, но последний период, в связи с бурными изменениями в математике и кибернетике, происходящими в последние полвека, хотелось бы разделить на следующие подпериоды.

5а. Начало XIX – начало XX века. “Традиционное” развитие классических направлений математики на основе развития математического анализа. Это развитие в значительной степени базируется на новом аппарате бесконечно малых величин, созданном в конце предыдущего периода.

5б. Начало XX – середина XX века. В это время развитие математики идет, в значительной степени, под влиянием выступления Д. Гильберта на II Международном Конгрессе математиков в Париже в 1900 году, когда он сформулировал свои 23 проблемы, решение которых оказало значительное влияние на развитие математики. В это время создается новый язык математики, новая терминология, являющиеся новым инструментом развития науки. Аксиоматизация основных областей математики приводит к возможности создания доказательств и развития математических теорий с использованием формального преобразования формальных логических высказываний. Это приводит к бурному развитию ряда направлений математического знания.

5в. Середина XX века – настоящее время. С развитием вычислительной техники меняется отношение к вопросу о том, что есть решение математической задачи, и какими методами эти задачи можно решать. Математика переходит с исключительно аксиоматико-дедуктивного (к настоящему времени сильно формализованного), основанного только на логике пути развития науки к развитию в новых условиях, когда доказательством теоремы может являться результат работы компьютерной программы (вычислений).

Сформировано новое мощное средство решения практических задач, происходит перелом в ходе развития математики, подобный тому, что произошел при переходе на новую нумерацию, или после введения интегро-дифференциальной символики, или после создания формальных алгоритмов записи и преобразования математических высказываний.

Библиографический список

1. *Колмогоров, А.Н.* Математика [Текст] / А.Н. Колмогоров // Большая Советская энциклопедия. – 2-е изд. – М., 1954. – Т. 26.
2. *Колмогоров, А.Н.* Математика в ее историческом развитии [Текст] / А.Н. Колмогоров. – М., 2007.
3. История математики с древнейших времен до начала XIX столетия [Текст] / под ред. А.П. Юшкевича. – М., 1970. – Т. 1-3.

Некоторые вопросы теории тригонометрических рядов в исследованиях Л. Эйлера

В.Д. Павлидис

Среди всех многочисленных исследований, посвященных рядам, в XVIII в. труды Л. Эйлера занимают первое место по широте охвата материала и значимости полученных результатов.

Он рассмотрел бесконечные ряды со всех возможных, доступных тому времени точек зрения и нашел значительное число частных и общих методов их исследования. Одни методы стали общеизвестны, другие – были забыты и впоследствии найдены независимо от него другими учеными. Однако, несмотря на все разнообразие работ Л. Эйлера о рядах, необходимо отметить главное: он установил связь теории рядов с разностным и интегральным исчислениями.

Одним из наиболее ярких примеров этого могут служить исследования Л. Эйлера по теории тригонометрических рядов [1].

Роль теории тригонометрических рядов в формировании и развитии многих современных разделов математики общеизвестна. И в связи с этим появляется необходимость выяснить историческую взаимосвязь теории тригонометрических рядов с другими математическими дисциплинами. Представляется особенно интересным показать, каким образом теория тригонометрических рядов, ее внутренние потребности стимулировали и нередко приводили к созданию новых понятий, методов, теорем, к уточнению или обобщению уже известных приемов, оказывая существенное влияние на развитие математики в целом.

Анализ опубликованных и неопубликованных материалов Л. Эйлера, касающихся формирования элементов теории тригонометрических рядов, позволил выделить несколько истоков появления тригонометрических рядов в его исследованиях.

Во-первых, разложение функции в степенной ряд при определенных условиях привело Л. Эйлера к разложению рациональной функции в тригонометрический ряд.

Так во “Введении в анализ бесконечных” [2] в главе 12 “О разложении дробных функций на действительные частные дроби” для нахождения коэффициентов разложения дробей он получает конечные тригонометрические разложения, расположенные либо по синусам, либо по косинусам кратных дуг.

В “Дифференциальном исчислении” [3] он возвращается к вопросу, обсуждаемому с Гольдбахом в 1744 г.

Разлагая в ряд Тейлора функцию $\operatorname{arctg}(x + \frac{1}{\sin y})$ по степеням $\frac{1}{\sin y}$ при помощи общей формулы для n-ой производной функции $\operatorname{arctg} x$:

$$\frac{d^n \operatorname{arctg} x}{dx^n} = (-1)^n (n-1)! \sin^n x \cdot \sin nx,$$

Эйлер получил ряд $\frac{\pi - x}{2} = \sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \ldots$

Во-вторых, Эйлер приходит к тригонометрическим рядам, занимаясь задачей интерполирования рядов.

В XIII гл. “О рекуррентных рядах” [2] он, рассматривая развертывание выражений $\frac{u+Bpz}{1-2pz\cos\varphi+p^2z^2}$, $\frac{u+Bpz}{(1-2pz\cos\varphi+p^2z^2)^2}, \ldots,$ $\frac{u+Bpz}{(1-2pz\cos\varphi+p^2z^2)^k}$ приходит к тригонометрическим рядам.

В работе 1750 г. [4, (E189)] Эйлер решает задачу интерполирования рядов, приводя их к интегрированию дифференциального уравнения бесконечно большого порядка. Здесь Эйлер впервые обнаружил присутствие неопределенных тригонометрических функций в общих решениях задач этого рода: $y = \int x dx + 2 \sum\limits_{k=1}^{\infty} (\cos 2\pi kx \int x \cos 2\pi kx dx + \sin 2\pi kx \cdot \int x \sin 2\pi kx dx)$. Из этой формулы можно вывести известное разложение периодической функции по синусам и косинусам кратных дуг. Полученная Эйлером формула представляет собой следствие общеизвестной формулы Фурье:

$$f(x) = \int\limits_0^1 f(t)dt + 2 \sum \cos 2\pi kx \int\limits_0^1 f(t) \cos 2\pi kt dt + \sin 2\pi kt \int\limits_0^1 f(t) \sin 2\pi kt dt.$$

Третьим источником появления тригонометрических рядов у Эйлера служат его исследования по суммированию расходящихся рядов. Это отчетливо видно в § 260 “Введения в анализ бесконечных” и в мемуаре [5, (E447)] 1773 г. Однако и в более ранней работе [6, (E246)] 1754 г. Эйлер, применяя метод производящих функций, получает тригонометрические ряды.

Эйлер дает разложение $\sin^m \varphi$, $\cos^m \varphi$ ($m \in Z^+$) в тригонометрические ряды используя формулу $(\cos\varphi + i \sin\varphi)^m = \cos m\varphi + i \sin m\varphi$.

Здесь же получены равенства: $\frac{1}{2\sin\varphi} = \sin\varphi + \sin 3\varphi + \sin 5\varphi + ...$, $\frac{1}{4\sin^2\varphi} = -\cos 2\varphi - 2\cos 4\varphi - 3\cos 6\varphi - ...$

Особый интерес представляет последняя часть работы, в которой устанавливается, что ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a^{n-1} \sin n\varphi = \frac{\cos\varphi - a}{1 - 2a\cos\varphi + a^2}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a^{n-1} \cos n\varphi = \frac{\sin\varphi}{1 - 2a\cos\varphi + a^2}$.

Положив в обоих формулах a=1, Эйлер получает:

$$\cos\varphi + \cos 2\varphi + ... = \frac{1}{2}, \quad \sin\varphi + \sin 2\varphi + ... = \frac{1}{2 \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}.$$

Умножив последнее равенство на $d\varphi$ и проинтегрировав его, Эйлер получает $\cos\varphi - \frac{1}{4}\cos 2\varphi + \frac{1}{9}\cos 3\varphi - ... = \alpha - \frac{\varphi^2}{4}$, где α определяется при φ=0. Этот ряд явился еще одним примером выражения рациональной функции сходящимся тригонометрическим рядом.

С аналитической точки зрения эйлерова теория расходящихся рядов есть один из видов применения общего метода производящих функций: данная функция является общим членом ряда как функция своего номера и рассматривается как определенный элемент известного преобразования, выполненного над некоторой новой, аналитической производящей функцией.

Так, $\cos\varphi + \cos 2\varphi + \cos 3\varphi + ... = \frac{1}{2}$ представляет сумму расходящегося ряда, получаемого посредством интегрирования сходящегося ряда $\sin\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi + \frac{1}{3}\sin 3\varphi - ... = \frac{\varphi}{2}$.

Примерами применения исчисления расходящихся рядов могут служить данные Эйлером во "Введении в анализ бесконечных" выводы выражений для сумм конечного числа синусов и косинусов, аргументы которых составляют арифметическую прогрессию.

Четвертым источником появления тригонометрических рядов в работах Эйлера служат его исследования по теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

В 1749 г. в работе [7] "Исследования об общем движении небесных тел" для приближенного интегрирования нелинейного уравнения Эйлер использует как степенные, так и тригонометрические ряды.

При исследовании движения планеты, притягиваемой к центру силой, зависящей лишь от расстояния, он приходит к интегрированию нелинейной системы $\begin{cases} 2drd\varphi + rd^2\varphi = 0, \\ d^2r - rd\varphi^2 + \frac{c^3}{r^2}d\xi^2 = 0, \end{cases}$ где ξ – независимое переменное.

При помощи замены $\xi{=}v{+}ksinv$ Эйлер сводит задачу к интегрированию уравнения: $\frac{d\varphi}{dv} = \frac{\sqrt{1-k^2}}{1+k\cos\varphi}$, где k – малый параметр.

Приближенное решение выражается тригонометрическим рядом: $\Phi = c_1 + v - 2f\sin v + f^2\sin 2v - \frac{2}{3}f^2\sin 3v + ...$

В 1752 г. в "Исследованиях о неправильностях в движении Юпитера и Сатурна" [8, (E120)] Эйлер приходит к системе четырех уравнений второго порядка, которые интегрирует при помощи неполных тригонометрических рядов.

Пятым направлением в исследованиях Эйлера, приведшим его к тригонометрическим рядам, было изучение и формирование общей идеи функций. Путь к ней был впервые открыт рассуждениями о природе неопределенных функций, входящих в состав уравнений с частными производными.

Основные аргументы Эйлера в споре о колеблющейся струне помещены в мемуары 1767 г. [9, (E322)] и 1773 г. [10, (E439)].

История возникновения интегральных формул коэффициентов тригонометрических рядов показывает, что многие математики шли к ним двумя различными путями. Первый – от интерполяционных формул к точным, путем предельного перехода (Клеро, Лагранж), второй путь – почленное интегрирование тригонометрического ряда (Даламбер). И только Л. Эйлер в своих исследованиях тригонометрических рядов одинаково успешно и практически одновременно, о чем свидетельствуют как его мемуары, так и неопубликованные заметки из записных книжек [11], использовал оба подхода.

Начав активное исследование тригонометрических рядов не позднее 1739 г. [11, зап. кн. № 131], он несколько раз в течение жизни возвращался к этой проблематике.

Интегральные формулы для коэффициентов тригонометрических рядов были получены им не позднее 1776 г. [11, зап. кн. № 139, л. 72, 75, 84]. Однако применение тригонометрических рядов для исследования интегралов [11, зап. кн. № 138, лл. 156об-157] позволяет отодвинуть датировку этого события в начало 70-х годов XVIII в.

Мемуар 1776 г. "Observationes generale circa series quarum termini secundum sinus vel cosinus angulorum multiplorum progrediuntur" [12, (E655)] положил начало публикациям результатов Л. Эйлера в области тригонометрических рядов, которые были получены им в конце 60-х – начале 70-х гг. XVIII в.

Этот мемуар содержит теорему:

"Ряд $A+B\cdot\cos\varphi+C\cdot\cos 2\varphi+\ldots+B\cdot\sin\varphi+C\cdot\sin 2\varphi+\ldots$ сходится если сходится ряд вида: $A+Bx+Cx^2+Dx^3+\ldots$". На л. 156 об. зап. кн. № 138 [11] мы видим применение этой теоремы к исследованию интегралов. Следовательно, данная теорема была доказана Л. Эйлером около 1773 г.

Мемуары 1777 г. "Methodus facilis inveniend series per sinus cosinus angulorum multiplorum procendes, quarum usus in universa theoria astronomia est amplissimus" [13, (E703)] и "Disquisitio ulterior super seriebus secundum multipla cuius dam anguli progredientibus" [14, (E704)] посвящены соответственно интерполяционному и интегральному методам определения коэффициентов тригонометрических рядов.

Заметки на лл. 72, 75 зап. кн. 139 [11] иллюстрируют интерполяционный метод нахождения коэффициентов, а записи на л. 84 зап. кн. № 138 [11] позволяют детально проследить получение Л. Эйлером интегральных формул для коэффициентов тригонометрических рядов.

Таким образом, можно утверждать, что уже в начале 70-х годов XVIII в. тригонометрические ряды на равных правах со степенными являлись аппаратом аналитического изображения функций и имели огромное прикладное значение.

Библиографический список

1. *Паплаускас, А.Б.* Тригонометрические ряды от Эйлера до Лебега [Текст] / А.Б. Паплаускас. – М.: Наука, 1966. – 276 с.

2. *Эйлер, Л.* Введение в анализ бесконечных [Текст] / под ред. И.Б. Погребысского. – М., 1961. – Т. 1.
3. *Эйлер, Л.* Дифференциальное исчисление [Текст] / Л. Эйлер. – М.-Л., 1949.
4. *Euler, L.* De serierum determinatione seu nova methodus inveniendi terminas generales serierum. Nova Acta Acad. Petrop. 3, 1753. – P. 36-85.
5. *Euler, L.* Summatio progressionum $\sin\varphi^\lambda + \sin 2\varphi^\lambda + \sin 3\varphi^\lambda + ... + \sin n\varphi^\lambda$, $\cos\varphi^\lambda + \cos 2\varphi^\lambda + \cos 3\varphi^\lambda + ... + \cos n\varphi^\lambda$. Nova Acta Acad. Petrop. 18, 1774. – P. 24-36.
6. *Euler, L.* Subsidium calculi sinuum . Nova Acta Acad. Petrop. 5, 1760. – P. 164-204.
7. *Euler, L.* Recherches sur le movement des corps celestes en general. Mem. Acad. Roy. sci. et belles-letters, 1749. 3. – P. 93-143.
8. *Euler, L.* Recherches sur les integralites des Jupiter et de Saturn. Pieces remp. prix. Acad. Roy. sci. 1748. – Paris, 1749. – P. 1-123.
9. *Euler, L.* De usu functionom discontinuarum in analysi. Nova Acta Acad. Petrop. 11, 1767. – P. 3-27.
10. *Euler, L.* De choroids vibrantibus disuisitio ulterior. Nova Acta Acad. Petrop. 17, 1773. – P. 381-409.
11. Санкт-Петербургский филиал Архива РАН. – Ф. 136. – Оп. 1. – № 129-140.
12. *Euler, L.* Observationes generale circa series quarum termini secundum sinus vel cosinus angulorum multiplorum progrediuntur. Nova Acta Acad. Petrop. 7, 1793. – P. 87-98.
13. *Euler, L.* Methodus facilis inveniend series per sinus cosinus angulorum multiplorum procendes, quarum usus in universa theoria astronomia est amplissimus. Nova Acta Acad. Petrop. 11, 1798. – P. 94-113.
14. *Euler, L.* Disquisitio ulterior super seriebus secundum multipla cuius dam anguli progredientibus. Nova Acta Acad. Petrop. 11, 1778. – P. 114-132.

Развитие математических методов теории кораблестроения в трудах Эйлера

Л.В. Коновалова

Теоретические проблемы кораблестроения на протяжении многих веков привлекали внимание выдающихся ученых, начиная с Архимеда. В XVIII столетии стремительное развитие судостроения и мореплавания выдвинуло на передний план решение разнообразных задач гидромеханики. Достаточно сказать, что Парижская академия наук с середины

XVIII века регулярно проводила конкурсы и присуждала премии за исследования, посвященные теории корабля, тем самым привлекая лучшие умы к решению проблем кораблестроения.

Россия, ставшая в первой половине XVIII века первоклассной морской державой, также проявляла интерес к теории кораблестроения и кораблевождения. Огромный вклад в решение этих проблем внес величайший математик и механик восемнадцатого столетия Леонард Эйлер. Эйлер родился 15 апреля 1707 года в Базеле (Швейцария) в семье сельского пастора Пауля Эйлера. Начальное образование он получил дома под руководством отца. Отметим, что отец Эйлера был учеником знаменитого математика Якоба Бернулли (1654-1705), первого из уникального рода Бернулли, который на протяжении более ста лет давал миру выдающихся математиков и механиков. Затем юный Леонард Эйлер отправился в Базель для продолжения образования в гимназии. В свободное время он посещал лекции по математике в университете, где преподавал один из крупнейших математиков XVIII века Иоганн Бернулли (1667-1748), младший брат Якоба Бернулли. В 1720 году Эйлер поступил в Базельский университет. За годы учебы в университете он подружился с талантливыми сыновьями И. Бернулли Николаем (1695-1726) и Даниилом (1700-1782).

В 1724 году была учреждена Петербургская академия наук. Молодые братья Бернулли, получив приглашение академии, уехали из Базеля в Санкт-Петербург, поскольку условия, которые создавали в Петербургской академии наук для приезжающих иностранцев были благоприятными. "...лучше несколько потерпеть от сурового климата страны льдов, в которой приветствуют муз, – писал И. Бернулли, – чем умереть от голода в стране с умеренным климатом, в которой муз обижают и презирают" [1, с. 71]. Николай и Даниил Бернулли в письмах к Л. Эйлеру убеждали его последовать их примеру, и в 1727 году двадцатилетний Эйлер приехал в Санкт-Петербург, где был назначен адьюнктом по математике с окладом 300 рублей в год с казенной квартирой, отоплением и освещением.

Эйлер приехал из цивилизованной Швейцарии в Россию, где нравы были достаточно грубы, телесным наказаниям подвергались не только простые люди, но и служащие Академии наук, а подчас и профессора. Но при всем при этом, Петербургская академия наук выгодно отличалась от других европейских академий. Во-первых, твердым бюджетом и щедрой оплатой труда профессоров, во-вторых, Петербургская академия носила более универсальный характер, она состояла из трех классов: – математического, физического и гуманитарного, включавших в себя различные кафедры, в том числе, кафедру математики, кафедру механики, кафедру географии и навигации и т.д. Более того, это была единственная академия наук, заботившаяся о подготовке национальных научных кадров: при ней имелись гимназия и университет.

Молодой Эйлер сразу же включился в интенсивную научную деятельность академии. Его работы, опубликованные в "Комментариях Петербургской Императорской академии наук", быстро снискали ему известность и почетное место среди известных математиков. И тем ни менее, 16 февраля 1740 г. Эйлер, ссылаясь на плохое здоровье, обратился с прошением об увольнении со службы в академии наук, при этом он писал: "обязуюсь еще, при том наисильнейше всегда, по крайней возможности, о чести и пользе императорской академии наук трудиться..." [2, с. 257]. Эйлер уехал в Берлин, приняв настойчивое приглашение прусского короля Фридриха II, сохранив звание почетного члена Петербургской академии наук и пенсию 200 рублей. Четверть века Л. Эйлер проработал в Берлинской академии наук, но его связь с Петербургской академией не прерывалась. Однажды, на вопрос Фридриха II о том, где он научился всему, что знает, великий математик ответил: "...я всем обязан своему пребыванию в Петербургской академии наук" [1, с. 71].

В 1766 году Эйлер вернулся в Россию, приняв приглашение императрицы Екатерины II. Он выдвинул Екатерине II следующие условия своего возвращения: должность вице-президента Петербургской академии наук, жалование – 3000 рублей в год, квартира без солдатского постоя, кафедра физики для старшего сына и оклад – 1000 рублей в год, достойные места по артиллерийской и медицинской части для среднего и младшего сыновей. Все его требования, за исключением первого, императрица выполнила. В Петербурге Эйлер прожил до конца своих дней. Умер Леонард Эйлер 18 сентября 1783 года, по словам Кондорсе "он перестал вычислять и жить" [3, с. 44].

Переходя к трудам Эйлера заметим, что одна из его первых работ (1727 г., Базель) бала посвящена вопросу о наилучшем размещении мачт на корабле на основе математических расчетов. Эту работу Эйлер представил на конкурс Парижской академии наук, получил почетный отзыв, и она была опубликована в собрании премированных трудов. С первых лет своего пребывания в России Эйлер занимается проблемами теории корабля по прямому поручению Петербургской академии наук. В контракте Эйлера с Академией наук содержалось его обязательство написать трактат по морской науке [2, с. 256]. Над этим трудом Эйлер начал работу в 1737 году. Первый вариант трактата был готов уже к концу 1738 года, о чем говорит письмо Эйлера к И. Бернулли от 20 декабря 1738 года. Эйлер писал: “Теперь я закончил трактат о положении и движении плавающих на воде тел, которому следовало бы дать название Морской науки, ибо я направлял все помыслы преимущественно на корабль” [4, с. 287].

Эйлер вел переписку с датским морским офицером Ф. Вегерслофом (1702-1763). В письме от 1 ноября 1743 года уже из Берлина он писал, что “сочинение теперь уже вполне готово. Оно составляет два больших тома, вроде “Комментариев” вместе с многочисленными гравюрами. Таким образом, я лишь ожидаю распоряжений, когда и как я должен его переслать в Петербург” [5]. Намерение издать книгу долгое время не удавалось. Весной 1747 года Эйлер делает попытку издать ее в Лондоне, затем в Берлине, но тщетно. Отчаявшись, он пишет 29 марта 1748 года письмо в Петербург, адресуя его влиятельнейшему чиновнику Григорию Николаевичу Теплову, воспитателю и секретарю Кирилла Григорьевича Разумовского – президента Петербургской академии наук. “Покорно прошу напечатаньем моей книги не замедлить, понеже я боюсь, чтоб мои изобретения со временем больше новы не были, потому что французские математики в изыскании сей материи очень стараются, и уже некоторые важные декуверты опубликовали, которые я много лет прежде них изобрел...” [6]. Наконец, летом 1749 года в Петербурге вышла в свет “Морская наука” [7] Л. Эйлера на латыни. В том же году было издано письмо Эйлера президенту Петербургской академии наук графу К.Г. Разумовскому [8], которое представляло собой автореферат “Морской науки”. Письмо было написано Эйлером на французском языке и издано на русском в переводе М.В. Ломоносова.

“Морская наука” состоит из двух томов. В первом изложена общая теория плавающих тел, во втором томе теория применяется к анализу вопросов, связанных с конструкцией и нагрузкой корабля. В своем фундаментальном труде Эйлер заложил основы статической устойчивости и теории малых колебаний – двух важнейших разделов теории устойчивости. Причем теорию малых колебаний он строил как теорию определения простого маятника, который имел бы такой же период колебаний, какой имеет рассматриваемое тело. Такой подход представляет собой первый шаг на пути создания аппарата линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами, с помощью которого последователи Эйлера, великие французские математики Жан Лерон Даламбер (1717-1783) и Жозеф Луи Лагранж (1736-1813) развили теорию малых колебаний. Эйлер дал и аналитический метод расчета момента восстанавливающих сил, тем самым завершив труд, начатый Архимедом.

В первой главе "О равновесии плавающих в воде тел" Эйлер последовательно рассмотрел различные тела и различные возможности их положения равновесия при плавании в воде. Во второй главе "О восстановлении в равновесии тел, плавающих в воде" он систематически исследовал моменты восстанавливающих равновесие сил, развивающихся после отклонения тела от своего положения равновесия. В третьей главе "Об устойчивости, с которой тела, плавающие в воде, упорствуют в положении равновесия" Эйлер дал следующее определение устойчивости: "Устойчивость, с которой тело, плавающее в воде, упорствует в положении равновесия, должна оцениваться величиной момента восстанавливающей силы, когда тело будет наклонено из положения равновесия на данный бесконечно малый угол" [7, с. 89]. Итак, Эйлер трактует устойчивость, как количественную характеристику положения равновесия. Приведенное высказывание Эйлера представляет собой первую в истории науки попытку определения понятия устойчивости. В четвертой главе "Об эффекте сил, воздействующих на плавающие тела" рассмотрены различные виды возмущающих сил, которые представляют интерес с мореходной точки зрения. Остальные главы первого тома посвящены теории малых колебаний плавающего тела. При этом Эйлер рассматривает малые колебания, как малые качания вокруг некоторой оси, проходящей через центр тяжести тела. Как уже отмечалось, основная идея Эйлера при изучении малых качаний состоит в определении такого простого маятника, который имеет тот же период колебаний, что и тело.

В упомянутом уже автореферате [8] трактата Эйлера его переводчик с французского М.В. Ломоносов употребил для обозначения основного понятия обсуждаемой теории термин "устойчивость". "Тела, на воде плавающего, равновесное положение будет устойчиво, ежели оное тело будучи несколько наклонено, опять справится. Напротив того, ежели по малом наклонении опрокинется, сие равновесное положение будет падкое" [8, с. 10-11].

Заметим, что Эйлер, глубоко сознавая ценность математических исследований для общества, не жалел сил на то, чтобы представить свои достижения в наиболее простой и понятной форме для тех, кто мог применить его результаты на практике. В связи с этим он существенно сократил и упростил свой трактат и в 1773 году опубликовал в Париже на французском языке "Theorie complete de la construction et de la manoeuvre de vaisseaux". Эта книга написана уже для тех, кто занимается кораблестроением и навигацией. Книга имела огромный успех. Французский король, по представлению Даламбера и Кондорсе – секретаря Парижской академии наук, распорядился выдать Эйлеру премию в размере 6000 ливров, что приблизительно равнялось 1200 рублям. Эти деньги были отправлены Эйлеру с большим опозданием, в связи с чем маркиз де Кондорсе, сам будучи известным математиком, прислал Эйлеру письмо с извинениями. Выражая свое преклонение перед гением Эйлера, Кондорсе писал: "Я ползаю по тому же пути, по которому Вы летаете и сие есть единственное средство к Вам приблизиться". Книга была переведена на итальянский, английский и русский языки. Русский перевод [9], был сделан Михаилом Головиным, племянником М.В. Ломоносова. Головин, в отличие от своего знаменитого дяди, ввел неудачный термин для понятия устойчивости. А именно, в четвертой главе он пишет: "Как скоро корабль будет несколько наклонен, или сбит из равновесного состояния, тогда три только случая могут иметь место:

1) или корабль останется в наклоненном состоянии, и такое равновесие называется остойчивым;

2) или приходит в прежнее свое положение, и такое равновесие называется постоянным или имеет твердостояние, которое, смотря по обстоятельствам, может быть больше или меньше;

3) или корабль, будучи несколько наклонен совсем опрокинется, такое равновесие именуется вертлявым или склонным к падению.

Первый и третий случаи нежелательны " [9, с. 20-21]. Введение Головиным термина "остойчивое" для нейтрального положение равновесия здесь ошибочно, поскольку пятая глава называется "О способе приводить твердостояние или остойчивость в определенную меру". В дальнейшем Головин устойчивость называет "твердостоянием". Заметим, что французское слово "stabilite", которое Эйлер употребил во французском издании своей книги для обозначения понятия устойчивости, переводится на русский язык как "устойчивость" или "остойчивость". Эти два слова в русском языке являются фонетической и орфографической разновидностью одного и того же понятия. М.В. Ломоносов перевел "stabilite" как “устойчивость”, а его племянник перевел, как “твердостояние” или “остойчивость”, отдавая предпочтение в тексте первому варианту.

Во второй половине XVIII века в России было издано несколько книг, в которых затрагивались проблемы устойчивости корабля. Так, в 1799 году был опубликован перевод И. Амосова, корабельного подмастерья, книги Г. Чапмана “Исследование о истинном способе находить пристойную площадь парусов линейных кораблей, и через посредство онной определять длину мачт и реев”. В этой книге переводчик для обозначения устойчивости (в смысле Эйлера) употребляет термин “остойчивость” или “момент остойчивости”. Таким образом, попытка Головина ввести термин “твердостояние” в русскую литературу не увенчалась успехом, а термин М.В. Ломоносова “устойчивость” укоренился. Правда, в измененной форме, так как особенности русского языка середины XVIII века оказались более благоприятными для той формы слова “устойчивость”, которую употребил Амосов, т.е. “остойчивость”. В терминологии кораблестроения термин сохранился именно в таком виде вплоть до наших дней, а в математической литературе остался в той форме, которую первоначально предложил Ломоносов.

Библиографический список

1. История Академии наук СССР [Текст]. – М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1958. – Т. 1.
2. *Пекарский, П.П.* История Императорской Академии наук в Петербурге [Текст] / П.П. Пекарский. – С.-Пб., 1879. – Т. 1.
3. *Condorcet, J.A.N.* Eloge de M. Euler. Introduction a l’analyse des infiniment petits de M. Euler. – Strasbourg, 1786. – P. 1-44.
4. Bibliotheca mathematica, 6 Folge, Bd. 5.-Leipzig, 1904.
5. Архив АН, ф. 3, оп. 1; № 705, лл. 120-121.
6. Архив АН ф. 136, оп. 2; № 22, л. 8.
7. *Eulero, L.* Scientia navalis seu tractatus de construendis ac dirigendis navibus.-Petropoli, 1749.
8. *Эйлер, Л.* Письмо из Берлина 25 января 1749 года Президенту Академии наук графу Разумовскому с изложением написанного по поручению Академии сочинения “Scientia navalis seu tractatus de construendis ac dirigendis navibus” [Текст] / Л. Эйлер. – С.-Пб., 1749.
9. *Эйлер, Л.* Полное умозрение строения и вождения кораблей [Текст] / Л. Эйлер. – С.-Пб., 1778.
10. *Bertrand, J.D.* D’Alembert. – Paris, 1889.

Талант к таланту
(к 110-летию со дня рождения П.Я. Полубариновой-Кочиной)

А.Е. Малых, В.И. Данилова

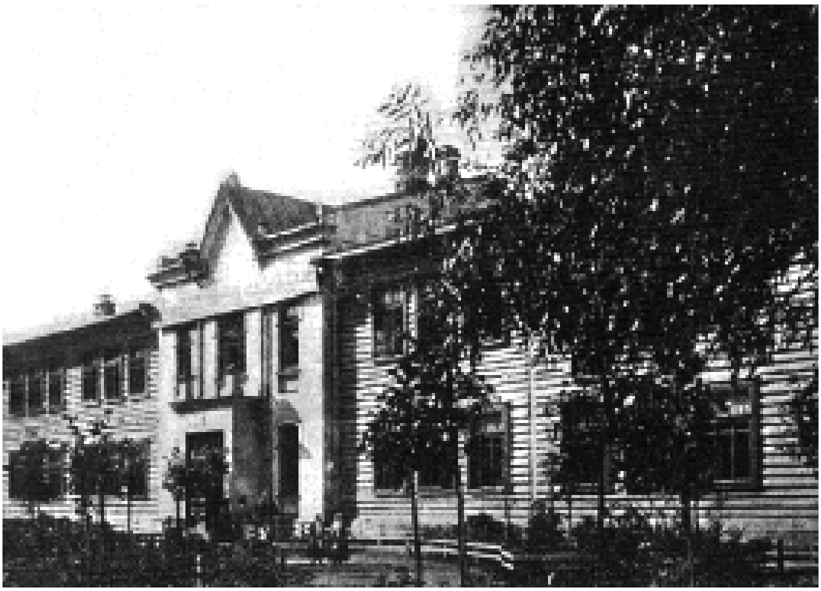
...Любимая моя наука математика –
собрание прекрасных истин.
А сколько бесценных мыслей
прочитано и услышано!
П.Я. Кочина

Пелагея Яковлевна Кочина (1899-1999)

Рассказать о Герое Социалистического Труда, лауреате Государственной премии СССР, академике Академии наук СССР **Пелагее Яковлевне Кочиной** столь же трудно, как и о широком круге ее научных интересов – от сложных вопросов теории до важнейших государственных проблем. Она – автор более 200 опубликованных научных работ и статей в научно-популярных изданиях. В ее исследованиях нашли отражение проблемы механики твердого тела, строительной механики, теоретической гидромеханики, динамической метеорологии и, в основном, теории фильтрации жидкостей и газов в пористых средах. Многие работы посвящены вопросам истории естествознания и техники. В трудах Пелагеи

Яковлевны математическая наука и инженерная практика всегда выступали во взаимосвязи и взаимозависимости.

Родилась Пелагея Яковлевна в семье Якова Степановича и Анисии Пантелеймоновны Полубариновых 13 мая (по старому стилю – 1 мая) 1899 г. в селе Верхний Хутор (Покровское) Астраханской области. Для Пелагеи отец был истинным другом. Она рассказывала ему обо всем, что происходило вокруг нее и с ней. Яков Степанович привил дочери любовь к чтению и знаниям. В домашней библиотеке имелись книги Бебеля, Сенеки, сочинения русских писателей, журналы.



Покровская женская гимназия

У Полубариновых было четверо детей: братья – Алексей, Василий, две сестры – Пелагея и Ираида. Отец хотел им дать достойное образование и перед поступлением Пелагеи в гимназию переехал с семьей в Астрахань. Там он стал работать в частном ломбарде. В восьмилетнем возрасте Пелагея успешно сдала экзамен в женскую гимназию и стала ученицей приготовительного класса. На третьем году ее обучения семья переехала в Петербург. Пелагея поступила на учебу в Покровскую женскую гимназию, названную так ввиду того, что располагалась она на территории Покровской общины сестер милосердия[1]. С большой теплотой Пелагея отзывалась впоследствии о своих воспитателях и учителях. С пятого класса гимназии тринадцатилетняя Пелагея стала иметь (по ее

[1]Гимназия была основана в 80-х гг. XIX в. княгиней Ольденбургской.

воспоминаниям) первые заработки, помогая сверстникам освоить учебный материал по математике и физике, а в качестве платы обедала в семьях обучаемых. Любовь к рисованию у нее возникла в гимназии. В дальнейшем во всех своих многочисленных путешествиях Пелагея Яковлевна стала делать наброски окружающих пейзажей.

Детский санаторий (рис. П.Я. Кочиной)

Высшие Бестужевские курсы

Осенью 1916 года Пелагея поступила на Высшие Бестужевские Женские курсы (ВЖК). Они были открыты в 1878 г. благодаря огромным усилиям русской общественности во главе с крупнейшими учеными. За курсами установилось название Бестужевских по имени профессора русской истории К.Н. Бестужева-Рюмина, племянника известного декабриста. Он был официальным их учредителем и первым директором. В 1886 г. правительство запретило прием, однако спустя три года после настойчивых ходатайств передовой русской интеллигенции курсы открылись вновь. К 1914 г. число слушательниц достигло семи тысяч (6996). Изначально срок обучения был три года, а с 1881 г. увеличился до четырех лет. Слушательницами принимались женщины не моложе 21 года, получившие среднее образование. Обучение было платным, но многие преподаватели читали лекции безвозмездно. Окончившие ВЖК получали право преподавать в женских средних учебных заведениях. Для бестужевок были учреждены специальные математические курсы: введение в анализ и тригонометрия. Изучались и основные дисциплины: аналитическая геометрия, дифференциальное и интегральное исчисления, дифференциальные уравнения, теория чисел и др. Их читали известные ученые: Я.В. Успенский, Б.А. Венков, С.А. Янчевский, В.И. Шифф, Л.Н. Запольская, К.А. Поссе, А.В. Васильев, И.В. Мещерский, Б.М. Коялович. С особой теплотой и признательностью Пелагея вспоминала и Надежду Николаевну Гернет, защитившую с отличием диссертацию по вариационному исчислению у самого Давида Гильберта. В 1901 г. Н.Н. Гернет стала преподавать на ВЖК. С ней всегда можно было поделиться своими горестями, сомнениями и радостями.

В начале мая 1918 г. Пелагее пришлось прервать свои занятия для поездки под Выборг, где в детском туберкулезном санатории для солдатских детей лежала ее сестра Ира, здоровье которой к тому времени резко ухудшилось. Вскоре Ираида умерла. Осенью 1917 г. Яков Степанович был призван на военную службу в качестве ратника 2-го разряда и работал в госпитале Ораниенбаума, недалеко от Петрограда. В ноябре 1918 г. умер и он от свирепствовавшей тогда “испанки” – наиболее тяжелой формы гриппа. Пелагея лишилась материальной поддержки для дальнейшего обучения. Узнав о смерти ее отца, Н.Н. Гернет сразу же стала хлопотать о том, чтобы для курсистки Полубариновой была учреждена и предоставлена специальная платная должность библиотекаря в математической читальне.

Здание ГФО

На руках Пелагеи остались мама и младший брат Алексей. В 1919 году она стала вычислителем Главной физической обсерватории (ГФО). Оставалось меньше времени для работы в математической читальне. Как и большинство семей, Полубариновы стали голодать. К тому же у Пелагеи обнаружили туберкулез бронхиальных желез. Сотрудники ГФО посоветовали ей поехать в командировку на метеорологическую станцию в г. Каргополь в качестве заведующей. Вместе с матерью и братом она отправилась туда. Весной 1919 г. Пелагея вернулась в столицу. К тому времени ВЖК уже были присоединены к Петроградскому университету. Ей как студентке старших курсов выделили отдельную комнату в общежитии. С весны 1920 г. вся жизнь Пелагеи Яковлевны сосредоточилась в университете. Мама и брат жили с ней.

Когда наша страна стала успокаиваться от военных тревог и возвращаться к мирному созидательному труду, на первых курсах университета появилось много молодежи. На старшие же, где лекции посещали единицы, стали понемногу возвращаться слушатели в серых шинелях, возобновившие обучение. В их числе был и будущий муж Пелагеи – Николай Кочин. Студентам старших курсов преподаватели лекции читали по вечерам. В своих воспоминаниях П.Я. Кочина с особой теплотой писала впоследствии о И.М. Виноградове, В.И. Смирнове, А.А. Маркове, Г.В. Колосове, Н.И. Мусхелишвили, И.А. Лаппо-Данилевском, Б.Н. Делоне и многих других [1].

Главный корпус Петроградского университета

Блестяще окончив физико-математический факультет Петроградского университета (1921), Пелагея Полубаринова продолжила работу в ГФО под руководством Александра Александровича Фридмана (1888-1925). Сначала она занимала должность вычислителя, затем адъюнкта-физика, наконец, заведующего отделом теоретической метеорологии. Работа с Фридманом сформировала у нее интерес к гидродинамике и решению вопросов, которыми она занималась на протяжении всей своей жизни.

Николай Евграфович Кочин окончил Петроградский университет в 1923 году. В студенческие годы он познакомился с Пелагеей Полубариновой, и они обнаружили общие взгляды на интересующие их научные проблемы. С 1924 года Николай Евграфович стал работать в Ленинградском государственном университете.

В 1925 году Пелагея Яковлевна и Николай Евграфович поженились. "Справлять свадьбу, – как писала П.Я. Кочина, – считалось мещанством, так же, как танцевать, носить очень нарядные платья. Мы с Николаем

Евграфовичем после регистрации в ЗАГСе ограничились приглашением на чашку чая наших свидетелей" [5, с. 93].

Пелагея Яковлевна и Николай Евграфович Кочины

За время совместной жизни они одинаково стали смотреть и на различные аспекты семейных отношений. 25 марта 1927 г. у Кочиных родились дочери-близнецы Ираида и Нина. Пелагее Яковлевне пришлось оставить работу в ГФО. Но это не означало, что она отказалась от научной деятельности. На протяжении последующих десяти лет П.Я. Кочина преподавала в различных высших учебных заведениях: Ленинградском институте инженеров путей сообщения (1925-1937), институте инженеров гражданского воздушного флота (1924-1935). В 1934 г. она стала работать на полную ставку в должности профессора Ленинградского университета. В следующем году ее муж был приглашен на преподавательскую работу в Московский государственный университет, и семья переехала в столицу.

В Москве П.Я. Кочина занимала должности заведующей кафедрой высшей математики гидрометеорологического института (1935-1937), заведующей кафедрой математики авиационного технологического института (1937-1941), профессора кафедры высшей математики нефтяного института им. И.М. Губкина (1937-1941).

Деятельность Пелагеи Яковлевны Кочиной в системе Академии наук СССР началась с 1935 года: научный сотрудник I разряда, старший научный сотрудник Математического института им. В.А. Стеклова (1935-1939). В 1940 г. Пелагея Яковлевна защитила диссертацию "Некоторые задачи установившегося движения грунтовых вод" на соискание ученой степени доктора физико-математических наук.

В 1939 г. Николай Евграфович Кочин возглавил отделение механики Института механики АН СССР... Когда в конце 1941 г. немецкие войска вплотную подошли к Москве, Пелагея Яковлевна с детьми уехала в Казань, куда был эвакуирован Институт механики. Муж остался в Москве для выполнения исследований по военной тематике.

В 1943 г. фашисты понесли ощутимые потери от советских войск, и у Кочиных появилась возможность возвратиться в Москву. К тому времени Николай Евграфович был серьезно болен и 31 декабря 1944 г. умер. Курсы лекций, которые он не успел дочитать студентам, разработала и провела за него Пелагея Яковлевна.

С 1939 по 1950 гг. она работала в институте механики АН СССР, а с 1948 г. – зав. отделом гидродинамики.

Дирижабль "Победа"-1945 транспортировал газ для аэростатов заграждения. После войны успешно применялся в поиске невытраленных мин и затонувших судов

С 1946 г. читала лекции по тематике своих научных исследований не только в нем, но и в Гидрометеорологическом и самолетостроительном институтах. В военной академии им. Н.Е. Жуковского Пелагея Яковлевна преподавала высшую математику на первом и втором курсах. “Как не вспомнить эти лекции” – говорили спустя десятки лет ее курсанты. Они были строгими, методически проработанными и без какого-либо вспомогательного материала. Такой же требовательной она была на экзаменах, заставляя студентов-первокурсников приходить по нескольку раз для их пересдачи. С 4 декабря 1946 г. Пелагея Яковлевна – член-корреспондент Отделения технических наук (гидродинамика). В 1970 г. Кочина стала работать зав. отделом математических методов механики Института проблем механики АН СССР (1970-1987), а с 1987 г. – советником при дирекции этого института.

О множестве всех задач, решенных ею, рассказать невозможно: они слишком сложны и разнообразны, охватывают многочисленные сферы человеческой деятельности. Поэтому остановимся лишь на нескольких из них.

...На кафедру высшей математики Института инженеров гражданского воздушного флота поднялась молодая миловидная женщина в парадном мундире. Голубой костюм с широкими золотыми нашивками произвел эффект на аудиторию, особенно если учесть, что слушатели были гораздо старше ее. Вскоре всезнающие студенты выяснили, что их профессор уже много сделала в науке: впервые выполнила классификацию и дала математическое описание циклонов и антициклонов, опубликовала сборник авиационных задач. Взять хотя бы одну из них – о деформации оболочек дирижабля. При сильном ветре он как детский шарик, так и мечется. Но внутри него – огромный резервуар, наполненный взрывоопасным газом. Пелагее Яковлевне удалось математически описать борьбу двух стихий: горячего газа внутри оболочки и холодного ветра – снаружи. Она рассчитала величину силы ветра, которую сможет выдержать оболочка дирижабля, и какую она примет при этом форму. Другими словами, был дан квалифицированный ответ на вопрос: при каких условиях дирижабль может летать безопасно. Заметим, что в тридцатые годы прошлого столетия работы в этом направлении имели огромное значение для развития отечественного дирижаблестроения.

Дирижаблестроительный учебный комбинат (ДУК) был создан в 1932 г. В его состав входила Воздухоплавательная школа и дирижаблестроительный институт, который и стал впоследствии базой для создания Московского авиационного технологического института (МАТИ). ДУК был одним из самых престижных учебных заведений страны. Конкурс, как правило, превышал 15 абитуриентов на место. Вступительными экзаменами являлись: сочинение (письменно), русский язык (устно), математика (письменно и устно), физика, химия и иностранный язык (устно) – всего семь. Кроме того, поступающие проходили очень строгую медицинскую комиссию Гражданского воздушного флота. Через несколько лет аэростаты поднимутся над Москвой, Ленинградом и другими городами. Они станут надежным заслоном от фашистских бомбардировщиков, спасут тысячи и тысячи человеческих жизней, зданий, памятников, жилых сооружений...

Дирижаблестроительный учебный комбинат

ДнепроГЭС

...Для своих студентов П.Я. Кочина придумывала нестандартные и интересные задачи, посещала лекции по истории, философии, музыке. Эрудиция ее была широко известна, как и высок авторитет. Можно без конца поражаться широте творческого диапазона Пелагеи Яковлевны, разнообразию ее научных интересов. А между тем, решения лишь одной из задач было бы достаточно для того, чтобы имя Кочиной навсегда осталось в истории науки. Мы имеем в виду создание теории движения грунтовых вод.

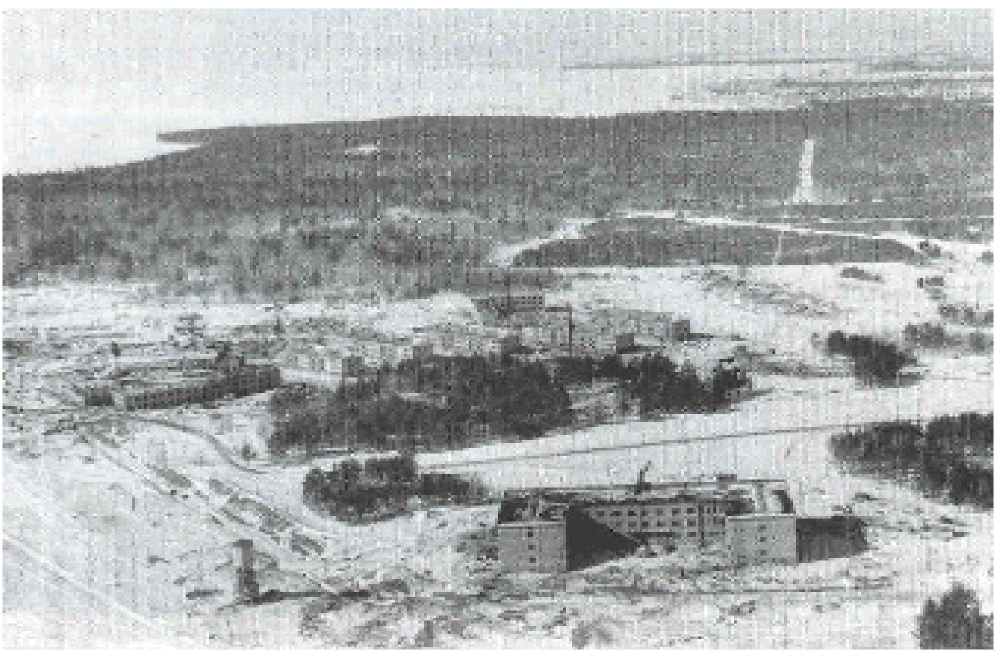
"Построено на песке", – так обычно говорят о чем-то ненадежном. Ведь никто и никогда не рисковал возводить огромные сооружения на зыбком фундаменте. Особенно это относилось к строительству плотин и гидроэлектростанций. Их всегда возводили на прочных скальных горных породах. И это было аксиомой. Когда правительством СССР было намечено строительство каскада гидроэлектростанций на Днепре, Волге и других реках необъятного Советского Союза, возник вопрос: как быть с фундаментом? Ведь большинство их русел имело довольно мощную "подушку" осадков. Чрезвычайно дорого и сложно их убрать, да и не во всех случаях это возможно. Вызывало вопросы поведение грунтов под плотиной после того, как начнут просачиваться воды под гидроэлектростанцией... Ответить на них никто не мог. Такой практики в нашем государстве не было. Не было и теории просачивания воды сквозь толщу горных пород. За математическое решение этой проблемы не брались даже прославленные ученые. Так, знаменитый голландский физик и математик Гендрик Антон Лоренц (1853-1928) писал: "Если бы мне предложили составить математическое уравнение того, что происходит в обычном комке земли, я бы в ужасе убежал...".

Когда Пелагея Яковлевна стала работать в Математическом институте, ей хотелось заняться какой-нибудь гидродинамической задачей, еще до конца не разработанной, но достаточно трудной в математическом отношении. Сначала она изучала **теорию приливов**, но затем ее увлекла **гидродинамика** – наука о том, как происходит движение воды в грунте или нефти в нефтеносном пласте. Решать подобные задачи крайне необходимо: они нужны и строителям плотин, и нефтяникам, и мелиораторам, и людям многих других профессий.

Исследования Пелагеи Яковлевны по движению жидкостей в пористой среде, которыми она стала заниматься с конца тридцатых годов прошлого столетия, являются ее фундаментальным вкладом в теорию фильтрации. В них разработан метод решения задач плоской установившейся фильтрации в гидротехнических сооружениях с применением аналитической теории линейных дифференциальных уравнений (1938). Для решения фильтрационных задач в слоистом грунте ею был разработан метод интегральных уравнений. Плоская задача фильтрации через два грунта состоит в нахождении двух функций комплексного переменного – комплексных потенциалов $\omega_1 = \varphi_1 + i\psi_1$, $\omega_2 = \varphi_2 + i\psi_2$, определяющих течение в первом и втором грунтах, удовлетворяющих, кроме соответствующих условий на границе, еще и условиям на линии раздела $\frac{1}{æ_1} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial s} = \frac{1}{æ_2} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial s}; \quad \psi_1 = \psi_2$.

В общем случае задача может быть сведена непосредственно к системе сингулярных интегральных уравнений. Для многослойных сред, когда линии раздела слоев прямолинейны или пересекаются в одной точке, П.Я. Кочина показала, что такое решение можно построить в случае произвольного числа слоев произвольной мощности с различными коэффициентами фильтрации (1947).

Кроме того, ряд работ Пелагеи Яковлевны был посвящен решению задач плоской установившейся фильтрации методом конформных отображений с учетом вида годографа скорости. Большое практическое значение имеют исследования П.Я. Кочиной по совместной фильтрации двух жидкостей различной плотности: задач о неустановившемся движении под плотиной гидроэлектростанции и о стационарной линзе пресной воды, расположенной над бассейном соленой воды.



Так выглядел Академгородок в начале 1959 года

Теорию грунтовых вод, к удивлению специалистов, П.Я. Кочина создала и причем в довольно сжатые сроки. Своими работами о притоке к скважинам в неоднородном по площади пласте, о движении контура нефтеносности, об обводнении нефтяных скважин и неустановившейся фильтрации с поверхностями разделов Пелагея Яковлевна внесла существенный вклад в изучение гидродинамики нефтяного пласта. Основные результаты работ обобщены в ее монографиях 1942 г. и особенно 1952 г. "Теория движения грунтовых вод", ставшей настольной книгой гидромехаников в СССР и за рубежом [7]. Впервые появилась возможность точно рассчитать поведение грунтов под плотинами и гидроэлектростанциями. Книга была издана почти во всех развитых странах мира, а ее автор удостоен Государственной премии СССР. Как отмечают ученые, "нет ничего практичнее хорошей теории". Вот что написано в предисловии к американскому изданию книги: "Каждая ее страница демонстрирует огромную эрудицию автора, так же, как и превосходство русской науки в развитии и применении математических теорий для изучения движения грунтовых вод". Красноречивее и не скажешь!

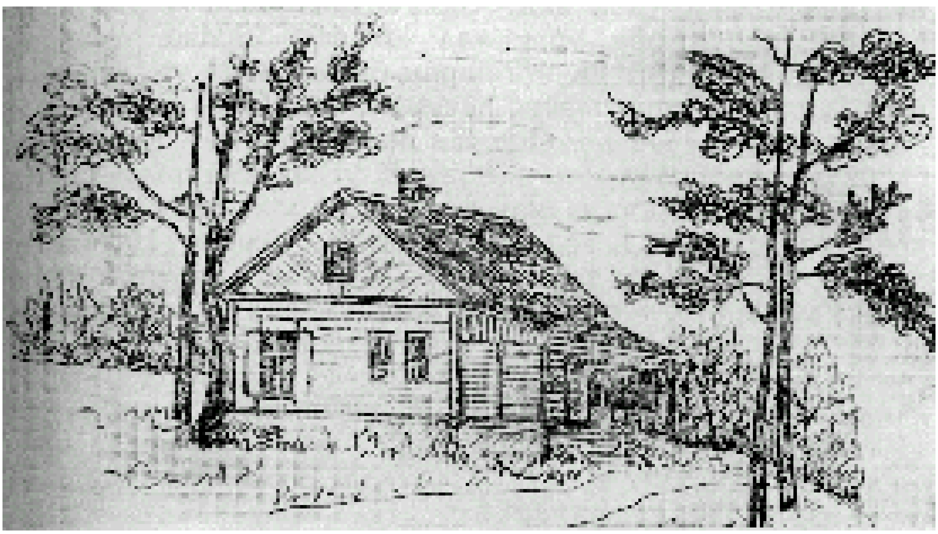


Рисунок коттеджа, выполненный П.Я. Кочиной

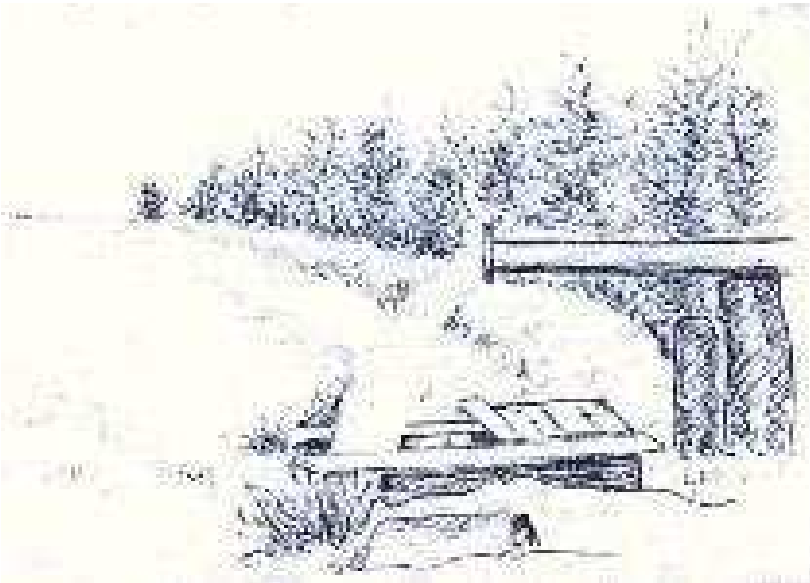
Уже в пенсионном возрасте (1959) П.Я. Кочина получила предложение от Михаила Алексеевича Лаврентьева (1900-1980) баллотироваться в академики и поехать работать в создававшееся тогда Сибирское отделение АН СССР. Проработала она в Новосибирске 12 лет в должности заведующей отделом прикладной гидродинамики Института гидродинамики СО АН СССР (1959-1970) и одновременно заведующей кафедрой теоретической механики Новосибирского государственного университета (1962-1970). Институт располагался в Золотой долине, где строился

Академгородок. Председателем этого отделения был М.А. Лаврентьев. Первые дни Академгородка были очень морозными, но и веселыми, радостными. Ученые, приехавшие в сибирскую тайгу, жили поначалу в бревенчатых бараках, промерзавших к утру. На глазах ученых строились первые здания будущего городка, академических институтов. Весной 1959 г. Академгородок состоял уже из пяти трехэтажных настоящих домов. На месте своего коттеджа Пелагея Яковлевна сама вбила в землю первый колышек... В Сибирь приехали ученые разных поколений, но в те дни все они чувствовали себя молодыми. Это было время увлекательной, радостной и горячей работы.

Внимание Пелагеи Яковлевны привлекла Кулундинская степь – основная житница Западной Сибири. Для того чтобы она давала высокие урожаи, ее нужно напитать водой, т.е. разработать такой мелиоративный комплекс, который обеспечивал бы стабильные и богатые урожаи. С этой целью была создана Кулундинская комиссия, впоследствии превратившаяся в комиссию по изучению и охране водных ресурсов всей Сибири.

В Новосибирском институте гидродинамики Пелагея Яковлевна, будучи руководителем отдела, ставила и решала важные научные и практические задачи. Много сил она вложила в решение проблем, связанных с мелиорацией Западной Сибири, в том числе, посвященных созданию в центральной части Кулундинской степи опытных орошаемых участков. При этом значительное внимание уделялось исследованию фильтрационных задач, возникающих при орошении. Комплексные водохозяйственные проблемы изучались на основе современных математико-экономических методов. Результаты исследований обобщены в монографии "Математические методы в вопросах орошения" [10].

Как отмечала П.Я. Кочина, если не применять законы фильтрации в сельском хозяйстве, то это может привести ко многим бедам. Вода, просачиваясь сквозь стенки и дно оросительных каналов, может поднять уровень грунтовых вод, а это грозит полям повышенной испаряемостью, затоплением... В этой науке – подземной гидродинамике – еще много нерешенных вопросов и проблем. Напоить степь сложно. Это на первый взгляд она кажется ровной, однако для того, чтобы вода потекла по каналам в нужном направлении, степь следует "выровнять". А плодородный слой в ней всего 20-30 сантиметров. Его трогать нельзя... И тут П.Я. Кочина предложила неожиданное решение: чисто математически рассчитать трассы каналов, а против засоления и затопления почв использовать попеременно и речную, и подземную воду.



Первые шаги орошения

Научные работы Пелагеи Яковлевны отличаются законченностью, точностью и логичностью. Она всегда стремилась довести свои исследования до численного результата, с большим искусством и изяществом выполняя очень сложные вычисления.

Пелагея Яковлевна утверждала, что человек может сделать намного больше, чем предполагает. Ее жизнь – яркий пример постоянного самоусовершенствования. Казалось бы, она все успела: поднялась на вершину своей трудной профессии, воспитала двух дочерей, унаследовавших путь матери в математике... Но вот вышла ее книга “Воспоминания” и сразу же открылись новые грани ее таланта; несомненен и литературный дар, а страницы иллюстрированы самим автором [1].

Наконец, остановимся на важном вкладе П.Я. Кочиной в историю математики. Ее работа в этом направлении явилась результатом исследований, проводимых на протяжении всей жизни. Она изучила неизвестные прежде страницы жизни и деятельности Софьи Васильевны Ковалевской (1850-1891). Стала редактором первого собрания ее сочинений. Ряд рисунков в нем был выполнен Пелагеей Яковлевной. Она стала редактором не только научных текстов, но и художественных, так как С.В. Ковалевская оставила ряд литературных произведений.

В 1966 г. П.Я. Кочина опубликовала статью о Карле Теодоре Вильгельме Вейерштрассе по случаю его 150-летнего юбилея [9], а в 1985 – обширный труд “Карл Вейерштрасс (1815-1897)”. Рецензент книги указал: “Эта биография – желанный вклад в наше понимание Вейерштрасса. Автор обращался к огромному числу первоисточников и изложил результаты своих исследований ясным и понятным языком. Книга содержит детальную биографию всей жизни Вейерштрасса, а также подробное описание его математических работ настолько полно, насколько возможно при изучении этой сферы деятельности ученого. Ввиду небольшого числа опубликованных источников книга является наилучшей среди биографий Вейерштрасса” [3]. Если учесть, что этот блестящий труд опубликован Кочиной в возрасте 86 лет, то можно только удивляться.

Еще большего изумления вызывает тот факт, что спустя два года вышла из печати еще одна ее книга о Магнусе Гесте Миттаг-Леффлере (1846-1927) [4]. Пелагея Яковлевна работала над его научной корреспонденцией на протяжении нескольких десятков лет, за исключением времени, проведенного в Новосибирске. Превосходная биография Миттаг-Леффлера не затмевает его значительного вклада в математику, социальной активности, популяризации идей выдающихся математиков своего времени.

В 1988 г. П.Я. Кочина опубликовала книгу “Наука, люди, годы. Воспоминания и выступления” [5]. Она дополнила вышедшее первое издание 1977 г. “Воспоминания”. В ней помещены портреты выдающихся ученых-современников, приведены многочисленные события из ее научной жизни. Там же блестяще описаны путешествия как по родной стране, так и заграничные научные поездки в Будапешт, Рим, ГДР. По приглашению Польской АН Пелагея Яковлевна прочла курс лекций по основным вопросам теории фильтрации в Варшаве; была приглашена на заседание Лондонского Королевского общества и посетила университеты в Кембридже, Эдинбурге и Оксфорде, побывала в Шотландии. В качестве члена делегации АН СССР она присутствовала на заседании Французского гидротехнического общества и конгрессе по механике в Италии. П.Я. Кочина побывала в Индии для ознакомления с системой орошения. В составе экскурсии из Новосибирска путешествовала по Дунаю... Из каждой поездки она привозила мастерски выполненные зарисовки.

Дальнейшие работы Кочиной в области истории математики были посвящены А.А. Фридману (1989). Она написала его объемную биографию (совместно с А.С. Мониным и В.И. Хлебниковым) [6], а также книгу о своем муже Н.Е. Кочине [2]. В ней приведены сведения из жизни и деятельности учителей и коллег Николая Евграфовича – Н.Н. Павловского, О.Ю. Шмидта, В.В. Голубева, Н.И. Смирнова, А.А. Фридмана, А.Н. Крылова, И.М. Виноградова, С.А. Чаплыгина, С.А. Соболева, С.А. Христиановича, И.А. Кибеля и многих других. Всех их Пелагея Яковлевна знала лично.

В 1999 году, в возрасте 100 лет П.Я. Кочина вместе с дочерью Ниной Николаевной опубликовала статью о некоторых свойствах дробно-линейных преобразований. В аннотации они отметили ряд свойств дробно-линейных аналитических функций, большая часть которых представлена также в области действительных переменных, указали на важность этих свойств для приложений к решению проблем подземной гидромеханики.

Широка общественная деятельность Пелагеи Яковлевны: член Ученого совета Института механики АН СССР (1950-1958); член Объединенного Ученого совета по физико-математическим и техническим наукам СО АН СССР (1958-1970); председатель Комиссии АН СССР по исследованию и охране водных ресурсов Сибири (1966-1969); член Ученого совета Института проблем механики АН СССР (1972-1999); член Национального комитета СССР по теоретической и прикладной механике и Советского национального комитета Международной Ассоциации по гидравлическим исследованиям; член редколлегии журналов "Прикладная математика и механика", а также "Известия Академии наук СССР. Серия: Механика жидкости и газа".

П.Я. Кочина избиралась депутатом Верховного Совета РСФСР, городских Советов Москвы, Ленинграда, Новосибирска; работала в Советском комитете Международной демократической федерации женщин.

П.Я. Кочина награждена тремя орденами Ленина (1953, 1960, 1967); Орденом Октябрьской революции (1975); Орденом Трудового Красного Знамени (1945); Орденом Дружбы народов (1979); Золотой медалью им. М.В. Келдыша (1996) Орденом "За заслуги перед Отечеством" III степени. Она удостоена звания Героя Социалистического Труда с вручением четвертого ордена Ленина и золотой медали "Серп и молот" (1969).

Как писала в своих воспоминаниях П.Я. Кочина (апрель 1997), существовала малая планета диаметром около 9 км. В Международной астрономической организации она числилась под № 6763 и была открыта астрономом Крымской обсерватории Л.Г. Карочкиной (1981). В 90-е гг. планету переименовали в "Kochiny". Пелагея Яковлевна пожалела о том, что нет в живых мужа, он бы посмеялся над таким интересным подарком, но был бы доволен.

При ответе на вопрос корреспондента одного из журналов, что она хотела бы пожелать молодежи, Пелагея Яковлевна ответила тремя строфами стихотворения Николая Заболоцкого:

Не позволяй душе лениться!
Чтоб воду в ступе не толочь,
Душа обязана трудиться
И день и ночь, и день и ночь!

Не разрешай ей спать в постели
При свете утренней звезды,
Держи лентяйку в черном теле
И не снимай с нее узды!
Она рабыня и царица,
Она работница и дочь,
Она обязана трудиться
И день и ночь, и день и ночь!

Пелагея Яковлевна Кочина со студентами-отличниками 1-го курса Новосибирского университета (1963)

Сразу после кончины Пелагеи Яковлевны, ее дочь Ираида Николаевна сказала: “Мама не только выполнила, но и перевыполнила свой жизненный план”. Действительно, все свои научные начинания академик Кочина довела до конца. Конечно трудно планировать дожить до ста лет, и последние полгода были нелегкими для Пелагеи Яковлевны. Но она знала, что этого дня – 13 мая 1999 года – ждут ее родственники и друзья, ученики и последователи. И она не подвела.

Библиографический список

1. *Кочина, П.Я.* Воспоминания [Текст] / П.Я. Кочина. – М.: Наука, 1977.

2. *Кочина, П.Я.* Николай Евграфович Кочин, 1901-1944 [Текст] / П.Я. Кочина. – М., 1979.
3. *Полубаринова-Кочина, П.Я.* Карл Вейерштрасс, 1815-1897 [Текст] / П.Я. Полубаринова-Кочина. – М.: Наука, 1985.
4. *Кочина, П.Я.* Геста Миттаг-Леффлер: 1846-1927 [Текст] / П.Я. Кочина. – М.: Наука, 1987.
5. *Кочина, П.Я.* Наука, люди, годы. Воспоминания и выступления [Текст] / П.Я. Кочина. – М.: Наука, 1988.
6. *Кочина, П.Я.*, *Монин, А.С.*, *Хлебников, В.И.* Космология, гидродинамика, турбулентность: А.А. Фридман и развитие его научного наследия [Текст] / П.Я. Кочина, А.С. Монин, В.И. Хлебников. – М.: Наука, 1989.
7. *Полубаринова-Кочина, П.Я.* Теория движения грунтовых вод [Текст] / П.Я. Полубаринова-Кочина. – М.: Гостехиздат, 1952.
8. *Полубаринова-Кочина, П.Я.* Софья Васильевна Ковалевская. Ее жизнь и деятельность [Текст] / П.Я. Полубаринова-Кочина. – М.: ГИТТЛ, 1955.
9. *Полубаринова-Кочина, П.Я.* Карл Теодор Вильгельм Вейерштрасс (к 150-летию со дня рождения) [Текст] / П.Я. Полубаринова-Кочина // УМН. – 1966. – 21:3 (129). – С. 213-224.
10. *Полубаринова-Кочина, П.Я.* Математические методы в вопросах орошения [Текст] / П.Я. Полубаринова-Кочина, В.Г. Пряжинская, В.Н. Эмих.– М.: Наука, 1969.

Семья больших русских ученых (к 100-летию академика Н.Н. Боголюбова)

И.К. Зубова

Летом этого года исполнится сто лет со дня рождения одного из крупнейших ученых XX столетия академика Николая Николаевича Боголюбова (1909-1992). Его с полным правом можно называть как великим физиком, так и великим математиком нашего времени, одним из основателей современной математической физики. “Исследования Боголюбова – пишет его ученик академик А.А. Логунов, – наложили индивидуальный отпечаток на весь облик теоретической физики второй половины двадцатого века”. Основными направлениями этих исследований были нелинейная механика, статистическая физика, теория элементарных частиц. Его творчество представляет собой наиболее яркий пример применения математических результатов к решению фундаментальных проблем физики.

Николай Николаевич родился 21 августа 1909 года в семье преподавателя богословия, философии и психологии Николая Михайловича Боголюбова (1872-1934). Отец, уроженец Нижегородской губернии, происходил из священников. Он получил образование в Московской духовной академии, затем изучал востоковедение в Берлинском университете. В 1900 г. получил ученую степень магистра богословия. В первом десятилетии XX века преподавал в Нижегородской духовной семинарии.

В 1908 году он женился на Ольге Николаевне Люминарской (1881-1955), дочери служащего, которая к этому времени окончила гимназию и Нижегородское отделение Московской консерватории и была учителем музыки в Нижегородском институте благородных девиц.

Николай Николаевич был их старшим сыном. В год его рождения отец получил сан священника и вскоре был назначен на должность профессора историко-филологического института князя Безбородко в г. Нежине (ныне Черниговской области). Здесь 25 марта 1911 года родился второй сын – Алексей, впоследствии математик, механик, историк науки, член-корреспондент Академии наук Украины (ум. 02.11.2004).

В 1913 году Николай Михайлович был избран ординарным профессором богословия Университета Святого Владимира в Киеве. Здесь 24 января 1918 года родился его третий сын Михаил, в будущем филолог, востоковед. Михаил Николаевич более 30 лет был деканом восточного факультета Санкт-Петербургского университета, в 1990 г. стал академиком АН СССР, в прошлом году отметил 90-летие.

Отец много внимания уделял образованию сыновей. Как вспоминал Алексей Николаевич, он сам научил детей читать, причем сделал это в их самом раннем возрасте, сам обучил их иностранным языкам, всегда поддерживал их интерес ко всему новому для них. Все они в детстве увлекались русской историей, с удовольствием изучали иностранные языки. Когда самый младший сын подружился с сыном муллы и начал вместе с ним изучать Коран, в семье это только приветствовали. Это занятие впоследствии оказало решающее влияние на выбор Михаилом Николаевичем будущей профессии.

Богатая библиотека отца была всегда открыта для сыновей и нередко становилась местом их игр. Алексей Николаевич, говоря ученикам о необходимости больше читать, любил рассказывать, как однажды они с Николаем Николаевичем решили поиграть "в писателей". В то время как старший брат "сочинял", прохаживаясь по отцовскому кабинету, младший взял тетрадь, какую-то книгу и начал что-то из этой книги переписывать. “Что ты делаешь?” – спросил старший. – “Пишу книгу”. – “Ты не пишешь, ты списываешь, – сказал Николай Николаевич, которому было лет десять. – Ты должен несколько книг взять. Почитать в одной, почитать в другой, подумать, а уже потом писать!” “Вот видите, – шутил Алексей Николаевич, – потому он теперь и академик, что уже тогда такие вещи понимал! А Вы старше, чем он был тогда, а все думаете, что можно ограничиться одной книгой!”

“Всю жизнь, начиная с детства, – уже серьезно говорил он о брате, – главным для него было одно: беспрерывный труд. Даже в поезде он работал над своими исследованиями: папка с заметками была всегда с ним, куда бы он ни ехал”.

Сам Николай Николаевич писал в автобиографии, что математикой заинтересовался всерьез лет с тринадцати. Годы его детства и отрочества совпали с трудным временем гражданской войны и последующей разрухи. Семьи священников в это время находились в особенно сложных обстоятельствах, испытывая как материальные, так и моральные трудности. Но, хотя образование позволяло отцу отказаться от сана и найти другую работу, он и мысли об этом не допускал. В связи с ликвидацией кафедры богословия в Университете Святого Владимира Николаю Михайловичу пришлось оставить должность профессора и переехать в село Великая Круча Пирятинского уезда на Полтавщине. Здесь, в церкви Святого Иоанна Богослова он служил с 1919 по 1923 гг., затем ненадолго вернулся в Киев. В 1923 г. он получил звание митрофорного протоирея, а в 1925 г. уехал на родину в Нижний Новгород, где до самой смерти в 1934 г. был настоятелем Спасской церкви. Нижегородцы чтят его память. В 1998 году на здании церкви была открыта мемориальная доска с таким текстом: “В память долголетнего служения (1925-1934 гг.) в Храме Всемилостивейшего Спаса протоирея Николая Боголюбова (1872-1934 гг.), воспитавшего для Российской земли трех сыновей-академиков”.

Николаю Николаевичу к четырнадцати годам удалось окончить семилетку. Заметив интерес и способности сына к физике и математике, отец стал приносить ему книги из университетской библиотеки, и мальчик практически самостоятельно изучил основы высшей математики. Как вспоминал Николай Николаевич, только в 1923 году он познакомился с профессором Н.М. Крыловым и начал посещать занятия семинара, которым тот руководил.

Николай Митрофанович Крылов (1879-1955) родился в Петербурге в семье чиновника. В 1902 году он окончил Горный институт и был оставлен при кафедре высшей математики. С 1912 года – профессор этого института. В 1917-1922 гг. Н.М. Крылов работал в Таврическом (Крымском) университете. Этот университет был основан в 1917 году как филиал Киевского университета Святого Владимира, проектировался как университет-здравница и должен был размещаться в Ливадии и Ореанде. Н.М. Крылов, лечившийся в Крыму от туберкулеза, принимал активнейшее участие в его создании. Но оккупация Крыма немцами заставила в сентябре 1918 года перевести университет в Симферополь. Здравницей он не стал, но в последующие трудные годы сыграл огромную роль в развитии советской науки. Профессора, трудившиеся в сложнейших условиях голода и разрухи, получавшие минимальную зарплату, продолжали чтение лекций, регулярно проводили научные семинары, оказывали постоянную поддержку студентам и друг другу, старались не терять связи с учеными Киева, Москвы, Петербурга. Деятельность Н.М. Крылова, руководителя кафедры математики, с особой благодарностью отмечали ученые, которые были связаны с Крымским университетом в эти годы. В 1922 году Н.М. Крылов был избран академиком Украинской Академии наук и в связи с этим переехал в Киев. Здесь он возглавил кафедру математической физики АН УССР, которой руководил до 1941 г. В 1929 г. он был избран академиком АН СССР.

Основные научные исследования Н.М. Крылова относятся к теории интерполяции, вариационному исчислению, нелинейной механике. Им были разработаны новые методы приближенного интегрирования дифференциальных уравнений математической физики, выведен ряд формул для оценки ошибок приближенного интегрирования этих уравнений, получены методы доказательства существования их решений.

В 1924 году Н.Н. Боголюбов под руководством Н.М. Крылова написал свою первую научную работу, посвященную поведению решений линейных дифференциальных уравнений на бесконечности. Через год, когда ему было 17 лет, он был принят в аспирантуру при научно-исследовательской кафедре математики “ввиду феноменальных способностей”, как было отмечено в решении президиума Укрглавнауки. “Николай Николаевич поступил в аспирантуру, не имея ни высшего, ни даже полного среднего образования!” – шутя, говорил Алексей Николаевич. Он всегда с большой нежностью и уважением рассказывал о братьях и обо всей своей семье, пережившей много тяжелейших испытаний и сохранившей при этом самые лучшие отношения и самые прочные связи, поддерживавшиеся и тогда, когда члены семьи жили в разных городах.

В 1928 году Н.Н. Боголюбов защитил диссертацию, посвященную прямым методам вариационного исчисления. Тогда же он был принят на работу в Академию наук Украины. Основными направлениями его научной деятельности стали вариационное исчисление, дифференциальные уравнения, уравнения математической физики, теория устойчивости, теория динамических систем, приближенные методы математического анализа. Н.М. Крылов и Н.Н. Боголюбов создали в 30-е годы новую научную дисциплину – нелинейную механику, разработав теорию нелинейных колебаний и применив ее при решении прикладных задач. Эти результаты были изложены учеными в совместно написанной монографии "Введение в нелинейную механику" (1937 г.), которая сыграла выдающуюся роль в развитии математической теории колебаний.

С 1934 года Николай Николаевич Боголюбов работал в Киевском университете. В 1936 году (двадцати семи лет) стал профессором. В 1939 г. был избран в члены-корреспонденты АН УССР. В годы Великой Отечественной войны работал в эвакуации сначала в Уфе, затем в Москве. В 1944 г. вернулся в освобожденный Киев. В 1950 г. переехал в Москву, где работал в математическом институте АН СССР и Московском университете, а с 1958 года – также и в Объединенном институте ядерных исследований в Дубне. Со дня основания этого крупнейшего научного центра Николай Николаевич возглавлял Лабораторию теоретической физики. Директором этого института он стал в 1965 г. и руководил им почти четверть века, до 1998 г. В 1963 г. он был избран акдемиком-секретарем Отделения математики АН СССР.

Много времени и внимания Н.Н. Боголюбов уделял общественной деятельности. Дважды он избирался депутатом Верховного Совета СССР.

За выдающиеся заслуги ученый был дважды удостоен звания Героя Социалистического Труда (1969 и 1979 гг.), имел также звание Заслуженного деятеля науки УССР. В 1957 и 1985 гг. он получил высшую награду Академии наук СССР – золотую медаль им. М.В. Ломоносова. Шесть раз награждался орденами Ленина. В 1958 г. его труд был отмечен Ленинской премией, в 1947, 1953 и 1984 гг. – Государственными премиями СССР.

В 1928 году отец Николая Николаевича, живший тогда в Нижнем Новгороде, был репрессирован и оказался в тюрьме, где провел три года. Все это время, как рассказывал Алексей Николаевич, семья жила благодаря урокам музыки, которые давала мать. Жизнь Ольги Николаевны в эти годы сын называет подвигом. Непрерывно работая с учениками, воспитывая двух сыновей-подростков (Николай Николаевич в это время жил уже отдельно от семьи в Киеве), она еще ежедневно три раза в день носила мужу домашнюю пищу, чем просто спасала ему жизнь, поскольку он был серьезно болен, и тюремное питание его бы убило. В 1932 г. Николай Михайлович был освобожден благодаря хлопотам старшего сына, после чего прожил еще около двух лет. После его смерти Ольга Николаевна переехала в Киев к Николаю Николаевичу, и до своей кончины в 1955 году была, как писал средний сын, “главой и руководителем всей семьи Боголюбовых”.

Сыновьям священника в конце 20-х годов было чрезвычайно трудно получить образование: их не принимали в высшие учебные заведения. Алексей Николаевич Боголюбов только в 1931 году после нескольких неудачных попыток поступления в различные институты был принят в Харьковский университет. Оттуда его дважды пытались исключить из-за “происхождения”. Когда исключили с последнего, пятого курса, Н.М. Крылов помог ему восстановиться и закончить образование. В 1936 году Алексей Николаевич окончил университет по специальности “механика”, сдал вступительные экзамены в аспирантуру, но принят не был, опять-таки из-за происхождения. В это время он уже работал на должности инженера треста “Укртракторремонт”. Удалось поступить на третий курс механического факультета Харьковского машиностроительного института, сдать кандидатские экзамены и даже написать диссертацию на тему “Синтез механизмов”. Но защитить ее не удалось, как писал сам Алексей Николаевич, “за недостатком времени”. В 1937 году ему была поручена организация школы для детей, эвакуированных из Испании и привезенных в это время в Харьков. В эту работу, конечно, пришлось, что называется, “уйти с головой”. Алексей Николаевич был директором школы и учителем физики и математики до момента эвакуации детского дома из Харькова после начала Великой Отечественной войны.

Младший брат, Михаил Николаевич, поступал в Ленинградский университет в 1936 году, когда требования к происхождению студентов были, вероятно, уже не столь строги. Как рассказывал Алексей Николаевич, члены экзаменационной комиссии, выслушав ответ абитуриента, начали совещаться на одном из восточных языков, который юноша, по их мнению, знать не мог. Говорили они о том, что просто обязаны принять человека с такими блестящими знаниями. “Но из-за его происхождения придется принимать без стипендии” – заметил один из членов комиссии. “А тогда ему совсем не на что будет жить, и он не сможет учиться” – сказал сам о себе абитуриент в третьем лице, на том же языке, совершенно грамотно и с идеальным произношением, после чего был безоговорочно принят и получил стипендию. Алексей Николаевич отмечал, что Николай Николаевич, сам очень любивший филологию, знавший несколько языков, всячески поддерживал интерес младшего брата к восточным языкам, регулярно посылал ему книги, помогал доставать учебники и словари.

Михаил Николаевич окончил университет в 1941 году, накануне Великой Отечественной войны. Получать диплом ему пришлось уже после победы. Автору этих строк, учившемуся в семидесятые годы прошлого века на математико-механическом факультете Ленинградского университета, запомнилось, как в университетской газете рассказывалось о праздновании на филологическом факультете сорокалетия выпуска сорок первого года. Декан восточного факультета М.Н. Боголюбов, тогда еще член-корреспондент АН СССР, как-то особенно трогательно вспоминал, как приехал в послевоенный, едва начавший приходить в себя после блокады город, отправился в университет, не представляя, что его ждет там, и буквально на пороге встретил секретаря деканата, которая обо всех студентах всегда все знала и помнила. Она сразу сказала: "Миша, твой диплом лежит у меня в шкафу!" И стало понятно, что все в порядке, война позади, люди вернулись к своим делам, жизнь продолжается.

Последствия войны оказались наиболее тяжелыми для среднего брата. Оставшись на оккупированной территории без работы, Алексей Николаевич вынужден был уйти из города на поиски хоть какого-то заработка, и, в конце концов, устроился работать переводчиком в Староверовском районном совете. Через год немцы, отступая, забрали с собой большинство местных молодых мужчин, в том числе Алексея Николаевича. В Молдавии он бежал, перешел линию фронта, но тут же был арестован и осужден на 15 лет каторжных работ. Из них он отбыл в лагерях под Норильском 10 лет. "Вы теперь прочитали о том, каково было «в круге первом», а я прошел все семь!" – сказал он однажды на заре перестройки, когда только начинали сниматься запреты с произведений А.И. Солженицына. В декабре 1953 г. А.Н. Боголюбов был освобожден по амнистии. Некоторое время он был лишен права проживания в Киеве, где жили его мать и жена, поэтому работал около двух лет главным механиком Черкасского областного строительного треста. С 1955 по 1962 гг. был сотрудником министерства высшего и среднего специального образования Украины, а в 1963 г., защитив кандидатскую диссертацию под руководством академика И.И. Артоболевского, начал работать в Академии наук Украины. С этого времени началась его активная научная деятельность, связанная с вопросами истории прикладной механики и математики. Одновременно с 1956 года он преподавал теорию машин и механизмов в Киевском инженерно-строительном институте. В 1964 году Алексей Николаевич защитил докторскую диссертацию на тему “История механики машин”, а в 1969 году был избран членом-корреспондентом Академии наук УССР. Несомненно, выдержать десять лет каторжных работ, вернувшись, начать в сорок лет новую жизнь, добиться в относительно короткий срок больших успехов в научной работе, воспитать около тридцати учеников – кандидатов наук, написать около четырехсот научных трудов Алексею Николаевичу помогла семья. Мать всегда верила в своих сыновей и гордилась их успехами. Жена, Тамара Васильевна, ждала его десять лет, а с 1951 года, когда семья Николая Николаевича переехала в Москву, стала жить вместе с оставшейся в Киеве Ольгой Николаевной. И, конечно, всегда и во всем можно было положиться на братьев. Их взаимная моральная поддержка была постоянной на протяжении всей жизни.

Николай Николаевич после смерти матери стал главой семьи, которая продолжала расти. В этой семье любили и понимали молодежь, поэтому отношения старших и младших были очень дружескими. Такие же теплые отношения связывали братьев Боголюбовых с младшими коллегами. “Он всегда хорошо чувствовал себя среди своих учеников. Для каждого у него находилась проблема, которую он щедро отдавал для исследования” – писал Алексей Николаевич о брате.

Умер Н.Н. Боголюбов 13 декабря 1992 г.

Сегодня его ученики и другие ученые следующих поколений, вспоминая его, говорят не только о масштабе его научных достижений, но и о человеческих качествах ученого. Академик А.А. Логунов отмечает щедрость, с которой Николай Николаевич дарил молодым ученым свои идеи. Он ставит своего учителя в один ряд с такими учеными, как И.П. Павлов и В.И. Вернадский. Член-корреспондент РАН Ю. Оганесян называет Н.Н. Боголюбова ученым, воплощавшим лучшие черты русской математической школы – глубокое, всестороннее образование, широту интересов, высочайшую нравственность в отношении к науке, учителям, коллегам, ученикам. Академик Л.Д. Фаддеев говорит, что, думая о научном наследии Боголюбова, трудно представить себе, что все это успел сделать один человек. Нынешний директор Объединенного института ядерных исследований в Дубне академик В. Кадышевский считает, что и теперь Николай Николаевич остается высшим авторитетом и в науке, и в обыденной жизни для всех, кто его знал.

В память академика Боголюбова назван главный проспект города ученых Дубны. Его именем названа Лаборатория теоретической физики Объединенного института ядерных исследований. В этой лаборатории и перед зданием дирекции института установлены бюсты ученого. Бюст установлен и на его родине, в Нижнем Новгороде.

Библиографический список

1. *Боголюбов, А.Н.* Боголюбовы [Текст] / А.Н. Боголюбов // Очерки из истории математики и математического естествознания. – Киев: Институт математики АН Украины, 2001. – С. 86-101.
2. *Боголюбов, А.Н.* Математики. Механики. Биографический справочник [Текст] / А.Н. Боголюбов. – Киев: Наукова думка, 1983. – 638 с.
3. *Боголюбов, А.Н.* Таврический университет [Текст] / А.Н. Боголюбов, В.М. Урбанский, Е.П. Ожигова // Владимир Иванович Смирнов. – М: Наука, 2006. – С. 19-32.
4. *Боголюбов, А.Н.* Николай Митрофанович Крылов [Текст] / А.Н. Боголюбов, В.М. Урбанский. – Киев: Наукова думка, 1987. – 174 с.
5. *Рахимова, И.К.* Развитие идей теории колебаний в XIX веке [Текст]: дисс. ...канд. физ.-мат. наук. – Ташкент, 1988.
6. История отечественной математики [Текст]. – Киев: Наукова думка, 1970. – Т. 4. – Кн. 2. – 667 с.

История одной идеи Лузина: Вера Богомолова и ее теорема

Г.И. Синкевич

История эта запутана, и на многие вопросы нет ответов до сих пор. В 1995 г. профессор Е. Медушевский из университета в польском городе Катовице опубликовал статью “Лемма Урысона или теорема Лузина-Меньшова?” [1], в которой обратил внимание на сходство названных теорем с теоремой Веры Богомоловой, ученицы Лузина.

Какими путями двигалась эта идея?

В 1915 г. французский математик А. Данжуа [2] поставил задачу: найти вполне определенную производную функцию, которая была бы равна нулю вне данного совершенного приведенного множества P и принимала бы значения разных знаков в области всякой точки множества P. Он дал прием построения функций, удовлетворяющих этой задаче для случая, когда длины интервалов постоянства образуют сильно сходящийся ряд, но его прием не годился при слабой сходимости ряда длин интервалов постоянства.

В 1916 г. польский математик С. Мазуркевич поставил задачу найти вполне определенную всюду дифференцируемую функцию F(x) с данным всюду плотным множеством интервалов постоянства. Сведения об этой задаче Н.Н. Лузину сообщил польский математик В.Серпинский, живший в Москве с 1914 по 1918 годы. О существовании функций, требуемых задачами Данжуа и Мазуркевича, в общем случае ничего не было известно.

В последующие годы Н.Н. Лузин вместе с Д.Е. Меньшовым сформулировали и доказали следующие четыре теоремы.

Теорема 1. *Существует закон, которым в любом совершенном множестве P положительной меры указывается одна и только одна вполне определенная его точка плотности.*

Теорема 2. *Существует закон, которым в любом совершенном множестве P меры $\mu>0$ указывается одно и только одно вполне определенное совершенное множество, содержащееся в плотной части множества P и мера которого $\geq \mu-\nu$, где ν есть положительное сколь угодно малое число.*

Теорема 3. *Существует закон, которым в каждом совершенном множестве P, положительной меры μ указывается одно и только одно вполне определенное совершенное множество P_1 наперед заданной меры μ_1, причем $0<\mu_1<\mu$, входящее в плотную часть множества P и содержащее в своей плотной части данную точку плотности A множества P.*

Теорема 4. *Пусть даны два совершенных множества: P_1 меры μ_1 и P_2 меры μ_2, и пусть все точки множества P_2 суть точки плотности множества P_1, кроме того, предположим, что $\mu_2<\mu_1$.*

Существует закон, которым для данных множеств P_1, P_2 и для любого данного числа μ, удовлетворяющего неравенству $\mu_2<\mu<\mu_1$, указывается одно и только одно вполне определенное совершенное множество Р меры равной μ, входящее в плотную часть множества P_1 и содержащее в своей плотной части множество P_2 (цит. по статье В.С. Богомоловой [3]).

Среди учеников Лузина была Вера Богомолова, сведений о которой очень мало. Л.А. Люстерник упоминает о ней в рассказе о втором поколении лузитанцев [4]. Первые публикации и выступления в Математическом обществе второго поколения лузитанцев относятся к 1923-1924 годам. Весной 1921 г. Московский университет и Московское математическое общество получили приглашение из Петрограда от Академии наук принять участие в научной сессии, посвященной 100-летию П.Л. Чебышова. В числе поехавших с Лузиным (20-25 человек) упоминается Павел

Урысон и Вера Богомолова с мужем. Впоследствии она с мужем уехала в Иваново, и далее следы ее теряются.

В мае 1923 г. Богомолова сдает в печать свою единственную статью "Об одном классе функций всюду асимптотически непрерывных", опубликованную в Математическом сборнике в 1924 г. В ней, как она пишет, по плану, предложенному профессором Лузиным, она обобщает задачи Данжуа и Мазуркевича, поставив проблему следующим образом:

Найти вполне определенную функцию f(x) всюду асимптотически непрерывную, которая была бы равна нулю вне данного совершенного нигде не плотного множества P, не будучи в то же самое время тождественной нулю всюду.

Она передоказывает теоремы 1-4, и далее строит требуемую функцию на подмножестве прямой, чем решает и задачи Данжуа и Мазуркевича. В ее статье дается общий метод построения всюду дифференцируемых функций, у которых интервалы постоянства образуют плотное множество.

В августе 1924 г. в Бретани П.С. Урысон заканчивает статью "О мощности связных множеств". Она была написана в последний месяц его жизни и закончена за три дня до смерти, 14 августа[1]. Основной темой работы является мощность связных множеств, содержащихся в регулярных, нерегулярных, хаусдорфовых, нормальных, вполне нормальных и счетных пространствах. Работа содержит три приложения, носящих дополнительный характер, и в третьем из них как раз и содержится та формулировка, которую впоследствии стали называть леммой Урысона, о существовании в нормальном пространстве непрерывной функции, принимающей на двух данных непересекающихся замкнутых множествах A и B заданные постоянные значения 0 и 1.

Эта лемма представляет собой развитие идей Лузина, Меньшова и Богомоловой, но уже в области топологии, и является основой для теоремы метризации: "всякое нормальное пространство со счетной базой гомеоморфно метрическому пространству", сформулированной Урысоном там же.

И вновь идея Лузина возвращается в теорию множеств и функций.

В 1941 г. львовский математик Зыгмунд Загорский в статье [7], развивая идею Лузина, построил монотонно возрастающую функцию, имеющую производную всюду, за исключением точек заранее заданного множества типа G-дельта, в которых производная бесконечна.

[1] Эта статья была опубликована в 1925 г. [6], в 1951 г. переиздана на русском [5].

Этот метод Загорского “разглаживания” функции конечного колебания с помощью перепараметризации ее области был развит в шестидесятых годах в работах A.M. Bruckner, J. Leonard, C. Goffman, Каплана и Слободника.

В 1977 г. выходит статья “Монотонные преобразования и дифференциальные свойства функций”, авт. Л.И. Каплан и С.Г. Слободник [8], в которой приводится формулировка леммы Лузина-Меньшова (со ссылкой на работу Зыгмунда Загорского “О множестве точек недифференцируемости непрерывной функции” [9]), заметим, нигде у Лузина явно не встречающаяся:

Пусть замкнутое множество F содержится в G на прямой, G измеримо, и плотность множества G в каждой точке x из F равна 1. Тогда существует замкнутое множество E такое, что F содержится в E из G, и такое, что в каждой точке x из F плотность множества E равна 1, а в каждой точке x из E плотность множества G равна 1.

Теорема Богомоловой приводится в этой статье в такой формулировке: Если K_1 содержащееся в K_2 – замкнутые подмножества отрезка [a,b], и в каждой точке x из K_1 плотность множества K_2 равна 1, то существует асимптотически непрерывная функция Ω на [a,b] такая, что Ω(x)=0 для x из K_1, Ω(x)=1 для x не принадлежащих K_2 и Ω(x) принимает значения от 0 до 1 включительно для остальных точек x из [a,b].

На основании теоремы Богомоловой делается построение непостоянной непрерывно дифференцируемой функции двух переменных, каждое значение которой критическое, приводятся примеры, связанные с дифференциальными свойствами функций, описывается класс всех действительных функций одного переменного, которые становятся всюду дифференцируемыми после некоторого гомеоморфного преобразования координатных осей.

Таким образом, в теории функций, благодаря идее Лузина-Меньшова-Богомоловой, распознается структура особенностей функций, и они сводятся к более простым особенностям. В топологии эта идея через лемму Урысона послужила базой для развития понятий метризации, нормальности, плотностной топологии.

В научной жизни часто бывает, что учитель щедро дарит свои идеи ученикам, идеи эти плодотворно развиваются и ложатся в основу новых разделов науки, порождают другие научные области, и трудно установить, чья же роль в создании, обосновании, приложении была важнее.

Библиографический список

1. *Mioduszewski, J.* Lemat Urysona czy twierdzenie Luina-Mienszowa? [Текст] / J. Mioduszewski // – Zeszyty Naukowe Politechniki Slaskiej. – Seria Matematyka-Fizyka. – 1995 – Z. 76. – S. 141-150.

2. *Denjoy, A.* Sur les fonktions derives sommables [Текст] / A. Denjoy // Bulletin de la Société Mathématique de France. – 1915. – T. 43. – P. 237.
3. *Люстерник, Л.А.* Выступление на юбилейном заседании Московского математического общества [Текст] / Л.А. Люстерник // УМН. – 1965. – Май-июнь. – Т. XX. – Вып. 3(123). – С. 21-31.
4. *Богомолова, В.С.* Об одном классе функций всюду асимптотически непрерывных [Текст] / В.С. Богомолова // Математический сборник. – Москва. – 1924. – Т. 32. – Вып. 1. – С. 152-171.
5. *Урысон, П.С.* О мощности связных множеств [Текст] / П.С. Урысон // Труды по топологии и другим областям математики. – М.-Л., 1951. – С. 177-218.
6. *Uryson, P.* Uber die Mächtigkeit der Zusammenhängenden Mengen [Текст] / P. Uryson // Math.Annalen. – 1925. – № 94. – S. 262-295.
7. *Zahorski, Z.* Uber die Menge der Punkte in welchen die Ableitung unendlich ist [Текст] / Z. Zahorski // Tôhoku Mathematical Journal. – 1941. – № 48. – S. 32-330.
8. *Каплан, Л.И.* Монотонные преобразования и дифференциальные свойства функции [Текст] / Л.И. Каплан, С.Г. Слободник // Математические заметки. – 1977. – Т. 22. – № 6. – С. 859-871.
9. *Загорский, З.С.* О множестве точек недифференцируемости непрерывной функции [Текст] / З.С. Загорский // Математический сборник. – 1941. – № 9. – С. 487-508.

Конструктивная теория разбиений в работах Дж. Сильвестра

Н.Н. Медведева

Исторически главной задачей аддитивной теории разбиений являлся подсчет способов представления натурального числа неупорядоченной суммой натуральных же слагаемых – частей этого разбиения.

Становление и развитие названного раздела математики пришлось преимущественно на вторую половину XIX столетия и шло за счет разработки методов и способов подсчета разбиений. До того, как были сформированы специальные методы, использовали уже хорошо разработанный математический аппарат производящих функций, комбинаторных соединений определенного вида. В дальнейшем для нужд теории разбиений стали формироваться специальные методы: так называемый "круговой", графический.

Огромный вклад в развитие названной области внесли английские математики А. Кэли и Дж.Дж. Сильвестр, которые занимались ею на протяжении всей жизни. Особенно много сделал Дж. Сильвестр, который фактически сформировал графический метод доказательства различных теорем на разбиения.

Уже в статье 1853 г. "On Mr Cayley's impromptu demonstration of the rule for determining at sight the degree of any symmetrical functions of the roots of an equation expressed in terms of the coefficients" [1] Дж. Сильвестр отметил, что разбиения чисел тесно связаны с симметрическими функциями корней алгебраического уравнения. Автор показал новый вид разбиений – *сопряженные*. Так, числу 9 соответствует разбиение $\left(3^2 21\right)$, под которым следует понимать запись $9 = 3 + 3 + 2 + 1$. Его ученый представил схемой:

$$\begin{array}{lll} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \\ 1 & & \end{array}$$

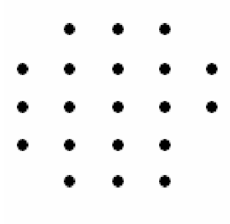
Если же повернуть ее на 90^o, то получим

$$\begin{array}{llll} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \\ 1 & 1 & & \end{array}$$

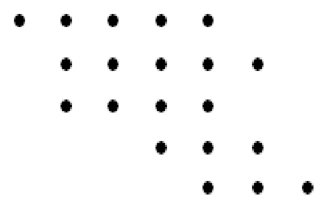
Последняя схема соответствует (432) (так как $9 = 4 + 3 + 2$), названным сопряженным разбиению $\left(3^2 21\right)$. Сильвестр писал, что этот новый вид ему стал известен от Ферре, а тот, в свою очередь, познакомился с ним, разбирая кембриджские бумаги Дж. Адамса. Позднее обе схемы стали называться *графами Ферре*, и приобрели вид

$$\begin{array}{lll} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \\ \bullet & & \end{array}$$

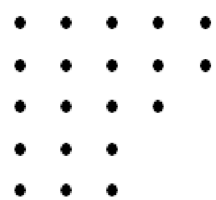
В дальнейших опубликованных работах, посвященных разбиениям, ученые развивали аналитический метод подсчета, а в 80-х гг. XIX столетия Сильвестр вновь обратился к графическому представлению. Объясняется это, по-видимому, тем, что к этому времени разбиения стали интересовать исследователей не только как прикладной аппарат, но, прежде всего, как объект самостоятельного изучения. Произошло становление теории разбиений, нуждавшейся в собственных методах, одним из которых и стал графический. Он не позволял найти количество разбиений какого-либо числа, но был эффективным средством доказательства теорем, устанавливающих соотношения между разного рода разбиениями. В современной математике этот метод по-прежнему широко используется. Его изложению Сильвестр посвятил обширную статью (занимающую 83 страницы в полном собрании сочинений) “A constructive theory of partitions, arranged in three acts, an interact and an exodion” [2], вышедшую в 1882, 1884 гг. В ней автор раскрыл сущность графического представления разбиений. Он указал, что разбиению $\left(3\ 5^2\ 4\ 3\right)$ числа 20 соответствует граф



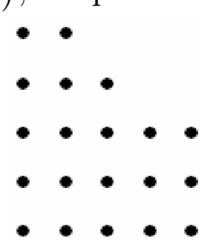
Далее Сильвестр заметил, что такое представление не является упорядоченным по возрастанию частей, что не всегда является удобным. Поэтому $\left(3\ 5^2\ 4\ 3\right)$ лучше переписать в виде $\left(5^2\ 4\ 3^2\right)$, что будет соответствовать графу



Однако последнее изображение более наглядно представляет разбиение $\left(5^2\ 4\ 3^2\right)$, если его расположить следующим образом



Подобные упорядоченные разбиения и соответствующие им графы Сильвестр назвал *регулярными.* Наряду с ними ученый вновь напомнил о сопряженных, в которых частями являются числа, изображающие количество точек в столбцах. Так, если повернуть последний граф на 90°, то получим разбиение $\left(2\ 3\ 5^3\right)$, сопряженное $\left(5^2\ 4\ 3^2\right)$:



Такого вида разбиения играют важную роль при доказательстве разнообразных теорем. Чтобы показать применение графического метода, рассмотрим пентагональную теорему, сформулированную Л. Эйлером в 1740 г.:

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-n^{k}\right)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(-1)^{k}\,n^{\frac{k(3k\pm 1)}{2}}.$$

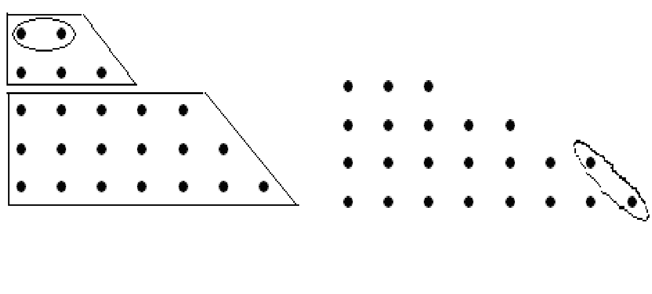
Ее особенностью является то, что показатель степени $\frac{k(3k\pm1)}{2}$ при n в правой части последнего равенства представляет сумму членов арифметической прогрессии, так называемых пятиугольных чисел. Доказательство этой теоремы с помощью производящих функций Эйлер получил лишь спустя 11 лет, причем оно было очень сложным и громоздким. В процессе его поиска он подметил закономерность, которой А.М. Лежандр впоследствии придал комбинаторную интерпретацию:

$$p_e\left(D,\ n\right)-p_o\left(D,\ n\right)=\begin{cases}(-1)^k, & \text{если } n=\frac{3k^2\pm k}{2},\\ 0, & \text{если } n\neq\frac{3k^2\pm k}{2},\end{cases}$$

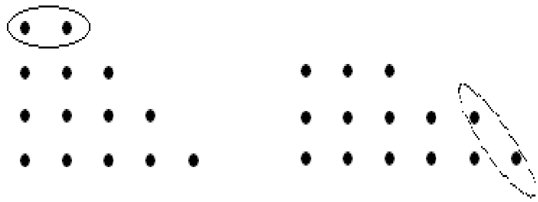
где $p_e\left(D,\ n\right)$ (соответственно $p_o\left(D,\ n\right)$) – количество разбиений n на четное (нечетное) число различных слагаемых.

Если же использовать графический метод, о чем писал Сильвестр, то доказательство получается простым и изящным.

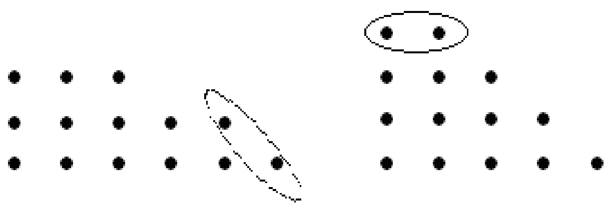
Для начала покажем, как данный граф с четным числом строк преобразовать в граф, состоящий из такого же числа точек, но содержащий нечетное количество строк, и обратно. Так как в теореме рассматриваются разбиения только на различные части, то каждый граф состоит из нескольких трапеций, поставленных одна на другую. Обозначим число точек в верхней строке графа через m, а число строк нижней трапеции через k (на рисунке изображен случай, когда $m=2,\ k=3$).



Предположим, что граф содержит не менее двух трапеций, причем $m\leq k$. В этом случае отбросим первую строчку и удлиним последние m строк нижней трапеции на одну точку. При таком преобразовании количество точек не изменится, все строки окажутся разной длины, но четность числа строк изменится. Аналогичное преобразование можно сделать, если граф состоит из одной трапеции, причем $m \leq k-1$:

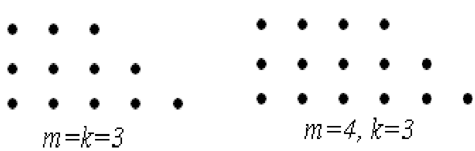


Пусть теперь граф содержит не менее двух трапеций, причем $m > k$. Тогда от каждой строки последней трапеции возьмем по одной точке и составим из них первую строку нового графа. Это можно сделать, так как $m > k$ и поэтому составленная строка короче первой строки исходного графа. Кроме того, в получившемся графе все строки будут разной длины, общее количество точек останется прежним, но четность числа строк изменится. Точно такое же преобразование допускают графы, состоящие из одной трапеции, в которых $k \geq m-2$:



Сравнивая два последних рисунка, видим, что описанные преобразования взаимно обратны.

Таким образом, графы разбиений числа n, допускающие одно из этих преобразований, распадаются на одинаковое число графов с четным и нечетным числом строк. Теперь возникает вопрос, какие графы не допускают описанного преобразования. Очевидно, они состоят из одной трапеции. Причем для них либо $m = k$, либо $m = k+1$. В первом случае граф содержит $\frac{3k^2-k}{2}$ точек, а во втором $\frac{3k^2+k}{2}$:



Таким образом, если $n \neq \frac{3k^2 \pm k}{2}$, то оно имеет поровну разбиений на четное и нечетное число различных слагаемых. Если $n = \frac{3k^2 \pm k}{2}$ и k –

четное число, то остается один граф, не допускающий преобразования и имеющий четное число строк. Поэтому разбиений на четное число слагаемых окажется на одно больше, чем на нечетное число. Если же $n = \frac{3k^2 \pm k}{2}$ и k – нечетное число, то на одно больше будет разбиений на нечетное число слагаемых. Тем самым теорема доказана.

Графический метод, подробно разработанный Дж.Дж. Сильвестром, и по сей день остается широко используемым в современной теории разбиений.

Библиографический список

1. *Sylvester, J.J.* On Mr. Cayley's impromptu demonstration of the rule for determining at sight the degree of any symmetrical functions of the roots of an equation expressed in terms of the coefficients / J.J. Sylvester // The collection mathematical Papers. – Cambridge: at the University press, 1908. – V. I. – P. 595-598.
2. *Sylvester, J.J.* A constructive theory of partitions, arranged in three acts, an interact and an exodion / J.J. Sylvester // The collection mathematical Papers. – Cambridge: at the University press, 1912. – V. IV. – P. 1-83.

Алгебраическое решение задачи о делении в среднем и крайнем отношении в средневековой математике

А.И. Щетников

Введение

Рассматриваемый в этой заметке материал лежит на пересечении нескольких тематических областей, представляющих заметный интерес для истории математики. Во-первых, он интересен своей предметной составляющей: речь ниже пойдет о нескольких задачах, связанных с делением величины на части в отношении золотого сечения. Во-вторых, на нем хорошо видны некоторые детали, касающиеся постепенного перехода от геометрической алгебры древних к алгебре отвлеченных числовых величин. В-третьих, рассмотрение того, как один и тот же материал освещался разными авторами, жившими в разное время в разных странах, может оказаться интересным при обсуждении вопроса о формах передачи математической традиции в Средние века.

“Число 10 разделено на две части”

Составление систем из двух уравнений с двумя неизвестными, где одно из уравнений формулируется в виде “число 10 разделено на две части”, входит в давнюю традицию средневековой ближневосточной и европейской математики.

У одного из первых авторов этой традиции Мухаммада ибн Мусы ал-Хорезми (787–850), работавшего в Багдаде, двенадцать задач в *Книге об исчислении алгебры и алмукабалы* [5] содержат в своем условии именно это условие. У египетского математика Абу Камила ал-Мисри (850-930) в *Книге об алгебре и алмукабале* [8, 14] имеется сорок одна задача с таким условием, причем к задачам, пришедшим от ал-Хорезми, Абу Камил добавляет ряд своих задач.

Сочинения ученых Востока, начиная с середины XII века, интенсивно переводились с арабского языка на латынь многочисленными переводчиками, работавшими в Испании. *Алгебра* ал-Хорезми переводилась на латынь в это время дважды. *Алгебра* Абу Камила также была переведена на латынь [14]; известен также ее перевод на иврит [8], а ее оригинальный арабский текст до наших дней не дошел.

Западноевропейские сочинения по алгебре вплоть до конца XV века продолжали линию, заданную математиками Востока. Формулировки многих задач в этих трактатах непосредственно восходят к арабским первоисточникам. Условие “число 10 разделено на две части” неоднократно встречается у Леонардо Пизанского (1180-1240) в *Книге абака* [12], что не удивительно, поскольку он заимствовал большую часть своих задач у ал-Хорезми и Абу Камила. В трактате Иордана Неморария (начало XIII в.) *О данных числах* [3] это условие также содержится во многих примерах. Это же самое условие встречается и у Луки Пачоли (1445-1517) в его *Сумме арифметики, геометрии, отношений и пропорций* (1494), равно как и в трактате *О божественной пропорции* (1498) [4].

Деление числа в крайнем и среднем отношении у ал-Хорезми

Мухаммад ибн Муса ал-Хорезми в *Книге об исчислении алгебры и алмукабалы* среди прочих задач рассматривает следующую: “Если скажут: ты разделил десять на две части, затем умножил одну из них на десять, а другую часть умножил на себя, и они оказались равными, то правило этого: умножь вещь на десять, получится десять вещей, затем умножь десять без вещи на равное этому, получится сто и квадрат без двадцати вещей, равные десяти вещам. Сопоставь это с тем, что я описал тебе” [5, 39].

Постановка этой задачи полностью совпадает с той, которую дает Евклид в 11 предложении II книги *Начал*: “Данную прямую рассечь так, чтобы прямоугольник, заключенный между целой и одним из отрезков, был равен квадрату на оставшемся отрезке” [1, гл. 1, с. 75]. Принципиальная же разница состоит в том, что Евклид ставит геометрическую задачу и решает ее геометрическими средствами, в то время как ал-Хорезми при постановке и решении задачи действует сугубо алгебраически.

Ал-Хорезми исходит из уравнения $(10–x)^2=10x$; при этом в качестве неизвестного он берет меньшую часть от 10. После раскрытия скобок это уравнение приводится к виду $100–20x + x^2=10x$. Проведение дальнейших выкладок ал-Хорезми оставляет читателю. Решив уравнение, устанавливаем, что один его корень равен $15 - \sqrt{125}$, а другой $-15 + \sqrt{125}$. Условию задачи в ее исходной арифметической постановке (“десять разделено на две [положительные] части”) удовлетворяет первый корень.

Та краткость, с которой ал-Хорезми рассматривает данную задачу, не доводя ее решения до конца, заставляет нас предполагать, что она рассматривалась в таком виде кем-то из его предшественников. Ведь если бы эта задача была поставлена им впервые, вряд ли он стал бы излагать решение в урезанном виде, не доводя его до ответа.

Вопрос о том, связывал ли ал-Хорезми рассматриваемое уравнение с задачей деления отрезка в среднем и крайнем отношении, обсуждали Gandz [9] и Herz-Fischler [10]. Я склонен считать, что ал-Хорезми был знаком с этой задачей в ее геометрической постановке по *Началам* Евклида; однако алгебраическое решение задачи о делении в среднем и крайнем отношении отрезка с численно заданной длиной представляло для него самостоятельный интерес.

Эта же задача у Иордана Неморария

Иордан Неморарий в трактате *О данных числах* также обсуждает задачу о делении данного числа в крайнем и среднем отношении и приводит пример с делением десяти: “Если данное число разделено на две части и произведение всего числа на одну часть равно квадрату второй части, то будет также дано приближенное значение каждой части... Пример. Число 10 разделено на две части так, что произведение 10 на одну из них равно квадрату другой части. Это дает нам равенство $a^2+10a=100$. Решая это уравнение, как делается обычно, найдем $2a+10=\sqrt{500}$. Извлекая из 500 приближенно корень, получаем $22\frac{1}{3}$; следовательно, $a = (22\frac{1}{3} - 10)\ :\ 2 = 6\frac{1}{6}$. Это и будет той частью, которую следует возвести в квадрат" [3, с. 578].

В отличие от ал-Хорезми, Неморарий в качестве неизвестного берет большую часть от 10. Кроме того, он доводит свое решение до числа, приближенно извлекая квадратный корень.

Еще одна задача у ал-Хорезми и Иордана Неморария

Ал-Хорезми рассматривает в своем трактате следующую задачу: "Если скажут: ты разделил десять на две части и разделил одну на другую и наоборот и в сумме все это оказалось двумя и одной шестой дирхема, то правило таково: если ты умножишь каждую из частей на себя, то сумма этого будет равна одной из частей, умноженной на другую, а затем умноженной на сумму, имевшуюся у тебя до умножения, то есть на сумму частных, то есть на два и одну шестую..." [5, с. 36].

Мы видим, что от уравнения $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 2\frac{1}{6}$ ал-Хорезми сразу же без пояснений переходит к уравнению $x^2 + y^2 = 2\frac{1}{6} \cdot xy$. Затем он делает подстановку $y = 10 - x$, приводит полученное уравнение к стандартному виду $24 + x^2 = 10x$ и находит корень $x=4$.

Кажется естественным считать, что составитель этой задачи с самого начала шел по арифметическому пути: сначала он представил 10 как сумму 4+6, а затем нашел отношения частей и их сумму $\frac{4}{6} + \frac{6}{4} = 2\frac{1}{6}$. Тем самым отношения исходно мыслились им как рациональные числа, с которыми можно выполнять все арифметические действия. Чтобы эта задача получила геометрическое истолкование и стала привычной "задачей на квадратные уравнения", ал-Хорезми фактически умножает исходное уравнение на xy; при этом прямоугольник xy может рассматриваться как геометрический объект, к которому приложены отношения из условия задачи.

Эту же задачу рассматривает Иордан Неморарий: "Если каждая часть [данного числа] разделена на другую и будет данным то, что получится от сложения полученных частных, то будут данными и сами части... Пример. Число 10 разделено на две части; каждая из частей разделена на другую и полученная сумма частных равна $2\frac{1}{6}$. Прибавив 2, получим $4\frac{1}{6}$. Разделив 100 на это число, получим 24. Это будет произведение одной части на другую. Отнимем, как обычно, из 100 это учетверенное произведение и из разности 4 извлечем корень, равный 2, что и представляет разность обеих частей 6 и 4" [3, с. 570].

Как видно из текста, Неморарий идет по другому пути, нежели ал-Хорезми. Фактически он пользуется выведенным ранее тождеством

$$\frac{(x+y)^2}{2+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}} = xy,$$

выражая произведение искомых частей через данные условия задачи, а затем решая уже известную задачу “найти два числа, если даны их сумма и произведение”.

Свяжем с этой задачей одну геометрическую интерпретацию, которая пригодится нам в дальнейшем. Перейдем от уравнения $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=2\frac{1}{6}$ к уравнению $(x+y)^2 = 4xy + \frac{1}{6}xy$. Это последнее уравнение истолкуем так: “Квадрат со стороной $x+y$ состоит из четырех прямоугольников xy и центрального квадрата с площадью $\frac{1}{6}xy$” (рис. 1). Такое истолкование позволяет решить исходную задачу напрямую, не сводя ее к другим известным задачам. В самом деле, прямоугольник xy равен 6 центральным квадратам, тем самым большой квадрат равен 25 центральным квадратам, и потому его сторона в 5 раз больше стороны центрального квадрата, но тогда сторона центрального квадрата равна 2. Мы пришли к совсем простой задаче: “число 10 разделено на две части, разность между которыми равна 2; найдите эти части”.

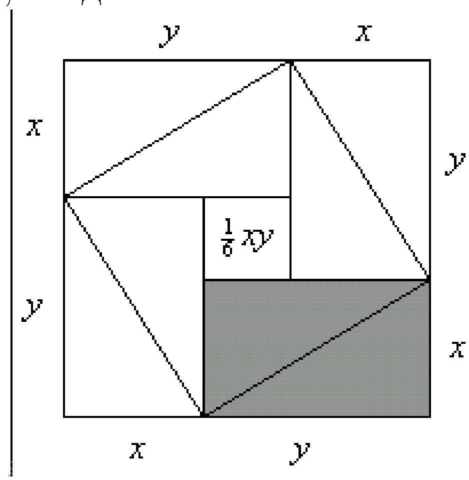


Рис. 1

Две задачи Абу Камила

Абу Камил ал-Мисри в *Книге об алгебре и алмукабале* рассматривает задачу из предыдущего раздела, в которой примечательным образом изменено значение для суммы отношений: “Разделить 10 на две части таким образом, что каждая из частей разделена на другую и сумма частных равна корню из 5" (задача 42 в издании [8]). Эту систему он решает тремя различными способами (см. [10, с. 125], находя корни $\sqrt{125}-5$ и $15-\sqrt{125}$. Тем самым выясняется, что исходное число 10 оказалось разделенным на две части в среднем и крайнем отношении.

Следует отметить, что тем самым $\sqrt{5}$ оказывается у Абу Камила настоящим отвлеченным числом – ведь в древнегреческой математике этот корень мыслился лишь геометрически, как невыразимое отношение сторон двух квадратов, один из которых больше другого в 5 раз по площади.

Следующая задача 43 связана с теми же корнями уравнения, что и задача 42, а ставится она так: "Разделить 10 на две части таким образом, что каждая из частей разделена на другую и сумма квадратов частных равна 3".

Для задачи 43 можно указать ее геометрический первоисточник. Это предложение XIII.4 *Начал* Евклида, которое формулируется так: "Если прямая линия разделена в крайнем и среднем отношении, то вместе взятые квадраты на целой и на меньшем отрезке будут в три раза больше квадрата на большем отрезке" [1; 3, с. 109]. Евклид доказывает это предложение с применением техники геометрической алгебры. Перейдем от соотношения $a–y=x$ к соотношению $a^2+y^2=x^2+2ay$. Вспомним теперь, что по условию $\frac{a}{x}=\frac{x}{y}$, и тем самым $ay{=}x^2$. Но тогда $a^2{+}y^2{=}3x^2$.

Выведем отсюда условие задачи 43. Разделив последнее соотношение на x^2, получим, что $\left(\frac{a}{x}\right)^2+\left(\frac{y}{x}\right)^2=3$. Но $\frac{a}{x}=\frac{x}{y}$, и потому $\left(\frac{x}{y}\right)^2+\left(\frac{y}{x}\right)^2=3$.

Условие задачи 42 может быть извлечено из предложения XIII.3 *Начал* Евклида: "Если прямая линия разделена в крайнем и среднем отношении, то меньший отрезок с присоединением половины большего отрезка будет в квадратах равен упятеренному квадрату на половине большего отрезка" [1; 3, с. 108]. Этому предложению можно придать следующий эквивалентный вид: "Если прямая линия разделена в крайнем и среднем отношении, то вся линия с присоединением меньшего отрезка будет в квадратах равна упятеренному квадрату большего отрезка". Докажем это последнее утверждение алгебраически. Поскольку $ay{=}x^2$, тем самым $4xy{+}4y^2{=}4x^2$. Но тогда $x^2{+}4xy{+}4y^2{=}5x^2$, откуда $(x{+}2y)^2{=}5x^2$, или, что то же самое, $(a+y)^2{=}5x^2$.

Чтобы вывести отсюда условие задачи 42, перейдем от квадратов к их корням: $a+y=x\sqrt{5}$. Разделив обе части на x, получим $\frac{a}{x}+\frac{y}{x}=\sqrt{5}$. Но $\frac{a}{x}=\frac{x}{y}$, и тем самым $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\sqrt{5}$.

Условие задачи 42 можно вывести и из условия задачи 43. Пусть $\left(\frac{x}{y}\right)^2+\left(\frac{y}{x}\right)^2=3$, тогда $\left(\frac{x}{y}\right)^2+2+\left(\frac{y}{x}\right)^2=5$, откуда $\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^2=5$, и тем самым $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\sqrt{5}$.

Леонардо Пизанский

Леонардо Пизанский в *Книге абака* также рассматривает 42 задачу Абу Камила, добавляя к своему решению следующий комментарий: "согласно этому разделению ты знаешь, что 10 разделено в среднем и крайнем отношении, и как 10 к большей части, так большая часть к меньшей; и когда 10 умножается на меньшую часть, то есть на $15-\sqrt{125}$, получается то же самое, что и при умножении большей части на себя. И если ты хочешь разделить 10 в этой пропорции, возьми большую часть за вещь, а меньшую за 10 без вещи. Ее умножение на 10 дает 100 без 10 вещей, равное квадрату большей части. Прибавив 10 вещей к обеим частям, мы получим, что квадрат и 10 вещей равны 100 динарам, и решим это с помощью алгебры" [12, с. 434].

Леонардо Пизанский рассматривает также и 43 задачу Абу Камила, полагая сумму частей равной не 10, а 12, и сумму квадратов частных – равной не 3, а 4. Поскольку сумма квадратов частных уже не равна 3, ясно, что в такой постановке эта задача к золотому сечению уже не приводит.

Лука Пачоли

Лука Пачоли в своем трактате *О божественной пропорции* рассматривает 13 свойств пропорции, возникающей при делении прямой в среднем и крайнем отношении. Все эти свойства привязаны к предложениям XIII и XIV книг *Начал* Евклида. Однако там, где Евклид дает геометрическое доказательство рассматриваемого свойства, Пачоли вместо этого доказательства приводит алгебраический пример: "Разделим 10 на две такие части, что умножением одной из них на 10 получится столько же, сколько умножением другой на саму себя" [4, с. 23]. Доказательства в этом трактате для краткости опущены; Пачоли ссылается здесь на те доказательства, которые он ранее приводил в *Сумме*. Заметим также, что хотя Пачоли стремится дать полный обзор известных ему фактов, относящихся к "божественной пропорции", тем не менее 42 и 43 задач Абу Камила он не рассматривает.

Библиографический список

1. *Евклид.* Начала [Текст]: в 3 т. / Евклид; перевод и комм. Д.Д. Мордухай-Болтовского при ред. участии И.Н. Веселовского и М.Я. Выгодского. – М.: ГТТИ, 1949-50.
2. *Матвиевская, Г.П.* Учение о числе на средневековом Ближнем и Среднем Востоке [Текст] / Г.П. Матвиевская. – Ташкент: Фан, 1967.
3. *Неморарий, И.* О данных числах [Текст] / И. Неморарий; перевод и комм. С.Н. Шрейдера // Историко-математические исследования. – 1959. – № 12. – С. 559-678.
4. *Пачоли, Л.* О божественной пропорции [Текст] / Л. Пачоли; перевод и комм. А.И. Щетникова. – М.: Фонд "Русский авангард", 2007.
5. *Ал-Хорезми, Мухаммад ибн Муса.* Краткая книга об исчислении алгебры и алмукабалы [Текст] / Мухаммад ибн Муса Ал-Хорезми; перевод Б.А. Розенфельда // Математические трактаты: кн. – Ташкент: Фан, 1983.
6. *Шрейдер, С.Н.* Начала западноевропейской алгебры в сочинении Иордана Неморария "О данных числах" [Текст] / С.Н. Шрейдер // Историко-математические исследования. – 1959. – № 12. – С. 679-688.
7. *Юшкевич, А.П.* История математики в средние века [Текст] / А.П. Юшкевич. – М.: Физматгиз, 1961.
8. *Abu, Kamil.* The algebra of Abu Kamil "Kitab fi al-jabar wa'l mugabala" in commentary by Mordecai Finzi. Trans. M. Levey. Madison: Univ. of Wisconsin Press, 1966.
9. *Gandz, S.* The origin and development of the quadratic equations in Babylonian, Greek and early Arabic algebra. Osiris, – 1938. – № 3. – P. 405-557.
10. *Herz-Fischler, R.* A mathematical history of division in extreme and mean ratio. 2 ed. NY: Dover, 1998.
11. *Karpinski, L.C.* The algebra of Abu Kamil // Amer. Math. Monthly, 1914. – № 21. – P. 37-48.
12. *Pisano, Leonardo.* Scritti di Leonardo Pisano mathematico del secolo decimoterzo. Ed. B. Boncompagni. – Rome, 1857-1862. – V. 2.
13. *Levey, M.* Some notes on the algebra of Abu Kamil Shuja, a fusion of Babylonian and Greek algebra, Enseignement Math., 1958. – № 4. – P. 77-92.
14. *Sesiano, J.* La version latine medievale de l'Algebre d'Abu Kamil. Vestigia mathematica, Amsterdam, 1993. – P. 315-452.

Б.К. Млодзеевский – выдающийся деятель высшего математического образования

Г.А. Зверкина, Л.В. Пугина

История знает много великих ученых, замечательных педагогов и методистов, талантливых организаторов науки. Но чрезвычайно редко все эти качества проявляются у одного человека. И таким человеком был Болеслав Корнелиевич Млодзеевский – первый профессор математики Московского Инженерного Училища (ныне МИИТ), профессор МГУ, человек, которого считают "своим" многие вузы Москвы.

Он родился 10 июля (28 июня по старому стилю) 1858 г. в Москве в семье профессора частной патологии и терапии Московского университета Корнелия Яковлевича Млодзеевского (1818-1865). После смерти отца заботы о семье – семилетнем Болеславе и пятилетнем Викентии (позднее – известном медике), матери Аделаиде Викентьевне – взял на себя дядя, академик живописи К.В. Лемох. После окончания 1876 г. Московской V гимназии с золотой медалью Болеслав продолжил учебу на математическом отделении физико-математического факультета Московского университета. Его учителями были знаменитые русские ученые: астроном Ф.А. Бредихин, физик А.Г. Столетов, механики А.Ю. Давидов и Ф.А. Слудский, а также выдающийся геометр В.Я. Цингер, ставший для Болеслава Корнелиевича наставником и учителем.

В 1880 году, представив сочинение на тему "Классификация плоских кривых 3-го порядка", написанное в результате изучения работы Ньютона "Перечисление кривых третьего порядка", Млодзеевский был удостоен золотой медали и оставлен при университете для подготовки к профессорскому званию. Тогда же он начал преподавание в средней школе, сначала в Усачевско-Черняевском женском училище, а затем в частном пансионе.

В 1882 году он женился на своей бывшей ученице Елене Григорьевне Лаптевой. Их сын Анатолий (1883-1959) впоследствии стал известным физиком, профессором МГУ.

В 1885 году Б.К. Млодзеевский становится приват-доцентом Московского университета, с этого момента начинается его деятельность в качестве преподавателя высшей школы. Уже в самом начале своей педагогической деятельности Млодзеевский реформирует подход к математическому образованию в Российской высшей школе. Традиционно преподавание математики сводилось к чтению лекций и самостоятельной работе студентов с рекомендованной (часто зарубежной) литературой. Б.К. Млодзеевский вводит практические занятия по курсу математики – сначала для желающих, а затем – обязательные. (Первую попытку введения практических занятий по аналитической геометрии сделал учитель Млодзеевского В.Я. Цингер.) Первые такие занятия организовывались для всего курса и посещались только желающими студентами, но позднее они стали проводиться для небольших групп студентов и стали обязательными.

В 1886 году Млодзеевский защищает магистерскую диссертацию "Исследования об изгибании поверхностей", а через четыре года – докторскую "О многообразии многих измерений".

Основные научные интересы Б.К. Млодзеевского были связаны с геометрией; многие его, тогда новые, результаты стали важной составляющей дифференциальной геометрии, но позднее были "перекрыты" работами его последователей. Более того, Б.К. Млодзеевсий был первым, кто прочитал в Москве курс лекций по этой дисциплине.

Вскоре после защиты докторской Б.К. Млодзеевсий выезжает в полуторагодичную заграничную командировку, слушает лекции виднейших ученых того времени: Ж.Г. Дарбу и Ш. Эрмита, Ф.К. Клейна и К.Г.А. Шварца.

После возвращения в Москву, в феврале 1892 г., Млодзеевский получает должность экстраординарного профессора по кафедре чистой математики, и с тех пор принимает самое близкое участие во всей жизни университета. Однако его тяготило "подвешенное" состояние внештатного профессора, а в то время в Москве было не так много высших учебных заведений, где математик с таким званием мог бы работать на постоянной основе. И когда 1896 году в Москве открывалось Инженерное училище, принадлежавшее ведомству путей сообщения (позднее Инженерный институт, МИИТ), он добился права возглавить в нем кафедру математики (на 50 мест преподавателей претендовало около 250 человек).

Позднее вместе с ним здесь преподавали и другие преподаватели Московского университета: Д.Ф. Егоров, Н.Е. Жуковский, Л.К. Лахтин, А.А. Волков, А.П. Поляков, И.И. Жегалкин, Н.К. Богоявленский, А.А. Дмитриевский, В.М. Коваленский и др. Но именно Б.К. Млодзеевсий составлял первые учебные планы по математике и первые программы математических курсов, предназначенных для инженеров-путейцев. Его увлекала эта работа, ведь раньше ему приходилось обучать лишь "теоретиков" – будущих учителей математики гимназий и реальных училищ (которых тогда готовили университеты).

Для преподавания математики будущим путейцам он использовал совсем иные подходы, чем в преподавании для будущих "теоретиков" и учителей. Он обращал гораздо большее внимание на приложение математического аппарата к решению практических задач, например, при определении кривизны кривых, сопряжении окружностей и пр., что было необходимо при проектировании и ремонте железнодорожного полотна, а вот теоретические построения излагал ясно, точно, но более простым языком и здесь обходился без сложных абстрактно-теоретических конструкций.

Б.К. Млодзеевский работал в МИИТе до 1913 года (хотя с 1899 г. он стал ординарным (штатным) профессором МГУ, он не бросил преподавание у своих путейцев). За прошедшие в его стенах примерно семнадцать лет ученому удалось намного продвинуться вперед не только в изучении прикладных инженерных проблем, но и в теоретических вопросах. Естественно, большое внимание уделялось геометрическим дисциплинам, и по учебникам аналитической геометрии и математического анализа, созданным профессором, позднее учились и будущие инженеры, и математики-теоретики. Надо сказать, что Б.К. Млодзеевский не прерывал преподавание и в Московском университете, а значит и сохранял достаточно широкий спектр научных интересов. Во время работы в МИИТе Б.К. Млодзеевский составлял не только теоретические курсы, но и подборки типовых заданий для самостоятельной работы студентов – иногда по известным в то время задачникам, а иногда это были оригинальные наборы задач.

Сосредоточив свою деятельность в высшей школе, Млодзеевский вместе с тем всю жизнь интересовался постановкой преподавания в средней школе: он активно участвовал в работе многих общественных организаций, стремившихся улучшить преподавание физико-математических дисциплин в средней школе.

И в МГУ, и в МИИТе Болеслав Корнелиевич брал на себя чтение основных курсов для студентов младших курсов. Уже тогда ему пришлось готовить и издавать учебные пособия и конспекты лекций (часто его "соавторами" становились слушатели, печатавшие материалы на пишущей машинке или аккуратно переписывавшие их – такие конспекты неоднократно литографировались). В среде студентов московских технических вузов и Московского университета большой популярностью пользовались и типографски изданные учебники Млодзеевского по высшей алгебре, аналитической геометрии на плоскости и в пространстве, теории детерминантов, математическому анализу. Эти учебники неоднократно переиздавались и в Российской Империи, и в СССР; они не потеряли своего педагогического и методического значения и по сей день – см., например, [1-5].

Параллельно с преподаванием "классической" математики профессор Млодзеевский читал в университете специальные математические курсы, в которых знакомил студентов университета с новейшими достижениями математики. Так, в 1900-х годах он первым решился подготовить и прочитать курс теории функций действительного переменного и теории множеств. Позднее его ученики основали ведущую в мировой науке Московскую школу теории функций и функционального анализа. В рамках этой школы получили свои первые результаты выдающиеся математики нашей страны и мировой науки академики П.С. Александров, А.Н. Колмогоров, профессора Д.Е. Меньшов, И.И. Привалов и многие другие.

Однако условия политической обстановки в Российской Империи влияли не только на социальные изменения в обществе, но и на развитие науки и культуры. Будучи по своим воззрениям человеком прогрессивных взглядов, Болеслав Корнелиевич не мог примириться с реакционной политикой тогдашнего министра просвещения. В 1911 г. вместе с рядом других профессоров и преподавателей он, уже давно имевший статус заслуженного и авторитетного профессора, действительный статский советник, решил покинуть Московский университет в знак протеста против увольнения прогрессивных профессоров, и переключил свое внимание (помимо сохранявшихся отношений с Инженерным институтом) на Московские высшие женских курсы (МВЖК) и Московский народный университет имени А.Л. Шанявского (МНУ), где его лекции пользовались исключительным успехом.

Надо сказать, что МВЖК были созданы в 1872 году для обучения девушек по гимназической программе и подготовке их к преподаванию в начальной школе, но позднее эти курсы расширились, стали давать и медицинское, и общенаучное образование, позволявшие выпускницам работать в больницах и гимназиях.

Млодзеевский принял самое деятельное участие в организации математического отделения МВЖК. Семинарская математическая библиотека, математический кабинет, читальная – все это возникло при курсах исключительно благодаря его заботам.

Математическая программа женских курсов соответствовала университетской, и Млодзеевский таким образом составлял программы своих лекций, чтобы их могли слушать и постепенно подтягиваться до довольно высокого уровня и недостаточно подготовленные девушки. А потом они изучали и дифференциальную геометрию, и теорию функций комплексного переменного, и прочие специальные математические дисциплины. О качестве преподавания математики на МВЖК говорит то, что одна из слушательниц Ольга Николаевна Цубербиллер (1885-1975) преподавала там же под руководством Млодзеевского, а в дальнейшем стала профессором, по ее учебникам и задачникам училось не одно поколение советских студентов. (О.Н. Цубербиллер –первый биограф Б.К. Млодзеевского, она опиралась в своей работе не только на документальные данные, но и на рассказы Болеслава Корнелиевича [6]. Последующие биографии Млодзеевского в значительной степени опирались на эту работу – см. [7, 8].) Млодзеевский работал на МВЖК, позднее ставших основой нескольких новых вузов Москвы, непрерывно вплоть до кончины, совмещая одно время профессуру с обязанностями декана факультета.

А Московский народный университет им. А.Л. Шанявского, основанный в 1908 году на средства мецената А.Л. Шанявского, был доступен для всех слоев населения независимо от вероисповедания, национальности, социального положения и наличия документов об образовании. И при этом в нем велось преподавание на действительно университетском уровне. Б.К. Млодзеевский сотрудничал с МНУ со времени его создания.

В 1911/1912 учебном году Болеслав Корнелиевич прочел в МНУ собравший огромную аудиторию курс оснований геометрии, что стало событием в научной жизни Москвы. В 1913/1914 учебном году здесь же им прочитан специальный курс по дифференциальной геометрии, а в последующем был организован семинар по математике, в котором принимали участие как студенты, так и преподаватели, среди которых оказался и С.П. Фиников – один из видных представителей московской школы дифференциальной геометрии. Такой семинар тогда признали новой формой организации учебы и самостоятельной работы студентов: они изучали новейшие труды по математике, проводили свои оригинальные исследования и рассказывали об этом другим участникам обучения. Позднее семинар получил окончательную прописку в университете, и такая форма научной работы со временем стала широко распространенной.

Вернувшись после февральской революции 1917 года в Московский университет, Болеслав Корнелиевич возобновил в нем свою научно-педагогическую деятельность и в последнее пятилетие своей жизни взял на себя чтение как основных геометрических курсов (аналитическая геометрия, проективная геометрия), так и ряда специальных курсов (геометрические преобразования, Римановы поверхности, общий курс теории поверхностей, многомерная дифференциальная геометрия). Помимо этого, совместно с А.К. Власовым он ежегодно с большим успехом вел специальные геометрические семинары. В 1917-1919 гг. МВЖК и МНУ были расформированы, студенты и преподаватели перешли в другие вузы, и Б.К. Млодзеевский продолжил там преподавание.

Кроме того, в эти годы Болеслав Корнелиевич преподавал в Военно-педагогической академии, Академии социального воспитания имени Н.К. Крупской и являлся директором основанного им Научно-исследовательского института математики и механики МГУ. Вместе с тем он находил еще время для издания лекций по курсам аналитической геометрии, высшей алгебры и приближенного решения уравнений, а также для перевода и редактирования курса "Математического анализа" Э. Гурса.

Надо сказать, многие вузы Москвы считают Б.К. Млодзеевского "своим" математиком – ведь ряд из них появился после 1917 г. из преобразованных МВЖК и МНУ (2-й МГУ, МИТХТ, МГПИ, МАрхИ, МАДИ...) – и, конечно, первое место "штатной" работы – МИИТ.

На протяжении всей своей жизни Болеслав Корнелиевич был одним из виднейших представителей научной общественности Москвы. Известно его деятельное участие во Всероссийских съездах преподавателей математики. Второй из них был непосредственно организован Московским математическим кружком, которым руководил, как известно, Млодзеевский.

Еще с 1885 года Болеслав Корнелиевич являлся членом Московского математического общества. В 1891 году он был избран его секретарем и в этой должности состоял до 1906 года, после чего был избран вице-президентом – одновременно с выдвижением Н.Е. Жуковского на должность президента. В 1922 г. после кончины Жуковского Млодзеевский стал президентом ММО. В Московском математическом обществе Млодзеевский прочитал 66 докладов и принимал самое активное участие в его работе.

К этому следует добавить, что Млодзеевский был членом еще нескольких научных общественных организаций. По кругу своих разнообразных научных, педагогических и общественных интересов он был близок с такими учеными, как академик В.И. Вернадский, математики В.Я. Цингер, К.А. Андреев, Д.Ф. Егоров, С.А. Чаплыгин, астрономы В.К. Цераский, П.К. Штернберг, физики П.Л. Лебедев и А.А. Эйхенвальд, химик И.А. Каблуков, историк В.О. Ключевский.

Уход из Московского университета в 1911 году, события 1914-1917 годов тяжело отразились на общем самочувствии Болеслава Корнелиевича, а 1918-1919 годы осложнились для него еще и болезнью его жены. В это время от холода и истощения погибает его единственный внук, ухудшилось общее состояние здоровья из-за обострения диабета. Б.К. Млодзеевский, в дополнение к занятиям со студентами в разных районах Москвы, сам носил в квартиру воду, колол дрова...

Но его ответственность перед своими учениками, внимание к малейшим деталям своей работы продолжали оставаться на высоком уровне. В 1922 г., после смерти своего коллеги А.К. Власова, Болеслав Корнелиевич берет на себя читавшиеся им курсы в МГУ и в Институте Народного Хозяйства, продолжая при этом и свою основную работу.

Возможно, самым главным достижением Млодзеевского была организация Института математики при МГУ – главной кузницы математических кадров страны в течение нескольких десятилетий. 18 ноября 1922 г. на организационном собрании ведущие математики Москвы просили Млодзеевского стать директором нового института. Но руководством Института ему довелось заниматься лишь около полутора месяцев – за это время были сформированы штаты Института, разработана программа его работы.

В это время сильное переутомление, слабость приводят к тому, что безобидный гнойник на шее воспаляется и приносит сильные мучения, но Млодзеевский доводит до конца чтение курсов, работу по организации Института, редактирование и корректуру подготовленных к изданию работ, и лишь после этого обращается к врачу. Наркоз во время ставшей необходимой операции привел к обострению диабета, и 18 января 1923 г. Б.К. Млодзеевский скончался.

Библиографический список

1. *Млодзеевский, Б.К.* Основы аналитической геометрии в пространстве [Текст] / Б.К. Млодзеевский. – М., 1924.
2. *Млодзеевский, Б.К.* Основы аналитической геометрии: на плоскости [Текст] / Б.К. Млодзеевский. – М., 1924.
3. *Млодзеевский, Б.К.* Аналитическая геометрия трех измерений [Текст] / Б.К. Млодзеевский. – М., 1906.
4. *Млодзеевский, Б.К.* Основы высшей алгебры [Текст] / Б.К. Млодзеевский. – М., 1910.
5. *Млодзеевский, Б.К.* Теория детерминантов [Текст] / Б.К. Млодзеевский. – М., 1906.

6. *Цубербиллер, О.* Болеслав Корнелиевич Млодзеевский [Текст] / О. Цубербиллер // Отчет Московского университета за 1923 г. – М., 1924. – С. 257-274.
7. *Егоров, Д.Ф.* Болеслав Корнелиевич Млодзеевский [Текст] / Д.Ф. Егоров // Математический сборник. – 1925. – Т. 32. – № 3. – С. 449-452. (Некролог).
8. *Россинский, С.Д.* Болеслав Корнелиевич Млодзеевский [Текст] / С.Д. Россинский. – М., 1950.

Б.К. Млодзеевский и среднее математическое образование в России в конце XIX – начале XX века

Р.З. Гушель

Профессор Московского университета **Болеслав Корнелиевич Млодзеевский** (1858-1923), помимо научно-исследовательской работы в области геометрии и анализа, и преподавания в высших учебных заведениях, много сил и времени уделял вопросам среднего математического образования.

Будучи глубоким и вдумчивым педагогом, он не мог не видеть, что многие проблемы, возникавшие у студентов в университете, начинались еще в средней школе. Отсюда, вероятно, проистекал серьезный интерес ученого к проблемам отечественного среднего образования вообще, и математического, в частности.

Б.К. Млодзеевский в течение многих лет был, по существу, тем магнитом, тем центром, который притягивал к себе педагогов-математиков средних учебных заведений Москвы.

В 1898 году при Московском университете возникло Педагогическое общество. Бессменным председателем отделения преподавателей математики этого общества был Б.К. Млодзеевский. Отделение просуществовало около семи лет, пока весной 1905 года Педагогическое общество не было закрыто.

После Манифеста 17 октября 1905 года у бывших членов математического отделения появилась мысль о создании кружка преподавателей математики. Первое собрание кружка состоялось в ноябре 1905 года. Председателем кружка был избран Б.К. Млодзеевский, товарищем председателя – его бывший ученик, преподаватель Московских Высших женских курсов Александр Федорович Гатлих. Секретарями кружка стали И.И. Чистяков и Л.И. Лебель. Проект устава кружка, составленный еще в конце 1905 года, дорабатывался в течение 1906 года. 20 октября 1907 года Московское особое городское присутствие по делам об обществах и союзах зарегистрировало кружок [1]. Он стал называться “Московский математический кружок”. Цель его в уставе была сформулирована следующим образом: “Московский математический кружок имеет целью разработку вопросов, относящихся к математике, преимущественно элементарной, и близким к ней наукам, а также распространение математического образования” [2].

Предполагалось, что для достижения указанной цели кружок будет проводить регулярные заседания для обсуждения докладов по математике и вопросам ее преподавания. Помимо заседаний, планировались и такие виды работы: организация публичных лекций, устройство выставок учебных пособий, содействие переводу математических сочинений на русский язык и издание оригинальных и переводных сочинений по математике, а также издание трудов членов кружка.

Желание членов кружка издавать наиболее интересные из прочитанных на его заседаниях докладов привело их к мысли о необходимости иметь свой журнал. В то время в России был только один журнал, посвященный, в том числе, и вопросам элементарной математики. Это выходивший в Одессе “Вестник опытной физики и элементарной математики”. Некоторые материалы кружка появлялись на его страницах. Кроме того, журнал помещал информационные сообщения о прошедших заседаниях и сделанных там докладах. Но этого было недостаточно.

Благодаря усилиям Б.К. Млодзеевского и его ближайших помощников, в Москве появился новый журнал, посвященный вопросам элементарной математики и проблемам ее преподавания в средних учебных заведениях.

С января 1912 года здесь стал выходить журнал **“Математическое образование”**. Он и стал трибуной кружка. С 1912 года именно в этом издании наиболее подробно освещались все события, нововведения, дискуссии, связанные со средним математическим образованием в России. Ответственным редактором журнала стал И.И. Чистяков.

До сих пор ничего не было сказано о численности кружка и его персональном составе. В начале 1912 года в кружке состояло около 140 человек, среди которых были преподаватели как высшей, так и средней школы.

Из преподавателей московских вузов нужно, помимо самого Б.К. Млодзеевского, назвать К.А. Андреева, В.В. Бобынина, А.К. Власова, Д.Ф. Егорова, И.И. Жегалкина, Н.Н. Лузина, В.В. Немыцкого, С.П. Финикова, О.Н. Цубербиллер. Этот перечень далеко не полон.

В работе кружка активно участвовали такие известные методисты-математики как И.И. Александров, Ф.И. Егоров, Н.А. Извольский, К.Ф. Лебединцев, Н.А. Рыбкин, А.Н. Шапошников и многие другие. Помимо москвичей, были в кружке и иногородние члены, в том числе В.Ф. Каган (Одесса), М.Г. Попруженко (С.-Петербург), Д.М. Синцов (Харьков), С.И. Шохор-Троцкий (С.-Петербург).

Бо́льшая часть членов кружка – учителя московских средних учебных заведений.

Мы располагаем некоторой информацией о заседаниях кружка за период с 1908 по 1916 год. До 1912 года краткие сообщения о заседаниях помещались на страницах "Вестника опытной физики и элементарной математики", а с 1912 года – в "Математическом образовании". Из журнальных публикаций за указанные годы нами выявлены темы свыше 100 докладов разных лиц. Сам Б.К. Млодзеевский выступал со следующими сообщениями:

1. О постановке математики в средних женских учебных заведениях Пруссии (23 октября 1909);

2. О наибольшей площади четырехугольника, данного своими сторонами (29 января 1910);

3. Иррациональные числа в средней школе (24 сентября 1910);

4. Математика в Петербургской педагогической академии (26 ноября 1910);

5. Площади фигур и теорема Де-Цольта (4 марта 1911);

6. Геометрическая теория пропорциональности (15 декабря 1911);

7. О действиях над отношениями отрезков (12 апреля 1912);

8. Периметр вписанного в круг правильного многоугольника увеличивается, если число сторон увеличивается на единицу (27 ноября 1914);

9. Об одной арифметической задаче (28 января 1916).

Из названных девяти докладов два (№№ 6 и 9) были опубликованы в журнале "Математическое образование".

Назовем некоторые из других сделанных на заседаниях кружка докладов.

1. **Гатлих А.Ф.** О решении геометрических задач на построение при помощи одного циркуля (февраль 1908);

2. **Баранов П.А.** Вопросы пропедевтики геометрии в русской педагогической литературе (13 марта 1909);

3. **Чистяков И.И., Берг М.Ф.** О постановке преподавания математики в реальных училищах (20 ноября 1909);

4. **Власов А.К.** Конструктивный и логический моменты в геометрии (4 января 1910);

5. **Бобынин В.В.** История первоначального развития счисления дробей (18 марта 1911);

6. **Томашевич Е.С.** Первые шаги на пути к прохождению курса дифференциального исчисления в средних учебных заведениях (22 апреля 1911);

7. **Галанин Д.Д.** Система математического образования академика Гурьева (1801) (27 сентября 1912);

8. **Волков А.А.** Педагогическое значение работ по основаниям геометрии (7 ноября 1913);

9. **Лебединцев К.Ф.** Опыт изложения учения о простейших функциях и их графиках в средней школе (12 марта 1915);

10. **Шапошников Н.А.** Нужна ли высшая математика в средней школе (10 и 25 ноября 1916).

На заседаниях кружка значительное место уделялось вопросам, связанным с готовившимися и проходившими реформами в области среднего математического образования – в приведенном выше списке этому посвящены доклады №№ 3, 6, 8, 9 и 10. И в работе кружка, и в публикациях журнала видно сильное влияние деятельности Международной комиссии по преподаванию математики и прошедших как раз в эти годы двух всероссийских съездов преподавателей математики.

Ряд докладов был посвящен новым книгам по математике и вопросам ее преподавания, вышедшим за рубежом. В частности, в феврале 1909 года Н.А. Извольский выступил с сообщением, посвященным учебнику геометрии Э. Бореля.

Выход первого номера журнала “Математическое образование” совпал по времени с Первым Всероссийским съездом преподавателей математики, проходившим в С.-Петербурге. В решениях этого съезда было записано, что Второй съезд должен был состояться в конце декабря 1913 – начале января 1914 года в Москве. Московский математический кружок был приглашен взять на себя организацию и проведение этого съезда, что он и сделал.

Б.К. Млодзеевский стал председателем Организационного комитета съезда, руководил всеми подготовительными работами и выступил с речью на открытии съезда [3].

На страницах “Математического образования” были опубликованы многие доклады, прочитанные, как на Первом, так и на Втором всероссийских съездах преподавателей математики. И резолюции обоих съездов также были там напечатаны.

Интерес к вопросам среднего математического образования был для Болеслава Корнелиевича не только интересом научным, академическим. Он и сам преподавал в средней школе. В частности, в 1900 году он состоял преподавателем математики частной женской гимназии Ю.И. Бесс.

На рубеже веков ученый принимал активное участие в подготовке реформы школы, которая была затеяна назначенным в 1898 году министром народного просвещения **Н.П. Боголеповым**.

По инициативе министра в 1900 году в С.-Петербурге работала "Высочайше учрежденная комиссия по вопросу об улучшениях в средней общеобразовательной школе". 8 июля 1899 года министр разослал попечителям учебных округов циркуляр, в котором были обозначены основные проблемы школы, подлежавшие обсуждению комиссии. Она должна была выработать рекомендации по реформированию средней школы (речь шла только о мужских учебных заведениях).

Среди недостатков существовавшей средней школы министр указал "на отчужденность от семьи и бюрократический характер средней школы, вносящей сухой формализм и мертвенность в живое педагогическое дело... на невнимание к личным особенностям учащихся и пренебрежение воспитанием нравственным и физическим... на нежелательную специализацию школы с самых младших классов... на чрезмерность ежедневной умственной работы, возлагаемой на учеников, на несогласованность программ между собою и с учебным временем..." [4, с. I-II].

Попечителем Московского учебного округа был в то время известный математик Павел Алексеевич Некрасов (1853-1924). Осенью 1899 года он собрал в Москве очень представительное совещание по вопросам, отмеченным в циркуляре министра. Всего в работе совещания приняли участие более 200 человек. Среди них были преподаватели как высшей, так и средней школы. Из математиков нужно назвать, в частности, профессоров Московского университета К.А. Андреева, Н.В. Бугаева и Л.К. Лахтина.

Среди участников совещания был директор Московского учительского института Ф.И. Егоров, преподаватели средних учебных заведений А.М. Воронец, Д.Д. Галанин, Н.А. Рыбкин, В.П. Шереметевский и многие другие.

Из профессоров других факультетов университета отметим Р.Ю. Виппера, И.А. Каблукова, А.А. Тихомирова (ректор), Н.А. Умова и И.В. Цветаева.

Участниками совещания были разработаны учебные планы и программы для пяти разных типов мужских гимназий. Такое большое число типов гимназий было обусловлено различной степенью представленности древних языков в их учебных планах.

Б.К. Млодзеевский также участвовал в работе совещания и составил программу по математике для гимназии с двумя древними языками, курс которых предполагалось значительно сократить по сравнению с существовавшим (гимназия 2 типа).

За основу он взял действовавшую в то время программу, но из нее исключил такие разделы, как извлечение квадратных корней из многочленов и извлечение кубических корней из чисел. Учение о периодических дробях было сокращено, учение о пропорциях перенесено из арифметики в алгебру. В курс геометрии "включено изучение важнейших геометрических мест и решение несложных задач на построение и на доказательство" [4, с. 160].

В объяснительной записке к программе ее автор, в частности, обращает внимание на то, что "преобладание значения задач привело к тому, что особенное внимание было обращено на изучение тех отделов, которые давали более материала для задач...

Особенно неблагоприятно отразилось преобладание задач на вычисление в геометрии. В настоящее время все отделы, не дающие непосредственного материала для упражнений на вычисление, доведены до наименьшего объема, и таким образом геометрия в значительной степени утратила свое образовательное значение, как учение о пространственных соотношениях, и как бы превратилась в подспорье алгебры..." [4, с. 162].

Организаторами совещания в Москве была составлена специальная анкета для профессоров Московского университета. На вопросы этой анкеты ответили многие ученые университета. Вот эти вопросы.

1. В какой мере и в каком направлении желательно усилить преподавание новых языков в гимназиях?

2. Можно ли допускать в университет, на некоторые факультеты, учеников реальных училищ, при условии восьмилетнего курса и при условии основательного изучения новых языков?

3. Если возможно допускать на некоторые факультеты учеников реальных училищ, то какие требования необходимо, по мнению г. профессора, предъявить к реалистам сверх основательного изучения новых языков; например, не желательно ли ввести в курс реальных училищ латинский язык и в каком размере?

4. Не представляется ли желательным, при сохранении, примерно в семи классах гимназии преподавания общеобразовательного характера, видоизменить преподавание в VIII классе и, может быть, продолжить его в IX классе – так, чтобы это преподавание носило подготовительный для университета характер (на манер французских лицеев)? При условии осуществления такого лицейского преподавания, не представляется ли возможным сделать сокращение университетского курса примерно на один год, если будет прибавлен IX класс в гимназии?

5. Какие недочеты замечаются в познаниях по общеобразовательным предметам и в общем развитии абитуриентов гимназий, затрудняющие им занятия университетскою наукою?

6. Не желательно ли с целью отбора абитуриентов, пригодных к высшему образованию, установить особый экзамен для поступления в университет? Где и в какой форме должен происходить этот экзамен?

7. Какие другие указания имеет сделать г. профессор по поводу желательных улучшений в области среднего образования?

Более 50 профессоров всех факультетов университета ответили на вопросы анкеты, ответы некоторых были очень обстоятельны и развернуты. Среди ответивших на вопросы анкеты был и Б.К. Млодзеевский. Приведем фрагменты его ответа.

“1. ...При богатстве научной и изящной литературы этих (новых – Р.Г.) языков не только нельзя признать достаточно полным общее образование молодого человека, для которого эта литература недоступна, но и его дальнейшие самостоятельные научные занятия в университете делаются совершенно невозможными...

2. Допущение учеников реальных училищ, по крайней мере, на математическое отделение физико-математического факультета, по моему мнению, вполне возможно. Хотя я считаю классическую школу более высоким типом средней школы, но фактические знания по древним языкам и родственным с ними предметам в том объеме, в котором они должны были бы даваться в гимназии, не составляют, по моему мнению, необходимой принадлежности полного общего образования, нужного для успешности дальнейших занятий в университете.

3. Для того, чтобы реальное училище могло с успехом подготовлять своих учеников к университету, в нем нужно усилить общеобразовательный элемент... Что касается латинского языка, то, по крайней мере, для молодых людей, готовящихся поступить на математическое отделение, этот предмет будет иметь в реальном училище только значение вспомогательного предмета...

4. Хотя для университета и было бы лучше получать слушателей более образованных и подготовленных, но едва ли учреждение лицейских классов могло бы этого достигнуть... Необходимо иметь в виду, что преподавание наук, требующих богатых учебных пособий, какова, например, физика, совершенно не по средствам гимназиям... Что касается сокращения университетского курса на один год, то я считаю его совершенно невозможным... Хотя в старших классах французских коллегий и преподается аналитическая геометрия и основы высшего анализа, но едва ли можно утверждать, что французские студенты выносят из университета более основательные научные познания в математических науках, чем студенты немецкие.

5. Недостатки в познаниях абитуриентов по математике незначительны. ...Более вредными представляются недостатки более общего характера... Многие из окончивших курс гимназии и вступивших в университет, не выносят из гимназии интереса к науке...

6. Я не думаю, чтобы степень умственной зрелости, интереса к учению и объем познаний молодого человека, желающего вступить в университет, мог быть определен кем-либо точнее, чем воспитавшими его наставниками. ...Надо признать, что проверочный экзамен... едва ли достигает своей цели правильного отбора гимназистов, пригодных для высшего образования. Такой отбор фактически делается и теперь, по окончании первого университетского курса, и я думаю, что он, во всяком случае, лучше достигает цели, чем тот экзамен, о котором говорится в вопросах комиссии..." [5].

Эти ответы вполне определяют отношение Б.К. Млодзеевского к состоянию и перспективам школьного образования, и не только математического. Приведенные выше материалы свидетельствуют, на наш взгляд, что роль профессора Б.К. Млодзеевского в совершенствовании школьного математического образования, безусловно, очень значительна, и его наследие требует тщательного изучения в педагогическом сообществе.

Библиографический список

1. *Волковский, Д.Л.* Из истории московских математических обществ [Текст] / Д.Л. Волковский // Вестник опытной физики и элементарной математики. – 1908. – № 459. – С. 63-67.
2. Устав Московского математического кружка [Текст] // Математическое образование. – 1912. – № 3. – С. 141-143.

3. Речь председателя Организационного комитета Б.К. Млодзеевского при открытии Второго всероссийского съезда преподавателей математики [Текст] // Математическое образование. – 1914. – № 1. – С. 1-4.
4. Совещания, происходившие в 1899 году в Московском учебном округе по вопросам о средней школе [Текст]. – М., 1899. – Вып. 3.
5. Совещания, происходившие в 1899 году в Московском учебном округе по вопросам о средней школе [Текст]. – М., 1899. – Вып. 6. – С. 77-81.

Работа отделения преподавателей математики Педагогического общества, состоящего при Императорском Московском университете (1898-1904)

В.М. Бусев

Введение

Конец XIX – начало XX вв. – время усиления интереса педагогической и научной общественности к проблемам начального и среднего образования. В этот период было проведено множество съездов, организовано немало комиссий, целью которых было выработать программу желательных изменений в начальной и средней школе. Обсуждались как масштабные изменения (например, создание новых типов школ), так и локальные (отдельные усовершенствования программ учебных предметов).

В самом начале этого периода, в 1898 г., при Московском университете было создано Педагогическое общество – первое в России общество, состоящее при университете, в задачи которого входила разработка проблем обучения и воспитания.

21 апреля 1897 ректор Московского университета П.А. Некрасов от имени Совета университета ходатайствовал перед попечителем Московского учебного округа об открытии Общества. Попечитель передал прошение министру народного просвещения И.Д. Делянову, который затребовал список его членов, и такой список был представлен. Также министру был представлен проект устава Общества, который после доработки членами Совета университета был отправлен обратно министру. Доработка заключалась в исправлении некоторых пунктов устава. Например, к пунктам, разрешающим обществу проводить публичные чте-

ния, съезды и выставки было добавлено "с надлежащего каждый раз разрешения".

Согласно уставу, Общество имело две цели: научную разработку вопросов педагогики и дидактики и содействие лицам, желающим посвятить себя педагогической деятельности, в подготовке к этой деятельности. Для достижения этих целей Общество имело право устраивать закрытые и публичные заседания, лекции, съезды, выставки, музеи и экскурсии, печатать свои труды. Во главе Общества находился председатель, который имел двух товарищей (помощников). При Обществе могли открываться отделения, в чью компетенцию входила бы разработка специальных вопросов (например, обучения математике).

На основе Устава были разработаны инструкции членам отделений. Предполагались следующие отделения: русского языка и словесности, преподавателей истории, естественно-историческое, физико-химических наук, по вопросам религиозно-нравственного образования и воспитания, преподавателей математики, по начальным училищам. Позднее (в конце 1899 г.) было открыто отделение преподавателей новых языков и (конец 1900 г.) отделение по вопросам семейного воспитания. Потом (начало 1902 г.) отделение преподавателей географии и (конец 1904 г.) – отделение по коммерческому образованию.

Обзор докладов членов Отделения преподавателей математики

Прежде чем перейти к характеристике вопросов, обсуждавшихся членами Отделения преподавателей математики, обратим внимание на то, что в числе учредителей Общества было немало видных математиков-педагогов: Н.В. Бугаев, А.К. Власов, Д.Д. Галанин, Н.Е. Жуковский, Л.К. Лахтин, Б.К. Млодзеевский.

29 октября 1898 г. была утверждена инструкция членов Отделения преподавателей математики, а на следующий день состоялось первое заседание, на котором председателем Отделения был избран Б.К. Млодзеевский, его товарищем Ф.С. Коробкин (с 1900 г. вместо Ф.С. Коробкина товарищем стал Д.Д. Галанин), секретарями – Д.Д. Галанин и А.С. Алферова (с 1899 г. вместо Д.Д. Галанина секретарем стал И.И. Чистяков). Собрания было решено проводить ежемесячно по пятницам.

В заседаниях принимали участие члены отделения – известные дореволюционные педагоги: М.Ф. Берг, А.К. Власов, А.М. Воронец, В.Я. Гебель, А.Ф. Гатлих, Ф.И. Егоров, К.К. Мазинг, Н.А. Рыбкин, И.И. Чистяков, А.Н. Шапошников, В.П. Шереметевский и др.

Каждое отделение должно было ежегодно предоставлять отчеты о своей деятельности, которые затем публиковались в сводных отчетах

Педагогического Общества. Ниже будут проанализированы отчеты Отделения преподавателей математики за 1898-1904 гг.

Большую часть докладов можно разделить на четыре группы: 1) научно-популярные (в том числе, по истории математики); 2) взгляд на элементарную математику с точки зрения высшей; 3) проблема построения математических курсов и реформа обучения математике; 4) отдельные усовершенствования программ и методики изложения предмета.

Рассмотрим некоторые доклады, относящиеся к первым трем группам.

Истории математики были посвящены доклады *А.Ф. Гатлиха* "Евклид и Джон Валлис" и "Н.И. Лобачевский (из теории параллельных линий)".

А.А. Дмитровский рассказал об истории числа π и привел доказательство его трансцендентности, данное Ф. Клейном.

Б.К. Млодзеевский сделал доклад о задаче трисекции угла. Он рассмотрел историю вопроса, дал, следуя Ф. Клейну, доказательство невозможности трисекции угла в общем случае и показал, как с помощью некоторых приборов можно делить угол на 3 равные части.

Другой классической задаче – задаче об удвоении куба – был посвящен доклад *Д.Ф. Егорова*.

Упомянем еще о докладе *Б.К. Млодзеевского* "Несоизмеримость и иррациональность", в котором он дал сравнительный анализ теорий вещественного числа Дедекинда, Кантора и Вейерштрасса.

Тематика и содержание докладов показывают, что научный уровень заседаний был высоким – обсуждались результаты, которые были получены в математике незадолго до этого.

К первой группе докладов тесно примыкает другая – взгляд на элементарную математику с точки зрения высшей. Центральными здесь являются сообщения *Б.К. Млодзеевского* "Об отношениях" и "Основные понятия арифметики в средней школе". В первом из них докладчик проанализировал определения отношения, приводимые в учебниках тех лет, и показал, что они отличаются друг от друга, а иногда неточны. Б.К. Млодзеевский полагал, что удобно (вслед за Евклидом) смотреть на отношение не как на число, а как на величину, измеряемую числом. Второй доклад был посвящен соотношению между числом и величиной. По мнению Б.К. Млодзеевского, в основу обучения арифметике должно быть положено понятие о числе и связанное с ним понятие о счете.

Перейдем к докладам, посвященным проблемам обучения математике. По вопросам преподавания арифметики неоднократно выступал

Д.Д. Галанин. Основное его предложение – снизить теоретический уровень курса в I и II классах, отнеся теорию к III классу. В младших классах учеников следует знакомить только с производством арифметических действий и полученные знания прилагать к решению примеров и задач.

Против решения искусственных задач на сложные проценты выступил *А.Ф. Гатлих*, предложив изучать вместо них элементы теории вероятностей и статистики.

Аналогичный характер имели доклады по вопросам преподавания алгебры; в них видно стремление педагогов упростить современный им школьный курс алгебры, сделать его более близким ученику. Одна из таких попыток перестройки принадлежала *В.П. Шереметевскому*, который подготовил учебник алгебры, из которого прочел в заседаниях Отделения три главы. Целью его было написать такой учебник, в котором не было бы ничего лишнего и который был бы пригоден для самостоятельного освоения предмета. По мнению В.П. Шереметевского, на первый план в курсе алгебры должны быть выдвинуты уравнения, посредством которых ученик постепенно осваивает основы курса.

За упрощение алгебраических задач высказывался *Б.К. Млодзеевский.* Кроме того, он предлагал составлять и решать обратные задачи (в которых данные меняются с искомыми местами).

Упомянем еще о докладе *С.П. Виноградова* “Понятие о функции в элементарной алгебре”, в котором докладчик предложил ввести в курс математики средней школы понятие функции. Порядок изучения функций, по С.П. Виноградову, мог быть таким: линейная, квадратичная функции, обратная пропорциональность и тригонометрические функции.

В заседаниях отделения затрагивались и вопросы обучения геометрии. *Д.Д. Галанин* в ряде своих докладов выступал за введение пропедевтического курса геометрии. Он предлагал изучать этот курс в III классе. Основу такого курса, по Д.Д. Галанину, должно было составить черчение геометрических фигур с одновременным обсуждением некоторых их свойств. При этом можно вводить разного рода практические работы по измерению длин и объемов тел (последнее с помощью взвешивания).

Модернизировать обучение геометрии в старших классах предложил *А.А. Волков.* В существовавшем тогда курсе стереометрии много внимания уделялось задачам на вычисление, а свойства геометрических тел оставались в стороне, что приводило к слабому развитию пространственных представлений. Для устранения этого недостатка докладчик предложил рассматривать теоремы о взаимном расположении прямых и плоскостей на моделях геометрических тел. А для сокращения числа теорем об объемах использовать принцип Кавальери.

И.И. Жегалкин в докладе "О начальных теоремах стереометрии" предложил изменить порядок следования вопросов о перпендикулярности и параллельности прямых и плоскостей (сначала изучать параллельность). Это позволяло значительно снизить количество необходимых дополнительных построений, которые трудны для учеников.

Закончим наш обзор рассмотрением докладов о преподавании тригонометрии. *А.А. Волков* обратил внимание на то, что в начале современного курса тригонометрии учащиеся сталкиваются сразу с большим количеством новых понятий, что для них сложно. Он предложил модернизировать курс, сделав его концентрическим: ввести определения тригонометрических функций сначала для прямоугольных треугольников, затем заниматься их решением, после этого переходить к тригонометрической окружности и т.д.

В докладе "Новая метода изложения тригонометрии" *Н.А. Шапошников* предложил строить курс, широко привлекая понятие вектора. По его мысли, изложение начинается с прямоугольных треугольников, а при переходе к тупоугольным выясняется, что некоторые отношения и длины должны быть отрицательными. Затем излагаются основы векторного исчисления и продолжается развитие тригонометрии. Использование векторов позволяет легко вывести некоторые тригонометрические соотношения.

Общество в 1905-1907 гг.

В конце 1904 г. поменялось руководство Педагогического Общества: вместо ушедшего с поста председателя К.А. Андреева был избран приват-доцент Московского университета Н.А. Рожков. Судя по архивным документам, избранию нового руководства сопутствовала некая "манифестация", и попечитель округа П.А. Некрасов в секретном представлении на имя министра отметил, что "управление Педагогическом Обществом переходит в руки, не вполне надежные". По мнению П.А. Некрасова, новое руководство недостаточно компетентно для управления Обществом, а его политическая деятельность ставит вопрос о реорганизации или вообще закрытии Общества. Министр в своем ответе отказался принимать какие-то меры, сославшись на то, что это не входит в компетенцию министерства народного просвещения.

На протяжении 1905 г. характер деятельности общих собраний Педагогического Общества резко изменился. Стали обсуждаться политические вопросы. Так, в начале 1905 г. Педагогическое Общество внесло с Московскую думу предложение об организации городской милиции. В донесении попечителя министру от 2 апреля 1905 г. содержатся сведения о тематике докладов, которые были сделаны членами Педагогического Общества ("О законодательной власти и избирательном праве", "О партийных программах", "О правах союзов и стачек" и др.). При этом на заседания 22 и 26 марта "были допущены рабочие московских фабрик и заводов и в присутствии их на первом заседании было сделано сообщение М.М. Коваленского о книге Жореса по истории французской революции, а на втором заседании присутствовали, в качестве посторонних слушателей, учителя, учащаяся молодежь обоего пола высших и средних учебных заведений и рабочие, где обсуждался аграрный вопрос на революционной почве и, кроме того, постановлено вести пропаганду среди народа о введении в России конституционного правления".

С общей деятельностью руководства и некоторыми постановлениями были не согласны некоторые члены Общества, которые в марте 1905 г. вышли из его состава. Среди них Д.Ф. и Ф.И. Егоровы, Б.К. Млодзеевский и Н.А. Умов.

В результате регулярных представлений попечителя министру последний затребовал протоколы заседаний общих собраний Педагогического Общества. Председатель Н.А. Рожков всячески препятствовал выдаче протоколов, отказался вести с попечителем секретную переписку, а свой ответ П.А. Некрасову опубликовал в "Русских ведомостях" (5 мая 1905 г.). Это вывело попечителя из себя. В секретном представлении министру он написал: "По моему мнению, необходимо было бы предать суду за государственные преступления всю администрацию Педагогического Общества или, по меньшей мере, гг. Рожкова и Сакулина [товарища председателя. – *В.Б.*]; причем судебное исследование необходимо произвести со всей тщательностью, дабы установить вину более точным расследованием". Правда, в окончательный документ этот текст, по всей видимости, не вошел (он зачеркнут), что, однако, не меняло тона всего представления.

Недовольство деятельностью Педагогического Общества в канцелярии попечителя Московского учебного округа, в Министерстве народного просвещения и в Министерстве внутренних дел привело к появлению распоряжения о временном прекращении собраний Общества. Однако руководство не подчинилось, и собрания продолжались.

Последней каплей, вероятно, стало выражение Обществом протеста по поводу циркуляра министра народного просвещения о восстановлении экзаменов в средних учебных заведениях (их отмены добивались многие педагоги в конце XIX – начале XX вв.). Московский генерал-губернатор запретил обсуждение циркуляра, однако таковое состоялось в заседании 31 марта 1907 г. Ровно через четыре месяца 31 июля 1907 г. Совет министров рассмотрел представление министерства народного просвещения о закрытии Педагогического Общества и одобрил его.

Заключение

Как видно из сказанного, Педагогическое Общество существовало до середины 1907 г. В то же время отчеты опубликованы только за 1898-1904 гг. (причины не печатания отчетов в более позднее время очевидны). Возникает вопрос: какова же была дальнейшая судьба Отделения преподавателей математики? Можно утверждать, что педагоги-математики прекратили свою деятельность в рамках Педагогического Общества уже весной 1905 г. Во-первых, в редакционной статье, помещенной в первом номере журнала "Математическое образование", сказано, что Московский математический кружок (под руководством Б.К. Млодзеевского) возник в 1905 г. Во-вторых, председатель Отделения Б.К. Млодзеевский вышел из состава Общества в марте 1905 г. Маловероятно, чтобы Отделение продолжало работу без своего авторитетного руководителя. Таким образом, объединение математиков-педагогов, прекратив свою деятельность в рамках Педагогического Общества, возобновило ее почти сразу в новой форме – в форме Московского математического кружка.

Библиографический список

1. Отчеты Педагогического Общества, состоящего при Императорском Московском Университете за 1898-1904 гг. [Текст]. – М., 1899-1904.
2. Устав Педагогического Общества, состоящего при Императорском Московском Университете [Текст]. – М., 1898.
3. ЦИАМ. Ф. 418. Оп. 501. Д. 5. Дело о деятельности Педагогического Общества при Московском университете [Текст].
4. ЦИАМ. Ф. 418. Оп. 501. Д. 7. Дело о деятельности Педагогического Общества при Московском университете [Текст].
5. ЦИАМ. Ф. 459. Оп. 2. Д. 5095. Дело об учреждении при Московском

университете Педагогического Общества с приложением Устава и списка членов общества [Текст].
6. ЦИАМ. Ф. 459. Оп. 2. Д. 5857. Дело о временном прекращении собраний Педагогического Общества и о закрытии общества в связи с его революционной деятельностью с приложением газет: “Русские ведомости” за 14, 15, 28 марта 1905 г. [Текст].
7. ЦИАМ. Ф. 459. Оп. 2. Д. 6325. Дело о закрытии Педагогического Общества со сдачей всего его имущества на хранение в Московский Университет [Текст].

Саганский промежуток образования в России

О.О. Барабанов, Н.А. Юлина

Общепризнано, что честь создания системы первых общеобразовательных народных школ в России принадлежит Екатерине II (1762-1796). Но при этом многие факты этой истории остаются неизвестными широкому кругу историков и педагогов [9]. Так, лишь в общих чертах известно то, что система народного образования в России в последней четверти XVIII века строилась по австрийскому образцу Саганской системы образования [1, с. 59]. Из известных нам работ наиболее серьезный анализ этого вопроса представлен в работе Й. Матля (1975) [8].

Согласно Т.С. Поляковой [12], внедрение Саганской системы образования в России приходится на последнюю четверть первого периода (1701-1804) второй базовой эпохи (XVIII – начало XX вв.) развития математического образования в рамках Российской империи. Весь первый период характеризуется, в частности, тем, что в его рамках “были заложены патерналистские традиции отечественного математического образования как со стороны государства, так и со стороны математики как науки”. Однако, в наибольшей степени эти особенности первого периода падают именно на его последнюю четверть – на Саганский промежуток (1782 – около 1802), который обеспечил плавный переход ко второму периоду “так называемой классической системы школьного математического образования”. При этом различие (революционное) образовательных парадигм Саганского промежутка и предшествующего отрезка времени намного больше, чем различие (эволюционное) образовательных парадигм “классического” второго периода и предшествующего ему Саганского промежутка. В связи с этим уместно заново поставить вопрос о временно́й границе между первым и вторым периодами второй базовой эпохи развития математического образования в России. Здесь возможны три варианта решения этого вопроса.

Вариант 1. Сохранить периодизацию Т.С. Поляковой с особым выделением Саганского промежутка в рамках первого периода.

Вариант 2. Завершить первый период 1782 годом.

Вариант 3. Выделить Саганский промежуток в отдельный период.

Из всех возможных периодизаций наибольший смысл приобретет та, которая, во-первых, будет наиболее подкреплена неопровержимыми историческими фактами и, во-вторых, будет признана научным сообществом как наиболее удачная. Очевидно, что для решения поставленного выше хронологического вопроса Саганский промежуток требует специальных исследований, чего на настоящий момент явно не достаточно. Несмотря на то, что нас, в первую очередь, интересует математический аспект, главенствующую роль в исследовании Саганского промежутка должен играть системный фактор общих и принципиальных изменений образовательной парадигмы.

После основополагающих работ Декарта (1596-1650) о методах исследования, оказавших глубочайшее влияние на всю европейскую цивилизацию, вопрос переноса картезианских идей на платформу широкого образования стал чрезвычайно насущным, но потребовалось время, чтобы церковь смирилась с новациями Декарта и негласно разрешила светским властям Европы заняться самостоятельной образовательной политикой.

Образовательная реформа Марии Терезии (1717-1780) в Австрии. Ко времени вступления Марии Терезии на престол (1740) образование и печать в Австрии находились под полным контролем иезуитов. Мария Терезия полагала, что новое время и модернизация государства требуют значительного числа образованных специалистов. Поэтому одной из главных ее забот была реформа образования, от начального до высшего. Австрия одной из первых стран в мире приступила к созданию государственной системы образования, в целом просуществовавшей вплоть до 1918 г. Главный же смысл реформы состоял в унификации образования и в переносе контроля над образованием из церковных в государственные структуры. Общий контроль за проведением реформы образования, от начального до высшего, императрица поручила своему врачу, голландцу Герхарду ван Свитену. Для проведения реформы непосредственно в области народного образования Главным исполнителем в Образовательной комиссии по немецким землям, находящимся под управлением императрицы, в 1774 был назначен аббат Иоганн

Игнац Фельбигер, уже известный в Европе своими образовательными инициативами и педагогическими трудами. В уставе школ, разработанном И. Фельбигером, закреплялись классно-урочная система обучения, совместное обучение мальчиков и девочек, использование одинаковых учебников, прописей и т д. Большое внимание придавалось катехизации учебного материала – устной его проработке и закреплению в процессе беседы. Для облегчения запоминания учебного материала детьми И. Фельбигер предложил таблицы и буквенный или табличный метод: все, подлежащее запоминанию, сводилось в таблицы, где главные факты, понятия и определения обозначались с помощью первых букв соответствующих слов. Система И. Фельбигера способствовала организации начального обучения и распространению грамотности на обширных территориях австрийской империи.

Об основоположнике Саганской системы образования, аббате монастыря при городке Заган (Жагань, польск.) Иоганне Игнаце Фельбигере и о его педагогической системе следует сказать подробнее.

О Фельбигере. И. Фельбигер (Felbiger) [1724, Глогау; 1788, Пресбург (Братислава)] является выдающимся педагогом, реформатором австрийской системы образования. Он родился в семье начальника почтовой службы. Окончил теологический факультет университета в Бреслау (ныне Вроцлав, Польша). Испытывая затруднения после смерти родителей, в 1744 году И. Фельбигер устроился на работу частным учителем. В 1746 г. он поступил в монастырь ордена августинцев в Загане (Силезия), в 1758 г. стал аббатом этого монастыря и попечителем местных школ. В ходе своего посещения Берлина в 1762 г. Фельбигер познакомился с буквенно-табличным методом и стал его страстным пропагандистом. Им открыты несколько семинарий для подготовки учителей, он способствовал расширению и упорядочению сети католических народных школ, улучшению учебной работы в них. Предложенная И. Фельбигером система школ была закреплена в школьном уставе для Силезии (1765). В 1774 г. он возглавил проведение школьной реформы в Австрии и в том же году разработал *“Всеобщий школьный устав для немецких нормальных, главных и тривиальных школ во всех имперских наследственных землях”*, который регламентировал типы школ и организацию обучения в них. Согласно *“Всеобщиему школьному уставу”* И. Фельбигера, в каждом населенном пункте была открыта тривиальная школа для обучения детей 6-12 лет грамоте, счету, религии и морали. Кроме того, им сообщались некоторые практические сведения о сельском хозяйстве и домоводстве. В городах и при монастырях были созданы главные школы со сроком обучения 3-4 года. Их учебный план включал все предметы тривиальных школ, а также начальные курсы истории, географии, естествознания, геометрии, строительного и землемерного дела, латинского языка. В каждой области или провинции были открыты нормальные школы, где в большем объеме изучались те же учебные предметы, что и в главных школах. Обучение в тривиальных школах велось на родном языке, в главных – частично на немецком, в нормальных – только на немецком языке.

И. Фельбигер является автором 78 работ, в основном по педагогике. Основополагающим трудом И. Фельбигера является "*Methodenbuch für die Lehrer der deutschen Schulen*" (1775), в переводе на русский язык *"Руководство для учителей немецких школ"* (1783). В 1783 году была также опубликована в России книга И. Фельбигера *"О должностях человека и гражданина"* [14], переведенная с немецкого языка и отредактированная при участии императрицы. Состоящая из многочисленных правил поведения и советов по ведению домашнего хозяйства, она стала своего рода энциклопедией нравов и жизненных установок, много раз переиздавалась и использовалась как учебное пособие для народных училищ [7].

"Руководство учителям" И. Фельбигера. Российская адаптация основного методического труда И. Фельбигера *Methodenbuch für die Lehrer der deutschen Schulen* под названием *"Фельбигер И.И. Руководство учителям перваго и втораго класса народных училищ Российской империи, изданное по Высочайшему повелению царствующий императрицы Екатерины Второй (пер. с немецкого Ковалева, переработка и сокращения Янковича). – СПб., 1783"* [13] (далее для краткости просто *"Руководство учителям"*) обнаружена нами в отделе редких книг Музея книги РГБ.

С учетом того, что согласно Ю.М. Колягину [6], первым русским методистом является князь М.М. Щербатов (1733-1790), сочинения которого были изданы только в 1896-1898 гг., можно утверждать, что *"Руководство учителям"* И. Фельбигера стало первым учебно-методическим пособием, изданным на русском языке.

Целью *"Руководства учителям"* было, чтобы *"учители"* "*предписанные им должности везде наблюдали единообразно*" [13]. Это пособие для учителей состояло из четырех частей: учебный способ, учебные предметы, должности учителя и школьный порядок, *"который учителям знать должно"* [13].

В первой части говорится о новом методе учения – совокупном наставлении, которое, по мнению автора, позволяет повысить эффективность обучения, *“дабы юношество способнее, порядочнее и основательнее было наставляемо”* [13, с. 2]. Здесь же рассмотрены методические приемы “*вопрошения*” и заполнения таблиц.

Во второй части рассмотрены указания учителям для преподавания конкретных учебных предметов (познание букв, склады, чтение порознь и употребление предписанных книг, письмо, арифметика). В частности, при преподавании арифметики учителю рекомендуется начинать обучение с небольших примеров, на каждое правило решать по несколько примеров, “*дабы ученики могли приобресть в решении оных тем более проворства и способности*” [13, с. 72], обязательно проверять домашнее задание, добиваться, чтобы ученик понимал, как выполнил тот или иной пример, а не просто получил правильный ответ. Примеры, которые учитель задает ученикам, обязательно должны быть им самим заранее прорешены и записаны в специальной тетради. Такую организацию материала можно считать прототипом конспекта урока. Прорешав достаточное число задач, *“когда ученики приобрели уже в различных правилах довольное искусство, тогда должен учитель предложить им несколько хороших и состоянию их приличных задач, не сказывая однако, по какому правилу какую задачу решить должно”* [13, с. 76]. Говоря современным языком, учитель должен провести обобщающий урок, на котором повторяются решения различных типов задач.

Если ученики не усвоили материал, то учитель должен дома проанализировать ситуацию, понять, почему так получилось, и “*выискивать хорошие средства, как бы побудить отставших в следующие часы к большему вниманию, и удержать при этом прилежных*” [13, с. 77]. То есть учителю предлагалось обдумать, как сформировать положительную мотивацию учения.

В третьей части *“Руководства учителям”* идет речь о “*звании, качествах и поведении учителя”*. Рассматривается вопрос о том, как учителю быть *“беспристрастным и снисходительным”*. В этом вопросе И. Фельбигер исходит из принципа индивидуального подхода: *“По различию учеников должен и учитель поступки свои различно устроять”*. Приводятся методические рекомендации учителю в зависимости от личности ученика, которую И. Фельбигер характеризует пятью параметрами: состояние, пол, способности к учению, характер и поведение. Для примера в оригинале читаем следующее:

“В рассуждении способностей к учению:

а. Бывают такие дети, которые все скоро понимают, хорошо помнят и выученное употреблять умеют.

1) Сих не должен учитель упражнять многими, бесполезными или такими предметами, которые не предписаны; он должен их увещевать упражняться в выученном, и делать понятия свои час от часу основательнее.

2) Для дальнейших успехов сих особливою способностию одаренных детей, не должен он покидать других того же класса, которые за ними успевать не могут.

3) Он должен вперять в них то правило, что кому много поверяется, от того много и требуется; и что не довольно того, чтобы много знать; но надобно еще по знанию своему и дела свои ко благу других располагать и дарований своих в бездействии не оставлять.

б. Бывают такие дети, которые одарены хорошею памятью, но имеют мало рассуждения.

1) Учитель не должен упражнять сих учением наизусть, но должен учить их мыслить и понимать хорошенько предметы.

2) Таковым ученикам пособлять он должен чувственными представлениями, примерами и сравнениями.

3) Он должен заставлять их пересказывать выученное их собственными словами.

4) Должен их чаще спрашивать и так, чтобы им был при том случай думать.

в. Бывают ученики, у которых слабая память.

1) Сим должен он, как можно меньше задавать учить наизусть.

2) Должен употреблять для них прилежно изображение через начальные буквы и таблицы.

3) Возбуждать их пристойными средствами ко вниманию, и почаще толковать каждому их них особо.

г. Бывают тупые дети, которые мало понимают и помнят.

1) Сим стараться он должен вперить токмо самое нужнейшее.

2) Употреблять все возможные средства для облегчения им учения.

3) Не поступать с ними сурово, и не отнимать у них строгостью охоты к учению" [13, с. 88-90].

В четвертой части руководства говорится о школьном порядке, то есть о том, как организовать процесс обучения в школе, как вести школьную документацию.

План Екатерины II. В начале царствования Екатерины II даже среди дворян немногие имели самое элементарное образование. Поэтому Сенат в своем наказе законодательной Комиссии 1767 года указывал на необходимость создания сети просветительных учреждений, ссылаясь на то, что люди в провинции пребывают в невежестве из-за нехватки учебных заведений и недостаточного уровня педагогических кадров [2]. Однако наказ Сената исполнялся очень трудно и медленно. Например, в 1772 г. власти потребовался специальный законодательный акт для того, чтобы принять на содержание за счет действительного статского советника И. Бецкого четверых воспитанников из бедных дворянских семей в сухопутном кадетском корпусе и пять воспитанниц из тех же семей в обществе благородных девиц [7, с. 106]. Вообще, согласно исследованию И.Н. Курочкиной, законодательные акты играли первостепенную роль в организации сети воспитательно-образовательных учреждений в России [7, с. 107].

Екатерина II, следившая за всеми новыми явлениями в культуре Западной Европы, была знакома со стремлениями правительств Пруссии, Австрии и других западноевропейских стран усовершенствовать народное образование. По этому вопросу она переписывалась с известным европейским просветителем Фридрихом Мельхиором Гриммом [4], немецким ученым, жившим и работавшим в Париже.

Й. Матль [8, с. 76-81] считает, что решающее влияние на реформы Екатерины II в области народного образования оказал Франц Ульрих Теодор Эпинус, бывший астроном Берлинской обсерватории. Эпинус, поступивший на службу в русскую Академию наук, будучи личным советчиком императрицы, высказался за австрийскую модель народных школ. Основной предпосылкой для реализации австрийской модели в российских условиях Эпинус назвал подготовку учительских кадров. Эпинус предложил основать три или четыре нормальные школы в Петербурге, Москве, Казани и Киеве, учредить общегосударственное школьное правление для пересмотра австрийского школьного плана и его приспособления к русским условиям, перевести и переработать австрийские учебники.

На основании предложения Эпинуса, как пишет Й. Матль, “*Екатерина II решила провести в России школьную реформу по австрийскому образцу, тем более что великий князь Павел Петрович после своего путешествия по Европе 1781-1782 гг. отозвался об австрийской школьной реформе как о самой удачной*”.

Это суждение Й. Матля (Гарц, Нижняя Саксония) требует уточнения. Справедливее думать, что немец Эпинус (1724-1802)[1] только спо-

[1] Академик Императорской академии наук (принял российское подданство в 1765 году, с 1765 года преподавал математику и физику наследнику престола, будущему императору Павлу I).

собствовал в 70-х годах интересу императрицы к австрийской системе образования. Само решение о переносе австрийской системы в Россию сложилось у Екатерины II не сразу и не только благодаря Эпинусу. Известно, что во время встречи Екатерины II с австрийским императором Иосифом II в Могилеве в мае 1780 года обстоятельно обсуждался также вопрос о нормальных школах, и 29 июня того же года было отправлено в Россию 29 австрийских учебников для нормальных школ. По-видимому, в 1780-1781 гг. Екатерина II сначала сама ознакомилась с этими учебниками. Учебники были одобрены, а также был одобрен план образовательной реформы, разработанный Эпинусом, и в начале 1782 г. в Вену поступила просьба русской императрицы направить в Россию несколько *"иллирских"* (т.е. южнославянских) учителей, которые смогли бы приступить к проведению школьной реформы. Вдохновителю и административному руководителю австрийской школьной реформы, И. Фельбигеру, было дано право подбора кандидатов. Логичным образом выбор И. Фельбигера пал на успешного директора школ в Темешаварах, Ф.И. Янковича (1741-1814), который был некоторым образом связан с Россией (он был православным [5, с. 247] сербом из местечка Мириево). Может быть, это было последнее серьезное дело, исполненное аббатом Иоганном Фельбигером на высокой государственной службе, поскольку сын Марии Терезии, Иосиф II (1741-1790), вскоре удалил И. Фельбигера в провинцию (в Братиславу).

Как видим, решение о переносе австрийского образовательного опыта в Россию было принято Екатериной II в начале 1782 года, при этом учитывался, разумеется, и отзыв великого князя Павла Петровича, который ускорил проведение в жизнь уже созревшего намерения императрицы.

После принятия решения о реформе образования указом от 7 сентября 1782 г. Екатерина II организовала Комиссию об учреждении народных училищ. Руководителем комиссии был назначен П.В. Завадовский, будущий первый министр народного просвещения. В состав комиссии вошли академик Ф.У.Т. Эпинус и тайный советник П.И. Пастухов. Исполнителем плана Эпинуса по внедрению системы Фельбигера в Россию стал серб Федор Янкович.

О Янковиче. Ф.И. Янкович де Мириево (1741-1814) происходил из древнего сербского рода, переселившегося в середине XV в. в Венгрию. Изучал в венском университете юриспруденцию, государственные и экономические науки, поступил секретарем к темешварскому православному епископу. С 1773 г. Ф.И. Янкович принимал участие в осуществлении образовательной реформы, предпринятой императрицей Марией Терезией. Задачей Ф.И. Янковича, как директора училищ в темешварской провинции, населенной православными сербами, было приспособление новой учебной системы к местным потребностям и условиям. В 1774 г. он получил дворянское достоинство, и к фамилии его было присоединено название Мириево его родового поместья в Сербии. После 1776 г. он перевел на сербский язык немецкие руководства, введенные в новые школы, и составил руководство для учителей своей провинции под заглавием "*Ручная книга, потребная магистрам иллирийских неуниатских малых школ*".

Оказавшись в 1782 г. в России, Ф.И. Янкович не был назначен действительным членом Комиссии по учреждению училищ, но работал в ней в качестве эксперта. На него легла основная тяжесть нового предприятия: составление общего учебного плана новой системы, организация учительской семинарии, перевод и переработка учебных руководств. При этом, как писал С.В. Рождественский, "*Из трех первых членов действительных членов Комиссии в курсе дела находился один лишь академик Эпинус. Чем объясняется выбор Завадовского и Пастухова, решить не беремся*" [11, с. 555]. Лишь в 1797 г. Ф.И. Янкович был назначен действительным членом Комиссии. Больше всего труда положил Ф.И. Янкович на перевод с немецкого и составление учебников для народных училищ. Более половины учебников составлено было или самим Ф.И. Янковичем, или по его плану и под его руководством, или, наконец, переделано им, и все они были одобрены императрицей, на утверждение которой они были представляемы все, за исключением математических.

Ход реформы в России. Для реализации задуманной Екатериной II школьной реформы в России нужно было открывать школы в малых городах. С целью обеспечения малых народных училищ учительскими кадрами в Санкт-Петербурге была создана первая учительская семинария, директором которой был назначен Ф.И. Янкович. В 1783 году в первый набор этой семинарии были отозваны 150 лучших семинаристов богословских и философских факультетов духовных академий и семинарий России.

Подобно австрийской реформе, российская власть во всю использовала отечественное духовенство и также, подобно австрийской реформе, преследовала косвенной целью устранение церковных структур из области образования, которое переходило под государственный контроль. В Австрии побочным эффектом образовательной реформы Марии Терезии стало закрытие Ордена иезуитов. В России произошло драматическое вытеснение свободной дьячковой школы. Этот процесс сопровождался скрытым недовольством, а то и ропотом вполне добропорядочных слоев российского населения. Об этом хорошо написано у П.Ф. Каптерева [5, с. 269-272], который приводит примеры полицейского вмешательства в вопросы организации образования даже в столице. Все-таки в столицах реформа продвигалась относительно успешно. Так, в Москве Главное народное училище было открыто 22 сентября 1786 года. Это училище стало первой в России общеобразовательной средней школой, широко открывшей свои двери детям обоего пола, всех сословий, не исключая крепостных крестьян [15]. В первые годы функционирования Московского Главного народного училища весь учебный процесс для нескольких сотен учащихся обеспечивали только 4 преподавателя, однокурсники по Учительской семинарии: Петр Дружинин (по 400 рублей жалования в год), Тимофей Осиповский (по 400 руб.), Григорий Фролов (по 350 руб.), Федор Благолепов (по 150 руб.). В обязанности этих преподавателей дополнительно вменялись, как сейчас бы сказали, курсы повышения квалификации и аттестация учителей народных училищ, частных школ и даже домашних учителей [15, с. 130]. При этом Т.Ф. Осиповский вел наиболее интеллектуальные предметы, как то: латинский язык во всех четырех классах училища (с нагрузкой 12 часов в неделю), русская грамматика в третьем и четвертом классах (6 часов в неделю), математические предметы, к которым, кроме арифметики с алгеброй, относились механика, физика, геометрия и архитектура – также в двух последних классах – (10 часов в неделю) [3, с. 19-23].

Как шла реформа образования в целом, можно судить по графикам на рисунке. Графики, построенные по авторитетным данным П.Ф. Каптерева, показывают рост числа школ, учащихся и учителей за 1782-1800 годы [5, с. 255]. Чтобы проследить корреляции данных, были введены масштабные коэффициенты, связывающие базовую функцию “число школ” $N = N(s)$, где s – год, с тремя другими (числом мальчиков, числом девочек, числом учителей) по следующим формулам:

$$b = k_b \cdot N \ - \text{ приведенное число мальчиков, где}$$

$$k_b = \frac{\text{Среднее число мальчиков по годам}}{\text{Среднее число школ}};$$

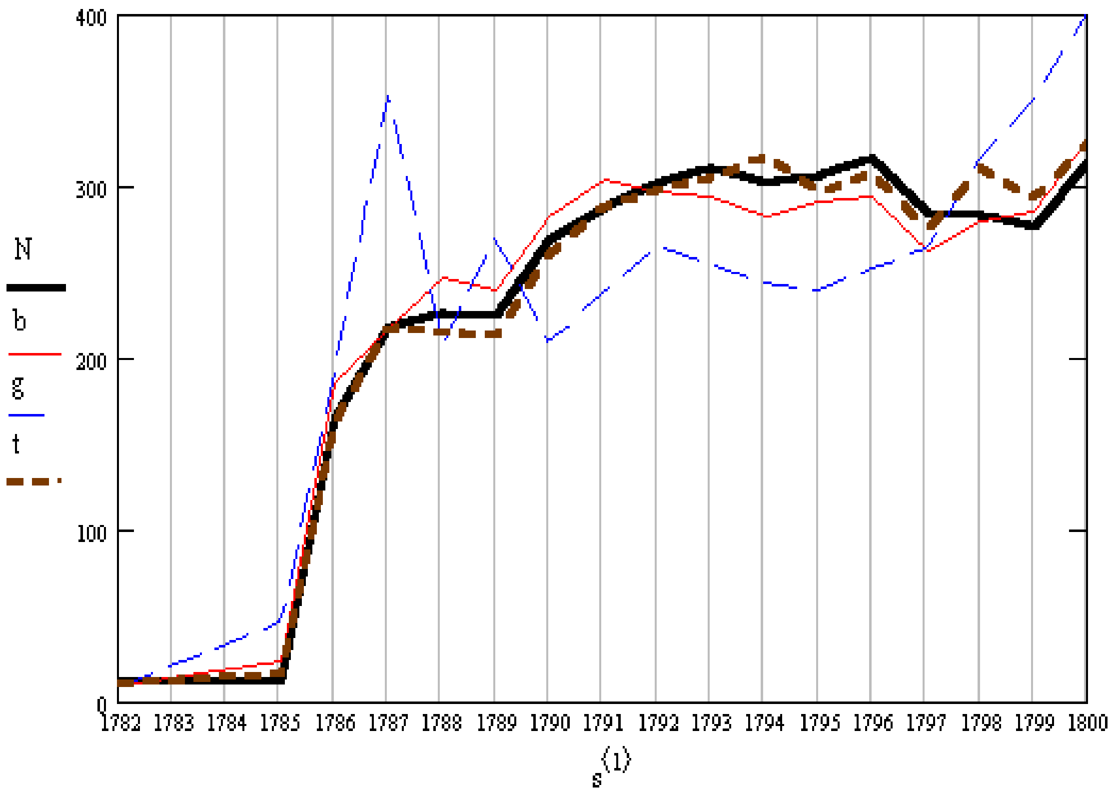
$$g = k_g \cdot N \ - \text{ приведенное число девочек, где}$$

$$k_g = \frac{\text{Среднее число девочек по годам}}{\text{Среднее число школ}};$$

$$t = k_t \cdot N \ - \text{ приведенное число учителей, где}$$

$$k_t = \frac{\text{Среднее число учителей по годам}}{\text{Среднее число школ}}.$$

Итоги реформы. Графики, приведенные на рисунке, подтверждают цитату из работы В.К. Новика [10]: "Упорным рачением" Комиссии к 1791 г. были созданы школы во всех губерниях и "земле донских казаков" – Россия встала в строй держав с государственной системой просвещения". Однако, как писал П.Ф. Каптерев, *"австрийский план народного образования был осуществлен у нас в весьма ограниченных размерах"*, и "*училища заводились исключительно по городам, а не по селам, и то довольно туго: из 500 городов, бывших в России в начале царствования Александра I, школы существовали лишь в 254. В царствование императрицы Екатерины II было учреждено 223 учебных заведения, что для обширной империи с 26 миллионами жителей по тогдашнему исчислению (не включая в это число дворянства, духовенства, войска, придворных и гражданских чинов, ученых, кочевых народов и разных иностранных жителей и поселенцев), было очень мало"* [5, с. 254-255]. Позволим себе смягчить последнюю оценку знаменитого ученого. В результате реформы Марии Терезии в империи с населением около 25 млн. было учреждено около 600 учебных заведений. В результате аналогичной реформы Екатерины II в империи с 30 млн. жителей было учреждено примерно в три раза меньше учебных заведений, но по плотности населения Австрийская империя во много раз превосходила империю Российскую. Следовательно, проигрывая в целом австрийской реформе, российская реформа была с ней соизмерима. В оправдание отставания России следует назвать и ее заведомо худшие начальные условия. Например, когда в 1772 г. Орден иезуитов был запрещен в Австрии, Мария Терезия воспользовалась его огромными богатствами для финансирования национальной системы начального образования (1774). Таких счастливых возможностей у Екатерины II не было. Незавершенность и узость (безучастность к университетам) российской реформы 1782 года потребовали новых изменений. Однако они не были бы возможны, если бы, как результат Саганского промежутка, в России не появился широкий слой грамотных граждан и даже определенное количество людей с непосредственным интересом к наукам. Только этим можно объяснить широкий спектр учебной математической литературы, появившейся в России в конце XVIII и в первые годы XIX вв. В качестве примера такой литературы приведем знаменитые два тома "Курса математики" Т.Ф. Осиповского (1801, 1802), в которых он творчески продолжает методические идеи Л. Эйлера. Эти и другие обстоятельства привели, в конечном счете, к завершению Саганского образовательного промежутка в начале царствования Александра I, что выразилось в выстраивании многоступенчатой системы образования на уже подготовленном надежном основании.



Библиографический список

1. *Белявский, А.* Исторический очерк развития элементарной школы [Текст] / А. Белявский. – Глухов, 1887.
2. *Бочкарев, В.Н.* Культурные запросы русскаго общества начала царствования Екатерины II по материалам законодательной комиссии 1767 г. [Текст] / В.Н. Бочкарев. – Петроград, 1915.
3. *Гобза, Г.* Столетие 1-й Московской гимназии. 1804-1904 гг. Краткий исторический очерк [Текст] / Г. Гобза.– М., 1903.
4. *Грот, Я.К.* Заботы Екатерины II о народном образовании по ее письмам к Гримму [Текст] / Я.К. Грот // в кн.: *Грот Я.К.* Труды. – СПб., 1901. – Т. IV.
5. *Каптерев, П.Ф.* История русской педагогии [Текст] / П.Ф. Каптерев. – 2-е изд., пересм. и доп. – Петроград, 1915.
6. *Колягин, Ю.М.* Русская школа и математическое образование: Наша гордость и наша боль [Текст] / Ю.М. Колягин. – М.: Просвещение, 2001.

7. *Курочкина, И.Н.* Формирование поведенческой культуры русского общества второй половины XVIII века [Текст] / И.Н. Курочкина // Общественные науки и современность, 1999. – № 2. – С. 103-111.
8. *Матль, Й.* Ф.И. Янкович и австро-сербско-русские связи в истории народного образования в России. XVIII век [Текст] / Й. Матль // Русская литература XVIII века и ее международные связи. - Л.: Наука, 1975. – Вып. 10.
9. *Московкин, Л.В.* Влияние австрийской педагогики на становление российской системы образования в XVIII веке [Текст] / Л.В. Московкин // Mitteilungen für Lehrerinnen und Lehrer slawischer remdsprachen (Red. Dr. Bernhard Seyr), NR. 94, DEZEMBER 2007. – S. 14-17.
10. *Новик, В.К.* Академик Франц Эпинус (1724-1802): краткая биографическая хроника [Текст] / В.К. Новик // ВИЕТ, 1999. – № 4.
11. *Рождественский, С.В.* Очерки по истории систем народного просвещения в России в XVIII-XIX веках [Текст] / С.В. Рождественский. – СПб., 1912. – Т. 1.
12. *Полякова, Т.С.* Периодизация истории отечественного математического образования [Текст]: [электронный ресурс] // Т.С. Полякова. – Полином, 2009. – № 1. – С. 10-17.
13. *Фельбигер, И.И.* Руководство учителям перваго и втораго класса народных училищ Российской империи, изданное по Высочайшему повелению царствующий императрицы Екатерины Второй [Текст] / И.И. Фельбигер; перевод с нем. Ковалева; [переработка и сокращения Янковича]. – СПб., 1783.
14. *Фельбигер, И.И.* О должностях человека и гражданина [Текст] / И.И. Фельбигер. – СПб., 1783.
15. *Эйнгорн, В.* Московское главное народное училище в конце XVIII в. [Текст] / В. Эйнгорн // Журнал Министерства народного просвещения, 1910. – Ч. XXVI, март. – С. 129-168.

Курс теории вероятностей в Демидовском высшем учебном заведении города Ярославля (XIX – начало XX века)

Е.И. Щукин

Демидовский вуз города Ярославля – Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова – был основан в 1803 году по инициативе и на пожертвованные им средства Павлом Григорьевичем Демидовым, правнуком знаменитого Никиты Демидовича Демидова, организатора первых уральских металлургических заводов [1]. Еще мальчиком Павел – вместе со своими братьями Александром и Петром – был отправлен на учебу в Европу. 13-летнее(!) обучение в европейских академиях и университетах сопровождалось знакомством с европейской культурой, посещением многих стран Европы. Возвратившись (в возрасте 23 лет) в Россию, Павел Григорьевич отдает себя наукам и государственной службе. Основанный им в Ярославле вуз прошел несколько этапов своего развития: Ярославское высших наук училище (1803-1833), Демидовский камеральный лицей (1834-1869), Демидовский юридический лицей (1870-1917), который в августе 1918 года был преобразован в государственный университет. Но следует сказать, что уже с 1811 года аттестаты – тогда Ярославского высших наук училища – были приравнены к аттестатам университетов.

Каким же был курс теории вероятностей в Демидовском высшем учебном заведении? Отвечая на этот вопрос, прежде всего постараемся указать, каким он мог быть! А для этого заметим, что во время своего обучения в Европе (1748-1761) П.Г. Демидов (и его братья) познакомились со многими известными математиками, в частности, с Даниилом Бернулли (1700-1782) [2], который к тому времени уже систематически занимался вопросами теории вероятностей. Первая его работа по теории вероятностей датирована 1738 г.; последняя – 1778 г. [3]. Статья 1738 г., вышедшая в пятом томе петербургских "Комментариев" (хотя сам Д. Бернулли уже снова жил в Базеле), интересна тем, что использует и понятие математического ожидания, и новое понятие – моральное ожидание (хотя оно и свелось в конечном итоге к классическому представлению математического ожидания). Через 30 лет после выхода в свет первой статьи Д. Бернулли в "Новых комментариях" Петербургской академии появилась его статья "Попытка применения алгоритма бесконечно малых в теории вероятностей". Поясняя суть идеи на примерах, Д. Бернулли сперва пользуется обычным анализом, а затем переходит к применению алгоритма бесконечно малых. Это дает асимптотические формулы, пригодные лишь для случая больших значений определяющих параметров, но зато решение при этом подходе оказывается существенно более простым. Эта идея развивается в следующей статье (1770 г., снова Петербург, "Новые комментарии"). Наконец, в заключительном мемуаре по теории вероятностей "Наиболее вероятное значение среди нескольких расходящихся между собой наблюдений и устанавливаемое отсюда наиболее близкое к истине заключение" Д. Бернулли обсуждает вопрос об определении из наблюдений того значения координаты, при котором плотность распределения вероятности оказывается наибольшей, т.е., говоря современным языком, Д. Бернулли занимается вопросами теории случайных ошибок (он вводит в теорию ошибок нормальное распределение, рассмотренное им как асимптотическое, и приводит четкое разграничение погрешностей измерения на случайные и систематические).

Таким образом, можно предположить, что курс теории вероятностей в Демидовском высших наук училище вполне мог быть выдержан в духе идей Д. Бернулли. К сожалению, более точных данных на этот счет пока не найдено, но если учесть, что "рукописи не горят..."

Что же касается Демидовского камерального лицея, то здесь от предположений мы переходим к фактам: попечитель Московского учебного округа граф С.Г. Строганов (кстати говоря, фамилии Демидовых и Строгановых связаны родственно) поручил П.Л. Чебышеву (1821-1894) написать элементарный курс теории вероятностей для лицея, что и было выполнено П.Л. Чебышевым в 1845 году, когда он представил в качестве своей магистерской диссертации "Опыт элементарного анализа теории вероятностей" [4]: "Показать... основные теоремы исчисления вероятностей и главные приложения их, служащие опорою всем знаниям, основанным на наблюдениях и свидетельствах, – вот мысль, представленная мне для осуществления его сиятельством господином попечителем Сергеем Григорьевичем Строгановым... Сочинение мое, я надеюсь, заслужит внимание ученых как попытка осуществить мысль чрезвычайно полезную. До сих пор элементарные курсы теории вероятностей ограничивались только изложением, более или менее подробным, результатов, полученных путем высшего анализа. Дать возможность поверить все эти заключения анализом строгим и простым, доступным для большей части учащихся, есть большой шаг в способе элементарного изложения теории вероятностей". С современной точки зрения в работе рассмотрены классическое определение вероятности события, теоремы сложения и умножения вероятностей событий, формулы полной вероятности события и Байеса, формула Бернулли (теорема о повторении опытов), теорема Бернулли (закон больших чисел).

В 1870 г. Демидовский камеральный лицей был преобразован в Демидовский юридический лицей, каким он и оставался до октября 1917 года. В 1906 году в лицей был принят статистик Р.М. Орженцкий (1863-1923) [5], с 1907 возглавлявший кафедру статистики и создавший в лицее статистико-экономический кабинет. Он является автором "Учебника математической статистики” [6], в котором рассмотрены: 1) общие понятия; 2) значение теории вероятностей для статистического метода; 3) средние величины; 4) относительные числа; 5) корреляция; 6) функциональная зависимость рядов; 7) мера совпадения.

Все сказанное выше позволяет утверждать, что курс теории вероятностей и связанный с ним курс математической статистики в Демидовском высшем учебном заведении города Ярославля находились на высоком научно-теоретическом уровне, и накануне 1000-летия города Ярославля (2010 г.) мы имеем полное право говорить о 200-летии высшего математического образования в Ярославле.

Библиографический список

1. Альманах Международного Демидовского Фонда [Текст]. – М.: Издательский центр “Классика”, 2001. – № 1. – С. 7.
2. Демидовский временник [Текст]. Екатеринбург: издание Демидовского института, 2006. – Ч. II. – С. 136-137.
3. *Григорьян, А.Г.* Д.Бернулли [Текст] / А.Г. Григорьян, Б.Д. Ковалев. – М.: Наука, 1981. – С. 284-293.
4. Опыт элементарного анализа теории вероятностей [Текст]. Сочинение, написанное для получения степени магистра кандидатом Чебышевым. – М.: В типографии Августа Семена, на Кузнецком мосту, в доме Суровщикова, 1845.
5. Биографический сборник Демидовского университета [Текст]. Ярославль-Рыбинск: Изд-во “Рыбинский Дом печати”, 2008. – С. 152-154.
6. *Орженцкий, Р.М.* Учебник математической статистики. [Текст] / Р.М. Орженцкий. – СПб.: Юридический книжный склад и книгоиздательство “Право”, 1914. – № 28.

Педагогические труды С.А. Рачинского

С.В. Жаров

Сегодня мало кому из педагогов известно имя Сергея Александровича Рачинского. А между тем, по отзывам его современников, это имя мирового значения. Он не являлся переводчиком идеалов западноевропейского обучения, а был творцом самобытных русских идеалов просвещения, причем просвещения разностороннего. Его педагогические идеи постоянно сочетались с главной стороной обучения – воспитанием школьников.

Известный ученый, профессор Московского университета, доктор биологических наук, талантливый журналист, писатель и общественный деятель, своей научной карьере предпочел работу в сельской школе. Почему такая уникальная личность мало известна специалистам истории педагогики? Как произошло, что С.А. Рачинский из центра высшего образования уехал в провинцию преподавать математику в начальных классах? Много ли знаем мы об этом человеке? Между тем, жизнь С.А. Рачинского – это настоящий подвиг, яркий пример бескорыстия, любви и преданности делу воспитания и обучения детей.

Сергей Александрович Рачинский родился 2 мая 1833 г. в родовом поместье Татево Бельского уезда Смоленской области. Здесь, в окружении прекрасных лесов и полей, в стародворянской русской усадьбе, в центре которой находился большой дом с колоннами, проходило детство будущего ученого и великого педагога. Атмосфера детского дома была наполнена музыкой, поэзией, высоким искусством. В усадьбу часто съезжались известные поэты, музыканты и художники. Так притягателен и мил был семейный дом. Сергей Александрович с детства полюбил природу, простоту и искренность деревенской жизни. В ее размеренном покое он всегда находил силы для творческого вдохновения, осознания себя человеком, близким к природе и людям.

Именно любовь к природе и человеку привела 15-летнего Сергея на медицинский факультет Московского университета. Проучившись здесь два года, он перевелся на естественный факультет, который блестяще закончил в 1853 г., защитил кандидатскую диссертацию, а в 1866 году – докторскую. С 1858 года – профессор Московского университета. С.А. Рачинский много занимается научной и преподавательской деятельностью. Переводит на русский язык известный труд Чарльза Дарвина, являясь первым дарвинистом в России, но во втором издании введения к русскому переводу (неопубликованному!) он уже догадывался о несостоятельности этой теории. В 1872 году Сергей Александрович на пике своей карьеры покидает университет и уезжает в родной "барский дом" в Татев, где становится простым сельским учителем. Что привело его к детям? Неудовлетворенность научной карьерой? Но он в то время был известен и в России, и в Европе. Стремление быть ближе к природе? На эти вопросы уже никто не ответит, но случайное присутствие на уроке арифметики в местной школе изменило его судьбу. Неизвестно, сколько потеряла наука с его уходом, но Россия приобрела в его лице великого педагога. Бывший ученый окунается в педагогику. Кстати, местное начальство не разрешило ему учительствовать, пока он не прошел чиновничью волокиту и не сдал соответствующий экзамен.

С 1875 года Рачинский, оставив профессуру, всецело посвящает себя народной школе. Школа становится его домом, а дети – его семьей. На собственные деньги им было построено прекрасное по тем временам двухэтажное школьное здание, где он выделил для себя две маленькие комнатки и переселился из родного "барского дома". По словам Н.М. Горбова, последователя Рачинского, лишь утром уходил он в "барский дом" поздороваться с родными и выпить чашку кофе, а все остальное время было посвящено школе. В своих "Заметках о сельской школе" (СПб., 1883), напечатанных "по распоряжению обер-прокурора Святейшего Синода", Рачинский пишет о народной школе, как "училище благочестия и добрых нравов", чем она многие годы не была.

С.А. Рачинский впервые в России построил школу с интернатом или, как он сам называл, "сельскую школу с общежитием". В 70-80-е годы школа Татево была трех-четырехлетней. Обучалось всего 70 мальчиков. Затем она была преобразована в школу с повышенным уровнем преподавания. В ней изучались русский язык и словесность, арифметика с элементами алгебры, геометрия с элементами геодезии и черчения, физика, естествознание и отечественная история, славянский язык и Закон Божий. Специально для одаренных детей было добавлены курсы рисования, музыки и пения. Для будущих учителей читался курс педагогики, который тогда назывался "школой грамоты". Он подготовил для работы в сельских школах более 60 учителей. Многие ученики Сергея Александровича закончили учительские семинарии и стали народными учителями, продолжая сеять "разумное, доброе, вечное". Некоторые из юношей вышли в духовные звания. Последнее было связано с тем, что С.А. Рачинский состоял в переписке с главой православной миссии в Японии, ныне прославленным равноапостольным Николаем, архиепископом Японским.

На протяжении своей деятельности Рачинский построил свыше 20 начальных школ, 4 из которых содержал полностью. Он составил проект всеобщего народного образования, принятый за основу школьного строительства в Смоленской губернии. Опыт работы своих школ Рачинский обобщил в книге "Сельская школа", по выходе которой в 1891 г. был избран членом-корреспондентом Академии наук по отделению русской словесности. Материалы, рассказывающие о достижениях этих школ, были представлены на Всероссийской промышленной и художественной выставке в Нижнем Новгороде (1896 г.) и Всемирной парижской выставке (1900 г.). По их образцу были созданы многие школы в России и две школы-интерната в Англии.

Буквально за десятилетие количество народных школ выросло до 30, и каждой из них уделял большое внимание Рачинский. Одна из таких школ была устроена для девочек с теми же программами, но дополнительно изучалось рукоделие и ткацкое дело. С.А. Рачинский первым в своем уезде открыл школы для девочек, ввел совместное обучение девочек с мальчиками. Это объясняется взглядами педагога на роль женщины-матери в семейном воспитании детей. Он считал, что только образованная мать способна сформировать в детях жизненно необходимые навыки. Матери у русского народа отводилась огромная роль в нравственном воспитании детей. Пословицы "Какова матка, таковы и детки", "Что мать в голову вобьет, того и отец не выбьет" говорят о том, что так называемая "материнская школа" основательней отцовской.

В своих "Заметках о сельской школе" Рачинский пишет, что в сельских школах "необходимо обучение тем мастерствам, которые имеют прямое отношение к земледелию (плотничьему, столярному, кузнечному, слесарному, гончарному)".

Особого внимания заслуживает кропотливый труд Рачинского с одаренными детьми. Благодаря его помощи, получили дальнейшее образование такие талантливые художники, как Т. Никонов, И. Петерсон, Н.П. Богданов-Бельский. Т. Никонов стал портретистом. И. Петерсона С.А. Рачинский направил учиться в иконописную мастерскую в Троице-Сергиеву лавру. К Богданову Сергей Александрович относился как к родному сыну. Именно Рачинский распознал в пастушке, сыне одинокой батрачки, яркий талант художника. Для Н.П. Богданова-Бельского в доме Рачинских была устроена мастерская. Кто не знает таких полотен живописца, как "У дверей школы", "Устный счет", "Сочинение", "Ученицы", "Новички" и др. Прототипами героев стали ученики и учителя Татевской школы.

Литературное наследие С.А. Рачинского невелико по объему. Он печатал статьи в журналах "Русь", "Русский вестник", "Русское обозрение", "Народное образование", "Московские ведомости". Все эти 12 статей вошли в сборник "Сельская школа", который за последние десять лет XIX века выдержал четыре издания. Все программы народной (начальной) школы изложены в этом сборнике. Основное, что можно выделить, Рачинский защищал систему классического образования для народной школы. Он считал ее задачей формальное развитие ума помощью двух средств – языков (русского и церковно-славянского) и математики (арифметики). Далее этого он не шел, но предполагал, что при стечении благоприятных обстоятельств можно расширить эту программу введением дробей, элементарной геометрии, географии, отечественной истории и начатков экспериментальной физики.

Особое значение Сергей Александрович придавал устному счету. При обучении арифметика он прежде всего учил думать и рассуждать. Каждый пример имел аналитическую направленность. Он даже написал специальный учебник “1001 задача для умственного счета”, вышедший тремя изданиями еще при жизни автора. В дальнейшем публикуются еще две заметки – “Арифметические забавы” о мало известных свойствах делимости натуральных чисел и “Геометрические забавы” о составлении орнаментов из известных многоугольников.

Что касается взглядов на программы и приемы преподавания, то здесь уместно указать, что он не придавал значения различным усовершенствованным, особо выработанным приемам. Он требовал, чтобы учителя сами хорошо знали то, чему они должны обучать, а далее полагал, что чем проще они будут излагать, – тем лучше, лишь бы учили усердно.

Отличительной стороной устройства Татевской школы была ее воспитательная сторона, когда изучение церковно-славянского языка тесно сочеталось с чтением книг Священного Писания. “Все, что может содействовать развитию искренней религиозности и притом церковной, все, что может внести церковный элемент в самый обиход школы, — все это должно быть предметом самого заботливого внимания со стороны педагогов” [1]. В своих “Заметках” Рачинский формулирует основание народно-школьной педагогики таким образом, что наша школа “должна быть не только школой арифметики и элементарной грамматики, но, первее всего, – школой христианского учения и добрых нравов, школой христианской жизни. . . ”.

Кто он, Сергей Александрович Рачинский? Ученый, художник, учитель? Наверное, и тот, и другой, и третий. А главное – человек, самым высоким предназначением которого было любить детей и свое дело.

Библиографический список

1. *Горбов, Н.М.* [Текст] / Н.М. Горбов, С.А. Рачинский. – СПб., 1903.

50 лет на службе математическому образованию (к 50-летию научно-методического семинара И.К. Андронова)

В.Н. Шапкина, Е.И. Щукин

В октябре 1959 года в Академии педагогических наук РСФСР начал свою работу научно-методический семинар "Современные идеи в преподавании математики в СССР и за рубежом". Первый доклад "Классическая и техническая математика в их развитии и взаимной связи в науке, технике и школе" сделал его руководитель: член-корреспондент АПН РСФСР Иван Кузьмич Андронов (1894-1975). За 50 лет своей работы (16 лет при И.К. Андронове и 34 года уже без него) семинар внес большой вклад в решение трудной задачи усовершенствования математического образования. На заседаниях семинара обсуждались новые школьные программы по математике – советские, российские и зарубежные; делались обзоры научно-методических журналов, отечественных и зарубежных; докладывались результаты исследования роли выдающихся представителей отечественной культуры в развитии математического образования в зарубежных странах с выявлением передовых тенденций в преподавании математики и знакомством с деятельностью известных педагогов-математиков: В. Литцмана, Э. Кастельнуово, У. Сойера и др.; докладывалось о переводных работах по методике математики; обсуждались тематика и содержание факультативов как для учащихся школ, так и для студентов пединститутов.

В работе семинара принимали активное участие учителя, аспиранты, преподаватели пединститутов и других вузов нашей страны. Гостями семинара были педагоги-математики зарубежных стран, например, уже в первые годы работы семинара выступили с докладами профессора П. Иванов (Болгария), С. Крыговская (Польша), В. Махачек (Чехословакия), Ж. Папи (Бельгия).

Все новое, интересное стремился вынести И.К. Андронов на семинар. Особой содержательностью, глубиной анализа и оригинальностью постановки самой проблемы отличались сообщения И.К. Андронова. Им было прочитано 15 докладов, 15 глубинных исследований, проведенных в историко-методологическом ключе, которым он владел в совершенстве.

После его смерти (1975 г.) семинаром руководили его коллеги и ученики – профессора И.С. Бровиков, О.В. Мантуров, Г.Л. Луканкин; секретарем семинара продолжает быть ученица И.К. Андронова – доцент В.Н. Шапкина. Именно ученики И.К. Андронова – В.А. Садчиков, А.Г. Хармац, В.Н. Шапкина, В.Л. Шамшурин – сумели завершить и последнюю работу И.К. Андронова – его энциклопедический труд – монографию по истории развития математики "Трилогия предмета и метода математики". Треть труда Иван Козьмич успел издать при жизни в 1974 году; две трети монографии остались в рукописи, но все же – 30 лет спустя! – удалось завершить издание рукописи в виде двух книг – ч. II (2003 год) и ч. III (2004 год). Временной отрыв их от ч. I "Трилогии" побудил энтузиастов переиздать ч. I в 2004 году. И теперь мы имеем уникальное учебное пособие в единстве трех книг, где исторический анализ развития математики вытекает из описания жизни и деятельности ученых-математиков и педагогов – в их биографиях (а их более 70). За каждой страницей этого труда стоит глубокое знание вопроса, высокая культура и сильная личность автора, высказывающего свое страстное отношение к излагаемому – т.е. все то, что мы – ученики Ивана Козьмича Андронова – видели и на каждом заседании его научно-методического семинара, который вот уже 50 лет служит делу математического образования в нашей стране.

Сведения об авторах

1. *Абрамов Александр Михайлович* – член-корреспондент РАО, кандидат педагогических наук, советник издательства “Просвещение”, Москва.
2. *Алексеев Виктор Николаевич* – кандидат физико-математических наук, доцент Ишимского государственного педагогического института, Ишим.
3. *Алексеева Александра Кирилловна* – кандидат физико-математических наук, старший преподаватель Ишимского государственного педагогического института, Ишим.
4. *Аленина Татьяна Геннадьевна* – аспирантка Чувашского государственного педагогического университета, Чебоксары.
5. *Асланов Рамиз Муталлим Оглы* – доктор педагогических наук, профессор МПГУ, Москва.
6. *Балабаев Владимир Евгеньевич* – доктор физико-математических наук, профессор ЯрГУ, Ярославль.
7. *Барабанов Олег Олегович* – кандидат физико-математических наук, доцент Государственной технологической академии, Ковров.
8. *Бахусова Елена Васильевна* – директор Центра педагогических технологий ТНУ, кандидат педагогических наук, доцент, Тольятти.
9. *Башмаков Марк Иванович* – академик РАО, доктор физико-математических наук, профессор, С.-Петербург.
10. *Большаков Юрий Иванович* – кандидат физико-математических наук, доцент ЯрГУ, Ярославль.
11. *Бородин Александр Васильевич* – кандидат физико-математических наук, доцент ЯГТУ, Ярославль.
12. *Бусев Василий Михайлович* – сотрудник Научной педагогической библиотеки имени К.Д. Ушинского, Москва.
13. *Бычков Сергей Николаевич* – доктор философских наук, доцент МГУ, Москва.
14. *Воронцова Ольга Романовна* – кандидат технических наук, доцент Костромского государственного технологического университета, Кострома.
15. *Гильмуллин Мансур Файзрахманович* – старший преподаватель Елабужского государственного педагогического института, Елабуга.

16. *Городецкий Михаил Леонидович* доктор физико-математических наук, доцент МГУ, Москва.
17. *Горохова Светлана Константиновна* – старший преподаватель Брянского государственного университета, Брянск.
18. *Гришина Ольга Владимировна* – доцент Тамбовского государственного университета, Тамбов.
19. *Гушель Ревекка Залмановна* – старший преподаватель ЯГПУ, Ярославль.
20. *Данилова Вера Ильинична* – кандидат педагогических наук, доцент Пермского государственного педагогического университета, Пермь.
21. *Демидов Сергей Сергеевич* – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий сектором ИИЕТ РАН, Москва.
22. *Джахнаева Елена Николаевна* – доцент Калмыцкого государственного университета, Элиста.
23. *Жаров Сергей Викторович* – кандидат физико-математических наук, доцент ЯГПУ, Ярославль.
24. *Жуленев Сергей Викторович* – кандидат физико-математических наук, доцент МГУ, Москва.
25. *Зайниев Роберт Махмутович* – кандидат физико-математических наук, доцент Камской государственной инженерно-экономической академии, Набережные Челны.
26. *Зверкина Галина Александровна* – кандидат физико-математических наук, доцент Московского государственного университета путей сообщения, Москва.
27. *Зубова Елена Александровна* – ассистент Тюменского института нефти и газа, Тюмень.
28. *Зубова Инна Каримовна* – кандидат физико-математических наук, доцент Оренбургского государственного университета, Оренбург.
29. *Ивашев-Мусатов Олег Сергеевич* – кандидат физико-математических наук, доцент МГУ, Москва.
30. *Капустина Татьяна Васильевна* – доктор педагогических наук, профессор Елабужского государственного педагогического университета, Елабуга.
31. *Катержина Светлана Федоровна* – ассистент Костромского государственного технологического университета, Кострома.
32. *Колоскова Мария Евгеньевна* – аспирантка МГУ, Москва.

33. *Коновалова Лариса Викторовна* – кандидат физико-математических наук, доцент С.-Петербургского государственного архитектурно-строительного университета, С.-Петербург.
34. *Кусова Елена Валерьевна* – аспирантка МПГУ, Москва.
35. *Латышева Любовь Павловна* – кандидат педагогических наук, доцент Пермского государственного педагогического университета, Пермь.
36. *Лебедев Алексей Викторович* – кандидат физико-математических наук, доцент МГУ, Москва.
37. *Малова Ирина Евгеньевна* – доктор педагогических наук, доцент Брянского государственного университета, Брянск.
38. *Малых Алла Ефимовна* – доктор физико-математических наук, профессор Пермского государственного педагогического университета, Пермь.
39. *Маскаева Александра Михайловна* – РУДН, Москва.
40. *Медведева Наталья Николаевна* – доцент Хакасского государственного университета, Абакан.
41. *Митенев Юрий Андреевич* – ассистент Вологодского государственного педагогического университета, Вологда.
42. *Митенева Светлана Феодосьевна* – кандидат педагогических наук, доцент Вологодского государственного педагогического университета, Вологда.
43. *Монахов Вадим Макариевич* – академик РАО, доктор педагогических наук, МГГУ, Москва.
44. *Нараленкова Ирина Игоревна* – кандидат физико-математических наук, доцент Специализированного учебно-научного центра МГУ, Москва.
45. *Николаев Юрий Павлович* – ассистент Специализированного учебно-научного центра МГУ, Москва.
46. *Одинец Владимир Петрович* – доктор физико-математических наук, профессор РГПУ, С.-Петербург.
47. *Павлидис Виктория Дмитриевна* – доктор педагогических наук, профессор Оренбургского государственного аграрного университета, Оренбург.
48. *Петрова Елена Степановна* – доктор педагогических наук, профессор Саратовского государственного педагогического университета, Саратов.

49. *Пугина Лидия Вячеславовна* – кандидат физико-математических наук, доцент Московского государственного университета путей сообщения, Москва.
50. *Рожанская Мариам Михайловна* – доктор исторических наук, профессор, ведущий научный сотрудник ИИЕТ РАН, Москва.
51. *Розов Николай Христович* – член-корреспондент РАО, доктор физико-математических наук, профессор МГУ, Москва.
52. *Русаков Александр Александрович* – доктор педагогических наук, профессор МГГУ, Москва.
53. *Сергеева Татьяна Владиславовна* – аспирантка ЯрГУ, Ярославль.
54. *Сергеева Ирина Евгеньевна* – ассистент МПГУ, Москва.
55. *Симонов Рэм Александрович* – доктор исторических наук, профессор Московского государственного университета печати, Москва.
56. *Синкевич Галина Ивановна* – старший преподаватель С.-Петербургского архитектурно-строительного университета, С.-Петербург.
57. *Секованов Валерий Сергеевич* – доктор педагогических наук, профессор Костромского государственного университета, Кострома.
58. *Синчуков Александр Валерьевич* – кандидат педагогических наук, доцент МПГУ, Москва.
59. *Смирнов Евгений Иванович* – доктор педагогических наук, профессор ЯГПУ, Ярославль.
60. *Соловьева Оксана Викторовна* – учитель Новощаповской СОШ Клинского района Московской области.
61. *Тестов Владимир Афанасьевич* – доктор педагогических наук, профессор Вологодского государственного педагогического университета, Вологда.
62. *Тимофеева Ирина Леонидовна* – доктор педагогических наук, профессор МПГУ, Москва.
63. *Трубников Николай Андреевич* – кандидат медицинских наук, доцент ЯГПУ, Ярославль.
64. *Трубникова Жанна Николаевна* – врач-кардиореаниматолог клинической больницы им. Н.А. Семашко, Ярославль.
65. *Форкунова Лариса Валентиновна* – аспирант Поморского государственного университета, Архангельск.
66. *Харитонова Светлана Валерьевна* – аспирантка МПГУ, Москва.

67. *Хромов Олег Ростиславович* – доктор искусствоведения, заведующий отделом Научно-исследовательского института Российской академии художеств, Москва.
68. *Чекулаев Алексей Викторович* – студент Московского государственного университета путей сообщения, Москва.
69. *Черемных Елена Леонидовна* – старший преподаватель Пермского государственного педагогического университета, Пермь.
70. *Чернов Илья Александрович* – кандидат физико-математических наук, доцент, Петрозаводск.
71. *Шабалина Анастасия Игоревна* – аспирант ЯГПУ, Ярославль.
72. *Шапкина Валентина Николаевна* – кандидат педагогических наук, доцент, Москва.
73. *Шивринская Елена Вячеславовна* – кандидат педагогических наук, доцент Специализированного учебно-научного центра МГУ, Москва.
74. *Шумская Галина Витальевна* – учитель МОУ СОШ № 8, Вологда.
75. *Щетников Андрей Иванович* – заместитель директора по науке Центра образовательных проектов “Пифагор”, Новосибирск.
76. *Щукин Евгений Иванович* – кандидат педагогических наук, доцент ЯрГУ, Ярославль.
77. *Эрдниев Арслан Батырович* – учитель математики Элистинской многопрофильной гимназии, Элиста.
78. *Юлина Наталья Анатольевна* – старший преподаватель Государственной технологической академии, Ковров.
79. *Яновская Наина Борисовна* – кандидат технических наук, доцент Сибирского государственного индустриального университета, Новокузнецк.
80. *Яновский Глеб Борисович* – соискатель, Москва.
81. *Яцковская Галина Анатольевна* – кандидат педагогических наук, доцент Брянского государственного университета, Брянск.

Научное издание

Труды VII Международных Колмогоровских чтений
Сборник статей

Издается в авторской редакции
Компьютерная подготовка оригинал-макета *Т.Л. Трошиной*

Подписано в печать 15.09.2009. Формат $60{\times}92$ 1/16.
Уч.-изд. л. 27,3 Усл. печ. л. 28,4 Заказ 588 Тираж 100.

Издательство Ярославского государственного педагогического университета имени К.Д.Ушинского (ЯГПУ)
150000, Ярославль, Республиканская ул., 108

Типография ЯГПУ
150000, Ярославль, Которосльная наб., 44
Тел.: (4852) 72-64-05, 32-98-69