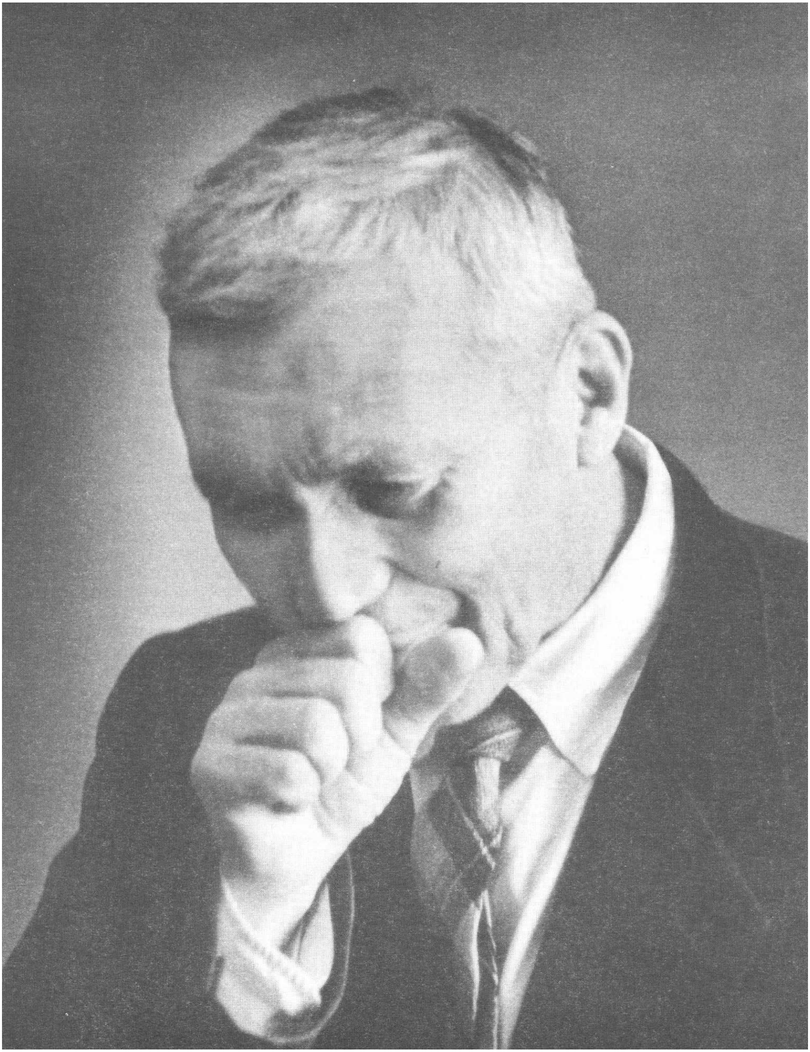


Андрей Николаевич Колмогоров (1903–1987)

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ГОУ ВПО “ЯРОСЛАВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ К.Д. УШИНСКОГО”

ТРУДЫ

ПЯТЫХ КОЛМОГОРОВСКИХ ЧТЕНИЙ

Ярославль
2007

УДК 51; 51:372.8; 51(091)
ББК 22.1 я434
Т 782

Печатается по решению редакционно-издательского совета ЯГПУ имени К. Д. Ушинского

Т 782 **Труды пятых Колмогоровских чтений.** [Текст] Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2007. 400 с.

ISBN 978-5-87555-351-6

Начиная с юбилея (100-летия со дня рождения академика А.Н. Колмогорова, 2003 г.), на родине выдающегося математика XX столетия в Ярославле проводятся традиционные Колмогоровские чтения.

Настоящий сборник статей пятых Колмогоровских чтений (2007 г.) так или иначе отражает интересы А.Н. Колмогорова во многих областях математики, теории и методики обучения математике, истории математики и математического образования. Воспоминания учеников и коллег А.Н.Колмогорова содержат новые факты его биографии и аспекты научно-методических интересов ученого.

Настоящий сборник будет полезен преподавателям школ и вузов, студентам и всем, кто интересуется математикой, методикой ее преподавания и историей российского образования.

УДК 51; 51:372.8; 51(091)
ББК 22.1 я434

ISBN 978-5-87555-351-6

Оглавление

Глава 1

Пленарные доклады: А.Н. Колмогоров и математика XX столетия

Методы доказательства непротиворечивости по Гильберту и Колмогорову

А.С. Кузичев

8 августа 1900 года на II Международном конгрессе математиков в Париже Давид Гильберт сделал знаменитый доклад “Математические проблемы”. Среди проблем Гильберта выделяются две первые проблемы, относящиеся к доказательству непротиворечивости теорий первого порядка, формализующих различные разделы современной математики: “Проблема Кантора о мощности континуума” и “Непротиворечивость арифметических аксиом” (см. [1], выделяя в [1] комментарии А.С. Есенина-Вольпина к этим двум проблемам Гильберта).

25 августа 2006 года на XXV Международном конгрессе математиков в Мадриде автор сделал доклад “Доказательство непротиворечивости оснований математики” (см. [2]), включающий разделы: Программа Колмогорова по основаниям КМ (классической **теоретико-множественной** *канторовской* математики в ее целостности); Реализация программы Колмогорова по основаниям КМ; Доказательство по Колмогорову непротиворечивости всех теорий первого порядка, формализующих различные разделы современной математики. Результаты доклада опубликованы, например, в [3-7].

В Московской математической школе Колмогорова-Маркова по основаниям математики разработан принципиально новый, *ступенчатый,* метод (альтернатива традиционному аристотелевскому аксиоматическому) формализации знаний, прежде всего математических. Ступенчатый метод создан трудами первого заведующего кафедрой математической логики МГУ Андрея Андреевича Маркова, его учеников, последователей и соратников (см., в частности, публикации А.А. Маркова в 1974 году в Докладах Академии наук СССР (ДАН) о языках Яо,…, $Я\omega|$ и полноте классического исчисления предикатов в конструктивной математической логике и монографию А.А. Маркова и Н.М. Нагорного [8]). Ступенчатый метод лег в основу доклада автора на XXV Международном конгрессе математиков [2].

Как известно, математика создавалась и исследовалась на всех этапах ее развития как непротиворечивая наука уже по ее построению. Но **доказывать** непротиворечивость при формализации математики или ее разделов долго не умели. Непротиворечивость всегда в целом без оговорок только предполагалась.

В работе детально показывается, что каждая *известная* (то есть формализующая определенный раздел современной математики) теория K (первого порядка) **доказуемо непротиворечива** (см. ниже теорему 2). Предварительно теория K, заданная по учебнику Мендельсона [9], *перестраивается* теоретико-множественно по Колмогорову, *формулируется* и *доказывается* теорема 1 о редукции K в логику высказываний.

Ранее по советам А.Н. Колмогорова (1903-1987) и А.А. Маркова (1903–1979) я занимался **доказательством** непротиворечивости многих *известных* теорий. Для каждой из таких теорий проводилось свое доказательство (см. мои публикации с 1968 г.), отдельно от других теорий, учитывая специфику прежде всего исследуемой теории. В доказательствах использовался малоизвестный секвенциальный аппарат теорий алгоритмов (алгорифмов) в форме неразрешимых доказуемо непротиворечивых бестиповых нелогических исчислений Ламбда-конверсии Черча и чистой комбинаторной логики Шейнфинкеля-Карри.

Теоретико-множественная идея Колмогорова

Андрей Николаевич не только отметил, что его редукция 1925 года [10] позволяет, используя теоретико-множественную общность, значительно упростить мои построения и доказательства, сделав их *общепонятными* и *общедоступными*, но и ***впервые*** обратил внимание на правила вывода теорий, два этажа (посылки и заключение) которых могут быть основой упрощений.

Важно при этом, говорил Колмогоров, выбрать среди всех логически эквивалентных выводимых формул подходящие аксиомы для каждой теории. Такой подходящий "колмогоровский" выбор аксиоматик для всех теорий (1-го порядка) осуществлен Э. Мендельсоном в монографии [9], написанной в 1963 г. Для всех "мендельсоновских" аксиом *известных* теорий ниже сформулирована и **комбинаторно** доказана лемма 1, являющаяся базой колмогоровского теоретико-множественного пути в основаниях (современной) математики.

Здесь отметим, что в [9] (как пишет автор в предисловии): "мы применяем самые непринужденные теоретико-множественные методы." Хотя учебник [9] и написан на обычном фрегевско-гильбертовском направлении, он уже по выбору аксиоматик теорий наиболее близок теоретико-множественному пути Колмогорова.

В настоящей работе предлагается вариант реализации теоретико-множественной идеи Колмогорова

Знаменитые теоремы Геделя о неполноте 1931 года, доказанные по Гильберту, выделяются особенно тем, что накладывают определенные ограничения на доказательства непротиворечивости соответствующих теорий. В результате для большинства *известных* теорий доказательства их непротиворечивости по Гильберту пока не найдены. В частности, из теорем Геделя о неполноте следует опровержение теоремы 1 о редукции соответствующих теорий в логику высказываний без их предварительной теоретико-множественной перестройки.

Таким образом, предлагаемая теоретико-множественная перестройка теорий (см. определение 3 *классов A0, A1, A2...* и *их элементов* – всех выводов теории K) является существенной для формулировки и доказательства указанной теоремы 1.

Итак, пусть K – *известная* теория, все постулаты которой выбраны в соответствии с [9] или указаны в [9].

В качестве примера теории K можно взять теорию (исчисление) NBG Неймана-Бернайса-Геделя, все постулаты (правила вывода, собственные и логические аксиомы) которой приведены в [9] и непротиворечивость которой (по Гильберту, то есть современными средствами) все еще не доказана, но и не опровергнута – она только предполагается.

Определение 1. Каждую формулу (языка теории K) вида $(\forall x1 \ldots (\forall xn\ (\neg(A \supset A))\ ) \ldots)$, где $n \geq 0$, назовем *W-формулой.*

Определение 2. Каждую формулу (языка теории K) вида $(T \supset H)$ назовем *Выделенной формулой*, если T не является W-формулой, а H есть W-формула.

Логические аксиомы теории K ([9. Гл. 2, § 3]):

(1) $A \supset (B \supset A)$;

(2) $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$;

(3) $(\neg B \supset \neg A) \supset ((\neg B \supset A) \supset B)$;

(4) $\forall xi\ A(xi) \supset A(t)$ (где t – некоторый терм, см. его в [9]);

(5) $\forall xi (A \supset B) \supset (A \supset \forall xi\ B)$ (где xi – некоторая переменная, см. ее в [9]).

Собственные аксиомы теории K:

Они не приводятся в данной работе, но о них известно, что они для K выбираются по [9] в соответствии со следующим *замечанием*:

Если F есть формула языка теории K, то в качестве собственной аксиомы теории K (не уменьшая общности) в работе объявляется не она, а высказывательно эквивалентная ей формула $\neg\neg F$, не являющаяся Выделенной.

Собственные аксиомы теории не могут быть сформулированы в общем случае, ибо меняются от теории к теории, выражая специфику каждой теории – см. о них в [9] и замечание об их выборе для K выше.

Правила (вывода) теории K

Gen: *из* A *следует* ∀xiA;

MP: *из* A *и* A⊃B *следует* B.

В постулатах буквы A, B и C суть любые формулы языка теории K, см. их построение в [9]; иногда вместо формулы A пишем A(t), выделяя в A, следуя [9], некоторые вхождения терма t.

Число всех аксиом теории K бесконечно.

ЛЕММА 1. *Каждая аксиома (собственная или логическая) теории K не является ни W-формулой, ни Выделенной формулой.*

Доказательство. Лемму 1 доказываем непосредственно, исследуя строение каждой аксиомы K и сравнивая ее как слово в алфавите языка K с W-формулами и Выделенными формулами K с учетом замечания о собственных аксиомах. Лемма 1 доказана.

Подчеркнем, что предложения, аналогичные лемме 1, для теорий 1-го порядка в литературе ранее автору не встречались.

Лемма 1 для теории K доказана комбинаторно. Но именно она (см. ниже п. 1 определения 3) характеризует теоретико-множественную колмогоровскую перестройку основных понятий (прежде всего введение нового понятия – *класса (выводов)*) теории K. Перестройка теории K с сохранением всех ее постулатов осуществлена в нижеследующем определении 3.

Перестройка в определении 3 проводится по-школьному созданием прежде всего бесконечной последовательности всех бесконечных классов A0,…, As,… *индукцией* по указанному в нижнем индексе As числу s [базис индукции: s = 0 (п. 1 определения 3); шаг индукции: от s=nks=n+1, n≥0 (п. 2 определения 3)]. Ср. индукцию по этому s ниже в доказательстве теоремы 1 для теории K.

Опираясь на постулаты как создающие выводимые формулы теории K, введем теоретико-множественно все исходные (основные) понятия теории K, прежде всего необходимые для формулировки и доказательства результатов настоящей работы, по Колмогорову с использованием неформализованной наивной теории множеств.

Определение 3. Индуктивно определим все бесконечные *классы* A0, A1, A2,… теории K, построив (определив) все их элементы – все (конечные) *выводы* теории K так, что каждый вывод D формулы E входит (как целое) только в один класс Ak, k≥0, в D укажем все его *пары*.

1. Если E – аксиома теории K, то считаем: вывод D состоит только из одной выводимой формулы E, и D принадлежит классу A0. В классе A0 других элементов (выводов), кроме всех так введенных, нет.

Парой указанного *вывода D* из класса A0 считается единственная пара E, D. Определение класса A0 закончено.

2. Пусть классы A0,..., An определены, n≥0. Определим класс An+1.

2.1. Если вывод U формулы T принадлежит классу An, а все элементы (выводы) из классов A0,..., An не оканчиваются формулой E=∀xT, то считаем, что строящийся вывод D формулы E, являющийся продолжением вывода U по правилу Gen, принадлежит классу An+1, являясь его элементом.

Парами вывода D считаются пара E, D и все пары вывода U.

2.2. Пусть вывод U формулы T и вывод Y формулы T⊃E хотя бы один принадлежит классу An, а другой принадлежит одному из классов A0,..., An.

Если каждый вывод из классов A0,..., An не оканчивается формулой E, то считаем, что строящийся вывод D формулы E, являющийся продолжением выводов U и Y по правилу MP, принадлежит классу An+1, являясь его элементом.

Парами вывода D считаются (называются) пара E, D и все пары выводов U и Y. Например, пара T⊃E, Y в D есть по этому определению пара T⊃E, Y в Y.

Вместо MP пишем MP*, если вторая посылка T⊃E правила MP является Выделенной формулой.

2.3. Вывод J формулы S принадлежит классу An+1 тогда и только тогда, когда J определен в п. 2.1 либо в п. 2.2. Определение класса An+1 закончено.

3. Считаем, что в множестве M всех выводов теории K других элементов (выводов), кроме указанных в пп. 1 и 2, нет.

Классы A0, A1, A2,..., состоящие только из выводов теории K (построенных в пп. 1 и 2), определены.

По заданию каждый из классов A0, A1, A3, ... бесконечен.

Множество M (всех выводов теории K) есть объединение всех классов A0, A1, A2,...

Определение 3 закончено. Теоретико-множественное определение 3 позволяет свести в целом доказательство непротиворечивости теории K к логике предикатов, опираясь на лемму 1 и используя тот факт, что каждый из классов A1,..., As,... состоит только из выводов теории, заканчивающихся применением правил вывода MP или Gen, а класс A0 состоит только из выводов всех аксиом теории и включает в себя всю (прежде всего семантическую) специфику рассматриваемой теории K. См. лемму 1 и ниже теорему 1.

Определение 4. Пусть J – **фиксированный** элемент (вывод) из множества M всех выводов теории K. По определению 3 вывод J входит (как целое) только в один класс Ak, k≥0.

Каждой паре F, B вывода J сопоставим формулу [F, B] языка L логики высказываний, которую назовем *0-переводом (формулы F из J)*:

1) в случае каждого правила MP из J, например, вида, указанного в п. 2.2 (определения 3), если MP есть MP*, то для пар T⊃E, Y и E, D в J положим

$$[T\supset E, Y]=q \quad \text{и} \quad [E,\ D] = q,$$

где q есть ¬(R⊃R), R – фиксированная формула языка L логики высказываний;

2) для каждой пары F, B вывода J, для которой 0-перевод в п. 1) не указан, положим [F,B]=¬q.

Определение 4 закончено. Ниже это определение 4 рассматривается и применяется только в частном случае, когда в вывод J может входить только одно применение правила MP* – последнее в выводе J.

Далее иногда вместо выражения “формула [F,B] выводима в исчислении L логики высказываний” будем писать (см. теорему 1): “*предложение (1) <F, B> верно* ”.

Редукция теории K в логику высказываний L осуществлена и доказана в следующей теореме 1 на основе определений 3 и 4, леммы 1 с использованием метода от противного.

Теорема 1 (о редукции M в L). *Предложение* (1) *<F, B> верно для всех пар F, B каждого вывода из множества M; в M нет выводов с правилом MP*.*

Доказательство. Теорему 1 докажем непосредственно по построению классов выводов (элементов) в множестве M, следуя пп. 1-3 определения 3, то есть теорему 1 докажем индукцией по числу s бесконечных классов A0,. . . , As (базис: s=0; шаг индукции: от s=nks=n+1, n≥0).

1. Прежде всего теорему 1 доказываем для всех выводов аксиом теории K – выводов из класса A0 – при всех их вхождениях в элементы (выводы) из M (s=0).

Действительно, на основании леммы 1 аксиомы теории K не являются ни W-формулами, ни Выделенными формулами. В соответствии с пунктом 2 определения 4 их 0-переводы имеют вид ¬q=¬¬(R⊃R), где R

– формула логики высказываний. Поэтому они выводимы в исчислении L логики высказываний. Базис индукции по s доказан.

2. Шаг индукции. Обратимся к п. 2 определения 3, предполагая теорему 1 уже (по гипотезе индукции) доказанной для всех выводов из классов A0,. . . , An, n≥0.

Пусть s=n+1. По построению вывода D из класса An+1, для выводов U и Y из пп. 2.1 и 2.2 определения 3 при их вхождениях в вывод D теорема 1 доказана по гипотезе индукции.

Докажем теперь теорему 1 для пары E, D этого вывода D из класса An+1.

Следуя определениям 3 и 4, осталось рассмотреть п. 2.2 определения 3 задания вывода D, применяя определение 4 в случае, когда вывод J из него есть D. Доказательство проведем методом от противного.

Предположим, что в правиле MP из пункта 2.2 определения 3 посылка T⊃E является Выделенной формулой – правило MP есть MP*.

Тогда по пункту 1 определения 4 в выводе D имеем [T⊃E,Y]=q, q есть ¬(R⊃R), где R – формула логики высказываний, и теорема 1 в D для пары T⊃E,Y ложна. *Однако* по гипотезе индукции теорема 1 доказана для всех пар вывода Y и для пары T⊃E,Y в D, вводимой (определяемой) в п. 2.2 определения 3 **однозначно** как пара T⊃E,Y в Y (и тем самым являющейся парой T⊃E,Y в Y, имеющей в Y и в D один 0-перевод ¬q). Можно сказать, здесь использован *принцип пар*, утверждающий, что для пары T⊃E,Y в D теорема 1 доказана, поскольку она доказана для этой пары в Y.

Получили противоречие: теорема 1 для пары T⊃E,Y в D одновременно является ложной и истинной. Поэтому вторая посылка T⊃E правила MP в пункте 2.2 определения 3 не может быть Выделенной формулой. Следовательно, в соответствии с пунктом 2 определения 4 в D имеем [T⊃E,Y]=¬q и [E,D]=¬q. Формула ¬q выводима в логике высказываний, поэтому теорема 1 истинна для пары E, D и, следовательно, для всех пар F, B вывода D. Таким образом, теорема 1 доказана для всех элементов (выводов) класса An+1, n≥0.

Итак, исследование постулатов в выводах из множества M закончено; показано: предложение (1) <F,B> верно для всех пар F, B каждого вывода множества M; в M нет выводов с правилом MP*.

Теорема 1 (о ***редукции*** множества M всех выводов теории K в логику высказываний L) доказана.

Например, отметим как следствие теоремы 1, что в множестве всех аксиом теории K нет трех аксиом A, B, A⊃(B⊃q), где B⊃q – Выделенная формула. В противном случае теорема 1 для K была бы опровергнута

– множество M всех выводов K содержало бы правило MP* вопреки теореме 1, а теория K не была бы *известной*.

Следствием теоремы 1 является следующая теорема 2 о непротиворечивости.

Теорема 2. *Теория K непротиворечива.*

Доказательство. Теорему 2 докажем от противного.

Допустим, что теория K противоречива. Тогда в теории K выводима каждая формула языка теории K; в частности, выводимы формулы S и S⊃C, где S⊃C есть Выделенная формула, поэтому применение правила MP к S и S⊃C дает в множестве M вывод, кончающийся правилом MP*, что невозможно в силу теоремы 1.

Теорема 2 о непротиворечивости теории K доказана.

Доказательство теоремы 2 проведено на колмогоровском теоретико-множественном пути современной математики. Оно полностью зависит от теоремы 1 и не может быть перенесено на любую теорию (1-го порядка), например, на теории с правилом MP* – в частности, не может быть получена *нелепость*: "доказательство непротиворечивости противоречивой теории".

В основаниях современной математики выделяются два пути построения теорий (первого порядка): хорошо знакомый путь Фреге (1848-1920) и Гильберта (1862-1943) и новый теоретико-множественный путь Колмогорова (1903-1987). Различные постулаты (аксиомы и правила вывода) всех теорий (исчислений) сформированы и формируются сейчас на фрегевском пути.

Пути Фреге-Гильберта и Колмогорова в основаниях математики дополняют друг друга: первый в основном посвящен вопросам полноты теорий, а второй – непротиворечивости.

В работе предложена и осуществлена теоретико-множественная колмогоровская перестройка основных понятий всех уже построенных (по учебнику Мендельсона) по Фреге и Гильберту исчислений. Следуя А.Н. Колмогорову, центральным понятием каждой теории является бесконечный класс (выводов), а не конечный вывод, как принято, начиная с Г. Фреге.

На колмогоровском теоретико-множественном пути найдено доказательство непротиворечивости всех *известных* (на пути Фреге-Гильберта) неполных (по Геделю) теорий первого порядка, редуцируемых в логику высказываний. Доказательство получено для каждой такой теории обычными школьными комбинаторными средствами.

Результаты работы могут и должны быть внедрены в учебный процесс – преподавать основания современных наук целесообразно в целом не по Фреге и Гильберту с ограничительными теоремами Геделя о неполноте, как это делается в настоящее время, а теоретико-множественно по Колмогорову без ограничений.

Настоящая работа выполнена на кафедре теории вероятностей в кабинете истории и методологии математики и механики механико-математического факультета МГУ.

Библиографический список

1. Проблемы Гильберта / Под. ред. П.С. Александрова. М.: Наука, 1969. 240 с.
2. *Kuzichev A.S.* Proof of consistency of foundations of mathematics // Abstracts of XXV International Congress of Mathematicians, Madrid, 2006. European Mathematical Society Press, 2006. P. 4-5.
3. *Kuzichev A.S.* A Version of Formalization of Cantor's Set Theory. Doklady Mathematics, Vol. 60. № 3, 1999. P. 424-426.
4. *Kuzichev A.S.* Solution of the Hilbert Central Problem Following Kolmogorov. Doklady Mathematics, Vol. 61. № 2, 2000. P. 212-215.
5. *Кузичев А.С.* Секвенциальное построение интеллектуальных систем с принципом комбинаторной полноты // Машины. Люди. Ценности. Курган: Изд-во Курганского гос. ун-та, 2006. С. 31-32.
6. *Кузичев А.С.* Программа Колмогорова, интеллектуальные системы и теоремы Геделя о неполноте // Искусственный интеллект: междисциплинарный подход. М.: ИИнтеЛЛ, 2006. С. 330-346.
7. *Кузичев А.С.* Программа Колмогорова и секвенциальные интеллектуальные системы // Материалы IX Международной конференции "Интеллектуальные системы и компьютерные науки" (23-27 октября 2006 г.) / Под общ. ред. В.А. Садовничего, В.Б. Кудрявцева, А.В. Михалева. М.: Изд-во мех.-мат. ф-та МГУ. Т. 2. Ч. 1. 2006. С. 164-166.
8. *Марков А.А., Нагорный Н.М.* Теория алгорифмов (2-е изд., испр. и доп.), М.: ФАЗИС, 1996. 448 с.
9. *Мендельсон Э.* Введение в математическую логику. М.: Наука, 1984. 320 с.
10. *Колмогоров А.Н.* О принципе Tertium non datur // Математический сборник. 1925. Т. 32. № 4. С. 646-667.

Школьные Колмогоровские и Харитоновские научные чтения

В.В. Вавилов

Научные конференции стали уже той постоянной составляющей школьной жизни России, которая присутствует в календарных рабочих планах многих школ. Выступление учеников с докладами на конференциях делает честь не только школе и ее учителям, но и заметно способствует становлению устойчивого интереса учащихся к изучению той или иной дисциплины и созданию атмосферы творчества в школьных коллективах. Участники таких конференций и их победители становятся кумирами в детских коллективах и в значительной мере помогают учителю как в проведении текущих уроков, так и при проведении факультативных занятий, кружков, олимпиад и конкурсов.

В этой статье я расскажу о двух ежегодных престижных международных конференциях: "Харитоновские чтения – YII" и "Колмогоровские чтения – VII" (электронные адреса постоянно действующих оргкомитетов: kh.read@expd.vniief.ru, reading-07@aesc.msu.ru).

Харитоновские чтения традиционно проходят в конце февраля в г. Сарове, где расположен Российский федеральный ядерный центр, который в течение многих лет возглавлял выдающийся ученый и патриот, академик Юлий Борисович Харитон. Конечно, немаловажную роль в популярности чтений играет и то, что они проходят на святых местах, связанных с именем Серафима Саровского.

Колмогоровские научные чтения проходят в Москве (всегда в начале мая), их главными организаторами являются Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, его факультеты, а проходят они на базе специализированного учебно-научного центра МГУ и школы им. А.Н. Колмогорова. Роль выдающегося ученого современности Андрея Николаевича Колмогорова в деле обновления и развития школьного образования, в организации широкой работы с талантливыми детьми трудно переоценить, и сама конференция проходит в стенах школы, которую он и создавал, был многие годы ее научным руководителем и преподавателем.

Состав экспертных комиссий Харитоновских чтений по математике, физике, информатике, биологии, химии формируется, в основном, из представителей ведущих вузов (МГУ, МФТИ, МИФИ), и естественно, что большая часть секций посвящена именно этим дисциплинам. К числу явных достоинств чтений следует отнести то, что на этих чтениях присутствует и значительная гуманитарная часть и в рамках работы чтений предусмотрены секции литературоведения, языкознания, западной филологии, истории и обществоведения, краеведения, психологии, экономики. На этой конференции в явной форме проявляется синтез гуманитарных и естественных наук, что и задумывалось организаторами чтений с самого начала.

На Колмогоровских чтениях работают секции математики, информатики, физики, химии и биологии (гуманитарных секций нет), и это полностью соответствует тем специализациям, по которым проходит обучение в школе им. А.Н. Колмогорова. Состав экспертных комиссий на этих чтениях формируется главным образом из профессоров и преподавателей Московского университета. Отличительной чертой Колмогоровских чтений является наличие в программе их работы секции "Методика профильного преподавания", в которой участвуют научные руководители основных участников чтений, видные организаторы специализированного обучения в нашей стране. Основной круг обсуждаемых здесь вопросов связан с имеющимся опытом организации научно-исследовательской деятельности школьников, с направлениями педагогического творчества и научных исследований учителей и обсуждением проблем, возникающих при взаимодействии вузов и школ, при реализации идей и принципов непрерывного образования.

В этом году среди кандидатов-участников чтений был значительный конкурс и экспертные комиссии имели значительные затруднения при предварительном отборе докладов. Общее число участников на каждых из чтений составляет ежегодно около двухсот человек из различных регионов страны и ближнего зарубежья.

Помимо научной части, в "жизни" этих чтений всегда предусмотрены широкие культурные программы, конечно, отличающиеся друг от друга и отражающие их специфику, место проведения. Но главное, что их объединяет, – это та творческая атмосфера, которая царит среди молодых талантливых участников, те несомненные научные достижения, о которых с восторгом рассказывают их авторы, обмен мнениями, знакомство со сверстниками, которые уже в значительной мере выбрали для себя свой жизненный путь. Самые разнообразные экскурсии, спортивные игры, вечера отдыха, конкурсы между "физиками и лириками", математические бои и соревнования и др. – обязательные элементы обоих чтений. Кроме того, для участников чтений в г. Сарове были организованы научно-популярные лекции ведущих ученых страны, такие, как "Мир бинарно-сопряженных систем: их природа и эволюция" (В.А. Геодакян), "Основные принципы передачи информации в нервной системе: роль веществ-медиаторов" (В.А. Дубинин), "Самоорганизующиеся структуры головного мозга" (С.А. Шумский), "Полимпсест Лондона: особенности художественности мышления постмодернистов" (В.Г. Новикова), “Психологические эффекты взаимодействия правого и левого полушарий” (А.Н. Поддьяков). В Москве на Колмогоровских чтениях были прочитаны лекции “О международных молодежных робототехнических соревнованиях “Евробот” (В.Е. Павловский, М.Е. Салмина), “Наночастицы и нанотехнологии” (Е.А. Гудилин), “О сайте “Математические этюды” (Н.Н. Андреев) и др.

В этом году впервые для желающих участников Харитоновских чтений были организованы два конкурса олимпиадного типа: по математике и по русскому языку. Если по математике результат оказался довольно приличный (половина участников решила не менее половины предложенных задач), то результаты своеобразного тестирования по русскому языку оказались ниже всяких приличных комментариев. Характерной чертой на Колмогоровских чтениях является проведение математического боя между командами “МГУ” и “Гости МГУ” (в этом году победа досталась гостям), который сопровождается довольно жаркими баталиями.

Главным на таких конференциях является, конечно, работа тематических секций и доклады учащихся. Отмечу, что на Харитоновских чтениях лучшими были признаны доклады Валерии Петкиевой (СУНЦ МГУ) “Л. Эйлер и обратные задачи в геометрии треугольника и тетраэдра” и Екатерины Падюковой (СУНЦ МГУ) “О постоянной Эйлера”, а на Колмогоровских чтениях лучшим был признан совместный доклад Евгения Бакисова и Глеба Мазовецкого “Клеточные автоматы на торе” (Школа № 533, ЮМШ СПбГУ; научный руководитель Екатерина Евгеньевна Жукова).

Ниже я более подробно расскажу только о некоторых работах по математике учащихся школы им. А.Н. Колмогорова, причем только тех их них, которые были выполнены под моим научным руководством.

1) Исследования ***Валерии Петкиевой*** проводились на продолжении двух лет и посвящены они были теме, связанной с геометрией треугольника и тетраэдра, классической теме школьных учебных программ. Ее работа по этой теме признавалась лучшей на Харитоновских чтениях в 2006 и 2007-м годах (в прошлом году она была совместной с Александром Пауновым), на Всероссийской конференции-конкурсе “Юниор- INTEL” в г. Москве, а на Международной конференции-конкурсе “Юниор-INTEL” в США (Нью-Мехико) в 2007-м году этот доклад был в числе лучших и отмечен медалью. Основной, изначальный вопрос возник непосредственно на уроке по геометрии, когда мы в классе решали задачи, связанные с ортоцентром треугольника и, как это иногда бывает, вопрос школьника поставил преподавателя в затруднительное положение. Этот вопрос потом и перерос в цельное и трудное двухлетнее исследование.

Впервые задачу о вычислении длин сторон треугольника по заданным его четырем замечательным точкам (центры вписанной и описанной окружностей, ортоцентр и центр тяжести) и заданным расстояниям между ними, как оказалось, рассмотрел Леонард Эйлер в своей работе "Простые решения некоторых трудных геометрических задач" в 1767 году. В работе Петкиевой рассматриваются новые обобщенные *задачи обратного типа* из геометрии треугольника и тетраэдра: Найти множества всех точек плоскости (пространства), в которых могут находиться вершины треугольников (тетраэдров), для которых *две фиксированные точки* являются заданной парой каких-то замечательных точек треугольника или тетраэдра. В этом направлении рассмотрены следующие пары заданных замечательных точек (G-центр тяжести , H-ортоцентр, I-инцентр, $H_м$-антиортоцентр):

А) G и H (в плоскости для треугольников и в пространстве для ортоцентрических тетраэдров).

Б) G и I (в плоскости для треугольников).

В) G и H $_м$ (в плоскости для треугольников).

Основным инструментом в данном исследовании являются теоремы о трех замечательных прямых – Эйлера, Нагеля и Лемуана. В каждом из указанных случаев даны полные ответы и найдены построения при помощи циркуля и линейки искомых треугольников и тетраэдров во всех перечисленных выше случаях .

2). "О постоянной Эйлера" – так назывался доклад ***Екатерины Падюковой***. Работа продолжает исследования, начатые ранее (она отмечена дипломом второй степени в прошлом году на Харитоновских чтениях) и относящиеся к трансцендентным числам π и e. Началом этого исследования послужила известная формула для другой знаменитой константы – постоянной Эйлера γ, для которой имеет место соотношение

$$\lim_{n\to\infty} n(H_n - \ln n - \gamma) = \frac{1}{2}, \quad H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n},$$

где $\gamma = 0,57721566490\ldots$ (отметим, что арифметическая природа числа γ до сих пор не изучена, неизвестно даже, является ли оно рациональным числом или нет).

При помощи метода приближенного суммирования Л. Эйлера (предложенного им в 1732 году) и на основе анализа асимптотических разложений для $\ln(n + a)$ было показано, что

$$\lim_{n\to\infty} n^2(H_n - \ln(n + \frac{1}{2}) - \gamma) = 24.$$

В процессе доказательства этого предельного соотношения удалось также установить, что при любом натуральном n справедливы неравенства

$$\tau_n < \gamma < \tau_{n+1}, \qquad \tau_n = H_n - \ln(n + \frac{1}{2}) - \frac{24}{n^2}.$$

Завершило это исследование доказательство того, что здесь наблюдается и так называемый *эффект Гюйгенса* (возникший впервые в связи с приближенным вычислением числа π).

Теорема. *Для постоянной Эйлера γ имеет место равенство*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\tau_{n+1} - \gamma}{\gamma - \tau_n} = 2,$$

то есть число γ на интервале $(\tau_n; \tau_{n+1})$ расположено "в два раза ближе к его левому концу, чем к правому".

3). В начале девятнадцатого столетия была полностью изучена взаимосвязь понятий равновеликости и равносоставленности для многоугольников на плоскости. Доказанная здесь теорема Бойяи-Гервина состоит в том, что *два многоугольника равновелики тогда и только тогда, когда они равносоставленны.* В августе 1900 года на математическом конгрессе в Париже Д. Гильберт в своем знаменитом списке проблем (под номером 3) сформулировал вопрос, на который его ученик М. Ден довольно быстро дал исчерпывающий ответ, доказав *существование многогранников одинакового объема, которые не являются равносоставленными.*

В работе ***Екатерины Куксы*** "Равносоставленность многоугольников на сфере" приводится прямое доказательство того, что понятия равновеликости и равносоставленности *остаются справедливыми и для сферических многоугольников.*

4). Любопытная работа "Комбинаторика электрических цепей" была выполнена ***Аней Корольковой и Георгием Степановым***. Она позволяет связать воедино вопросы линейной алгебры, комбинаторной геометрии с расчетами электрических цепей. В работе, в частности, получено одно из интересных применений теории линейных уравнений и теории графов к проблеме отыскания распределения токов в электрических цепях.

Пусть на плоскости или в пространстве задан связанный ориентированный граф Г. Будем его рассматривать как электрическую цепь, у которой каждый проводник (ребро графа) имеет единичное сопротивление. Хорошо известно, что в такой сети невозможно создать постоянный ток, если в ней нет простого замкнутого цикла. С другой стороны, если такой цикл есть, то достаточно подключить источник питания, чтобы получилось некоторое распределение токов во всех звеньях такой цепи.

Пусть по каждому ребру σ графа Г течет ток I_σ (положительный, если его "течение" совпадает с ориентацией σ, и отрицательный – в противоположном случае). Тогда для вычисления распределения токов во всей сети по законам Кирхгофа мы получаем систему уравнений

$$\sum_{\sigma} \varepsilon_{a\sigma} I_\sigma = 0, \tag{1}$$

где $\varepsilon_\sigma = \pm\ 1$ (в случае, когда является началом или концом ребра σ) или $\varepsilon_\sigma = 0$ (если вершина не принадлежит σ).

Так, например, четыре вершины тетраэдра (обозначим их через 0, 1, 2, 3), соединенные отрезками $\alpha = 01$, $\beta = 02$, $\gamma = 03$, $\alpha' = 23$, $\beta' = 31$, $\gamma' = 12$ (ρ читается, например, что α соединяет вершины 0 и 1), образуют так называемый *мостик Уитстона*, если положительная ориентации ребер такого графа соответствуют его обозначениям. Для такой схемы система уравнений (1) имеет матрицу

$$\begin{array}{ccccccc} & \alpha & \beta & \gamma & \alpha' & \beta' & \gamma' \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & +1 & 0 & 0 & 0 & +1 & -1 \\ 2 & 0 & +1 & 0 & -1 & 0 & +1 \\ 3 & 0 & 0 & +1 & +1 & -1 & 0 \end{array}$$

Что можно сказать о линейной независимости уравнений системы (1)? Ответом являются следующие два результата.

Теорема 1. *Если граф Г является деревом, то в такой сети не существует распределений постоянного тока.*

Теорема 2. *Если граф не является деревом, то число линейно независимых уравнений системы (1) равно числу имеющихся неэквивалентных циклов в графе Г.*

Дадим здесь короткие пояснения. Если цикл графа проходит ребро σ, например, 3 раза в положительном направлении и 5 – в отрицательном, то суммарно это ребро проходит $3-5=-2$ раз. По этому принципу каждому ребру σ цикла соответствует индикатор i^σ , который указывает, сколько раз это ребро проходится в этом цикле. Говорят, что цепь эквивалентна нулю, если все $\mathrm{i}^\sigma = 0$ для каждого звена цикла; два цикла эквивалентны, если индикаторы i^σ всех их звеньев одинаковы.

Вторая часть работы посвящена задаче о так называемом совершенном *квадрировании прямоугольников* и квадратов. В частности, показано, что распределению постоянных токов в сети, определенным образом составленной из n проводников, соответствует такой комплект из n различных квадратов, из которого может быть составлен некоторый прямоугольник. Доказано и обратное утверждение.

5). В работе "Изогональные прямые и ортоцентр треугольника", выполненной ***Данилой Леньковым***, тремя разными способами доказано *следующее утверждение*:

Пусть H и O – ортоцентр и центр описанной окружности треугольника ABC. На наименьшей дуге BC этой окружности выбрана произвольная точка X; точки окружности A_1 и C_1 *таковы, что* $\angle AXC_1 = \angle CBH$ *и* $\angle CAA_1 = \angle ABH$. *Пусть Y и Z точки пересечения пар прямых AB и* XC_1, *BC и* XA_1 *соответственно. Тогда точки Y, Z и H лежат на одной прямой.*

Первое из доказательств основано на сравнении углов, вписанных в окружность.

Второе доказательство использует (предварительно доказанный) следующий критерий, представляющий и самостоятельный интерес: прямая (YZ), Y∈AB, Z∈BC тогда и только тогда проходит через ортоцентр H треугольника ABC, когда

$$tgA = \frac{YB}{YA}tgB + \frac{ZC}{ZA}tgC.$$

Для его проверки в рассматриваемом случае неоднократно используется теорема синусов для треугольников и теорема Птолемея для вписанного в окружность четырехугольника ABXC.

Третье доказательство является, по существу, прямой ссылкой на теорему Паскаля о "мистическом" шестиугольнике $ABCC_1XA_1A$, вписанном в окружность.

6). Математическим экспериментам в теории динамических систем была посвящена работа (с прекрасной презентацией на пленарном заседании Колмогоровских чтений) "Вычислительный эксперимент: 16-я проблема Гильберта", выполненная ***Екатериной Осаковской***.

Вопрос 16-й проблемы Д. Гильберта из его известного списка относится к системе уравнений вида

$$\frac{dx}{dt} = p(x,y)\,, \qquad \frac{dy}{dt} = q(x,y),$$

где p(x,y), q(x,y) – многочлены второй степени, и формулируется он так: *каково наибольшее число предельных циклов на фазовой плоскости* *может иметь такая система уравнений?* В настоящее время ответ на этот вопрос *неизвестен.*

К этому типу систем относится обобщенная система Лотки-Вольтерра в так называемой математической теории "борьбы за существование":

$$\frac{dx}{dt} = x(a + bx + cy)\,, \qquad \frac{dy}{dt} = y(d + ex + fy);$$

классическая модель отвечает случаю b=f=0.

Усовершенствование А.Н. Колмогорова (учитывающее борьбу между "хищниками") этой классической системы приводит к системе уравнений вида

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = k(x)x - l(x)y, \\ \frac{dy}{dt} = m(x)y \end{array} \right. ,$$

в которой на функции k(x), l(x), m(x) накладываются только условия довольно общего характера. Такая система А.Н. Колмогорова часто имеет предельный цикл, но поведение траекторий (при сделанных допущениях) внутри предельного цикла может быть довольно сложным, и здесь до сих пор нет определенной ясности и хороших примеров.

Работа является экспериментально-вычислительной и проведена с целью поиска новых конкретных примеров с большим числом предельных циклов на фазовой плоскости не только в обобщенной системе Лотки-Вольтерра, но и в системе уравнений, которую вместо нее предложил А.Н. Колмогоров. Результатом работы является набор различных качественных "картинок" и их обсуждение; значительная часть работы отведена обсуждению вопросов математического моделирования процессов конфликтного характера. В частности, обнаружено наличие трех предельных циклов в системе А.Н. Колмогорова при любопытном дополнительном ограничении, когда в качестве функции m(x) выбиралось решение уравнения Ферхюльста, описывающее (при некоторых допущениях) развитие популяции в ограниченной среде. Правда, при этом мы выходим из класса систем Гильберта, но это не уменьшает значимости эксперимента, и (насколько нам известно) подобных примеров поведения системы в теории борьбы за существование в литературе раньше не встречалось.

7. "Цепные дроби степеней рациональных чисел" – так назывался доклад ***Екатерины Филоненко***, связанный с представлением действительных чисел при помощи цепных дробей. Каждому действительному числу α можно поставить в соответствие конечную или бесконечную цепную дробь; при этом она конечна только в том случае, когда α – рациональное число. Число "этажей" в представлении обыкновенной дроби в виде цепной дроби

$$\alpha = p/q = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_k]$$

обозначим через $k = k(\alpha)$.

Общая постановка довольно трудной задачи состоит в том, чтобы найти возможные значения величин $k(\alpha + \beta)$ и $k(\alpha\beta)$ в зависимости от заданных $k(\alpha)$ и $k(\beta)$; α, β – рациональные числа.

В работе рассматриваются рациональные числа вида F_{n+1}/F_n, где $\{F_n\}$ – классическая последовательность Фибоначчи. В частности,

1) исследован вопрос о том, когда числа вида $(F_{n+1}/F_n)^s$ являются подходящими дробями бесконечных цепных дробей чисел ϕ^s (s – фиксировано);

2) вычисляются величины $k(\alpha)$ для $\alpha = (F_{n+1}/F_n)^2$;

3) получены оценки длин периодов разложения в цепную дробь чисел вида ϕ^s (s – фиксировано).

Любопытно, что при проведении исследований была использована геометрическая форма алгоритма Евклида, получившая название "алгоритма вытягивания носов", позволившая чисто геометрически (не проводя последовательных делений) определять число этажей цепной дроби в представлении рационального числа.

8. В докладе ***Ольги Доржиевой и Елены Борисычевой*** с поэтическим названием "Математический сад" рассмотрен ряд задач на целочисленной решетке (клетчатой бумаге). Широко известна, например, такая задача:

В центре круглого сада радиуса 50 расположена беседка; (цилиндрические) деревья растут в узлах сетки из квадратов со стороной 1 (в каждом узле клетчатой бумаги со стороной клетки 1; беседка также находится в узле такой бумаги). Докажите, что пока радиусы всех деревьев остаются меньше $1/\sqrt{2501} \approx 1/50,01 \approx 0,019996$, вид из беседки не будет полностью заслонен деревьями; однако как только радиус деревьев достигнет $1/50 = 0,02$, человек, сидящий в беседке, не увидит просвета ни в каком направлении.

В работе эта задача рассматривается для случая круглого сада радиуса R (не обязательно целого) и ее обобщенный аналог в пространстве. При этом установлены "границы видимости" в обоих случаях.

Кроме того, важным результатом работы является двусторонняя оценка длины видимой части границы сада в зависимости от радиусов растущих в нем деревьев. Эти неравенства важны при изучении траекторий и длины пробега свободной частицы в различных моделях газов задач математической физики.

9. ***Данил Исламов*** свой доклад "О числе вариантов пиксельной визуализации заданного круга" посвятил теме, важной для современных приложений.

Монитор – это прямоугольный лист клетчатой бумаги, а круг на экране – объединение всех таких клеточек (пикселей), которые пересекаются с внутренностью круга. Задача состоит в том, чтобы выяснить, сколько различных изображений на экране имеет круг данного радиуса. При этом рассматриваются два типа изображений круга: пиксельный круг – это объединение всех таких клеточек (пикселей), которые пересекаются с внутренностью круга; оцифрованный круг – это объединение всех точек с целочисленными координатами внутри или на границе этого круга.

Вопросы, связанные с изучением пиксельных и оцифрованных кругов, восходят к проблеме Гаусса целых точек в круге и важны для визуализации изображения на мониторах, в теории распознавания образов и при разработке адаптивных оптических систем. В работе предложен алгоритм подсчета числа таких различных изображений и оценена его сложность. На основе этого алгоритма составлены компьютерные программы.

Из полученной оценки сложности предложенного алгоритма следует, что число различных (с точностью до сдвига) пиксельных кругов K примерно квадратично растет с увеличением радиуса R. В работе предложена также оценка числа вариантов оцифрованных кругов в зависимости от радиуса R

$$K = 4\pi \mathrm{g}^2 + O(R^{339/208}\ (\log\ R)^{18627/8320}).$$

Видимо, эта оценка имеет место и для оценки пиксельных кругов; однако заметим, что при $R \leq 100$ разность $\Delta K = K - 4\pi \mathrm{g}^2 < 8R = O(R)$.

Проведенные исследования и расчеты позволяют высказать целый ряд интересных и достаточно правдоподобных гипотез в современных вопросах теории чисел, которые еще предстоит изучить.

10. В работе ***Ивана Шаповалова*** "О плотности упаковки шаров" проведены оценки плотностей двух способов упаковки шаров внутри данной области пространства. Хотя обе рассмотренные упаковки и не являются самыми плотными упаковками шаров в данной области, их изучение представляет интерес при практических расчетах эффективности работы водоочистительных и других сооружений.

В первом способе упаковки шаров во всем пространстве каждый шар касается шести других, а во втором – десяти других. Под плотностью упаковки шаров внутри области понимается отношение суммы объемов всех шаров, расположенных внутри данной области, к объему области.

Теорема. *Плотности обеих рассматриваемых упаковок шаров не превосходят* $2\pi/9 \approx 0,698$.

Отметим, что для куба и параллелепипеда получены точные формулы для плотности рассматриваемых упаковок шаров при заданных размерах.

11. Р. Беллман в одной из своих известных книг по динамическому программированию поместил задачу, которую он сформулировал в форме следующего вопроса.

Вы оказались внутри леса, о котором знаете только то, что он имеет вид бесконечной прямой полосы ширины 1. По какой кривой следует идти, чтобы был возможно наименьший путь, после которого вы заведомо выйдите из леса, из какой бы точки вы ни отправились и в каком бы направлении ни пошли?

В.А. Залгаллер в своей статье нашел этот наименьший путь (замкнутую кривую) и показал, что его длина приближенно равна 2,278.

В работе ***Никиты Семенова*** "Как выйти из леса?" (мы заимствовали название указанной статьи) рассматривается обобщение задачи Беллмана для леса, который имеет форму круга, прямоугольника, квадрата, а также – прямолинейной полосы с удаленным из нее кругом ("болотом") и прямого угла (пересечение двух прямоугольных полуполос) с удаленным из него "болотом".

12. Доклад ***Сергея Воинова*** был посвящен трехсотлетию со дня рождения выдающегося математика Леонарда Эйлера и назывался "Эйлеров каприз".

Попытка классификации многогранников привела в 1750 году известнейшего математика Леонарда Эйлера к следующему результату: *Для любого выпуклого многогранника*

$$\mathrm{V} - \mathrm{E} + \mathrm{F} = 2,$$

где V – число вершин, E – число ребер и F – число граней многогранника.

В 1751 году он дал доказательство этой формулы для выпуклых многогранников. Другое (и элегантное) доказательство этой формулы дал в 1811 году двадцатилетний О. Коши. Считалось долгое время, что эта формула Эйлера (особенно после доказательства Коши) справедлива для всех многогранников. Однако швейцарский математик Симон Люилье уже через год после работы Коши заметил, что для многогранника, который получается из большого куба удалением маленького куба ("полый куб"), формула Эйлера не верна – для него V–E+F=4. Как отмечал Люилье, свое открытие он сделал, рассматривая минералогическую коллекцию своего друга, в которой заметил двойной кристалл, где внутренний кристалл был непрозрачным, а внешний пропускал свет (например, это мог быть кубик сернистого свинца внутри кристаллов полевого шпата). Другой пример Люилье представляет собой "коронованный куб" (на большом кубе стоит маленький куб), для которого V–E+F=3. Наконец, им же предложен пример многогранника в виде "картинной рамы", для которого V–E+F=0. Дальше различные примеры многогранников, для которых формула Эйлера не верна, посыпались как из рога изобилия.

Один из результатов общего характера состоит в том, что *для простого многогранника с p "сквозными отверстиями" имеет место обобщенная формула Эйлера*

$$V–E+F=2–2p.$$

Для "шайбы" или "продырявленного куба" (куб со сквозным отверстием в форме параллелепипеда), не являющегося простым многогранником, мы, тем не менее, имеем: V–E+F=2. Этот неожиданный эффект был назван *"Эйлеровским капризом"* и послужил началом наших исследований.

В работе рассмотрен класс многогранников (определенных конструктивно) с конечным числом сквозных отверстий и конечным числом граней, которые не являются простыми многогранниками, но удовлетворяют равенству Эйлера E-F+F=2, то есть *изучается "капризное множество многогранников".* Презентация доклада была богато иллюстрирована.

Библиографический список

1. *Вавилов В.В.* Школа математического творчества. М.: РОХОС, 2003.
2. О математических исследованиях учащихся школы им. А.Н. Колмогорова // Труды четвертых Колмогоровских чтений. Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2006. С. 46-58. См. также – Учебно-методическая газета "Математика. 1 сентября". 2007. № 12. С. 23-28.
3. *Вавилов В.В.* Научные конференции школьников // Журнал Потенциал, 2007. № 6. С. 18-24.
4. *Вавилов В.В.* Харитоновские чтения-2007 // Учебно-методическая газета "Математика. 1 сентября", 2007. № 12. С. 14-15.
5. *Вавилов В.В.* Математические успехи школьников. М.: Школа им. А.Н. Колмогорова, "VVV", 2007.

Новые архивные материалы о семье А.Н. Колмогорова в Ярославской губернии

Р.З. Гушель

Выдающийся отечественный математик академик Андрей Николаевич Колмогоров провел раннее детство на Ярославской земле, в семье матери Марии Яковлевны Колмогоровой (1871-1903).

Мария Яковлевна состояла в гражданском браке с ярославским губернским агрономом, выпускником Петровской (ныне – Тимирязевской) академии Николаем Матвеевичем Катаевым. У них родилось двое детей: дочь Татьяна, умершая в младенчестве, и сын Андрей, своим рождением в 1903 году похоронивший мать.

Семья Колмогоровых забрала ребенка, и заботы о нем взяли на себя его тетушки. Одна из них, Вера Яковлевна, усыновила мальчика и заменила ему мать. Н.М. Катаев в том же 1903 году был по службе переведен в другой город и практически не участвовал в воспитании сына.

Детство мальчик провел в Туношне – в имении под Ярославлем, принадлежавшем его деду по матери. Там жила постоянно вся семья. Иногда он жил и в городском доме Колмогоровых в Ярославле на Пробойной (ныне – Советской) улице. В 2003 году на Ярославском доме была установлена мемориальная доска с надписью: "В этом доме в 1903-1910 годах жил выдающийся математик академик Андрей Николаевич Колмогоров". Дом в Туношне до наших дней не сохранился.

Ниже предлагаются малоизвестные материалы, посвященные преимущественно деду ученого Якову Степановичу Колмогорову и прадеду Степану Петровичу.

Степан Петрович Колмогоров родился около 1798 года. Он происходил из обер-офицерских детей и рано начал службу. С 1813 года он – копиист Пензенской казенной палаты. Достаточно быстро продвигаясь по служебной лестнице, он в 1817 году получил первый классный чин. Указом Правительствующего Сената от 29 февраля 1824 года С.П. Колмогоров был переведен в Ярославскую казенную палату асессором [1].

Приведем фрагменты формулярного списка Степана Петровича, характеризующие его деятельность в Ярославской казенной палате:

"...По распоряжению Ярославского гражданского губернатора тайного советника Безобразова командирован был для взыскания накопившихся по Романов-Борисоглебскому уезду казенных недоимок, коих взыскано и в казну поступило более 60000 рублей, где находился со 2 мая по 22 июня 1826 года...В сентябре месяце 1833 года командирован был казенною палатою в город Рыбинск для покупки хлеба, потребного на выкурку для казенных винных магазинов Ярославской губернии вина, коего куплено и доставлено к заводу 8646 кулей всего на сумму 184548 руб. 74 коп., причем против назначенных на покупку и существовавших тогда справочных цен, соблюдено в пользу казны экономии до десяти тысяч рублей…"

В 1836 году С.П. Колмогоров был назначен советником отделения питейного сбора. В дальнейшем он служил, по преимуществу, в этом отделении.

За службу свою он был награжден орденом Св. Станислава 3 степени (1839), орденом Св. Анны 3 степени (1846) и орденом Св. Анны 2 степени (1848).

В 1839 году Степан Петрович получил чин коллежского асессора (VIII класс), дававший право на дворянское достоинство. К этому времени у него уже была семья. В 1832 году он женился на дочери надворного советника Ивана Ивановича Куткина Варваре, и в 1837 году у них родился сын Яков – их единственный ребенок. В 1838 году С.П. Колмогоров купил каменный одноэтажный дом на Пробойной улице в самом центре Ярославля.

Получив чин коллежского асессора, Степан Петрович подал прошение на Высочайшее имя о внесении его с сыном в дворянскую родословную книгу Ярославской губернии и в 1844 году был возведен в дворянское достоинство.

В следующем 1845 году он был переведен по службе в Орловскую казенную палату на ту же должность советника отделения питейных сборов. Судя по формулярному списку, жена и сын переехали вместе с ним в Орел. Но здесь Степан Петрович служил недолго. В мае 1849 года он был уволен в отставку в чине надворного советника и вернулся в Ярославль. Ему в то время едва перевалило за пятьдесят.

В Ярославле он сам стал заниматься винными откупами, поскольку за многие годы службы хорошо освоился с этой сферой деятельности. Однако все документы оформлялись на его жену. Дом в городе С.П. Колмогоров продал ей еще в 1842 году, так что прошения о позволении отдать дом в залог под питейные откупа и другие необходимые документы были составлены от имени В.И. Колмогоровой. Есть основание считать, что Степан Петрович вел свои дела успешно, так как благосостояние семьи росло.

Помимо службы и предпринимательской деятельности, С.П. Колмогоров имел и другие интересы. В собрании рукописей Государственного архива Ярославской области хранится рукописный экземпляр трагедии

Я.Б. Княжнина “Вадим Новгородский”. На первой странице надпись писца: “Степану Колмогорову 1819 года генваря 12 дня”. Очевидно, юноша интересовался театром, если пошел на большой расход – заказал писцу рукописный вариант пьесы. Это было еще в Пензе. Вместе со своим владельцем рукопись переехала в Ярославль и многие годы хранилась в семье.

Прошло 80 лет. Степана Петровича уже не было в живых. Ярославль готовился отметить в 1900 году 150-летний юбилей русского национального театра. Была организована специальная Волковская комиссия для организации этого юбилея, и в нее вошел сын С.П. Колмогорова Яков Степанович. Он передал в дар комиссии свыше 50 номеров театрального журнала “Репертуар и Пантеон” за 1845-1854 годы и 19 тетрадей рукописных пьес из собрания ярославского архитектора П.Я. Панькова. Журналы, как отмечено в протоколе заседания комиссии [2], были в хорошем состоянии. Судя по времени их выхода, можно предположить, что эти журналы были приобретены еще отцом Якова Степановича – ведь ему самому в 1845 году было 8 лет. Очевидно, интерес к театру перешел от отца к сыну – не случайно сын был избран в комиссию по организации юбилея.

Степан Петрович скончался в 1878 году и был похоронен в Ярославле на Леонтьевском кладбище. Жена его умерла семью годами ранее. Точными датами мы, к сожалению, не располагаем, а судим о времени их смерти по времени вступления их сына в права наследования после родителей.

Яков Степанович Колмогоров родился 6 марта 1837 года в Ярославле. Сведений об окончании им среднего учебного заведения у нас нет. Сам он писал о себе в 1878 году в формулярном списке: “По выдержании экзамена, поступил в Демидовский лицей, но по болезни, не окончив курса, уволен 1854 года декабря 1-го”.

Службу свою Яков начал в канцелярии Ярославского уездного предводителя дворянства в 1855 году; в июле 1856 года он получил чин коллежского регистратора (XIV класс), в 1859 году – губернского секретаря (XII класс). Однако в 1861 году Я.С. Колмогоров был уволен со службы по прошению [3].

С апреля 1861 по декабрь 1868 года Яков Степанович был в отставке. Возможно, он вместе с родителями занимался винными откупами. В декабре 1867 года его избрали в заседатели Ярославской дворянской опеки.

С 1869 года Я.С. Колмогоров служил по дворянским выборам. В 1869-1880 годах он – депутат дворянства Ярославского уезда, в 1881-1886 годах – Мологского [4].

С 1 июля 1885 года по 1892 год включительно Яков Степанович – Угличский уездный предводитель дворянства. В 1891 году он получил чин статского советника (V класс).

Служба Я.С. Колмогорова отмечена орденами Св. Станислава 2 степени и Св. Владимира 4 степени, бронзовой медалью в память войны 1853-1856 гг. и серебряной медалью в память Императора Александра III.

В 1875 году Яков Степанович был утвержден в звании почетного смотрителя при Ярославском городском трехклассном училище. Почетный смотритель считался состоящим на службе и получал чины по ведомству Министерства народного просвещения, однако жалованья ему не полагалось. Более того, он был обязан ежегодно вносить некоторую фиксированную сумму на содержание училища. Яков Степанович состоял почетным смотрителем в течение 30 лет и ежегодно вносил на нужды училища по 150 рублей. Но и чины коллежского секретаря (X класс), и титулярного советника (IX класс) он получил по учебному ведомству [3].

Женой Я.С. Колмогорова была Юлия Ивановна, урожденная Трапезникова, дочь подполковника Ивана Михайловича Трапезникова. В семье было семеро детей: шесть дочерей и сын. Младшая дочь Якова Степановича Мария, родившаяся 25 ноября 1871 года, и стала матерью будущего академика.

Помимо городского дома на Пробойной улице, полученного от родителей, у Я.С. Колмогорова было имение в селе Туношна Бурмакинской волости Ярославского уезда. Это имение он купил в 1879 году, и семья его жила преимущественно там. Были у Колмогоровых земли и в других уездах Ярославской губернии. По состоянию на 1900 год Я.С. Колмогорову принадлежало более 4000 десятин земли и три каменных дома в Ярославле, оцененные в 70000 рублей. Местонахождение двух домов пока не установлено.

Особое внимание стоит обратить на деятельность Я.С. Колмогорова в качестве предводителя угличского дворянства. Как раз в те годы здесь шли работы по реставрации дворца царевича Дмитрия, приуроченные к 300-летию со времени его гибели. Яков Степанович возглавлял комиссию по осмотру дворца; именно на основании заключения этой комиссии в 1889 году было принято решение о реставрации [5].

Председателем комиссии по восстановлению этого памятника являлся ярославский губернатор. Я.С. Колмогоров был его заместителем. Он не только руководил ходом реставрационных работ, но внес значительную сумму из своих личных средств на восстановление дворца. Всего за годы реставрационных работ от разных лиц к ярославскому губернатору поступило пожертвований на сумму около 20 тысяч рублей. Я.С. Колмогоровым было пожертвовано 3200 рублей, его взнос уступал только взносу Товарищества Ярославской Большой мануфактуры (3500 рублей) [6]. 3 июня 1892 года в присутствии Великого Князя Сергея Александровича и Великой Княгини Елизаветы Федоровны дворец был торжественно открыт [7].

Я.С. Колмогоровым был создан во дворце музей отечественных древностей, открытый для широкой публики. Среди почетных членов музея были не только местные общественные деятели и краеведы, но и высокие государственные чиновники, в том числе обер-прокурор Священного Синода К.П. Победоносцев, министр внутренних дел И.Н. Дурново и министр народного просвещения И.Д. Делянов [8].

По должности своей уездный предводитель дворянства был председателем уездного училищного совета. Всего в ведении угличского уездного училищного совета состояло в то время 5 приходских училищ в Угличе и 29 начальных народных училищ в селах уезда. Находясь во главе совета, Я.С. Колмогоров немало сделал для укрепления земских школ, которые тогда губернские власти хотели, против воли населения, слить с церковно-приходскими. Предводителю удалось отстоять земские школы в уезде. Более того, он был инициатором повышения жалованья учителям, имевшим значительный педагогический стаж, и эта инициатива его была воплощена в жизнь [9].

Помимо председательства в училищном совете, Я.С. Колмогоров, будучи предводителем, состоял председателем уездных присутствий: по крестьянским делам, по воинской повинности, по питейным делам. В те же годы он был почетным мировым судьей и гласным Угличского уездного земского собрания.

Яков Степанович являлся одним из членов-учредителей Ярославской губернской ученой архивной комиссии (ЯГУАК). Он состоял в ней с 1889 года до самой своей кончины в 1909 году. И Волковская комиссия, созданная для организации юбилея русского театра, была подкомиссией ЯГУАК.

В разные годы Яков Степанович был председателем отдела Российского общества сельскохозяйственного птицеводства, действительным членом Ярославского естественно-исторического общества, членом Общества для содействия народному образованию в Ярославской губернии.

В семье Колмогоровых большое значение придавалось образованию, книге. Дочери учились в Ярославской женской Мариинской гимназии, сын – в Училище Правоведения в С.-Петербурге. В доме была богатейшая библиотека, часть которой Ю.И. Колмогорова в 1914 году передала в библиотеку ЯГУАК.

Яков Степанович скончался в возрасте 72 лет 24 июня 1909 года и был похоронен, как и его отец, на Леонтьевском кладбище в Ярославле. Извещение о его кончине было помещено в ярославской газете "Голос", № 101. Вскоре после смерти Я.С. Колмогорова его семья покидает Ярославль и переезжает в Москву.

Библиографический список

1. Государственный архив Ярославской области. Ф. 79. Оп. 5. Дело 1558. Об определении в канцелярию Ярославского уездного предводителя дворянства бывшего студента Демидовского лицея Якова Колмогорова. Л. 3-6.
2. Труды Ярославской губернской ученой архивной комиссии. Ярославль, 1914. Кн. VI. Вып. 1. С. 96-97.
3. Государственный архив Ярославской области. Ф. 213. Оп. 1. Дело 528. О представлении к награде орденами за отличие по службе депутатов дворянства Ухтомского и Колмогорова. Л. 14-18 (об).
4. Список гг. губернских и уездных предводителей и депутатов дворянства Ярославской губернии / Сост. П.А. Тихвинский. Ярославль, 1898. С. 20.
5. Акт осмотра дворца царевича Димитрия в городе Угличе. Ярославль, 1889. С. 1-5.
6. Ярославские губернские ведомости. 1892. № 26. Ч. неоф. С. 2.
7. Ярославские епархиальные ведомости. 1892. № 26. Стб. 401-410.
8. Государственный архив Ярославской области. Филиал в г. Угличе. Ф. 40. Оп. 1. Дело 8. Протоколы комиссии по управлению Угличским музеем древностей. Л. 1, 2, 4-6.
9. *Гушель Р.З.* О семье Колмогоровых в Ярославской губернии // Труды четвертых Колмогоровских чтений. Ярославль, 2006. С. 58-64.

Глава 2

Математика в ее многообразии

t-стабильность с частично упорядоченным множеством наклонов[1]

С.А. Кулешов

Здесь вводится некоторое уточнение понятия *t-стабильности* в триангулированной категории, позволяющее избавиться от огромного числа, в сущности одинаковых, t-стабильностей.

Введение

Понятие стабильности появилось в рамках геометрической теории инвариантов при решении задачи о построении многообразия модулей расслоений на кривой. Фактически при этом строилось многообразие орбит действия некоторой группы на многообразии. Оказалось, что «хорошее» многообразие орбит получается только если принимать в расчет так называемые стабильные и полустабильные орбиты, игнорируя нестабильные. Опуская определение таких орбит, можно сказать, что благодаря критерию Гильберта можно ввести численный инвариант, называемый *наклоном* расслоения, и сформулировать критерий того, что данное расслоение лежит в (полу)стабильной орбите.

Напомним, что наклоном расслоения E называется число $\mu(E) = \frac{\deg E}{\mathrm{rk} E}$, где $\deg E$ – степень расслоения, а $\mathrm{rk} E$ – его ранг. В терминах наклона расслоение E попадает в (полу)стабильную орбиту и называется (полу)стабильным, если для любого подпучка $\mathcal{F}$ его пучка локальных сечений $\mathcal{E}$ выполняется неравенство:

$$\mu(\mathcal{F}) < \mu(\mathcal{E})$$

(нестрогое неравенство для полустабильного случая).

Кроме возможности построить многообразие модулей, понятие стабильности наделяет расслоения дополнительными очень полезными свойствами, два основных из которых звучат так:

1. Если E и F – полустабильные расслоения, причем $\mu(E) > \mu(F)$, то $\mathrm{Hom}(E, F) = 0$.

[1]Работа частично поддержана грантом № 07-01-92211-НЦНИЛ$_a$.

2. Любое расслоение обладает канонической фильтрацией Гардера–Нарасимхана:

$$[size=1.5em] X F^0 X F^1 X F^2 X \quad \cdots \quad F^n X F^{n+1} X = 0 \; G_1 G_2 G_3 G_n$$

(здесь каждый вертикальный эпиморфизм – часть короткой точной последовательности $0 F^i X F^{i-1} X G_i 0$), все факторы которой $G_i = F^{i-1}X/F^iX$ полустабильны и $\mu(G_i) < \mu(G_j)$ для всех $i < j$.

В связи с этими замечательными свойствами возникло желание обобщить концепцию стабильности так, чтобы она стала применима к объектам как абелевой, так и производной категорий когерентных пучков, а также более общих линейных триангулированных категорий, позволяя строить в них канонические фильтрации, ставить и исследовать соответствующие проблемы модулей и т.п.

В 1997 г. А.Н. Рудакову удалось разработать удовлетворительную теорию стабильности для объектов абелевой категории [6], но переход к триангулированным категориям оказался принципиально трудным, поскольку рабочее определение стабильных объектов использовало подобъекты, которых, естественно, в триангулированных категориях не наблюдается.

Ситуация изменилась после работы Т. Бриджленда [2], в которой он предложил гениальный обход проблемы подобъектов. Автор резонно заметил, что подобъект и факторобъект связаны с исходным объектом через короткую точную последовательность, естественным обобщением которых в триангулированных категориях служат отмеченные треугольники. Поэтому в качестве фильтрации объекта X триангулированной категории можно рассматривать последовательность отмеченных треугольников:

$$[size=1.4em] X_{\varphi_0} X_{\varphi_1} X_{\varphi_n} {}^{q_0\, q_1\, q_n} X = F^0 X_{p_1} F^1 X_{p_2} F^2 X \cdots F^n X_{p_{n+1}} F^{n+1} X = 0$$

(Для экономии места и облегчения восприятия будем обозначать такого сорта фильтрации через $X \rightsquigarrow (X_{\varphi_0}, X_{\varphi_1}, \ldots, X_{\varphi_n})$, упоминая лишь факторы, а чтобы отличать их от стандартных фильтраций объектов абелевой категории, введем термин t-фильтрации.)

Используя t-фильтрации, Бриджленд разработал теорию данных стабильности на триангулированной категории [2, 3]. Несмотря на то, что определение Бриджленда выделяло лишь небольшой класс разумных стабильностей, его работы носят революционный характер.

Определение t-стабильности с линейно упорядоченным множеством наклонов

Комбинируя подход Т. Бриджленда с давнишними исследованиями семинара по исключительным расслоениям (частично опубликованными в работе А.Н. Рудакова [6]), А.Н. Рудаков, А.Л. Городенцев и автор этой заметки предложили понятие стабильности в триангулированной категории (или, короче, *t-стабильности*), которое обобщает определение Т. Бриджленда и позволяет единообразно рассматривать – как частные случаи дестабилизирующих, в нашем смысле, фильтраций – и канонические фильтрации Гардера–Нарасимхана, возникающие из наклонов гизекеровского типа, и гротендиковскую фильтрацию пучка подпучками кручения чистой коразмерности, и ортогональное разложение объекта производной категории по исключительному базису.

Определение 1. Пусть $\mathcal{T}$ – триангулированная категория, Φ – линейно упорядоченное множество. Предположим, что для каждого элемента $\varphi \in \Phi$ задана строго полная непустая подкатегория $\Pi_\varphi \subset \mathcal{T}$. Пара $(\Phi, \{\Pi_\varphi\}_{\varphi\in\Phi})$ называется *t-стабильностью*, если

1. функтор сдвига градуировки $X \mapsto X[1]$ действует на множестве Φ неубывающим автоморфизмом, т. е. $\exists\ \tau \in \operatorname{Aut}\Phi : \Pi_\varphi[1] = \Pi_{\tau(\varphi)}$ и $\tau(\varphi) \geq \varphi\ \forall\varphi$;
2. $\forall\,\psi > \varphi \in \Phi \quad \operatorname{Hom}^0(\Pi_\psi, \Pi_\varphi) = 0$;
3. любой ненулевой объект $X \in \mathcal{T}$ обладает конечной t-фильтрацией со строго возрастающими полустабильными факторами, т. е. вписывается в башню Постникова

$$[size = 1.6em] X_{\varphi_0}\, X_{\varphi_1}\, X_{\varphi_n}{}^{q_0\, q_1\, q_n} X = F^0 X_{p_1} F^1 X_{p_2} F^2 X \cdots F^n X_{p_{n+1}} F^{n+1} X = 0 \tag{1}$$

с ненулевыми $X_{\varphi_i} \in \Pi_{\varphi_i}$ и $\varphi_i < \varphi_{i+1}$.

Мы будем называть t-фильтрацию 2 *фильтрацией Гардера-Нарасимхана* (или, короче, *HN-фильтрацией*) объекта X, ее факторы X_{φ_i} – Φ-полустабильными факторами, а подкатегории Π_φ – полустабильными подкатегориями наклона φ.

Оказывается, такое определение позволяет доказать функториальность HN-фильтрации [7]. Несколько упрощая оригинальную красивейшую формулировку, функториальность можно сформулировать следующим образом:

Теорема 1. *Пусть $X \rightsquigarrow (X_{\varphi_0}, \ldots, X_{\varphi_n})$ и $Y \rightsquigarrow (Y_{\psi_0}, \ldots, Y_{\psi_m})$ – HN-фильтрации объектов X и Y. Рассмотрим объединение множеств наклонов*

$$(\chi_0, \ldots, \chi_{n+m+1}) = (\varphi_0, \ldots, \varphi_n) \cup (\psi_0, \ldots, \psi_m).$$

и доопределим фильтрации:

$$X \rightsquigarrow (X_{\chi_0}, \ldots, X_{\chi_{n+m+1}}), \quad Y \rightsquigarrow (Y_{\chi_0}, \ldots, Y_{\chi_{n+m+1}}),$$

где $F^i X = F^s X$ *при* $\varphi_{s-1} < \chi_i \leq \varphi_s$ *и* $F^i = F^s Y$ *при* $\psi_{s-1} < \chi_i \leq \psi_s$. *Тогда любой морфизм* $f : X \to Y$ *индуцирует морфизм башен Постникова, в том смысле, что для каждого* s *возникает морфизм отмеченных треугольников:*

$$X_{\chi_s} F^s X F^{s+1} X < h_s < f_s < f_{s+1} Y_{\chi_s} F^s Y F^{s+1} Y,$$

где $f_0 = f$.

В частности, из этой теоремы следует каноничность HN-фильтрации.

На множестве всех t-стабильностей на данной категории естественно вводится отношение частичного порядка «грубее–тоньше», которое получается в результате «факторизации» множества наклонов:

Определение 2. Пусть $(\Phi, \{\Pi_\varphi\}_{\varphi\in\Phi})$ и $(\Psi, \{P_\psi\}_{\psi\in\Psi})$ – две t-стабильности на триангулированной категории $\mathcal{T}$, на наклонах которых сдвиг градуировки действует автоморфизмами τ_Φ и τ_Ψ. Скажем, что Φ тоньше, чем Ψ (а Ψ грубее Φ), и обозначим это как $\Phi \preceq \Psi$, если существует сюръекция $r : \Phi\Psi$, такая, что

1. $r\tau_\Phi = \tau_\Psi r$;
2. $\varphi' > \varphi'' \Leftrightarrow r(\varphi') \geq r(\varphi'')$;
3. $\forall\, \psi \in \Psi \quad P_\psi = \big\langle \Pi_\varphi |\ \varphi \in r^{-1}(\psi) \big\rangle$.

Ясно, что чем тоньше t-стабильность, тем больше информации о категории она несет. В частности, зная все тончайшие t-стабильности на данной триангулированной категории, можно описать все возможные ограниченные t-структуры на ней (см. [5]). Поскольку это весьма интересный факт, покажем, как из t-стабильности построить t-структуру.

Напомним (см. в [4]), что t-структурой на триангулированной категории $\mathcal{T}$ называется пара $\big(D^{\leq 0}, D^{\geq 0}\big)$ строго полных подкатегорий, удовлетворяющих следующим условиям:

1. $D^{\leq 0} \subset D^{\leq 0}[-1]$ и $D^{\geq 0} \supset D^{\geq 0}[-1]$;
2. $\mathrm{Hom}^0(D^{\leq 0}, D^{\geq 0}[-1]) = 0$;
3. $\forall\, X \in \mathcal{T}$ существует отмеченный треугольник

$$X_{\geq 1}{}^q X_p X_{\leq 0} \quad ,$$

где $X_{\geq 1} \in D^{\geq 0}[-1]$ и $X_{\leq 0} \in D^{\leq 0}$.

Если, наряду с уже перечисленными, выполняется дополнительное условие:

4) $\forall\, X \in \mathcal{T}\ \ \exists\, m,\, n \in \mathbb{Z}$, такие что $X \in D^{\geq 0}[-m] \cap D^{\leq 0}[-n]$,

то t-структура называется ограниченной. Как обычно, мы полагаем

$$D^{\leq n} = D^{\leq 0}[-n] \qquad \text{и} \qquad D^{\geq n} = D^{\geq 0}[-n]\ .$$

Для подмножества S объектов триангулированной категории $\mathcal{T}$ обозначим через $\langle S\rangle$ наименьшую строго полную замкнутую относительно расширений подкатегорию в $\mathcal{T}$, содержащую все объекты из S. Заметим, что если $(\Phi, \{\Pi_\varphi\}_{\varphi\in\Phi})$ – t-стабильность на $\mathcal{T}$ и $\Psi \subset \Phi$, то $\langle \Pi_\varphi |\ \varphi \in \Psi\rangle$ состоит из тех и только тех объектов, которые обладают HN-фильтрацией $X \rightsquigarrow (X_{\psi_0}, \ldots, X_{\psi_k})$ с $\psi_i \in \Psi$.

Лемма 1. *Пусть $(\Phi, \{\Pi_\varphi\}_{\varphi\in\Phi})$ – t-стабильность на триангулированной категории $\mathcal{T}$. Предположим, что существует разложение множества Φ на две непересекающиеся части: $\Phi = \Phi_- \sqcup \Phi_+$, удовлетворяющее условию: для любых $\varphi_- \in \Phi_-$ и $\varphi_+ \in \Phi_+$ выполнено неравенство $\varphi_- < \varphi_+$. Тогда пара подкатегорий*

$$\mathcal{T}^{\geq 0} = \langle \Pi_\varphi |\ \varphi \in \tau(\Phi_-)\rangle\,, \quad \mathcal{T}^{\leq 0} = \langle \Pi_\varphi |\ \varphi \in \Phi_+\rangle$$

определяет t-структуру на $\mathcal{T}$ (напомним, что τ – автоморфизм линейно упорядоченного множества Φ, соответствующий сдвигу на $\mathcal{T}$).

Известно [5], что все t-структуры на данной категории получаются таким образом.

Проиллюстрируем все сказанное на примере ограниченной производной категории когерентных пучков на эллиптической кривой.

t-стабильность на эллиптической кривой

Пусть $\mathcal{D}$ – ограниченная производная категория когерентных пучков на гладкой эллиптической кривой C. Обозначим через $\Phi_0 = \mathbb{Q} \cup C$ объединение множества рациональных чисел и множества точек на кривой C с принудительно введенным линейным порядком. Считая, что любая точка $x \in C$ больше произвольного рационального числа, получим линейный порядок на Φ_0.

В качестве множества наклонов Φ выберем прямое произведение $\Phi_0 \times \mathbb{Z}$, на котором введен лексикографический порядок:

$$(\varphi, n) < (\varphi', n'), \quad \text{если } n < n' \quad \text{или } n = n' \quad \text{и } \varphi < \varphi'.$$

Автоморфизм τ из определения t-стабильности действует так: $\tau(\varphi, n) = (\varphi, n+1)$.

Полустабильные категории определим следующим образом:

$$\Pi_{(\varphi,n)} = \begin{cases} \{E[n] | \, E \text{ – полустабильное}^1 \text{ расслоение с } \mu(E) = q\}, & \varphi = q \in \mathbb{Q}; \\ \{\mathcal{F}[n] | \, \mathcal{F} \text{ – пучок кручения с носителем в точке } x\}, & \varphi = x \in C. \end{cases}$$

Очевидно, $\{\Pi_{(\varphi,n)}\}_{(\varphi,n)\in\Phi}$ – t-стабильность на категории D, но не тончайшая.

Чтобы получить тончайшую t-стабильность, нужно измельчить полустабильные категории $\Pi_{(q,n)}$ $(q \in \mathbb{Q})$, состоящие из сдвигов $E[n]$ полустабильных расслоений наклона q.

Хорошо известно [1], что $\Pi_{(q,n)}$ можно рассматривать как многообразие $\mathfrak{m}_q$, изоморфное самой кривой C. Более того, если $F, G \in \mathfrak{m}_q$ и $F \neq G$, то $\mathrm{Hom}(F, G) = \mathrm{Hom}(G, F) = \mathrm{Ext}^1(F, G) = \mathrm{Ext}^1(G, F) = 0$.

Если теперь «раздуть» $\bar{\Phi} \to \Phi$ множество наклонов Φ, вклеив вместо каждой пары (q, n) множество $\mathfrak{m}_q \times n$ с произвольным линейным порядком на нем и определив $\Pi_{(F,n)}$ как подкатегорию $\langle F[n] \rangle$, где $F \in \mathfrak{m}_q$, мы получим тончайшую t-стабильность.

Как видно из этого примера, t-стабильность в сильной степени зависит от линейного порядка на многообразиях, который мы вводим принудительно. В частности, каждое подмножество точек эллиптической кривой задает свою t-структуру.

Такое обилие t-стабильностей, которые отличаются друг от друга лишь порядком наклонов, крайне неудобно. Более того, хотелось бы отказаться от неестественного линейного порядка на точках кривой, считая последние абсолютно равноправными. В связи с этим предлагается

[1] Здесь полустабильность понимается в смысле определения, сформулированного во введении.

некоторое, на мой взгляд, очень естественное уточнение определения t-стабильности.

Частичный порядок на множестве наклонов

Введем обозначение «$\varphi\ \ \psi$» для несравнимых элементов частично упорядоченного множества (ЧУМ).

Определение 3. Пусть $\mathcal{T}$ – триангулированная категория, Φ – ЧУМ. Предположим, что для каждого элемента $\varphi \in \Phi$ задана строго полная непустая подкатегория $\Pi_\varphi \subset \mathcal{T}$. Пара $(\Phi, \{\Pi_\varphi\}_{\varphi \in \Phi})$ называется *t-стабильностью* с частично упорядоченным множеством наклонов (или просто *ЧУМ t-стабильностью*), если

1. функтор сдвига градуировки $X \mapsto X[1]$ действует на множестве Φ неубывающим автоморфизмом, т. е. $\exists\ \tau \in \operatorname{Aut}\Phi$: $\forall \varphi\ \ \Pi_\varphi[1] = \Pi_{\tau(\varphi)}$ и $\tau(\varphi) \geq \varphi$;
2. $\operatorname{Hom}^0(\Pi_\psi, \Pi_\varphi) = 0$, если $\psi > \varphi \in \Phi$ или $\psi\ \ \varphi$;
3. любой ненулевой объект $X \in \mathcal{T}$ обладает конечной t-фильтрацией с «возрастающими» полустабильными факторами, т. е. вписывается в башню Постникова

$$[size = 1.6em] X_{\varphi_0} X_{\varphi_1} X_{\varphi_n} {}^{q_0\, q_1\, q_n} X = F^0 X_{p_1} F^1 X_{p_2} F^2 X \cdots F^n X_{p_{n+1}} F^{n+1} X = 0 \tag{2}$$

с ненулевыми $X_{\varphi_i} \in \Pi_{\varphi_i}$ и при $i < j\ \ \varphi_i < \varphi_j$ или $\varphi_i\ \ \varphi_j$.

Перейдем к простым, но полезным свойствам ЧУМ t-стабильности.

Замечание 1. Пусть $X \rightsquigarrow (X_{\varphi_0}, \ldots, X_{\varphi_n})$, $Y \rightsquigarrow (Y_{\psi_0}, \ldots, Y_{\psi_m})$, причем для любой пары индексов i, j $\psi_j > \varphi_i$ или $\psi_j\ \ \varphi_i$. Тогда $\operatorname{Hom}^{\leq 0}(Y, X) = 0$.

Доказательство легко получается двойной индукцией по длине фильтраций n и m.

Замечание 2. Если $\varphi, \psi \in \Phi$ и $\varphi > \psi$ или $\varphi\ \ \psi$, то $\operatorname{Hom}^{\leq 0}(\Pi_\varphi, \Pi_\psi) = 0$.

Доказательство. Пусть $q > 0$. Тогда $\operatorname{Hom}^{-q}(\Pi_\varphi, \Pi_\psi) = \operatorname{Hom}^0(\Pi_{\tau^q(\varphi)}, \Pi_\psi) = 0$, так как $\tau^q(\varphi) \geq \varphi$ или $\tau^q(\varphi)\ \ \varphi$, $\varphi > \psi$ или $\varphi\ \ \psi$.

Замечание 3. Полустабильные категории Π_φ замкнуты относительно расширений, т. е. если $X, Y \in \Pi_\varphi$ и XEY – отмеченный треугольник, то $E \in \Pi_\varphi$.

Доказательство. Пусть $E \rightsquigarrow (E_{\varphi_0}, \ldots, E_{\varphi_n})$ и $n > 0$. Поскольку $\operatorname{Hom}(E, E_{\varphi_0}) \neq 0$, то либо $\operatorname{Hom}(X, E_{\varphi_0}) \neq 0$, либо $\operatorname{Hom}(Y, E_{\varphi_0}) \neq 0$. Значит, $\varphi \leq \varphi_0$. С другой стороны, $\operatorname{Hom}(E_{\varphi_n}, E) \neq 0$. Поэтому $\operatorname{Hom}(E_{\varphi_n}, X)$

$\neq 0$ или $\mathrm{Hom}(E_{\varphi_n}, Y) \neq 0$, откуда $\varphi_n \leq \varphi$. Таким образом, $\varphi_n \leq \varphi_0$, что противоречит определению t-стабильности.

Таким образом, видно, что ЧУМ t-стабильность ничем не хуже обычной t-стабильности. Более того, поскольку любой частичный порядок на конечном множестве можно продолжить до линейного, функториальность HN-фильтрации в смысле теоремы 1 имеет место и для ЧУМ t-стабильности. В частности, HN-фильтрация объекта определена однозначно с точностью до перестановки факторов.

С другой стороны, скорректированное определение избавляет нас от огромного числа по существу одинаковых t-стабильностей. В частности, на ограниченной подкатегории когерентных пучков на гладкой эллиптической кривой C существует единственная тончайшая ЧУМ t-стабильность, множество наклонов которой – объединение экземпляров самой кривой $\bigcup\limits_{q \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}} \mathfrak{m}_q \times n$; $\mathfrak{m}_\infty$ состоит из точек кривой и «параметризует» небоскребы, сосредоточенные в одной точке, а $\mathfrak{m}_q$ при $q \in \mathbb{Q}$ «параметризует» стабильные расслоения наклона q на этой кривой. Порядок на этом множестве вводится совершенно естественно:

$$(F_q, n) > (F'_{q'}, n'), \quad \text{если } n > n' \text{ или } n = n', \text{ но } q > q'; \text{ и } (F_q, n) \quad (F'_q, n).$$

Библиографический список

1. *Atiyah M.F.* Vector Bundles Over an Elliptic Curve. Proc. Lond. Math. Soc, **VII** (1957) 414-452.
2. *Bridgeland T.* Stability conditions on triangulated categories. arXiv:math.AG/0212237.
3. *Bridgeland T.* Stability conditions on K3 surfaces. arXiv:math.AG/0307164 v1.
4. *Гельфанд С.И., Манин Ю.И.* Методы гомологической алгебры. М.: Наука, 1988. Т. 1
5. *Городенцев А.Л., Кулешов С.А., Рудаков А.Н.* t-стабильности на триангулированной категории. Известия РАН: сер. матем. 68:4 (2004) С. 117-150.
6. *Rudakov A.* Stability for an abelian category. J. Algebra 197 (1997). P. 231–245. № 1
7. *Gorodentsev A.L., Kuleshov S.A.* On finest and modular t-stabilities. MPIM2005-6

О конечных почтикольцах, порожденных эндоморфизмами

Е.С. Гарипова, Л.С. Казарин

Почтикольцом называется алгебраическая система R с двумя операциями – сложением и умножением, удовлетворяющая следующим условиям:

(i) $(R,+)$ – группа (не обязательно абелева);

(ii) $(R,\cdot)$ – полугруппа;

(iii) для любых a, b, c $\in R: (a+b)c = ac + bc$.

Типичным примером почтикольца является множество всех отображений M(G) конечной группы G в себя с операциями поточечного сложения и суперпозиции функций в качестве умножения.

Говорят, что p-группа G *специальна*, если либо G – элементарная абелева группа, либо $G' = \Phi(G) = Z(G)$ элементарна. Кроме того, G называется *экстраспециальной*, если G – неабелева специальная группа и $G' = p$.

Если G – экстраспециальная p-группа, то $G = A_1 * A_2 * \ldots * A_n$, где каждая A_i – экстраспециальная группа порядка p^3. Целое число n называется *шириной* группы G. Для заданного p имеются ровно две неизоморфные экстраспециальные p-группы порядка p^3. В случае p=2 соответствующие группы – это кватернионная группа порядка 8 и диэдральная группа порядка 8. Поэтому если G – экстраспециальная 2-группа ширины n, то G изоморфна $(Q_8)^n$ или $(Q_8)^{n-1} * D_8$. В первом случае, говорят, что G – это группа типа "-", во втором – группа типа "+".

Предположим, что G – экстраспециальная группа, $Z(G) = \langle z\rangle$ и $\overline{G} = G/Z(G)$. Тогда $\overline{G}$ – векторное пространство над GF(p) и $|z| = p$.

Рассмотрим строение почтикольца E(G), содержащегося в M(G), порожденного эндоморфизмами экстраспециальной 2-группы G порядка 2^{2n+1} в случае n=2.

E(G) – это наименьшее подпочтикольцо кольца M(G), содержащее End(G). Поскольку $|M(G)| = 2^{(2n+1)2^{2n+1}}$, то, очевидно, что

$$|E(G)| \leqslant 2^{(2n+1)2^{2n+1}}.$$

Пусть G – экстраспециальная 2-группа ширины 2 типа "-". Тогда она будет являться центральным произведением группы кватернионов и группы диэдра.

D_8 и Q_8 имеют одинаковые порядки, равные 8, и состоят из элементов вида $a^s b^t$, где $0 \leqslant s \leqslant 3$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Определяющие соотношения в группе кватернионов:

$b^4 = 1$,
$a^2 = b^2$,
$aba = b$.
Определяющие соотношения в группе диэдра:
$a^4 = 1$,
$b^2 = 1$,
$b^{-1}ab = a^{-1}$.

Склеивать группы будем по центрам, циклическим подгруппам второго порядка:
$Z(D_8) \cong Z(Q_8) \cong < a^2 >$,
$G = D_8 * Q_8$,
$|G| = \frac{8*8}{2} = 32, |Z(G)| = |G'| = 2$,
$|G/Z(G)| = 32/2 = 2^4 = 16$.

Отображения из E(G), посылающие любой элемент G в элементы центра 0 или z, образуют в E(G) идеал I. Отображения эти на G/Z(G) будут тождественно равны нулю.

Поскольку $\varphi(a+z) = \varphi(a) + \varphi(z)$ для любого эндоморфизма φ, $\forall a \in G$, $\forall z \in Z(G) = G'$, то, зная значение эндоморфизма на представителях смежного класса по Z и на элементе z, получаем значение на любом элементе группы.

Представители смежных классов G по Z:

$\alpha_1 = (0, a_2)$,	$(a_1, b_2) = \alpha_6$,	$(b_1, a_2 + b_2) = \alpha_{11}$,
$\alpha_2 = (0, b_2)$,	$(a_1, a_2 + b_2) = \alpha_7$,	$(a_1 + b_1, 0) = \alpha_{12}$,
$\alpha_3 = (0, a_2 + b_2)$,	$(b_1, 0) = \alpha_8$,	$(a_1 + b_1, a_2) = \alpha_{13}$,
$\alpha_4 = (a_1, 0)$,	$(b_1, a_2) = \alpha_9$,	$(a_1 + b_1, b_2) = \alpha_{14}$,
$\alpha_5 = (a_1, a_2)$,	$(b_1, b_2) = \alpha_{10}$,	$(a_1 + b_1, a_2 + b_2) = \alpha_{15}$.

Один из представителей является нулем группы, и значение любого эндоморфизма из End(G) на этом элементе равно нулю. Остальные элементы из системы представителей вместе с элементом z, являющимся единственным ненулевым элементом из Z, определяют любое отображение из E(G), лежащее в I. Все такие отображения образуют линейное векторное пространство над полем GF(2), так как экспонента Z равна двум.

Далее будет показано, что имеется 2^{2n} линейно независимых над GF(2) функций, лежащих в E(G) и отображающих G в Z.

Элемент z содержится в ядре любого такого эндоморфизма. Образ такого эндоморфизма – циклическая подгруппа второго порядка, а ядро – абелева подгруппа группы G индекса 2. Таких подгрупп в G:

$$\frac{p^{2n} - 1}{p - 1} = \frac{2^{2 \cdot 2} - 1}{2 - 1} = 2^4 - 1 = 15.$$

Следовательно, имеется 15 ненулевых эндоморфизмов: $\varphi_1, ..., \varphi_{15}$, таких что $|Ker(\varphi_i)| = 8$, $\varphi_i(\alpha_j) = \begin{cases} z, \\ 0. \end{cases}$

$\varphi_i^2(\alpha_j) = 0$, $\sum_{i=1}^{15} \varphi_i = 0$. Действие их представлено в таблице **1**.

Каждый эндоморфизм группы G индуцирует линейное преобразование на элементарной абелевой фактор-группе $G/Z(G)$. Будем считать ее линейным векторным пространством по сложению над GF(2), оснащенным билинейной формой.

$xZ + yZ = (x + y)Z$.

Скалярное произведение – операция коммутирования:

$(x, y) = -(y, x)$,

$(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$,

$(x, x) = 0$, так как $xx^{-1}xx^{-1} = 1$.

По теореме Ваддербарна множество автоморфизмов равномощно полному матричному кольцу. $|Aut(G)| = |\mathfrak{M}_{2n}(2)| = 2^{(2n)^2} = 2^{4n^2} = 2^{16}$

Убедимся далее, что в определенном нами линейном пространстве сохраняется квадратичная форма.

Пусть теперь d_1, d_2 - инволютивные образующие группы диэдра, $d_1 = a_1b_1$, $d_2 = b_1$, а q и q' - образующие группы кватернионов, тогда:

$[d_1, d_2] = 1$,

$[q, q'] = 1$,

$[d_1, q] = [d_1, q'] = 0$,

$[d_2, q] = [d_2, q'] = 0$.

Любой элемент g из G представим в виде линейной комбинации базисных элементов.

$$g = x_1d_1 + x_2d_2 + x_3q + x_4q'.$$

Зададим на линейном пространстве следующую квадратичную форму:

$$Q(g) = x_1x_2 + x_3^2 + x_3x_4 + x_4^2.$$

Очевидно, что элемент g можно представить в виде суммы двух компонент: $a \in < d_1, d_2 >$ и $b \in < q, q' >$. Тогда x_1x_2 – это вклад элемента a в квадратичную форму, а $x_3^2 + x_3x_4 + x_4^2$ – вклад b.

Если Q(a)=1, а это возможно только когда $x_1 = x_2 = 1$, то при $\forall b \neq 0, Q(g) = Q(a + b) = 0$. Если же b=0, то $Q(g) = 1$.

В случае, когда Q(a)=0 (варианты: $x_1 = x_2 = 0$; $x_1 = 1, x_2 = 0$ и $x_1 = 0, x_2 = 1$), для сохранения квадратичной формой нулевого значения необходимо, чтобы b было равно 0.

Получаем пять ненулевых элементов, на которых квадратичная форма обращается в 0:

$(1,0,0,0) = d_1,$
$(0,1,0,0) = d_2,$
$(1,1,1,0) = d_1 + d_2 + q,$
$(1,1,0,1) = d_1 + d_2 + q',$
$(1,1,1,1) = d_1 + d_2 + q + q'.$

Заметим, что эти элементы в группе G имеют порядок, равный 2. Построим автоморфизм θ, циклически сдвигающий найденные инволютивные элементы:

$\theta(d_1) = d_2,$
$\theta(d_2) = d_1 + d_2 + q,$
$\theta(d_1 + d_2 + q) = d_1 + d_2 + q',$
$\theta(d_1 + d_2 + q') = d_1 + d_2 + q + q',$
$\theta(d_1 + d_2 + q + q') = d_1.$

Этот автоморфизм будет сохранять заданную квадратичную форму.

В выбранном базисе его матрица имеет следующий вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица билинейной формы, составленная из скалярных произведений соответствующих базисных элементов, выглядит так:

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что соотношение $A\Phi A^{-1} = \Phi$ выполнено, а значит, автоморфизм сохраняет билинейную форму.

Пусть ζ – эндоморфизм, такой что: $\zeta = 1 + \theta + \theta^2 + \theta^3 + \theta^4$,

$\kappa = 2\gamma + \delta$ – тоже эндоморфизм, где $\gamma(a_i) = b_i, \gamma(b_i) = a_i + b_i, \gamma(a_i + b_i) = a_i, \delta(a_i) = \delta(b_i) = z, \delta(a_i + b_i) = 0, i = 1, 2.$

Таким образом, система $\{\varphi_1, ..., \varphi_{14}, \kappa, \zeta\}$ предоставляет 2^{2n}, в нашем случае, 16 ненулевых элементов, индуцирующих на $G/Z(G)$ линейно независимую систему преобразований. Поэтому порядок почтикольца может быть посчитан как $|E(G)| = |I||E(G)/I| = 2^{16} \cdot 2^{16} = 2^{32}$. Видимо, в общем случае, почтикольцо экстраспециальной группы можно рассматривать как расширение почтикольца I, состоящего из элементов, переводящих каждый элемент G в элемент из Z(G) при помощи полного матричного кольца $\mathfrak{M}_{2n}(GF(2))$.

Таблица 1

$$\begin{pmatrix}
\backslash & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6 & \alpha_7 & \alpha_8 & \alpha_9 & \alpha_{10} & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & \alpha_{15} & z \\
\varphi_1 & z & z & z & z & z & z & z & z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\varphi_2 & 0 & z & z & z & z & z & z & z & z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\varphi_3 & 0 & 0 & z & z & z & z & z & z & z & z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\varphi_4 & 0 & 0 & 0 & z & z & z & z & z & z & z & z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\varphi_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & z & z & z & z & z & z & z & z & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\varphi_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z & z & z & z & z & z & z & z & 0 & 0 & 0 \\
\varphi_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z & z & z & z & z & z & z & z & 0 & 0 \\
\varphi_8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z & z & z & z & z & z & z & z & 0 \\
\varphi_9 & z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z & z & z & z & z & z & z & 0 \\
\varphi_{10} & z & z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z & z & z & z & z & z & 0 \\
\varphi_{11} & z & z & z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z & z & z & z & z & 0 \\
\varphi_{12} & z & z & z & z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z & z & z & z & 0 \\
\varphi_{13} & z & z & z & z & z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z & z & z & 0 \\
\varphi_{14} & z & z & z & z & z & z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z & z & 0 \\
\varphi_{15} & z & z & z & z & z & z & z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z & 0 \\
\kappa & 0 & 0 & z & z & z & z & 0 & z & 0 & z & 0 & z & z & z & 0 & 0 \\
\zeta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z
\end{pmatrix}$$

В таком случае, порядок почтикольца для n>2 будет равен $|E(G)| = 2^{2^{2n}+4n^2}$. В случае n=1 получаем $|E(G)| = 2^8$, что согласуется с результатом И.В. Филимонова, который, используя компьютерную программу, показал, что порядок E(G) в случае группы диэдра равен 256.

Пример дифференциального базиса, не дифференцирующего характеристические функции открытых множеств[1]

Е.И. Бережной, А.А. Перфильев

Основной пример дифференциального базиса, который не дифференцирует класс характеристических функций измеримых множеств, принадлежит А. Зигмунду. Он показал (см., например [1]), что базис из прямоугольников с произвольно ориентированными сторонами не дифференцирует L^∞. Доказательство этого факта опирается на довольно тонкие оценки конструкции "дерева Перрона" или множества Никодима. С другой стороны, как отметил А. Зигмунд, базис из прямоугольников с произвольно ориентированными сторонами дифференцирует все характеристические функции открытых и замкнутых множеств.

В настоящей работе приведен простой пример дифференциального базиса, который не дифференцирует даже класс характеристических

[1]Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, грант № 08-01-00669.

функций открытых множеств. Идейно конструкция напоминает построения из работ [2, 3]. В первой из них построены дифференциальные базисы, которые различают симметричные пространства с различным поведением их фундаментальных функций и даже пространства Лоренца и Марцинкевича или Лебега и Марцинкевича, у которых фундаментальные функции одинаковы, а во второй построен дифференциальный базис, различающий L^∞ и любое отличное от L^∞ симметричное пространство.

Напомним некоторые определения, связанные с дифференциальными базисами. Эти определения можно найти в [1].

Пусть задано некоторое множество Ω. Дифференциальным базисом $B(t)$ в точке $t \in \Omega$ называется семейство содержащих t ограниченных измеримых подмножеств Ω положительной меры таких, что найдется по крайней мере одна последовательность $\{B_k \in B(t)\}$, удовлетворяющая условию $diam \quad B_k \to 0$. Дифференциальным базисом называется объединение указанных семейств $\mathbf{B} = \{\cup B(t) : t \in \Omega\}$.

Определим теперь верхнюю и нижнюю производные интеграла от локально интегрируемой функции f в точке $t \in \Omega$ относительно базиса $\mathbf{B}$ с помощью равенств

$$\overline{D_{\mathbf{B}}(f,t)} = \sup\{\overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{1}{|B_k|} \int_{B_k} f ds : B_k \in B(t), \quad diam B_k \to 0\},$$

$$\underline{D_{\mathbf{B}}(f,t)} = \inf\{\underline{\lim_{k\to\infty}} \frac{1}{|B_k|} \int_{B_k} f ds : B_k \in B(t), \quad diam B_k \to 0\}.$$

Говорят, что базис $\mathbf{B}$ дифференцирует интеграл от f , если почти всюду выполнены равенства

$$\overline{D_{\mathbf{B}}(f,t)} = \underline{D_{\mathbf{B}}(f,t)} = f(t).$$

Если $\mathbf{B}$ дифференцирует интеграл от любой функции f из пространства X, то говорят, что базис $\mathbf{B}$ дифференцирует пространство X.

Теорема. *Пусть $Q_0 = [0,1] * [0,1]$ – единичный квадрат на плоскости. Тогда существуют дифференциальный базис $\boldsymbol{B}$ и открытое множество U такое, что базис $\boldsymbol{B}$ не дифференцирует характеристическую функцию U.*

Доказательство. Построение соответствующего базиса $\mathbf{B}$ мы начнем с построения некоторого набора $\{W(i)\}_{i=1}^{\infty}$ множеств из квадрата $Q_0 = [0,1] * [0,1]$, объединение которых и будет составлять базис $\mathbf{B}$.

Выберем сначала произвольную возрастающую последовательность натуральных чисел $\{p_i\}_{i=1}^{\infty}$, а затем выберем возрастающую последовательность натуральных чисел $\{m_i\}_{i=1}^{\infty}$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{m_i^2} < |Q_0|. \tag{1}$$

(Существование такой последовательности очевидно.)

При фиксированном i множество $W(i)$ будет состоять из объединения некоторых наборов множеств: $W(i) = \cup_{j=1}^{p_i^2} \cup_{k=2}^{m_i^2} V(i,j,k)$.

Для каждого i элементы набора $V(i,j,k)$ строятся следующим образом. Разобьем квадрат Q_0 на p_i^2 равных квадратов и перенумеруем их $Q(i,j)$, $j = 1,2,...,p_i^2$. В свою очередь, каждый из полученных квадратов $Q(i,j)$ разобьем на m_i^2 равных квадратов $Q(i,j,k), k = 1,2,...,m_i^2$, причем первым квадратом $Q(i,j,1)$ в наборе будем считать левый верхний квадрат в разбиении. Все элементы набора $V(i,j,k)$, принадлежащие квадрату $Q(i,j)$, определяются равенствами $V(i,j,k) = Q(i,j,1) \cup Q(i,j,k)$, $\quad k = 2,...,m_i^2$.

Объединяя семейства множеств $\{V(i,j,k)$ по $j = 1,2,...,p_i^2$ и $k = 2,...,m_i^2$, получим все элементы набора $W(i)$.

Отметим важные свойства элементов набора $W(i)$:

для любых $i \in N$, $1 \le j \le p_i^2, 1 \le k \le m_i^2$ выполнены соотношения:

$$|V(i,j,k)| = |Q(i,j,1) \cup Q(i,j,k)| = |Q(i,j,1)| + |Q(i,j,k)| = \frac{2}{p_i^2 m_i^2}; \tag{2}$$

$$\frac{\sqrt{5}}{m_i p_i} \le diam(V(i,j,k)) \le \frac{\sqrt{2}}{p_i}; \tag{3}$$

$$\sum_{j=1}^{p_i^2} |Q(i,j,1)| = \frac{1}{m_i^2}; \tag{4}$$

$$Q_0 = \cup_{j=1}^{p_i^2} \{\cup_{k=2}^{m_i^2} V(i,j,k))\}. \tag{5}$$

Так как $\lim_{i\to\infty} p_i = \infty$ и выполнены свойства (2), (3), (5), то объединение наборов $W(i)$ можно считать дифференциальным базисом в Q_0.

Положим

$$B = \cup_{i=1}^{\infty} \cup_{j=1}^{p_i^2} Q^0(i,j,1),$$

где $Q^0(i,j,1)$ есть внутренность квадрата $Q(i,j,1)$.

Тогда множество B является открытым, а из условий (1) и (4) следует, что

$$|B| < |Q_0|. \tag{6}$$

Зафиксируем $t \in Q_0$. Из (5) следует, что для каждого $i \in N$ найдется множество $V(i,j,k)$, содержащее точку t. Поэтому из (2) и определения множества B для характеристической функции $\chi(B,.)$ множества B получим

$$\overline{D}\chi(B,t) \geq \frac{1}{|V(i,j,k)|}\int_{V(i,j,k)} \chi(B,s)ds \geq$$
$$\frac{1}{2|Q(i,j,1)|}\int_{Q(i,j,1)} \chi(B,s)ds \geq \frac{1}{2}. \qquad (7)$$

Соотношения (6) и (7) показывают, что **B** не дифференцирует $\chi(B,.)$. Теорема доказана.

Библиографический список

1. *Гусман М.* Дифференцирование интегралов в R^n. М.: Мир, 1978.
2. *Бережной Е.И.* О дифференцировании интегралов от функций из симметричных пространств дифференциальными базисами // Analysis Mathematica. 1996. V. 22. P. 267-288.
3. *Бережной Е.И., Перфилььев А.А.* Различение симметричных пространств и L^∞ с помощью дифференциального базиса // Матем. заметки. 2001. Т. 69. Вып. 3. С. 515-523.
4. *Zygmund A.* A note on the differentialility of multiple integrals // Collog. Math. 1967. V. 16. P. 199-204.

Инфинитезимальные голоморфно-проективные преобразования синектических метрик в касательных расслоениях высших порядков риманова пространства

Т.В. Капустина

В настоящей заметке рассмотрены специальные римановы метрики в касательном расслоении $T_r(V_n)$ порядка r риманова пространства, близкие по свойствам к метрике полного лифта, введенной в [4, 1. Гл. IV]). Названы эти метрики, следуя А.П. Широкову [3, 1], синектическими [2].

В индуцированных локальных координатах $x^i, x^{n+i}, \ldots, x^{\mu n+i}, \ldots,$ x^{rn+i} (где $x^{\mu n+i} = \dfrac{1}{\mu!} \left.\dfrac{d^{\mu x^i}}{dt^\mu}\right|_{t=0}$, $\mu = \overline{1,r},\ i = \overline{1,n}$) синектическая метрика выражается матрицей

$$
\left(\underset{r}{\mathcal{G}}_{\alpha\beta}\right)=
\begin{array}{|c|c|c|c|}
\hline
\partial^r g_{ij}+\partial^{r-1}\underset{1}{a}_{ij}\ldots+\underset{r}{a}_{ij} & \partial^{r-1} g_{ij}+\partial^{r-2}\underset{1}{a}_{ij}\ldots+\underset{r-1}{a}_{ij} & \ldots & g_{ij}\\
\hline
\partial^{r-1} g_{ij}+\partial^{r-2}\underset{1}{a}_{ij}\ldots+\underset{r-1}{a}_{ij} & \partial^{r-2} g_{ij}+\partial^{r-3}\underset{1}{a}_{ij}\ldots+\underset{r-2}{a}_{ij} & \ldots & 0\\
\hline
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
\hline
g_{ij} & 0 & \ldots & 0\\
\hline
\end{array}, \tag{1}
$$

здесь $\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, (r+1)n$; g_{ij} – метрика базы, $\underset{1}{a}_{ij}, \ldots \underset{r}{a}_{ij}$ – r полей симметричных дважды ковариантных тензоров на базе; операторы ∂^μ обозначают следующее:

$$
\partial^\mu = x^{\mu n+s}\partial_s + \frac{1}{2}x^{(\mu-1)n+s}x^{(\mu-1)n+t}\partial_{st} + \ldots + \frac{1}{\mu!}x^{n+s}x^{n+t}\ldots x^{n+q}\partial_{st\ldots q}.
$$

При $\underset{1}{a}_{ij} = \underset{2}{a}_{ij} = \ldots = \underset{r}{a}_{ij} \equiv 0$ синектическая метрика $\underset{r}{\mathcal{G}}_{\alpha\beta}$ превращается в полный лифт (r-лифт) ${}^{(r)}g_{\alpha\beta}$ метрики g_{ij} из V_n в $T_r(V_n)$. Заметим, что

$$
\underset{r}{\mathcal{G}}_{\alpha\beta} = {}^{(r)}g_{\alpha\beta} + {}^{(r-1)}\underset{1}{a}_{\alpha\beta} + \ldots + {}^{0}\underset{r}{a}_{\alpha\beta}.
$$

В $T_r(V_n)$ действует так называемая почти касательная структура порядка r с аффинором

$$
\left(f^\alpha_\beta\right) =
\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}
\hline
0 & E & 0 & 0 & \ldots & 0\\
\hline
0 & 0 & E & 0 & \ldots & 0\\
\hline
0 & 0 & 0 & E & \ldots & 0\\
\hline
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & E\\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0\\
\hline
\end{array}, \tag{2}
$$

обладающим свойством $f^{r+1} = 0$, которая тесно связана с алгеброй плюральных чисел $\aleph(\varepsilon^r)$ $(\varepsilon^{r+1} = 0)$ и которую можно использовать для построения лифтов тензорных полей из M в $T_r(M)$.

Пусть в $\left(T_r(V_n), \underset{r}{\mathcal{G}}\right)$ задано точечное преобразование

$$
\begin{aligned}
&x^{\alpha'} = f^\alpha\left(x^1, \ldots, x^n, x^{n+1}, \ldots, x^{2n}, \ldots, x^{rn+1}, \ldots, x^{(r+1)n}\right),\\
&\qquad \det\left(\partial_\beta f^\alpha\right) \neq 0,
\end{aligned} \tag{3}
$$

в результате которого возникает $\left(\overline{T}_r(V_n), \overline{\underset{r}{\mathcal{G}}}\right)$, где $\overline{\underset{r}{\mathcal{G}}}$ – увлеченное преобразованием (3) тензорное поле $\underset{r}{\mathcal{G}}$. Если преобразование (3) переводит голоморфно-геодезические линии пространства в голоморфно-геодезические линии пространства $\left(\overline{T}_r(V_n), \underset{r}{\overline{\mathcal{G}}}\right)$, то будем называть его голоморфно-геодезическим преобразованием, или голоморфно-проективной коллинеацией (ГП-коллинеацией) в $\left(T_r(V_n), \underset{r}{\mathcal{G}}\right)$. (Кривая $x^\alpha = x^\alpha(t)$ в $\left(T_r(V_n), \underset{r}{\mathcal{G}}\right)$ называется голоморфно-геодезической, если вдоль этой кривой абсолютная производная касательного вектора является вектором, принадлежащим в каждой точке распределению $(r+1)$-мерных площадок с базисными векторами $\dot{x}^\alpha$, $f^\alpha_\sigma \dot{x}^\sigma$, $\overset{2}{f}{}^\alpha_\sigma \dot{x}^\sigma, \ldots \overset{r}{f}{}^\alpha_\sigma \dot{x}^\sigma$ – голоморфных площадок –, т.е. если

$$\frac{d^2x^\alpha}{dt^2} + \underset{r}{\Gamma}{}^\alpha_{\sigma\tau}\frac{dx^\sigma}{dt}\cdot\frac{dx^\tau}{dt} = \underset{\mu}{\lambda}(t)\overset{r-\mu}{f}{}^\alpha_\sigma\frac{dx^\sigma}{dt}\,;$$

здесь $\overset{r-\mu}{f}{}^\alpha_\sigma$ – $(r-\mu)$-я степень аффинора (2); $\alpha,\sigma,\tau = \overline{1,(r+1)n}$, $\underset{r}{\Gamma}{}^\alpha_{\sigma\tau}$ – коэффициенты связности синектической метрики $\underset{r}{\mathcal{G}}$.)

Инфинитезимальное преобразование

$$x^{\alpha'} = x^\alpha + \xi^\alpha\,\delta t \tag{4}$$

является голоморфно-проективной коллинеацией тогда и только тогда, когда

$$\underset{\vec{\xi}}{\mathcal{L}}\,\underset{r}{\Pi}{}^\alpha_{\sigma\tau} = 0 \tag{5}$$

(здесь $\underset{r}{\Pi}{}^\alpha_{\sigma\tau}$ – так называемые голоморфно-проективные параметры синектической метрики $\underset{r}{\mathcal{G}}$ – вещественная реализация проективных параметров Томаса $\Pi^\alpha_{\sigma\tau}(X)$ в пространстве $V_n(\varepsilon^r)$ над алгеброй $\aleph(\varepsilon^r)$ плюральных чисел; $\underset{\vec{\xi}}{\mathcal{L}}$ – производная Ли), или, в эквивалентной форме,

$$\underset{\vec{\xi}}{\mathcal{L}}\,\underset{r}{\Gamma}{}^\alpha_{\beta\gamma} = 2\left(\underset{r}{\varphi}_{(\beta}\,\delta^\alpha_{\gamma)} + \underset{r-1}{\varphi}_{(\beta}\,f^\alpha_{\gamma)} + \underset{r-2}{\varphi}_{(\beta}\,\overset{2}{f}{}^\alpha_{\gamma)} + \ldots + \underset{0}{\varphi}_{(\beta}\,\overset{r}{f}{}^\alpha_{\gamma)}\right), \tag{6}$$

где $\underset{0}{\varphi}_\alpha$ – ковектор голоморфно-проективного соответствия, а $\underset{\mu}{\varphi}_\alpha = \underset{0}{\varphi}_\sigma\,\overset{\mu}{f}{}^\sigma_\alpha$.

Рассмотрим в $T_r(V_n)$ инфинитезимальное преобразование, обладающее свойством

$$\underset{\vec{\xi}}{\mathcal{L}} f = \underset{\mu}{\lambda}\,\overset{\mu}{f}, \tag{7}$$

где $\underset{\mu}{\lambda} = \underset{\mu}{\lambda}(x^i)$ – поля функций на базе. В индуцированных локальных координатах это условие принимает вид

$$f^{\alpha}_{\sigma}\,\partial_{\beta}\xi^{\sigma} - f^{\sigma}_{\beta}\,\partial_{\sigma}\xi^{\alpha} = \underset{\mu}{\lambda}\overset{\mu}{f}{}^{\alpha}_{\beta}\,,$$

или

$$\begin{aligned}
&\partial_{n+j}\xi^i = \partial_{2n+j}\xi^i = \ldots = \partial_{rn+j}\xi^i = 0,\\
&\qquad \partial_{2n+j}\xi^{n+i} = \partial_{3n+j}\xi^{n+i} = \ldots = \partial_{rn+j}\xi^{n+i},\ \ldots\ , \partial_{rn+j}\xi^{(r-1)n+i} = 0,\\
&\partial_j\xi^i - \partial_{n+j}\xi^{n+i} = \underset{1}{\lambda}\delta^i_j,\\
&\qquad \partial_j\xi^{n+i} - \partial_{n+j}\xi^{2n+i} = \underset{2}{\lambda}\delta^i_j,\ \ldots\ , \partial_j\xi^{(r-1)n+i} - \partial_{n+j}\xi^{rn+i} = \underset{r}{\lambda}\delta^i_j,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\partial_{(r-1)n+j}\xi^{(r-1)n+i} - \partial_{rn+j}\xi^{rn+i} = \underset{1}{\lambda}\delta^i_j.
\end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
&\xi^i = \underset{1}{\xi}{}^i(x^k),\ \xi^{n+i} = -\underset{1}{\lambda}x^{n+i} + \partial\underset{1}{\xi}{}^i(x^k) + \underset{2}{\xi}{}^i(x^k),\\
&\xi^{2n+i} = -2\underset{1}{\lambda}x^{2n+i} - \left(\partial\underset{1}{\lambda} + \underset{2}{\lambda}\right)x^{n+i} + \partial^2\underset{1}{\xi}{}^i + \partial\underset{2}{\xi}{}^i + \underset{3}{\xi}{}^i(x^k),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\xi^{rn+i} = -r\underset{1}{\lambda}x^{rn+i} - \left(\partial\underset{1}{\lambda} + \underset{2}{\lambda}\right)x^{(r-1)n+i} - \ \ldots\ -\\
&- \left(\partial^{r-1}\underset{1}{\lambda} + \partial^{r-2}\underset{2}{\lambda} + \ \ldots\ + \underset{r}{\lambda}\right)x^{n+i} + \partial^r\underset{1}{\xi}{}^i + \partial^{r-1}\underset{2}{\xi}{}^i + \ \ldots\ + \underset{r+1}{\xi}{}^i,
\end{aligned}$$

где $\underset{1}{\xi}{}^i,\ \underset{2}{\xi}{}^i,\ \ldots \underset{r+1}{\xi}{}^i$ – произвольные векторные поля на базе.

Получаем, что в индуцированных локальных координатах искомое инфинитезимальное преобразование определяется оператором

$$\begin{aligned}
&\vec{\xi} = \underset{1}{\xi}{}^i\,\partial_i + \left(-\underset{1}{\lambda}x^{n+i} + \partial\underset{1}{\xi}{}^i + \underset{2}{\xi}{}^i\right)\partial_{n+i} +\\
&+ \left(-2\underset{1}{\lambda}x^{2n+i} - \left(\partial\underset{1}{\lambda} + \underset{2}{\lambda}\right)x^{n+i} + \partial^2\underset{1}{\xi}{}^i + \partial\underset{2}{\xi}{}^i + \underset{3}{\xi}{}^i\right)\partial_{2n+i} + \ \ldots\ +\\
&+ \left(-r\underset{1}{\lambda}\,x^{rn+i} - \left(\partial\underset{1}{\lambda} + \underset{2}{\lambda}\right)x^{(r-1)n+i} - \ \ldots\ -\right.\\
&\left.- \left(\partial^{r-1}\underset{1}{\lambda} + \partial^{r-2}\underset{2}{\lambda} + \ \ldots\ + \underset{r}{\lambda}\right)x^{n+i} + \partial^r\underset{1}{\xi}{}^i + \partial^{r-1}\underset{2}{\xi}{}^i + \ \ldots\ + \underset{r+1}{\xi}{}^i\right)\partial_{rn+i}\,.
\end{aligned} \tag{8}$$

Будем называть такое инфинитезимальное преобразование (8) обобщенно-синектическим, а при $\underset{1}{\lambda} = \underset{2}{\lambda} = \ldots = \underset{r}{\lambda} \equiv 0$ – синектическим. Совокупность обобщенно-синектических инфинитезимальных преобразований образует алгебру Ли, в которой выделяется подалгебра синектических инфинитезимальных преобразований; это легко проверить, рассмотрев скобку двух обобщенно-синектических инфинитезимальных преобразований $\vec{\xi}$ и $\vec{\eta}$,

$$\begin{aligned}
&\vec{\eta} = \underset{1}{\eta}^i\,\partial_i + \left(-\underset{1}{\nu}x^{n+i} + \partial\underset{1}{\eta}^i + \underset{2}{\eta}^i\right)\partial_{n+i} + \\
&+\left(-2\underset{1}{\nu}x^{2n+i} - \left(\partial\underset{1}{\nu} + \underset{2}{\nu}\right)x^{n+i} + \partial^2\underset{1}{\eta}^i + \partial\underset{2}{\eta}^i + \underset{3}{\eta}^i\right)\partial_{2n+i} + \ \ldots\ + \\
&+\left(-r\underset{1}{\nu}x^{rn+i} - \left(\partial\underset{1}{\nu} + \underset{2}{\nu}\right)x^{(r-1)n+i} - \ \ldots\ - \right.\\
&\left.-\left(\partial^{r-1}\underset{1}{\nu} + \partial^{r-2}\underset{2}{\nu} + \ \ldots\ + \underset{r}{\nu}\right)x^{n+i} + \partial^r\underset{1}{\eta}^i + \partial^{r-1}\underset{2}{\eta}^i + \ \ldots\ + \underset{r+1}{\eta}^i\right)\partial_{rn+i}\,,
\end{aligned}$$

и убедившись, что она является обобщенно-синектическим инфинитезимальным преобразованием с оператором $\vec{\zeta}$, где

$$\begin{aligned}
&\underset{1}{\zeta}^i = \underset{1}{\xi}^s\,\partial_s\underset{1}{\eta}^i - \underset{1}{\eta}^s\,\partial_s\underset{1}{\xi}^i\,,\\
&\underset{2}{\zeta}^i = \underset{1}{\xi}^s\,\partial_s\underset{2}{\eta}^i - \underset{2}{\eta}^s\,\partial_s\underset{1}{\xi}^i + \underset{2}{\xi}^s\,\partial_s\underset{1}{\eta}^i - \underset{1}{\eta}^s\,\partial_s\underset{2}{\xi}^i + \underset{1}{\lambda}\,\underset{2}{\eta}^i - \underset{1}{\nu}\,\underset{2}{\xi}^i\,,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\underset{r+1}{\zeta}^i = \underset{1}{\xi}^s\,\partial_s\underset{r+1}{\eta}^i - \underset{r+1}{\eta}^s\,\partial_s\underset{1}{\xi}^i + \underset{2}{\xi}^s\,\partial_s\underset{r}{\eta}^i - \underset{r}{\eta}^s\,\partial_s\underset{2}{\xi}^i + \ \ldots\ + \underset{r+1}{\xi}^s\,\partial_s\underset{1}{\eta}^i - \underset{1}{\eta}^s\,\partial_s\underset{r+1}{\xi}^i + \\
&+\underset{r}{\lambda}\,\underset{2}{\eta}^i - \underset{r}{\nu}\,\underset{2}{\xi}^i + 2\left(\underset{r-1}{\lambda}\,\underset{3}{\eta}^i - \underset{r-1}{\nu}\,\underset{3}{\xi}^i\right) + \ \ldots\ + r\left(\underset{1}{\lambda}\,\underset{r+1}{\eta}^i - \underset{1}{\nu}\,\underset{r+1}{\xi}^i\right).
\end{aligned}$$

Скобка двух голоморфно-проективных инфинитезимальных преобразований, не являющихся обобщенно-синектическими, может не определять в $T_r(V_n)$ голоморфно-проективного преобразования. Но скобка двух инфинитезимальных обобщенно-синектических преобразований, являющихся ГП-коллинеациями в $\left(T_r(V_n), \underset{r}{\mathcal{G}}\right)$, также является ГП-коллинеацией относительно той же метрики $\underset{r}{\mathcal{G}}$.

Вектор $\vec{\xi}$ синектического инфинитезимального преобразования имеет вид синектического лифта (или, точнее, синектического расширения полного лифта векторного поля $\underset{1}{\vec{\xi}}$):

$$\vec{\xi} = {}^{(r)}\underset{1}{\vec{\xi}} + {}^{(r-1)}\underset{2}{\vec{\xi}} + \ldots + {}^{(0)}\underset{r+1}{\vec{\xi}}$$

Имеет место

Теорема. *Синектическое инфинитезимальное преобразование с вектором $\vec{\xi}$ является голоморфно-проективной коллинеацией в $\left(T_r(V_n), \underset{r}{\mathcal{G}}\right)$ тогда и только тогда, когда удовлетворяется система уравнений*

$$\begin{cases} \underset{\substack{\vec{\xi}\\1}}{\mathcal{L}}\, \underset{1}{\Pi}{}_{ij}^{k} = 0\,, \\ \underset{\substack{\vec{\xi}\\2}}{\mathcal{L}}\, \underset{1}{\Pi}{}_{ij}^{k} + \underset{\substack{\vec{\xi}\\1}}{\mathcal{L}}\, \underset{2}{\Pi}{}_{ij}^{k} = 0\,, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \underset{\substack{\vec{\xi}\\r+1}}{\mathcal{L}}\, \underset{1}{\Pi}{}_{ij}^{k} + \underset{\substack{\vec{\xi}\\r}}{\mathcal{L}}\, \underset{2}{\Pi}{}_{ij}^{k} + \,\dots\, + \underset{\substack{\vec{\xi}\\1}}{\mathcal{L}}\, \underset{r+1}{\Pi}{}_{ij}^{k} = 0\,, \end{cases} \tag{9}$$

где $\underset{1}{\Pi}{}_{ij}^{k} = \Gamma_{ij}^{k} - \frac{2}{n+1}\delta_{(i}^{k}\Gamma_{j)s}^{s}$ – *проективные параметры Томаса на базе,*

$$\underset{2}{\Pi}{}_{ij}^{k} = \underset{1}{A}{}_{ij}^{k} - \tfrac{2}{n+1}\delta_{(i}^{k}\underset{1}{A}{}_{j)s}^{s}\,, \quad \underset{1}{A}{}_{ij}^{k} = \tfrac{1}{2}\left(\nabla_i \underset{1}{a}{}_j^k + \nabla_j \underset{1}{a}{}_i^k - \nabla^k \underset{1}{a}{}_{ij}\right)\,;$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\underset{r+1}{\Pi}{}_{ij}^{k} = \underset{r}{A}{}_{ij}^{k} - \tfrac{2}{n+1}\delta_{(i}^{k}\underset{r}{A}{}_{j)s}^{s}\,,$$

$$\underset{r}{A}{}_{ij}^{k} = \tfrac{1}{2}\left(\nabla_i \underset{r}{a}{}_j^k + \nabla_j \underset{r}{a}{}_i^k - \nabla^k \underset{r}{a}{}_{ij}\right) - \underset{1}{a}{}_s^k \underset{r-1}{A}{}_{ij}^{s} - \,\dots\, - \underset{r-1}{a}{}_s^k \underset{1}{A}{}_{ij}^{s}\,.$$

Из теоремы с очевидностью вытекают два следствия:

Следствие 1. *Полный лифт поля* $\underset{1}{\vec{\xi}}$ *задает инфинитезимальную голоморфно-проективную коллинеацию в* $\left(T_r(V_n), \underset{r}{\mathcal{G}}\right)$ *тогда и только тогда, когда удовлетворяется система уравнений*

$$\begin{cases} \underset{\substack{\vec{\xi}\\1}}{\mathcal{L}}\, \underset{1}{\Pi}{}_{ij}^{k} = 0\,, \\ \underset{\substack{\vec{\xi}\\1}}{\mathcal{L}}\, \underset{2}{\Pi}{}_{ij}^{k} = 0\,, \\ \dots\dots\dots\dots \\ \underset{\substack{\vec{\xi}\\1}}{\mathcal{L}}\, \underset{r+1}{\Pi}{}_{ij}^{k} = 0\,; \end{cases} \tag{10}$$

$(r-1)$-*лифт поля* $\underset{1}{\vec{\xi}}$ *задает инфинитезимальную ГП-коллинеацию в* $\left(T_r(V_n), \underset{r}{\mathcal{G}}\right)$ *тогда и только тогда, когда он удовлетворяет всем уравнениям системы* (10), *кроме последнего из них*;

. . . .

0-*лифт (вертикальный лифт) поля* $\underset{1}{\vec{\xi}}$ *задает инфинитезимальную ГП-коллинеацию в* $\left(T_r(V_n), \underset{r}{\mathcal{G}}\right)$ *тогда и только тогда, когда он удовлетворяет лишь первому уравнению системы* (10).

Следствие 2. *Синектический лифт поля* $\underset{1}{\vec{\xi}}$ *в* $T_r(V_n)$ *задает инфинитезимальную ГП-коллинеацию относительно полного лифта* ${}^{(r)}g_{\alpha\beta}$

метрики g_{ij} из V_n в $T_r(V_n)$ тогда и только тогда, когда имеет место система уравнений

$$\begin{cases} \underset{\vec{\xi}_1}{\mathcal{L}}\, \underset{1}{\Pi}{}_{ij}^{k} = 0\,, \\ \underset{\vec{\xi}_2}{\mathcal{L}}\, \underset{1}{\Pi}{}_{ij}^{k} = 0\,, \\ \dots\dots\dots\dots \\ \underset{\vec{\xi}_{r+1}}{\mathcal{L}}\, \underset{1}{\Pi}{}_{ij}^{k} = 0\,, \end{cases}$$

т.е. когда поля $\underset{1}{\vec{\xi}}, \underset{2}{\vec{\xi}}, \dots, \underset{r}{\vec{\xi}}$ задают на V_n инфинитезимальные ГП-коллинеации.

Библиографический список

1. *Евтушик Л. Е.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях / Л.Е. Евтушик, Ю.Г. Лумисте, Н.М. Остиану, А.П. Широков // Проблемы геометрии. Т. 9 (Итоги науки. ВИНИТИ АН СССР). М., 1979.
2. *Капустина Т. В.* О синектической метрике в касательном расслоении порядка r риманова пространства / Т.В. Капустина // Тезисы докл. междунар. науч. конф. "Лобачевский и современная геометрия". Ч. I. Казань, 1992. С. 38–39.
3. *Талантова Н. В.* Замечание об одной метрике в касательном расслоении / Н.В. Талантова, А.П. Широков // Изв. высш. учебн. заведений. Математика. 1975. № 6. С. 143–146.
4. *Morimoto A.*, Liftings of tensor fields and connections to tangent bundles of higher order // Nagoya Math. J., 1970. V. 40. P. 99–120.

Об одном семействе супермногообразий [1]

М.А. Башкин

Проведена классификация однородных нерасщепимых супермногообразий, связанных с комплексной проективной прямой в случае, когда ретракт определяется векторным расслоением с сигнатурой $(k+1, k, 1, 1)$, $(k > 1)$. Показано, что с точностью до изоморфизма для каждой такой сигнатуры существует одно однородное нерасщепимое супермногообразие с требуемым ретрактом.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 07-01-00230).

Предполагается, что читатель знаком с основами теории комплексных супермногообразий (см., например, [1]). Из-за ограничения объема статьи большинство доказательств опущено.

Как известно, любое голоморфное векторное расслоение $\mathbf{E}$ ранга n над $\mathbb{CP}^1$ единственным образом разлагается в прямую сумму расслоений на прямые, т.е. имеет вид $\mathbf{E} = \bigoplus_{j=1}^n \mathbf{L}_{-k_j}$, где $\mathbf{L}_{-k_j}$ – расслоение на прямые степени $-k_j$. Соответствующее расщепимое супермногообразие однородно тогда и только тогда, когда все $k_j \geq 0$.

Для $n \leq 3$ классификация однородных нерасщепимых супермногообразий известна (см. [2]). При $n = 4$ она не завершена (см. [3]). Рассмотрим сигнатуры вида $(k+1, k, 1, 1)$, где $k > 1$.

Обозначим через $\mathbb{CP}^{1|4}_{k+1,k,1,1}$ расщепимое супермногообразие, определяемое расслоением $\mathbf{E} = \mathbf{L}_{-(k+1)} \oplus \mathbf{L}_{-k} \oplus 2\mathbf{L}_{-1}$. Покроем $\mathbb{CP}^1$ двумя аффинными картами U_0 и U_1 с локальными координатами x и $y = \frac{1}{x}$ соответственно. Тогда функции перехода супермногообразия $\mathbb{CP}^{1|4}_{k+1,k,1,1}$ в $U_0 \cap U_1$ имеют вид

$$\begin{cases} y = x^{-1} \\ \eta_1 = x^{-(k+1)}\xi_1 \\ \eta_2 = x^{-k}\xi_2 \\ \eta_3 = x^{-1}\xi_3 \\ \eta_4 = x^{-1}\xi_4 \end{cases},$$

где ξ_i и η_i – базисные сечения расслоения $\mathbf{E}$ над U_0 и U_1 соответственно.

Обозначим через $\mathcal{T}_{\mathrm{gr}}$ градуированный касательный пучок супермногообразия $\mathbb{CP}^{1|4}_{k+1,k,1,1}$ и через $\mathfrak{v}(\mathbb{CP}^1, \mathcal{O}_{\mathrm{gr}})$ супералгебру Ли векторных полей на нем.

Рассмотрим точную последовательность (см. [2])

$$0 \to \operatorname{End}\mathbf{E} \to \mathfrak{v}(\mathbb{CP}^1, \mathcal{O}_{\mathrm{gr}})_0 \xrightarrow{\beta} \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \to 0. \tag{1}$$

Подалгебра $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{v}(\mathbb{CP}^1, \mathcal{O}_{\mathrm{gr}})_0$ расщепляет последовательность (1), если β изоморфно отображает ее на $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ или, что равносильно, имеем разложение в полупрямую сумму $\mathfrak{v}(\mathbb{CP}^1, \mathcal{O}_{\mathrm{gr}})_0 = \operatorname{End}\mathbf{E} \oplus \mathfrak{a}$. В работе [2] показано, что супермногообразие с ретрактом $(\mathbb{CP}^1, \mathcal{O}_{\mathrm{gr}})$ четно-однородно (или $\overline{0}$-однородно) тогда и только тогда, когда на него поднимается некоторая подалгебра $\mathfrak{a}$, расщепляющая (1). В этой ситуации мы будем говорить, что *супермногообразие* $(\mathbb{CP}^1, \mathcal{O})$ *является* $\overline{0}$-*однородным относительно* $\mathfrak{a}$. В нашем случае с точностью до автоморфизма из $\operatorname{Aut}\mathbf{E}$ существуют две расщепляющие подалгебры $\mathfrak{a}_i \simeq \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, $i = 1, 2$, которые можно задать следующими базисами (см. [2]):

$\mathfrak{a}_1$: $\mathbf{e} = \dfrac{\partial}{\partial x}$, $\mathbf{h} = -2x\dfrac{\partial}{\partial x} - \nabla$, $\mathbf{f} = -x^2\dfrac{\partial}{\partial x} - x\nabla$;

$\mathfrak{a}_2$: $\mathbf{e} = \xi_4\dfrac{\partial}{\partial \xi_3} + \dfrac{\partial}{\partial x}$, $\mathbf{h} = -2x\dfrac{\partial}{\partial x} - (k+1)\xi_1\dfrac{\partial}{\partial \xi_1} - k\xi_2\dfrac{\partial}{\partial \xi_2} - 2\xi_3\dfrac{\partial}{\partial \xi_3}$, $\mathbf{f} = \xi_3\dfrac{\partial}{\partial \xi_4} - x^2\dfrac{\partial}{\partial x} - x\nabla$;

здесь $\nabla = (k+1)\xi_1\dfrac{\partial}{\partial \xi_1} + k\xi_2\dfrac{\partial}{\partial \xi_2} + \xi_3\dfrac{\partial}{\partial \xi_3} + \xi_4\dfrac{\partial}{\partial \xi_4}$.

Рассмотрим подпучок $\mathcal{A}ut_{(2)}\mathcal{O}_{\mathrm{gr}} = \exp((\mathcal{T}_{\mathrm{gr}})_2 \oplus (\mathcal{T}_{\mathrm{gr}})_4)$ пучка $\mathcal{A}ut\,\mathcal{O}_{\mathrm{gr}}$. Согласно теореме Грина, множество супермногообразий с заданным ретрактом $(M, \mathcal{O}_{\mathrm{gr}})$ изоморфно множеству орбит группы $\mathrm{Aut}\,\mathbf{E}$ на множестве $H^1(M, \mathcal{A}ut_{(2)}\mathcal{O}_{\mathrm{gr}})$. Будем описывать когомологии с помощью коциклов Чеха в покрытии $\mathfrak{U} = \{U_0, U_1\}$. Можно доказать следующее

Предложение 1. *Предположим, что* $n \leq 5$ *и* $H^0(M, (\mathcal{T}_{\mathrm{gr}})_2) = 0$. *Пусть заданы такие подпространства* $Q_{2p} \subset Z^1(\mathfrak{U}, (\mathcal{T}_{\mathrm{gr}})_{2p})$ $(p = 1, 2)$, *что каждый класс когомологий из* $H^1(M, (\mathcal{T}_{\mathrm{gr}})_{2p})$ *содержит ровно по одному коциклу из* Q_{2p} $(p = 1, 2)$. *Тогда любой класс когомологий из* $H^1(M, \mathcal{A}ut_{(2)}\mathcal{O}_{\mathrm{gr}})$ *представляется единственным коциклом вида* $z = \exp(u^2 + u^4)$, *где* $u^2 \in Q_2$, $u^4 \in Q_4$.

Мы будем говорить далее о задании супермногообразия $(M, \mathcal{O})$ коциклом $u^2 + u^4$, подразумевая, что $(M, \mathcal{O})$ соответствует коциклу $z = \exp(u^2 + u^4)$.

Используя метод, изложенный в разделе 2 работы [4], можно доказать следующие леммы.

Лемма 1. *Справедливо* $H^0(\mathbb{CP}^1, (\mathcal{T}_{\mathrm{gr}})_2) = \{0\}$.

Лемма 2. *Базис пространства* $H^1(\mathbb{CP}^1, (\mathcal{T}_{\mathrm{gr}})_q)$, $q = 2, 4$ *может быть представлен следующими коциклами:*

1) $q = 2$

$$x^{-r}\xi_1\xi_2\frac{\partial}{\partial x},\quad x^{-r}\xi_1\xi_3\frac{\partial}{\partial x},\quad x^{-r}\xi_1\xi_4\frac{\partial}{\partial x},\quad r = 1, \dots, 2k-2;$$
$$x^{-r}\xi_1\xi_2\xi_3\frac{\partial}{\partial \xi_3},\ x^{-r}\xi_1\xi_2\xi_4\frac{\partial}{\partial \xi_4},\quad x^{-r}\xi_1\xi_3\xi_2\frac{\partial}{\partial \xi_2},\ x^{-r}\xi_1\xi_3\xi_4\frac{\partial}{\partial \xi_4},$$
$$x^{-r}\xi_1\xi_4\xi_2\frac{\partial}{\partial \xi_2},\ x^{-r}\xi_1\xi_4\xi_3\frac{\partial}{\partial \xi_3},$$
$$x^{-r}\xi_1\xi_2\xi_3\frac{\partial}{\partial \xi_4},\quad x^{-r}\xi_1\xi_2\xi_4\frac{\partial}{\partial \xi_3},\quad r = 1, \dots, 2k;$$
$$x^{-r}\xi_2\xi_3\xi_1\frac{\partial}{\partial \xi_1}, x^{-r}\xi_2\xi_3\xi_4\frac{\partial}{\partial \xi_4}, x^{-r}\xi_2\xi_4\xi_1\frac{\partial}{\partial \xi_1}, x^{-r}\xi_2\xi_4\xi_3\frac{\partial}{\partial \xi_3}, r = 1, \dots, k-1;$$
$$x^{-r}\xi_2\xi_3\frac{\partial}{\partial x},\ x^{-r}\xi_2\xi_4\frac{\partial}{\partial x},\quad r = 1, \dots, k-2\ (k > 2);$$
$$x^{-1}\xi_3\xi_4\xi_1\frac{\partial}{\partial \xi_1};\ x^{-1}\xi_3\xi_4\xi_2\frac{\partial}{\partial \xi_2};\qquad x^{-r}\xi_1\xi_3\xi_4\frac{\partial}{\partial \xi_2},\quad r = 1, 2;$$

2) $q = 4$

$$x^{-r}\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4\frac{\partial}{\partial x},\quad r = 1, \dots, 2k.$$

Проведем исследование на $\overline{0}$-однородность супермногообразий с ретрактом $\mathbb{CP}^{1|4}_{k+1,k,1,1}$. Обозначим через $H^1(\mathbb{CP}^1, (\mathcal{T}_{\mathrm{gr}}))^{\mathfrak{a}}$ множество $\mathfrak{a}$-инвариантных классов когомологий.

Предложение 2.

1) *Базис* $H^1(\mathbb{CP}^1, (\mathcal{T}_{\mathrm{gr}})_2)^{\mathfrak{a}_1}$ *может быть представлен следующими коциклами:*

$x^{-1}\xi_3\xi_4\xi_1\dfrac{\partial}{\partial\xi_1}$ и $x^{-1}\xi_3\xi_4\xi_2\dfrac{\partial}{\partial\xi_2}$;

2) $H^1(\mathbb{CP}^1, (\mathcal{T}_{\mathrm{gr}})_2)^{\mathfrak{a}_2} = \{0\}$.

Предложение 3. *Для любого из описанных ранее случаев подалгебры* $\mathfrak{a}$ *имеем* $H^1(\mathbb{CP}^1, (\mathcal{T}_{\mathrm{gr}})_4)^{\mathfrak{a}} = \{0\}$.

Пусть $\lambda_2 : \mathcal{A}ut_{(2)}\mathcal{O}_{\mathrm{gr}} \to (\mathcal{T}_{\mathrm{gr}})_2$ – гомоморфизм пучков, сопоставляющий каждому ростку автоморфизма a 2-компоненту элемента $\log a$ в $(\mathcal{T}_{\mathrm{gr}})_2 \oplus (\mathcal{T}_{\mathrm{gr}})_4$. Из предложений 1 и 3 и леммы 1 можно вывести

Предложение 4. *Если* $\mathfrak{a}$ *– подалгебра, расщепляющая последовательность* (1) *и если* $H^1(\mathbb{CP}^1, \mathcal{A}ut_{(2)}\mathcal{O}_{\mathrm{gr}})^{\mathfrak{a}}$ *– множество классов, определяющих* $\overline{0}$*-однородные относительно* $\mathfrak{a}$ *супермногообразия, то* λ_2^* *биективно отображает это множество на* $H^1(\mathbb{CP}^1, (\mathcal{T}_{\mathrm{gr}})_2)^{\mathfrak{a}}$.

Иначе говоря, $\overline{0}$-однородные относительно $\mathfrak{a}$ супермногообразия задаются коциклами $u^2 + u^4$, где класс $[u^2]$ $\mathfrak{a}$-инвариантен, а класс $[u^4]$ может быть определен с помощью предложения 5.1 из [5]. Далее, $\mathfrak{a}$-инвариантные классы $[u^2]$ описаны в предложении 2. Так как для них $[u^2, u^2] = 0$, то из предложения 5.1 работы [5] следует, что класс $[u^4]$ также должен быть $\mathfrak{a}$-инвариантным. Используя предложение 3, получаем

Предложение 5. *В каждом из двух случаев подалгебры* $\mathfrak{a}$ *четнооднородные относительно* $\mathfrak{a}$ *супермногообразия описаны в предложении 2.*

Проведем теперь исследование на однородность полученных $\overline{0}$-однородных супермногообразий с ретрактом $\mathbb{CP}^{1|4}_{k+1,k,1,1}$, $(k > 1)$. Для этого будем использовать

Предложение 6. *Пусть выполнены условия предложения 1 и* $(\mathbb{CP}^1, \mathcal{O})$ *–* $\overline{0}$*-однородное супермногообразие. Тогда супермногообразие* $(\mathbb{CP}^1, \mathcal{O})$ *однородно тогда и только тогда, когда для* $j = 1, \ldots, 4$ *векторные поля* $\dfrac{\partial}{\partial\xi_j}$ *поднимаются на* $(\mathbb{CP}^1, \mathcal{O})$.

Доказательство. Согласно предложению 5 из [2], вопрос однородности сводится к сюръективности отображения $\mathrm{ev}_o : \mathfrak{v}(M, \mathcal{O})_{\overline{1}} \to T_o(M, \mathcal{O})_{\overline{1}}$ для некоторой точки $o \in M$. Пусть o – точка в U_0, заданная уравнением $x = 0$. Представим это отображение в виде $\mathrm{ev}_o = \tilde{\mathrm{ev}}_o \circ p_{-1}$, где $\tilde{\mathrm{ev}}_o$

– отображение $\mathfrak{v}(M, \mathcal{O}_{\mathrm{gr}}) \to T_o(M, \mathcal{O}_{\mathrm{gr}})$, вычисляющее значение векторного поля в точке $o \in M$, p_{-1} – отображение $\mathfrak{v}(M, \mathcal{O})_{\bar{1}} \to \mathfrak{v}(M, \mathcal{O}_{\mathrm{gr}})_{-1}$. Очевидно, $W = \operatorname{Im} p_{-1}$ является $\mathfrak{a}$-подмодулем в $\mathfrak{v}(M, \mathcal{O}_{\mathrm{gr}})_{-1}$.

Любой старший вектор, лежащий в W, есть линейная комбинация векторных полей $\dfrac{\partial}{\partial \xi_j}$, $j = 1, \ldots, 4$ (см. [2]). Если $(\mathbb{CP}^1, \mathcal{O})$ однородно, то $\mathrm{ev}_o(W) = T_o(\mathbb{CP}^1, \mathcal{O})_{\bar{1}}$ и W содержит все $\dfrac{\partial}{\partial \xi_j}$, $j = 1, \ldots, 4$, откуда следует, что $W = \mathfrak{v}(\mathbb{CP}^1, \mathcal{O})_{-1}$. Следовательно, все поля $\dfrac{\partial}{\partial \xi_j}$ поднимаются. Обратно, если все поля $\dfrac{\partial}{\partial \xi_j}$ поднимаются, то p_{-1} сюръективно. Поскольку элементы $\dfrac{\partial}{\partial \xi_j}$ натягивают $T_o(\mathbb{CP}^1, \mathcal{O})_{\bar{1}}$ для $x \in U_0$, то $\tilde{\mathrm{ev}}_o$ сюръективно. Поэтому $(\mathbb{CP}^1, \mathcal{O})$ однородно.

Теорема 1. *Единственное с точностью до изоморфизма нерасщепимое однородное супермногообразие с ретрактом* $\mathbb{CP}^{1|4}_{k+1,k,1,1}$ *коциклом* $x^{-1}\xi_3\xi_4\xi_1 \dfrac{\partial}{\partial \xi_1}$.

Доказательство. Рассмотрим коциклы, указанные в предложении 2, и применим к ним предложение 6. Используя критерий подъема из [5] (предложение 5.1), получаем, что нерасщепимые однородные супермногообразия задаются ненулевыми коциклами вида

$$Ax^{-1}\xi_3\xi_4\xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} + Bx^{-1}\xi_3\xi_4\xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2}, \qquad \text{где } A, B \in \mathbb{C}.$$

Используя предложение 12 из [2], в котором дано описание алгебры $\operatorname{End} \mathbf{E}$, можно доказать, что все указанные выше ненулевые коциклы переводятся друг в друга автоморфизмами расслоения $\mathbf{E}$.

Библиографический список

1. *Онищик, А.Л.* Проблемы классификации комплексных супермногообразий / А.Л. Онищик // Математика в Ярославском университете: сб. обзорных статей. К 25-летию математического факультета; Яросл. гос. ун-т. – Ярославль: ЯрГУ, 2001. – С. 7–34.
2. *Бунегина, В.А.* Однородные супермногообразия, связанные с комплексной проективной прямой / В.А. Бунегина, А.Л. Онищик // ВИНИТИ. – М., 2001. – С. 141–180.
3. *Башкин, М.А.* Однородные нерасщепимые супермногообразия размерности 1|4 над комплексной проективной прямой / М.А. Башкин,

А.Л. Онищик // Математика в Ярославском университете: сб. обзорных статей. К 30-летию математического факультета; Яросл. гос. ун-т. – Ярославль: ЯрГУ, 2006. – С. 17–32.

4. *Вишнякова, Е.Г.* Четно-однородные комплексные супермногообразия размерности 1|3 на сфере Римана / Е.Г. Вишнякова // Современные проблемы математики и информатики: сборник научных трудов молодых ученых, аспирантов и студентов. Вып. 7. – Ярославль: ЯрГУ, 2005. – С. 22–30.
5. *Onishchik, A.L.* A Construction of Non-Split Supermanifolds / A.L. Onishchik // Annals of Global Analysis and Geometry. – 1998. – V. 16. – P. 309–333.

Максимумы наследуемых признаков частиц в ветвящихся процессах [1]

А.В. Лебедев

1. Введение. Исследования ветвящихся процессов были начаты в XIX веке Г. Ватсоном и Ф. Гальтоном [1] в связи с задачей о вырождении фамилий. Современная теория ветвящихся процессов восходит к А.Н. Колмогорову [2], которому принадлежит сам термин “ветвящиеся процессы”, и его ученику Б.А. Севастьянову, интересные воспоминания которого на данную тему можно найти в [3].

В работах [4, 5], а также автором в [6, 7, 8] изучались максимумы на ветвящихся процессах с дискретным временем. А именно, рассматривался классический процесс Гальтона-Ватсона [9], в котором каждая частица обладает некоторым случайным признаком, и изучалось поведение максимумов признака в популяции. Предполагалось, что признаки всех частиц не зависимы и одинаково распределены.

Однако для реальных биологических популяций предположение о независимости признаков является довольно грубым. На самом деле между ними существует зависимость, обусловленная общностью происхождения организмов. Для описания наследственности можно предложить регрессионную модель первого порядка

$$\xi_{m,n} = g(\xi_{\kappa(m,n),n-1}, \xi^*_{m,n}),$$

где $\xi_{m,n}$ – признак m-й частицы в n-м поколении, $\kappa(m,n)$ – номер предка этой частицы в предыдущем поколении, а случайные величины $\xi^*_{m,n}$,

[1] Работа выполнена при поддержке по грантам РФФИ № 07-01-00077, № 07-01-00373.

$m \geq 1$, $n \geq 1$ (инновации) не зависимы и имеют одинаковое распределение F. Полагаем также, что признак первой частицы $\xi_{1,0}$ не зависит от $\{\xi^*_{m,n}\}$.

Далее будем полагать функцию $g(x,y)$ линейной. Следует упомянуть, что само понятие линейной регрессии было введено Ф.Гальтоном в конце XIX века именно для описания наследственности (зависимости роста детей от роста родителей) [10. § 2.6].

Введем необходимые объекты и обозначения.

Пусть Z_n – число частиц в n-м поколении; $Z_0 = 1$. Будем рассматривать, как и ранее, надкритические процессы без вырождения: число непосредственных потомков не менее одного, имеет конечное среднее $\mu > 1$ и конечный второй момент. Напомним, что тогда имеет место сходимость почти наверное [9. гл. 1, § 8]:

$$\frac{Z_n}{\mu^n} \to W > 0, \quad n \to \infty. \tag{1}$$

Преобразование Лапласа-Стилтьеса распределения случайной величины W обозначим через φ. Нас интересует асимптотическое поведение величины

$$M_n = \bigvee_{m=1}^{Z_n} \xi_{m,n}, \quad n \to \infty.$$

2. Гауссовский случай. Предположим, что все $\xi_{m,n}$ и $\xi^*_{m,n}$ имеют стандартное нормальное распределение, а модель наследственности задана формулой

$$\xi_{m,n} = \rho\xi_{\kappa(m,n),n-1} + \sqrt{1-\rho^2}\,\xi^*_{m,n}, \quad \rho \in [0,1). \tag{2}$$

Напомним, что стандартное нормальное распределение принадлежит области притяжения максимум-устойчивого закона Гумбеля $\Lambda(x) = \exp\{-e^{-x}\}$ с известными нормирующими константами [11. Теорема 1.5.3]: получаем

$$\Phi^r(a(r)x + b(r)) \to \Lambda(x), \quad r \to \infty,$$
$$a(r) = (2\ln r)^{-1/2}, \quad b(r) = (2\ln r)^{1/2} - \tfrac{1}{2}(2\ln r)^{-1/2}(\ln\ln r + \ln 4\pi).$$

Тогда, согласно теореме 1 [7], в случае независимых признаков частиц (при $\rho = 0$) имеет место асимптотика

$$\mathbf{P}(M_n \leq a(\mu^n)x + b(\mu^n)) \to \varphi(e^{-x}), \quad n \to \infty. \tag{3}$$

Например, при геометрическом распределении числа потомков получаем в качестве предельного распределения логистическое.

Теорема 1. *В гауссовском случае при любом* $\rho \in (0,1)$ *верно (3).*

Заметим, что наш результат имеет асимптотический характер. На практике положительная зависимость признаков, обусловленная наследственностью, может приводить к стохастическому уменьшению максимума (за счет сокращения разброса признака в популяции), что в гауссовском случае также следует из нормальной леммы сравнения [11. Следствие 4.2.3].

3. Случай правильно меняющихся хвостов. Пусть F имеет правильно меняющиеся хвосты:

$$\bar{F}(x) \sim x^{-\gamma} L(x), \quad F(-x)/\bar{F}(x) \to c \geq 0, \quad x \to \infty, \quad \gamma > 0, \tag{4}$$

где $L(x)$ – медленно меняющаяся функция [12. Гл. 8, § 8]. Этим условиям, например, удовлетворяют устойчивые распределения с показателями $\gamma \in (0,2)$, распределения Парето и лог-гамма.

Определим неотрицательную функцию $u(s)$, $s > 0$, такую, что $s\bar{F}(u(s)) \to 1$, $s \to \infty$. Заметим, что $u(s)$ заведомо существует и является правильно меняющейся с показателем $1/\gamma$, т.е. $u(s) \sim s^{1/\gamma} L_2(s)$, $s \to \infty$, где $L_2(s)$ – медленно меняющаяся функция [13. § 1.5].

Пусть задана линейная модель наследственности:

$$\xi_{m,n} = a\xi_{\kappa(m,n),n-1} + b\xi^*_{m,n}, \quad a \in (0,1), b > 0. \tag{5}$$

Для выявления роли наследственности “в чистом виде” желательно обеспечить независимость распределения признаков от коэффициентов авторегрессии (как это имело место в гауссовском случае). Здесь можно добиться этого только для строго устойчивых распределений, полагая

$$a^\gamma + b^\gamma = 1. \tag{6}$$

Для произвольных F, удовлетворяющих (4), условие (6) обеспечивает асимптотическую эквивалентность хвостов стационарных распределений. Будем полагать это достаточным.

Обозначим для краткости $C = b^\gamma/(1 - a^\gamma/\mu)$.

Теорема 2. *При условиях (4) и (5) выполнено*

$$\frac{M_n}{u(\mu^n)} \xrightarrow{d} (CW)^{1/\gamma}\eta, \quad n \to \infty, \tag{7}$$

где W определено в (1), η имеет распределение Фреше $\Phi_\gamma(x) = \exp\{-x^{-\gamma}\}$, $x > 0$ и не зависит от W.

При условии (6) получаем $C = (1 - a^\gamma)/(1 - a^\gamma/\mu)$. Таким образом, наследственность приводит к появлению в асимптотике максимумов дополнительного множителя (от 0 до 1) по сравнению с максимумами независимых величин, причем этот множитель убывает с ростом коэффициента a. Подобный эффект выглядит вполне естественно: чем сильнее наследственность, тем меньше разброс признака в поколении и, соответственно, меньше максимум.

Автор благодарен Л.Г. Афанасьевой, М.В. Козлову и Е.Б. Яровой за внимание к работе и полезное обсуждение.

Библиографический список

1. *Watson H.W., Galton F.* On the probability of the extinction of families // J. Antropol. Inst. Great Britain and Ireland. 1874, V. 4. P. 138-144.
2. *Колмогоров А.Н.* К решению одной биологической залачи // Изв. НИИ Мат. и мех. Томского унив-та. 1938. Т. 2. С. 7-12.
3. *Севастьянов Б.А.* Ветвящиеся процессы: взгляд в прошлое // Теория вероятностей и ее применения. 1999. Т. 44. № 3. С. 692-694.
4. *Arnold B.C., Villasenor J.A.* The tallest man in the world / Statistical theory and applications. Papers in honor of H.A. David. Springer, 1996. P. 81-88.
5. *Pakes A.G.* Extreme order statistics on Galton-Watson trees // Metrika, 1998. V. 47. P. 95-117.
6. *Лебедев А.В.* Экстремумы на ветвящихся процессах // Труды Вторых Колмогоровских чтений. Ярославль, 2004. С. 324-327.
7. *Лебедев А.В.* Предельные законы для максимумов на надкритических ветвящихся процессах // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2004. Т. 11. № 4. С. 867-868.
8. *Лебедев А.В.* Максимумы случайных признаков частиц в надкритических ветвящихся процессах // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика. Механика (в печати)
9. *Харрис Т.* Теория ветвящихся случайных процессов. М.: Мир, 1966.
10. *Секей Г.* Парадоксы в теории вероятностей и математической статистике. М.: Институт компьютерных исследований, 2003.
11. *Лидбеттер М., Линдгрен Г., Ротсен Х.* Экстремумы случайных последовательностей и процессов. М.: Мир, 1989.
12. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М.: Мир, 1984.
13. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. М.: Наука, 1985.

Критерий существования H–полярного разложения заданной матрицы при условии самосопряженности или кососамосопряженности матрицы H

Ю.И. Большаков

В работах [1] и [2] доказаны критерии существования H–полярного разложения матрицы $X \in \mathbb{F}^{n\times n}$ над полем $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ и $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ соответственно, т.е. найдены необходимые и достаточные условия представления матрицы $X \in \mathbb{F}^{n\times n}$ в виде:

$$X = UA, \tag{1}$$

где U – H-унитарная, ($U^{[*]}U = I$,) A – H-самосопряженная ($A^{[*]} = A$). Операция $[*]$ определена на $\mathbb{F}^{n\times n}$ соотношением: $X^{[*]} = H^{-1}X^*H$. Здесь $H^* = H$, $det\ H \neq 0$ – фиксированная эрмитова матрица, X – произвольная $n \times n$ – матрица с элементами из $\mathbb{F}$. Строго говоря, разложение (1) следовало бы назвать правым H–полярным, разложение $X = B\ V$ – левым H–полярным, где $B^{[*]} = B$, $V^{[*]}V = I$. Но, как легко убедиться, существование правого H–полярного разложения матрицы X эквивалентно существованию его левого разложения. В самом деле, пусть (1) имеет место, тогда $X = UA = (UAU^{-1})U = B \cdot U$, где $B^{[*]} = (UAU^{-1})^{[*]} = B$, ибо $A^{[*]} = A$. Возможность существования H–полярного разложения данной матрицы обсуждалась в работе [1].

В той ситуации, когда H – положительно определенная $n\times n$-матрица, мы получаем классическое полярное разложение, которое имеет довольно обширный спектр приложений: от задач геометрии и алгебры до задач групп Ли.

В настоящей работе указаны две эквивалентные формулировки сущестования H-полярного разложения как в терминах канонической тройки $(X^{[*]}\,X,\ Ker\,X,\ H)$ (теорема 1), так и в терминах цепей, относительно нильпотентной части этих троек (теорема 2). Последний критерий сводится к подстановке некоторого набора целочисленных параметров, определяющих каноническую тройку $(X^{[*]}\,X,\ Ker\,X,\ H)$, в конечную систему линейных уравнений. Теоремы 1 и 2 сформулированы для случая $H^* = H$, однако они справедливы и в случае, когда $H^* = -H$ с соответствующей заменой H на iH.

Приведем один из основных результатов работы [2], который служит критерием существования H–полярного разложения данной матрицы X.

Теорема 1. *Пусть* $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. *Тогда* *(i) Для любого отрицательного собственного числа λ матрицы $X^{[*]}X$ та часть канонической формы $(X^{[*]}X, H)$, которая этому λ соответствует, может быть представлена в виде:*

$$(diag\ (A_i)_{i=1}^m,\ diag\ (H_i)_{i=1}^m), \tag{2}$$

где для всех $i = 1, 2, \ldots, m$

$$A_i = \begin{bmatrix} J_{k_i}(\lambda) & 0 \\ 0 & J_{k_i}(\lambda) \end{bmatrix}, H_i = \begin{bmatrix} Q_{k_i} & 0 \\ 0 & -Q_{k_i} \end{bmatrix}, \tag{3}$$

(В матрице Q_p все элементы равны нулю, за исключением единиц, расположенных на побочной диагонали матрицы, т.е. $q_{ij} = \delta_{i+j,p+1}$).

(ii) Часть канонической формы $(X^{[*]}X,\ H)$, отвечающая нулевому собственному числу, может быть представлена в виде:

$$(diag\ (B_i)_{i=0}^m,\ \ diag\ (H_i)_{i=0}^m), \tag{4}$$

где $B_0 = O_{k_0 \times k_0},\ H_0 = I_{p_0} \oplus -I_{n_0},\ p_0 + n_0 = k_0$, а для $i = 1, 2, \ldots, m$ пара $(H_i,\ B_i)$ имеет одну из следующих двух форм:

$$B_i = \begin{bmatrix} J_{k_i}(0) & 0 \\ 0 & J_{k_i}(0) \end{bmatrix}, H_i = \begin{bmatrix} Q_{k_i} & 0 \\ 0 & -Q_{k_i} \end{bmatrix},\ \ k_i \geq 1, \tag{5}$$

или

$$B_i = \begin{bmatrix} J_{k_i}(0) & 0 \\ 0 & J_{k_i-1}(0) \end{bmatrix},\ H_i = \varepsilon_i \begin{bmatrix} Q_{k_i} & 0 \\ 0 & -Q_{k_i-1} \end{bmatrix}, \tag{6}$$

где $\varepsilon_i = 1$ или $\varepsilon_i = -1,\ k_i > 1$.

(iii) Пусть (ii) имеет место. Обозначим базис, отвечающий нильпотентной части $(X^{[*]}X,\ H)$, символом

$$\{e_{ij}\}_{i=0,\ j=1}^{m,\ l_i}, \tag{7}$$

где $l_0 = k_0$, а параметр l_i суть размер матрицы B_i при $i > 1$.

В этих обозначениях

$$\begin{aligned} KerX = \quad & Span\ \{e_{i,1} + e_{i,k_i+1} | l_i = 2k_i,\ i = 1, 2, \ldots, m\} \oplus \\ & Span\{e_{i,1} | l_i = 2k_i - 1, i = 1, 2, \ldots, m\} \oplus Span\{e_{0,j}\}_{j=1}^{k_0}. \end{aligned} \tag{8}$$

Пример. Пусть

$$X = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & & \\ \hline & & 0 & 1 \\ & & 0 & 0 \end{array}\right],\ H = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & & \\ 0 & -1 & & \\ \hline & & -1 & 0 \\ & & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Здесь $X = X_1 \oplus X_1$, $H = H_1 \oplus (-H_1)$, где матрица $X_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ не допускает ни H_1-полярного разложения, ни $(-H_1)$-полярного разложения, поскольку матрица $X_1^{[*]_1} X_1$ имеет единственное отрицательное собственное число -1. Однако, как легко проверить, матрица X допускает H-полярное разложение: $H = UA$, где

$$U = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Здесь $U^{[*]}U = I$, $A^{[*]} = A$.

Приведем более эффективный критерий существования H-полярного разложения матрицы X. С этой целью введем понятие цепи нильпотентной матрицы.

Определение 1. *Пусть* $A = \bigoplus_{i=1}^{p} J_{m_i}(0)$ *– нильпонтная матрица, составленная из жордановых блоков* $J_{m_i}(0)$ *с* $m_1 \geq m_2 \geq \ldots m_p$. *Всякую её подматрицу* $A_0 = \bigoplus_{i=1}^{s} J_{m_i}(0)$ *назовём цепью, если разность* $m_i - m_{i+1} = 0$ *или* $m_i - m_{i+1} = 1$, $i = 1, 2, \ldots, s-1$. *Блоки* J_{m_i} *– звенья цепи,* m_i *– их длины.*

Определение 2. *Цепь* A_0, *определенную матрицей* A, *назовем максимальной, если к ней нельзя добавить ни одного звена из* A *так, чтобы вновь полученное объединение давало бы вновь цепь.*

Очевидно, что всякая нильпотентная матрица A однозначно разбивается в дизъюнктивное объединение максимальных цепей, т.е. таких, что ни одна их пара не имеет общих звеньев.

Лемма 1. *Для того, чтобы матричное уравнение* $X^2 = A$ *с заданной нильпотентной матрицей* A *имело бы решение, необходимо и достаточно, чтобы каждая максимальная цепь матрицы* A, *не содержащая звеньев длины 1, состояла бы из четного числа звеньев, максимальная же цепь, содержащая звенья длины* 1, *может иметь число звеньев любой четности.*

Доказательство этой леммы имеется в работе [3].

Не нарушая общности в рассуждениях, мы будем считать, что нильпотентная матрица $X^{[*]}X$ представляет собой одну максимальную цепь.

Тройка $(X^{[*]}X,\ H,\ Ker\ X)$ характеризуется $3\times 2s$–целочисленной матрицей

$$K=\left[\begin{array}{cccc|ccc} n_1 & n_2 & \dots & n_s & l_1^0 & l_2^0 & \dots l_s^0 \\ k_1^+ & k_2^+ & \dots & k_s^+ & l_1^+ & l_2^+ & \dots l_s^+ \\ k_1^- & k_2^- & \dots & k_s^- & l_1^- & l_2^- & \dots l_s^- \end{array}\right]. \tag{9}$$

Здесь $k_j^+ (k_j^-)$ жордановых клеток матрицы $X^{[*]}X$ с $\varepsilon_j = 1 (\varepsilon_j = -1)$ имеют размер $n_j \times n_j,\ j = 1, 2, \dots, s$. Параметры $l_t^+,\ l_t^-,\ l_t^0$, характеризующие подпространство $Ker\ X$, удовлетворяют системе неравенств

$$l_t^+ + l_t^0 \le k_t^+,\ l_t^- + l_t^0 \le k_t^-,\ t = 1, 2, \dots, s. \tag{10}$$

Здесь $l_t^+\ (l_t^-)$ – число векторов подпространства $KerX$, являющихся собственными векторами той нильпотентной части жордановой матрицы $X^{[*}]X$, которая отвечает $k_t^+\ (k_t^-)$ клеткам размера $n_t \times n_t$ и $\varepsilon = 1$ $(\varepsilon = -1)$; l_t^0 – число векторов подпространства $Ker\ X$, являющихся суммами пар векторов, при этом первая компонента пары берется из числа k_t^+, а вторая – из числа k_t^-. Кроме того, $n_1 > n_2 > \ldots > n_s$.

Но, поскольку $X^{[*]}X$ – цепь, то $n_1 = p,\ n_2 = p-1,\ n_3 = p-2, \dots, n_s = p - s + 1$. С учётом леммы 1 мы приходим к следующему критерию H–полярного разложения, который дает необходимые и достаточные условия возможности представления нильпотентной части матрицы $X^{[*]}X$ в том виде, в котором они указаны в пунктах (ii) и (iii) теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть H – невырожденная комплексная самосопряженная $n \times n$–матрица и пусть для заданной матрицы $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ матрица $X^{[*]}X$ представляет собой цепь, состоящую из четного числа нильпотентных звеньев, если цепь не содержит звеньев длины 1, и без ограничения на их количество, если цепь содержит звенья длины 1. При этом тройка $(X^{[*]}X,\ H,\ Ker\ X)$ определена целочисленной матрицей K вида (9) с натуральными $n_j = p - j + 1,\ j = 1, 2, \dots, s$. Тогда матрица X допускает H–полярное разложение тогда и только тогда, когда целочисленные параметры, составляющие матрицу K, удовлетворяют системе*

$$\begin{cases} k_t^+ = l_t^+ + l_{t-1}^+ + l_t^0, \\ k_t^- = l_t^- + l_{t-1}^- + l_t^0,\ t = 1, 2, \dots s, \end{cases} \tag{12}$$

если $n_s = 1$. Здесь $l_0^+ = l_0^- = 0$. Если же $n_s > 1$, то исключением в формуле (12) будут служить лишь параметры k_s^+ и k_s^-, для которых $l_s^+ = l_s^- = 0$.

Доказательство теоремы 2 для случая $H^* = H$ имеется в работе [4]. Однако, как мы уже упоминали выше, теорема 2 справедлива и в случае $H^* = -H$.

Следствие. *Если матрица Y допускает H–полярное разложение, то*

$$dim\ Ker\, Y = \frac{d^+ + d^- + l_s^+ + l_s^-}{2} \geq max\ \{d^+,\ d^-\},$$

где $d^+ = \pi(H) - \pi(HY^{[*]}Y),\ d^- = \nu(H) - \nu(HY^{[*]}Y)$. В частности, если $n_s > 1$, то

$$l_s^+ = l_s^- = 0,\ d^+ = d^- = dim\ Ker\ Y = \frac{1}{2} dim\ Ker\ Y^{[*]}Y,$$

где $\pi(\nu)$ есть положительный (отрицательный) индекс инерции функции $\alpha(x, y) = y^* Hx$.

Библиографический список

1. *Большаков Ю.И.* Псевдополярное разложение линейного оператора // Вопросы теории групп и гомологической алгебры. Ярославль: ЯрГУ, 1994. С. 23–32.
2. *Bolshakov Yu., van der Mee C.V.M., Ran A.C.M., Reichstein B. and Rodman L.* Polar decomposition in finite dimensional indefinite scalar product spaces: General theory, Linear Algebra Appl. 261: 91–141 (1997).
3. *Большаков Ю.И.* Матричное уравнение $X^2 = A$ // Вопросы теории групп и гомологической алгебры. Ярославль: ЯрГУ, 1990. С. 21–25.
4. *Большаков Ю.И.* К вопросу существования и нахождения всех H–полярных разложений данной матрицы // Вестник Поморского университета. Архангельск. 2006. № 4. С. 103–110.

Барианализ и многомерные уравнения типа Бюргерса и Навье-Стокса

А.В. Бородин

Настоящая статья является развитием работ [1, 2, 3] в направлении увеличения пространственной размерности, при этом используются понятия, обозначения и результаты из [2, 4]. Приведем необходимый минимум бариоперационных понятий из [2, 4].

Пусть $\langle x \rangle = \langle x_0; x_1 \rangle$ – упорядоченная пара чисел $x_0, x_1 \in \mathbb{C}$; $x^0 = \mu^0(\langle x \rangle) = x_0$ и $x^1 = \mu^1(\langle x \rangle) = x_0 x_1$ – ее моменты 0-го и 1-го порядка соответственно. Тогда $\langle x \rangle = \langle x^0; x^1/x^0 \rangle$, причем если $x^0 = 0$, а $x^1 \neq 0$, то нуль

"$x^0 = 0$", стоящий в знаменателе, называется нестандартным и обозначается символом $\langle 0\rangle$. В этом случае $\langle x\rangle = \Big\langle \langle 0\rangle; x^1/\langle 0\rangle \Big\rangle = \Big\langle \langle 0\rangle; x^1\langle\infty\rangle \Big\rangle$, где $\langle\infty\rangle = \langle 0\rangle^{-1}$ – нестандартная бесконечность, такая что $\langle\infty\rangle\langle 0\rangle = 1$, но $\langle\infty\rangle\, 0 = 0$. Если же и $x^0 = 0$ и $x^1 = 0$, т.е. $\langle x\rangle = \langle 0; x_1\rangle$, то элемент $\langle 0; x_1\rangle$ называется баринулевым и обозначается символом $\langle\tilde{0}\rangle$. Два элемента $\langle x\rangle = \langle x_0; x_1\rangle$ и $\langle y\rangle = \langle y_0; y_1\rangle$ называются равными, если $\mu^k(\langle x\rangle) = \mu^k(\langle y\rangle)$ $(k = 0, 1)$.

Далее, если $\langle x\rangle = \langle x^0; x^1/x^0\rangle$, $\langle y\rangle = \langle y^0; y^1/y^0\rangle$ и $\lambda \in \mathbb{C}$, то по определению

$$\lambda\,\langle x\rangle = \langle \lambda\, x_0; x_1\rangle, \tag{1}$$

$$\langle x\rangle + \langle y\rangle = \Big\langle x^0 + y^0; (x^1 + y^1)/(x^0 + y^0)\Big\rangle, \tag{2}$$

$$\langle x\rangle\,\langle y\rangle = \Big\langle x^0y^0 + s\,x^1y^1; (x^0y^1 + x^1y^0)/(x^0y^0 + s\,x^1y^1)\Big\rangle. \tag{3}$$

В работах [2, 4] показано, что операции умножения на скаляр (1), сложения (2) и *эллиптического* при $s = -1$ (*гиперболического* при $s = 1$) умножения (3) удовлетворяют аксиомам коммутативной ассоциативной алгебры; при этом для сложения (2) нулем будет $\langle\tilde{0}\rangle$, противоположным к элементу $\langle x\rangle = \langle x^0; x^1/x^0\rangle$ будет элемент $-\langle x\rangle = \langle -x^0; x^1/x^0\rangle$; для умножения (3) единицей будет элемент $\langle e\rangle = \langle 1; 0\rangle$, обратным к элементу $\langle x\rangle = \langle x_0; x_1\rangle \neq \langle\tilde{0}\rangle$ будет элемент $\langle x\rangle^{-1} = \langle x^0; -x^1/x^0\rangle/\Big((x^0)^2 + s\,(x^1)^2\Big)$. В [4] эта алгебра названа при $s = -1$ $(s = 1)$ *эллиптической* (*гиперболической*) бариалгеброй (ЭБА) (ГБА) 1-го порядка и обозначена символом $\langle\mathbb{C}\rangle^1_e$ $(\langle\mathbb{C}\rangle^1_h)$, элементы $\langle x\rangle \in \langle\mathbb{C}\rangle^1_s$ $(s = e, h)$ этой алгебры названы *бариэлементами* (БЭ) 1-го порядка. Там же заложены основы анализа на ЭБА $\langle\mathbb{C}\rangle^n_s$ любого порядка n. Естественный барио́ртонормированный базис в $\langle\mathbb{C}\rangle^1_s$ (относительно скалярного произведения $\Big\langle x\rangle, \langle y\rangle\Big\rangle = x^0(y^0)^* + x^1(y^1)^*$) образуют бариорты $\langle e\rangle_0 = \langle 1; 0\rangle$ и $\langle e\rangle_1 = \langle\langle 0\rangle; \langle\infty\rangle\rangle$, при этом для каждого $\langle x\rangle \in \langle\mathbb{C}\rangle^1_s$ имеет место разложение $\langle x\rangle = x^0\langle e\rangle_0 + x^1\langle e\rangle_1$.

Далее, функция вида

$$\langle u\rangle = \langle u(x,t)\rangle = \langle u_0(x,t); u_1(x,t)\rangle = \langle u^0(x,t); u^1(x,t)/u^0(x,t)\rangle, \tag{4}$$

где $\langle u\rangle \in \langle\mathbb{C}\rangle^1_s$ – зависимая барипеременная, $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $t \in \mathbb{R}$ – независимые переменные, называется барифункцией (БФ) вещественных переменныых, или, короче, $\langle\mathbb{C}\rangle^1_s$-функцией $\mathbb{R}$-переменных. Частная барипроизводная k-го порядка $\partial^k_j\langle u(x,t)\rangle = \partial^k_{x_j}\langle u(x,t)\rangle$ (при $k = 1$

$\partial_j^1 = \partial_j$) по переменной $x \in \mathbb{R}$ определяется так:

$$\partial_j^k \langle u \rangle = \partial_j^k \langle u(x,t) \rangle = \langle \partial_j^k u^0(x,t); \partial_j^k u^1(x,t)/\partial_j^k u^0(x,t) \rangle. \tag{5}$$

Множество непрерывно дифференцируемых (дважды по $x \in \mathbb{R}^3$ и один раз по $t \in \mathbb{R}$) в области $D \subseteq \mathbb{R}^4$ БФ (4) обозначается через $\left\langle C^{2,1}(D) \right\rangle$. Подробнее обо всех этих понятиях см. в [2, 4].

Рассмотрим на $\left\langle C^{2,1}(D) \right\rangle$ $(D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ барилинейное дифференциальное уравнение (БЛДУ) в частных производных 2-го порядка вида

$$\partial_t \langle w \rangle = L(\langle w \rangle) + c \, \langle w \rangle \stackrel{def}{=} \sum_{j=1}^{3} (a_j \partial_j^2 + b_j \partial_j) \left(\langle w \rangle \right) + c \, \langle w \rangle, \tag{6}$$

где $\langle w \rangle = \langle w(x,t) \rangle = \langle v(x,t); u(x,t) \rangle$ – неизвестная БФ, зависящая от трех пространственных $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ и одной временной $t \in \mathbb{R}_+$ переменных; a_j, b_j $(j = 1,2,3)$, c – заданные постоянные (параметры БЛДУ (6)). Относительно 1-й $\langle w \rangle|_0 = v$ и 2-й $\langle w \rangle|_1 = u$ барикомпонент БФ $\langle w \rangle$ БЛДУ (6) (в силу (1)-(5)) равносильно системе ДУ:

$$\partial_t(v) = L(v) + c\, v, \tag{7}$$

$$\partial_t(u) = L(u) + 2 \sum_{j=1}^{3} a_j \, \frac{\partial_j v}{v} \, \partial_j u. \tag{8}$$

Для решений этой барисвязанной БЛДУ (6) системы ДУ имеет место утверждение [2].

Теорема 1. *Если $v(x,t)$, $v'(x,t)$ – решения ДУ (7), то*

$$u(x,t) = v'(x,t)/v(x,t)$$

– решение системы ДУ (8); в частности, если $v(x,t)$ – решения ДУ (7), то

$$u(x,t) = \partial_k v(x,t)/v(x,t) \quad (k = 1,2,3) \tag{9}$$

– решение системы ДУ (8), (9), т.е. решение системы ДУ

$$\partial_t(u_k) = L(u_k) + 2 \sum_{j=1}^{3} a_j \, u_j \, \partial_j u_k \quad (k = 1,2,3), \tag{10}$$

причем для векторного поля $\bar{u} = (u_1, u_2, u_3)$ выполняется условие потенциальности

$$rot_x \bar{u} = \bar{0}. \tag{11}$$

Условие (11) позволяет исключить функции u_2, u_3 из ДУ (10) и получить ДУ только относительно функции u_1, а именно,

$$\partial_t(u_1) = L(u_1) + 2a_1 u_1 \partial_1 u_1 + 2a_2 \left(\int\limits_{x_{12}}^{x_1} \partial_2 u_1 dx_1 \right) \partial_1 u_1 + 2a_3 \left(\int\limits_{x_{13}}^{x_1} \partial_3 u_1 dx_1 \right) \partial_3 u_1, \tag{12}$$

где $x_{12}, x_{13} \in \mathbb{R}$ – допустимые значения, такие что

$$u_k(x,t) = \partial_k v(x,t)/v(x,t) \Big|_{x_1 = x_{1k}} = 0 \quad (k = 2, 3). \tag{13}$$

Сразу же заметим, что условие (13) взято однородным только ради простоты и краткости сопутствующих им рассуждений.

Кроме того, функции u_2, u_3 из ДУ (10) можно исключить, положив параметры a_2, a_3 в ЛБДУ (6) равными нулю. В этом случае имеет место следующее следствие из теоремы 1.

Следствие 1. *Если $v(x,t)$ – решение ДУ*

$$\partial_t v = a_1 \partial_1^2 v + \sum_{j=1}^{3} b_j \, \partial_j v + c \, v, \tag{14}$$

то функция $u_1(x,t)$ – решение ДУ

$$\partial_t u_1 = a_1 \partial_1^2 u_1 + 2 \, a_1 u_1 \partial_1 u_1 + \sum_{j=1}^{3} b_j \, \partial_j u_1. \tag{15}$$

Далее, для решений системы ДУ (7), (8) справедлива

Теорема 2. *Если для $\xi = 1, 2, \ldots, m$ функции $v(x,t;\xi)$ – решения ДУ (7), а $u_k(x,t;\xi)$ $(k = 1,2,3)$ – соответствующие (см. (9)) решения системы ДУ (10), то $(\forall \, C(\xi) \in \in \mathbb{C}, \ \xi = 1, 2, \ldots, m)$*

$$v(x,t) = \sum_{\xi=1}^{m} C(\xi) \, v(x,t;\xi),$$

$$u_k(x,t) = \sum_{\xi=1}^{m} C(\xi) \, v(x,t;\xi) u_k(x,t;\xi) \Big/ \sum_{\xi=1}^{m} C(\xi) \, v(x,t;\xi)$$

– решение системы ДУ (7), (10).

Тем самым, множество (V) решений v ДУ (7) в барисвязке $\langle v; \bar{u}\rangle$ с множеством (U) соответствующих решений $\bar{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ДУ (10) образует барилинейное пространство $\langle V; \bar{U}\rangle$ барирешений $\langle v; \bar{u}\rangle$ БЛДУ (6).

Сказанное (с учетом работ [1, 2, 3, 5]) позволяет интерпретировать ДУ (10) ((12),(15)) как многомерный аналог ДУ Бюргерса, а формулы (9) как преобразования Коула-Хопфа решений ДУ теплопроводности (7) ((14)) в решения ДУ Бюргерса (10) или (12) ((15)). В то же время ДУ (10), переписанное в развернутой форме

$$\partial_t(u_k) = \sum_{j=1}^{3} a_j\,\partial_j^2 u_k + 2\sum_{j=1}^{3} a_j\,u_j\,\partial_j u_k + \sum_{j=1}^{3} b_j\,\partial_j u_k \quad (k = 1, 2, 3), \tag{16}$$

можно интерпретировать как систему ДУ типа Навье-Стокса с градиентом давления специального вида

$$\partial_k p(x,t) = \sum_{j=1}^{3} b_j\,\partial_j u_k(x,t) \quad (k = 1, 2, 3), \tag{17}$$

но *без условия неразрывности* (однако с условием потенциальности (11)).

Дальше анализ решений ДУ типа Бюргерса (10) (Навье-Стокса ((16), (17)) можно было бы проводить по схеме работы [5]) (для одномерного ДУ Бюргерса), используя при этом решения трехмерной задачи Коши для ДУ (7) ((15)). Однако в текущей работе мы ограничимся решениями ДУ (10) ((16), (17)) типа бегущей волны (кинка).

С этой целью найдем решения ДУ (7) вида

$$v(x,t) = \varphi\Bigg(\sum_{j=1}^{3} \alpha_j x_j + \alpha_0 t\Bigg), \tag{18}$$

где $\alpha_j \in \mathbb{C}$ $(j = 1, 2, 3)$ – произвольные постоянные, а $\varphi(\xi)$ – функция, подлежащая определению. Подставив (18) в (7), относительно φ получим ЛДУ

$$a\,\partial_\xi^2\varphi + b\,\partial_\xi^1\varphi + c\,\varphi = 0, \tag{19}$$

где

$$a = \sum_{j=1}^{3} \alpha_j^2 a_j, \quad b = \sum_{j=1}^{3} \alpha_j b_j - \alpha_0.$$

Рассмотрим случай

$$D = b^2 - 4ac \neq 0,$$

т.е. случай простых характеристических корней:

$$\lambda_1 = \left(-b + \sqrt{D}\right) / \, 2a, \quad \lambda_2 = \left(-b - \sqrt{D}\right) / \, 2a.$$

В этом случае общее решение (19) имеет вид

$$\varphi(\xi) = C_1 \exp\left(\lambda_1 \xi\right) + C_2 \exp\left(\lambda_2 \xi\right) = A \cosh\left(\frac{\sqrt{D}}{2a}\,\xi + \delta\right) \exp\left(-\frac{b}{2a}\,\xi\right),$$

и соответственно решение (18) ДУ (7) вид

$$v(x,t) = A \cosh\left(\frac{\sqrt{D}}{2a}\,\xi + \delta\right) \exp\left(-\frac{b}{2a}\,\xi\right), \tag{20}$$

где $(C_1, C_2), A, \delta \in \mathbb{C}$ – произвольные постоянные, $\xi = \sum_{j=1}^{3} \alpha_j x_j + \alpha_0 t$.

Подставляя (20) в (9), получим решение системы ДУ (10) ((16)) вида

$$u_k(x,t) = \alpha_k \left(-\frac{b}{2a} + \operatorname{th}\left(\frac{\sqrt{D}}{2a}\left(\sum_{j=1}^{3} \alpha_j x_j + \alpha_0 t\right) + \delta\right)\right) \quad (k=1,2,3). \tag{21}$$

Если $\alpha_j \in \mathbb{R}$ $(j = 0,1,2,3)$, $\delta \in \mathbb{R}$ и

$$D = b^2 - 4ac > 0, \tag{22}$$

то решения (21) – четырехмерные кинки (точнее, барикинки), сохраняющие вдоль параллельных прямых

$$\sum_{j=1}^{3} x_j / x_{j0} = 1 \quad \left(x_{j0} = (\xi - \alpha_0 t)/\alpha_j, \; \xi = const \in \mathbb{R}, \; j = 1,2,3\right)$$

постоянные значения между точными нижней и верхней границами

$$\check{u}_k = \min(\alpha_k \, \lambda_1, \alpha_k \, \lambda_2) \;\text{ и }\; \hat{u}_k = \max(\alpha_k \, \lambda_1, \alpha_k \, \lambda_2) \quad (k = 1,2,3),$$

и двигающиеся со скоростью

$$\vec{v} = \left(-\alpha_0 \Big/ \left(\sum_{j=1}^{3} \alpha_j^2\right)^{1/2}\right) \vec{e}, \quad \vec{e} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \Big/ \left(\sum_{j=1}^{3} \alpha_j^2\right)^{1/2}. \tag{23}$$

Условие (22) заведомо выполняется, если параметры ЛБДУ (6) удовлетворяют условиям:

$$a_k \geq 0 \;\; (k = 1,2,3), \quad c \leq 0.$$

Ничто не мешает считать $c=0$. В этом случае $D=b^2$, $\lambda_1=0$, $\lambda_2=-b/a$ и кинки (21) принимают вид

$$u_k(x,t)=-\frac{\alpha_k b}{2a}\left(1-sgn(b)\,\mathrm{th}\left(\frac{|b|}{2a}\left(\sum_{j=1}^{3}\alpha_j x_j+\alpha_0 t\right)+\delta\right)\right)\quad (k=1,2,3),\quad (24)$$

где $a=\sum_{j=1}^{3}\alpha_j^2 a_j$, $\quad b=\sum_{j=1}^{3}\alpha_j b_j-\alpha_0$, а $\alpha_j\in\mathbb{R}$ $(j=1,2,3)$, $\delta\in\mathbb{R}$ – произвольные постоянные определяющие многообразие решений-кинков (21) ((24)) ДУ (10), (16) (при $k=1$ – ДУ (12), (15)).

Согласно теореме 1, многообразие V решений (20) ЛДУ теплопроводности (7) ((14)) в барисвязке $\langle v;\bar u\rangle$ с многообразием $\bar U=(U_1,U_2,U_3)$ решений (21) ДУ типа Бюргерса (10) ((12),(15)) или Навье-Стокса (16) образует баримногообразие $\langle W\rangle=\langle V;\bar U\rangle$ барирешений $\langle w\rangle=\langle v;\bar u\rangle$ БЛДУ (6). Следовательно, если

$$\bar u=(u_{1i},u_{2i},u_{3i})=(\partial_1 v_i/v_i,\partial_2 v_i/v_i,\partial_3 v_i/v_i)\in\bar U\quad (i=1,2),$$

то

$$\bar u_1+\bar u_2=\left(\frac{v_1\bar u_1+v_2\bar u_2}{v_1+v_2}\right)=\left(\frac{\partial_1 v_1+\partial_1 v_2}{v_1+v_2},\frac{\partial_2 v_1+\partial_2 v_2}{v_1+v_2},\frac{\partial_3 v_1+\partial_3 v_2}{v_1+v_2}\right)\in\bar U,\quad (25)$$

т.е. (25) – операция “сложения"в $\bar U=(U_1,U_2,U_3)$, или, другими словами, (25) – формула взаимодействия двух волн-кинков (21) ((24)). Таким образом, многообразие $\bar U=(U_1,U_2,U_3)$ решений (21) ((24)) ДУ типа Бюргерса (10) ((12),(15)) или Навье-Стокса (16) является относительно “сложения"(25) коммутативной полугруппой без нуля.

Далее, следуя работам [2, 8] (согласно которым кинк является “носителем"уединенной волны), продифференцируем k-й кинк (24) по переменной x_k:

$$\partial_k u_k(x,t)=\partial_k^2\ln(|v(x,t)|)=\left(\frac{\alpha_k b}{2a}\right)^2 sech^2\left(\frac{|b|}{2a}\left(\sum_{j=1}^{3}\alpha_j x_j+\alpha_0 t\right)+\delta\right).\quad (26)$$

Понятно, что (26) – четырехмерная уединенная волна-барисон (в пространстве $\mathbb{R}^4=\{(x,u)\}$), перемещающаяся со скоростью (23). Если, к примеру, продифференцировать по x_1 ДУ (15), то относительно функции

$$u(x,t)=\partial_1 u_1(x,t)=\partial_1^2\ln(|v(x,t)|)\quad (27)$$

получим ДУ

$$\partial_1\left(\left(\partial_t(u)-a_1\partial_1^2 u-2\,a_1 u_1^2-\sum_{j=1}^{3}b_j\,\partial_j u\right)\Big/\partial_1 u\right)=2a_1 u,$$

решениями которого будут барисоны (26), в которых $a = \alpha_1^2 a_1$, $b = \sum_{j=1}^{3} \alpha_j b_j - \alpha_0$, а $\alpha_j \in \mathbb{R}$ $(j = 1, 2, 3)$, $\delta \in \mathbb{R}$ – произвольные постоянные.

Совершенно так же, как в работе [2] (опираясь на (25)), можно показать, что взаимодействие двух и более четырехмерных барисонов вида (26) протекает по той же схеме, что и взаимодействие двумерных барисонов (на плоскости $\mathbb{R}^2 = \{(x, u)\}$), а при $x = (x_1, x_2)$ (см. [3]) похоже на взаимодействие трехмерных солитонов ДУ Кадомцева-Петвиашвили [7]. Но об этом (и других решениях вида (9) ДУ типа Бюргерса (10) или Навье-Стокса (16) ((17))) – в развернутой статье автора . В связи с этим отметим, что стационарный случай ЛБДУ (6) подробно рассмотрен в работе [8].

Библиографический список

1. *Бородин А.В.* Барианализ и уравнения типа Бюргерса // Сб. тр. МНК ММТТ-2000. В 10-и т. Т. 1. СПб.: СПГТИ, 2000. С. 73-75.
2. *Бородин А.В.* Спектральные алгебры и их приложения I (II) // Вестник ЯГТУ. Вып. 4 (5). Ярославль, 2004 (2005). С. 192-206 (93-114).
3. *Бородин А.В.* Барианализ и многомерные уравнения типа Бюргерса // Сб. тр. МНК ММТТ-2007. В 10-и т. Т. 1. Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2007. С. 20-22.
4. *Бородин А.В.* Многомерный барианализ и его приложения. Ч. I. Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2005. 432 с.
5. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны: М.: Мир, 1976. 622 с.
6. *Бородин А.В.* Уединенные волны-барисоны // Сб. тр. МНК ММТТ-2003. В 10-и т. Т. 1. СПб.: СПГТИ, 2003. С. 73-777.
7. *Додд Р., Гиббон Дж., Моррис Х.* Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М.: Мир, 1988. 694 с.
8. *Бородин А.В.* Бариоперационное исчисление и N-мерное изоспектральное уравнение Шредингера // Вестник ЯГТУ. Вып. 2. Ярославль, 1999. С. 200-204.

О фрактальной размерности кривой Ван дер Вардена

С.Б. Козырев

В своем известном эссе [2] Б. Мандельброт ввел понятие и дал определение фрактальных множеств. Согласно ему фракталом считается любое множество, у которого его фрактальная размерность выше топологической. Это определение названо рабочим, то есть носящим предварительный, ориентировочный характер. Существуют множества, которые по своему устройству и свойствам фрактальны, но формально не считаются таковыми вследствие того, что не удовлетворяют определению Мандельброта. Одним из таких множеств является классический пример нигде не дифференцируемой функции Ван дер Вардена, точнее, ее график.

Пример Ван дер Вардена особенно интересен для студентов как один из самых простых способов построения нигде не дифференцируемой функции со сравнительно несложным доказательством ее недифференцируемости. В то же время доказательство того, что фрактальная размерность ее графика равна единице, найти трудно. Так, например, Фальконер [4] в отдельной главе рассматривает метод построения функций типа Ван дер Вардена, но усложняет его таким образом, чтобы графики получающихся функций имели фрактальную размерность строго больше их топологической размерности. О самой же функции Ван дер Вардена не говорится ни слова. Причина этого, видимо, в том, что функция Ван дер Вардена формально не является фракталом. Нам кажется, что эта функция является примером неформального фрактала, интересным как раз пограничностью своего фрактального поведения. В данной статье мы приводим простое доказательство того, что фрактальная размерность графика функции Ван дер Вардена равна единице.

Построим теперь функцию Ван дер Вардена и докажем ряд ее свойств.

Определим на отрезке [0,1] функцию $g_1(x) = \frac{1}{2} - \left|x - \frac{1}{2}\right|$ и затем продолжим ее на всю числовую ось периодическим образом с периодом 1. Далее для $n>1$ положим (см. рис. 1)

$$g_n(x) = \frac{g_{n-1}(2x)}{2}. \qquad (*)$$

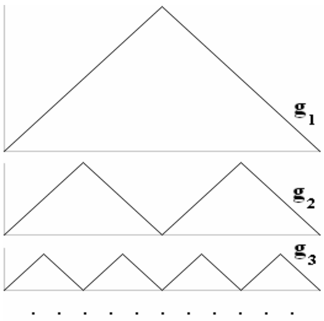


Рис. 1. Функции $g_n(x)$

Функция Ван дер Вардена $V(x)$ задается на отрезке [0,1] суммой ряда $V(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ (см. рис. 1 и 2). Частичные суммы ряда будем обозначать $V_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} g_k(x)$.

Предложение 1. *Функция $V(x)$ удовлетворяет неравенству $0 \le V(x) \le 1$.*

Доказательство. Так как $g_1(x) \le 1/2$, то в силу (*) имеем

$$g_n(x) = 2^{-n+1} g_1(2^{n-1}x) \le 2^{-n}.$$

Отсюда легко следует требуемое неравенство. Несложно показать, что максимум V равен 2/3, но нам это не потребуется.

Предложение 2. *Для любого натурального n справедливо неравенство*

$$0 \le V(x) - V_n(x) \le 2^{-n}.$$

Доказательство. Из (*) и предложения 1 немедленно получаем

$$V(x) - V_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} g_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-n} g_k(2^n x) = 2^{-n} V(2^n x) \le 2^{-n}.$$

Предложение 3. *На каждом отрезке $J_m = \left[\frac{m}{2^n}, \frac{m+1}{2^n}\right]$ при $0 \le m \le 2^n - 1$ функция V_n линейна и ее производная $|V_n'| \le n$ во внутренних точках J_m.*

Доказательство. Утверждение предложения очевидно, так как все функции g_k при $1 \le k \le n$ линейны на J_m и их производные $|g_k'| = 1$ во внутренних точках J_m.

Среди различных видов фрактальной размерности основной является размерность Хаусдорфа как наиболее адекватно отражающая основное геометрическое свойство фракталов. Именно она используется в определении фракталов. Однако прямое вычисление размерности Хаусдорфа конкретного множества очень часто связано со значительными техническими трудностями. Поэтому хаусдорфову размерность графика функции V мы определим косвенным путем – с помощью размерности Минковского.

Напомним определение размерности Минковского [1, 3]. Пусть имеется некоторое метрическое ограниченное пространство X. Любой набор δ-шаров, объединение которых целиком покрывает некоторое множество $G \subseteq X$, назовем шаровым δ-покрытием множества G. Минимально необходимое число δ-шаров, которые смогли бы покрыть G, обозначим $n_\delta(G)$.

Определение 1. Размерностью множества Gпо Минковскому называется число $\dim_M G$, равное пределу отношения порядка роста числа $n_\delta(G)$ к порядку роста величины $1/\delta$ при убывании δ к нулю, то есть

$$\dim_M G = \lim_{\delta\to 0} \log_{1/\delta} n_\delta(G) = \lim_{\delta\to 0} \frac{\ln n_\delta(G)}{-\ln\delta}.$$

Определение размерности Хаусдорфа $\dim_H G$ мы здесь не приводим. Читатель может его найти, например, в [1-3]. Нам потребуются следующие два свойства размерности Хаусдорфа.

Свойство 1. *Для любого множества G справедливо неравенство $\dim_H V \le \dim_M V$, если только размерность $\dim_M G$ существует.*

Свойство 2. *Если G – подмножество евклидова пространства $\boldsymbol{R}^n$, а $pr(G)$ – его проекция на некоторое евклидово подпространство, то $\dim_H pr(G) \le \dim_H G$.*

Доказательство этих свойств содержится в [4]. Докажем теперь основной результат.

Теорема 1. *Фрактальная размерность графика функции V равна единице, то есть $\dim_M V = \dim_H V = 1$.*

Доказательство. В силу предложения 3 на каждом участке J_m график функции V_n можно покрыть n квадратиками такими, что их стороны параллельны осям координат, длины сторон равны 2^{-n}, проекции на ось абсцисс совпадают с J_m, а объединение их проекций на ось ординат связно (см. рис. 2 при n=5).

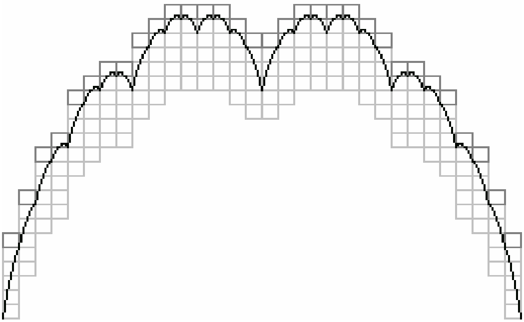


Рис. 2. Функция $V(x)$ и ее покрытие квадратиками размера 2^{-5}

Добавим к этому покрытию из n квадратиков еще один квадратик того же размера сверху (на рис. 2 такие квадратики выделены более темным цветом). Тогда все $n+1$ квадратик покроют график функции V на участке J_m в силу предложения 2. Таким образом, достаточно $2^n(n+1)$ квадратиков с длиной сторон 2^{-n}, чтобы покрыть график функции V весь целиком. Так как каждый такой квадратик можно покрыть шаром радиуса 2^{-n}, то $n_\delta(V) \leq 2^n(n+1)$ при $\delta = 2^{-n}$. Устремляя n к бесконечности, получаем

$$\dim_M V = \lim_{\delta\to 0} \frac{\ln n_\delta(V)}{-\ln\delta} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(2^n \cdot (n+1)\right)}{\ln 2^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n\ln 2 + \ln(n+1)}{n\ln 2} = 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{\log_2(n+1)}{n} = 1.$$

Итак, мы получили оценку размерности сверху $\dim_M V \leq 1$. Оценка снизу получается из свойств 1 и 2:

$$\dim_M V \geq \dim_H V \geq \dim_H [0,1] = 1.$$

Теорема доказана.

В заключение отметим: Мандельброт подчеркивал [2], что его определение фрактала следует рассматривать лишь как ориентир, а не как критерий фрактальности. Сходную точку зрения высказывает и Фальконер [4]. По его мнению, определение фрактала должно быть гибким, в виде набора признаков, как правило, присущих фракталам. В качестве такого набора он предложил следующие пять признаков фрактальности объекта F:

1) F имеет тонкую структуру, то есть у него встречаются детали произвольно малых размеров;

2) F слишком иррегулярен, чтобы его можно было описать традиционными средствами геометрии как локально, так и глобально;

3) часто F обладает некоторой формой самоподобия, хотя бы аппроксимативной или статистической;

4) обычно фрактальная размерность F (определенная каким-либо способом) выше его топологической размерности;

5) в большинстве случаев, представляющих интерес, F определяется простым, возможно, рекурсивным способом.

График функции Ван дер Вардена обладает признаками 1)-3), 5). Наличие признаков 1), 2) и 5) очевидно. Чтобы убедиться в наличии признака 3), рассмотрим функцию на отрезке $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$:

$$V(x) = g_1(x) + g_2(x) + \sum_{n=3}^{\infty} g_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=3}^{\infty} g_n\left(x - \frac{1}{4}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty} g_n(4x-1) = \frac{1}{2} + \frac{V(4x-1)}{4}.$$

То есть фрагмент графика функции на этом отрезке можно получить с помощью уменьшения всего графика функции на отрезке [0,1] в 4 раза и параллельного переноса на вектор $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$.

Таким образом, график функции V не удовлетворяет лишь признаку 4). Значит, в этом отношении мы имеем дело с “необычным” случаем фрактала.

Библиографический список

1. *Кроновер Р.* Фракталы и хаос в динамических системах. М.: Постмаркет, 2000.
2. *Мандельброт Б.* Фрактальная геометрия природы. М.: Институт компьютерных исследований, 2002.
3. *Морозов А.Д.* Введение в теорию фракталов. Москва-Ижевск, 2002.
4. Falconer K.J., Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications, 2nd ed. John Wiley & Sons Ltd, Chichester, 2003.

О топологической классификации слоений, задаваемых вполне интегрируемой дифференциальной формой в окрестности особой точки

В.Ш. Ройтенберг

В области $M \subset R^n \quad (n \geq 3)$ рассмотрим одномерную дифференциальную форму

$$\omega = p_1(x)dx_1 + p_2(x)dx_2 + ... + p_n(x)dx_n$$

класса $C^r (r \geq 1)$, удовлетворяющую условию полной интегрируемости $\omega \wedge d\omega = 0$. Введем множество $M_0 := \{x \in M : \omega(x) = 0\}$*особых точек* формы ω. Форма ω задает в $M \backslash M_0$ *слоение коразмерности один* – разбиение $M \backslash M_0$ на погруженные связные $n-1$-мерные C^r-подмногообразия (*слои*) , касательное пространство к которым в каждой точке x совпадает с гиперплоскостью $\{(dx_1, ..., dx_n) \in T_x R^n : \omega = 0\}$ в касательном пространстве $T_x R^n$ к R^n в точке x[1]. Слой, содержащий точку x, обозначим $F(x)$. Для точки $x \in M_0$ определим слой $F(x) := \{x\}$. Разбиение M на слои $F(x)$, $x \in M$ назовем *слоением F (с особенностям), задаваемым формой ω*. Слоения F в M и $\tilde{F}$ в $\tilde{M}$ называются *топологически* *эквивалентными,* если существует такой гомеоморфизм $h : M \to \tilde{M}$, что $\forall x \in M,\ hF(x) = \tilde{F}(hx)$.

Пусть 0 – особая точка ω, то есть $p_1(0) = ... = p_n(0) = 0$. Случай, когда функции $p_i(\cdot)$ линейны, рассматривал И.С. Куклес [2]. Для случая симметричной матрицы $A := (\partial p_i(0)/\partial x_j)$, $\det A \neq 0$, в работе автора [3] получены следующие результаты. Пусть m *– число положительных собственных значений матрицы* A *(с учетом кратности). Тогда слоение, задаваемое в некоторой окрестности точки* $0 \in R^n$ C^1*-гладкой (аналитической) формой* $\omega, m \neq 2 m \neq n-2$ (любом m) *топологически эквивалентно слоению, задаваемому в некоторой окрестности точки* $0 \in R^n$ формой

$$\sigma_m = x_1 dx_1 + ... + x_m dx_m - x_{m+1} dx_{m+1} - ... - x_n dx_n.$$

При $m = 2$ и $m = n-2$ *приведен пример* C^∞*-формы, для которой слоение, задаваемое в окрестности особой точки, не является топологически эквивалентным слоению, задаваемому в окрестности точки* $0 \in R^n$ формой σ_m.

В настоящей работе мы рассмотрим случай несимметричной матрицы A. Будем считать, что $\omega \in C^r (r \geq 3)$. Согласно [2], существует такая матрица S, $\det S \neq 0$, что $S^* A S = diag(A_0,\, \mathrm{O})$, где A_0 – квадратная матрица второго порядка, а О – нулевая матрица. Заметим, что матрица A_0 несимметрична и $sgn\ \det A_0$ не зависит от выбора матрицы S.

Теорема. *Пусть* $\det A_0 \neq 0$. *Тогда у слоения, задаваемого в некоторой окрестности точки* $0 \in R^n \omega$ *особые точки образуют* $(n-2)$-мерное C^r*-подмногообразие; это слоение топологически эквивалентно слоению, задаваемому в случае* $\det A_0 > 0$ *формой* $-x_2 dx_1 + x_1 dx_2$, *а в случае* $\det A_0 < 0$ *формой* $x_2 dx_1 + x_1 dx_2$.

Доказательство. Обозначим $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Пусть матрица T_0 приводит матрицу JA_0 к жордановой форме $\mathrm{M}_0 = T_0^{-1} J A_0 T_0$, то есть к одной из матриц

$$\mathrm{M}_{01} = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{M}_{02} = \begin{pmatrix} \mu_1 & \varepsilon \\ 0 & \mu_1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{M}_{03} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что $T_0^* A_0 T_0 = -(\det T_0) J \mathrm{M}_0$. Обозначим $T := diag(T_0,\ I)$, $\mathrm{M} := diag(J\mathrm{M}_0,\ \mathrm{O})$, где I и О, соответственно, единичная и нулевая матрицы $(n-2)$-го порядка. Тогда $T^* S^* A S T = -(\det T_0)\mathrm{M}$. Из несимметричности матрицы A_0 следует и несимметричность матрицы М. Сделав замену переменных $x = STy$, получим $\omega = -(\det T_0)\tilde{\omega}$, где у дифференциальной формы $\tilde{\omega} = g_1(y)dy_1 + g_2(y)dy_2 + ... + g_n(y)dy_n$ матрица линейных членов $(\partial g_i(0)/\partial y_j) = $ М. Так как $\det(\partial g_i(0)/\partial y_j)_{i,j=1,2} = \det A_0 \neq 0$, то по теореме о неявной функции существуют такие числа $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ и такие C^r-функции $l_k : (-\delta_1, \delta_1)^{n-2} \to (-\delta_2, \delta_2) \quad (k = 1,\ 2)$, что $l_k(s) = o(\|s\|)$, а система уравнений $g_i(y) = 0$, $y \in (-\delta_2, \delta_2)^2 \times (-\delta_1, \delta_1)^{n-2}$, $(i = 1,\ 2)$ равносильна системе уравнений

$$y_k = l_k(y_3, ..., y_n) \quad (k = 1,\ 2). \tag{1}$$

Уравнения (1) задают в $R^n C^r$-подмногообразие W_0 коразмерности два. В выражении для $d\tilde{\omega}$ коэффициент при $dy_1 \wedge dy_2$ имеет вид $c + O(\|y\|)$, где $c \neq 0$ вследствие несимметричности матрицы М. Тогда из $\tilde{\omega} \wedge d\tilde{\omega} = 0$ получаем, что при условиях (1) и $g_i(y) = 0 (i = 3, ..., n)$. Но это означает, что W_0 совпадает с множеством особых точек формы ω в рассматриваемой окрестности. Сделаем замену $z_k = y_k - l_k(y_3, ..., y_n)$ при $k = 1,\ 2$; $z_k = y_k$ при $k \geq 3$. В новых переменных W_0 задается уравнениями $z_k = 0 (k = 1,\ 2)$, а $\tilde{\omega} = \sum\limits_{i=1}^{n} q_i(z)dz_i$, где

$$q_i(\cdot) \in C^{r-1}, q_i(z) = 0 \text{ при } z_1 = z_2 = 0 (i = 1,\ 2, ..., n), \quad (\partial q_i(0)/\partial z_j) = \text{М}. \tag{2}$$

Рассмотрим случай $\det A_0 < 0$. Тогда $\text{М}_0 = \text{М}_{01}$, где $\mu_1\mu_2 < 0$. Следы слоев на двумерной плоскости $z_3 = const, ..., z_n = const$ являются траекториями дифференциального уравнения

$$q_1(z)dz_1 + q_2(z)dz_2 = 0,$$

точнее, соответствующей системы дифференциальных уравнений

$$\dot{z}_1 = -q_2(z_1, z_2, z_3, ..., z_n) \quad , \quad \dot{z}_2 = q_1(z_1, z_2, z_3, ..., z_n). \tag{3}$$

Ввиду (2) точка (0, 0) является особой точкой этой системы с матрицей линейной части, равной М_{01}. Поэтому эта точка – седло с локальными инвариантными многообразиями, задаваемыми уравнениями $z_1 = w_1(z_2, z_3, ..., z_n)$ и $z_2 = w_2(z_1, z_3, ..., z_n)$, где w_k - функции класса C^{r-1}, $w_k(0, z_3, ..., z_n) = 0$, $w_k(s, z_3, ..., z_n) = o(\|s\|)(k = 1,\ 2)$ [4]. В координатах

$$u_1 = z_1 - w_1(z_2, z_3, ..., z_n),\ u_2 = z_2 - w_2(z_1, z_3, ..., z_n),\ u_k = z_k (k \geq 3),$$

которые будем считать определенными при $|u_i| < \delta (i = 1,\ 2, ..., n)$, дифференциальная форма $\tilde{\omega}$ имеет вид $\tilde{\omega} = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i(u)du_i$, где

$$a_i(\cdot) \in C^{r-2}, \quad a_i(u) = 0 \text{ при } u_1 = u_2 = 0 (i = 1,\ 2, ..., n),$$

$$a_1(u) = 0 \text{ при } u_2 = 0, \quad a_2(u) = 0 \text{ при } u_1 = 0, \quad (\partial a_i(0)/\partial u_j) = \text{M}. \quad (4)$$

Покажем, что и

$$a_i(u) = 0 \text{ при } u_2 = 0 \quad (i = 3, ..., n), \quad (5)$$

если δ выбрать достаточно малым. Из (4) и условия полной интегрируемости при $u_2 = 0$ получаем

$$(\mu_1 + f_1(u))u_1 \frac{\partial a_i(u)}{\partial u_1} = (\mu_1 + \mu_2 + f_2(u))a_i(u),$$

где $f_k(\cdot) \in C^{r-3} f_k(u) = O(\|u\|)(k = 1,\ 2)$. Поэтому при $s\tau > 0$

$$a_i(\tau, 0, u_3^{,}..., u_n^{)} = a_i(s, 0, u_3, ..., u_n) \exp \int\limits_s^\tau \frac{\mu_1 + \mu_2 + f_2(u_1, 0, u_3^{,}..., u_n^{)}}{(\mu_1 + f_1(u_1^{,} 0, u_3^{,}.., u_n^{)})\, u_1} du_1. \quad (6)$$

Предположим, что (5) неверно: $a_i(s, 0, u_3^{,}..., u_n^{)} \neq 0$ при некотором $s \neq 0$. Без ограничения общности можно считать, что $s > 0$. Из (6) получаем при всех $\tau \in (0,\ s]$

$$a_i(\tau, 0, u_3^{,}..., u_n^{)}/\tau = s^{-1}\, a_i(s, 0, u_3, ..., u_n) \exp \int\limits_s^\tau (\frac{\mu_2}{\mu_1} + f(u_1, u_3, ..., u_n)) \frac{du_1}{u_1},$$

где $f = O(|u_1| + |u_3| + ... + |u_n|)$. Выберем число ρ так, чтобы $\mu_1/\mu_2 < \rho < 0$. Уменьшив при необходимости δ, мы можем считать, что $\mu_1/\mu_2 + f(u_1, u_3, ..., u_n) < \rho$, и потому

$$\exp \int\limits_s^\tau (\frac{\mu_2}{\mu_1} + f(u_1, u_3, ..., u_n)) \frac{du_1}{u_1} \geq (\tau/s)^\rho.$$

Следовательно, $\lim\limits_{\tau \to +0} a_i(\tau, 0, u_3^{,}..., u_n^{)}/\tau = \infty$ в противоречие с дифференцируемостью a_i. Тем самым (5) доказано. Из (4)-(5) следует, что C^{r-1}-подмногообразие W_1, задаваемое в координатах u уравнением $u_2 = 0$, инвариантно, то есть состоит из слоев. Аналогично получаем, что и C^{r-1}-подмногообразие $W_2 :\ u_1 = 0$ инвариантно.

Формулы

$$\varphi_{ij}(t,\tau,s) := \begin{cases} ((-1)^i\delta,(-1)^j\delta,\tau)s + (-t,0,\tau)(1-s) \text{ при } t\in(-\delta,0], \\ ((-1)^i\delta,(-1)^j\delta,\tau)s + (0,t,\tau)(1-s) \text{ при } t\in[0,\delta), \\ (i,j=0,1) \end{cases}$$

задают гомеоморфизмы (на образ) $\varphi_{ij} : (-\delta,\delta)\times(-\delta,\delta)^{n-2}\times[0,\ 1)\mapsto R^n$. При достаточно малом δ дуги $\varphi_{ij}\{t\}\times\{\tau\}\times[0,\ 1)$ трансверсальны слоям. Поэтому найдется такое число $s_0>0$, что слой, проходящий через точку $\varphi_{ij}(0,\ 0,\ s)$, $s\in(0,\ s_0)$, $(i,j=0,\ 1)$ пересекает дугу

$$\varphi_{ij}\{t\}\times\{\tau\}\times[0,\ 1), \quad (t,\ \tau)\in(-\delta,\delta)\times(-\delta,\delta)^{n-2},$$

в единственной точке $\psi_{ij}(t,\ \tau,\ s)=\varphi_{ij}(t,\ \tau,\ S(t,\tau,\ s))$, где S – непрерывная функция, $S(t,\ \tau,\ \cdot)$ – возрастающая функция, $\lim\limits_{s\to+0}S(t,\ \tau,\ s)=0$ равномерно по $(t,\ \tau)\in(-\delta,\delta)\times(-\delta,\delta)^{n-2}$. Положим также $\psi_{ij}(t,\ \tau,\ 0):=\varphi_{ij}(t,\ \tau,\ 0)$. Ясно, что отображения $\psi_{ij}(\cdot)$ являются гомеоморфизмами на образ, а $U:=\bigcup\limits_{ij}\psi_{ij}(-\delta,\delta)\times(-\delta,\delta)^{n-2}\times[0,\ s_0)$ – окрестностью нуля. Аналогично определим по форме $\omega^+=x_2dx_1+x_1dx_2$ отображения ψ^+_{ij} и окрестность U^+. Так как $\psi^+_{ij}\psi^{-1}_{ij}$ тождественно на инвариантных многообразиях W_1 и W_2, то можно определить гомеоморфизм $h: U\to U^+$, положив $h(u):=\psi^+_{ij}\psi^{-1}_{ij}(u)$ для $u\in\psi_{ij}(-\delta,\delta)\times(-\delta,\delta)^{n-2}\times[0,\ s_0)$. Он по построению переводит слои слоения, задаваемого в U-формой ω, в слои слоения, задаваемого в U^+формой ω^+, что нам и требовалось.

Рассмотрим случай $\det A_0>0$. Тогда $\mathrm{M}_0=\mathrm{M}_{01}$, где $\mu_1\mu_2>0$ или $\mathrm{M}_0=\mathrm{M}_{0k}$ $(k=2,\ 3)$ и точка $(0,0)$для системы дифференциальных уравнений (3) и для аналогичной системы

$$\dot z_1=-z_1, \quad \dot z_2=-z_2 \tag{7}$$

для формы $\omega^-=-x_2dx_1+x_1dx_2$ является узлом или фокусом. Рассмотрим окрестность особой точки $U:\ z_1^2+z_2^2<2\delta^2,\ |z_k|<\delta\ (k=3,...,n)$. При достаточно малом δ (а в случае $\mathrm{M}_0=\mathrm{M}_{02}$ и при достаточно малом ε) следы на подмногообразии

$$\Pi:\ z_1^2+z_2^2=\delta^2,\ |z_k|<\delta\ (k=3,...,n)$$

слоев слоений F и F^-, задаваемых в U, соответственно, формами ω и ω^-, образуют на Π слоения F_Π и F^-_Π, трансверсальные кривым

$$z_1^2+z_2^2=\delta^2,\ z_k=const\ (k=3,...,n). \tag{8}$$

Поэтому существует гомеоморфизм $h_\Pi : \Pi \to \Pi$, оставляющий инвариантными кривые (8) и переводящий слои F_Π в слои F^-. Продолжим его по траекториям систем (3) и (7) до гомеоморфизма $h : U \backslash W_0 \to U \backslash W_o$, очевидно, переводящего слои F в слои F^-. Доопределим теперь h в точках W_0, положив $\forall z \in W_0 \;\; h(z) := z$. Нетрудно убедиться, что $h : U \to U$ является гомеоморфизмом, переводящим слои Fв слои F^-.

Библиографический список

1. *Тамура И.* Топология слоений. М.: Мир, 1979.
2. *Куклес И.С.* Об уравнениях Пфаффа с линейными коэффициентами // Труды Узбекского ун-та. 1955. Т. 59. С. 97-104.
3. *Ройтенберг В.Ш.* О слоениях, задаваемых вполне интегрируемой дифференциальной формой в окрестности невырожденной особой точки // Математика и математическое образование. Теория и практика. Межвуз. сб. науч. тр. Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 1999. С. 19-20.
4. *Шильников Л.П.* Методы качественной теории в нелинейной динамике. Ч. 1/ Л.П. Шильников, А.Л. Шильников, Д.В. Тураев, Л. Чуа. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004.

Нахождение участков обрамления множества Мандельброта

В.С. Секованов

Свойства множеств Жюлиа и множества Мандельброта в настоящее время интенсивно изучаются. Об этом свидетельствует обзор в статье [2] и монографиях [3, 4]. В книге [1] отмечается, что при $n > 2$ нахождение точек обрамления множества Мандельброта аналитическими методами затруднительно, если вообще возможно, и предлагается экспериментальное исследование, состоящее из трех этапов: тщательное построение множества Мандельброта (рис. 1); приближенное определение центра обрамления; исследование асимптотического направления поведения орбиты $\left\{ f_c^{(n)}(0) \right\}$. Утверждение, что аналитически находить точки c множества Мандельброта, которые определяют период определенной длины, не совсем верно. Укажем аналитический метод нахождения некоторых точек множества Мандельброта, которые определяют притягивающие точки периода 3 в соответствующем множестве Жюлиа.

Нам потребуются следующие утверждения:

Предложение 1. *Если точки $z_1, \; z_2$ имеют период, равный единице для функции $f(z) = z^2 + c$, то многочлен $\left(\left(z^2 + c \right)^2 + c \right)^2 + c - z$ делится без остатка на многочлен $z^2 + c - z$.*

Доказательство. Пусть точки $z_1,\ z_2$ являются неподвижными для функции $f(z)$. Тогда эти точки будут корнями уравнений $z^2+c-z=0$ и $\left(\left(z^2+c\right)^2+c\right)^2+c-z=0$. Следовательно, $z^2+c-z=(z-z_1)(z-z_2)$ и $\left(\left(z^2+c\right)^2+c\right)^2+c-z=(z-z_1)(z-z_2)\varphi(z)$, где $\varphi(z)$– многочлен шестой степени. Таким образом, $\frac{\left(\left(z^2+c\right)^2+c\right)^2+c-z}{z^2+c-z}=\varphi(z)$.

Предложение 2. *Если точка z_0 является притягивающей периодической точкой для $f_c(z)=z^2+c$, то точка $z=0$ принадлежит области притяжения точки z_0* [1].

Нам потребуется еще одна из формул Виета: $a_n=(-1)^n\alpha_1\alpha_2...\alpha_n$, где $\alpha_1,\ \alpha_2,...\alpha_n$ – корни многочлена $h(z)=\quad z^n+a_1\cdot z^{n-1}+...+a_{n-1}z+a_n$.

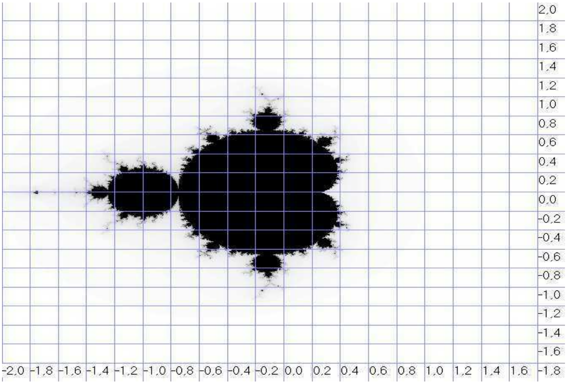


Рис. 1

Пусть z_1 – притягивающая точка периода 3 при некотором значении $c\in M$(M – множество Мандельброта). Тогда $f^{(3)}(z_1)=f\left(f(f(z_1))\right)=z_1$ и $\left|\left(f^{(3)}\right)'(z_1)\right|<1$. Обозначим $f(z_1)=z_2,\ \ f(z_2)=z_3,\ \ f(z_3)=z_1$. Тогда $\left(f^{(3)}(z_1)\right)'=(f(f(f(z_1))))'=f'(f(f(z_1)))\cdot f'(f(z_1))\cdot f'(z_1)=f'(z_3)\cdot f'(z_2)\cdot f'(z_1)$. Нетрудно заметить, что $f^{(3)'}(z_1)=f^{(3)'}(z_2)=f^{(3)'}(z_3)$.

То есть точки z_2 и z_3 также являются неподвижными притягивающими точками отображения $f^{(3)}(z)$. Кроме того, $\left|\left(f^{(3)}\right)'(z_1)\right|=\left|\left(f^{(3)}\right)'(z_2)\right|=\left|\left(f^{(3)}\right)'(z_3)\right|<1$. Заметим, что неподвижные точки $u_1,\ u_2$ функции $f(z)=z^2+c$ есть корни уравнения $z^2+c=z$. То есть $u_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1-4c}}{2}$. Ясно, что данные точки окажутся неподвижными и для функции $f^{(3)}(z) = \left(\left(z^2+c\right)^2+c\right)^2 + $. По предложению 1 многочлен $\left(\left(z^2+c\right)^2+c\right)^2 + -z$. будет делиться нацело на многочлен z^2+c-z. Разложим многочлен восьмой степени$\left(\left(z^2+c\right)^2+c\right)^2 + -z$ на множители: $f^{(3)}(z)-z = \left(\left(z^2+c\right)^2+c\right)^2 + -z = (z^2+c-z)\cdot(z^6+z^5+3\cdot z^4\cdot c+ z^4+2\cdot z^3\cdot c+z^3+3\cdot z^2\cdot c+3\cdot z^2\cdot c+z^2+z\cdot c^2+2\cdot z\cdot c+z+c^3+2\cdot c^2+c+1)$.

Пусть еще $z_4,\ z_5,\ z_6$ – точки отображения f периода 3, отличные от точек $z_1,\ z_2,\ z_3$, причем $z_5 = f(z_4),\ z_6 = f(z_5),\ z_4 = f(z_6)$. Ясно, что точки $z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4,\ z_5,\ z_6$ являются корнями уравнения: $z^6+z^5+3\cdot z^4\cdot c+z^4+2\cdot z^3\cdot c+z^3+3\cdot z^2\cdot c+3\cdot z^2\cdot c+z^2+z\cdot c^2+2\cdot z\cdot c+z+c^3+2\cdot c^2+c+1=0$ имеет место: $\left|\left(f^{(3)}\right)'(z_4)\right| = \left|\left(f^{(3)}\right)'(z_5)\right| = \left|\left(f^{(3)}\right)'(z_6)\right|$. По формуле Виета находим: $z_1\cdot z_2\cdot z_3\cdot z_4\cdot z_5\cdot z_6 = c^3+2\cdot c^2+c+1$.

Подсчитаем производную третьей итерации функции $f(z)$: $\left(f^{(3)}(z)\right)' = 2\left[\left(z^2+c\right)^2+c\right]\cdot 2\left(z^2+c\right)\cdot 2\cdot z = 8\cdot z\left[\left(z^2+c\right)^2+c\right]\cdot(z^2+c)$. Теперь можно заключить, что $\left(f^{(3)}(z_3)\right)' = 8\cdot z_3\cdot\left[\left(z_3^2+c\right)+c\right]^2\cdot(z_3^2+c) = 8\cdot z_3\cdot z_2\cdot z_1$.

Аналогично находим: $\left(f^{(3)}(z_6)\right)' = 8\cdot z_6\cdot\left[\left(z_6^2+c\right)+c\right]^2\cdot(z_6^2+c) = 8\cdot z_6\cdot z_5\cdot z_4$.

Нетрудно заметить, что $f^{(3)'}(z_1) = f^{(3)'}(z_2) = f^{(3)'}(z_3) = 8\cdot z_3\cdot z_2\cdot z_1$, а $f^{(3)'}(z_4) = f^{(3)'}(z_5) = f^{(3)'}(z_6) = 8\cdot z_4\cdot z_5\cdot z_6$. Поскольку точки $z_1,\ z_2,\ z_3$ притягивающие, то $\left|f^{(3)'}(z_3)\right| = |8\cdot z_3\cdot z_2\cdot z_1| < 1$. Можно предположить, что значение выражения $64\cdot|z_1\cdot z_2\cdot z_3\cdot z_4\cdot z_5\cdot z_6|$ достаточно близко к единице. В силу формулы Виета $64\cdot|z_1\cdot z_2\cdot z_3\cdot z_4\cdot z_5\cdot z_6| = 64\left|{}^3+2\cdot{}^2+\ +1\right|$ потребуем выполнения равенства $\left|c^3+2\cdot c^2+c+1\right| = \frac{1}{64}$. и найдем сначала вещественный корень $_1$ уравнения $c^3+2\cdot c^2+c+1-\frac{1}{64}=0$ (нетрудно проверить, что каждое уравнение третьей степени с вещественными коэффициентами имеет по крайней мере один вещественный корень). Данный корень равен $c_1 = -\frac{7}{4}$.

Два сопряженных комплексных корня $c_2 = -\frac{1}{8}+\frac{i\cdot\sqrt{35}}{8} \approx -0,125+i\cdot 0,7395$ и $c_3 = -\frac{1}{8}+\frac{i\cdot\sqrt{35}}{8} \approx -0,125-i\cdot 0,7395$ определяются из уравнения: $16c^2+4c+9=0$.

Теперь необходимо проверить, принадлежат ли точки $c_1,\ c_2,\ c_3$ множеству Мандельброта и порождают ли они цикл периода 3 для соответствующих множеств Жюлиа. Рассмотрим сначала точку $c_1 = -\frac{7}{4}$. Будем анализировать участки орбиты $\left\{f_{c_1}^{(n)}(0)\right\}$. Простая паскаль-программа:

```
program t;
uses crt;
var i,n:integer; z,c,y: real;
begin
clrscr;
readln(n);
c:= -1.75; z:=0;
for i:=1 to n do begin y:=z*z+c; writeln(y); z:=y; end;
end.
```

дает, что $f_1^{(97)}(0) \approx f_1^{(100)}(0)$.

Поскольку орбита нуля ограничена, то точка $c_1 = -\frac{7}{4}$ принадлежит множеству Мандельброта [1]. Исследуя асимптотическое поведение данной орбиты $\left\{f_{c_1}^{(n)}(0)\right\}$ точки $z = 0$ и учитывая предложение 2, заключаем, что точка $z = 0$ принадлежит бассейну притяжения точки z_0 периода три.

Аналогичное исследование можно провести для точек $c_2 = -\frac{1}{8} + \frac{i\cdot\sqrt{35}}{8} \approx -0,125 + i \cdot 0,7395$, и $c_3 = -\frac{1}{8} + \frac{i\cdot\sqrt{35}}{8} \approx -0,125 - i \cdot 0,7395$. Оказывается, что данные точки также принадлежат обрамлению множества Мандельброта и порождают период три в соответствующем множестве Жюлиа, то есть в соответствующем множестве Жюлиа существует притягивающая точка периода 3.

Рассмотрим теперь уравнение $c^3 + 2 \cdot c^2 + c + 1 + \frac{1}{64} = 0$. С помощью несложного алгоритма находится его приближенное решение $c_4 \approx -1,75970755030$. Анализируя решение, убеждаемся, что данная точка принадлежит обрамлению множества Мандельброта и также порождает период 3 в соответствующем множестве Жюлиа. Далее можно приближенно найти корни $_5$, $_6$ уравнения $c^3 + 2 \cdot c^2 + c + 1 + \frac{1}{64} = 0$, убедиться, что каждый из них принадлежит множеству Мандельброта и порождает период 3 в соответствующих множествах Жюлиа (нахождение корней уравнения $c^3 + 2 \cdot c^2 + c + 1 + \frac{1}{64} = 0$, проверка их принадлежности соответствующему обрамлению множества Мандельброта проведены М.В. Перегудиной).

Библиографический список

1. *Кроновер Р.М.* Фракталы и хаос в динамических системах. М.: Постмаркет, 2000.
2. *Любич М.Ю.* Динамика рациональных преобразований: топологическая картина. М.: Успехи математических наук. Т. 41. Вып. 4 (250). М.: Наука, 1986.

3. *Милнор Дж.* Голоморфная динамика. Москва-Ижевск, 2000.
4. *Пайтген Х.О.* Красота фракталов. Образы комплексных динамических систем / пер. с англ. под ред. А. Н. Шарковского / Х.О. Пайтген, П.Х. Рихтер М.: Мир, 1993.

Двойственный комплекс разрешения терминальных особенностей[1]

Д.А. Степанов

С любым разрешением особенностей, исключительный дивизор которого имеет простые нормальные пересечеия, можно связать его двойственный комплекс. Двойственный комплекс обобщает в высшие размерности понятие двойственного графа разрешения поверхностной особенности. Гомотопический тип двойственного комплекса не зависит от выбора разрешения. В настоящей работе мы доказываем, что двойственный комплекс разрешения трехмерной терминальной особенности гомотопически эквивалентен точке.

Введение

В этой работе мы продолжаем изучение двойственного комплекса разрешения особенностей, начатое в [12] и [13]. Основной результат работы (теорема 3) уже публиковался на английском языке в препринте [14].

Рассмотрим росток (X, S) алгебраического многообразия или аналитического пространства X с множеством особых точек S. Пусть $f\colon Y \to X$ – разрешение особенностей многообразия X, исключительное множество $Z = f^{-1}(S)$ которого – дивизор с простыми нормальными пересечениями. *Двойственный комплекс разрешения* f – это всего лишь комплекс инцидентности $\Delta(Z)$ дивизора Z. Более подробно, если $Z = \sum Z_i$ – разложение дивизора Z на неприводимые компоненты, то 0-мерные симплексы Δ_i комплекса $\Delta(Z)$ находятся во взаимно однозначном соответствии с неприводимыми дивизорами Z_i, 1-мерные $\Delta_{ij}^{(k)}$ – с неприводимыми компонентами $Z_{ij}^{(k)}$ пересечений $Z_i \cap Z_j = \cup_k Z_{ij}^{(k)}$, 2-мерные симплексы соответствуют неприводимым компонентам тройных пересечений $Z_i \cap Z_j \cap Z_k$ и т.д. Симплексы приклеиваются друг к другу естественным образом: например, отрезок $\Delta_{ij}^{(k)}$ соединяет вершины Z_i и Z_j.

[1]Работа была поддержана РФФИ, грант № 05-01-00353, и грантом CRDF № RUM1-2692-MO-05.

Таким образом, двойственный комплекс – это многомерное обобщение понятия двойственного графа разрешения поверхностной особенности.

Пример 1. Рассмотрим трехмерную особенность

$$(\{g(x,y,z,t)=x^5+y^5+z^5+t^5+xyzt=0\},0)\subset(\mathbb{C}^4,0)\,.$$

Ее разрешение может быть получено раздутием начала координат. Исключительный дивизор Z этого раздутия определен в проективном пространстве $\mathbb{P}^3$ однородной частью $g_4=xyzt$ многочлена g. Следовательно, Z состоит из четырех плоскостей в общем положении. Таким образом, двойственный комплекс $\Delta(Z)$ представляет собой поверхность тетраэдра. Этот пример легко может быть обобщен в произвольную размерность $n\geq 2$. Мы получаем двойственные комплексы, которые являются границами стандартных симплексов Δ^{n-1}, или, с топологической точки зрения, сферами S^{n-1}.

Заметим, что комплекс $\Delta(Z)$ представляет собой триангулированное топологическое пространство, но, вообще говоря, не симплициальный комплекс. Кроме этого, заметим, что из того, что дивизор Z имеет нормальные пересечения, следует, что если $\dim X=n$, то $\dim\Delta(Z)\leq n-1$.

Комплекс $\Delta(Z)$ можно рассматривать для любого дивизора Z с простыми нормальными пересечениями на неособом многообразии Y. Если многообразие Y кэлерово, то когомологии с коэффициентами $\mathbb{Q}$ комплекса $\Delta(Z)$ интерпретируются как компоненты веса 0 смешанной структуры Ходжа на когомологиях Z (см. [8. Гл. 4, § 2.]). В [7] Д. Мамфорд ввел понятия *конического и компактного полиэдрального комплекса*, связанного с тороидальным вложением $U\subset Y$. Если $Z=Y\setminus U$ – дивизор с простыми нормальными пересечениями, то полиэдральный комплекс Мамфорда представляет собой в точности наш двойственный комплекс, однако наделенный некоторой дополнительной структурой. Мы будем пользоваться тем фактом, что тороидальные бирациональные морфизмы

$$\begin{tikzcd}
 & Y' \arrow[dd] \\
U \arrow[ur, hook] \arrow[dr, hook] & \\
 & Y
\end{tikzcd}$$

находятся во взаимно однозначном соответствии с разбиениями конического полиэдрального комплекса, связанного с $\Delta(Z)$ (см. [7]). В связи с разрешением особенностей двойственный комплекс $\Delta(Z)$ впервые рассматривался, насколько нам известно, Дж. Л. Гордоном в [5].

Отправной точкой нашей работы служит следующая

Теорема 1. ([12]) *Пусть* $f\colon (Y, Z) \to (X, o)$ *и* $f'\colon (Y', Z') \to (X, o)$ *– два разрешения изолированной особенности o алгебраического многообразия (аналитического пространства) X, определенного над алгебраически замкнутым полем характеристики 0, причем исключительные множества* Z, Z' *этих разрешений – дивизоры с простыми нормальными пересечениями. Тогда топологические пространства* $\Gamma(E')$ *и* $\Gamma(E'')$ *гомотопически эквивалентны.*

Таким образом, гомотопический тип двойственного комплекса разрешения – инвариант особенности. Теорема 1 основана на т.н. слабой теореме о факторизации бирациональных отображений в логарифмической категории (Абрамович-Кару-Мацуки-Влодарчик [1]). По этой теореме бирациональный изоморфизм между многобразиями Y и Y', $Y \setminus Z \simeq Y' \setminus Z'$ может быть разложен в последовательность раздутий и стягиваний

$$(Y, Z) = (Y_1, Z^{(1)})) \overset{\psi_1}{\dashrightarrow} (Y_2, E^{(2)}) \overset{\psi_2}{\dashrightarrow} \ldots \overset{\psi_{k-1}}{\dashrightarrow} (Y_k, E^{(k)}) = (Y', Z'),$$

где центры всех раздутий принадлежат дивизорам с простыми нормальными пересечениями $Z^{(i)}$ и в некотором смысле находятся в общем положении по отношению к этим дивизорам. Теорема о факторизации сводит доказательство теоремы 1 к проверке того, что гомотопический тип двойственного комплекса не меняется при одном раздутии, а это простое упражнение.

А. Тюилье (A. Thuillier) в [15] было получено следующее обобщение теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть X – алгебраическая схема над совершенным полем k, а Y – подсхема в X. Если* $f_1\colon X_1 \to X$ *и* $f_2\colon X_2 \to X$ *– два таких собственных морфизма, что* $f_i^{-1}(Y)$ *– дивизоры с простыми нормальными пересечениями и* f_i *порождают изоморфизм между* $X_i \setminus f_i^{-1}(Y)$ *и* $X \setminus Y$, $i = 1, 2$, *то топологические пространства* $\Delta(f_1^{-1}(Y))$ *и* $\Delta(f_2^{-1}(Y))$ *канонически гомотопически эквивалентны.*

Исходя из этих результатов, естественно поставить такую задачу: вычислить гомотопический тип комплекса $\Delta(Z)$ для различных особенностей (X, o). Целью настоящей заметки является доказательство следующего результата (см. теорему 3).

Теорема 3. *Пусть* $f\colon (Y, Z) \to (X, o)$ *– разрешение трехмерной терминальной особенности* (X, o), *определенной над полем* $\mathbb{C}$ *комплексных* *чисел. Тогда двойственный комплекс $\Delta(Z)$ разрешения f имеет гомотопический тип точки.*

Доказательство этой теоремы приведено в части 2. Оно основано на теоремах о двойственном комплексе разрешений рациональных и гиперповерхностных особенностей (см. [13]), мы приводим их в части 1. Везде далее мы предполагаем, что все многообразия определены над полем $\mathbb{C}$, а разрешение особенностей, исключительное множество которого – дивизор с простыми нормальными пересечениями, для краткости мы называем *хорошим разрешением*.

1. Двойственный комплекс для рациональных и гиперповерхностных особенностей

Напомним, что алгебраическое многообразие (или аналитическое пространство) X имеет *рациональные особенности*, если X нормально и для любого разрешения $f\colon Y \to X$ все пучки $R^i f_* \mathcal{O}_Y$ обращаются в нуль, $i > 0$.

Лучше всего изучены рациональные особенности поверхностей. Осноововополагающей здесь является работа М. Артина [2], в которой, в частности, показано, что исключительное множество разрешения рациональной поверхностной особенности представляет собой дерево рациональных кривых. Следующий результат можно рассматривать как обобщение комбинаторной части этого утверждения в высшие размерности.

Теорема 4. it Пусть $o \in X$ – изолированная рациональная особенность многообразия (или аналитического пространства) X размерности $n \geq 2$, и пусть $f\colon Y \to X$ – хорошее разрешение с исключительным дивизором Z. Тогда высшие (комплексные) когомологии комплекса $\Delta(Z)$ обращаются в нуль:

$$H^{n-1}(\Delta(Z), \mathbb{C}) = 0.$$

Основную роль в доказательстве играет следующее утверждение, которое может представлять и самостоятельный интерес.

Лемма 1. *Пусть $Z = \sum Z_i$ – приведенный дивизор с простыми нормальными пересечениями на компактном кэлеровом многообразии Y, $\dim Y = n$, и предположим, что $H^k(Z, \mathcal{O}_Z) = 0$ для некоторого k, $1 \leq k \leq n-1$. Тогда k-е когомологии с коэффициентами в $\mathbb{C}$ комплекса $\Delta(Z)$ также обращаются в нуль:*

$$H^k(\Delta(Z), \mathbb{C}) = 0.$$

Доказательство обоих утверждений см. в [13]. Идея доказательства леммы 1 заключается в том, чтобы ввести вариант спектральной последовательности Майера-Виеториса для $Z = \cup Z_i$ и показать, что она вырождается в члене E_2. См. также работы [6] и [8], где формулируются близкие результаты.

Перейдем теперь к гиперповерхностным особенностям.

Теорема 5. *Пусть $o \in X$ – изолированная гиперповерхностная особенность алгебраического многообразия (или аналитического пространства) X размерности не меньше 3 и определенного над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел. Если $f\colon Y \to X$ – хорошее разрешение особенности $o \in X$, Z – его исключительный дивизор, то фундаментальная группа комплекса $\Delta(Z)$ тривиальна:*

$$\pi(\Delta(Z)) = 0.$$

Теорема 5 является следствием теоремы Милнора о том, что линк (пересечение со сферой достаточно малого радиуса) особенности $o \in X$ – $(n-2)$-связное гладкое многообразие ([9. Следствие 2.9, теорема 5.2]), и, в частности, односвязен. Доказательство теоремы 5 см. в [13].

Некоторые важные типы особенностей являются одновременно рациональными и гиперповерхностными. Объединяя теоремы 4 и 5, можно получить точные результаты в 3-мерном случае.

Следствие 1. *Пусть $o \in X$ – изолированная рациональная гиперповерхностная особенность размерности 3. Если $f\colon Y \to X$ – хорошее разрешение с исключительным дивизором Z, то двойственный комплекс $\Delta(Z)$ разрешения f гомотопически эквивалентен точке.*

Доказательство. Из теорем 4 и 5 мы знаем, что комплекс $\Delta(Z)$ односвязен и $H^2(\Delta(Z), \mathbb{C}) = 0$. Так как $\dim X = 3$, имеем $\dim(\Delta(Z)) \leq 2$. Значит, $H_2(\Delta(Z), \mathbb{Z}) = 0$. Теперь наше утверждение следует из обратной теоремы Гуревича и теоремы Уайтхеда.

2. Двойственный комплекс для трехмерных терминальных особенностей

Терминальные особенности важны для теории Мори, ибо это особенности, которые могут присутсивовать на минимальных моделях алгебраических многообразий размерности ≥ 3. В размерности 3 терминальные особенности были полностью классифицированы М. Ридом, Д. Моррисоном, Ш. Мори и Н. Шепард-Барроном. Классификация выглядит следующим образом. Горенштейновы (или особенности *индекса* 1, т.е.

такие, канонический дивизор на которых является дивизором Картье) терминальные особенности – это в точности изолированные составные дювалевские (cDV) точки. *cDV-точка* – это росток особенности (X, o), который аналитически изоморфен ростку

$$(\{f(x,y,z) + tg(x,y,z,t) = 0\}, 0) \subset (\mathbb{C}^4, 0)\,,$$

где f – один из следующих клейновских многочленов

$$x^2 + y^2 + z^{n+1},\ n \geq 1\,,\ x^2 + y^2 z + z^{n-1},\ n \geq 4\,,$$

$$x^2 + y^3 + z^4,\ x^2 + y^3 + yz^3,\ x^2 + y^3 + z^5\,.$$

Другими словами, cDV-точка – это такой росток особенности, что его общее гиперплоское сечение является поверхностной дювалевской особенностью. Негоренштейновы (или особенности индекса $m \geq 2$, т.е. такие, m-я кратность канонического дивизора на которых является дивизором Картье) терминальные особенности представляют собой факторы изолированных cDV-точек по некоторым циклическим группам. Точные формулировки приведены в [11] и [10].

Теорема 6. *Пусть $f\colon (Y, Z) \to (X, o)$ – хорошее разрешение трехмерной терминальной особенности (X, o). Тогда двойственный комплекс $\Delta(Z)$ разрешения f имеет гомотопический тип точки.*

Доказательство. Предположим сначала, что особенность (X, o) горенштейнова. Тогда, в соответствии с классификацией, она является изолированной гиперповерхностной особенностью. С другой стороны, все терминальные (и, более того, канонические) особенности рациональны (Р. Элкик [3]). Поэтому здесь применимо следствие 1, и мы видим, что комплекс $\Delta(Z)$ гомотопически тривиален.

Предположим теперь, что (X, o) – негоренштейнова терминальная особенность индекса m. Обозначим через $(V, o') \to (X, o)$ ее горенштейново накрытие, $X = V/\mathbb{Z}_m$, и рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd} Z' \subset W \arrow[r] \arrow[d, "g'"'] & \widetilde{X} \supset \widetilde{Z} \arrow[d, "g"] \\ o' \in V \arrow[r] & X \ni o \end{tikzcd}$$

где $g'\colon W \to V$ – эквивариантное разрешение Хиронаки особенностей многообразия V (см., например, [4]), $\widetilde{X} = W/\mathbb{Z}_m$, горизонтальные стрелки обозначают естественные проекции, а $g\colon \widetilde{X} \to X$ – индуцированный бирациональный морфизм. Через Z' и $\widetilde{Z}$ мы обозначаем, соответственно, исключительные дивизоры морфизмов g' и g.

Так как $\widetilde{X}$ имеет лишь циклические факторособенности, $\widetilde{X} \setminus \widetilde{Z} \subset \widetilde{X}$ – тороидальное вложение в смысле [7. Гл. II, §1, определение 1]. Ясно, что определение двойственного комплекса применимо также и к частичному разрешению g. Кроме этого, комплекс $\Delta(\widetilde{Z})$ можно интерпретировать как носитель компактного полиэдрального комплекса Мамфорда, связанного с тороидальным вложением $\widetilde{X} \setminus \widetilde{Z} \subset \widetilde{X}$ (см. [7. С. 69-71]). С другой стороны, действие группы $\mathbb{Z}_m$ на W естественным образом индуцирует действие $\mathbb{Z}_m$ на $\Delta(Z')$, так что $\Delta(\widetilde{Z}) = \Delta(Z')/\mathbb{Z}_m$.

Мы уже знаем, что комплекс $\Delta(Z')$ гомотопически тривиален. Известен топологический факт, что фактор гомотопически тривиального CW-комплекса по конечной группе снова гомотопически тривиален ([16. С. 222, теорема 6.15]). Следовательно, $\Delta(\widetilde{Z})$ гомотопически тривиален.

Пусть $\Delta'(\widetilde{Z})$ – конический полиэдральный комплекс, ассоциированный с $\Delta(\widetilde{Z})$. Любое разбиение комплекса $\Delta'(\widetilde{Z})$ дает новое тороидальное вложение $Y \setminus Z \subset Y$ и бирациональный тороидальный морфизм $(Y \setminus Z, Y) \to (\widetilde{X} \setminus \widetilde{Z}, \widetilde{X})$ ([7. Гл. II, §2, теорема 6*]). Соответствующий двойственный комплекс $\Delta(Z)$ является разбиением комплекса $\Delta(\widetilde{Z})$. В частности, мы можем взять то разбиение комплекса $\Delta'(\widetilde{Z})$, которое дает хорошее разрешение (Y, Z) многообразия $\widetilde{X}$. А так как $\Delta(Z)$ всего лишь разбиение комплекса $\Delta(\widetilde{Z})$, он тоже гомотопически тривиален.

В заключение сделаем два замечания.

Замечание 1. Во всех примерах, которые нам известны, двойственный комплекс разрешения имеет гомотопический тип букета сфер размерности $n-1$, где n – размерность данной особенности. Более того, в [14] мы описали способ вычисления двойственного комплекса для гиперповерхностных особенностей, невырожденных по Хованскому. Из него видно, что для невырожденных (т. е. достаточно общих) гиперповерхностных особенностей двойственный комплекс разрешения и должен быть букетом сфер. Интересно было бы выяснить, насколько общий характер носит этот факт. Возможно, это выполняется вообще для всех изолированных особенностей или, по крайней мере, для всех гиперповерхностных. Если же это неверно, то интересно было бы найти соответствующие примеры.

Замечание 2. С алгебраической точки зрения изолированная особенность (X, o) полностью определяется своим локальным кольцом $\mathcal{O}_o$. Таким образом, и гомотопический тип двойственного комплекса разрешения должен определяться этим кольцом. Интересно было бы установить, как топологические инварианты (например, ранги групп гомологий) двойственного комплекса связаны с алгебраическими инвариантами кольца $\mathcal{O}_o$.

Библиографический список

1. *Abramovich, D., Karu, K., Matsuki, K., Włodarczyk, J.* Torification and factorization of birational maps, J. Amer. Math. Soc. 15 (2002). P. 531-572.
2. *Artin, M.* On isolated rational singularities of surfaces, Amer. J. Math. 88 (1966). P. 129-136.
3. *Elkik, R.* Rationalité des singularités canoniques, Invent. Math. 64 (1981). P. 1-6.
4. *Encinas, S., Hauser, H.* Strong resolution of singularities in characteristic zero, Comment. Math. Helv. 77(4) (2002). P. 821-845.
5. *Gordon, G.L.* On a simplicial complex associated to the monodromy, Transactions of the AMS 261 (1980). P. 93-101.
6. *Gordon, G.L.* On the degeneracy of a spectral sequence associated to normal crossings, Pacific J. Math. 90(2) (1980). P. 389-396.
7. *Kempf, G., Knudsen, F., Mumford, D., Saint-Donat, B.* Toroidal embeddings I, Springer LNM 339, 1973.
8. *Куликов Вик.С., Курчанов П.В.* Комплексные алгебраические многообразия: периоды интегралов, структуры Ходжа // Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 36. М.: ВИНИТИ, 1989.
9. *Milnor, J.* Singular points of complex hypersurfaces, Annals of Mathematics Studies 61, Princeton University Press, Princeton, 1968.
10. *Mori, S.* On 3-dimensional terminal singularities, Nagoya Math. J. 98 (1985). P. 43-66.
11. *Reid, M.* Young person's guide to canonical singularities, Proc. Sympos. Pure Math., 46, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, 1987.
12. *Степанов Д.А.* Заметка о двойственном комплексе разрешения особенностей // Успехи матем. наук, 2006. 61(1). С. 185-186.
13. *Stepanov, D.A.* A note on resolution of rational and hypersurface singularities, сдана в Proc. of the AMS. Электронный препринт: arXiv:math.AG/0602080.
14. *Stepanov, D.A.* Combinatorial structure of exceptional sets in resolutions of singul;arities, препринт института математики им. Макса Планка MPI 06-154, (2006).

15. *Thuillier, A.* Géométrie toroïdale et géométrie analytique non Archimédienne. Application au type d'homotopie de certains schémas formels, Preprint Nr. 10 (2006), Universität Regensburg, Mathematik.
16. *tom Dieck, T.* Transformation groups, De Gruyter studies in mathematics 8. Berlin; New York: de Gruyter, 1987.

Оценки снизу и сверху константы Ляпунова для уравнения Хилла

Х.С. Тарамова

Устойчивость решений уравнения Хилла

$$\ddot{y} + yf(t) = 0, \tag{1}$$

где

$$f(t+T) = f(t), \quad f(t) \in C(-\infty; +\infty),$$

в силу периодичности коэффициента $f(t)$, согласно теории Флоке [1], зависит от того, в каких пределах расположен след матриканта $SpX(T)$ эквивалентной системы дифференциальных уравнений первого порядка с периодическим коэффициентом

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -f(t)x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1. \end{cases} \tag{2}$$

Развитие вычислительной техники привело к тому, что в настоящее время не очень сложно проверить, устойчивы или неустойчивы решения уравнения, коэффициенты которого явно заданы. Однако многие задачи современной техники приводят к исследованию уравнений, коэффициенты которых явно не заданы, и, более того, известны только некоторые их свойства.

Допустим, что заданы следующие характеристики функции $f\,(t)$:

$$T, \quad a = \inf_{t\in[0,T]} f(t), \quad b = \sup_{t\in[0,T]} f(t), \quad \theta_0 = \int_0^T f(t)dt, \quad \theta_1 = \int_0^T dt \int_0^t f(\tau)d\tau.$$

Рассмотрим множество U_f измеримых на промежутке $[0,T]$ функций $u(t)$, имеющих те же характеристики, что и функция $f\,(t)$:

$$U_f = \left\{ u(t) : u(t) \in A, \int_0^T dt \int_0^t u(\tau)d\tau = \theta_1 \right\},$$

здесь через A обозначено множество, рассмотренное М.С. Сабуровым [2],

$$A=\left\{u(t):\inf_{t\in[0,T]}u(t)=a,\sup_{t\in[0,T]}u(t)=b,\int\limits_0^T u(t)dt=\theta_0,u(t+T)=u(t)\right\}.$$

В этом случае коэффициент $f(t)$ уравнения Хилла (1) будет одним из элементов множества U_f.

Обозначив для каждой из функций $u=u(t)$ множества U_f, отвечающую ей константу Ляпунова через $J(u)$, попытаемся найти наибольшее $\bar{J}$ и наименьшее $\underline{J}$ значения константы Ляпунова:

$$\underline{J}=\inf_{u\in U_f}J(u)\,,\quad \bar{m}athop J=\sup_{u\in U_f}J(u).$$

Определив границы $\underline{J}$ и $\bar{J}$, в которых лежит константа Ляпунова, по теореме Флоке [1] можем однозначно ответить на вопрос устойчивости решений уравнения Хилла (1).

Используя тот факт, что наибольшее $\bar{J}$ и наименьшее $\underline{J}$ значения константы Ляпунова для функций множества U_f [3], как и для функций множества A [2], достигается на кусочно-постоянных функциях $u(t)$, принимающих два значения a и b, имеющих n переключений и удовлетворяющих равенству

$$\int\limits_0^T u(t)\,dt=\theta_0,$$

а в случае множества U_f – и соотношению

$$\int\limits_0^T dt\int\limits_0^t f(\tau)d\tau=\theta_1,$$

найдем границы константы Ляпунова для функций $u(t)$ множества U_f.

Для определения этих границ нам необходимо вычислить, при каком значении n достигается наименьшее значение константы Ляпунова $\underline{J}$, а при каком – наибольшее $\bar{J}$, т.е. нам необходимо найти число переключений n управления $u(t)$.

Рассмотрим функцию

$$\theta_1(n)=\int\limits_0^T dt\int\limits_0^t u(\tau)d\tau. \tag{3}$$

Пусть $n = k$ – искомое число переключений функции $u(t)$ множества U_f. Тогда

$$\theta_1(k) = \int\limits_0^T dt \int\limits_0^t u(\tau)d\tau = \int\limits_0^T dt \int\limits_0^t f(\tau)d\tau = \theta_1.$$

Введем вспомогательную функцию

$$\delta(n) = \int\limits_0^T dt \int\limits_0^t \tilde{u}(\tau)d\tau,$$

где $\tilde{u}(t)$ – некоторая функция из множества A.

Определив связь между функциями $\delta(n)$ и $\theta_1(n)$, сможем найти возможное число переключений n функции $u(t)$, тем самым вычислить наименьшее $\underline{J}$ и наибольшее $\bar{J}$ значения константы Ляпунова.

Если $u(0) = b$, то управляющая функция $u(t)$ – это кусочно-постоянная функция, принимающая два значения a и b, имеющая n переключений, удовлетворяющая равенствам $\int\limits_0^T u\,(t)\,dt = \theta_0$ и $\int\limits_0^T dt \int\limits_0^t f(\tau)d\tau = \theta_1$, и заданная формулой

$$u(t) = \begin{cases} b, & i \cdot (T_1 + T_2) \le t < T_2 + i \cdot (T_1 + T_2)\,,\ n \cdot (T_1 + T_2) \le t \le T, \\ a, & T_2 + i \cdot (T_1 + T_2) \le t < (i+1)\,(T_1 + T_2)\,, \\ i = \overline{0, \quad n-1}; & n \in N, \end{cases}$$

где

$$T = (T_1 + T_2) \cdot n + t_0, \quad \theta_0 = (aT_1 + bT_2) \cdot n + bt_0.$$

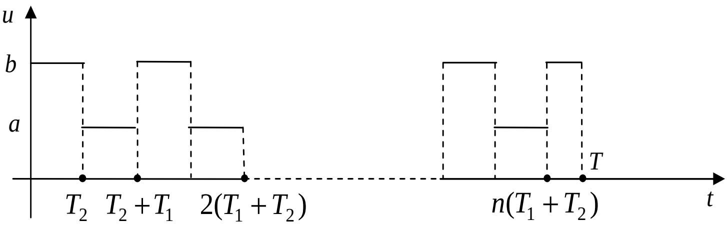


Рис. 1

Для функций множества A наименьшее $\underline{J}$ и наибольшее $\bar{J}$ значения константы Ляпунова также достигаются на кусочно-постоянных функциях $\tilde{u}(t)$, принимающих два значения a, b и удовлетворяющих равенству $\int\limits_0^T \tilde{u}\,(t)\,dt = \theta_0$. Функция $\tilde{u}(t)$ задается формулой

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} b, & (\tilde{T}_1 + \tilde{T}_2) \le t < \tilde{T}_2 + i \cdot (\tilde{T}_1 + \tilde{T}_2), \\ a, & \tilde{T}_2 + i \cdot (\tilde{T}_1 + \tilde{T}_2) \le t < (i+1) \cdot (\tilde{T}_1 + \tilde{T}_2),\ t = n \cdot (\tilde{T}_1 + \tilde{T}_2) \\ i = \overline{0,\ n-1}; & n \in N, \end{cases}$$

где

$$T = (\tilde{T}_1 + \tilde{T}_2)n, \quad \theta_0 = (a\tilde{T}_1 + b\tilde{T}_2)n.$$

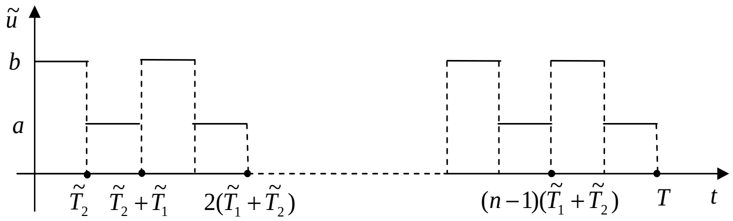


Рис. 2

В этом случае, т.е. при $u(0) = b$, функция $\theta_1(n)$ определяется формулой

$$\theta_1(n) = \frac{\theta_0 T}{2} + \frac{(bT - \theta_0)(\theta_0 - aT)}{2n(b-a)} - \frac{bT - \theta_0}{2} t_0 \frac{n+1}{n}, \tag{4}$$

а вспомогательная функция задается интегралом

$$\delta(n) = \int\limits_0^T dt \int\limits_0^t \tilde{u}(\tau) d\tau,$$

в котором $\tilde{u}(t)$ – кусочно-периодическая функция периода $\frac{T}{n}$, принимающая два значения a и b, имеющая n переключений и удовлетворяющая равенству $\int\limits_0^T \tilde{u}\,(t)\,dt = \theta_0$. График функции $\tilde{u}(t)$ представлен на рис. 2.

Имеет место теорема.

Теорема 1. *Если функция $\tilde{u}(t)$ – кусочно-периодическая функция периода $\frac{T}{n}$, принимающая два значения* a и b *имеющая* n *переключений и удовлетворяющая равенствам*

$$\tilde{u}(0) = b \text{ и } \int_0^T \tilde{u}\,(t)\,dt = \theta_0,$$

то функция

$$\delta(n) = \int_0^T dt \int_0^t \tilde{u}(\tau)d\tau$$

монотонно убывает на всей области определения, и для нее справедливо представление

$$\delta(n) = \frac{\theta_0 T}{2} + \frac{(\theta_0 - aT)(bT - \theta_0)}{2(b-a)n}. \tag{5}$$

Далее, для определения числа переключений n функции $u(t) \in U_f$ сравним вспомогательную функцию $\delta(n)$ и функцию $\theta_1(n)$, определенную выше формулой (4). Согласно теореме 1, функция $\delta(n)$ есть монотонно убывающая функция, т.е.

$$\delta(n+1) < \delta(n).$$

Из формул (4) и (4) следует, что функция $\theta_1(n)$ связана с функцией $\delta(n)$ соотношением

$$\theta_1(n) = \delta(n) - \frac{bT - \theta_0}{2}\frac{n+1}{n}t_0. \tag{6}$$

Поскольку вычитаемое в выражении (6) больше нуля, то имеем

$$\theta_1(n) < \delta(n).$$

Теперь выявим связь между функциями $\delta(n+1)$ и $\theta_1(n)$. Для этого рассмотрим разность $\theta_1(n) - \delta(n+1)$. Функция $\delta(n+1)$, согласно соотношению (4), определяется формулой

$$\delta(n+1) = \frac{\theta_0 T}{2} + \frac{(\theta_0 - aT)(bT - \theta_0)}{2(b-a)(n+1)}$$

и выражается через функцию $\delta(n)$ следующим образом

$$\delta(n+1) = \frac{\theta_0 T}{2} + \frac{(\theta_0 - aT)(bT - \theta_0)}{2(b-a)n} - \frac{(\theta_0 - aT)(bT - \theta_0)}{2(b-a)n(n+1)},$$

т.е.

$$\delta(n+1) = \delta(n) - \frac{(\theta_0 - aT)(bT - \theta_0)}{2(b-a)n(n+1)}.$$

Тогда

$$\theta_1(n) - \delta(n+1) = \frac{(\theta_0 - aT)(bT - \theta_0)}{2(b-a)n(n+1)} - \frac{bT - \theta_0}{2} t_0 \frac{n+1}{n},$$

т.е.

$$\theta_1(n) - \delta(n+1) = \frac{bT - \theta_0}{2n} \cdot \left(\frac{\theta_0 - aT}{(b-a)(n+1)} - t_0(n+1) \right). \tag{7}$$

Поскольку $bT - \theta_0 > 0$, то знак разности (7) зависит от знака множителя Δ, стоящего в скобках в правой части соотношения (7),

$$\Delta = \frac{\theta_0 - aT}{(b-a)(n+1)} - t_0(n+1).$$

Введя обозначения

$$\alpha = \frac{\theta_0 - aT}{b-a}, \quad \beta = \frac{2\theta_1 - \theta_0 T}{bT - \theta_0},$$

методом интервалов определяем знак разности Δ:

а) если $0 \le \beta \le \frac{\alpha}{n+1}$, то $\theta_1(n) - \delta(n+1) \le 0$,

б) если же $\frac{\alpha}{n+1} < \beta < \frac{\alpha}{n}$, то $\theta_1(n) - \delta(n+1) > 0$.

Учитывая, что функция $\delta(n)$ монотонно убывает, имеем

$$\theta_1(n) \le \delta(n+1) < \delta(n) \ \text{ при } \ 0 \le \beta \le \frac{\alpha}{n+1};$$

а при $\frac{\alpha}{n+1} < \beta < \frac{\alpha}{n}$ следует $\theta_1(n) - \delta(n+1) > 0$, т.е. выполнены соотношения

$$\delta(n+1) < \theta_1(n) < \delta(n),$$

Из условия $\beta \ge 0$ вытекает, что $\theta_1 \ge \frac{\theta_0 T}{2}$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Если параметры функции $f(t)$ удовлетворяют неравенству*

$$\theta_1 \ge \frac{\theta_0 T}{2},$$

то константа Ляпунова J, вычисленная на основе характеристик $a, b, T, \theta_0, \theta_1$, удовлетворяет следующим оценкам:

1) $J \le J_n$ *при* $0 \le \beta \le \frac{\alpha}{n+1}$,
2) $J_n < J < J_{n+1}$ *при* $\frac{\alpha}{n+1} < \beta < \frac{\alpha}{n}$, *где*

$$\alpha = \frac{\theta_0 - aT}{b-a}, \quad \beta = \frac{2\theta_1 - \theta_0 T}{bT - \theta_0},$$

а J_n – *значение константы Ляпунова, определенное при параметрах* a, b, T, θ_0, *по формуле*

$$J_n = \frac{1}{2}\left\{\left[a_n + \sqrt{a_n^2 - 1}\right]^n + \left[a_n - \sqrt{a_n^2 - 1}\right]^n\right\}, \quad n \in N,$$

в которой $a_n = \cos\sqrt{a}\tilde{T}_1 \cos\sqrt{b}\tilde{T}_2 - \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{b}{a}} + \sqrt{\frac{a}{b}}\right)\sin\sqrt{a}\tilde{T}_1 \sin\sqrt{b}\tilde{T}_2$, *здесь* $\tilde{T}_1 = \frac{bT-\theta_0}{(b-a)n}$, $\tilde{T}_2 = \frac{\theta_0 - aT}{(b-a)n}$.

В случае, когда функция $\tilde{u}(t) \in A$ задана формулой

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} a, & i\cdot\left(\tilde{T}_1 + \tilde{T}_2\right) \le t < \tilde{T}_1 + i\cdot\left(\tilde{T}_1 + \tilde{T}_2\right), \\ b, & \tilde{T}_1 + i\cdot\left(\tilde{T}_1 + \tilde{T}_2\right) \le t < (i+1)\cdot\left(\tilde{T}_1 + \tilde{T}_2\right), \ t = n\cdot(\tilde{T}_1 + \tilde{T}_2) \\ i = \overline{0, \quad n-1}; & n \in N, \end{cases}$$

в которой $\left(\tilde{T}_1 + \tilde{T}_2\right)\cdot n = T$, $\left(a\tilde{T}_1 + b\tilde{T}_2\right)\cdot n = \theta_0$, получены аналогичные теоремы.

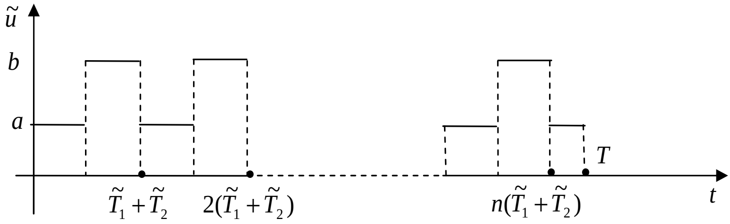


Рис. 3

Теорема 3. *Если функция* $\tilde{u}(t)$ – *кусочно-периодическая функция периода* $\frac{T}{n}$, *принимающая два значения* a и b, *имеющая* n *переключений и удовлетворяющая равенствам*

$$\tilde{u}(0) = a \ \text{ и } \int_0^T \tilde{u}(t)\,dt = \theta_0,$$

то функция

$$\delta^*(n) = \int\limits_0^T dt \int\limits_0^t \tilde{u}(\tau) d\tau$$

монотонно возрастает на всей области определения, и для нее справедливо представление

$$\delta^*(n) = \frac{\theta_0 T}{2} - \frac{(bT - \theta_0)(\theta_0 - aT)}{2(b-a)n}.$$

Теорема 4. *Если параметры функции $f(t)$ удовлетворяют неравенству*

$$\theta_1 < \frac{\theta_0 T}{2},$$

то константа Ляпунова J, вычисленная на основе характеристик a, b, T, θ_0, θ_1, удовлетворяет следующим оценкам:

1) $J > J_n$ при $-\frac{\alpha^*}{n+1} < \beta^* \le 0$;

2) $J_n < J < J_{n+1}$ при $-\frac{\alpha^*}{n} < \beta^* \le -\frac{\alpha^*}{n+1}$, *где*

$$\alpha^* = \frac{bT - \theta_0}{b-a}, \quad \beta^* = \frac{2\theta_1 - \theta_0 T}{\theta_0 - aT},$$

а J_n – *значение константы Ляпунова, определенное при параметрах* a, b, T, θ_0 *по формуле*

$$J_n = \frac{1}{2}\left\{\left[a_n + \sqrt{a_n^2 - 1}\right]^n + \left[a_n - \sqrt{a_n^2 - 1}\right]^n\right\}, \quad n \in N,$$

в которой

$$a_n = \cos\sqrt{a}\tilde{T}_1 \cos\sqrt{b}\tilde{T}_2 - \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{b}{a}} + \sqrt{\frac{a}{b}}\right)\sin\sqrt{a}\tilde{T}_1 \sin\sqrt{b}\tilde{T}_2,$$

здесь $T_1 = \frac{\theta_0 - aT}{(b-a)n}$, $\tilde{T}_2 = \frac{bT - \theta_0}{(b-a)n}$.

Библиографический список

1. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. М: Изд-во МГУ, 1998.
2. *Сабуров М.С.* Оптимальные критерии ограниченности решений линейных дифференциальных уравнений второго порядка // Научные труды МПГУ им. В.И. Ленина. М.: Прометей, 1994.
3. *Тарамова Х.С.* Исследование устойчивости решений уравнения Хилла: Всероссийская науч.-практич. конф. Грозный, 2003.

Операторы Лапласа на пара-эрмитовых пространствах с псевдо-ортогональной группой движений[1]

С.В. Цыкина

Мы рассматриваем пара-эрмитовы симметрические пространства G/H, для которых группа G есть псевдо-ортогональная группа $\mathrm{SO}_0(p,q)$. Все такие пространства (с данной G) получаются факторизацией из "самого большого" пространства G/H с $H = \mathrm{SO}_0(p-1,q-1)\times\mathrm{SO}_0(1,1)$. Отображение накрытия не более чем четырехкратно. Размерность всех этих пространств G/H равна $2n-4$, где $n=p+q$, сигнатура есть $(n-2,n-2)$, а ранг равен 2.

Наша цель в данной статье состоит в описании алгебры $\mathbb{D}(G/H)$ дифференциальных операторов на G/H, инвариантных относительно G, в указании образующих в этой алгебре – так называемых операторов Лапласа – и в явном вычислении радиальных частей этих операторов Лапласа. Эти результаты не зависят от указанной выше факторизации, поэтому мы возьмем наиболее удобное для наших целей пространство G/H, а именно такое, которое является G-орбитой в присоединенном представлении группы G.

1. Псевдо-ортогональная группа и ее алгебра Ли

Введем в пространстве $\mathbb{R}^n$ следующую билинейную форму:

$$[x,y]=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i y_i,$$

где $\lambda_1=\ldots=\lambda_p=-1$, $\lambda_{p+1}=\ldots=\lambda_n=1$, и $x=(x_1,\ldots,x_n)$, $y=(y_1,\ldots,y_n)$ – векторы из $\mathbb{R}^n$. Пусть G есть группа $\mathrm{SO}_0(p,q)$ – связная компонента единицы в группе линейных преобразований с определителем 1 пространства $\mathbb{R}^n$, сохраняющих билинейную форму $[x,y]$.

Мы будем считать, что G действует в $\mathbb{R}^n$ справа: $x\mapsto xg$, так что векторы x из $\mathbb{R}^n$ будем записывать в виде строки. Мы рассмотрим общий случай $p>1, q>1$.

[1]Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований: гранты № 05-01-00074а и № 05-01-00001а, Голландской организацией научных исследований (NWO): грант 047-017-015, научными программами "Развитие научного потенциала высшей школы": проект РНП.2.1.1.351 и Темплан № 1.2.02.

Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ группы G состоит из вещественных матриц X порядка n, удовлетворяющих условию $X'I + IX = 0$, где $I = \mathrm{diag}\,\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, штрих означает матричное транспонирование. Возьмем в $\mathfrak{g}$ матрицу

$$Z_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Мы сейчас записываем матрицы n-го порядка в блочном виде, отвечающем разбиению $n = 1 + (n-2) + 1$. Стационарная подгруппа H матрицы Z_0 в присоединенном представлении состоит из матриц

$$h = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \beta \\ 0 & v & 0 \\ \beta & 0 & \alpha \end{pmatrix}, \tag{1.1}$$

где $\alpha^2 - \beta^2 = 1$, $v \in \mathrm{SO}(p-1, q-1)$. Группа H состоит из двух связных кусков. Связная компонента единицы H_e, содержащая единичную матрицу, состоит из матриц (1.2), где $\alpha = \mathrm{ch}t$, $\beta = \mathrm{sh}t$. Следовательно, $H_e = \mathrm{SO}_0(1,1) \times \mathrm{SO}_0(p-1, q-1)$.

Наше многообразие G/H есть G-орбита в алгебре $\mathfrak{g}$, содержащая Z_0.

Оператор $\mathrm{ad}\, Z_0$ имеет три собственных значения: $-1, 0, +1$. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ распадается в прямую сумму соответствующих собственных подпространств

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{q}^- + \mathfrak{h} + \mathfrak{q}^+,$$

где $\mathfrak{h}$ есть алгебра Ли группы H. Подпространства $\mathfrak{q}^-$ и $\mathfrak{q}^+$ состоят соответственно из матриц

$$X_\xi = \begin{pmatrix} 0 & \xi & 0 \\ \xi^* & 0 & \xi^* \\ 0 & -\xi & 0 \end{pmatrix}, \qquad Y_\eta = \begin{pmatrix} 0 & \eta & 0 \\ \eta^* & 0 & -\eta^* \\ 0 & \eta & 0 \end{pmatrix},$$

здесь ξ, η – векторы-строки из $\mathbb{R}^{n-2}$, φ^* обозначает $I_1\varphi'$, где $I_1 = \mathrm{diag}\,\{\lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}\}$, Размерность обоих пространств $\mathfrak{q}^\pm$ равна $n-2$. Подгруппа H сохраняет оба подпространства $\mathfrak{q}^-$ и $\mathfrak{q}^+$ при присоединенном действии:

$$Z \longmapsto h^{-1}Zh, \quad Z \in \mathfrak{q},\ h \in H. \tag{1.2}$$

Пусть $h \in H$ имеет вид (1.1). При действии (1.2) координаты $\xi \in \mathfrak{q}^-$ и $\eta \in \mathfrak{q}^+$ преобразуются следующим образом

$$\xi \mapsto \widetilde{\xi} = (\alpha + \beta)\xi v, \qquad \eta \mapsto \widehat{\eta} = (\alpha - \beta)\eta v. \tag{1.3}$$

Рассмотрим в G подгруппы $Q^- = \exp \mathfrak{q}^-$, $Q^+ = \exp \mathfrak{q}^+$.

2. Конус

Пусть $\mathcal{C}$ – конус $[x,x]=0,\ x \neq 0$ в $\mathbb{R}^n$. Группа G действует на нем транзитивно. Возьмем в конусе следующие две точки: $s^- = (1,0,\ldots,0,-1)$, $s^+ = (1,0,\ldots,0,1)$. Рассмотрим следующие сечения конуса:

$$\Gamma^- = \{x_1 - x_n = 2\}, \quad \Gamma^+ = \{x_1 + x_n = 2\}.$$

Сечения $\Gamma^\pm$ пересекаются один раз почти с каждой образующей конуса $\mathcal{C}$. Поэтому линейное действие группы G на конусе порождает соответствующие дробно-линейные действия на Γ^- и Γ^+. Стационарными подгруппами в группе G точек $s^- \in \Gamma^-$ и $s^+ \in \Gamma^+$ служат максимальные параболические подгруппы $P^+ = Q^+H$ и $P^- = Q^-H$, соответственно. Группы Q^- и Q^+ действуют просто транзитивно на Γ^- и Γ^+, соответственно. Это позволяет ввести координаты на Γ^- и Γ^+ с помощью координат $\xi = (\xi_2,\ldots,\xi_{n-1})$ из $\mathfrak{q}^-$ и $\eta = (\eta_2,\ldots,\eta_{n-1})$ из $\mathfrak{q}^+$, а именно, для точек $u \in \Gamma^-$ и $v \in \Gamma^+$ положим:

$$u = u(\xi) = s^- e^{X_\xi} = (1 + \langle\xi,\xi\rangle,\ 2\xi,\ -1 + \langle\xi,\xi\rangle), \tag{2.1}$$

$$v = v(\eta) = s^+ e^{Y_\eta} = (1 + \langle\eta,\eta\rangle,\ 2\eta,\ 1 - \langle\eta,\eta\rangle), \tag{2.2}$$

где $\langle\varphi,\psi\rangle$ обозначает билинейную форму в $\mathbb{R}^{n-2}$ с матрицей I_1:

$$\langle\varphi,\psi\rangle = \sum_{i=2}^{n-1} \lambda_i \varphi_i \psi_i.$$

Отметим, что

$$[u,v] = -2N(\xi,\eta), \tag{2.3}$$

где

$$N(\xi,\eta) = 1 - 2\langle\xi,\eta\rangle + \langle\xi,\xi\rangle\langle\eta,\eta\rangle.$$

3. Пространство G/H

Реализуем пространство G/H следующим образом. Представим прямое произведение $\mathcal{C}\times\mathcal{C}$ конуса на себя как множество двустрочечных матриц

$$z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n \\ y_1 & \ldots & y_n \end{pmatrix}, \tag{3.1}$$

где $x, y \in \mathcal{C}$. Обозначим через $\mathcal{Z}$ множество матриц z, для которых $[x, y] = -2$. Это множество содержит матрицу z^0, отвечающую паре (s^-, s^+):

$$z^0 = \begin{pmatrix} s^- \\ s^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & -1 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

Группа G действует на множестве $\mathcal{Z}$ умножениями справа: $z \mapsto zg$. Назовем две матрицы эквивалентными, если одна получается из другой умножением слева на диагональную матрицу второго порядка с определителем единица:

$$z \sim \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1/a \end{pmatrix} z, \qquad a \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \backslash \{0\}. \tag{3.3}$$

Множество $\widetilde{\mathcal{Z}} = \mathcal{Z}/\mathbb{R}^*$ классов эквивалентности есть как раз наше многообразие G/H. Стационарной подгруппой точки z^0 служит H.

Поскольку сечения $\Gamma^{\pm}$ пересекаются по одному разу почти с каждой образующей конуса $\mathcal{C}$, прямое произведение $\Gamma^- \times \Gamma^+$ вкладывается в G/H. А именно, паре $(\xi, \eta) \in \Gamma^- \times \Gamma^+$ отвечает матрица

$$z = \begin{pmatrix} u(\xi) \\ v(\eta)/N(\xi, \eta) \end{pmatrix}. \tag{3.4}$$

Следовательно, ξ, η являются локальными координатами в G/H.

Касательное пространство к G/H в начальной точке z^0 можно отождествить с пространством $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}^- + \mathfrak{q}^+$ в алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Пусть $S(\mathfrak{q})$ – пространство многочленов на $\mathfrak{q}$. Действие (1.3) группы H вызывает действие ее в $S(\mathfrak{q})$. Пусть $S(\mathfrak{q})^H$ обозначает алгебру многочленов из $S(\mathfrak{q})$, инвариантных относительно H.

Теорема 3.1. *Алгебра $S(\mathfrak{q})^H$ порождается двумя многочленами*

$$\langle \xi, \eta \rangle, \quad \langle \xi, \xi \rangle \langle \eta, \eta \rangle.$$

Доказательство. Как следует из [1], алгебра многочленов от ξ и η, инвариантных относительно подгруппы $\mathrm{SO}(p-1, q-1)$ группы H, имеет своими образующими три многочлена: $\langle \xi, \xi \rangle$, $\langle \eta, \eta \rangle$, $\langle \eta, \xi \rangle$. При действии (1.3) эти многочлены умножаются соответственно на $(\alpha + \beta)^2$, $(\alpha - \beta)^2$, 1, соответственно. Так как $\alpha + \beta = (\alpha - \beta)^{-1}$, то для всей группы H алгебра инвариантов имеет в качестве образующих указанные в теореме многочлены. $\square$

4. Корневое разложение для пространства G/H

В этом параграфе мы будем записывать матрицы из G и $\mathfrak{g}$ в виде блочных матриц соответственно разбиению числа n на 5 слагаемых: $n = 1+1+(n-4)+1+1$.

Всякая максимальная абелева подалгебра в $\mathfrak{q}$, состоящая из полупростых элементов, имеет размерность 2. Это означает, что ранг пространства G/H равен 2. В качестве такой подалгебры возьмем подалгебру $\mathfrak{a}$, состоящую из матриц

$$A_t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & t_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ t_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $t = (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$. Сопряженное к $\mathfrak{a}$ пространство $\mathfrak{a}^*$ состоит из линейных функций от $t = (t_1, t_2)$. Такие функции мы будем отождествлять с векторами $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ из $\mathbb{R}^2$ и записывать в виде скалярного произведения:

$$(\lambda, t) = \lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2.$$

Алгебра $\mathfrak{a}$ расщепима: вся алгебра Ли $\mathfrak{g}$ распадается в прямую сумму корневых подпространств для пары $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 + \sum_{\alpha \neq 0} \mathfrak{g}_\alpha,$$

подпространство $\mathfrak{g}_\alpha$ состоит из таких $X \in \mathfrak{g}$, что $[A_t, X] = (\alpha, t)X$. Множество ненулевых корней состоит из следующих 8 векторов из $\mathfrak{a}^*$:

$$(\pm 1, \pm 1), \quad (\pm 1, 0), \quad (0, \pm 1),$$

знаки $\pm$ берутся во всех комбинациях. Это – система корней типа B_2. Кратности корней равны соответственно $1,\ n-4,\ n-4$.

В качестве упорядочения в $\mathfrak{a}^*$ возьмем лексикографическое упорядочение по координатам. Множество положительных корней состоит из векторов: $(1, \pm 1)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$.

Пусть $\mathfrak{n}$ обозначает подалгебру в $\mathfrak{g}$, образованную положительными корневыми подпространствами, а $\mathfrak{z}$ – отрицательными. Размерность каждой из них равна $2n-6$. Алгебра $\mathfrak{g}$ распадается в прямую сумму:

$\mathfrak{g} = \mathfrak{n} + \mathfrak{g}_0 + \mathfrak{z}$. Подалгебра $\mathfrak{n}$ состоит из матриц

$$X = \begin{pmatrix} 0 & x+y & \alpha & 0 & -x+y \\ -x-y & 0 & \beta & x+y & 0 \\ \alpha^* & \beta^* & 0 & -\alpha^* & -\beta^* \\ 0 & x+y & \alpha & 0 & -x+y \\ -x+y & 0 & \beta & x-y & 0 \end{pmatrix},$$

где $x, y \in \mathbb{R}$, α, β – векторы-строки из $\mathbb{R}^{n-4}$, $\alpha^* = I_2\alpha'$, $\beta^* = I_2\beta'$, $I_2 = \operatorname{diag}\{\lambda_3, \ldots, \lambda_{n-2}\}$.

Обозначим $A = \exp \mathfrak{a}$, $N = \exp \mathfrak{n}$.

5. Операторы Лапласа на G/H

Дифференциальный оператор D на G/H называется инвариантным относительно G, если он перестановочен со сдвигами на элементы $g \in G$. Множество всех дифференциальных операторов на G/H, инвариантных относительно G, образует алгебру, обозначим ее через $\mathbb{D}(G/H)$. Как следует из [3], эта алгебра находится во взаимно однозначном соответствии с алгеброй $S(\mathfrak{q})^H$.

Это соответствие устанавливается следующим образом. Оператор D из $\mathbb{D}(G/H)$ вполне определяется тем, как он действует в начальной точке z^0. Пусть $P(\xi, \eta)$ – многочлен из $S(\mathfrak{q})^H$. Обозначим через $P(\partial/\partial\xi, \partial/\partial\eta)$ дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, который получается из P заменой ξ_i и η_j соответственно на $\partial/\partial\xi_i$ и $\partial/\partial\eta_j$. Многочлену P отвечает оператор D из $\mathbb{D}(G/H)$ такой, что

$$(Df)(z^0) = P\left(\frac{\partial}{\partial\xi}, \frac{\partial}{\partial\eta}\right) f(\xi, \eta)\Big|_{\xi=\eta=0}.$$

В другие точки оператор D можно разнести с помощью условия перестановочности.

Обозначим через Δ_2 и Δ_4 образующие в $\mathbb{D}(G/H)$, соответствующие образующим $\langle\xi, \eta\rangle$ и $\langle\xi, \xi\rangle\langle\eta, \eta\rangle$ в алгебре $S(\mathfrak{q})^H$, см. теорему 3.1. Эти операторы являются дифференциальными операторами второго и четвертого порядка соответственно. В точке z^0 имеем

$$\Delta_2 = \sum_{i=2}^{n-1} \lambda_i \frac{\partial^2}{\partial\xi_i \partial\eta_j}, \quad \Delta_4 = \sum_{i,j=2}^{n-1} \lambda_i\lambda_j \frac{\partial^4}{\partial\xi_i^2 \partial\eta_j^2}.$$

Оператор Лапласа-Бельтрами на G/H совпадает с Δ_2.

Явные выражения операторов Δ_2 и Δ_4 в произвольной точке весьма громоздки (особенно Δ_4). Для работы с этими операторами вычислим их радиальные части относительно подгруппы N.

Возьмем в $G/H = \widetilde{\mathcal{Z}}$ множество точек z, которые получаются из z^0 сдвигом сначала на элемент $a = a(t_1, t_2)$ из A и затем на элемент n из N, то есть $z = z^0 an$. Эти точки заполняют некоторую окрестность U точки z^0. Тем самым в этой окрестности мы вводим координаты t_1, t_2 и x, y, α, β из подгрупп A и N, соответственно. Пусть функция f, заданная в этой окрестности U, не зависит от $n \in N$. Тогда она есть функция от $t = (t_1, t_2)$: $f(z) = F(t)$. Применим к f оператор D из $\mathbb{D}(G/H)$. Полученная функция Df тоже не зависит от $n \in N$, так что

$$Df = \overset{0}{D} F,$$

где $\overset{0}{D}$ – некоторый дифференциальный оператор от $t = (t_1, t_2)$. Он называется *радиальной частью* оператора D относительно подгруппы N. Следующая теорема аналогична теореме Карпелевича [2] для римановых симметрических пространств.

Теорема 5.1. *Радиальные части операторов из $\mathbb{D}(G/H)$ относительно подгруппы N являются дифференциальными операторами с постоянными коэффициентами.*

Пусть у нас есть две двустрочечные матрицы w и z, отвечающие парам (u, v) и (x, y) из $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$. Составим матрицу второго порядка из псевдоскалярных произведений:

$$B(w, z) = \begin{pmatrix} [u, x] & [u, y] \\ [v, x] & [v, y] \end{pmatrix}.$$

Лемма 5.2. *Матрица $B(w, z)$ не изменяется при диагональном действии группы G, т.е. $B(wg, zg) = B(w, z)$. Если c – матрица второго порядка, то $B(cw, z) = cB(w, z)$, $B(w, cz) = B(w, z)c'$.*

Введем матрицу:

$$z^- = \begin{pmatrix} \sigma \\ \tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для элементов $a = a(t)$ из A и n из N имеем

$$z^- a = \begin{pmatrix} e^{-t_1} & 0 \\ 0 & e^{-t_2} \end{pmatrix} z^-, \quad z^- n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2y & 1 \end{pmatrix} z^-. \tag{5.1}$$

Лемма 5.3. *Параметры t_1, t_2 выражаются через координаты ξ, η с помощью следующих формул:*

$$\begin{array}{rcl} e^{2t_1} & = & \frac{1}{N} \cdot [\sigma, u] \cdot [\sigma, v], \\ e^{t_1+t_2} & = & \frac{1}{2N} \cdot \begin{vmatrix} [\sigma, u] & [\sigma, v] \\ [\tau, u] & [\tau, v] \end{vmatrix} , \end{array}$$

где $N = N(\xi, \eta)$, $u = u(\xi)$, $v = v(\eta)$.

Доказательство. Рассмотрим матрицу $B(z^-, z^0 an)$. По лемме 5.2 и формулам (5.1) имеем

$$B(z^-, z^0 an) = \begin{pmatrix} e^{t_1} & e^{t_1} \\ 2ye^{t_1} - e^{t_2} & 2ye^{t_1} + e^{t_2} \end{pmatrix}. \tag{5.2}$$

С другой стороны, для матрицы z, заданной формулой (3.1), имеем

$$B(z^-, z) = \begin{pmatrix} x_1 + x_{n-1} & y_1 + y_{n-1} \\ x_2 + x_n & y_2 + y_n \end{pmatrix}. \tag{5.3}$$

Если здесь заменить матрицу z эквивалентной матрицей, см. (3.3), то по лемме 5.2 матрица $B(z^-, z)$ умножится *справа* на матрицу $\mathrm{diag}\{a, a^{-1}\}$. Поэтому на множестве классов эквивалентности матриц z корректно определены произведения элементов первого столбца матрицы $B(z^-, z)$ на элементы ее второго столбца и, следовательно, корректно определен ее определитель. Сравнивая (5.2) с (5.3), получаем

$$e^{2t_1} = (x_1 + x_{n-1})(y_1 + y_{n-1}), \tag{5.4}$$

$$2e^{t_1+t_2} = \begin{vmatrix} x_1 + x_{n-1} & y_1 + y_{n-1} \\ x_2 + x_n & y_2 + y_n \end{vmatrix}. \tag{5.5}$$

Возьмем в качестве z матрицу (3.4). Подставляя в (5.4) и (5.5) выражения строк этой матрицы, мы получим формулы леммы. □

Теорема 5.4. *Операторы Δ_2 и Δ_4 имеют следующие радиальные части*

$$\begin{array}{rcl} \overset{0}{\Delta}_2 & = & \frac{1}{2}\left\{L_1 + L_2 - (n-4)(n-6)\right\}, \\ \overset{0}{\Delta}_4 & = & L_1 L_2 + 2(n-4)^3. \end{array}$$

где

$$\begin{array}{rcl} L_1 & = & \left[\frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\partial}{\partial t_2} + n - 3\right]^2 - (2n-7), \\ L_2 & = & \left[\frac{\partial}{\partial t_1} - \frac{\partial}{\partial t_2} + 1\right]^2 - (2n-7). \end{array}$$

В самом деле,поскольку радиальная часть оператора из $\mathbb{D}(G/H)$ имеет постоянные коэффициенты, достаточно ее вычислить в начальной точке $\xi = 0, \eta = 0$, при этом мы используем лемму 5.3.

Эти радиальные части можно записать еще следующим образом. Полусумме положительных корней из $\mathfrak{a}^*$ отвечает следующая линейная функция:

$$\rho(t) = \frac{1}{2}\{(n-2)t_1 + (n-4)t_2\}.$$

Обозначим

$$\Delta_t = \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial t_2^2}, \qquad \Box_t = \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial t_2^2}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \overset{0}{\Delta}_2 &= e^{-\rho(t)} \circ \Delta_t \circ e^{\rho(t)} - \frac{1}{2}(n^2 - 6n + 10), \\ \overset{0}{\Delta}_4 &= e^{-\rho(t)} \circ \{\Box_t^2 - 2(2n-7)\Delta_t\} \circ e^{\rho(t)} - (n-3)^2. \end{aligned}$$

Библиографический список

1. *Вейль Г.* Классические группы, их инварианты и представления. М.: ИЛ, 1947.
2. *Карпелевич Ф.И.* Геометрия геодезических и собственные функции оператора Бельтрами-Лапласа на симметрических пространствах // Труды Моск. матем. об-ва, 1965. Т. 14. С. 48-185.
3. *Хелгасон С.* Группы и геометрический анализ. М.: Мир, 1987.

Новые компоненты схемы модулей $M_{\mathbb{P}^3}(2;-1,2,0)$ полустабильных когерентных пучков ранга 2 без кручения на проективном пространстве $\mathbb{P}^3$

М.А. Заводчиков

В настоящей статье рассматривается схема моделей Гизекера-Маруямы $M := M_{\mathbb{P}^3}(2;-1,2,0)$ полустабильных когерентных пучков без кручения ранга 2 с классами Черна $c_1 = -1, c_2 = 2, c_3 = 0$ на трехмерном проективном пространстве $\mathbb{P}^3$. В статье [3] было показано, что пространство модулей $M(-1,2)$ стабильных расслоений ранга 2 с классами Черна $c_1 = -1$, $c_2 = 2$ на $\mathbb{P}^3$ является неприводимым неособым рациональным многообразием размерности 11. В статье [5] описано замыкание $\overline{M(-1,2)}$ многообразия $M(-1,2)$ в схеме M. Кроме того, в [5] были найдены два семейства M_1 и M_2 не локально свободных полустабильных пучков без кручения ранга 2 с классами Черна $c_1 = -1, c_2 = 2, c_3 = 0$, имеющих размерности 14 и 19. Вопрос о том, составляют ли эти семейства компоненты в M, до настоящего времени оставался открытым. Основным результатом статьи является следующая теорема.

Теорема. *Пусть* $\mathcal{M} := \overline{M \setminus M(-1,2)}$. *Существуют по крайней мере две неприводимые компоненты* $\mathcal{M}_1$ *размерности 15 и* $\mathcal{M}_2$ *размерности 19 в* M, *отличные от* $\overline{M(-1,2)}$. *При этом* $\mathcal{M}_1 = \overline{M_1}$ *и* $\mathcal{M}_2 = \overline{M_2}$, *где* $\overline{M_i}$ *– замыкание в* M *многообразий* M_i, $i = 1, 2$.
Обозначим через $[E]$ класс изоморфизма пучка E. Для доказательства этой теоремы нам потребуются некоторые дополнительные построения. Из [4] и [6. Гл. II, Лемма 1.2.4(iii)] непосредственно вытекает следующее

Замечание. *Пусть* E *– стабильный пучок ранга 2 без кручения с классами Черна* $c_1 = -1$, $c_2 = 2$, $c_3 = 0$ *на* P^3. *Тогда*
1) $E^{\vee\vee}$ *– стабилен;*
2) $\mathrm{Ext}^1(E, E) = T_{[E]}M$.

Для любого пучка без кручения $[E] \in \mathcal{M}$ имеем $c_3(E) = 0$, поэтому ввиду локальной несвободы $E^{\vee\vee} \ncong E$ и точна последовательность:

$$0 \to E \to E^{\vee\vee} \xrightarrow{\beta} \kappa \to 0, \tag{1}$$

где $\dim(supp \quad \kappa) \leq 1$. Вычислим многочлен Черна пучка $E^{\vee\vee}$ из точной последовательности (1). Имеем: $c_t(E^{\vee\vee}) = c_t(E)c_t(\kappa) = (1 - t + 2t^2)(1 + c_1(\kappa)t + c_2(\kappa)t^2 + c_3(\kappa)t^3)$. Отсюда получаем: $c_1(E^{\vee\vee}) = -1, \quad c_2(E^{\vee\vee}) = c_2(\kappa) + 2, \quad c_3(E^{\vee\vee}) = c_3(\kappa) - c_2(\kappa)$. Из двух возможных случаев $\dim \kappa = 0$ и $\dim \kappa = 1$ в настоящей статье мы рассматриваем первый случай $dim(\kappa) = 0$. Как показано ниже, этот случай дает искомые две компоненты $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ в схеме M. Второй случай $\dim \kappa = 1$ будет рассмотрен в нашей следующей работе.

Имеем $c_1(\kappa) = 0$ и $c_2(\kappa) = 0$. Тогда $c_1(E^{\vee\vee}) = -1, \quad c_2(E^{\vee\vee}) = 2, \quad c_3(E^{\vee\vee}) = c_3(\kappa)$. В этом случае, так как $E^{\vee\vee}$ является стабильным рефлексивным пучком, согласно статье [2. Remark 4.2.0], для $c_3(E^{\vee\vee})$ возможны значения $c_3 = 2, 4$.

Так как $c_3(\kappa) = 2l(\kappa)$, где $l(\kappa)$ – длина пучка κ, то либо (i) $l(\kappa)$=1, либо (ii) $l(\kappa)$=2. Рассмотрим более подробно эти два случая.

(i) $c_3(\kappa) = 2$.

В этом случае $l(\kappa) = 1$, а значит, $\kappa = k_x$ для некоторой точки $x \in \mathbb{P}^3$. Следовательно, имеем точную последовательность:

$$0 \to E \to E^{\vee\vee} \xrightarrow{\epsilon} k_x \to 0. \tag{2}$$

Обозначим через M_1^r подмножество рефлексивных пучков в схеме $M_{\mathbb{P}^3}(2;-1,2,2)$. Так как $c_1(F) = -1$ для $[F] \in M_{\mathbb{P}^3}(2;-1,2,2)$, то согласно статье [4. Theorem 6.11] универсальное семейство $\mathbb{F}$ стабильных рефлексивных пучков на $M_1^r \times \mathbb{P}^3$ существует, если $\delta(H) = 1$, где $\delta(H) =$ НОД$(a_0, a_1, ..., a_n)$ и $H = H_F(m) = \Sigma_{i=0}^n a_i C_{m+i}^m$ – многочлен Гильберта пучка $\mathbb{F}$ на $\mathbb{P}^3$ ранга 2 с классами Черна $c_1(F) = -1, c_2(F) = 2, c_3(F) = c_3$. Проверим, что $\delta(H) =$ НОД$(a_0, a_1, ..., a_n) = 1$. Имеем $H(m) = \Sigma_{i=0}^n a_i C_{m+i}^m = (a_0+a_1+a_2+a_3) + \left(a_1 + \frac{3a_2}{2} + \frac{11a_3}{6}\right) m + \left(\frac{a_2}{2} + a_3\right) m^2 + \frac{a_3 m^3}{6}$. С другой стороны, воспользуемся известной формулой для $H_F(m)$ [2. Theorem 2.3]: $H(m) = \chi(F(m)) = 2 + C_{2m+2}^3 - 2(2-m+m^2) + \frac{1}{2}(c_3 + (1-2m)(2-m+m^2))$. Отсюда $a_0 = \frac{1}{2}c_3 - 1, \quad a_1 = -2, \quad a_2 = -1, \quad a_3 = 2$. Тем самым, НОД$(a_0, a_1, ..., a_n) = 1$, то есть в нашем случае универсальное семейство $\mathbb{F}$ стабильных рефлексивных пучков на $M_1^r \times \mathbb{P}^3$ существует.

Обозначим $Y := M_1^r \times \mathbb{P}^3$. Согласно статье [1. Theorem 2.5] $\dim M_1^r = 11$, следовательно, $\dim Y = 14$. Рассмотрим проективизацию $\mathbb{P}(\mathbb{F}) \xrightarrow{\pi} Y$. Проекция $\mathbb{P}(\mathbb{F}) \times \mathbb{P}^3 \xrightarrow{\pi \times id} Y \times \mathbb{P}^3 = M_r \times \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3 \xrightarrow{pr_{23}} \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3$ и вложение $P_\Delta \to \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3$ определяют подмногообразие $\mathbb{P}(\mathbb{F})_\Delta = \mathbb{P}(\mathbb{F}) \times \mathbb{P}^3_\Delta$ в $\mathbb{P}(\mathbb{F}) \times \mathbb{P}^3$. На $\mathbb{P}(\mathbb{F})$ существует естественный эпиморфизм $\pi^*\mathbb{F} \xrightarrow{ev} \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathbb{F})}(1) \to 0$. Пусть $\mathbb{E}$ – ядро композиции $\pi^*\mathbb{F} \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \xrightarrow{ev} \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathbb{F})}(1) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathbb{F})_\Delta} \to 0$. Таким образом, имеется отображение $f : \mathbb{P}(\mathbb{F}) \to M$: $y = ([F], x, < \epsilon : F \twoheadrightarrow k_x >) \mapsto [\ker(F \xrightarrow{\epsilon} k_x)]$. Здесь и ниже через $< \epsilon >$ обозначается класс пропорциональности эпиморфизма ϵ.

Утверждение 1. $\mathbb{P}(\mathbb{F})$ – *неприводимое многообразие размерности* 15.

Доказательство. Согласно статье [7. Лемма 4.5], для когерентного пучка F на $\mathbb{P}^3$ $\mathbb{P}(\mathbb{F})$ неприводимо тогда, когда $pd(F) \leq 1$. Так как в нашем случае F – рефлексивный пучок на $\mathbb{P}^3$, то $pd(F) \leq 1$ [6. Лемма 1.1.10].

Утверждение 2. *Отображение f теоретико-множественно является вложением.*

Доказательство. Пусть $E_1, E_2 \in M$, и $F_1/E_1 \simeq k_{x_1}$ и $F_2/E_2 \simeq k_{x_2}$, где $F_1 = E_1^{\vee\vee}$, $F_2 = E_2^{\vee\vee}$.

Пусть $y_1 = (F_1, x_1, F_1 \overset{\epsilon_1}{\twoheadrightarrow} k_{x_1})$ и $y_2 = (F_2, x_2, F_2 \overset{\epsilon_2}{\twoheadrightarrow} k_{x_2})$, и пусть $y_1 \neq y_2$. Рассмотрим возможные случаи.
1) Если $[F_1] \neq [F_2]$, то очевидно, что и $[E_1] \neq [E_2]$.
2) Если $[F_1] = [F_2]$, но $x_1 \neq x_2$, то также очевидно, что $[E_1] \neq [E_2]$.

3) $[F_1] = [F_2]$, $x_1 = x_2$, но $< \epsilon_1 > \neq < \epsilon_2 >$. Предположим, что $f(y_1) = f(y_2)$, то есть $E_1 \simeq E_2$. Так как $F_i = E_i^{\vee\vee}$, $i = 1, 2$, то из коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] & E_1 \arrow[r, "can"] \arrow[d, "\simeq"] & E_1^{\vee\vee} \arrow[r, "\epsilon_1"] \arrow[d, "\simeq"] & k_x \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & E_2 \arrow[r, "can"] & E_2^{\vee\vee} \arrow[r, "\epsilon_2"] & k_x \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

следует, что $< \epsilon_1 > = < \epsilon_2 >$, вопреки условию. Следовательно, отображение f теоретико-множественно является вложением.

По построению семейства $\mathbb{E}$ размерность базы этого семейства равна 15, и, тем самым, в силу утверждения 2, получаем

$$\dim f(\mathbb{P}(\mathbb{F})) = 15. \tag{3}$$

Тем самым, размерность неприводимой компоненты $\mathcal{M}_1$ схемы M, содержащей $f(\mathbb{P}(\mathbb{F}))$, не меньше, чем 15. Тем самым,

$$\dim T_{[E]}M \geq \dim T_{[E]}\mathcal{M}_1 \geq \dim f(\mathbb{P}(\mathbb{F})) \geq 15. \tag{4}$$

Мы докажем, что

$$\dim T_{[E]}M \leq 15. \tag{5}$$

Согласно замечанию после основной теоремы имеем

$$\dim T_{[E]}M = \dim \operatorname{Ext}^1(E, E). \tag{6}$$

Покажем, что

$$\operatorname{Ext}^1(E, E) \leq 15. \tag{7}$$

Так как $E^{\vee\vee} \in M_1^r$, то согласно [2. Example 4.2.3] пучок $E^{\vee\vee}$ можно включить в точную тройку:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-1) \xrightarrow{\alpha} E^{\vee\vee} \longrightarrow \mathcal{I}_{l_1 \cup l_2} \longrightarrow 0\ , \tag{8}$$

где l_1, l_2 – скрещивающиеся прямые в $\mathbb{P}^3$ и $x \in \mathbb{P}^3$.

Можно показать счетом параметров, что для общего $[E] \in \mathbb{P}(\mathbb{F})$ точка x не принадлежит $l_1 \cup l_2$ и $\epsilon \circ \alpha \neq 0$, где α и ϵ определены в (8) и (2). Тогда для этого $[E]$ тройки (2) и (8) включаются в диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & 0 & & \\
 & \mathcal{I}_{l_1\cup l_2} \arrow[u] \arrow[r, equal] & \mathcal{I}_{l_1\cup l_2} \arrow[u] & & \\
0 \arrow[r] & E \arrow[u] \arrow[r] & E^{\vee\vee} \arrow[u] \arrow[r, "\epsilon"] & k_x \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{I}_x(-1) \arrow[u] \arrow[r] & \mathcal{O}(-1) \arrow[u, "\alpha"] \arrow[r] & k_x \arrow[u, equal] \arrow[r] & 0. \\
 & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & &
\end{tikzcd}$$

Таким образом, пучок E включается в точную тройку

$$0 \to \mathcal{I}_x(-1) \to E \to \mathcal{I}_{l_1\cup l_2} \to 0. \tag{9}$$

Пусть $Z := l_1 \cup l_2$. Применим к точной тройке (7) функтор $\mathrm{Hom}(E,-)$, получим точную последовательность

$$\mathrm{Ext}^1(E,\mathcal{I}_x(-1)) \to \mathrm{Ext}^1(E,E) \to \mathrm{Ext}^1(E,\mathcal{I}_Z). \tag{10}$$

Найдем размерность $\mathrm{Ext}^1(E,\mathcal{I}_x(-1))$. Для этого применим к (7) функтор $\mathrm{Hom}(-,\mathcal{I}_x(-1))$; получим точную последовательность

$$\begin{gathered}0 \to \mathrm{Hom}(\mathcal{I}_Z,\mathcal{I}_x(-1)) \to \mathrm{Hom}(E,\mathcal{I}_x(-1)) \to \mathrm{Hom}(\mathcal{I}_x(-1),\mathcal{I}_x(-1)) \to \\ \to \mathrm{Ext}^1(\mathcal{I}_Z,\mathcal{I}_x(-1)) \to\to \mathrm{Ext}^1(E,\mathcal{I}_x(-1)) \to \\ \to \mathrm{Ext}^1(\mathcal{I}_x(-1),\mathcal{I}_x(-1)) \to \mathrm{Ext}^2(\mathcal{I}_Z,\mathcal{I}_x(-1)).\end{gathered} \tag{11}$$

Докажем, что

$$\mathrm{Ext}^2(\mathcal{I}_Z,\mathcal{I}_x(-1)) = 0. \tag{12}$$

По двойственности Серра имеем: $\mathrm{Ext}^2(\mathcal{I}_Z,\mathcal{I}_x(-1)) = \mathrm{Ext}^1(\mathcal{I}_x,\mathcal{I}_Z(-3))^\vee$. Применяя к точной тройке $0 \to \mathcal{I}_Z(-3) \to \mathcal{O}(-3) \to \mathcal{O}_Z(-3) \to 0$ функтор $\mathrm{Hom}(\mathcal{I}_x,-)$, получим точную последовательность

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{I}_x,\mathcal{O}_Z(-3)) \to \mathrm{Ext}^1(\mathcal{I}_x,\mathcal{I}_Z(-3)) \to \mathrm{Ext}^1(\mathcal{I}_x,\mathcal{O}(-3)). \tag{13}$$

Так как x не принадлежит $l_1\cup l_2$, то $\mathrm{Hom}(\mathcal{I}_x,\mathcal{O}_Z(-3)) = \bigoplus_{i=1}^{2} H^0(\mathcal{O}_{l_i}(-3))$ $= 0$. Далее, по двойственности Серра имеем: $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{I}_x,\mathcal{O}(-3)) = H^2(\mathcal{I}_x(-1)) = 0$. Отсюда и из (13) вытекает (12).

Далее, $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{I}_x(-1),\mathcal{I}_x(-1)) = T_x\mathbb{P}^3 = k^3$. Ясно также, что $\mathrm{Hom}(\mathcal{I}_x(-1),\mathcal{I}_x(-1)) = k$. Кроме того, $\mathrm{Hom}(E,\mathcal{I}_x(-1)) = 0$ ввиду стабильности пучка E. Подставляя эти равенства вместе с (12) в точную последовательность (11), получаем:

$$0 \to k \to \mathrm{Ext}^1(\mathcal{I}_Z,\mathcal{I}_x(-1)) \to \mathrm{Ext}^1(E,\mathcal{I}_x(-1)) \to k^3 \to 0. \qquad (14)$$

Вычислим теперь размерность группы $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{I}_Z,\mathcal{I}_x(-1))$. Применяя к точной тройке $0 \to \mathcal{I}_Z \to \mathcal{O} \to \mathcal{O}_Z \to 0$ функтор $\mathrm{Hom}(-,\mathcal{I}_x(-1))$, получим точную последовательность $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_Z,\mathcal{I}_x(-1)) \to \mathrm{Ext}^1(\mathcal{O},\mathcal{I}_x(-1)) \to \mathrm{Ext}^1(\mathcal{I}_Z,\mathcal{I}_x(-1)) \to \mathrm{Ext}^2(\mathcal{O}_Z,\mathcal{I}_x(-1)) \to \mathrm{Ext}^2(\mathcal{O},\mathcal{I}_x(-1))$. Подставляя в нее равенства: $\mathrm{Ext}^2(\mathcal{O},\mathcal{I}_x(-1)) = H^2(\mathcal{I}_x(-1)) = 0$, $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_Z,\mathcal{I}_x(-1)) = \oplus_{i=1}^2\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_{l_i},\mathcal{I}_x(-1)) = 0$, $\mathrm{Ext}^2(\mathcal{O}_Z,\mathcal{I}_x(-1)) = \oplus_{i=1}^2\mathrm{Ext}^2(\mathcal{O}_{l_i},\mathcal{I}_x(-1)) = \oplus_{i=1}^2\mathrm{Ext}^1(\mathcal{I}_x,\mathcal{O}_{l_i}(-3)) = \oplus_{i=1}^2 H^1(\mathcal{O}_{l_i}) = k^4$, $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O},\mathcal{I}_x(-1)) = H^1(\mathcal{I}_x(-1)) = k$, находим: $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{I}_Z,\mathcal{I}_x(-1)) = k^5$. Отсюда и из (14) следует:

$$\mathrm{Ext}^1(E,\mathcal{I}_x(-1)) = k^7. \qquad (15)$$

Вычислим размерность $\mathrm{Ext}^1(E,\mathcal{I}_Z)$. Для этого к точной тройке $0 \to \mathcal{I}_x(-1) \to E \to \mathcal{I}_{l_1\cup l_2} \to 0$ применим функтор $\mathrm{Hom}(-,\mathcal{I}_Z)$, получим точную последовательность

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{I}_x(-1),\mathcal{I}_Z) \to \mathrm{Ext}^1(\mathcal{I}_Z,\mathcal{I}_Z) \to \mathrm{Ext}^1(E,\mathcal{I}_Z) \to \mathrm{Ext}^1(\mathcal{I}_x(-1),\mathcal{I}_Z). \quad (16)$$

Так как $l_1\cap l_2 = \emptyset$, то $\mathrm{Hom}(\mathcal{I}_x(-1),\mathcal{I}_Z) = H^0(\mathcal{I}_Z(1)) = 0$, и $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{I}_Z,\mathcal{I}_Z) = \mathrm{Ext}^1(\mathcal{I}_{l_1},\mathcal{I}_{l_1}) \oplus \mathrm{Ext}^1(\mathcal{I}_{l_2},\mathcal{I}_{l_2}) = T_{l_1}G(1,\mathbb{P}^3) \oplus T_{l_2}G(1,\mathbb{P}^3) = k^8$. $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{I}_x(-1),\mathcal{I}_Z) = 0$. Поэтому $\mathrm{Ext}^1(E,\mathcal{I}_Z) \simeq \mathrm{Ext}^1(\mathcal{I}_Z,\mathcal{I}_Z) = k^8$. Отсюда и из (15) следует (7). Теперь (4), (5), (6) и утверждение 1 показывают, что $f(\mathbb{P}(\mathbb{F})) = \mathcal{M}_1$ неприводимая компонента размерности 15 в M, что доказывает первую часть основной теоремы, касающуюся $\mathcal{M}_1$.

(ii) $c_3(\kappa) = 4$.

Рассмотрим общий случай $\kappa = k_{x_1}\oplus k_{x_2}$, где x_1, x_2 – различные точки в $\mathbb{P}^3$. Тогда имеем точную последовательность:

$$0 \to E \to E^{\vee\vee} \xrightarrow{\epsilon} k_{x_1} \oplus k_{x_2} \to 0. \qquad (1')$$

Обозначим через M_2^r подмножество рефлексивных пучков в схеме $M_{\mathbb{P}^3}(2;-1,2,4)$. Аналогично случаю (i) существует универсальное семейство $\mathbb{F}$ стабильных рефлексивных пучков на $M_2^r \times \mathbb{P}^3$. Обозначим $Y := M_2^r \times \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3$. Рассмотрим проективизацию $\mathbb{P}(\mathbb{F}) \xrightarrow{\pi} Y$. Пусть $W := \mathbb{P}^3\times\mathbb{P}^3 \smallsetminus \Delta$. Имеются отображения: $\Delta_1 : (x_1,x_2) \mapsto (x_1,x_1,x_2)$, $\Delta_2 : (x_1,x_2) \mapsto (x_2,x_1,x_2)$. Обозначим $W_i = \Delta_i(W)$, $i = 1,2$ и $W_{12} := W_1\cup W_2$. Тогда $W_{12} \hookrightarrow \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3$.

На $\mathbb{P}(\mathbb{F})$ существует естественный эпиморфизм $\pi^*\mathbb{F} \xrightarrow{ev} \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathbb{F})}(1) \to 0$. Пусть $\mathbb{E}$ – ядро композиции $\pi^*\mathbb{F} \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3\times\mathbb{P}^3\smallsetminus\Delta} \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \to^{ev} \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathbb{F})}(1) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3\times\mathbb{P}^3\smallsetminus\Delta} \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathbb{F})(1)} \boxtimes \mathcal{O}_{W_{12}} \to 0$. Таким образом, имеется отображение $f : \mathbb{P}(\mathbb{F}) \to M$: $y = ([F], x_1, x_2, < F \to k_{x_1} \oplus k_{x_2} >) \mapsto [ker(F \to k_{x_1} \oplus k_{x_2})]$. По аналогии с утверждением 1 и утверждением 2 доказывается

Утверждение 3.
1. $\mathbb{P}(\mathbb{F})$ – *неприводимое многообразие размерности 19.*
2. *Отображение f теоретико-множественно является вложением.*

По построению семейства $\mathbb{E}$ размерность базы этого семейства $\mathbb{E}$ равна 15, и тем самым, в силу утверждения 3, получаем

$$\dim f(\mathbb{P}(\mathbb{F})) = 19. \tag{$2'$}$$

Тем самым, размерность неприводимой компоненты $\mathcal{M}_2$ схемы M, содержащей $f(\mathbb{P}(\mathbb{F}))$, не меньше, чем 19. Тем самым,

$$\dim T_{[E]}M \geq \dim T_{[E]}\mathcal{M}_2 \geq \dim f(\mathbb{P}(\mathbb{F})) \geq 19. \tag{$3'$}$$

Мы докажем, что

$$\dim T_{[E]}M \leq 15. \tag{$4'$}$$

Согласно замечанию после основной теоремы имеем

$$\dim T_{[E]}M = \dim \operatorname{Ext}^1(E, E). \tag{$5'$}$$

Покажем, что

$$\operatorname{Ext}^1(E, E) \leq 19. \tag{$6'$}$$

Так как $E^{\vee\vee} \in M_2^r$, то согласно [2. Example 4.2.3] пучок $E^{\vee\vee}$ можно включить в точную тройку:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(-1) \xrightarrow{\alpha} E^{\vee\vee} \longrightarrow \mathcal{I}_C \longrightarrow 0\ , \tag{$7'$}$$

где C – коника в $\mathbb{P}^3$.

Можно показать счетом параметров, что для общего $[E] \in \mathbb{P}(\mathbb{F})$ точки x_1 и x_2 не принадлежат C и $\epsilon \circ \alpha \neq 0$, где α и ϵ определены в $(7')$ и $(1')$. Тогда для этого $[E]$ тройки $(1')$ и $(7')$ включаются в диаграмму:

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 & 0 & & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{I}_C \arrow[r] \arrow[u] & \mathcal{I}_C \arrow[u] & & \\
0 \arrow[r] & E \arrow[r] \arrow[u] & E^{\vee\vee} \arrow[r, "\epsilon"] \arrow[u] & k_{x_1} \oplus k_{x_2} \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{I}_{x_1 \cup x_2}(-1) \arrow[r] \arrow[u] & \mathcal{O}(-1) \arrow[r] \arrow[u, "\alpha"] & k_{x_1} \oplus k_{x_2} \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
 & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & &
\end{tikzcd}
$$

Пусть $Z := x_1 \cup x_2$. Таким образом, пучок E включается в точную тройку

$$0 \to \mathcal{I}_Z(-1) \to E \to \mathcal{I}_C \to 0. \tag{8$'$}$$

Применим к точной тройке (8$'$) функтор $\mathrm{Hom}(E, -)$, получим точную последовательность

$$\mathrm{Ext}^1(E, \mathcal{I}_Z(-1)) \to \mathrm{Ext}^1(E, E) \to \mathrm{Ext}^1(E, \mathcal{I}_C). \tag{9$'$}$$

Найдем размерность $\mathrm{Ext}^1(E, \mathcal{I}_Z(-1))$. Применим к точной тройке $0 \to \mathcal{I}_Z(-1) \to E \to \mathcal{I}_C \to 0$ функтор $\mathrm{Hom}(-, \mathcal{I}_Z(-1))$. Имеем точную последовательность

$$0 \to \mathrm{Hom}(\mathcal{I}_Z(-1), \mathcal{I}_Z(-1)) \to \mathrm{Ext}^1(\mathcal{I}_C, \mathcal{I}_Z(-1)) \to \mathrm{Ext}^1(E, \mathcal{I}_Z(-1)) \to$$

$$\to \mathrm{Ext}^1(\mathcal{I}_Z(-1), \mathcal{I}_Z(-1)) \to \mathrm{Ext}^2(\mathcal{I}_C, \mathcal{I}_Z(-1)). \tag{10$'$}$$

Подставляя равенства: $\mathrm{Ext}^2(\mathcal{I}_C, \mathcal{I}_Z(-1)) = 0$, $\mathrm{Hom}(E, \mathcal{I}_Z(-1)) = 0$, $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{I}_Z(-1), \mathcal{I}_Z(-1)) = k^6$, $\mathrm{Hom}(\mathcal{I}_Z(-1), \mathcal{I}_Z(-1)) = k$, $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{I}_C, \mathcal{I}_Z(-1)) = k^7$, получаем

$$\mathrm{Ext}^1(E, \mathcal{I}_Z(-1)) = k^{12}. \tag{11$'$}$$

Вычислим теперь $\mathrm{Ext}^1(E, \mathcal{I}_C)$. Применим к точной тройке $0 \to \mathcal{I}_Z(-1) \to E \to \mathcal{I}_C \to 0$ функтор $\mathrm{Hom}(-, \mathcal{I}_C)$. Получим точную последовательность

$$0 \to \mathrm{Hom}(\mathcal{I}_Z(-1), \mathcal{I}_C) \to \mathrm{Ext}^1(\mathcal{I}_C, \mathcal{I}_C) \to \mathrm{Ext}^1(E, \mathcal{I}_C) \to 0. \tag{12$'$}$$

Подставляя в $(12^{'})$ равенства: $\mathrm{Hom}(\mathcal{I}_Z(-1),\mathcal{I}_C)=k$, $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{I}_C,\mathcal{I}_C)=k^8$, получаем

$$\mathrm{Ext}^1(E,\mathcal{I}_C)=k^7. \tag{$13^{'}$}$$

Отсюда и из $(9^{'})$ и $(11^{'})$ следует $(6^{'})$. Теперь $(3^{'})$, $(4^{'})$, $(5^{'})$ и утверждение 3 показывают, что $f(\mathbb{P}(\mathbb{F}))=\mathcal{M}_2$ – неприводимая компонента размерности 19 в M, что завершает доказательство основной теоремы.

Библиографический список

1. *Chang M.-C.* Stable rank 2 reflexive sheaves on $\mathbb{P}^3$ with small c_2 and applications // Trans. Amer. Math. Soc. 284 (1984). №. 1, P. 57-89.
2. *Hartshorne R.* Stable reflexive sheaves (English) // Math. Ann. 254, 121-176 (1980).
3. *Hartshorne R. Sols I.* Stable rank 2 vector bundles on $\mathbb{P}^3$ with $c_1=-1, c_2=2$ (English) // J. Reine Angew. Math. 325, 145-152 (1981).
4. *Maruyama M.* Moduli of stable sheaves. II (English) // J. Math. Kyoto Univ. 18, 557-614 (1978).
5. *Meseguer J., Sols I., Stromme S. A.* Compactification of a family of vector bundles on $\mathbb{P}^3$ (English). 18th Scand. Congr. Math., Proc., Aarhus 1980, Prog. Math. 11, 474-494 (1981).
6. *Оконек К., Шнейдер М., Шпиндлер Х.* Векторные расслоения на комлексных проективных пространствах. М.: Мир, 1984.
7. *Stromme S.-A.* Ample Divisors on Fine Moduli Spaces on Projective Plane // Math. Z., 187 (1984), 405-423.

Компактификация многообразия модулей $M_Q(-1,2)$ стабильных расслоений ранга 2 на трехмерной квадрике

А.Д. Уваров

В настоящей статье приводится описание компактификации пространства модулей стабильных векторных расслоений на проективной трехмерной квадрике Q_3 с классами Черна $c_1=-1$ и $c_2=2$.

Пусть $M_Q(2;-1,2,0)$ схема модулей стабильных пучков ранга 2 на проективной трехмерной квадрике Q_3 с классами Черна $c_1=-1,\ c_2=2,\ c_3=0$, а $M=M_Q(-1,2)$ – многообразие модулей расслоений ранга 2 на Q с классами Черна $c_1=-1,\ c_2=2$. Нас интересует замыкание $\overline{M}=\overline{M_Q(-1,2)}$ многообразия $M_Q(-1,2)$ в схеме $M_Q(2;-1,2,0)$. Для этого мы построим семейство пучков $\mathcal{E}$ из $M_Q(2;-1,2,0)$, получаемых как расширения вида $0\to\mathcal{O}_Q(-1)\to\mathcal{E}\to\mathcal{I}_C\to 0$, где $C=l_1\cup l_2$ – пара скрещивающихся прямых на Q либо вырождение этой пары, такое, что база этого семейства сюръективно отображается на $\overline{M_Q(-1,2)}$.

Теорема. *Замыкание* $\overline{M_Q(-1,2)}$ *пространства* $M_Q(-1,2)$ *модулей стабильных векторных расслоений ранга 2 на* Q_3 *с* $c_1=-1, c_2=2$ *в схеме модулей Гизекера-Маруямы* $M_Q(2,-1,2,0)$ *есть 6-мерное гладкое проективное унирациональное многообразие.*

Для построения $\overline{M_Q(-1,2)}$ возьмем раздутие $\sigma:\ H:=\widetilde{\mathbb{P}^3\times\mathbb{P}^3}\to\mathbb{P}^3\times\mathbb{P}^3$ вдоль диагонали Δ и построим прямое произведение $X:=\widetilde{\mathbb{P}^3\times\mathbb{P}^3}\times Q$ с проекцией $f: X\to H$. Пусть $D_\Delta=\sigma^{-1}(\Delta)$ – исключительный дивизор раздутия σ. Как известно, база семейства прямых на Q изоморфна $\mathbb{P}^3$. Поэтому рассмотрим график инциденции $\Sigma=\{$(прямая l, точка $x)\in\mathbb{P}^3\times Q\ |x\in l\}$.

Пусть Σ_1,Σ_2 - прообразы Σ при проекциях $p_1,p_2: X:=H\times Q\to\mathbb{P}^3\times Q$ соответственно, $\Gamma:=\Sigma_1\cup\Sigma_2$, $f_\Gamma:=f|_\Gamma:\Gamma\to H$- проекция и $Y_\Delta=f_\Gamma^{-1}(D_\Delta)$. Пересечение $\Sigma_1\cap\Sigma_2$ есть объединение двух дивизоров $Y_\triangle\cup Y$ в Γ, где Y – замыкание в Γ множества $\{(l_1,l_2,x)\in(\mathbb{P}^3\times\mathbb{P}^3\setminus\Delta)\times Q|x=l_1\cap l_2\}$.

В дальнейшем будем пользоваться следующими обозначениями: $\mathcal{O}_X(a,b,c,\mathcal{G}):=\mathcal{O}_H(a,b,c)\boxtimes\mathcal{G}$, $\mathcal{O}_X(a,b,c,d):=\mathcal{O}_H(a,b,c)\boxtimes\mathcal{O}_Q(d)$, а $\mathcal{O}_H(a,b,c):=\sigma^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(a)\boxtimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(b))\otimes\mathcal{O}_H(cD_\Delta)$, $\ a,b,c,d\in\mathbb{Z}$, а $\mathcal{G}$ – произвольный $\mathcal{O}_Q$-пучок.

Воспользовавшись тем, что $\mathcal{I}_{Y_\triangle,\Sigma_2}=\mathcal{O}_{\Sigma_2}(-Y_\triangle)=\mathcal{O}_X(0,0,-1,0)|_{\Sigma_2}=\mathcal{O}_{\Sigma_2}(0,0,-1,0)$ и $\mathcal{I}_{\Sigma_1\cap\Sigma_2,\Sigma_2}=\mathcal{I}_{Y,\Sigma_2}(-Y_\triangle)=\mathcal{I}_{Y,\Sigma_2}(0,0,-1,0)$, из точной тройки:

$$0\longrightarrow\mathcal{I}_{\Sigma_1\cap\Sigma_2,\Sigma_2}\longrightarrow\mathcal{O}_\Gamma\longrightarrow\mathcal{O}_{\Sigma_1}\longrightarrow 0 \qquad (1)$$

получаем диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & & & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{I}_{Y,\Sigma_2}(0,0,-1,0) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}_\Gamma \arrow[r] & \mathcal{O}_{\Sigma_1} \arrow[r] & 0, \\
 & \mathcal{O}_{\Sigma_2}(0,0,-1,0) \arrow[d] & & & \\
 & \mathcal{O}_Y(0,0,-1,0) \arrow[d] & & & \\
 & 0 & & &
\end{tikzcd} \qquad (2)$$

Вычислим пучок относительных $\mathcal{E}xt$-ов $\mathcal{F} := \mathcal{E}xt^1_f(\mathcal{I}_{\Gamma,X}(0,0,0,1), \mathcal{O}_X)$. Рассмотрим точную тройку:

$$0 \to \mathcal{I}_{\Gamma,X}(0,0,0,1) \to \mathcal{O}_X(0,0,0,1) \to \mathcal{O}_\Gamma(0,0,0,1) \to 0 \tag{3}$$

и применим к ней функтор $\mathcal{E}xt^{\cdot}_f(-, \mathcal{O}_X)$:

$$\begin{gathered} \to \mathcal{E}xt^1_f(\mathcal{O}_X(0,0,0,1), \mathcal{O}_X) \to \mathcal{F} \to \mathcal{E}xt^2_f(\mathcal{O}_\Gamma(0,0,0,1), \mathcal{O}_X) \to \\ \to \mathcal{E}xt^2_f(\mathcal{O}_X(0,0,0,1), \mathcal{O}_X). \end{gathered} \tag{4}$$

Из нее следует, что

$$\mathcal{F} = \mathcal{E}xt^2_f(\mathcal{O}_\Gamma(0,0,0,1), \mathcal{O}_X), \tag{5}$$

так как

$$\mathcal{E}xt^1_f(\mathcal{O}_X(0,0,0,1), \mathcal{O}_X) = \mathcal{E}xt^2_f(\mathcal{O}_X(0,0,0,1), \mathcal{O}_X) = 0. \tag{6}$$

Для доказательства последних равенств рассмотрим спектральную последовательность локальных и относительных $\mathcal{E}xt$-ов:

$$R^p f_* \mathcal{E}xt^q(\mathcal{O}_X(0,0,0,1), \mathcal{O}_X) \Rightarrow \mathcal{E}xt^{p+q}_f(\mathcal{O}_X(0,0,0,1), \mathcal{O}_X), \tag{7}$$

которая дает длинную точную последовательность:

$$0 \to R^1 f_*(\mathcal{H}om(\mathcal{O}_X(0,0,0,1), \mathcal{O}_X)) \to \mathcal{E}xt^1_f(\mathcal{O}_X(0,0,0,1), \mathcal{O}_X) \to$$

$$\to f_*(\mathcal{E}xt^1(\mathcal{O}_X(0,0,0,1), \mathcal{O}_X)) \to R^2 f_*(\mathcal{H}om(\mathcal{O}_X(0,0,0,1), \mathcal{O}_X)).$$

Имеем $\mathcal{H}om(\mathcal{O}_X(0,0,0,1), \mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_H \boxtimes \mathcal{O}_Q(-1)$ и по формуле Кюннета $R^1 f_*(\mathcal{O}_H \boxtimes \mathcal{O}_Q(-1)) = \mathcal{O}_H(0,0,1) \otimes H^1(\mathcal{O}_Q(-1)) = 0$. Аналогично доказывается, что $R^2 f_*(\mathcal{H}om(\mathcal{O}_X(0,0,0,1), \mathcal{O}_X)) = 0$ и, соответственно, $\mathcal{E}xt^1_f(\mathcal{O}_X(0,0,0,1), \mathcal{O}_X) \cong f_*(\mathcal{E}xt^1(\mathcal{O}_X(0,0,0,1), \mathcal{O}_X)) = 0$. Также заметим, что поскольку все пучки $\mathcal{E}xt^i(O_X(0,0,0,1), O_X) = 0$ для $i > 0$ (см. [2. С. 301]), то спектральная последовательность (7) дает $\mathcal{E}xt^2_f(\mathcal{O}_X(0,0,0,1), \mathcal{O}_X) = 0$. Равенства (5) доказаны. По аналогии с (5) доказывается равенство:

$$\mathcal{E}xt^1_f(\mathcal{O}_X(0,-1,-1,S), \mathcal{O}_X) = 0 \tag{8}$$

и равенство:

$$\mathcal{E}xt^1_f(\mathcal{O}_X(-1,0,0,S), \mathcal{O}_X) = 0 \tag{9}$$

Далее, для нахождения пучка $\mathcal{F}$ $\mathcal{E}xt^2_f(\mathcal{O}_\Gamma(0,0,0,1), \mathcal{O}_X)$ выпишем кусок длинной точной последовательности относительных $\mathcal{E}xt$-ов для верхней строки диаграммы (2), подкрученной на $\mathcal{O}_X(0,0,0,1)$, и воспользуемся формулой (5):

$$\begin{gathered}\mathcal{E}xt^1_f(\mathcal{I}_{Y,\Sigma_2}(0,0,-1,1),\mathcal{O}_X)\to\mathcal{E}xt^2_f(\mathcal{O}_{\Sigma_1}(0,0,0,1),\mathcal{O}_X)\to\mathcal{F}\to\\ \to\mathcal{E}xt^2_f(\mathcal{I}_{Y,\Sigma_2}(0,0,-1,1),\mathcal{O}_X)\to\mathcal{E}xt^3_f(\mathcal{O}_{\Sigma_1}(0,0,0,1),\mathcal{O}_X).\end{gathered}\tag{10}$$

Вычислим входящие в эту последовательность пучки $\mathcal{E}xt^2_f(\mathcal{I}_{Y\Sigma_2}(0,0,-1,1),\mathcal{O}_X)$, $\mathcal{E}xt^1_f(\mathcal{I}_{Y,\Sigma_2}(0,0,-1,1),\mathcal{O}_X)$, $\mathcal{E}xt^3_f(\mathcal{O}_{\Sigma_1}(0,0,0,1),\mathcal{O}_X)$ и $\mathcal{E}xt^2_f(\mathcal{O}_{\Sigma_1}(0,0,0,1),\mathcal{O}_X)$.

Во-первых, вычислим пучок $\mathcal{E}xt^2_f(\mathcal{I}_{Y,\Sigma_2}(0,0,-1,1),\mathcal{O}_X)$ из столбца диаграммы (2), применяя к нему функтор $\mathcal{E}xt^{\cdot}_f(-,O_X)$:

$$\begin{gathered}\mathcal{E}xt^2_f(\mathcal{O}_Y(0,0,-1,1),\mathcal{O}_X)\to\mathcal{E}xt^2_f(\mathcal{O}_{\Sigma_2}(0,0,-1,1),\mathcal{O}_X)\to\\ \to\mathcal{E}xt^2_f(\mathcal{I}_{Y,\Sigma_2}(0,0,-1,1),\mathcal{O}_X)\to\mathcal{E}xt^3_f(\mathcal{O}_Y(0,0,-1,1),\mathcal{O}_X)\to\\ \to\mathcal{E}xt^3_f(\mathcal{O}_{\Sigma_2}(0,0,-1,1),\mathcal{O}_X).\end{gathered}\tag{11}$$

Далее, для последовательности (11) вычислим пучок $\mathcal{E}xt^2_f(\mathcal{O}_{\Sigma_2}(0,0,-1,1),\mathcal{O}_X)$.

Рассмотрим O_X-резольвенту для пучка $\mathcal{O}_{\Sigma_2}$ и подкрутим ее на $\mathcal{O}_X(0,0,0,1)$; получим:

$$\begin{gathered}0\to\mathcal{O}_X(0,-2,-1,0)\to\mathcal{O}_X(0,-1,-1,S)\to\mathcal{O}_X(0,0,-1,1)\to\\ \to\mathcal{O}_{\Sigma_2}(0,0,-1,1)\to 0,\end{gathered}\tag{12}$$

где S – спинорное расслоение на квадрике Q_3 (см. [1]). Применяя к точной тройке:

$$0\to\mathcal{I}_{\Sigma_2,X}(0,0,0,1)\to\mathcal{O}_X(0,0,-1,1)\to\mathcal{O}_{\Sigma_2}(0,0,-1,1)\to 0\tag{13}$$

функтор $\mathcal{E}xt^{\cdot}_f(-,\mathcal{O}_X)$, получаем точную последовательность:

$$\begin{gathered}\mathcal{E}xt^1_f(\mathcal{O}_X(0,0,-1,1),\mathcal{O}_X)\to\mathcal{E}xt^1_f(\mathcal{I}_{\Sigma_2,X}(0,0,0,1),\mathcal{O}_X)\to\\ \to\mathcal{E}xt^2_f(\mathcal{O}_{\Sigma_2}(0,0,-1,1),\mathcal{O}_X)\to\mathcal{E}xt^2_f(\mathcal{O}_X(0,0,-1,1),\mathcal{O}_X),\end{gathered}\tag{14}$$

из которой следует, что

$$\mathcal{E}xt^1_f(\mathcal{I}_{\Sigma_2,X}(0,0,0,1),\mathcal{O}_X)=\mathcal{E}xt^2_f(\mathcal{O}_{\Sigma_2}(0,0,-1,1),\mathcal{O}_X),\tag{15}$$

так как $\mathcal{E}xt^1_f(\mathcal{O}_X(0,0,-1,1),\mathcal{O}_X)=\mathcal{E}xt^2_f(\mathcal{O}_X(0,0,-1,1),\mathcal{O}_X)=0$. Доказательство последних равенств полностью повторяет доказательство для равенств из формулы (6).

Далее, пользуясь формулой Кюннета и соотношением $H^0(S)=0$, находим:

$$\mathcal{E}xt^0_f(\mathcal{O}_X(0,-1,-1,S),\mathcal{O}_X)=f_*(\mathcal{O}_H(0,1,1)\boxtimes S)=\mathcal{O}_H(0,1,1)\otimes H^0(S)=0.\tag{16}$$

Аналогичным образом получаем:

$$\begin{gathered}\mathcal{E}xt^0_f(\mathcal{O}_X(0,-2,-1,0),\mathcal{O}_X)=f_*(\mathcal{O}_X(0,2,1,0))=\\=\mathcal{O}_H(0,2,1)\otimes H^0(\mathcal{O}_Q)=\mathcal{O}_H(0,2,1)\otimes k=\mathcal{O}_H(0,2,1).\end{gathered}\tag{17}$$

Далее, в силу (12) пучок $\mathcal{I}_{\Sigma_2,X}(0,0,0,1)$ входит в следующую точную тройку:

$$0\to\mathcal{O}_X(0,-2,-1,0)\to\mathcal{O}_X(0,-1,-1,S^\vee(1))\to\mathcal{I}_{\Sigma_2,X}(0,0,0,1)\to 0.\tag{18}$$

Применяя к ней функтор $\mathcal{E}xt^{\cdot}_f(-,\mathcal{O}_X)$, получим:

$$\begin{gathered}\mathcal{E}xt^0_f(\mathcal{O}_X(0,-1,-1,S),\mathcal{O}_X)\to\mathcal{E}xt^0_f(\mathcal{O}_X(0,-2,-1,0),\mathcal{O}_X)\to\\\to\mathcal{E}xt^1_f(\mathcal{I}_{\Sigma_2,X}(0,0,0,1),\mathcal{O}_X)\to\mathcal{E}xt^1_f(\mathcal{O}_X(0,-1,-1,S),\mathcal{O}_X).\end{gathered}\tag{19}$$

Из последовательности (19) и формул (16), (17) и (8) заключаем, что $\mathcal{E}xt^1_f(\mathcal{I}_{\Sigma_2,X}(0,0,0,1),\mathcal{O}_X)=\mathcal{O}_H(0,2,1)$. Отсюда и из формулы (15) имеем:

$$\mathcal{E}xt^2_f(\mathcal{O}_{\Sigma_2}(0,0,-1,1),\mathcal{O}_X)\cong\mathcal{O}_H(0,2,1).\tag{20}$$

Вычислим теперь пучок $\mathcal{E}xt^3_f(\mathcal{O}_Y(0,0,-1,1),\mathcal{O}_X)$, входящий в последовательность (11). Пусть Inc – замыкание в $\mathbb{P}^3\times\mathbb{P}^3$ множества $\{(l_1,l_2)\in(\mathbb{P}^3\times\mathbb{P}^3)\smallsetminus\Delta|x=l_1\cap l_2\}$ и $\widetilde{Inc}:=\sigma^{-1}(Inc)$. По двойственности Серра и с учетом изоморфизма $\widetilde{Inc}\xrightarrow{\sim}Y$, сопоставляющего паре пересекающихся прямых на Q_3 их точку пересечения на Q_3, получаем: $\mathcal{E}xt^3_f(\mathcal{O}_Y(0,0,-1,1),\mathcal{O}_X)=(\mathcal{E}xt^0_f(\mathcal{O}_X,\mathcal{O}_Y(0,0,-1,1)\boxtimes\mathcal{O}_X(0,0,0,-3)))^\vee=((f|_Y)_*\mathcal{O}_Y(0,0,-1,-2))^\vee=\mathcal{H}om(\mathcal{O}_{\widetilde{Inc}}(0,0,-1),\mathcal{O}_H)=0$, так как $\operatorname{codim}_H\widetilde{Inc}=1$. Итак,

$$\mathcal{E}xt^3_f(\mathcal{O}_Y(0,0,-1,1),\mathcal{O}_X)=0.\tag{21}$$

Далее, найдем пучок $\mathcal{E}xt^2_f(\mathcal{O}_Y(0,0,-1,1),\mathcal{O}_X)$, также входящий в последовательность (11). Поскольку $\operatorname{codim}_X Y=4$, то все пучки $\mathcal{E}xt^i(O_Y(0,0,-1,1),O_X)=0$ для $i>0$. Поэтому из спектральной последовательности локальных и относительных $\mathcal{E}xt$-ов

$$E_2^{p,q}=R^pf_*\mathcal{E}xt^q(\mathcal{O}_Y(0,0,-1,1),\mathcal{O}_X)\Rightarrow\mathcal{E}xt^{p+q}_f(\mathcal{O}_Y(0,0,-1,1),\mathcal{O}_X),\tag{22}$$

получаем :

$$\mathcal{E}xt^2_f(\mathcal{O}_Y(0,0,-1,1),\mathcal{O}_X)=0.\tag{23}$$

Теперь из последовательности (11) и равенств (23), (21), (20) получаем, что

$$\mathcal{E}xt^2_f(\mathcal{I}_{Y,\Sigma_2}(0,0,-1,1),\mathcal{O}_X)=\mathcal{O}_H(0,2,1).\tag{24}$$

Далее, вычислим пучок $\mathcal{E}xt^1_f(\mathcal{I}_{Y,\Sigma_2}(0,0,-1,1),\mathcal{O}_X)$, используемый в (10). Для его нахождения применим функтор $\mathcal{E}xt^{\cdot}_f(-,O_X)$ к столбцу диаграммы (2):

$$\begin{gathered}\mathcal{E}xt^1_f(\mathcal{O}_Y(0,0,-1,1),\mathcal{O}_X)\to\mathcal{E}xt^1_f(\mathcal{O}_{\Sigma_2}(0,0,-1,1),\mathcal{O}_X)\to\\ \to\mathcal{E}xt^1_f(\mathcal{I}_{Y,\Sigma_2}(0,0,-1,1),\mathcal{O}_X)\to\mathcal{E}xt^2_f(\mathcal{O}_Y(0,0,-1,1),\mathcal{O}_X)\to\\ \to\mathcal{E}xt^2_f(\mathcal{O}_{\Sigma_2}(0,0,-1,1),\mathcal{O}_X).\end{gathered}\tag{25}$$

Докажем равенство

$$\mathcal{E}xt^1_f(\mathcal{O}_{\Sigma_2}(0,0,-1,1),\mathcal{O}_X)=0.\tag{26}$$

Для этого воспользуемся спектральной последовательностью $E_2^{p,q}=R^pf_*\mathcal{E}xt^q(\mathcal{O}_{\Sigma_2}(0,0,-1,1),\mathcal{O}_X)\Rightarrow\mathcal{E}xt^{p+q}_f(\mathcal{O}_{\Sigma_2}(0,0,-1,1),\mathcal{O}_X)$, которая дает: $0\to R^1f_*(\mathcal{H}om(\mathcal{O}_{\Sigma_2}(0,0,-1,1),\mathcal{O}_X))\to\mathcal{E}xt^1_f(\mathcal{O}_{\Sigma_2}(0,0,-1,1),\mathcal{O}_X)\to f_*(\mathcal{E}xt^1(\mathcal{O}_{\Sigma_2}(0,0,-1,1),\mathcal{O}_X))$. Так как $\operatorname{codim}_X\Sigma_2=2$, то $\mathcal{H}om(\mathcal{O}_{\Sigma_2}(0,0,-1,1),\mathcal{O}_X)=\mathcal{E}xt^1(\mathcal{O}_{\Sigma_2}(0,0,-1,1),\mathcal{O}_X)=0$, откуда следует равенство (26). Из последовательности (25) с учетом равенств (26) и (23) получаем, что

$$\mathcal{E}xt^1_f(\mathcal{I}_{Y,\Sigma_2}(0,0,-1,1),\mathcal{O}_X)=0,\tag{27}$$

Теперь вычислим пучок $\mathcal{E}xt^3_f(\mathcal{O}_{\Sigma_1}(0,0,0,1),\mathcal{O}_X)$. Воспользуемся морфизмом замены базы для пучков относительных $\mathcal{E}xt$-ов: $\mathcal{E}xt^3_f(\mathcal{O}_{\Sigma_1}(0,0,0,1),\mathcal{O}_X)\otimes k_x\to Ext^3(\mathcal{O}_l(1),\mathcal{O}_Q)$, который является изоморфизмом, так как $Ext^4(\mathcal{O}_l(1),\mathcal{O}_Q)=0$ (см. [6. С. 110]). Соответственно, группы $Ext^3(\mathcal{O}_l(1),\mathcal{O}_Q)$ являются слоями пучка $\mathcal{E}xt^3_f(\mathcal{O}_{\Sigma_1}(0,0,0,1),\mathcal{O}_X)$. По двойственности Серра имеем: $Ext^3(\mathcal{O}_l(1),\mathcal{O}_Q)=(Ext^0(\mathcal{O}_Q,\mathcal{O}_l(1)\otimes\omega_Q))^\vee=(Ext^0(O_Q,O_l(-2)))^\vee=(Hom(\mathcal{O}_Q,\mathcal{O}_l(-2)))^\vee=0$, откуда

$$\mathcal{E}xt^3_f(\mathcal{O}_{\Sigma_1}(0,0,0,1),\mathcal{O}_X)=0.\tag{28}$$

Далее, вычислим пучок $\mathcal{E}xt^2_f(\mathcal{O}_{\Sigma_1}(0,0,0,1),\mathcal{O}_X)$. Для этого рассмотрим O_X-резольвенту для пучка $\mathcal{O}_{\Sigma_1}$ и подкрутим ее на $\mathcal{O}_X(0,0,0,1)$:

$$0\to\mathcal{O}_X(-2,0,0,0)\to\mathcal{O}_X(-1,0,0,S^\vee(1))\to\mathcal{O}_X(0,0,0,1)\to\mathcal{O}_{\Sigma_1}(0,0,0,1)\to0.\tag{29}$$

К точной тройке:

$$0\to\mathcal{I}_{\Sigma_1,X}(0,0,0,1)\to\mathcal{O}_X(0,0,0,1)\to\mathcal{O}_{\Sigma_1}(0,0,0,1)\to0\tag{30}$$

применим функтор $\mathcal{E}xt^{\cdot}_f(-,\mathcal{O}_X)$ и рассмотрим кусок длинной точной последовательности:

$$\begin{gathered}\mathcal{E}xt^1_f(\mathcal{O}_X(0,0,0,1),\mathcal{O}_X)\to\mathcal{E}xt^1_f(\mathcal{I}_{\Sigma_1,X}(0,0,0,1),\mathcal{O}_X)\to\\ \to\mathcal{E}xt^2_f(\mathcal{O}_{\Sigma_1}(0,0,0,1),\mathcal{O}_X)\to\mathcal{E}xt^2_f(\mathcal{O}_X(0,0,0,1),\mathcal{O}_X).\end{gathered}\tag{31}$$

Из нее следует, что

$$\mathcal{E}xt^1_f(\mathcal{I}_{\Sigma_1,X}(0,0,0,1),\mathcal{O}_X)=\mathcal{E}xt^2_f(\mathcal{O}_{\Sigma_1}(0,0,0,1),\mathcal{O}_X), \tag{32}$$

так как $\mathcal{E}xt^1_f(\mathcal{O}_X(0,0,0,1),\mathcal{O}_X)=\mathcal{E}xt^2_f(\mathcal{O}_X(0,0,0,1),\mathcal{O}_X)=0$. Два последних равенства следуют из формулы (6).

Далее, вычислим пучок $\mathcal{E}xt^1_f(\mathcal{I}_{\Sigma_1,X}(0,0,0,1),\mathcal{O}_X)$. Для его вычисления нам понадобятся следующие пучки : $\mathcal{E}xt^0_f(\mathcal{O}_X(-1,0,0,S),\mathcal{O}_X)$, $\mathcal{E}xt^0_f(\mathcal{O}_X(-2,0,0,0),\mathcal{O}_X)$, $\mathcal{E}xt^1_f(\mathcal{O}_X(-1,0,0,S),\mathcal{O}_X)$, $\mathcal{E}xt^1_f(\mathcal{I}_{\Sigma_1,X}(0,0,0,1),\mathcal{O}_X)$.

По формуле Кюннета получаем:

$$\mathcal{E}xt^0_f(\mathcal{O}_X(-1,0,0,S),\mathcal{O}_X)=\mathcal{O}_H(1,0,0)\otimes H^0(S)=0. \tag{33}$$

Аналогичным образом имеем:

$$\mathcal{E}xt^0_f(\mathcal{O}_X(-2,0,0,0),\mathcal{O}_X)=f_*(\mathcal{O}_X(2,0,0,0))=\mathcal{O}_H(2,0,0)\otimes k=\mathcal{O}_H(2,0,0). \tag{34}$$

Пучок $\mathcal{I}_{\Sigma_1,X}(0,0,0,1)$ входит в следующую точную тройку:

$$0\to\mathcal{O}_X(0,-2,0,0)\to\mathcal{O}_X(-1,0,0,S^\vee(1))\to\mathcal{I}_{\Sigma_1,X}(0,0,0,1)\to 0. \tag{35}$$

Применим к ней функтор $\mathcal{E}xt^{\cdot}_f(-,\mathcal{O}_X)$:

$$\begin{gathered}0\to\mathcal{E}xt^0_f(\mathcal{I}_{\Sigma_1,X}(0,0,0,1),\mathcal{O}_X)\to\mathcal{E}xt^0_f(\mathcal{O}_X(-1,0,0,S),\mathcal{O}_X)\to\\ \to\mathcal{E}xt^0_f(\mathcal{O}_X(-2,0,0,0),\mathcal{O}_X)\to\mathcal{E}xt^1_f(\mathcal{I}_{\Sigma_1,X}(0,0,0,1),\mathcal{O}_X)\to\\ \to\mathcal{E}xt^1_f(\mathcal{O}_X(-1,0,0,S),\mathcal{O}_X).\end{gathered} \tag{36}$$

Из точной последовательности (36) с учетом равенств (33), (34) и (9) получаем, что $\mathcal{E}xt^1_f(\mathcal{I}_{\Sigma_1,X}(0,0,0,1),\mathcal{O}_X)=\mathcal{O}_H(2,0,0)$. Отсюда и из формулы (32) находим:

$$\mathcal{E}xt^2_f(\mathcal{O}_{\Sigma_1}(0,0,0,1),\mathcal{O}_X)\cong\mathcal{O}_H(2,0,0). \tag{37}$$

В итоге с учетом формул (27), (37), (24) и (28) последовательность (10) приобретает вид:

$$0\to\mathcal{O}_H(2,0,0)\to\mathcal{F}\to\mathcal{O}_H(0,2,1)\to 0. \tag{38}$$

Отсюда следует, что пучок $\mathcal{F}$ на H локально свободен, имеет ранг 2 и, соответственно, $\mathcal{F}\cong\mathcal{F}^{\vee\vee}$.

Утверждение. *Проективный спектр $W:=\mathbb{P}(\mathcal{F}^\vee)$ параметризует семейство $\mathbb{E}$ стабильных пучков ранга 2 на Q с $c_1=-1, c_2=2, c_3=0$ на Q_3, задаваемое как пучок на $\overline{W}:=W\times Q$ в виде расширения*

$$0\longrightarrow\overline{f}^*\mathcal{O}_W(1))\longrightarrow\mathbb{E}\longrightarrow\overline{p}^*\mathcal{I}_{\Gamma,X}(0,0,0,1)\longrightarrow 0 \tag{39}$$

$\mathcal{O}_W(1)$ – пучок Гротендика на W, а $\overline{p} : \widetilde{Y} := \overline{W} \to X$ и $\overline{f} : \overline{W} \to W$ – естественные проекции.

Пусть $p : W \to H$ – структурный морфизм. Рассмотрим расслоенное произведение:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"] & \overline{W} \arrow[l, "\overline{p}"'] \arrow[d, "\overline{f}"] \\ H & W \arrow[l, "p"'] \end{tikzcd} \tag{40}$$

и пусть $ev : p^*\mathcal{F}^\vee \longrightarrow \mathcal{O}_W(1)$ – отображение вычисления. Тогда $ev \in H^0(\mathcal{H}om(p^*\mathcal{F}^\vee, \mathcal{O}_W(1))) = H^0(p^*\mathcal{F}^{\vee\vee} \otimes \mathcal{O}_W(1)) = H^0(p^*\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_W(1))$. Заметим, что $p^*\mathcal{E}xt^1_f(\mathcal{I}_{\Gamma,X}(0,0,0,1), \mathcal{O}_X) = \mathcal{E}xt^1_{\overline{f}}(\overline{p}^*\mathcal{I}_{\Gamma,X}(0,0,0,1), \overline{p}^*\mathcal{O}_X)$. Отсюда $p^*\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_W(1) = \mathcal{E}xt^1_{\overline{f}}(\overline{p}^*\mathcal{I}_{\Gamma,X}(0,0,0,1), \overline{p}^*\mathcal{O}_X) \otimes \mathcal{O}_W(1) = \mathcal{E}xt^1_{\overline{f}}(\overline{p}^*\mathcal{I}_{\Gamma,X}(0,0,0,1), \overline{p}^*\mathcal{O}_X \otimes \overline{f}\mathcal{O}_W(1))$. Спектральная последовательность глобальных и относительных $E_2^{p,q} = H^p(W, \mathcal{E}xt^q_{\overline{f}}(\overline{p}^*\mathcal{I}_{\Gamma,X}(0,0,0,1), \overline{p}^*\mathcal{O}_X \otimes \overline{f}\mathcal{O}_W(1))) \Rightarrow Ext^{p+q}_{\overline{W}}(\overline{p}^*\mathcal{I}_{\Gamma,X}(0,0,0,1), \overline{p}^*\mathcal{O}_X \otimes \overline{f}\mathcal{O}_W(1))$ дает:

$$\begin{gathered} H^1(\overline{f}_*\mathcal{H}om(\overline{p}^*\mathcal{I}_{\Gamma,X}(0,0,0,1), \overline{p}^*\mathcal{O}_X \otimes \overline{f}\mathcal{O}_W(1))) \to \\ \to Ext^1_{\overline{W}}(\overline{p}^*\mathcal{I}_{\Gamma,X}(0,0,0,1), \overline{p}^*\mathcal{O}_X \otimes \overline{f}\mathcal{O}_W(1)) \to \\ \to \mathcal{E}xt^1_{\overline{f}}(\overline{p}^*\mathcal{I}_{\Gamma,X}(0,0,0,1), \overline{p}^*\mathcal{O}_X \otimes \overline{f}\mathcal{O}_W(1)) \to \\ \to H^2(\overline{f}_*\mathcal{H}om(\overline{p}^*\mathcal{I}_{\Gamma,X}(0,0,0,1), \overline{p}^*\mathcal{O}_X \otimes \overline{f}\mathcal{O}_W(1))). \end{gathered} \tag{41}$$

Но $\overline{f}_*\mathcal{H}om(\overline{p}^*\mathcal{I}_{\Gamma,X}(0,0,0,1), \overline{p}^*\mathcal{O}_X \otimes \overline{f}\mathcal{O}_W(1)) = p^*f_*\mathcal{H}om(\overline{p}^*\mathcal{I}_{\Gamma,X}(0,0,0,1), \overline{p}^*\mathcal{O}_X) \otimes \mathcal{O}_W(1) = 0$, поскольку $p^*f_*\mathcal{H}om(\overline{p}^*\mathcal{I}_{\Gamma,X}(0,0,0,1), \overline{p}^*\mathcal{O}_X) = 0$. (Последнее равенство следует из того факта, что $f_*\mathcal{H}om(\mathcal{I}_{\Gamma,X}(0,0,0,1), \mathcal{O}_X) = f_*\mathcal{O}_X(0,0,0,-1)$.) По формуле Кюннета, $f_*\mathcal{O}_X(0,0,0,-1) = \mathcal{O}_H \otimes H^0(\mathcal{O}_Q(-1)) = 0$, соответственно, $H^1(\overline{f}_*\mathcal{H}om(\overline{p}^*\mathcal{I}_{\Gamma,X}(0,0,0,1), \overline{p}^*\mathcal{O}_X \otimes \overline{f}\mathcal{O}_W(1)) = H^2(\overline{f}_*\mathcal{H}om(\overline{p}^*\mathcal{I}_{\Gamma,X}(0,0,0,1), \overline{p}^*\mathcal{O}_X \otimes \overline{f}\mathcal{O}_W(1))) = 0$. В итоге последовательность (41) дает изоморфизм: $\mu : Ext^1_{\overline{W}}(\overline{p}^*\mathcal{I}_{\Gamma,X}(0,0,0,1), \overline{f}^*\mathcal{O}_W(1)) \to H^0(p^*\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_W(1))$. Элемент $\xi = \mu^{-1}(ev)$ задает искомое расширение (39). По построению, ограничение этого расширения на слой проекции $\overline{f}$ над точкой из W есть тройка:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_Q \longrightarrow \mathbb{E}\mid_y \longrightarrow \mathcal{I}_{l_1 \cup l_2, Q}(1) \longrightarrow 0. \tag{42}$$

Подкрутив эту тройку на $\mathcal{O}_Q(-1)$, мы получаем в центре $\mathbb{E}\mid_y(-1)$ стабильный пучок ранга 2 с $c_1 = -1, c_2 = 2, c_3 = 0$ на Q_3. Итак, W есть 7-мерное гладкое проективное рациональное многообразие.

Предложение. *Морфизм* $\varphi : W \longrightarrow M_Q(2;-1,2,0)$ *является замкнутым вложением.*

Прежде всего, $\overline{M}$ есть тонкое многообразие модулей, поскольку $\overline{M} \in M' = M_Q(2;-1,2,0)$, а M' является тонким многообразием модулей. Докажем последнее утверждение. Так как $c_1(\mathcal{E}) = -1$ для $[\mathcal{E}] \in M_{Q_3}(2;-1,2,0)$, то согласно статье (см. [5. С. 598]) универсальное семейство стабильных рефлексивных пучков на $M' \times Q_3$ существует, если $\delta(H) = 1$, где $\delta(H) =$ НОД$(a_0, a_1, ..., a_n)$ и $H = H_{\mathcal{E}}(m) = \Sigma_{i=0}^{n} a_i C_{m+i}^{m}$ – многочлен Гильберта пучка $\mathcal{E}$ ранга 2 на Q_3 с классами Черна $c_1 = -1, c_2 = 2, c_3 = 0$. Проверим, что $\delta(H) =$ НОД$(a_0, a_1, ..., a_n) = 1$. Имеем $H(m) = \Sigma_{i=0}^{n} a_i C_{m+i}^{m} = (a_0 + a_1 + a_2 + a_3) + \left(a_1 + \dfrac{3a_2}{2} + \dfrac{11a_3}{6}\right) m + \left(\dfrac{a_2}{2} + a_3\right) m^2 + \dfrac{a_3 m^3}{6}$. С другой стороны, используя известную формулу для $H_{\mathcal{E}}(m)$ (см. [3. С. 194]), получим: $H(m) = \chi(\mathcal{E}(m)) = (1 - c_2) = (\frac{7}{3} - c_2)m + 2m^2 + \frac{2}{3}m^3$. Отсюда $a_0 = -10, a_1 = 9, a_2 = -4, a_3 = 4$. Тем самым, НОД$(a_0, a_1, a_2, a_3) = 1$, то есть универсальное семейство стабильных рефлексивных пучков на $M' \times Q_3$ существует.

Тем самым, существует универсальный пучок $\mathbf{E}$ на $Q \times \overline{M}$. Рассмотрим проекцию $pr : Q \times \overline{M} \to \overline{M}$ и определим пучок $\mathcal{N} := pr_*(\mathbf{E} \otimes (\mathcal{O}_Q(1) \boxtimes \mathcal{O}_{\overline{M}}))$. Заметим, что размерность пространства сечений $H^0(\mathbf{E}\mid_y (1))$ постоянна и равна 2 для любой точки $y \in \overline{M}$, а $\overline{M}$ является целой схемой (см. [3. С. 217]). Отсюда следует, что отображение замены базы $\mathcal{N} \otimes k_y \to H^0(\mathbf{E}\mid_y (1)) = k^2$ является изоморфизмом (см [2. С. 368]), так что $\mathcal{N}$ – локально свободный пучок ранга 2 на $\overline{M}$. Рассмотрим проективизацию этого пучка $\pi : P(\mathcal{N}) \to \overline{M}$. Тогда слой $\pi^{-1}(y)$ равен $P(H^0(\mathbf{E}_y(1)))$, и отсюда следует, что $P(\mathcal{N}) := \{(y, < s >) \mid y \in \overline{M}, < s > \in P(\mathbf{E}_y(1))\}$. Очевидно, существует изоморфизм между $P(\mathcal{N})$ и W, который паре $(y, < s >)$ ставит в соответствие тройку : $\{0 \to \mathcal{O}_Q \xrightarrow{s} \mathcal{E}(1) \to \mathcal{I}_{l_1 \cup l_2}(1) \to 0\}$. Отсюда следует, что W является проективным расслоением над $\varphi(W)$ и в силу того, что $M_Q(2;-1,2,0)$ является тонким пространством модулей, проективное расслоение W является проективизацией векторного расслоения ранга 2.

Тем самым, слой морфизма φ над точкой $[\mathcal{E}] \in \varphi(W)$, где $\mathcal{E}$ – стабильный пучок ранга 2 с $c_1 = -1, c_2 = 2, c_3 = 0$ на Q_3, есть $P(H^0(\mathcal{E})) \simeq \mathbb{P}^1$ и $\varphi(W)$ есть 6-мерное гладкое проективное унирациональное многообразие. По построению, $\varphi(W)$ содержит $M_Q(-1,2)$ в качестве плотного открытого подмножества. Следовательно, $\varphi(W)$ является замыканием $M_Q(-1,2)$ в схеме модулей Гизекера-Маруямы.

Библиографический список

1. *Arrondo E., Sols I.* Classification of smooth congruence of low degree // J.Reine Angew. Math. 1989. V. 393 P. 199-219.
2. *Хартсхорн Р.* Алгебраическая геометрия. М.: Мир, 1981.
3. *Ottaviani G., Szurek M.* On Moduli of Stable 2-Bundles with Small Chern Classes on Q_3 // Annali di Matematica pura ed applicata (IV). 1994. V. CLXVII. P. 191-241.
4. *Lange H.* Universal Families of Extensions // Journal of Algebra 1983. V. 83. P. 101-112, 1983.
5. *Maruyama, Masaki.* Moduli of stable sheaves. II // J. Math. Kyoto Univ. 1978. V. 18. P. 557-614.
6. *Lonsted K., Kleiman S.* Basics on families of hyperelliptic curves // Comp. Math. 1979. V. 38. P. 83-111.

Глава 3

Теория и методика обучения математике в школе и вузе

Педагогика математики в высшей школе (на примере курса “Уравнения математической физики”)

Р.М. Асланов, А.В. Синчуков

На современном этапе развития общества, характеризуемом социокультурным и экономическим ростом, научно-техническим прогрессом и внедрением новых информационных и инновационных технологий, одной из ведущих задач является повышение интеллектуального потенциала общества. Решение данной задачи, прежде всего, в значительной степени опирается на развитие и усовершенствование системы образования. При этом приоритетным, как наиболее важная составляющая образования в целом, является математическое образование.

Говоря о развитии и усовершенствовании системы образования, источниками последних следует считать содержание классических разделов общей педагогики – дидактики (теории обучения) и теории воспитания, а также методики преподавания. При этом если долгое время педагогика развивалась как единая, монолитная, общая для всех дисциплин наука, то на сегодняшний день все большее признание и распространение получает ориентация педагогической науки на определенную учебную дисциплину стала, что придает ей богатство конкретного содержания и служит теоретической основой для методики преподавания.

Особенности математики как науки (универсальность методов, уровни абстракции) позволяют говорить о том, что термин “педагогика математики” не только правомерен, но и обозначает отрасль научного знания, опирающуюся на общую педагогику, теорию образования и методологию математики. Выделение педагогики математики в отдельную научную дисциплину вызвано необходимостью изучения и научной организации процесса преподавания математики: собственно педагогическая наука и методика преподавания математики не исчерпывают всех вопросов, касающихся постановки учебного и воспитательного процессов. И если методика преподавания математики вторична по отношению к некоторым общим, фундаментальным проблемам организации педагогического процесса, то общая педагогика не учитывает специфических для математического образования моментов, рассмотрение которых необходимо и для решения как методических, так и педагогических вопросов.

Как и собственно в педагогике, в педагогике математики выделяют два ключевых раздела – теорию воспитания и теорию образования (дидактику).

Дидактика математики рассматривает традиционные дидактические вопросы о принципах, методах, формах организации обучения, контроля, оценки и учета результатов учебно-воспитательного процесса и т.д. Кроме того, к дидактике относятся содержание образования, соотношение математики как науки и как учебного предмета, а также профессионально-прикладное преподавание этого предмета.

Теория воспитания как раздел педагогики математики, связана с изучением воспитания и развития средствами математики; подчеркнута ее направленность на исследование потенциала математического знания, воспитательных возможностей различных форм обучения и роли математического образования в общем процессе воспитания.

Таким образом, педагогика математики – интегративная отрасль научного знания, компонентами которой являются дидактика, теория воспитания и развития средствами математики, а также методика преподавания математики (последняя состоит из двух частей - общей и частной, рассматривающей проблемы преподавания отдельных разделов предмета).

Говоря о педагогике математики как об отдельной отрасли науки, следует выделить ее методологию, в которой определены объект и предмет исследования, общие методологические принципы, рассматриваются соотношение теоретической и прикладной математики, ее роль и специфические особенности в системе обучения.

Наиболее известны исследования по педагогике математики И.М. Смирновой [3], А.А. Столяра [4] и А. Фуше [6]. В этих работах рассматривается общеобразовательный курс математики, основы дидактики предмета, частные методики преподавания. В центре нашего внимания – курс математики высшей школы. В рамках данной статьи мы остановимся на некоторых фундаментальных положениях методологии педагогики математики, на основании которых осуществляется теоретическая разработка ее компонентов.

Методологической основой педагогики математики являются общефилософские методологические принципы, согласно которым при построении учебного процесса необходимо исходить из объективности и детерминированности педагогических явлений, а также обеспечивать целостный подход, изучать явление в его развитии, в его связях и взаимодействии с другими явлениями; рассматривать процесс развития как самодвижение и саморазвитие, обусловленное присущими ему внутренними противоречиями [1, 2]. Кроме того, педагогика математики исходит из общепедагогического принципа гуманизма, декларируя главной целью формирование личности, включающее развитие нравственных качеств, интеллекта, творческих способностей обучаемого, его профессиональной направленности, становление его мировоззрения [1].

Остановимся подробнее на собственных, специфических методологических принципах педагогики математики, выделенных в фундаментальных педагогических и методических исследованиях [2, 3, 5].

1. *Принцип универсальности математического образования* вытекает из универсальности математических методов исследования, широты приложений математики в различных областях человеческой деятельности.

2. *Принцип единства фундаментального и прикладного математического образования* опирается на содержание математического образования: в вузе математика изучается студентами разных специальностей, при этом проникновение в ее сущность, освоение различных фрагментов ее содержания, уровень математической строгости не может быть одинаковым; особенности в назначении математики для специалистов разных профилей означают фундаментальную и прикладную математическую подготовку специалистов в органическом единстве.

3. *Принцип единства теоретического и практического математического знания* вытекает из методологического принципа единства теоретического и прикладного знания.

4. *Принцип межпредметности математического образования* позволяет обнаружить существующие объективные взаимосвязи разных наук, порожденные единством и целостностью материального мира.

5. *Принцип единства математического и профессионального мышления.*

6. *Принцип профессионально-прикладной направленности математического образования* выступает в качестве основного, системообразующего при подготовке специалиста в вузе; он позволяет сориентироваться в методах и средствах преподавания математики, пересмотреть традиционные общие принципы дидактики.

Рассмотрим реализацию представленных принципов на примере курса "Уравнения математической физики" для будущих учителей информатики и математики.

Большинство математических моделей реальных процессов сводится к краевым задачам для уравнений в частных производных. В настоящее время с помощью таких уравнений моделируют процессы различной природы: физические, химические, биологические, экологические, экономические и др. Поэтому знание основных типов уравнений математической физики необходимо для качественного образования будущего учителя информатики и математики – на современном этапе развития естественно-научных дисциплин их развитие немыслимо без применения математических методов исследования, ключевую роль в которых, ввиду универсальности разрабатываемых моделей, играет математический аппарат уравнений математической физики.

В подготовке будущего учителя информатики и математики курс “Уравнения математической физики” наиболее полно реализует все перечисленные принципы: математический аппарат, служащий основой курса, демонстрирует студентам универсальность математических методов исследования в *единстве фундаментальной и прикладной математической подготовки*.

При изучении данного курса фундаментальность и математическая строгость изложения подкреплены содержательным прикладным материалом: построение курса строится не по принципу “от теории к практике”, а наоборот – рассмотрение конкретных практических задач (колебания струны, теплопроводность стержня и др.) приводят к необходимости математического аппарата, необходимого для их решения. Таким образом полностью реализованы *принципы универсальности и единства фундаментального и прикладного математического образования*, а также *принцип единства теории и практики*.

Содержание курса “Уравнения математической физики” обладает уникальными возможностями для реализации *принципа межпредметности* – уже в его названии заложена связь данного раздела математики с физикой, помимо этого аппарат уравнений математической физики позволяет моделировать явления в любых областях человеческой деятельности, создавая тем самым базу для изучения смежных дисциплин. Принципы единства математического и профессионального мышления и профессионально-прикладной направленности математического образования при подготовке будущего учителя информатики и математики в преподавании уравнений математической физики реализованы за счет формирования у студентов навыков математического моделирования и способов его применения в решении практических и профессиональных задач.

Библиографический список

1. *Сластенин В.А. и др.* Педагогика: учебное пособие для студ. высш. пед. учеб. заведений. М., 2002.
2. *Смирнов С.Д.* Педагогика и психология высшего образования: от

деятельности к личности: Учеб. пособие для студ. высш. пед. учеб. заведений. М., 2001.
3. *Смирнова И.М.* Педагогика геометрии. М., 2004.
4. *Столяр А.А.* Педагогика математики. Минск, 1986.
5. *Фокин Ю.Г.* Преподавание и воспитание в высшей школе. М., 2002.
6. *Фуше А.* Педагогика математики. М., 1969.

Этюд о вурфовых треугольниках

В.И. Михеев, Ю.А. Игнатьев

Будем называть вурфом W трех величин a, b и c функцию, задаваемую формулой:
$$W = 1 + \frac{a \cdot c}{b \cdot (a + b + c)}, \tag{1}$$
где переменные a, b, c принимают действительные неотрицательные значения. В начале 80-х годов прошлого века С.В. Петухов показал, что трехчленные биологические конструкции, такие как, например, плечо-предплечье-кисть и бедро-голень-стопа стандартного человека, подчиняются канону "золотого вурфа" (см. [1]). Это значит, что если взять длину плеча за a, длину предплечья за b и длину кисти за c, то W по формуле (1) довольно точно совпадает со значением $\frac{\Phi^2}{2} \approx 1,309$, где $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ – коэффициент пропорциональности "золотого сечения", хорошо известного еще в классических науках древности. Аналогичное верно для случая, когда a – длина бедра, b – длина голени, c – длина стопы.

Представляет практический интерес тогда изготовить треугольник с длинами сторон a, b и c, который позволил бы путем его наложения на фотографию или осмотром объекта через прозрачный материал треугольника определять, удовлетворяют ли эти величины формуле
$$W = \frac{\Phi^2}{2} \tag{2}$$
или нет. Будем называть треугольник *вурфовым*, если для его сторон выполняется равенство
$$W = C, \tag{3}$$
где C – некоторая константа.

Среди вурфовых треугольников особый интерес вызывают *прямоугольные* вурфовые треугольники. Ведь именно прямоугольные треугольники находят применение в школе и вузе на уроках геометрии.

1. Будем полагать, что в них a и c – длины катетов, а b – длина гипотенузы. Рассмотрим прямоугольный вурфовый треугольник, удовлетворяющий условию (2), и найдем исходные данные для его технического воспроизводства. Получаем тогда систему из двух уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} 1 + \frac{a\cdot c}{b\cdot(a+b+c)} = \frac{\Phi^2}{2}; \\ a^2 + c^2 = b^2. \end{cases} \tag{4}$$

Выразим длину гипотенузы b через длины сторон катетов a и c. Для этого вначале перепишем систему (4) в виде:

$$\begin{cases} a \cdot c = \left(\frac{\Phi^2}{2} - 1\right) \cdot a \cdot b + \left(\frac{\Phi^2}{2} - 1\right) \cdot b^2 + \left(\frac{\Phi^2}{2} - 1\right) \cdot b \cdot c; \\ \left(\frac{\Phi^2}{2} - 1\right) \cdot a^2 + \left(\frac{\Phi^2}{2} - 1\right) \cdot c^2 = \left(\frac{\Phi^2}{2} - 1\right) \cdot b^2. \end{cases} \tag{5}$$

Теперь вычтем из первого уравнения второе и, выделяя b, получим формулу:

$$b = \frac{a \cdot c - \left(\frac{\Phi^2}{2} - 1\right) \cdot \left(a^2 + c^2\right)}{\left(\frac{\Phi^2}{2} - 1\right) \cdot (a + c)}. \tag{6}$$

Подставим теперь (6) во второе уравнение системы (4), выражающее теорему Пифагора. Произведя элементарные преобразования, приходим к следующему красивому уравнению, выражающему связь между катетами a и c:

$$a^2 - \frac{2 \cdot a \cdot c}{\Phi^2 \cdot (\Phi^2 - 2)} + c^2 = 0. \tag{7}$$

Величину $\frac{1}{\Phi^2 \cdot \left(\Phi^2 - 2\right)}$ можно упростить, воспользовавшись формулой для золотого сечения $\Phi^2 = \Phi + 1$:

$$\frac{1}{\Phi^2 \cdot (\Phi^2 - 2)} = \frac{1}{\Phi}. \tag{8}$$

Тогда зависимость между a и c примет более простой вид:

$$a^2 - \frac{2 \cdot a \cdot c}{\Phi} + c^2 = 0. \tag{9}$$

Решая квадратное уравнение (9) относительно a или c, что все равно в силу его симметрии, получаем отрицательный результат: *дискриминант этого уравнения меньше нуля.* Таким образом, **нельзя выразить линейной зависимостью a через c, если b – гипотенуза прямоугольного вурфового треугольника**.

2. Рассмотрим второй возможный случай, т.е. будем считать гипотенузой прямоугольного вурфового треугольника величину c, в то время как a и b будут представлять собой длины катетов. Тогда вместо системы (4) будем иметь другую:

$$\begin{cases} 1 + \frac{a \cdot c}{b \cdot (a+b+c)} = \frac{\Phi^2}{2}; \\ a^2 + b^2 = c^2. \end{cases} \tag{10}$$

Из первого уравнения системы выразим c через a и b:

$$= \frac{\left(\frac{\Phi^2}{2} - 1\right) \cdot b \cdot (a+b)}{a - \left(\frac{\Phi^2}{2} - 1\right) \cdot b}. \tag{11}$$

Это выражение для с можно упростить, если воспользоваться свойством золотого сечения $\Phi^2 = \Phi + 1$:

$$c = \frac{(\Phi - 1) \cdot b \cdot (a+b)}{2 \cdot a - (\Phi - 1) \cdot b}. \tag{12}$$

Подставим формулу (12) во второе уравнение системы (10). После нескольких очевидных преобразований оно упростится и окажется уравнением третьей степени с действительными коэффициентами. Из него можно получить два других уравнения третьей степени:

$$\begin{gathered} a^3 + [(1 - \Phi) \cdot b] \cdot a^2 + \left(b^2\right) \cdot a + \left[2 \cdot \left(1 - \Phi^2\right) \cdot b^3\right] = 0, \\ b^3 + \left[\frac{a}{2} \cdot (1 - \Phi)\right] \cdot b^2 + \left[\frac{a^2}{2} \cdot (2 - \Phi)\right] \cdot b + \left[\frac{a^3}{2} \cdot (1 - \Phi)\right] = 0. \end{gathered} \tag{13}$$

Решая первое уравнение, можно получить a как линейную функцию b без свободного члена; решая второе уравнение относительно b, можно получить его как линейную функцию a, также без свободного члена. При этом очевидно, что коэффициенты пропорциональности будут удовлетворять соотношению

$$k_1 = \frac{1}{k_2}, \tag{14}$$

где $a = k_1 \cdot b$ и $b = k_2 \cdot a$.

Подставим $a = k_1 \cdot b$ в первое уравнение в (13), тогда получим уравнение для вычисления k_1:

$$k_1^3 + (1 - \Phi) \cdot k_1^2 + k_1 + 2 \cdot \left(1 - \Phi^2\right) = 0. \tag{15}$$

По формулам Кардано, учитывая математические свойства Ф, единственный действительный корень кубичного уравнения (15) задается формулой

$$k_1 = \frac{1}{3}\left\{\Phi - 1 + \frac{1}{\sqrt[2]{2}}\left[\sqrt[3]{49\Phi + 3 + \sqrt{2727\Phi + 2430}} + \sqrt[3]{49\Phi + 3 - \sqrt{2727\Phi + 2430}}\right]\right\}.$$

Приближенное вычисление k_1 по этой формуле дает следующий результат:

$$k_1 \approx 1,457. \tag{16}$$

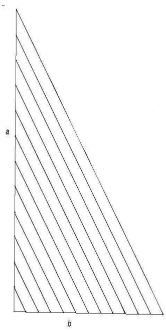
Это значит, с учетом формулы (14), что $k_2 \approx 0,686$.

3. Для прямоугольного вурфового треугольника можно взять, например, катет b изменяющимся по натуральным числам от 1 до 12 и построить таблицу значений $a \approx 1,457 \cdot b$. При этом следует учесть, что при расчетах в сантиметрах нет необходимости брать более одного знака после запятой. Вычисления приводят к следующему результату:

Таблица 1

a	1,5	2,9	4,4	5,8	7,3	8,7	10,2	11,7	13,1	14,6	16,0	17,5
b	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Нанося эти данные на стороны прямого угла от его вершины и соединяя соответствующие точки, получим прямоугольный вурфовый треугольник. Его общий вид представлен на фиг. 1.



Фиг. 1. Прямоугольный вурфовый треугольник, в котором $b \in \{1, 2, 3, ..., 12\}$ и a берется из таблицы 1

4. Как представляется сегодня, вурфовые треугольники различных размеров могут составить важную часть теоретической и практической подготовки студентов, обучающихся на бакалавра и магистра по направлению “Архитектура”. Теоретическое значение этих треугольников состоит прежде всего в том, что в любом из них заключен архитектурный канон типа (3). Их практическое значение состоит в возможности измерять вурфовые пропорции реальных объектов, моделей и чертежей, чтобы установить их соответствие заложенному в каждый треугольник архитектурному канону. Отпадает необходимость в сложных вычислениях. Кроме того, никому из студентов-архитекторов не удастся спрятать нарушение принятых норм за фразой: “Мое творение безошибочно, так как его мне построил компьютер”.

В настоящее время происходит пересмотр основного учебного пособия [3], по которому готовят студентов кафедры архитектуры и градостроительства по математике. Предполагается включить в него раздел о вурфовых треугольниках. Он позволит не только вспомнить некоторые основные понятия геометрии, но и связать вместе учебные темы по анализу полиномов, комплексным числам, решению систем алгебраических уравнений, золотому сечению и арифметике. Кроме того, получение и использование вурфовых треугольников может выступать в качестве курсовой работы для студентов первого года обучения направления “Архитектура”. Ясность и простота темы “Вурфовые треугольники” делает ее привлекательной еще и в плане проведения педагогических тестов и измерений (см. [2]), в том числе с использованием компьютера.

Библиографический список

1. *Петухов С.В.* Биомеханика, бионика и симметрия. М.: Наука, 1981.
2. *Михеев В.И.* Моделирование и методы теории измерений в педагогике. - Изд. 3. М.: URSS, 2006.
3. *Игнатьев Ю.А.* Учебное пособие по высшей математике для студентов специальности “Архитектура”. Ч. 1. М.: Изд-во РУДН, 2005.

Математическое образование бакалавров инженерно-технического профиля на современном этапе

С.А. Розанова

Настоящее время характеризуется как период радикального реформирования системы российского образования. Вследствие этого высшее образование в России в конце XX века претерпело существенные изменения. По данным Рособразования, число студентов в России выросло с

2966100 в 1985 году (очная форма обучения – 1569300) до 7064580 в 2005 году (очная форма – 3508020). По числу студентов на душу населения Россия догнала ведущие страны мира. При этом число бюджетных мест в вузах не только не уменьшилось, а даже увеличилось. Разумеется, расширение образовательных возможностей привело к снижению конкурсов, в том числе и в ведущие технические вузы. Понимание этого процесса необходимо для создания диверсифицированной системы образования будущих инженеров, создания возможности наиболее подготовленным студентам получать "продвинутое" образование, не понижая уровень фундаментального образования инженеров в целом.

Для реализации этой цели Научно-методический совет по математике, образованный в 1999 г. по Приказу Министра образования РФ, в котором МИРЭА обозначен **как базовый вуз** НМС, разработал программу по математике для студентов технических направлений бакалавриата [1]. Здесь необходимо отметить, что наряду с МИРЭА существенную постоянную поддержку деятельности НМС оказывают МГУ и РУДН.

Известно, что математика является не только мощным средством решения прикладных задач и универсальным языком науки, но также и элементом общей культуры. Поэтому математическое образование следует рассматривать как важнейшую составляющую фундаментальной подготовки будущего инженера [2].

Целью математического образования бакалавра технических наук является:

1) воспитание достаточно высокой математической культуры,

2) привитие навыков современных видов математического мышления,

3) привитие навыков использования математических методов и основ математического моделирования в практической деятельности.

Воспитание у студентов математической культуры включает в себя ясное понимание необходимости математической составляющей в общей подготовке бакалавра, выработку представления о роли и месте математики в современной цивилизации и мировой культуре, умение логически мыслить, оперировать с абстрактными объектами и быть корректным в употреблении математических понятий и символов для выражения количественных и качественных отношений.

Математическое образование бакалавра, с одной стороны, должно быть широким, общим, то есть мало специализированным, фундаментальным, а с другой - иметь четко выраженную профессиональную направленность. Это естественное противоречие НМС внимательно изучает и обсуждает на своих заседаниях, на семинарах заведующих кафедрами высшей математики, на научно-методических конференциях. НМС контролирует качество издаваемой различными отечественными издательствами учебной математической литературы, осуществляет через свои региональные отделения мониторинг уровня преподавания математики в вузах, в частности технических, с целью обеспечения принципа фундаментальности, предлагает подходы к решению указанного противоречия, основанные на информатизации учебного процесса, актуализации внутрипредметных и синхронизации межпредметных связей, оптимизации учебного процесса, совершенствовании ГОСов и учебных программ.

Новый тип экономики, усиление когнитивных и коммуникативных начал в современном обществе и производстве не обеспечивается традиционным понятием профессиональной квалификации. Более адекватным в настоящее время становится компетентностный подход при разработке образовательных стандартов нового (третьего) поколения. При этом, как следует из многих зарубежных и российских источников, следует различать понятия “компетентный, компетенция, компетентность”. Компетентный (прилагательное) – человек, обладающий высококачественной деятельностью; компетентность (существительное), например, инженера, ученого, менеджера; компетенция (существительное), имеющее двойное значение: задачи, выполняемые некоторым специалистом (разработка архитектурного или инженерного проекта) и его персональные качества (самостоятельность, лидерство и др.)

Следует отметить, что имеют место широкий и узкий взгляды на понятие “компетенции”: узкий взгляд означает использование профессиональных знаний, умений и навыков для выполнения типовых задач, широкий – предполагает большие требования, отвечающие перспективам профессиональной практики и будущему рынку труда.

Министерство образования и науки Российской Федерации утвердило в начале 2007 года макет Федерального государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования третьего поколения (ФГОС), который имеет следующие основные особенности по сравнению с предыдущим:

1) переход к двухуровнему образованию (бакалавр, магистр), и только для некоторых направлений сохраняются специалисты (например, для направления “Здравоохранение” - четыре специальности, выпускающие специалистов: лечебное дело, педиатрия, медико-профилактическое дело, стоматология);

2) сокращение направлений со 186 до 148, распределенных по 29 группам;

3) компетентностная направленность;

4) введение системы зачетных единиц, в концептуальном и количественных отношениях совместимой с Европейской системой переноса и накопления кредитных единиц;

5) использование модульных технологий в качестве ведущего организационного начала общеобразовательного процесса.

В настоящее время НМС и УМО ведут разработку перечня компетенций, которыми должны обладать бакалавры и магистры по разным направлениям подготовки. При этом выделяются универсальные (общенаучные (ОНК), инструментальные (ИК), социально-личностные и общекультурные (СЛК)) компетенции и общепрофессиональные (научно-исследовательская, производственно-технологическая, организационно-управленческая, проектная деятельность и др.)

При разработке предложений к перечню математических компетенций бакалавра-инженера НМС по математике руководствуется указанными выше целями (воспитание достаточно высокой математической культуры, привитие навыков современного математического мышления, использования математических методов и основ математического моделирования в практической деятельности).

К универсальным математическим компетенциям такого бакалавра можно отнести способность использовать в познавательной и профессиональной деятельности базовые математические знания; способность составлять математические модели типовых профессиональных задач; находить наиболее целесообразные способы их решения и интерпретировать полученный математический результат с точки зрения профессионала; иметь развитое математическое мышление.

Инструментальные математические компетенции: способность применять аналитические и численные методы решения типовых профессиональных задач, умение создавать базы данных и обрабатывать их математическими методами с использованием компьютерных технологий.

В качестве социально-личностных и общекультурных компетенций можно привести сформированность математической культуры как важнейшей составляющей профессиональной и общечеловеческой культуры.

Библиографический список

1. *Кудрявцев Л.Д., Лифанов И.К., Ягола А.Г., Розанова С.А. (ред.)* Примерная программа дисциплины “Математика”. Для направления 55000 – технические науки. М.: Изд-во психолого-социального института, 2000. С. 1-18.
2. *Розанова С.А.* Математическая культура студентов технических университетов. М.: Физматлит, 2003.

Обновление содержания обучения математике как необходимый элемент фундаментализации образования

В.А. Тестов

В условиях происходящей модернизации системы образования все чаще звучат призывы обеспечить приоритет фундаментальности образования. С фундаментализацией образования многими исследователями в нашей стране и за рубежом напрямую связывается уровень образованности и культуры общества. Однако в педагогической науке нет единого понимания понятия фундаментальности образования. Большое разнообразие мнений в трактовке этого понятия вызвано его многоаспектностью.

Прежде всего заметим, что фундаментальность образования является характеристикой содержания образования, и поэтому во многом понимание фундаментальности зависит от понимания содержания образования. Есть три концепции содержания образования, имеющие своих сторонников.

Первая трактует содержание образования как педагогически адаптированные основы наук, изучаемые в школе (и в вузе). В таком понимании образование само по себе является фундаментальным. Однако при этом остается в стороне ряд важных качеств личности, например, способность к самостоятельному творчеству, формирование которых должно быть непременной характеристикой фундаментального образования.

Другое определение содержания образования представляет его как совокупность знаний, умений и навыков, которые должны быть усвоены учащимися. Характер этих знаний и умений не раскрывается, что делает это определение удобным для людей с разными взглядами. Одни из них фундаментальность образования понимают как более углубленную подготовку по заданному направлению, изучение сложного круга вопросов данного направления науки с полным обоснованием, необходимыми ссылками, без логических пробелов – “образование вглубь”. В этом понимании фундаментальности российское образование, как вузовское, так и школьное, уже давно продвинулось на передовые рубежи.

Другие под фундаментальным образованием понимают разностороннее гуманитарное и естественно-научное образование на основе овладения фундаментальными знаниями как данного направления науки, так и общеобразовательных дисциплин, без которых немыслим интеллигентный человек, – “образование вширь”. Такое понимание фундаментальности является относительно новым, особенно для российского высшего образования, и поэтому педагогической науке пришлось решать ряд достаточно сложных проблем, в частности, какие дисциплины могут быть отнесены к фундаментальным.

Третья концепция рассматривает содержание образования как педагогически адаптированный социальный опыт человечества, изоморфный человеческой культуре во всей ее структурной полноте. В соответствии с таким пониманием содержание образования должно включать помимо “готовых” знаний и опыта осуществления деятельности по привычному стандарту, по образцу, также и опыт творческой деятельности, и опыт эмоционально-ценностных отношений.

Близкие позиции к этой концепции неоднократно высказывал В.А. Садовничий: главная цель фундаментального научного образования – распространение научного знания как неотъемлемой части мировой культуры. По его мнению, фундаментальность высшего образования – это соединение научного знания и процесса образования, дающее понимание образованным человеком того факта, что все мы живем по законам природы и общества, которые никому не дано игнорировать. Фундаментальность образования – одна из важнейших национальных традиций российского образования, которая сейчас оказалась под угрозой [4].

В традиционном понимании фундаментальность обучения противопоставлялась профессиональной (практической) направленности обучения. Такое расчленение на две части – дихотомия – является доминирующим не только для традиционной педагогики, но и для всей классической науки (субъект-объект, необходимость-случайность, материализм-идеализм, знаниево- и личностно-ориентированная дидактика). По этой же схеме произошло и деление наук на естественные и гуманитарные, на фундаментальные и прикладные. Но бинарная схема является не только недостаточной, но и опасной, поскольку дихотомия диктует схему “либо–либо”, кто не с нами, тот против нас, третьего не дано.

В постнеклассическом (синергетическом) мировоззрении в последнее время все шире используется тринитарная методология, хотя ростки этого мышления зародились значительно раньше. Триады, характеризующиеся известной формулой “тезис-антитезис-синтез”, широко использовались в гегелевской диалектике. П.А. Флоренский писал о триединстве ума, чувства и воли человека, он рассматривает трихотомию как начало системы и приходит к мысли об онтологичности “триадической структуры”.

В последнее время Р.Г. Баранцевым рассмотрены системные (целостные) триады, единство которых создается тремя потенциально равноправными элементами одного уровня, каждый из которых может служить мерой совмещения двух других. В образовательном пространстве он различает три компоненты: информационную, воспитательную и развивающую, и утверждает, что системная триада образования, выполняя синтезирующую роль, должна включать в себя и передачу знаний (рацио), и воспитание стиля (эмоцио), и развитие умения (интуицио) [1].

В соответствии с тринитарной методологией в содержании образования можно рассматривать три равноправные компоненты: фундаментальность (передача знаний), гуманистическую ориентацию (воспитание стиля) и практическую (прикладную, профессиональную) направленность (развитие умения). Целостность содержания достигается лишь при динамическом балансе всех компонент этой триады.

Принцип гуманистической ориентации предполагает учет индивидуальных особенностей личности, направленность образовательного процесса на возможно полное развитие тех способностей личности, которые нужны ей и обществу, на приобщение к активному участию в жизни, на соединение бытия индивидуального человека с культурой. Таким образом, этот принцип включает в себя и принцип развивающего и воспитывающего обучения.

О практической направленности образования написано достаточно много. Лучшие педагоги прошлого постоянно подчеркивали недостаточность и педагогическую ошибочность чисто абстрактного изложения предмета и настаивали на необходимости проводить обучение любому предмету в тесной связи с потребностями практики, науки и техники. Достаточно вспомнить выдвигавшиеся в нашей школе принципы политехнизации обучения, связи обучения с жизнью, связи теории и практики, прикладной направленности обучения. В вузах практическая направленность приобретает форму профессионализма и характеризуется, в частности, сформированностью у выпускника учебного заведения профессионального мышления и наличия комплекса актуальных знаний, умений и навыков, позволяющих ему сразу по окончании учебного заведения включиться в практическую деятельность по определенной специальности.

В истории образования имелись попытки нарушения баланса между этими тремя компонентами, в частности попытки положить в основу обучения практику (или интересы личности). Однако все они заканчивались неудачей, ибо становилось очевидным разрушение в этом случае фундаментальности обучения. С другой стороны, в истории российского образования имелись периоды, когда в погоне за фундаментальностью ущемлялись две другие компоненты, когда школа и вузы страдали чрезмерным “академизмом”.

С точки зрения системного подхода фундаментальность образования как система характеризуется целостностью, взаимосвязанностью и взаимодействием элементов, а также наличием системообразующих стержней. Значимость фундаментального образования – прежде всего в его целостности. Принцип целостности содержания обучения является одним из основополагающих принципов формирования содержания обучения, как в школе, так и в вузе. В настоящее время при изучении различных дисциплин конкретный материал во многих случаях не складывается в систему знаний; учащийся оказывается "погребен" под массой обрушивающейся на него информации, будучи не в состоянии самостоятельно ее структурировать и осмыслить. Представление об изучаемых дисциплинах как о единой науке со своим предметом и методом у него зачастую отсутствует.

Особую актуальность приобретает целостность знания в вузовском преподавании. Вуз должен дать студентам представление как о конкретной науке, так и о всей науке в целом, чему в значительной степени препятствуют "стены" между отдельными вузовскими предметами. При формировании целостной научной картины мира необходимо учитывать ограниченность учебного времени и психологические трудности восприятия учащимися с разными склонностями и способностями новых, порою абстрактных понятий и образов. Поэтому и возникает такая педагогическая проблема, как преподавать математику будущим гуманитариям.

В фундаментальном образовании особенно велика роль математики. Однако отбор содержания обучения математике, выделение набора основных математических законов и понятий, служащего основой для изучения смежных дисциплин, представляет собой сложную задачу. Этот набор может меняться, поскольку развитие науки изменяет приоритеты между отдельными ее достижениями. В происходящей ныне модернизации математического образования не уделяется, к сожалению, должного внимания обновлению содержания обучения математике, связанному с развитием математики как науки.

Говоря о соответствии между математикой как наукой и как учебным предметом, необходимо отметить, что если развитие науки идет преимущественно равномерно, то изменение содержания учебного предмета происходит скачками. Время от времени образовывается существенный разрыв между математикой - наукой и математикой - учебным предметом, который необходимо сокращать. Наиболее явственно такой разрыв наступил к середине 20-го столетия, что и стало основной причиной реформы математического образования, проводившейся во всех странах и которая в нашей стране получила название колмогоровской. Хотя в России вопрос о реформе математического образования, о повышении его научного уровня, о необходимости включения в школьную программу идей аналитической геометрии и анализа настойчиво ставился на первом и втором Всероссийских съездах преподавателей математики (1912 и 1915 гг.). Если говорить в самых общих чертах, то основных идей реформы, которые внедрял в математическое образование А.Н. Колмогоров, было две: построение математики на теоретико-множественной основе и обеспечение единства в изучении различных разделов математики как единой науки через изучение основных математических структур.

Однако при проведении реформы вскрылись и серьезные недостатки, навеянные влиянием модного в то время многотомного трактата Н.Бурбаки "Элементы математики". Это повышенная степень абстракции, проявлявшаяся в том, что зачастую математические структуры преподносились школьникам сразу в абстрактном виде без учета уровней их мышления, чрезмерный объем и неоправданная сложность изложения программного материала, отсутствие опоры при введении ряда понятий на наглядность и интуицию и т.д. В погоне за логической стройностью математика удалилась от одного из основных своих источников – физики, от ее наглядных представлений. В частности, если на уроках физики говорилось, что вектор – это направленный отрезок, то на уроках математики утверждалось, что вектор – это параллельный перенос.

Повысилась ли в результате этой реформы фундаментальность образования? С точки зрения ряда математиков – да, но с точки зрения науки в целом – скорее нет, поскольку оказались нарушенными межпредметные связи, был нарушен принцип целостности. Все это и послужило поводом для контрреформации, к возвращению преподавания математики к ее физическим истокам, к наглядности. Однако в ходе контрреформации ряд несомненных достижений реформы оказался утерянным.

В настоящее время также наметился разрыв между математикой – наукой и математикой - учебным предметом. Математические методы за последние полстолетия стали более общими и разнообразными, стали надежнее отображать существо дела. Математика, как отмечает Н.Х. Розов, все увереннее превращается в мощный инструментарий анализа и прогнозирования природных явлений, технических процессов, общественных ситуаций. Сочетание с гигантскими возможностями компьютеров породило принципиально новое направление научного познания – математическое моделирование и математический эксперимент [3].

Повысилось прикладное значение математики. Ее успешное использование в естественнонаучных и гуманитарных исследованиях основано на том, что современный компьютер выступает не столько как вычислительное средство, а как весьма совершенный инструмент для моделирования самых разнообразных явлений и процессов, допускающих описание на языке структур дискретной математики. Ввиду этой фундаментальной роли изучение дискретной математики или изучение отдельных ее элементов предусмотрено в новых стандартах высшего образования. Однако изучение дискретной математики должно стать обязательным и при обучении математике в школе. Как показывают проведенные методические исследования, можно составить школьный курс дискретной математики, притом посильный для учащихся, в котором будут отражены основные математические понятия и который даст учащимся общее развитие.

Другим новым важным разделом математики, требующем своего внедрения как в вузовскую, так и школьную программу по математике, является фрактальная геометрия. Фрактал – это удивительное понятие математики, оказавшееся средством адекватного отражения природных явлений. Открытие фракталов было открытием новой эстетики искусства, программирования и математики, а также революцией в человеческом восприятии мира. Только сейчас, благодаря фрактальной геометрии, человечество научилось замечать и ценить непосредственную природную красоту, такую необычную и такую простую в своем проявлении.

Познакомить учащихся с фракталами стоит еще и для того, чтобы помочь проникнуть в новый “нелинейный мир”, постичь красоту хаоса, продемонстрировать им непредсказуемые особенности диалектики науки. А понимание процесса научного познания мира – одна из важных характеристик образованного и культурного человека.

По мнению Н.Х. Розова, сегодня в разряд общеобразовательных, помимо фрактала, уверенно можно отнести такие понятия, как бифуркация, хаос, “теория катастроф”... С ними работают и физики, и социологи, и биологи, и философы. И общеобразовательная школа неизбежно обязана будет знакомить молодежь с этими понятиями, хотя бы в описательно-наглядном плане. Ознакомление с этой и другими математическими темами, составляющими современное представление о “нелинейном мире”, не только обогатит сам курс математики, сделает его современным, но и продемонстрирует ее роль как универсального языка исследований природы и общества, поможет формированию научных мировоззренческих представлений у молодежи [3].

В современной науке произошел переход к постнеклассической (синергетической) картине мира, характеризующейся отказом от детерминизма и абсолютизации, признанием идей самоорганизации, конструктивной роли хаоса. Наука осознала свою немалую долю ответственности за остроту переживаемого кризиса, оказавшись не в состоянии ни предсказать, ни разрешить назревшие проблемы. Классическая наука, претендуя на однозначную определенность, безусловную объективность, предельную полноту описания, отрывалась от жизни с ее гибкостью, открытостью, свободой воли. В своем стремлении к идеалу полноты и точности естественные науки создавали мощный аппарат моделирования завершенных теорий, а гуманитарные науки, следуя за ними, строили искусственные классификации, искусственные языки, искусственные интеллекты и прочие безжизненные конструкции. Лишь по мере разочарований стало приходить понимание, что для изучения жизнеспособных, органических, развивающихся объектов нужна иная методология, новая парадигма науки.

От этих процессов, происходящих в современной науке, не может изолироваться и такая традиционно жестко детерминированная наука, как математика, где признаки становления новой парадигмы уже различимы. Строятся новые математические теории, оперирующие с неточно заданными, неопределенными, нечеткими объектами. На практике такие неопределенные объекты и понятия встречаются повсюду: высокий, низкий, красивый, синий, имеющий длину 1 м, имеющий вес 60 кг и т.д. – все эти понятия при внимательном рассмотрении являются размытыми. Координаты, скорость, сила, масса и другие физические характеристики не могут быть точно измерены. Поэтому строятся и развиваются такие новые теории, как теории нечетких и мягких множеств, интервальный анализ, мягкое дифференциальное и интегральное исчисление, теория мягкой вероятности, мягкая теория игр и т.п.

Кроме создания таких разнообразных мягких математических моделей, к новой парадигме в математике можно отнести разработку фрактальной геометрии и многозначной логики. На очереди создание мягкой геометрии, в которой точка имеет некоторую протяженность, прямая – ширину, а плоскость – толщину. О необходимости разработки такой геометрии, приближенной к реальным объектам, писал еще П.А. Флоренский. Все эти новые теории должны со временем найти отражение как в вузовской, так и в школьной программе по математике.

Современное представление о новых разделах математики, о “нелинейном мире” будет иметь исключительно важное методологическое значение для формирования мировоззренческих представлений, не только обогатит сам курс математики и сделает его современным, но и повысит его роль в фундаментализации образования.

Библиографический список

1. *Баранцев Р.Г.* Тринитарная методология в синергетике // Перспективы синергетики в XXI веке: Сб. материалов Международной на-

учной конференции: В 2-х т. Белгород: БГТУ им. В.Г. Шухова, 2003. Т. 1. С. 8-13.
2. *Молодцов Д.А.* Теория мягких множеств. М.: Едиториал УРСС, 2004. 360 с.
3. *Розов Н.Х.* Курс математики общеобразовательной школы: сегодня и послезавтра // Задачи в обучении математике: Материалы Всероссийской научно-практической конференции. Вологда: ВГПУ, "Русь", 2007. С. 6-12.
4. *Садовничий В.А.* Традиции и современность // Высшее образование в России. 2003. № 1. С. 11-18.

Об учебных ситуациях и задачах математико-мировоззренческой направленности

А.Л. Жохов

Известный российский математик В.И. Арнольд видит основную цель математического образования, в том числе и в школе, в "воспитании умения математически исследовать явления реального мира", в частности с помощью их "мягкого" моделирования [1. С. 31]. Как показано в работах [2-4], отмеченное умение относится к типу мировоззренческих, и далеко не единственное из тех, что при определенной направленности обучения математике поддаются воспитанию. Важнейшим педагогическим средством в этом случае являются **учебные ситуации и задачи математико-мировоззренческой** направленности, познакомить с которыми – цель сообщения.

Чтобы обучающиеся могли быть воспитаны как исследователи объектов и явлений окружающего мира с помощью математики, в качестве главенствующей цели математического образования на современном этапе имеет смысл, на наш взгляд, явно принять ***воспитание у подрастающего поколения основ математического мировоззрения***, рассматриваемого как стержень математической культуры человека. Эта цель может быть достигнута в русле соответствующим образом организованного *мировоззренчески направленного обучения математике* (сокращенно – МНОМ). В частности, указанное В.И. Арнольдом умение и приобретенные вместе с ним личностные качества становятся механизмами мировоззренческой ориентировки человека как в системе отношений "я – мир", так и в его познавательно-преобразующей деятельности.

Дадим далее краткую характеристику основных положений теории и практики МНОМ в школе или вузе. Но прежде заметим, что при некотором расхождении в используемых понятиях данное направление исследований и практики обучения во многих чертах соотносится, а нередко имеет и непустое пересечение с результатами других направлений ([5-9] и др.).

1. Исследования отечественных и зарубежных ученых убеждают, что на протяжении исторического развития в любой грани культуры формируется ее устойчивое ядро. Оно может быть описано как система **трех основных компонентов** (подсистем): (I) **позиций и установок** – *эмоционально-ценностный компонент* (или блок, сфера) мировоззрения; (II) **средств и способов** познавательно-преобразующей **деятельности** – *деятельностно-волевой* компонент мировоззрения или *опыт разрешения мировоззренческих ситуаций*; (III) **образов, представлений и знаний** – *образно-знаниевый, рефлексивно-оценочный* блок мировоззрения или *опыт понимающей мыследеятельности.*

2. В роли упомянутого системообразующего ядра любой грани культуры выступает, фактически, ее **мировоззренческий фундамент и потенциал**, а для человека он же играет роль мировоззренческой опоры узкоспециальных знаний и способов деятельности и, собственно говоря, определяет его как **культурную личность**. На этой основе у конкретного человека "вырастает" его "частное" мировоззрение, соотносимое с рассматриваемой гранью культуры (В.С. Библер, А.А. Касьян и др.): математическое, филологическое и т.п. Именно в этом случае предметные знания, соответствующие определенной грани культуры и поддерживающие ее, становятся личностным приобретением человека и средствами его познавательно-преобразующей деятельности. "Выращивание" у конкретного ученика мировоззренческого ядра его математической культуры как раз и может служить тем идеалом, к достижению которого желательно стремиться заинтересованному в результатах своей работы современному учителю математики или преподавателю вуза.

3. **Математико-мировоззренческие ориентиры и качества образовательной области "математика"** – это типы познавательных позиций, установок и отношений; средства, способы и "программы" ориентировочной мировоззренческой деятельности человека; представления и знания, исторически сформировавшиеся в математике (как грани культуры), оказавшиеся устойчивыми при исторических трансформациях и внесшие и продолжающие вносить положительный вклад в развитие культуры (в целом). При определенных условиях отдельные группы таких ориентиров и качеств могут быть сформированы к концу некоторого этапа обучения, и тогда они составят базу мировоззренческого потенциала математической культуры учащегося, то есть стать математико-мировоззренческими ориентирами и качествами его личности, определять его отношение к миру, к математике и ее познанию, влиять на стиль его познавательной деятельности, на его зна-

ния и обобщенное видение мира (в его частях или в целом). Важными элементами такого потенциала являются уже упомянутые математико-мировоззренческие умения.

4. Существенным отличием МНОМ от традиционного обучения математике является иная расстановка акцентов: первоочередное внимание уделяется воспитанию, "выращиванию" мировоззренческих опор предметных знаний и умений учащихся – их математико-мировоззренческих ориентиров и личностных качеств. Стандарт математического образования, как он пока задается, сводит обучение математике к усвоению учащимися математических фактов, часто разрозненных узко-предметных знаний, умений и навыков. В рамках МНОМ эта цель становится средством и следствием реализации более широкой и объемлющей целевой установки: воспитания математико-мировоззренческих ориентиров и качеств личности как носителя и, в предельном случае, созидателя математической культуры, определяемой своим предметом.

5. По нашим представлениям, **совокупный предмет математики** как науки и специфической грани культуры составляют **системные средства познания и идеального преобразования окружающего мира, системы таких средств, способы оперирования ими и результаты такой деятельности, отнесенные к различным видам человеческой практики** [3. С. 322]. Тогда в развитии способности человека овладевать этим предметом, хотя бы в некоторых его взаимосвязанных фрагментах, как средством разумного познания и культуросообразного преобразования действительности видится цель дальнейшего совершенствования математического образования в направлении становления и развития математического мировоззрения учащихся.

6. Обозначенная система обучения математике может быть осуществлена в своеобразной *логике*, с использованием соответствующих *средств и действий*, определяющих технологию достижения цели МНОМ. Основания такой логики определяются: 1) факторами развития математики как грани культуры; 2) обобщенной моделью и онтологией акта математического познания: ***"выбор – осмысление – переживание – акт воли и деятельность воспроизводства знаний – ответственность – перенос"***; 3) психолого-педагогическими и математическими средствами, переосмысленными в рамках цели. В числе таких средств важнейшую роль играют а) учебные мировоззренческие ситуации и задачи, диалог культур и др. [2, 3]; б) триада идеальных средств математического познания; в) обобщенная модель математического познания [4].

Дадим далее общую характеристику и представим некоторые типы и виды учебных ситуаций и задач математико-мировоззренческой направленности.

Учебная ситуация (УС) – это *определенное сочетание условий и средств*, которые могут сложиться стихийно или специально быть созданы учителем для включения учащихся в учебно-воспитательный процесс с целью достижения намеченных образовательных результатов. В качестве методического средства УС создается, как правило, при взаимодействии учителя ($У_{л}$), ученика ($У_{к}$) и связывающего их некоторого произведения культуры (ПК, в общем случае – учебного текста). ПК содержит (или должно содержать) в себе "неустойчивое противостояние" и выступает как материализованная основа создания соответствующей учебной задачи (УЗ). Так что структуру УС можно представить в виде: $УС=\langle У_{л};ПК;У_{к} \rangle \cong \langle У_{л};УЗ;У_{к}\rangle$. Под учебной задачей понимается единство двух компонентов: некоторого массива содержательных (предметных) данных и некоторой совокупности *заданий для учащихся*, согласованных с ПК и несущих в себе какие-либо функции – воспитательные, развивающие или учебные.

Следующие требования к учебным ситуациям и задачам являются основными и определяют их как *математико-мировоззренческие*:

– Их основное назначение – способствовать становлению и формированию *позиции учащегося* по отношению к чему-либо или кому-либо, рассматриваемой как целостный элемент его математического мировоззрения [3. С. 321].

– Целостность, задаваемая структурой мировоззренческой деятельности (от возникновения потребности ученика в разрешения ситуации, через выбор или создание необходимых средств, через постановку и решение промежуточных задач и т.д. до предъявления результата, его оценки и рефлексии). Отсюда направленность действий: от ситуации – к задачам, что послужило основанием принятого названия данного методического средства: *ситуация-задача.*

– Направленность на гармонизацию использования триады познавательных средств (умственный образ – коды материализации – понятие и система математических понятий и деятельностей [4]) и работы обоих полушарий мозга [1].

– Нацеленность на использование различных математических моделей при исследовании реальных (искусственно-естественных) ситуаций в их взаимосвязях и сопоставлении (нежесткая привязка к "изучаемому" учебному материалу и, более того, побуждение к использованию различных математических моделей).

– Реалистичность как стремление оценить целесообразность и возможности использования для разрешения ситуации математики вообще и, в частности, тех или иных ее моделей как стремление к обоснованности отдельных шагов и результата познания и, вместе с тем, доверительное отношение к используемым математическим моделям в границах их нормативной применимости.

– Диалектичность как явно выраженная направленность на выявление и разумное использование взаимосвязанных противоположностей (чтение “слева направо” и наоборот; организация последовательного перехода от одного кода записи информации к другому и обратно; утверждение и его отрицание; “для любого” – “существует”; прямая и обратная операции; синтез – анализ и т.п.).

В данной заметке ограничимся рассмотрением некоторых типов УС, не приводя их конкретных примеров. Примеры заведомо упрощенных, *с “ученическим” лицом* УС выделенных типов и их использования в опыте работы учителей математики приведены в работах [2, 3 и др.].

Одно из *оснований* определения типа УС – *ведущий тип деятельности* учащегося какого-либо возрастного периода и, соответственно, этапа развития мировоззрения. В [2, 4] было показано, что для каждого этапа развития мировоззрения растущего человека можно указать *доминантный тип* его деятельности и, соответственно, тот или те компоненты его мировоззрения, для развития которых этот этап более всего благоприятен (*сенситивные компоненты*). При таком подходе за основу выделения типов УС выбирается **доминантный тип деятельности**, тогда его *название можно считать названием соответствующего типа УС* [3. С. 205]. На практике выбор того или иного типа УС необходимо по его **соответствию с целью и условиями** обучения и возможностями принятия учащимися этих ситуаций “для себя”. Для использования в обучении полезно выделить игровые, коммуникативные, практические, организационные, производственные и др. ситуации. В названиях этих типов подчеркивается, в основном, их направленность на доминантный для них тип деятельности. При таком подходе к выделению типов УС любая из них может встретиться и применяться **на различных этапах** обучения.

Основание *второго подхода к выделению типов УС* – ***направленность*** их на достижение конкретных целей воспитания тех или иных групп мировоззренческих качеств. Тогда имеет смысл говорить об *учебно-воспитательных ситуациях*, подчеркивая тем самым заметно преобладающую роль воспитательных целей над прочими. Среди них допустимы и такие ситуации, воспитательные цели которых напрямую не связываются с изучением какого-либо одного ранее заданного учебного материала по предмету (одной “темы”). В этом случае использование учебных элементов из различных тем школьного курса математики является даже предпочтительным, в том числе и таких элементов, которые имеют глубоко скрытые математические связи, не проступающие для учащихся в явном виде. При таком подходе *тип УС определяется типом* (схемой-моделью) *своего ядра* – учебной задачей или соответствующим ПК.

Создать подобные ситуации можно, прежде всего, с помощью испытанного средства – *серий задач* с математическим содержанием, но *обогащенных соответствующими воспитательными и развивающими заданиями.* В силу сочетания в таких задачах математического содержания и воспитательных или развивающих заданий их целесообразно называть *учебно-воспитательными (учебно-развивающими) задачами.* Серии таких задач создают предметную основу для формирования необходимых учащимся мировоззренческих качеств.

По второму основанию выделены [2, 3] следующие типы УС:

– *овладение математическим языком и речью, обучение общению;*

– *формирование начальных математико-мировоззренческих представлений;*

– *воспроизводство математических знаний и деятельности;*

– *составление однотипных математических моделей для разных по сюжету задач и обратное действие;*

– *формирование опыта по построению "маленьких теорий";*

– *формирование системных представлений о математических понятиях, об их сходстве и различии, о переходах по аналогии;*

– *алгоритмизация деятельности в соответствии с изучаемым понятием, утверждением или правилом, свертывание алгоритма в правило;*

– *установление различия в понимании, трактовке и использовании входящих в математический объект отдельных составляющих его элементов (переменных, постоянных, геометрических фигур и т.п.),*

– *определение границ изменения модели в соответствии с задачной ситуацией и пр., а также разумных изменений самого математического объекта с установлением возможных границ, обучение элементам диалектики и мн. др.*

В заключение отметим, что, как нам представляется, создание сборника учебных ситуаций и задач математико-мировоззренческой направленности является полезной и перспективной методико-исследовательской задачей.

Библиографический список

1. *Арнольд В.И.* "Жесткие" и "мягкие" математические модели. М.: МЦНМО, 2000. 32 с.
2. *Жохов А.Л.* Как помочь формированию мировоззрения школьников: Книга для учителя и не только для него. В 2-х частях. Самара: Изд-во СамГПУ, 1995. 288 с.

3. *Жохов А.Л.* Научное мировоззрение в контексте духовного развития личности (образовательный аспект). М.: ПО РАО, ИСОМ, 2004. 329 с.
4. *Жохов А.Л.* Стратегия и средства математического познания // Всероссийская научно-практ. конфер.“Задачи в обучении математике: теория, опыт, инновации”. Вологда, 2007.
5. *Иванова Т.А.* Гуманитаризация общего математического образования. Н. Новгород: НГПИ, 1998.
6. *Когаловский С.Р.* Поиски метода и методы поиска (онтогенетический подход к обучению математике): Монография. Ч. 1, 2. Шуя: ШПГУ, 2006.
7. *Мордкович А.Г.* Новая концепция школьного курса алгебры // Математ. в шк. 1996. № 6.
8. *Перминов Е.А.* Методические основы обучения дискретной математике в системе “школа – вуз”. Екатеринбург: Изд-во ГОУ ВПО “Рос. гос. проф.-пед. ун-т”, 2006.
9. *Тестов В.А.* Стратегия обучения математике. М.: Технологическая Школа Бизнеса, 1999.

О содержании “Вводного курса математики” в Московском педагогическом государственном университете

И.Л. Тимофеева, И.Е. Сергеева

В 2006/07 уч. году на математическом факультете МПГУ после многолетнего перерыва возрожден *Вводный курс математики.*

Впервые в МПГУ он появился более двадцати лет назад. Однако отводимые на этот курс учебные часы делились между математическими кафедрами и, по сути, шли на увеличение учебных часов для других математических дисциплин, изучаемых на первом курсе. Эти часы использовались для обстоятельного повторения некоторых вопросов школьной математики, необходимых для изучения той или иной дисциплины. Таким образом, как такового, *Вводного курса* с самостоятельной программой не было. Кроме того, по-прежнему не удавалось устранить у первокурсников накопленные за много лет пробелы в знаниях школьной математики. Вскоре в связи с очередным сокращением часов на математические дисциплины *Вводный курс математики* в МПГУ прекратил свое существование вовсе. Однако элементы теории множеств и логики все же излагались в рамках курса алгебры при изучении соответствующих тем.

Несколько лет назад было принято решение восстановить *Вводный курс математики*, однако уже в новом качестве. В связи с этим мы разработали программу курса, отражающую следующую *позицию*:

– необходимо использовать логические элементы математического языка как средство обучения математике, как средство формирования культуры речи студентов;

– необходимо обучать студентов логическим инвариантам математического языка, прежде всего – логическим элементам математического языка (кванторам, логическим связкам, логическим символам), понятиям логического характера (утверждение, обратное данному; необходимые и достаточные условия и т.п.).

Отличие изучаемой в вузе математики от школьной состоит, прежде всего, в богатстве и сложности используемого математического языка со специфическими для него логическими конструкциями. Часто проблемы, возникающие при изучении математических дисциплин, по существу, имеют логический характер и обусловлены тем, что студенты с большим трудом овладевают этим языком. Очень важно, чтобы *в начале обучения* в педвузе студенты активно овладевали базовыми общематематическими знаниями и, в первую очередь, логическими элементами математического языка и языка теории множеств. *Вводный курс математики* направлен на формирование логической грамотности студентов, столь необходимой для успешного изучения всех математических дисциплин.

Содержание разработанной программы отвечает основным *целям курса*: овладение студентами минимумом логических и теоретико-множественных знаний и умений, необходимых для успешного изучения математических дисциплин; обеспечение базы для формирования логически грамотной математической речи, развития логического мышления и воспитания логической культуры студентов.

Программа разработана с учетом опыта коллег из других педвузов [1-3] и Государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования по специальности 032100-Математика по дисциплине "*Вводный курс математики*" [4], в котором указаны следующие разделы: Множества. Операции над множествами. Алгебра множеств. Бинарные отношения. Отношение эквивалентности. Отношение порядка. Функции. Операции над высказываниями. Формулы логики высказываний. Логическое следствие. Предикаты и кванторы. Предикатные формулы. Элементы комбинаторики.

Приведем содержание разделов разработанной нами программы *Вводного курса математики*. Отметим, что раздел "Элементы комбинаторики" отсутствует в программе, так как он не соответствует основным целям этого курса.

I. Математические предложения и логические операции над ними.

1.1. Переменные. Математические предложения: высказывания и высказывательные формы (предикаты). Истинностные значения предложений. Равносильные высказывательные формы. Отношение следования. Имена и именные формы.

1.2. Кванторы (кванторные слова и кванторные символы). Свободные и связанные переменные. Примеры использования кванторов для записи математических предложений. Ограниченные кванторы (как форма записи).

1.3. Логические связки и логические операции над предложениями (конъюнкция, дизъюнкция, импликация и отрицание). Выражение ограниченных кванторов через логические операции и кванторы.

1.4. Логическая структура математических предложений. Логические формулы (формулы логики высказываний; формулы логики предикатов). Равносильные формулы. Логическое следование. Основные законы логики.

1.5. Примеры построения и преобразования отрицания предложений.

II. Математические определения и теоремы, их логическая структура.

2.1. Математические определения. Логическая структура математических определений через род и видовое отличие. Примеры использования логических символов для записи определений из разных областей математики. Преобразование негативных определений.

2.2. Логическая структура математических теорем. Формулировка теорем в импликативной форме (“Если ..., то ...”). Примеры использования логических символов для записи математических предложений. Утверждения о существовании и единственности. Принцип математической индукции.

2.3. Утверждение, обратное данному, противоположное данному, обратное противоположному; логическая связь между ними. Необходимые условия, достаточные условия. Критерии.

III. Математические доказательства и их логическая структура.

3.1. Математические рассуждения. Распознавание правильных и неправильных рассуждений.

3.2. Аксиомы, теоремы, доказательства. Аксиоматическое построение математических теорий. Сущность понятия математического доказательства. Логическая структура математических доказательств.

3.3. Правила вывода и их содержательный смысл. Метод доказательства от противного. Метод доказательства разбором случаев. Использование контрпримеров для опровержения общих утверждений.

IV. Элементы теории множеств. Отношения. Функции.

4.1. Множества. Пустое множество. Способы задания множеств. Подмножество. Равенство множеств. Операции над множествами. Свойства операций над множествами. Связь между логическими операциями и операциями над множествами. Конечные и бесконечные множества.

4.2. Кортежи. Декартово произведение множеств. Бинарные отношения и их свойства. Отношения эквивалентности. Отношения порядка.

4.3. Функции (отображения). Инъекция, сюръекция, биекция. Композиция функций. Обратная функция.

Данная программа рассчитана на семестровый курс объемом 54 учебных часа (3 учебных часа в неделю). Изучаемый материал имеет практический характер, поэтому все 3 часа отводятся на практические занятия.

Перечислим некоторые особенности содержания разработанного *Вводного курса математики*.

1. На первом же занятии по *Вводному курсу математики* наряду с высказываниями и высказывательными формами (предикатами) изучаются имена и именные формы. Обычно в аналогичных пропедевтических курсах речь идет только о высказываниях и высказывательных формах. Изучение имен и именных форм обусловлено тем, что они столь же часто используются в математическом языке и в языке обучения математике, правда, в школьном курсе их принято называть выражениями (числовыми или буквенными).

2. Во *Вводном курсе математики* изучаются логические операции не только над высказываниями, но и над предикатами. Нередко при первом знакомстве с логическими операциями идет разговор только об операциях над высказываниями, однако, в математическом языке наиболее часто применяются операции над предикатами. Кроме того, изучению логических операций над высказываниями и высказывательными формами предшествует изучение кванторов. Таким образом, студенты сразу знакомятся с кванторными конструкциями естественного математического языка, в первую очередь использующими ограниченные кванторы, наиболее распространенные в математическом языке. Большое значение во *Вводном курсе математики* имеют задачи на построение и равносильное преобразование отрицания предложений с кванторами, а также задачи на преобразование негативных определений.

3. Особое внимание во *Вводном курсе математики* уделяется выявлению логической структуры математических определений и теорем школьного курса математики и математических курсов, изучаемых на первом курсе педвуза. Это обусловлено тем, что при работе с математическими определениями и теоремами у студентов часто возникают трудности из-за непонимания их логической структуры. *Логически-*

ориентированное изучение во *Вводном курсе математики* формулировок определений и теорем помогает студентам преодолевать эти трудности, способствует лучшему усвоению и пониманию этих формулировок, а также определяет первые шаги при построении доказательств теорем.

Для выявления логической структуры математических предложений удобно использовать логическую символику.

4. Одно из главных мест во *Вводном курсе математики* занимает обучение использованию логической символики. Отметим, что математические предложения в символической записи становятся более краткими и наглядными, что упрощает их восприятие. Не менее важным является то, что средства логического языка позволяют выявлять структуру изучаемых предложений, обеспечивают точность и однозначность понимания их смысла, не оставляют места неопределенности и разночтению.

Однако использовать логические символы необходимо корректно, соблюдая определенные правила образования *осмысленных* конструкций – логических формул. Только корректное использование логических символов будет способствовать развитию логической культуры будущих учителей математики [6].

5. Специальный раздел курса посвящен математическим доказательствам и их логической структуре. Традиционно во *Вводном курсе математики* изучаются логические аспекты только математического языка. В то же время уже в школьном курсе математики учащиеся имеют дело с доказательствами. Однако что такое доказательство, какова логическая структура доказательств, какие дедуктивные средства используются при их построении и другие вопросы, связанные с доказательствами, не обсуждаются даже в педвузе, за исключением курса математической логики. Считаем, что на соответствующем уровне доступности и строгости обо всем этом можно и следует говорить уже на первом курсе, а именно во *Вводном курсе математики.*

6. Раздел *Вводного курса математики* "Элементы теории множеств. Отношения. Функции" в 2006/07 уч.г. изучался в конце семестра в соответствии с приведенной выше программой. Такой порядок изложения материала позволил сразу приступить к решению проблем, которые возникают у студентов на первых же лекциях по разным математическим дисциплинам и связаны с логическими особенностями математического языка. Кроме того, при изучении этого раздела в конце курса студентам, накопившим определенный опыт оперирования математическими понятиями, проще освоить некоторые непростые, но важные вопросы этого раздела.

Считаем, что раздел "Элементы теории множеств. Отношения. Функции" также может быть и первым разделом в программе курса. Действительно, изучение *Вводного курса математики* можно сразу начать с множеств – видимо, более привычных и простых объектов. Так делает, например, А.А. Столяр в [5]. Однако отметим, что некоторые вопросы этого раздела сложны для изучения в самом начале семестра. К таким относим следующие вопросы: Свойства операций над множествами. Конечные и бесконечные множества. Свойства бинарных отношений. Отношения эквивалентности. Отношения порядка. Композиция функций. Обратная функция.

Их изучение целесообразно перенести в конец курса. Но тогда раздел “Элементы теории множеств. Отношения. Функции” будет разбит на два разъединенных подраздела. Кроме того, подробное изучение элементов теории множеств в начале курса отодвинет на значительное время освоение логических элементов языка, столь необходимых в самом начале семестра.

В соответствии с приведенной программой в 2006/07 уч. г. проведен *Вводный курс математики* для студентов первого курса математического факультета МПГУ.

Уровень доступности и строгости изложения материала курса соответствовал уровню подготовки студентов первого курса. Преобладал интуитивный уровень изложения. Изучение материала строилось на большом количестве примеров из школьного курса математики и различных математических дисциплин, изучаемых на первом курсе математических факультетов педвузов.

Результаты первого экспериментального года обучения по разработанной программе показали, что материал *Вводного курса математики* студентам доступен, интересен, а главное, заметно помогает им в усвоении материала других математических дисциплин.

Библиографический список

1. *Михайлов А.Б., Плоткин А.И., Рисс Е.А., Яшина Е.Ю.* Математический язык в задачах: сборник задач. СПб.: Изд-во РГПУ им. А.И. Герцена, 2000. 236 с.
2. *Назиев А.Х.* Вводный курс математики. Элементы математической логики: Учебное пособие / РГПУ. Рязань, 2000. 125 с.
3. *Моторинский Ю.А., Пайсон Б.Д.* Вводный курс математики: Методическая разработка. Барнаул: Изд-во БГПУ, 2002. 70 с.
4. Государственный образовательный стандарт высшего профессионального образования. Специальность 032100 – Математика. М., 2005.
5. *Столяр А.А.* Логическое введение в математику. Минск: Вышэйшая школа, 1971. 224 с.

6. *Тимофеева И.Л.* Некоторые замечания об использовании логической символики при обучении математике // Математика в школе. 2005. № 7. С. 53-56.

Курсы по выбору как средство формирования профессиональной компетентности будущих специалистов

Н.Д. Кучугурова, Е.С. Дубинина

Профессия педагога в настоящее время находится на острие социальных преобразований, поэтому его деятельность должна постоянно ориентироваться на социальный прогресс, на учет прогрессивных изменений в обществе. Ему нужно учитывать потенциал педагогической науки, вырабатывать новое педагогическое мышление, внедрять современные идеи и инновационные технологии обучения и воспитания; уметь критически переосмыслить имеющийся опыт и начать, если это необходимо, непрерывное самосовершенствование своего "педагогического мастерства", т.е. повышать уровень своей профессиональной компетентности.

Компетентность, показывающая степень овладения некоторой деятельностью, является личностным свойством специалиста. Психолого-педагогические исследования по проблемам педагогического образования показывают, что профессиональная компетентность учителя – одна из важнейших дидактических категорий, которую необходимо осознать в начале профессионального пути. В настоящее время компетентность учителя приобретает все большее значение в связи с расширением социального опыта, возникновением новых и разнообразных форм предъявления и преобразования информации, со все возрастающим уровнем тех запросов, которые предъявляют к специалисту общество и обучаемые.

Компетентности в настоящее время отводится одна из ведущих ролей в успехе деятельности человека. Методическая компетентность среди различных видов компетентности учителя занимает одно из ведущих мест, интегрируя всю систему специально-научных, психологических, педагогических знаний и умений, и имеет четко выраженный прикладной характер по вопросам конкретного построения преподавания той или иной дисциплины.

К основным профессиональным умениям педагога можно отнести такие, как постановка проблемы и перевод ее в систему учебных задач, осуществление синтеза необходимой для решения информации, проектирование и управление развитием способностей учащихся, отслеживание динамики их развития, управление учебной деятельностью обучаемых, ориентир на осуществление рефлексии и т.п.

Компетентность, являясь предпосылкой формирования готовности будущего учителя к профессиональной деятельности, совершенствуется не только на занятиях по нормативным курсам, но и во внеаудиторной деятельности в свободном общении со сверстниками, преподавателями, учителями, учащимися школ и их родителями. Они являются не только своеобразным источником готовности, но и показателем пригодности к профессиональной деятельности учителя.

В условиях современного классического университета, осуществляющего подготовку учителя, времени на методические курсы недостаточно, поэтому данный недостаток должны ликвидировать курсы по выбору студентов, которым принадлежит интегрирующая роль в формировании будущего специалиста. Основной *целью* курсов по выбору является развитие всех составляющих профессиональной компетентности через формирование методической компетенции. Они служат для реализации основного комплекса задач обеспечения подготовки к творческому осуществлению профессиональной деятельности, в том числе включение студентов в исследовательскую деятельность посредством индивидуальной работы.

Интеграция профессионально-методической и творческой подготовки учителя предполагает развитие активности и самостоятельности обучаемых; организацию учебной деятельности, адекватной будущей профессиональной деятельности; развитие мотивационной сферы, определяющей профессиональную и творческую направленность личности будущего учителя. Основным условием реализации этих идей в методической подготовке учителя является разработка системы учебных заданий, посредством которых студенты включаются в продуктивную деятельность, моделирующую профессиональную творческую работу учителя, обеспечивающую индивидуализацию обучения. При этом мы опираемся на следующие *принципиальные позиции:*

1. Отказ от прямой передачи знаний и “готовых рецептов” профессиональной деятельности.

2. Открытость и заведомая неоднозначность решений предлагаемых учебных и проблемных задач.

3. Соотнесение приобретенного опыта с самостоятельным моделированием элементов профессиональной деятельности.

4. Коллективное реконструирование исходного и вновь полученного знания и понимания профессиональных проблем и способов их решения.

5. Последовательный переход от решения элементарных практико-ориентированных задач к более глубокому осмыслению возможных альтернатив деятельности с учетом особенностей учебных ситуаций.

6. Рефлексия чужого и собственного опыта преподавания, соотнесение исходных определяющих конкретных ситуаций с динамикой их

изменения в процессе деятельности: анализ видеоуроков, построенных на рефлексии чужого опыта в конкретной ситуации и моделированием нового возможного действия в аналогичных условиях с целью оптимизации процесса обучения; решение творческих заданий открытого типа с их последующей рефлексией; проектирование собственной деятельности преподавателя в реальной педагогической практике.

В процессе проведения курсов мы применяем разнообразные технологические приемы педагогической деятельности, которые стимулируют проявление активности и инициативы студентов, способствуют рефлексии образовательных потребностей. В частности, мы практикуем видеозапись уроков и их анализ, подготовку и проведение элективных курсов по заявкам школ, участие в конкурсе "Учитель года", поиск методических материалов в сети Интернет и их критический анализ, изучение опыта работы учителей разных школ (работа ведется различными небольшими группами студентов, а обсуждения проводятся на заседании "Методических мастерских"), проведение экспериментов по тематике квалификационных работ, самостоятельное составление проблемных заданий как методического характера для студентов, так и исследовательских заданий для школьников экспериментальных классов, анализ и составление диагностических заданий, тестов и т.п.

Следовательно, мы соблюдаем один из важных принципов организации профессиональной подготовки – это принцип *вариативности,* который учитываем не только при выборе методов и форм организации познавательной деятельности, но и при определении содержания и структуры изучаемого учебного материала. Ведущим содержанием при этом остаются вопросы частной методики обучения математике или информатике.

Активно участвуя в подготовке и проведении курсов, студенты овладевают определенными видами познавательной деятельности, учатся принимать самостоятельные решения в процессе познания и прогнозировать последствия решений, усваивают особенности математических способностей учащихся, учатся систематичности и регулярности самомониторинга. Основной целью является осознание обучаемыми способов выполнения профессиональной деятельности, формирование умения моделировать свою деятельность, осуществлять ее и анализировать результат. Такая деятельность способствует активному формированию профессиональной компетентности будущих учителей, о чем свидетельствуют карты саморазвития студентов, которые они охотно заполняют, а также данные диагностических тестов и срезов, проводимых нами регулярно.

Методические курсы такого плана проводятся нами за счет часов, выделенных учебным планом на региональный компонент. Кроме того, многие студенты посещают клуб “Интеллектуал” и проблемные группы “Инновации в методике обучения математике”, руководство которыми мы осуществляем на нашем факультете.

Таким образом, интеграция совместной деятельности преподавателей и студентов на аудиторных занятиях, на курсах по выбору и в проблемных группах способствует более эффективному формированию методической компетентности и в целом личности профессионала.

О введении понятия предела функции

О.С. Ивашев-Мусатов

С первых же недель у первокурсников приходится формировать понятие предела функции. Для нематематических специальностей – практически на пустом месте (опираться на школу не приходится). Многолетний опыт преподавателей самых разных взглядов приводит к общему выводу: начинать с $\varepsilon-\delta$-определения – совершенно непродуктивно – нулевой эффект. Для начала желательны достаточно простые соображения, из которых возникает мотивация для введения такого понятия и его определения.

В этой заметке предлагается путь, который мне (и студентам) уже несколько лет облегчает введение понятия предела функции.

Обычно все начинается с замечания: есть линии, которые можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги. Это прямая, окружность, ломаная, траектория движущейся точки и т.п. Когда рисуется такая линия, движение карандаша не прерывается. Поэтому такие линии называют непрерывными. Это же название распространяется и на функции: если график функции – непрерывная линия (на некотором промежутке), то и функцию называют непрерывной (на этом промежутке).

Так, $y = kx+b$ – непрерывная функция, т.к. ее график – прямая (это непрерывная линия); $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ – непрерывная функция на отрезке $[-\mathbf{R}; \mathbf{R}]$, т.к. ее график – полуокружность – непрерывная линия; $y = |x|$ – непрерывная функция т.к. ее график – ломаная; $y = ax^2 + bx + c$ – непрерывная функция, т.к. ее график – траектория снаряда (без учета сопротивления воздуха).

На ленте прибора, записывающего изменение температуры с течением времени, видим непрерывную линию. Это график функции температура – функция времени”. Это непрерывная функция – таков ее график. Коротко говорят: “температура есть непрерывная функция времени”. Аналогично: “атмосферное давление – непрерывная функция времени” и т.п.

А вот про функцию $y = \frac{1}{x}$ нельзя сказать, что она непрерывна, не указывая промежутков. На промежутке $(0; +\infty)$ она непрерывна, и на промежутке $(-\infty; 0)$ она тоже непрерывна. Подытоживая это, обычно говорят: “функция $y = \frac{1}{x}$ непрерывна при любом $x \neq 0$”.

Развитие науки и техники показало, что понятие непрерывности функции (и его обобщение – предел функции) играет фундаментальную роль при решении многих задач. Поэтому здесь необходимы и наглядные представления (играющие основную роль при эвристическом подходе к решению задачи), и математическое определение (без которого невозможно доказывать теоремы).

Вспомним из приближенных вычислений: $\pi^2 \approx 3,14^2$ или, если нужна большая точность, $\pi^2 \approx 3,1416^2$. Очевидно, что π^2 можно подсчитать с любой точностью – надо только поточнее выписать число π.

Для непрерывных функций положение аналогично: вычисляя $f(a)$, берут $x \approx a$ и считают, что $f(x) \approx f(a)$. Поясним на графике непрерывной функции f, что полученное приближенное равенство можно получать с любой точностью при $x \approx a$ с достаточной точностью. На оси OX (рис. 1) выделен отрезок с концами x и a. Его длина равна $|x - a|$, и это же число есть погрешность приближенного равенства $x \approx a$. Аналогично, $|f(x) - f(a)|$ есть погрешность приближенного равенства $f(x) \approx f(a)$, и оно же равно длине отрезка, выделенного на оси OY. Ясно, что длину отрезка на оси OY можно сделать как угодно малой, уменьшая длину отрезка на оси OX. Переформулируем это в терминах приближенных вычислений: приближенное равенство $f(x) \approx f(a)$ можно получать с любой точностью при $x \approx a$ с надлежащей точностью. Это основное характеристическое свойство непрерывной функции.

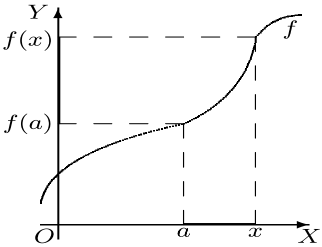


Рис. 1

Как подбирать точность приближенного равенства $x \approx a$, чтобы получить требуемую точность для приближенного равенства $f(x) \approx f(a)$ – разговор особый, пока его отложим. Разберем только один пример. Геометрически ясно: малая дуга окружности и ее хорда почти сливаются, т.е. их длины практически равны. Если радиус окружности R, центральный угол дуги $2x$ радиан, то длина дуги равна $R2x$, а длина хорды равна $2R\sin x$. Если x мало, то $R2x \approx 2R\sin x \Leftrightarrow \frac{\sin x}{x} \approx 1$. Докажем, что это приближенное равенство можно получать с любой точностью при $x \approx 0$ необходимой точностью. Для этого возьмем угол величины x радиан, $0 < x < \frac{\pi}{2}$, окружность с центром в вершине угла O (рис. 2) и радиуса R, AC – касательная к окружности, A – точка касания.

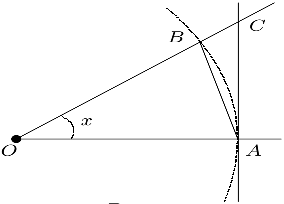


Рис. 2

По рисунку видим: площадь треугольника OAB меньше площади сектора OAB, которая меньше площади треугольника OAC. Записывая эти площади по известным формулам, получаем:

$$\frac{1}{2}R^2\sin x < \frac{1}{2}R^2 x < \frac{1}{2}r^2\operatorname{tg} x \Rightarrow \sin x < x < \operatorname{tg} x \Rightarrow 1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x.$$

Пользуясь последним двойным неравенством, выясним, какова погрешность приближенного равенства $\frac{\sin x}{x} \approx 1$:

$$\left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| = 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} = 2\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\left(\frac{x}{2}\right)^2 < \frac{x^2}{2}.$$

Итак, погрешность приближенного равенства $\frac{\sin x}{x} \approx 1$ не превосходит $\frac{x^2}{2}$. Следовательно, приближенное равенство $\frac{\sin x}{x} \approx 1$ можно получать с любой точностью при $x \approx 0$, $x \neq 0$ с надлежащей точностью. Например, если надо получить $\frac{\sin x}{x} \approx 1$ с точностью до 0,0001, то достаточно брать $x \approx 0$ с точностью до 0,01, и т.д.

Здесь обнаружилось очень важное для дальнейшего обстоятельство: для функции $\frac{\sin x}{x}$ и числа 0 нашлось число 1 такое, что приближенное равенство $\frac{\sin x}{x} \approx 1$ можно писать с любой точностью при $x \approx 0$ с надлежащей точностью. Это похоже на непрерывность, но ее здесь нет (функция не определена в 0). Однако оказалось, что подмеченный факт целесообразно зафиксировать в виде формулировки: “функция $\frac{\sin x}{x}$ стремится к 1 при x, стремящемся к 0" и ввести запись $\frac{\sin x}{x} \to 1$ при $x \to 0$. Стрелка заменяет слово "стремится".

Постепенно выяснилось, что при решении многих задач возникает аналоговая ситуация: для функции f и числа a можно подобрать такое число A, что приближенное равенство $f(x) \approx A$ можно получать с любой точностью при $x \approx a$ с надлежащей точностью. При этом говорят: "функция $f(x)$ стремится к числу A при x, стремящемся к числу a" и пишут $f(x) \to A$ при $x \to a$.

Принята и другая терминология: число A называют пределом функции $f(x)$ при x, стремящемся к a, и пишут $A = \lim\limits_{x \to a} f(x)$.

Таким образом,

$$1 = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}.$$

Эту формулу называют "первый замечательный предел".

Около двухсот пятидесяти лет назад великий математик Леонард Эйлер (работавший в С.-Петербурге) обнаружил число, которое в его честь все стали обозначать буквой e, и доказал, что

$$e = \lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}}.$$

Эту формулу все называют "второй замечательный предел".

Постепенно про число e было установлено, что оно иррационально, т.е. записывается в виде бесконечной непериодической десятичной дроби, именно, $e = 2,71828...$

Как для функции f и числа a находят число $A = \lim\limits_{x \to a} f(x)$? Да и всегда ли такое число A можно найти – разговор особый. Здесь целая теория.

Перейдем теперь к математическим определениям понятий непрерывности и предела функции. При этом будем существенно опираться на сделанные наблюдения.

Пусть функция f непрерывна в некотором интервале и точка a принадлежит этому интервалу. Возьмем точку $M(a, f(a))$ на графике функции f. Рассмотрим любой прямоугольник П со сторонами, параллельными осям координат, и центром в точке M. График f может выходить за пределы П через любую его сторону. Наглядное представление о непрерывности графика f подсказывает, что П можно так "сузить", получив прямоугольник П* (рис. 3, П* заштрихован), что на графике функции f нет точек, расположенных выше (ниже) П*. В этом и состоит характеристическая особенность непрерывности функции f и ее графика. Остается только все сказанное записать математически.

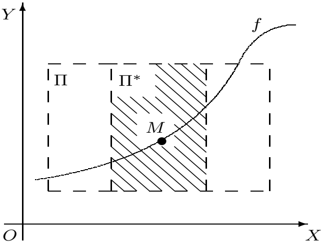


Рис. 3

Верхняя и нижняя стороны П лежат на прямых $y = f(a) \pm \varepsilon$ (рис. 4), где число $\varepsilon > 0$ и произвольно, поскольку П – любой. Боковые стороны П* лежат на прямых $x = a \pm \delta$, где число $\delta > 0$ и подобрано в зависимости от числа ε так, чтобы на графике функции f не было точек, расположенных выше (ниже) П*. Тогда для любой точки $L(x; f(x)) \in \Pi^*$ (L – на графике f) выполнены условия:

при любом x из $a - \delta < x < a + \delta$ следует $f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon$.

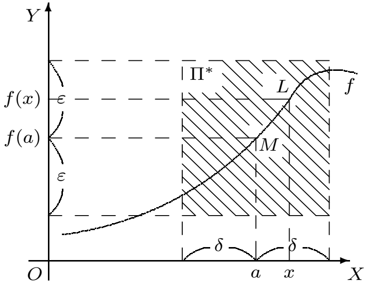


Рис. 4

Эти условия и приняты в качестве определения непрерывности функции в точке: функцию f называют непрерывной в точке a, если для любого числа $\varepsilon > 0$ можно подобрать число $\delta > 0$ так, чтобы при любом x выполнялись условия

$$|x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon. \qquad (*)$$

Вспомним теперь, что введение понятий непрерывности и предела функции опиралось на приближенные равенства $f(x) \approx f(a)$ и, соответственно, $f(x) \approx A$, которые можно было получать с любой точностью при $x \approx a$ с соответствующей точностью. Они отличаются только правыми частями. Поэтому определение предела функции естественно получать из $(*)$ при замене числа $f(a)$ на число A.

Итак, число A называют пределом функции f при x, стремящемся к числу a, если для любого числа $\varepsilon > 0$ можно подобрать число $\delta > 0$ так, что при любом $x \neq a$ выполнены условия из

$$|x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Семантические сети и эффективное формирование математического знания

В.Е. Фирстов

1. Дискретная модель семантической сети для неформальной аксиоматической теории. Пусть $S = (M; \Sigma)$ – некоторая математическая структура, основные отношения которой выражены аксиомами $\Sigma = \{\alpha_1; ...\alpha_s\}$ в рамках системы базисных множеств $M = \{M_1; ...; M_k\}$, представляющих основные объекты данной структуры. Пусть дедуктивная теория *Th(S)* этой математической структуры строится как неформальная (содержательная) аксиоматическая теория, которая является некоторым счетным множеством, его элементы (аксиомы и теоремы) упорядочены отношением “интуитивного” логического следования. Отметим, что неформальные аксиоматические теории – это обычная практика построения математического знания, восходящая к “Началам” Евклида [1], если, конечно, речь не идет о системах с искусственным интеллектом [2].

В представленной неформальной модели система аксиом Σ, интерпретируемая системой основных множеств M, может рассматриваться как некий генетический базис структуры S, который на интуитивно-логическом уровне порождает упорядоченное множество *Th(S)*, несущее информацию о строении структуры S, т.е. о дедуктивной теории *Th(S)* можно говорить как о некотором информационном пространстве, построение которого мыслится, вообще говоря, в виде некоторой потенциально бесконечной процедуры.

Информационное пространство дедуктивной теории *Th(S)* интерпретируется в виде некоторого орграфа $\overrightarrow{\Gamma}(S)$, представляющего модель структуры S, реализующей прохождение определенной математической информации, т.е. речь идет о семантической модели. В этом случае множество *Th(S)* задает элементы предметной области, являющиеся вершинами орграфа, а его дуги определяются набором функций f_m вида:

$$f_m : T_{i_1}; ...; T_{i_n} \mapsto T, \tag{1}$$

где $m; i_1; \ldots; i_n \in N$, $T_{i_1}; ...; T_{i_n}$; $T \in Th(S)$, а символ $\mapsto$ подразумевает неформальное логическое следствие утверждения T из посылок $T_{i_1}; ...; T_{i_n}$. При таком определении орграф $\overrightarrow{\Gamma}(S)$, наряду с вершинами предметной области *Th(S)*, характеризуется еще одним типом вершин, которые задаются множеством $F = \{f_m | m \in N\}$, содержащим функции вида (1). В определенном смысле элементы множества F – это аналоги дизъюнктов, которые используются при построении формализованных моделей семантических сетей [3]. В итоге, орграф $\overrightarrow{\Gamma}(S)$ представляется парой $(V; E)$, где множество вершин V и множество дуг E определяются выражениями:

$$V = Th(S) \cup F; \quad E \subset Th(S) \times F) \cup (F \times \bar{\Sigma}); \tag{2}$$

$\bar{\Sigma}$ – дополнение системы аксиом Σ до *Th(S)*, т.к. без ограничения общности систему аксиом Σ можно считать независимой. Поскольку аксиомы теории *Th(S)* не являются логическими следствиями, то для заданного орграфа $\overrightarrow{\Gamma}(S)$ система вершин $\Sigma \subset Th(S)$ выполняет роль источников, и, следовательно, $\overrightarrow{\Gamma}(S)$ выступает в виде некоторой семантической сети, определяющей строение информационного пространства дедуктивной теории *Th(S)*.

Предлагаемая сетевая модель вида (1)-(2) характерна тем, что из любой F-вершины орграфа $\overrightarrow{\Gamma}(S)$ всегда исходит только одна дуга. Это несколько упрощает математический аппарат и позволяет не обращаться к общим сетевым моделям в виде гиперграфов [4]. Другая возможная альтернатива исходит из логико-лингвистической модели семантических сетей, которые актуальны при ситуационном управлении сложными системами [3, 5] и выражаются на языке лингвистической переменной [6] с помощью нечетких множеств [7].

2. Маршруты, расстояния и связность между вершинами семантической сети неформальной аксиоматической теории. Пусть на орграфе $\overrightarrow{\Gamma}(S)$ вида (2) выделены различные вершины $v_0; v_1; ...; v_n \in V$, такие, что образуется последовательность дуг

$$\vec{l}(v_0; ...; v_n) : (v_0; v_1); (v_1; v_2); ...; (v_{n-1}; v_n) \in E. \tag{3}$$

Тогда говорят об ориентированном маршруте, соединяющем вершину v_0 с вершиной v_n. В этом случае также говорят, что вершина v_n достижима из вершины v_0. При $v_0 = v_n$, $n > 1$ маршрут $\vec{l}(v_0; ...; v_n)$ является циклическим. Вершины v_i, $i = \overline{1; n-1}$ будем называть промежуточными (или транзитными) вершинами маршрута (3), выражая этот факт следующим образом: $v_0 \prec v_i \prec v_n$. Длина маршрута (3) определяется соотношением:

$$|\vec{l}(v_0; ...; v_n)| = n. \tag{4}$$

Пусть $\vec{l}(v_0; v_n)$ – множество всех ориентированных маршрутов, соединяющих вершину v_0 с v_n, а $|\vec{l}(v_0; v_n)|$ – множество длин этих маршрутов. Расстояние $|\vec{r}(v_0; v_n)|$ от вершины v_0 до вершины v_n определяется выражением

$$|\vec{r}(v_0; v_n)| = inf|\vec{l}(v_0; v_n)|. \tag{5}$$

Расстояние (5), вообще говоря, не является метрикой на орграфе $\overrightarrow{\Gamma}(S)$, т.к., например, не выполняется условие симметричности $|\vec{r}(v_0; v_n)| \neq |\vec{r}(v_n; v_0)|$.

При рассмотрении дедуктивной теории *Th(S)* вопросы связности $\overrightarrow{\Gamma}(S)$ представляются достаточно важными. Для орграфов обычно вводят две связности – слабую и сильную [8] и, в этой связи, далее установим некоторые структурные свойства орграфа $\overrightarrow{\Gamma}(S)$.

Предложение 1. *Орграф* $\overrightarrow{\Gamma}(S)$ *является двудольным.*

Предложение 2. *Предикатные вершины Th(S) связаны между собой дугами только через дизъюнкты F.*

Предложение 3. *Орграф* $\overrightarrow{\Gamma}(S)$ *не является связным в сильном смысле.*

Предложение 4. *Орграф* $\overrightarrow{\Gamma}(S)$ *является связным в слабом смысле.*

Следствие 1. *Расстояние* (5) *в слабом смысле*

$$|r(v_0; v_n)| = inf|l(v_0; v_n)| \tag{6}$$

является метрикой на орграфе $\overrightarrow{\Gamma}(S)$.

Доказательства приводимых утверждений выше и далее даются в работе [9].

3. Области доминирования предикатных вершин семантической сети и их характерные размеры. Пусть произвольно выбрана предикатная вершина $T \in$ *Th(S)*, посредством которой формируется множество

$$U(T) = \{T_i | T_i \prec T \vee T_i = T, T_i; T \in Th(S), i \in N\} \subset Th(S), \tag{7}$$

где порядок $\prec$ определен выше. Элементы множества $U(T)$ – это вершины, для которых вершина T является достижимой на орграфе $\overrightarrow{\Gamma}(S)$. Поэтому множество $U(T)$ будем называть областью доминирования вершины T в пространстве *Th(S).*

Укажем некоторые свойства области доминирования $U(T)$, исходя из определения (7):

$$U(T) \cap \Sigma \neq \emptyset, \tag{8}$$

$$T'; T'' \in \Sigma, T' \neq T'' \Rightarrow U(T') \cap U(T'') = \emptyset. \tag{9}$$

Из соотношений (8), (9) очевидным образом следует

Предложение 5. *Если $T \notin \Sigma$, то область $U(T)$ – есть сеть, у которой элементы соответствующего подмножества $\Sigma' \subseteq \Sigma$ являются источниками, а вершина T – стоком.*

Предложение 6.

$$T' \in U(T) \Leftrightarrow U(T') \subseteq U(T), \tag{10}$$

причем если равенство $U(T') = U(T)$ выполняется при $T \neq T'$, то вершины T, T' связаны циклом.

Предложение 7. *Если $U(T') \cap U(T'') \neq \emptyset$ и области $U(T'), U(T'')$ не связаны отношением включения, то среди вершин $T \in U(T') \cap U(T'')$ хотя бы одна является точкой ветвления в ориентированной сети $\overrightarrow{\Gamma}(S)$.*

Следствие 2. *Если $U(T') \cap U(T'') \subset \Sigma$ и $T', T'' \notin \Sigma$, то каждая аксиома $\alpha \in U(T') \cap U(T'')$ является точкой ветвления в сети $\overrightarrow{\Gamma}(S)$.*

Пусть $U(T)$ – область доминирования вершины $T \in$ *Th(S)*, а $\vec{l}(\Sigma; T)$ – множество маршрутов, ведущих от аксиом Σ к вершине T. Длина каждого такого маршрута определяется соотношением (4) и пусть $|\vec{l}(\Sigma; T)|$ – множество длин маршрутов множества $\vec{l}(\Sigma; T)$. Согласно (5), введем расстояние от Σ до T:

$$|\vec{r}(\Sigma; T)| = inf|\vec{l}(\Sigma; T)|, \tag{11}$$

и, кроме того, определим диаметр области $U(T)$:

$$d(U(T)) = sup|\vec{l}(\Sigma; T)|. \tag{12}$$

Введенные размеры (11), (12) и емкость $|U(T)|$ связаны очевидным неравенством $|\vec{r}(\Sigma; T)| \leq d(U(T)) \leq |U(T)| - 1$ и представляют интерес в целях методической оптимизации теории *Th(S)*.

4. Емкости предикатных вершин семантической сети. Метрика (6), по существу, задает геометрическое расстояние между вершинами на орграфе $\overrightarrow{\Gamma}(S)$, определяя это расстояние количеством ребер, которые укладываются на минимальном маршруте, соединяющем эти вершины в основании $\Gamma(S)$ орграфа $\overrightarrow{\Gamma}(S)$. При этом полностью игнорируется ориентация дуг $\overrightarrow{\Gamma}(S)$, так что при описании дедуктивной теории *Th(S)* такая метрика вряд ли целесообразна.

В данном случае более приемлемой представляется концепция емкостей Г. Шоке [10], которая вводится аксиоматически в абстрактном хаусдорфовом пространстве X как некоторая числовая функция $C(K)$, определенная на компактах K пространства X, которая, в первую очередь, должна монотонно возрастать:

$$K_1 \subset K_2 \Rightarrow C(K_1) \leq C(K_2). \tag{13}$$

Распространить в полной мере концепцию емкостей Шоке в информационное пространство *Th(S)* не удается, однако некий аналог емкости в *Th(S)* ввести все-таки можно. Для этого рассмотрим множество F*h(S)={U(T)|T* $\in$*Th(S)},* которое определяет счетное покрытие пространства *Th(S)* элементами конечной мощности $1 \leq |U(T)| < \infty$. На множестве $\mathrm{F}h(S)$ определим числовую функцию $I : \mathrm{F}h(S) \to N$ по правилу:

$$\forall\ U(T) : I(U(T)) = |U(T)|. \tag{14}$$

Из соотношений (7), (10) видно, что функция I вида (14) удовлетворяет условию (13), т.к. $U(T') \subset U(T) \Rightarrow |U(T')| \leq |U(T)|$. Поэтому функцию I назовем емкостью области доминирования $U(T)$ или T-емкостью. Функция I емкостью в смысле Шоке не является, т.к. множество $\mathrm{F}h(S)$, очевидно, не замкнуто по операциям $\cup$ и $\cap$.

В рамках концепции емкости (16) на орграфе $\overrightarrow{\Gamma}(S)$ определим функцию:

$$\forall\ T; T' \in Th(S) : \rho(T; T') = ||U(T)| - |U(T')||. \tag{15}$$

Функция $\rho(T;T')$ удовлетворяет аксиомам симметричности и треугольника, но не удовлетворяет аксиоме тождества, поскольку $\rho(T;T') = 0$ не влечет $T = T'$ (предложение 6). Поэтому функция $\rho(T;T')$ задает псевдометрику (или отклонение) в пространстве *Th(S).* Метрика получается при факторизации *Th(S)* с помощью эквивалентности:

$$T \square T' \Leftrightarrow |U(T)| = |U(T')|. \tag{16}$$

Тогда для любого класса $[T] \in$*Th(S)*$/\square$ фиксируется емкость $|[T]| = |U(T)|$, после чего, определив функцию (15) на классах, задается метрика фактор-пространства *Th(S)*$/\square$.

5. Сетевая оптимизация в информационном пространстве дедуктивной теории: минимизация длины и емкости доказательства. Процедура доказательства некоторого утверждения $T \in$*Th(S)* в сети $\overrightarrow{\Gamma}(S)$ представляется следующим образом. Среди предикатных вершин *Th(S)* имеется конечное множество посылок $T_{i_1}; ...; T_{i_k}$, для которого в семантической сети $\overrightarrow{\Gamma}(S)$ существует единственная $F-$вершина в виде функции $f_m \in F$ с областью определения $Dom f_m = \{T_{i_1}; ...; T_{i_k}\}$, реализующая неформальный логический вывод

$$f_m : T_{i_1}; ...; T_{i_k} \mapsto T. \tag{17}$$

В связи с выводом (17) возникают два случая. Если $Domf_m \subseteq \Sigma$, то мы имеем неформальный вывод T из аксиом системы Σ и, следовательно, в (17) в данном случае следует считать $m = 1, 0 < k \leq s$, где $s = |\Sigma|$. Тогда доказательство утверждения T представляет собой множество $B(T)=\{ T_{i_1}; ...; T_{i_k}; T\}$, упорядоченное логическим следованием (17).

Если $Domf_m \not\subset \Sigma$, то $0 < |Domf_m \backslash \Sigma| = n \leq k; m > 1$ и каждая из вершин $T_{i_1}; ...; T_{i_n} \in Domf_m \backslash \Sigma$, в свою очередь, оказывается следствием, однозначно вытекающим из соответствующих посылок предикатной области $Th(S)$ так, что имеется единственный набор функций $f_{m-1;1}; \ldots ; f_{m-1;n} \in F$, реализующих доказательства:

$$f_{m-1;1} : T^1_{i_1}; ...; T^{j_1}_{i_1} \mapsto T_{i_1}; \ldots ; f_{m-1;n} : T^1_{i_n}; ...; T^{j_n}_{i_n} \mapsto T_{i_n}. \qquad (18)$$

К посылкам в доказательствах (18) вновь применяются рассуждения, аналогичные (17), и т.д., пока не приходим к доказательствам вида:

$$f_{11} : \Sigma'_1 \mapsto T_1; f_{12} : \Sigma'_2 \mapsto T_2; ...; f_{1r} : \Sigma'_r \mapsto T_r, \qquad (19)$$

где $\Sigma'_1; ...; \Sigma'_r \subseteq \Sigma$. Таким образом, процедура доказательства утверждения $T \in Th(S)$ в общем случае представляется частично упорядоченным множеством $B(T)$, которое составлено из предикатных вершин, структурированных посредством функций (17)-(19).

Отметим некоторые очевидные свойства процедуры доказательства $B(T)$:

1) Аксиомы системы $\Sigma' \subseteq \Sigma; \Sigma' \subset B(T)$ образуют систему минимальных элементов частично упорядоченного множества $B(T)$, а вершина T – есть наибольший элемент данного множества.

2) Пусть $U(T)$ – область доминирования вершины T. Тогда $B(T) \subseteq U(T)$.

3) Область $U(T)$ представляется в виде объединения всевозможных доказательств утверждения T.

Имея в виду неформальный логический вывод (17), длину $\left|\overrightarrow{b}(T)\right|$ доказательства $B(T)$ определим следующим образом:

$$\left|\overrightarrow{b}(T)\right| = max(\left|\overrightarrow{b}(T_{i_1})\right|; ...; \left|\overrightarrow{b}(T_{i_k})\right|) + 1. \qquad (20)$$

Тогда, в случае $Domf_m \subseteq \Sigma$, имеем $\left|\overrightarrow{b}(T_{i_1})\right| = ... = \left|\overrightarrow{b}(T_{i_k})\right| = 0$, что дает $\left|\overrightarrow{b}(T)\right| = 1$, т.е. вывод T из аксиом осуществляется за один шаг. В случае $Domf_m \not\subset \Sigma$ определение (20), в соответствии с (17)-(19), предполагает рекурсию:

$$\begin{cases} \left|\overrightarrow{b}(T_{i_1})\right| = max(\left|\overrightarrow{b}(T_{i_1}^{1})\right|; ...; \left|\overrightarrow{b}(T_{i_1}^{j_1})\right|) + 1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \left|\overrightarrow{b}(T_{i_n})\right| = max(\left|\overrightarrow{b}(T_{i_n}^{1})\right|; ...; \left|\overrightarrow{b}(T_{i_n}^{j_n})\right|) + 1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \left|\overrightarrow{b}(T_1)\right| = \left|\overrightarrow{b}(T_2)\right| = ... = \left|\overrightarrow{b}(T_r)\right| = 1. \end{cases} \tag{21}$$

Из определения длины $\left|\overrightarrow{b}(T)\right|$ в виде (20), (21) легко получается

Предложение 8. *Длина доказательства* $\left|\overrightarrow{b}(T)\right|$ *совпадает с диаметром* $d(B(T))$ *доказательства* $B(T)$:

$$\left|\overrightarrow{b}(T)\right| = d(B(T)), \tag{22}$$

где $d(B(T))$ *определяется аналогично* (12).

Помимо длины $\left|\overrightarrow{b}(T)\right|$, доказательство $B(T)$ характеризуется величиной емкости доказательства |B(T)|, под которой понимается мощность множества $B(T)$.

Рассматривая длину $\left|\overrightarrow{b}(T)\right|$ и емкость |B(T)| как параметры регулирования в сети $\overrightarrow{\Gamma}(S)$, формируем задачи оптимизации при построении математического знания в рамках теории *Th(S)*.

Пусть $B_1(T); \dots; B_l(T)$ – всевозможные доказательства интересующего утверждения $T \in Th(S)$, обладающие длинами $\left|\overrightarrow{b}_1(T)\right|; ...; \left|\overrightarrow{b}_l(T)\right|$ и емкостями $|B_1(T)|; ...; |B_l(T)|$, соответственно. В силу свойства 3, $U(T) = B_1(T) \cup \dots \cup B_l(T)$ и в этой связи формулируются следующие задачи оптимизации:

$$B_0(T) = opt(B_1(T); \dots; B_l(T)) \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{b}_0(T)\right| = min(\left|\overrightarrow{b}_1(T)\right|; ...; \left|\overrightarrow{b}_l(T)\right|), \tag{23}$$

$$B_0(T) = opt(B_1(T); \dots; B_l(T)) \Leftrightarrow |B_0(T)| = min(|B_1(T)|; ...; |B_l(T)|). \tag{24}$$

Каждая из задач (23), (24) представляет оптимизацию доказательства утверждения $T \in Th(S)$, соответственно, путем минимизации его длины или емкости, хотя, в принципе, эти задачи могут рассматриваться и совместно. Такая постановка оптимальных задач предполагает упрощение доказательства при сокращении объема анализируемой доказательной базы, что, вообще говоря, согласуется с представлениями теории информации [11].

6. Пример оптимизации: доказательства теоремы Пифагора. Касаясь оптимизации, связанной с доказательством теоремы Пифагора, следует отметить, что на сегодняшний день, по данным [12], имеется около 500 всевозможных (геометрических, алгебраических, механических и др.) доказательств теоремы Пифагора, среди которых более 150 геометрических доказательств, и по этому показателю теорема Пифагора попала в Книгу рекордов Гиннесса. Но главное, столь высокими показателями может объясняться широкая востребованность теоремы Пифагора на всем протяжении математического развития, и следует заметить, что потенциал идей, исходящих из этого замечательного утверждения, судя по всему, далеко не исчерпан [13, 14].

В современной учебно-методической литературе по геометрии в основном можно встретить следующие варианты доказательств теоремы Пифагора:

1) Классическое доказательство Евклида [1], при котором на сторонах прямоугольного треугольника строятся квадраты и в результате получается известная конфигурация в виде "пифагоровых штанов".

2) Доказательства индийского математика Бхаскара (1150 г.) [12, 15], которые известны в следующих двух вариантах. В первом варианте доказательства Бхаскара-I используется свойство равносоставленных плоских фигур; во втором варианте доказательства Бхаскара-II используется подобие треугольников и свойство высоты, опущенной из вершины прямого угла данного треугольника.

3) Векторный вариант доказательства с помощью скалярного произведения в аксиоматике Вейля [16].

Для удобства анализа метрические характеристики $\left|\overrightarrow{b}_i(T)\right|$; $|B_i(T)|$ доказательств теоремы Пифагора представлены в табл. 1 в обозначениях п. 5 в аксиоматиках Евклида [1], Гильберта [17] и Вейля [16].

Таблица 1

Метрические характеристики основных вариантов доказательств теоремы Пифагора в различных системах аксиом

Доказательство	Аксиоматика	i	$\left\|\overrightarrow{b}_i(T)\right\|$	$\|B_i(T)\|$
Евклид	Евклид (IV в. до н.э.)	0	10	36
Бхаскар-I		1	9	23
Бхаскар-II	Д. Гильберт (1899)	2	12	35
Векторно-точечное	Г. Вейль (1918)	3	2	12

Результаты проведенной оптимизации (табл. 1) отдают предпочтение векторно-точечному варианту построения евклидовой геометрии в духе Вейля [16], что, вообще говоря, особого удивления не вызывают, т.к. данный подход, среди рассмотренных, обладает минимальной аксиоматической базой. В то же время следует напомнить относительно осторожности, с которой векторный аппарат должен внедряться в школьную геометрию. Данное обстоятельство определенно нашло отражение в отечественной учебно-методической литературе по элементарной геометрии, анализ которой проводится в табл. 2, где, для примера, рассмотрены основные варианты доказательств теоремы Пифагора и их использование в российском математическом образовании за период 1768-2000 гг.: 1 – доказательство Евклида; 2 – доказательство Бхаскара-I; 3 – доказательство Бхаскара-II; 4 – векторно-точечное доказательство по Вейлю.

Таблица 2

Основные варианты доказательств теоремы Пифагора в российском математическом образовании

Учебник	Авторы	Год изд.	Доказательства			
			1	2	3	4
Элементы геометрии	Н.Г. Курганов	1768	+	−	−	−
Основания геометрии	С.Е. Гурьев	1811	+	−	−	−
Элементарная геометрия	А.Ю. Давидов	1864	−	−	+	−
Элементарная геометрия	А.П. Киселев	1893	+	+	+	−
Рабочая книга по математике	М.Ф. Берг и др.	1930	−	+	−	−
Геометрия	Н.Н. Никитин	1961	−	+	−	−
Преобразование. Векторы	В.Г. Болтянский, И.М. Яглом	1964	−	−	−	+
Геометрия	А.Н. Колмогоров и др.	1980	−	−	+	−
Геометрия	А.Д. Александров и др.	1991	−	+	−	−
Геометрия	Л.С. Атанасян и др.	1992	−	+	−	+
Геометрия	А.В. Погорелов	1993	−	−	+	+
Геометрия	И.Ф. Шарыгин	2000	−	−	+	+

Характеризуя в целом данные табл. 2, можно сделать вывод, что пока в школьной геометрии, в основном, выдерживается евклидова методическая линия, образы которой достаточно наглядны: среди доказательств теоремы Пифагора наибольшее распространение имеют доказательства Бхаскара-I, II. Более абстрактные векторно-точечные представления в духе Вейля в школьной программе выражены в меньшей степени и появились сравнительно недавно в контексте известной образовательной концепции А. Н. Колмогорова (1967). Впрочем, учитывая нарастающую информатизацию человеческой деятельности, в недалеком будущем более востребованным может оказаться именно это абстрактное направление. Этот факт отражает оптимизация (29), (30), отдавая предпочтение векторно-точечному варианту доказательства теоремы Пифагора, при котором длина и емкость доказательства минимальны. Действительно, в рамках концепции информационного пространства это означает транспортировку соответствующей актуальной информации в более компактном виде кратчайшим путем (т.е. за меньшее время). Последнее вполне отвечает требованиям современного образования, правда, при этом также должны быть оптимизированы вопросы презентативности данной информации.

Результаты работы позволяют составлять взвешенные и согласованные программы по математике, допускающие эффективное тематическое планирование предметного материала на базе предложенных принципов оптимизации дедуктивной теории. Эти же принципы эффективно реализуются при подготовке соответствующей учебно-методической литературы, а также в случае выработки соответствующих экспертных рекомендаций.

Библиографический список

1. Начала Евклида. С комментариями Д. Д. Мордухай-Болтовского. М.-Л.: ГИТТЛ, 1948-1950.
2. Искусственный интеллект: Справочник. Кн. 2: Модели и методы: Под ред. Д. А. Поспелова. М.: Радио и связь, 1990. 304 с.
3. *Поспелов Д. А.* Логико-лингвистические модели в системах управления. М.: Энергоиздат, 1981. 231 с.
4. *Яблонский С. В.* Введение в дискретную математику. М.: Наука, 1986. 384 с.
5. *Вагин В. Н., Кикнадзе В. Г.* Дедуктивный вывод на семантических сетях в системах принятия решения // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1984. № 5. С. 104-120.
6. *Заде Л.* Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. М.: Мир, 1976. 165 с.
7. *Кофман А.* Введение в теорию нечетких множеств. М.: Радио и связь, 1982. 432 с.

8. *Уилсон Р.* Введение в теорию графов. М.: Мир, 1977. 207 с.
9. *Фирстов В. Е.* Семантическая модель и оптимизация при построении и распространении математического знания // Вестник Саратовского гос. тех. университета. 2006. Вып. 1. № 3 (14). С. 34-43.
10. *Деллашери К.* Емкости и случайные процессы. М.: Мир, 1975. 192 с.
11. *Яглом А. М., Яглом И. М.* Вероятность и информация. М.: Наука, 1973. 511 с.
12. *Волошинов В. А.* Пифагор. М.: Просвещение, 1993. 224 с.
13. *Фирстов В. Е.* Нетрадиционные геометрические интерпретации, полугрупповая теория и генеалогия пифагоровых троек. Саратов: Научная книга, 2004. 92 с.
14. *Фирстов В. Е.* Рекуррентные последовательности, фрактальные иерархические структуры и конические сечения при конструктивных обобщениях теоремы Пифагора. Саратов: Научная книга, 2005. 136 с.
15. *Глейзер Г. И.* История математики в школе. VII-VIII классы. М.: Просвещение, 1982. 240 с.
16. *Егоров И. П.* Геометрия. М.: Просвещение, 1979. 256 с.
17. *Гильберт Д.* Основания геометрии. М.-Л.: ГИТТЛ, 1948. 491 с.

Научные основы школьного курса математики

В.В. Вавилов, М.Е. Колоскова

Именно такой курс лекций, название которого вынесено в заголовок, в течение целого ряда лет читается на механико-математическом факультете МГУ им. Ломоносова для студентов факультета, желающих наряду с основной специализацией получить дополнительно и квалификацию преподавателя математики. Курс тесно связан с довольно продолжительной историей исследований по этой теме, одним из основных и ярких основоположников которой являлся А.Н. Колмогоров (см.[1]). Он обращался к ней многократно в своих статьях, в публичных лекциях, в летних школах и выступлениях на различного рода педагогических семинарах, курсах повышения квалификации учителей.

Программа курса состоит из двух частей, первая из которых носит общий характер, а вторая – более конкретный. Без понимания общих тенденций развития математики, ее структуры, методов исследования, важных приложений и основных моментов в истории ее развития невозможно представить себе высококвалифицированного преподавателя – будь то учитель массовой, специализированной школы или же преподаватель высшей школы. Поэтому в первую часть курса включены вопросы, без прояснения которых невозможно правильно организовать обучение математике, грамотно отобрать для него материал, а также критически оценить проводимые или задуманные реформы математического образования в средней школе. Примерами таких тем могут служить следующие: Логическое строение математических курсов в средней школе. Язык математических формул и начала математической логики. Конструктивные и неконструктивные доказательства. Теоремы существования и их место в школьном преподавании математики. Аксиоматический метод; системы аксиом, используемые в различных курсах геометрии средней школы, и их различия. Основные математические принципы: индукции, суперпозиции, включения-исключения, Дирихле, эквивалентности, двойственности, непрерывности. Конечное и бесконечное в математике. Понятие алгоритма и его эффективности; алгоритмическая неразрешимость. Математические модели и их место в школьной математике. Исчисление вероятностей и статистические гипотезы. Основные принципы преподавания математики.

Вторая часть курса состоит из конкретных тем и может варьироваться в зависимости от целесообразности, а также вкусов лектора. Однако при этом мы следим за тем, чтобы изучение конкретных тем во второй части проводилось с тщательно продуманной реализацией положений общего характера, изложенных в его первой части. Одним из авторов статьи читались такие лекции (в ретроспективе): Основная теорема арифметики. Алгоритм Евклида и его эффективность. Непрерывные дроби. Паркеты на плоскости. Иррациональность значений основных тригонометрических функций. Теорема Гаусса о семнадцатиугольнике. Теорема Абеля об уравнениях пятой степени. Функции, отношения и их классификация. Логарифм и обратные тригонометрические функции как площади. Тригонометрические многочлены. Формула Пика и ее приложения. Аффинные и проективные плоскости и пространства. Основные проективные теоремы. Теорема о равносоставленности многоугольников. Формула Эйлера и правильные многогранники. Объем тетраэдра. Геометрия и тригонометрия тетраэдра. Сфера и тетраэдр. Две проекции. Две экологические модели. Датчики случайных чисел. Первые шаги в криптографии.

Ниже мы более подробно остановимся на лекционных материалах первого семестра 2006/07 учебного года, посвященных *основным принципам и методам*, которые широко применяются в математических исследованиях и при обучении методике преподавания математики в средних и высших учебных заведениях. Подчеркнем, что семинарские занятия под этот курс лекций не предусмотрены, и поэтому в рамках самих лекций разбираются решения многих задач. Задачи подобраны так, чтобы в дальнейшем слушателями курса они могли бы быть включены в соответствующие тематические планы как обязательных занятий, так и работы кружков и факультативных курсов.

1. Принцип математической индукции

Принцип математической индукции в привычной форме двух шагов впервые появился в 1654 году в работе Блеза Паскаля "Трактат об арифметическом треугольнике", в которой индукцией доказывается простой способ вычисления числа сочетаний (биномиальных коэффициентов). Д. Пойа в книге [2] цитирует Б. Паскаля с небольшими изменениями, данными в квадратных скобках:

"Несмотря на то, что рассматриваемое предложение [явная формула для биномиальных коэффициентов] содержит бесчисленное множество частных случаев, я дам для нее совсем короткое доказательство, основанное на двух леммах.

Первая лемма утверждает, что предположение верно для основания – это очевидно. [При n = 1 явная формула справедлива. . .]

Вторая лемма утверждает следующее: если наше предположение верно для произвольного основания [для произвольного n], то оно будет верным и для следующего за ним основания [для n+1].

Из этих двух лемм необходимо вытекает справедливость предложения для всех значений n. Действительно, в силу первой леммы оно справедливо для n=1; следовательно, в силу второй леммы оно справедливо для n=2; следовательно, опять-таки в силу второй леммы оно справедливо для n=3, и так до *бесконечности*".

Примеры применения метода математической индукции на лекциях встречались самые разнообразные и подобраны так, чтобы можно было продемонстрировать разнообразные формы применения этого метода (см. [7]): в частности, двойная индукция, парадокс изобретателя, применения в геометрии и др. Отмечалось, что в своей статье "Как я стал математиком" А.Н. Колмогоров пишет: *"Радость математического "открытия" я познал рано, подметив в возрасте пяти-шести лет закономерность*

$1 = 1^2$

$1 + 3 = 2^2$

$1+3 + 5 = 3^2$

$1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$ *и так далее.*

. . . В школе издавался журнал "Весенние ласточки". В нем мое открытие было опубликовано. . ."

Какое именно доказательство было приведено в этом журнале, мы не знаем, но началось все с частных наблюдений. Сама гипотеза, которая наверняка возникла после обнаружения этих частных равенств, состоит в том, что формула

$$1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$$

верна при любом заданном числе n=1, 2, 3,...

Отметим также, что при доказательстве теорем из второй части лекционного курса принцип математической индукции является одним из важных инструментов; например, при доказательстве теоремы *о правильных мозаиках, теоремы Бойяи-Гервина о равносоставленности равновеликих многоугольников, формулы Эйлера для многогранников, формулы Пика для площади многоугольника, расположенного на клетчатой бумаге, и др.*

2. Принцип Дирихле

При решении самых различных задача часто бывает полезен так называемый "принцип Дирихле", названный в честь немецкого математика Петера Густава Лежена Дирихле; по-другому этот принцип еще называют "принципом ящиков" или "принципом голубятни". Этот принцип часто является хорошим средством при доказательстве важнейших теорем в теории чисел, алгебре, геометрии.

Наиболее часто принцип Дирихле формулируется в следующей форме:

Если (kn+1) кролик помещен в n клетках, то в одной из клеток находится не менее (k+1) кролика; или в эквивалентной форме – нельзя посадить (kn+1) кролика в n клеток так, чтобы в каждой клетке находилось не более k кроликов.

В лекционный материал включались задачи из разных разделов математики, а не только "числовые", о которых достаточно много уже написано.

3. Принцип включения-исключения

Наряду с рассмотренными выше принципами, принцип (формула) включения – исключения является важнейшим математическим инструментом, особенно в комбинаторике, когда, зная число элементов в каждом из конечных данных множеств, нужно найти число элементов другого множества, которое составлено из данных при помощи некоторых операций (объединений, пересечений и т.д.).

Если множества A_1 и A_2 состоят из конечного числа элементов, то

$$n(A_1\cup A_2)=n(A_1)+n(A_2)-n(A_{12}), \tag{1}$$

где n(X) обозначает число элементов множества X, $A_{12}=A_1\cap A_2$.

Эта одна из важных формул в комбинаторике; ее называют также *правилом сложения.* С ее помощью можно получить формулу для числа элементов объединения любого числа конечных множеств. Например, для трех множеств имеем (обозначения вида A_{ij} и A_{123} здесь и всюду в дальнейшем обозначают пересечения двух и трех указанных индексами множеств):

$n(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = n(A_1 \cup (A_2 \cup A_3)) =$
$= n(A_1) + n(A_2 \cup A_3) - n((A_1 \cap (A_2 \cup A_3)) =$
$= n(A_1) + n(A_2) + n(A_3) - n(A_{23}) - n(A_{12} \cup A_{13}) =$
$= n(A_1) + n(A_2) + n(A_3) - n(A_{23}) - n(A_{12}) - n(A_{13}) + n(A_{12} \cap A_{13})$.

Таким образом,

$$n(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = n(A_1) + n(A_2) + n(A_3) - n(A_{12}) - n(A_{13}) - n(A_{23}) + n(A_{123}).$$

Здесь мы применили два раза правило сложения для двух множеств и использовали то, что $A_1 \cap (A_2 \cup A_3) = A_{12} \cup A_{13}$.

Полученная формула, как и формула (1), являются частными случаями общего *принципа (формулы) включений – исключений.* Прежде чем ее выписать в общем виде (хотя многие из слушателей и в состоянии ее сразу написать), на лекциях были предложены несколько задач, которые могут быть использованы в школьной практике.

Например, такая: *В ожесточенной драке более 70% участников повредили глаз, 75% – ухо, 80% – руку, 85% – ногу.*

Каково наименьшее количество повредивших глаз, ухо, руку и ногу?

Эта задача придумана известным детским писателем и математиком *Льюисом Кэрроллом,* автором книг “Алиса в стране чудес” и “Алиса в Зазеркалье”, давно уже ставших достоянием мировой культуры. Полную подборку задача см. в [6].

Решенные задачи позволяют сформулировать *принцип включения – исключения в общем виде* и несколько другой форме. Пусть имеется n объектов и $n(\alpha)$ из них обладают некоторым свойством α; подобным же образом через $n(\beta)$, $n(\gamma)$ обозначим, соответственно, число тех объектов, которые обладают свойствами β, γ,... Если через $n(\alpha,\beta)$, $n(\alpha,\gamma)$, $n(\beta,\gamma)$, $n(\alpha,\beta,\gamma)$ обозначить число объектов, обладающих теми свойствами, которые указаны в скобках, то число объектов, *не обладающих ни одним из свойств α, β, $\gamma, \ldots$* равно

$$n - n(\alpha) - n(\beta) - n(\gamma) + n(\alpha,\beta) + n(\alpha,\gamma) + n(\beta,\gamma) - n(\alpha,\beta,\gamma) + \ldots$$

Этот общий прием (формула) имеет место, конечно, для любого конечного числа свойств объектов.

4. Принцип исключенного третьего

Принцип исключенного третьего впервые был сформулирован Аристотелем и представляет собой принцип классической формальной логики, утверждающий, что “*всякое суждение или истинно, или ложно, третьего не дано*” (“tertium non datur”).

Придерживаясь терминологии математической логики, этот *закон (принцип) исключенного третьего* утверждает, что дизъюнкция $A \vee \neg A$ является *тавтологией* для любого высказывания A: любое высказывание такой формы будет истинным в силу одной своей структуры.

Закон противоречия, который выражается тавтологией $\neg(A \wedge \neg A)$, является проявлением принципа двойственности в алгебре высказываний и исчислении предикатов.

Известное под не совсем удачным названием доказательство "от противного" представляет собой в действительности *косвенное доказательство.* Такое доказательство некоторой теоремы T состоит в том, что исходят из отрицания T, называемого допущением косвенного доказательства, и выводят из него два противоречащих друг другу предложения (типа P и $\neg$P). Это выведение называется "приведением к абсурду (нелепости)" – "reductio ad absurdum". В конце такого доказательства обычно говорят: "Полученное противоречие доказывает теорему". Что значат "противоречие доказывает"? Каков точный смысл этих слов? Его можно уточнить так. Ввиду того, что противоречие $P \wedge \neg P$ тождественно ложно, его отрицание $\neg(P \wedge \neg P)$ общезначимо, и после получения противоречия мы можем дополнить его до вывода теоремы следующим образом: $\neg T \Rightarrow (P \wedge \neg P), \neg(P \wedge \neg P) \Rightarrow \neg(\neg T)$, то есть T. Следовательно, точный смысл слов "полученное противоречие доказывает теорему" нужно понимать как возможность достраивания доказательства после противоречия до доказываемого предложения T.

Типичный пример косвенного доказательства, ставший широко известным благодаря Евклиду, является доказательство того, что множество простых чисел бесконечно. В этом доказательстве нужного утверждения (что ряд простых чисел бесконечен) мы опровергаем не совместимую с ней противоположную теорему (что ряд простых чисел конечен), ибо последняя приводит к явному абсурду. Таким образом, здесь соединяются косвенное доказательство с "reductio ad absurdum". В такой форме доказательства в математике применяются довольно часто.

Наиболее яркий пример косвенного доказательства и принципа исключенного третьего представляет собой известная в планиметрии теорема Сильвестра: *Никакое конечное число точек нельзя расположить на плоскости так, чтобы прямая, проходящая через любые две из них, проходила бы также через третью, если только эти точки не лежат все на одной прямой.* Эта теорема имеет богатую историю, но простое и изящное ее доказательство было получено только тогда, когда сильвестровское "отрицательное" утверждение было переформулировано в "положительной форме": *Если n точек плоскости не лежат на одной прямой, то существует прямая, проходящая в точности через две из этих точек.*

С принципом исключенного третьего тесно связан и метод доказательства, опирающийся на ***эквивалентность*** доказываемой теоремы и теоремы противоположной для обратной к данной. Построение *контрпримера* (и роль) является классическим способом опровержения гипотез и тесно связано с принципом исключенного третьего. Здесь мы на этих вопросах не останавливаемся.

5. Принцип суперпозиции

Сущность *принципа суперпозиции* (термин происходит от латинского слова superposito – наложение) заключается в *получении общего решения путем объединения решений в частных случаях*, или, другими словами, этот принцип состоит *в обнаружении* (выделении) того частного случая, который является основой для обобщения и развития в разных направлениях.

С использованием данного принципа каждый ученик сталкивается, например, при обычном доказательстве хорошо известной теоремы планиметрии, утверждающей, что "центральный угол равен удвоенному вписанному углу, опирающемуся на ту же дугу". Ее доказательство, в главном, основано на рассмотрении *частного случая*, когда одна из сторон вписанного угла совпадает с диаметром. К нему сводятся также и утверждения об измерении углов, связанных с дугами окружности, в случаях произвольного расположения вершины угла на плоскости.

Важными примерами проявления этого принципа (и принципа математической индукции) является рассмотрение треугольников площади $1/2$, все вершины которых находятся в узлах клетчатой бумаги, при доказательстве общей формулы Пика, а также выделение случаев треугольника и квадрата и двух квадратов при доказательстве общей теоремы Бойяи-Гервина о равносоставленности равновеликих многоугольника. Все эти вопросы включены в программу лекционного курса.

Еще одним ярким примером использования *принципа суперпозиции* является решение *задачи интерполяции*, полученное Лагранжем.

Принцип суперпозиции ярко проявляется в вопросах представления функции тригонометрическими многочленами и рядами Фурье и незаменим при решении обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Отметим также, что рассмотрение частных примеров при анализе той или иной задачи – это важнейший методический прием в преподавании математики на любом уровне ее преподавания. Мы здесь на этой стороне вопроса не останавливаемся.

6. Принцип двойственности

Принцип двойственности – принцип, формулируемый в некоторых разделах математики и заключающийся в том, что *каждому верному* *утверждению этого раздела отвечает двойственное утверждение, которое может быть получено из первого путем замены входящих в него понятий на другие, так называемые двойственные им понятия.*

В школе с принципом двойственности учащиеся в основном сталкиваются при изучении следующих разделов математики: Алгебра множеств; Проективная геометрия; Теория многогранников (здесь мы опускаем более детально обсуждение).

Рассмотрим, как формулируется принцип двойственности в каждом из этих разделов.

Алгебра множеств

Основными операциями алгебры множеств являются следующие (будем считать, что фигурирующие ниже множества являются подмножествами некоторого одного универсального множества I):

1. *Сумма или объединение множеств (если A и B* – два множества, то их суммой или объединением множеств называется новое множество, которому принадлежат те и только те элементы, которые входят либо в A, либо в B, и обозначается через A∪B);

2. *Пересечение множеств* (множество, состоящее из общих элементов множеств A и B, обозначается A∩B);

3. *Дополнение* (Если A – некоторое множество из универсального множества I, тогда под его дополнением A' в I понимается множество всех элементов I, которые не принадлежат A).

Перечисленные выше операции обладают следующими свойствами:

1. $A\cup B=B\cup A$, $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$;
2. $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$;
3. $A\cup A'=I$, $A\cap A'=\emptyset$, $\emptyset'=I$, $I'=\emptyset$, $A''=A$, где $\emptyset$ – пустое множество.

Легко заметить, что законы (свойства), которым удовлетворяют операции в алгебре множеств, обладают важным *принципом двойственности*: *если в одном из доказанных уже свойств (законов) заменить друг на друга соответственно символы $\subset$ на $\supset$, $\emptyset$ на I, $\cup$ на $\cap$ в каждом их вхождении, то в результате снова получается верное свойство.* Так, из свойств объединения вытекают свойства пересечения множеств:

$A\cap B=B\cap A$, $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$, $A\cap A=A$ и т.д.

Проективная геометрия

Проективное пространство (и плоскость) определяется аксиоматически. Основные аксиомы инцидентности точек, прямых и плоскостей в проективном пространстве можно выразить парами предложений, чтобы выявить и подчеркнуть их *двойственность*. Простой анализ этих аксиом показывает, что каждая пара обладает тем свойством, что одно из них может быть получено из другого после замены друг другом слов "точка" и "плоскость", причем слово "прямая" должно оставаться без изменения. Очень похожее свойство мы имеем и при построении проективной плоскости. Такая "взаимозаменяемость точек и плоскостей" в аксиоматике проективного пространства, выраженных в терминах инцидентности, и отражает систему приведенных аксиом. А это, в свою очередь, означает, что из каждого выведенного из данной системы аксиом утверждения может быть получено новое верное утверждение путем простой замены слова "точка" словом "плоскость" и обратно.

Одним из возможных применений принципа двойственности в проективном пространстве является заключение о справедливости теоремы, обратной к теореме Дезарга (которая двойственна прямой теореме), без специального ее доказательства. Сформулируем эти теоремы.

Теорема Дезарга. *Если для двух данных треугольников ABC и A'B'C' прямые AA',BB',CC' проходят через одну и ту же точку O, то три точки попарного пересечения P, R, Q (предполагая, что они существуют) соответственных сторон AB и A'B', BC и B'C', CA и C'A', лежат на одной прямой (дезаргова прямая).*

Обратная теорема Дезарга. *Если у двух данных треугольников ABC и A'B'C' три точки попарного пересечения соответственных сторон AB и A'B', BC и B'C', CA и C'A' расположены на одной прямой, то прямые AA', BB', CC', соединяющие соответственные вершины этих треугольников, проходят через одну и ту же точку или параллельны между собой (оговорка о параллельности принципиальна, так как мы исследуем теорему в обычном евклидовом пространстве).*

Естественным следствием принципа двойственности в пространстве является соответствующий ему *принцип двойственности на проективной плоскости*: из каждого проективного предложения относительно точек и прямых на плоскости, выраженного в терминах инцидентности, может быть получено второе предложение путем замены слова "точка" словом "прямая", и обратно.

Так, например, ***теорема Паппа***, утверждающая, что *если A, E, C – три точки на одной прямой p и D, B, F – на другой прямой q таковы, что прямые AB, EF и CD пересекают соответственно прямые ED, CB и AF в точках P, Q, R, то точки P, Q, R лежат на одной прямой*, является двойственной сама себе.

7. Принцип непрерывности

Принцип непрерывности, широко используемый в математическом анализе и в геометрии, заключается в следующем: *пусть некоторая величина F зависит от положения точки x на отрезке (ломаной или другой линии). Если при одном положении x на отрезке F<0, а при другом положении x на отрезке F>0, то найдется такое положение x на этом отрезке, при котором F=0.*

Данный принцип лежит в основе доказательств многих теорем.

Теорема Брауэра. *Всякое непрерывное отображение f отрезка в себя имеет по крайне мере одну неподвижную точку, то есть такую точку x_0, что $f(x_0) = x_0$.*

Теорема Больцано. *Если f – непрерывная функция, заданная на отрезке $[a, b]$, и такая, что $f(a)<f(b)$, и если число c удовлетворяет неравенствам $f(a)<c<f(b)$, то на отрезке найдется такая точка x_0, что $f(x_0) = c$.*

Доказательство этих теорем основано на принципе стягивающих отрезков. Заметим, что теорема Брауэра и теорема Больцано эквивалентны, то есть одна из них может быть получена в качестве следствия другой.

С помощью теоремы Больцано можно доказать ряд на первый взгляд весьма неочевидных утверждений:

1. Первая теорема Борсука о блинах. Если A и B – ограниченные фигуры на плоскости, то существует прямая, которая делит каждую из этих фигур на две части равной площади.

2. Вторая теорема Борсука о блинах. Если A – ограниченная фигура на плоскости , то существуют две взаимно перпендикулярные прямые, разделяющие A на четыре части одинаковой площади.

3. Вокруг всякой замкнутой кривой на плоскости можно описать квадрат.

4. Теорема Пала. Всякая плоская фигура диаметра d может быть заключена в правильный шестиугольник, у которого расстояние между параллельными сторонами равно d.

5. Теорема Борсука. Всякая плоская фигура диаметра d может быть разбита на три части диаметра меньше d.

6. Задача Г. Уитни. Возможно ли в момент отхода поезда поместить стержень (прикрепленный шарниром к полу вагона) в такое начальное положение, то есть дать ему такой угол наклона, чтобы на протяжении всего пути он не прикоснулся к полу, будучи предоставлен воздействию движения поезда и силе собственной тяжести?

Журнал “Математика в школе” в трех номерах (3(1969), 5(1969), 5(1970)) под общим названием “Научные основы школьного курса математики” опубликовал три лекции А.Н. Колмогорова (из десяти), которые он читал в Московском университете для учителей (см. [1]). В первом журнале была помещена следующая аннотация автора: “Десять лекций под этим названием были прочитаны мною в Центральном лектории общества “Знание” в 1968-69 учебном году. Естественно, что эти лекции не могут заменить более подробного изложения, пригодного, например, в качестве руководства для педагогических институтов. Я решаюсь на публикацию этих лекций в "Математике в школе" лишь потому, что потребность в более современном изложении научных основ перестройки школьного курса математики очень настоятельна...".

Авторы надеются, что наша статья привлечет внимание учителей к педагогическому творчеству в этом направлении и некоторым образом дополняет публикации по обсуждаемой теме.

Библиографический список

1. *Колмогоров А.Н.* Математика – наука и профессия. М.: Наука, 1988.
2. *Пойа Д.* Математическое открытие. М.: Наука, 1976.
3. *Клейн Ф.* Лекции о развитии математики в XIX столетии. М.: Наука, 1989.
4. Явление чрезвычайное. Книга о Колмогорове. М.: ФАЗИС, МИРОС, 1999.
5. *Вавилов В.В.* Принцип Дирихле // Научно-методическая газета "Математика. 1 сентября". 2006. № 15.
6. *Вавилов В.В., Колоскова Е.М.* Принцип включения-исключения // Научно-методическая газета "Математика. 1 сентября". 2006. № 24.
7. *Колоскова Е.М.* Применяем принцип математической индукции // Научно-методическая газета "Математика. 1 сентября". 2007. № 4.

Об исследовании возможностей фундирования профессионально-математических умений студентов педуниверситета при овладении понятием "мера"

Л.П. Латышева, С.Н. Шарнина

Идея компетентностно-ориентированного обучения математике в течение многих лет обсуждается научной и педагогической общественностью не только в связи со школьным образованием, но и применительно к подготовке профессионала. Главная особенность компетентностного подхода – акцентирование внимания на результате образования, в качестве которого выступает не сумма усвоенной информации, а способность специалиста действовать в различных проблемных ситуациях, характерной чертой которых является необходимость выбора тех или иных профессиональных решений.

В педагогическом вузе преподавание фундаментальных учебных дисциплин требует такой их организации, которая обеспечивала бы формирование знаний, умений и личностных качеств, способствующих достижению профессионализма и формированию педагогической направленности личности студентов – будущих учителей. В свете названных выше тенденций развития образования это обуславливает обеспечение профессионально-предметной компетентности преподавателя математики, под которой мы понимаем способность личности решать профессиональные задачи в условиях неопределенности на основе владения содержательными и процессуальными компонентами деятельности, связанной с преподаванием учебного предмета.

В формировании профессионально-предметной компетентности будущего учителя математики, безусловно, важное внимание следует уделить трем составляющим: содержательной, технологической, личностной. Причем следует учитывать, что в содержательной составляющей необходимо, в частности, обозначать связь конкретной вузовской математической дисциплины и соответствующего школьного предмета. В качестве элемента технологической составляющей, по возможности, во все математические курсы полезно включать подготовку студентов к преподаванию (и даже во фрагментах осуществлять его), поскольку в нем в той или иной степени отражены все основные аспекты профессионально-педагогической деятельности. А личностная составляющая, в частности, может способствовать формированию ранней профессионализации в рамках обучения студентов педагогического вуза, например, курсу математического анализа посредством развития необходимых профессиональных и математических умений [2].

В связи с содержательной составляющей структуры профессионально-предметной компетентности следует заметить, что высказанная применительно к школьной практике идея о необходимости фокусировать общенаучное содержание образования в виде “узловых точек” (для достижения обучающимися целостного образа действительности) имеет прямое отношение и к обучению в педвузе. “В качестве “узловых точек”, вокруг которых концентрируется изучаемый материал, выступают фундаментальные образовательные объекты – ключевые сущности, отражающие единство мира и концентрирующие в себе реальность познаваемого бытия” [5. С. 56]. Такие объекты в “знаниевой” форме проявляются в понятиях, категориях и т.п.

Одним из подобных объектов можно считать общее понятие “мера”, целостное научное представление о котором, начиная с раннего возраста, формируется у человека в течение длительного периода обучения в школе и вузе. Для будущего учителя математики представляется важным иметь четкое представление об его развитии (от пропедевтического, сформировавшегося при изучении школьного курса математики до строгого вузовского определения) с перспективой квалифицированного профессионального использования в последующей практике преподавания.

Как известно, профессиональные умения связаны с включением человека в социально-регулируемый и целенаправленный процесс. Умения, входящие в структуру профессионально-предметной компетентности будущего учителя математики и представляющие собой реализацию способности личности решать профессиональные задачи на основе владения содержательными и процессуальными компонентами деятельности, связанной с изучением и преподаванием математики, естественно относить к *профессионально-математическим умениям.*

Можно выделить гностические, конструктивные, проектировочные, организационные, коммуникативные профессионально-математические умения.

Под гностическими профессионально-математическими умениями будем понимать обобщение и систематизацию полученных знаний, анализ собственной деятельности. Проектировочные профессионально-математические умения – это умения, связанные с формулированием конечной цели и искомого результата в деятельности учителя математики. Коммуникативные профессионально-математические умения характеризуются установлением педагогически целесообразных взаимоотношений между участниками педагогического процесса, мотивированием их к занятию предстоящей математической деятельностью. Термином конструктивные профессионально-математические умения будем обозначать умения, связанные с отбором и построением изучаемого математического материала, с проектированием собственной деятельности. К организаторским профессионально-математическим умениям мы отнесем умения, связанные с конкретной организацией работы с математическим материалом с целью реализации профессионального замысла. Весь комплекс перечисленных умений необходимо формировать в связи с овладением студентами понятием "мера" на разных уровнях его обобщения. Кратко можно указать наиболее важные из этих умений (см., например, [3]).

Интеллектуальные умения, представляющие совокупность действий и операций по получению, переработке и применению информации в общеобразовательной деятельности, очевидно, играют важную роль в формировании перечисленных выше профессионально-математических умений.

С целью изучения объективных характеристик качеств личности и интеллектуальных умений студентов было предпринято специальное диагностическое исследование. Особое внимание при этом было уделено таким параметрам, вклад в формирование которых определенным образом был связан с овладением студентами понятием "мера".

Для оценки объективных характеристик личности и деятельности студентов использовались следующие показатели:

- средний показатель академической успеваемости по математическим дисциплинам;
- показатель уровня развития интеллекта;
- показатель успешности решения задач, связанных с использованием понятия "мера".

В исследовании принял участие 61 студент со второго по четвертый курс математического факультета Пермского педуниверситета.

Для оценки показателя IQ интеллектуального развития студентов использовался тест структуры интеллекта Амтхауэра. Показатель АУ академической успеваемости по математическим дисциплинам оценивался путем усреднения экзаменационных оценок за весь период обучения в вузе. Комплексная характеристика умения студентов оперировать разнокачественными понятиями, связанными в разной степени с понятием "мера", оценивалась с помощью предлагаемого студентам перечня заданий разной сложности. Балл за успешно решенные задачи из такого перечня представлял показатель KZ. Полученные данные представлены в диаграмме средних значений показателей, характеризующих уровень развития интеллекта ($\frac{IQ}{10}$), академическую успеваемость (АУ) и балл за решенные задания, связанные с понятием "мера" (KZ), для выборок, полученных для второго, третьего и четвертого курсов (рис. 1).

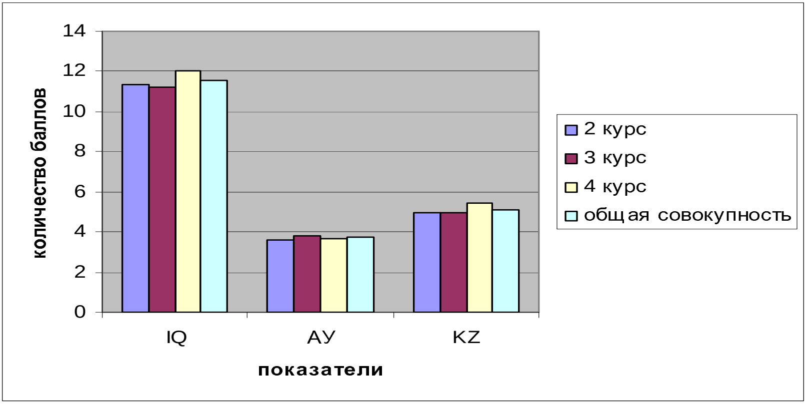


Рис. 1. Средние значения показателей, характеризующих студентов математического факультета педуниверситета

Из данной диаграммы видно, что самый высокий уровень интеллекта наблюдается у студентов четвертого курса, а у студентов третьего курса он несколько ниже, чем у остальных. Академическая успеваемость выше у третьего курса, чем у других. Это позволяет предположить, что уровень интеллекта напрямую не связан с уровнем академической успеваемости студентов. Студенты четвертого курса получили больший балл за решенные математические задания, что может свидетельствовать об их ответственности в обучении на старших курсах педвуза. Балл за решенные задания у студентов второго и третьего курса практически одинаковый. По приведенным данным можно предположить, что к концу периода обучения нет стабильно выраженного уровня достижений студентов педвуза, в том числе и в связи с овладением понятием “мера”.

Полученные в ходе исследования данные подверглись статистической обработке: применялись метод корреляционного анализа и сравнение выборочных совокупностей по t-критерию Стьюдента отдельно по курсам и по всей выборке.

Таблица 1

Матрица интеркорреляций для показателей всей выборочной совокупности студентов

Общая совокупность	IQ	АУ	KZ
IQ	1		
АУ	0,211	1	
KZ	0,512	0,671	1

Результаты корреляционного анализа, представленные в табл. 1, показывают, что связь между показателями уровня интеллекта и академической успеваемости незначительна (0,211). Коэффициенты корреляции между показателем уровня интеллекта и баллом за решенные задания (0,512), между показателем академической успеваемости и баллом за решенные задания (0,671) говорят о средней степени взаимосвязи. Сравнение этих результатов и данных по курсам характеризует общую выборку примерно так же, как студентов третьего курса (т.е. не прошедших еще “профессионализацию”).

Статистическая обработка с вычислением значения t-критерия Стьюдента дала следующие результаты:

- для второго и третьего курса: $T_{\text{набл}}IQ = 0,1728$; $T_{\text{набл}} = 0,9286$; $T_{\text{набл}}KZ = 0,0670$; $k = 36$ (k – число степеней свободы);
- для второго и четвертого курсов: $T_{\text{набл}}IQ = 1,6908$; $T_{\text{набл}} = 0,4019$; $T_{\text{набл}}KZ = 1,5420$; $k = 34$;
- для третьего и четвертого курсов: $T_{\text{набл}}IQ = 2,3474$; $T_{\text{набл}} = 0,7152$; $T_{\text{набл}}KZ = 1,9376$; $k = 46$.

Эти данные означают, что на втором и третьем курсах все выборочные средние не различаются значимо, т.е. по всем показателям студенты в среднем не увеличили своих результатов.

Выборочные средние показателя развития интеллекта студентов второго и четвертого курсов различаются значимо (с вероятностью 0,90). Студенты за два года учебы в среднем улучшают свой интеллектуальный потенциал. При этом выборочные средние показателей академической успеваемости и баллов за решенные задания по теме "мера" различаются незначимо, т.е. в этой сфере ощутимых изменений не происходит.

У студентов третьего и четвертого курсов выборочные средние показателя уровня интеллекта различаются значимо (с вероятностью 0,95). То же имеет место для выборочных средних баллов за решенные задания по теме "Мера" (с вероятностью 0,90). Но выборочные средние показателей академической успеваемости различаются незначимо.

Студенты, которые через год пойдут работать в школы, имеют невысокую среднюю успеваемость и низкий уровень знаний и умений по такой важной теме математического анализа, какой является "Мера". Это, в частности, свидетельствует о необходимости что-то изменить в системе преподавания и профессиональной подготовке.

Подсчитанные уравнения линейных регрессий для обозначенных ранее выборочных совокупностей даны в табл. 2.

Таблица 2

Уравнения прямых линий регрессий

Курсы	Уравнения прямых линий регрессий KZ на АУ	r коэффициент корреляции	Уравнения прямых линий регрессий KZ на IQ	r коэффициент корреляции
2-й курс	*KZ=1,34 АУ–1,42*	0,867		
3-й курс	*KZ=1,11 АУ–17,96*	0,654	*KZ=0,04 IQ+11,14*	0,541
4-й курс	*KZ=1,22 АУ+18,56*	0,660	*KZ=0,05 IQ–14,15*	0,587
Общая совокупность	*KZ=1,19 АУ+42,53*	0,671	*KZ=0,04 IQ+30,54*	0,512

Из нее видно, что балл за решенные задания, связанные с понятием "мера" (KZ), статистически зависит от академической успеваемости (АУ) на протяжении всего периода обучения. А статистическая зависимость показателя, выражающего балл решенных заданий, связанных с понятием "мера" (KZ), от уровня развития интеллекта (IQ) слабая. Кроме того, все уравнения в одной и той же группе (регрессия KZ на АУ и регрессия KZ на IQ) имеют приблизительно одинаковую структуру (см. рис. 2, рис. 3). Анализ табл. 2 показывает, что с разной степенью тесноты взаимосвязи (от $r = 0,654$ до $r = 0,867$) средняя академическая успешность обучения положительно влияет на уровень овладения знаниями и умениями, связанными с понятием “мера”. А вот об уровне интеллекта в среднем такого вывода

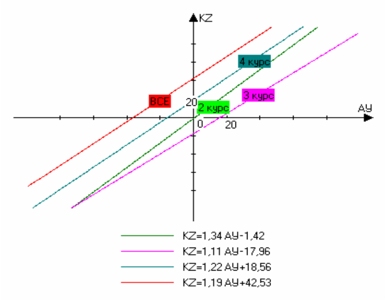


Рис. 2. Прямые линии регрессий KZ на АУ

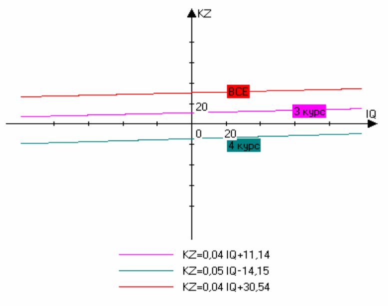


Рис. 3. Прямые линии регрессий KZ на IQ

В целом, проведенное диагностическое исследование показало, что необходим поиск путей совершенствования процесса формирования профессионально-математических умений в названной сфере овладения фундаментальным математическим понятием.

Один из таких путей мы видим в реализации на практике предложенной учеными В.В. Афанасьевым, Е.И. Смирновым, В.Д. Шадриковым концепции фундирования опыта личности, предусматривающей согласование или оптимизацию взаимодействия фундаментальной и профессиональной составляющих в общей структуре вузовской подготовки [4]. Эту концепцию отличает “определение профессионально ориентированной теоретической основы для спиралевидной схемы развертывания и моделирования базовых учебных элементов в направлении их творческого обобщения в системе математической подготовки студентов педвузов” [1. С. 32].

В русле идей этой концепции построена спираль фундирования при формировании у студентов математического факультета педуниверситета понятия “мера” на уровне “данных” до ее глубокого теоретического обобщения на уровне “сущности”. Она включает в себя несколько звеньев (см. рис. 4). Важно заметить, что такие понятия, связанные с понятием “мера”, как “длина кривой” и “площадь поверхности”, не укладываются в обсуждаемую схему, т.е. не находят обобщения в предлагаемой спирали фундирования. Как отмечает Е.И. Смирнов, остается открытой проблема теоретического обобщения данных понятий, актуальная не только для методики, но и для математики как науки.

Можно отметить и проанализировать планируемые изменения в развитии профессионально-математических умений студентов при переходе от одного блока спирали к другому, выделяя такие умения, которые являются важными и существенными не только внутри каждого уровня спирали, но и особенно ярко проявляются при подъеме на новый ее "виток". Этот анализ помогает выполнить схема признаков обобщений понятий, характеризующих разные этапы (ступени) обучения, предложенная психологами [5] (см. рис. 5).

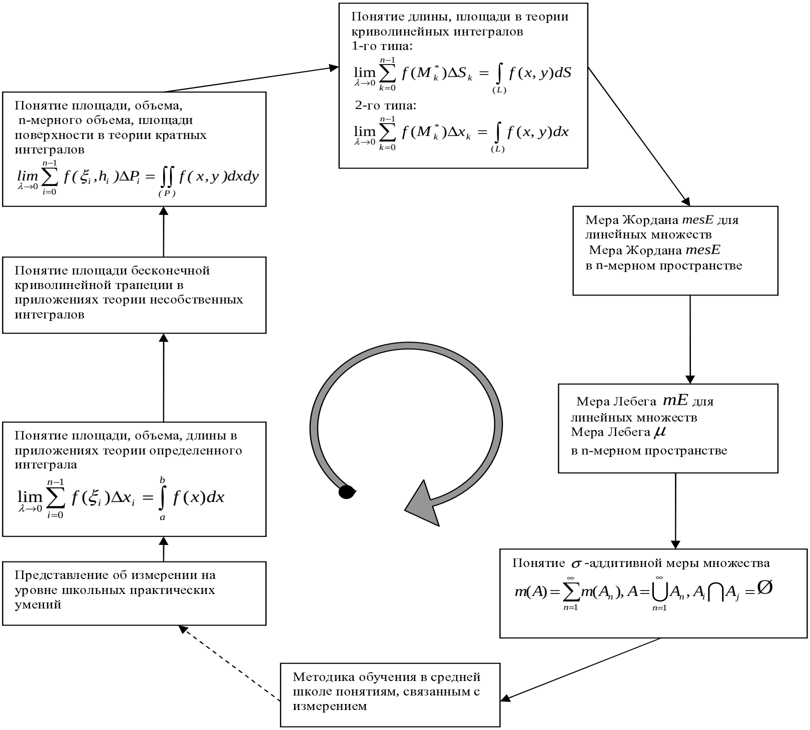


Рис. 4. Спираль фундирования понятий, связанных с понятием "мера"

В отличие от традиционного вузовского подхода к обучению математическому анализу будущих учителей в данную спираль входят обычно выходящие за рамки программы такие понятия, как мера Лебега в евклидовом пространстве, мера Жордана на линейном множестве и в евклидовом пространстве, σ-аддитивная мера. Чтобы достигнуть необходимой целостности и глубины системы знаний и профессионально-математических умений, связанных с понятием “мера”, представляется полезным в педагогическом университете уделить приведенным спиралям фундирования особое внимание, хотя бы в рамках магистратуры.

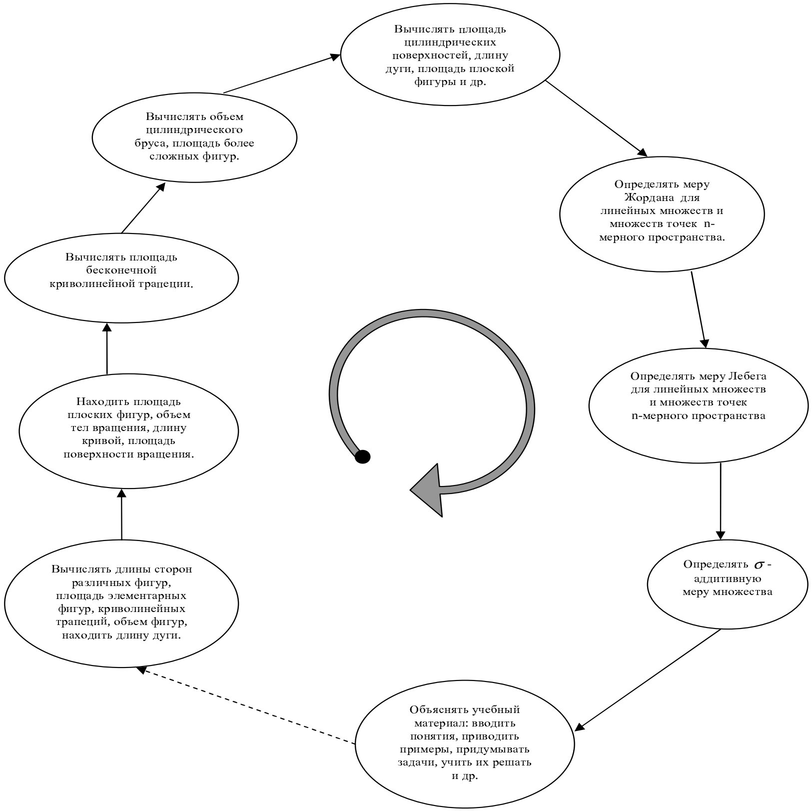


Рис. 5. Спираль фундирования профессионально-математических умений студентов в контексте изучения понятия “мера”

Библиографический список

1. *Буракова Г.Ю.* Дидактический модуль по математическому анализу: теория и практика: учеб. пособие / Г.Ю. Буракова, А.Ф. Соловьев,

Е.И. Смирнов; под ред. Е.И. Смирнова. Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2002. 181 с.

2. *Латышева Л.П.* Повышение профессионально-предметной компетентности будущего магистра образования в обучении математическому анализу / Л.П. Латышева // Математическое образование и наука в педвузах на современном этапе: сб. науч. тр. / отв. ред. А.Е. Малых; Перм. гос. пед. ун-т. Пермь, 2006.С. 102-111.
3. *Латышева Л.П.* Повышение профессионально-предметной компетентности будущего учителя в обучении математическому анализу / Л.П. Латышева // Сборник трудов международной конференции "IV Колмогоровские чтения". Ярославль, 2006. С. 256-264.
4. Подготовка учителя математики: Инновационные подходы: учебное пособие / под ред. В.Д. Шадрикова. М.: Гардарики, 2002. 383 с.
5. *Хуторской А.В.* Ключевые компетенции: технология конструирования / А.В. Хуторской // Народное образование. 2003. № 5. С. 55-61.

Элементы коммутативной алгебры в системе дополнительного математического образования школьников и студентов младших курсов

А.С. Штерн

На протяжении длительного времени автор ведет курс занятий для школьников старших классов и студентов 1-2 курса по теме "Многочлены от нескольких переменных (элементарное введение в коммутативную алгебру)". Мы полагаем, что практика проведения этих занятий дает хороший материал для разговора о том, что такое дополнительное математическое (и не только) образование, каковы его принципы и цели. Прежде чем приступать к такому разговору, изложим кратко программу курса.

Многочлены от нескольких переменных и геометрия

1. Понятие одночлена и многочлена от нескольких переменных. Разложение по степеням одной из переменных. Разложение в сумму однородных компонент. Произведение двух ненулевых многочленов от нескольких переменных не равно нулю. Степень произведения двух многочленов.

2. Понятие нуля многочлена от двух переменных. Алгебраические кривые. Коники и кубики. Декартов лист. Вырожденные кривые.

3. Выделение линейного множителя из многочлена, который зануляется на прямой. Следствие данного набора многочленов. Теорема о

девяти точках на кубической кривой и следствия из нее (теоремы Паскаля и Паппа).

4. Пучки коник. Теорема о бабочке. Описание пучка коник, проходящего через данные четыре точки. Ортопучок треугольника.

Идеалы. Теорема Гильберта о базисе

5. Понятие кольца. Многочлены от нескольких переменных как многочлены от одной переменной с коэффициентами в кольце. Кольцо целых гауссовых чисел.

6. Понятие идеала. Главные идеалы. Идеалы многочленов, зануляющихся в данной точке. Связь между существованием неглавных идеалов и отсутствием деления с остатком (на примере многочленов от одной и нескольких переменных). Определение евклидова кольца.

7. Факторкольца. Кольцо лорановских многочленов как факторкольцо. Простые и максимальные идеалы.

8. Обратимые и неразложимые элементы кольца. Факториальность. Примеры колец, не удовлетворяющих условию факториальности. Связь между евклидовостью и факториальностью.

9. Кольцо многочленов от нескольких переменных как пример факториального неевклидова кольца.

10. Теорема о конечности множества общих нулей двух многочленов, не имеющих общих неприводимых множителей.

11. Факториальность кольца многочленов от одной переменной с коэффициентами в факториальном кольце. Поле частных. Теорема о существовании поля частных.

12. Обрыв возрастающих цепочек идеалов в кольце многочленов от двух переменных с коэффициентами в поле.

13. Эквивалентные определения нетерова кольца. Нетеровы кольца, как обобщение колец главных идеалов. Простейшие примеры нетеровых колец. Примеры колец, не являющихся нетеровыми.

14. Свойства нетеровых колец. Теорема Гильберта о базисе.

Теорема Гильберта о нулях. Алгебраические множества

15. Формулировка теоремы Гильберта о нулях и теоремы о совместности. Редукция теоремы о совместности к описанию максимальных идеалов в кольце многочленов от нескольких переменных.

16. Описание максимальных идеалов по Амицуру.

17. Теорема Нетера о нормализации.

18. Понятие алгебраического множества. Неприводимые алгебраические множества: определения и примеры.

19. Теорема о разложении алгебраического множества в объединение неприводимых.

20. Размерность алгебраического множества: от интуитивного представления к строгому определению.

Содержание предлагаемого курса трудно назвать оригинальным. Книг по коммутативной алгебре существует много. Среди наиболее известных в нашей стране можно упомянуть классическую монографию Самюэля и Зариского, а также замечательную книгу Атьи и Макдональда. Наличие в лекциях по коммутативной алгебре отдельных параграфов, более уместных в учебнике по алгебраической геометрии, также не является чем-то новым. В таком духе выдержана переведенная на русский язык книга Майлса Рида "Алгебраическая геометрия для всех" и, к сожалению, непереведенная монография Дэвида Айзенбуда с говорящим за себя названием "Commutative algebra with a view towards algebraic geometry". Глава "Коммутативные кольца" университетского учебника Э.Б. Винберга "Курс алгебры" также содержит параграф, посвященный некоторым понятиям алгебраической геометрии. Безусловно, нужно упомянуть недавно вышедшую книгу Кокса, Литла и О'Ши "Идеалы, многообразия и алгоритмы". В общем, с точки зрения подбора материала здесь все хорошо известно. В то же время, на наш взгляд, методические принципы курса заслуживают некоторого обсуждения.

Прежде всего, необходимо уточнить, кому адресован курс. Практика преподавания такова. Первый раздел неоднократно изучался на математических кружках с учениками 10-11 классов, а иногда и с наиболее способными девятиклассниками. С некоторым лукавством можно сказать, что "никакие предварительные знания не предполагаются", хотя, конечно же, опыт работы с многочленами от одной переменной и знание основных фактов о них является необходимым для по-настоящему глубокого понимания. Но прямых ссылок на какие-либо факты такого типа действительно нет. Только последний раздел требует владения понятием размерности векторного пространства. На основании собственных преподавательских впечатлений могу сказать, что занятия проходят при огромном интересе школьников. Тому, по-видимому, есть следующие объяснения. Прежде всего, в этом разделе содержатся задачи, близкие, а часто и известные по формулировке школьнику (задача о бабочке, теорема Паскаля, теорема Паппа). Классические методы решения этих задач достаточно сложны и, что хуже всего, искусственны. Доказательства с помощью многочленов от нескольких переменных, конечно, очень неожиданны, но основаны на использовании не специальных приемов, а некоторого метода. Сам факт существования единого метода, позволяющего получить доказательства далеких, на первый взгляд, теорем, воспринимается школьником с формирующимся математическим вкусом как весьма приятная неожиданность. Другим привлекательным фактором оказывается его специфически олимпиадный характер. В нашей стране традиционно развитие дополнительного математического образования связано с практикой олимпиадного движения. Возможно, это является исторической случайностью. Возможно, существуют гораздо более эффективные традиции такого рода. Но факт остается фактом: возможность решать олимпиадные задачи на занятии является притягательным фактором для большинства российских школьников, серьезно занимающихся математикой. Тем важнее насыщать такие занятия задачами, олимпиадными по форме, но несущими отпечаток серьезных математических идей. В качестве примера можно указать следующую задачу, впервые предложенную на Всесоюзной математической олимпиаде 1982 года.

Существуют ли многочлены $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$, для которых выполнено тождество $(x-y+1)^3P+(y-z-1)^3Q+(z-2x+1)^3R=1$? Тот же вопрос для следующего тождества $(x-y+1)^3P+(y-z-1)^3Q+(z-x+1)^3R=1$.

Некоторая тяжеловесность формулировки этих задач в контексте курса не ощущается, а глубокое математическое содержание (линейность, идеи комбинаторной алгебры) отчетливо выступает на первый план. И, наконец, совершенно ошеломляющей выглядит в глазах школьников сама возможность использовать соображения делимости для решения геометрических задач. Естественный консерватизм обучающегося, основанный в конечном итоге на подсознательном приятии бритвы Оккама (“не вводи лишних слов”), и помноженный на психологически понятную “антипонятийность” сознания способного подростка (“а я и без всяких методов все решу”) здесь оказывается полностью преодоленным.

Итак, привлекательность этого материала для подготовленных школьников понятна. Но курс предназначен не только (и не столько) для школьников. Он на протяжении нескольких лет читается студентам младших курсов математического факультета. Насколько же оправдана такая элементарная преамбула в университетском спецкурсе? Думается, что вполне оправдана. Мы мало думаем о проблеме преемственности школьного и университетского обучения, а между тем, проблема весьма серьезна. Традиционно урок хорошего школьного учителя математики в нашей стране ориентирован на пробуждение интеллектуальной активности школьника и содержит существенные диалогические элементы. Ученики таких педагогов, пока еще составляющие, к счастью, значительную часть студентов математических факультетов, справедливо надеются на то, что изучение любимого предмета в университете по-прежнему будет проходить в ситуации общения. Но они при этом часто оказываются обманутыми. Сама форма университетской лекции предполагает "молчаливость" аудитории. Семинарские занятия часто бывают посвящены освоению технически сложных алгоритмов, что также не способствует интеллектуальной активности. К тому же, резкий разрыв между материалами университетских курсов и содержанием школьного образования приглушает познавательную активность обучаемого. В конечном итоге, это обычный эффект растерянности человека в незнакомой ситуации. С этим трудно, да и не всегда нужно бороться. Не надо только забывать о существовании проблемы, которая часто приводит к потере талантливого студента для математики и математического образования, и, в любом случае, требует для своего решения через 2-3 года значительных усилий научного руководителя, восстанавливающего в меру своего педагогического таланта ситуацию "учеба как диалог". В этой связи хочется обратить внимание на необходимость курсов или отдельных глав, обращающихся к школьному опыту студента. Именно на таком материале проще "спровоцировать" внутренний диалог, поддержав, таким образом, интеллектуальную активность обучаемого. Точнее, речь идет не просто об обращении к школьному материалу (это на младших курсах происходит регулярно), а о том, что Феликс Клейн называл взглядом на элементарную математику "с высшей точки зрения". Думается, что вводная глава спецкурса дает пусть очень скромный, но все же вклад в решение этой проблемы.

Вторая глава занимает основное место в курсе. Ее цель – не только изложить основные понятия коммутативной алгебры, но и, в первую очередь, дать представление о том, как "разворачивается" понятийный аппарат математической теории как таковой. При этом знакомство с понятийным аппаратом теории происходит в процессе рассмотрения задач, приводящих к возникновению соответствующих понятий. В качестве примера можно привести параграф, демонстрирующий, как понятие поля частных возникает в ходе попытки проанализировать доказательство факториальности кольца многочленов от нескольких переменных, или параграф с доказательством теоремы Гильберта о базисе, демонстрирующий, как понятие идеала помогает решить задачу, допускающую формулировку на вполне абитуриентском языке следствий и равносильностей алгебраических уравнений. Хотелось бы отметить, что слова "приводящих к возникновению понятий" не следует понимать непременно в историческом аспекте. Далеко не всегда удается объяснить первокурсникам (или, тем более, школьникам), как возникло то или иное понятие исторически, но такая цель в рамках данного курса и не ставится. Мы стараемся погрузить слушателя в ситуацию “рождение понятия в ходе решения задачи”, сняв тем самым очень опасный внутренний вопрос “а зачем все это надо?”. Основанием для постановки такого вопроса, как правило, является не поиск практических применений, а внутренний протест против немотивированности появления теорем и определений. Он не только обоснован психологически, но и является для преподавателя полезным напоминанием о необходимости показывать математику, как глубоко органичную систему с богатыми внутренними связями.

Третья глава отличается от второй существенно более высоким уровнем сложности. Ее основное содержание – доказательство теоремы Гильберта о нулях и изложение некоторых вопросов теории алгебраических множеств. При этом методический принцип изложения материала с опорой на активизированные преподавателем интуитивные представления слушателя об объекте изучения остается неизменным. В связи с этим очень удачным оказывается и почти школьная элементарность формулировки теоремы о нулях, и неожиданная связь алгебраических множеств с абсолютно классическими олимпиадными задачами, без решения которых не обходится ни один достаточно продолжительный математический кружок. Для полноты картины приведем формулировки некоторых из этих задач в контексте соответствующих тем курса.

А) Редукция утверждения о разложении алгебраического множества в конечное объединение неприводимых подмножеств к теореме Гильберта о базисе.

Известно, что человечество бессмертно, а каждый человек смертен. Число людей в каждом поколении конечно. Докажите, что найдется бесконечная мужская цепочка, начинающаяся с Адама.

Б) Изложение понятия размерности алгебраического множества.

Описание многочленов от одной переменной, принимающих целые значения при всех целых значениях аргумента.

После изложения программы и методических принципов построения курса хочется более четко сформулировать его цели. Ясно, что он не является, в отличие от большинства университетских спецкурсов, введением в профессиональную деятельность в данной области, поскольку объем излагаемого материала слишком мал. Безусловно, темп можно было бы увеличить, изложив материал более формально. Это не только допустимо в рамках обычного спецкурса, но и совершенно необходимо, поскольку предполагает существенную самостоятельную работу слушателя по осмыслению методов и отслеживанию внутренних связей. Собственно говоря, именно способность к такой работе является первым и важнейшим условием пригодности студента к самостоятельной научной деятельности. Наш курс требует для своего восприятия достаточного напряжения, но в то же время оказывается для активного слушателя очень "комфортным", причем забота об этой интеллектуальной комфортности (а не просто о понятности) занимает непропорционально большое место, если смотреть с точки зрения методики чтения обычных спецкурсов. По жанру это скорее "курс дополнительного образования", причем дополнительное образование мы понимаем не в принятом ныне в практике высшей школы смысле обучения дополнительным профессиональным навыкам. Речь идет скорее о таком понимании этого термина, который используется применительно к занятиям математических кружков школьников. Их отличие от обычных занятий состоит в том, что развивающие цели рассматриваются как приоритетные по отношению к обучающим, причем развитие понимается как рост логической культуры и приобщение к профессиональному мышлению, специфичному в данной области. Такие занятия могут и часто становятся началом серьезной профессиональной работы, но не менее важна и другая их функция. Она заключается в создании ситуаций, вовлекающих в процесс профессионального творческого мышления людей, которые в будущем профессионально в этой области работать не будут. Речь идет не о подготовке к будущей профессиональной "математической жизни", а об организации такой жизни в данный момент и в рамках тех возможностей, которые предоставляет уровень подготовки слушателя. В наше время значительная часть студентов математического факультета не планирует заниматься не только научной работой, но и вообще работой, основанной на серьезном использовании математики. Тем важнее дать им опыт "математической жизни" в любой момент, когда это оказывается возможным.

Об одном методе суммирования многочленов

К.Н. Лунгу

1. Пусть $P_m(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_mx^m$ – произвольный многочлен степени m переменной x. В статье устанавливается эффективный метод нахождения суммы значений этого многочлена при натуральных значениях аргумента, т.е. определения суммы вида

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} P_m(k) \quad \text{при любых} \quad n \in N. \tag{1}$$

Частный случай этой задачи с $P_m(x) = x^m$ рассмотрен в известной книге С.И. Новоселова [1]. Используемый при этом прием основан на формуле:

$$(x+1)^{m+1}-x^{m+1}=x^{m+1}+C_{m+1}^1x^m+C_{m+1}^2x^{m-1}+\ldots+C_{m+1}^m x+ \\ +C_{m+1}^{m+1}-x^{m+1}=C_{m+1}^1x^m+C_{m+1}^2x^{m-1}+\ldots+C_{m+1}^m x+C_{m+1}^{m+1}, \qquad (2)$$

где $C_{m+1}^t=\frac{(m+1)\cdot m\cdot(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-t+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot t}=\frac{(m+1)!}{(m-t+1)!t!}$ – биномиальные коэффициенты, соответствующие $(m+1)$-й степени бинома и последующим суммированием таких разностей при $x=1,2,3,...,n$.

Из этого равенства видно, что для определения суммы m-х степеней $\sum\limits_{k=1}^{n} k^n$ необходимо знать подобные суммы всех степеней меньших, чем m.

Другой подход решения этой задачи предложен В.Л. Гончаровым [2]. При этом в качестве средства суммирования привлекаются факториальные полиномы. Тем самым сумма степеней представляется в виде комбинации факториальных полиномов и для получения компактной формулы получаемую комбинацию необходимо еще преобразовать, что требует много дополнительной работы.

Например, для суммы четвертых степеней в [2] приведена формула

$$S_4(n)=1^4+2^4+\ldots+n^4=\Phi_2(n)+14\Phi_3(n)+36\Phi_4(n)+24\Phi_5(n)=\frac{n(n-1)}{2}+$$

$$+14\cdot\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}+36\cdot\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}+24\cdot\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5!}.$$

Отметим, что в школьных пособиях (см., например, [2]) и пособиях для педагогических вузов (см., например, [3]) рассматриваются задачи на доказательство подобных равенств, при помощи метода математической индукции. Например, доказать методом математической индукции равенство

$$S_4(n)=1^4+2^4+\ldots+n^4=\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}. \qquad (3)$$

Нам кажется, что очень нелогично решать задачи на доказательство тех или иных равенств, формул, соотношений, не зная, как они получаются. Не менее интересно получить какую-либо формулу, чем ее доказать. Как уже отмечено, для того, чтобы получить формулу (3) необходимо либо знать сумму всех первых n натуральных чисел, сумму их квадратов и сумму кубов, либо использовать равенство В.Л. Гончарова и его преобразовать, привести к виду (3). Других способов суммирования не обнаружили.

Поэтому хотим восполнить обозначенный пробел и указать сравнительно простой метод и приемы его реализации для получения сумм вида (1). Простой в том смысле, что его математическая модель сводится к арифметическим действиям, точнее к линейной системы, решение которой арифметическое. Метод получения соответствующих формул основан на идеях использования конечных разностей.

2. Пусть $Q_{m+1}(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + ... + b_{m+1} x^{m+1}$ – произвольный многочлен степени $m+1$ переменной x. Тогда

$$Q_{m+1}(x+1) = b_0 + b_1(x+1) + b_2(x+1)^2 + ... + b_{m+1}(x+1)^{m+1}$$

и разность $Q_{m+1}(x+1) - Q_{m+1}(x)$, $x \in R$, которую называют первой разностью многочлена $Q_{m+1}(x)$ с шагом $h = 1$ [2], в силу равенства (2), является многочленом степени m и она не зависит от свободного члена b_0. Другими словами, действие взятия конечной разности многочлена понижает его степень на единицу. Обозначим

$$Q_{m+1}(x+1) - Q_{m+1}(x) = P_m(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_m x^m.$$

Правая часть этого равенства, однозначно определяется по многочлену $Q_{m+1}(x)$. Естественно, возникает вопрос: можно ли восстановить многочлен $Q_{m+1}(x)$ по его первой разности, т.е. по системе коэффициентов $\{a_0, a_1, a_2, ..., a_m\}$. Очевидно, что однозначно можно определить только коэффициенты $\{b_1, b_2, ..., b_{m+1}\}$. Сформулируем этот вывод в виде утверждения.

Утверждение. *Для любого многочлена* $P_m(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_m x^m$ *существует единственный многочлен* $Q_{m+1}(x) = b_1 x + b_2 x^2 + ... + b_{m+1} x^{m+1}$ *такой, что*

$$Q_{m+1}(x+1) - Q_{m+1}(x) = P_m(x). \tag{4}$$

Коэффициенты $Q_{m+1}(x)$ можно найти, исходя из равенства многочленов, приводящего к линейной системе из $m+1$ уравнения с $m+1$ неизвестными, получаемой в результате сравнения коэффициентов при одинаковых степенях в левой и правой частях (4):

$$\begin{cases} C_{m+1}^1 b_{m+1} = a_m, \\ C_{m+1}^2 b_{m+1} + C_m^1 b_m = a_{m-1}, \\ C_{m+1}^3 b_{m+1} + C_m^2 b_m + C_{m-1}^1 b_{m-1} = a_{m-2}, \\ \dots\dots\dots \\ C_{m+1}^{m+1} b_{m+1} + C_m^m b_m + ... + C_1^1 b_1 = a_0. \end{cases} \tag{5}$$

Эта треугольная система с отличным от нуля определителем (его значение легко посчитать - это $(m+1)!$ имеет единственное решение, которое может быть найдено приемом последовательной подстановки.

Заметим, что система (5) является в ясном смысле универсальной, коэффициенты ее левой части не зависят от данного многочлена $P_m(x)$, они зависят только от m. Если использовать метод обратной матрицы решения системы, то для нее можно составить универсальную обратную матрицу.

Например, для $m = 3$ основная матрица A и обратная ей матрица A^{-1} системы (5) имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{24} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & 8 & 0 & 0 \\ 6 & -12 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -12 & 24 \end{pmatrix}.$$

Многочлен $Q_{m+1}(x)$ нетрудно представить в явном виде, исходя и из структуры решения системы (5).

$$Q_{m+1}(x) = \begin{vmatrix} x^{m+1} & x^m & x^{m-1} & x^{m-2} & \dots & 0 & \\ C^1_{m+1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_m \\ C^2_{m+1} & C^1_m & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{m-1} \\ C^3_{m+1} & C^2_m & C^1_{m-1} & 0 & \dots & 0 & a_{m-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C^{m+1}_{m+1} & C^m_m & C^{m-1}_{m-1} & C^{m-2}_{m-2} & \dots & C^1_1 & a_0 \end{vmatrix} : \Delta,$$

где $\Delta = m!$ – основной определитель системы уравнений.

Например, для функции $P_2(x) = 3x^2 + 2x + 1$ многочлен $Q_3(x)$ имеет вид

$$Q_3(x) = \begin{vmatrix} x^3 & x^2 & x & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} : 6 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot x^3 - \begin{vmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot x^2 +$$
$$+ \begin{vmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot x = x^3 - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{2}x.$$

При небольших значениях $m = 2, 3, 4$ можно обойтись без системы (4), коэффициенты $Q_{m+1}(x)$ можно получить более простым, непосредственным путем. Например, определим многочлен $Q_3(x+1) = Ax^3 + Bx^2 + Cx$ такой, что его первая разность $Q_3(x+1) - Q_3(x)$ равна данному многочлену $P_2(x) = ax^2 + bx + c$.

Имеем:

$$Q_3(x+1) - Q_3(x) = A(x+1)^3 + B(x+1)^2 + C(x+1) - (Ax^3 + Bx^2 + Cx) =$$
$$= A(3x^2 + 3x + 1) + B(2x + 1) + C = P_2(x) = ax^2 + bx + c.$$

Отсюда получаем: $3A = a$, $3A+2B = b$, $A+B+C = c$. Следовательно:

$$A = a/3, \quad B = (b - a)/2, \quad C = c - b/2 + a/6. \tag{6}$$

4. А теперь переходим собственно к получению общего метода суммирования, т.е. вычислению сумм вида (1). Положим в равенстве (4) $x = 1, 2, ..., n$:

$$\begin{array}{l} P_m(1) = Q_{m+1}(2) - Q_{m+1}(1), \\ P_m(2) = Q_{m+1}(3) - Q_{m+1}(2), \\ .\ .\ .\ .\ .\ P_m(n) = Q_{m+1}(n+1) - Q_{m+1}(n). \end{array}$$

После сложения этих равенств, получаем искомую формулу

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} P_m(k) = Q_{m+1}(n+1) - Q_{m+1}(1). \tag{7}$$

Указание на то, что сумма вида (7) или (1) многочленов степени m есть многочлен степени $m+1$, имеется в книге И.Ф. Шарыгина [6. С. 149], но оно не используется.

Рассмотрим конкретные примеры применения формул (6) и (7).

Пример 1. Найти сумму $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + ... + n \cdot (n+1)$.

Решение. Принимаем $P_2(x) = x(x+1) = x^2 + x$, т.е. $a = 1$, $b = 1$, $c = 0$, $m = 2$. Согласно формулам (6): $A = 1/3$, $B = 0$, $C = -1/3$. Таким образом, $Q_3(x) = x^3/3 - x/3$ и $Q_3(1) = 0$. Следовательно, $Q_3(n+1) - Q_3(1) = (n+1)^3/3 - (n+1)/3 = n(n+1)(n+1)/3$.

Ответ: $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + ... + n \cdot (n+1) = n(n+1)(n+1)/3$.

Пример 2. Найти сумму $S_3(n) = 1^3 + 2^3 + ... + n^3$.

Решение. Установим сначала формулы, аналогичные формулам (6), соответствующие многочлену третьей степени $P_3(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ и по нему определим многочлен $Q_4(x) = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx$, для которого конечная разность равна $P_3(x)$. Имеем: $Q_4(x+1) - Q_4(x) = A(x+1)^4 + B(x+1)^3 + C(x+1)^2 + D(x+1) - (Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx) = A(4x^3 + 6x^2 + 4x + 1) + B(3x^2 + 3x + 1) + C(2x + 1) + D = ax^3 + bx^2 + cx + d.$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, приходим к системе (5), которая имеет вид:

$$\begin{array}{lll} x^3: & 4A = a; & A = a/4; \\ x^2: & 6A + 3B = b; & B = -a/2 - b/3; \\ x^1: & 4A + 3B + 2C = c; & C = -2a + b/2 + c; \\ x^0: & A + B + C + D = d; & D = 9a/4 - 5b/6 - c + d. \end{array}$$

В частности, в нашем случае $P_3(x) = x^3$, т. е. $a = 1$, $b = c = d = 0$, а тогда $A = 1/4$, $B = -1/2$, $C = 1/4$, $D = 0$.

Следовательно, $Q_4(x) = x^4/4 - x^3/2 + x^2/4$, $Q_4(1) = 0$. Искомая сумма равна $Q_4(n+1) - Q_4(1) = (n+1)^4/4 - (n+1)^3/2 + (n+1)^2/4 = n^2(n+1)^2/4$.

Ответ: $1^3 + 2^3 + ... + n^3 = n^2(n+1)^2/4$.

Пример 3. Найти сумму $\sum\limits_{k=1}^{m}(8k^3 + 6k^2 + 4k + 5)$.

Решение. Имеем $P_3(x) = 8x^3 + 6x^2 + 4x + 5$. Суммирующий многочлен $Q_4(x) = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx$ определим методом обратной матрицы, используя вид A^{-1}, полученный выше в п. 2. Получаем (первое произведение – произведение матрицы на вектор столбец, второе – скалярное произведение векторов) $Q_4(x) = A^{-1} \cdot (8; 6; 4; 5)^T \cdot (x^4; x^3; x^2; x) = 2x^4 - 2x^3 + x^2 + 4x$. Искомая сумма равна $Q_4(n+1) - Q_4(1) = 2n^4 + 6n^3 + 7n^2 + 8n$.

5. Систему (5) и формулу (7) наиболее удобно использовать в тех случаях, когда $Q_{m+1}(1) = 0$, что имело место в примерах 1 и 2. В общем случае, если $Q_{m+1}(1) \neq 0$, как в примере 4, то для определения искомой суммы, необходимо выполнить преобразование правой части (7).

Имеет смысл найти более простой прием суммирования, учитывающий условие $Q_{m+1}(1) \neq 0$ или включающий это условие в состав приема. Исходим из утверждения, которое по существу выше доказано и неоднократно подтверждено примерами: сумма значений многочлена степени m в натуральных точках есть многочлен степени $m+1$, т.е.

$$\sum_{k=1}^{n} P_m(k) = T_{m+1}(n). \tag{8}$$

Здесь $T_{m+1}(n)$ играет роль правой части формулы (7). Прием основан на идеи интерполяции: если сумма значений многочлена степени m есть многочлен степени $m+1$, то его коэффициенты могут быть найдены из условия, что он принимает данные значения в системе из $(m+1)$ различных точек, например, $n = 1, 2, 3, ..., (m+1)$. Речь идет о модификации системы (5), что представляет тот же метод неопределенных коэффициентов, только касающийся полного многочлена $T_{m+1}(n) = Q_{m+1}(n+1) - Q_{m+1}(1)$.

Пример 4. Найти сумму $S_4(n) = 1^4 + 2^4 + ... + n^4$.

Решение. Искомая сумма представляет собой многочлен пятой степени переменной n, т.е. имеет место равенство (ниже $T_5(n) = Q_5(n+1) - Q_5(1))$:

$$S_4(n) = 1^4+2^4+...+n^4 = T_5(n) = An^5+Bn^4+Cn^3+Dn^2+En+F, \ \ n \in N.$$

В качестве системы из 6 различных точек, о которых шла речь выше, принимаем значения $n = 1,2,3,4,5,6$ (можно брать любые другие $n \in N$):

$$\begin{array}{ll}
n=1: & A+B+C+D+E+F=1,\\
n=2: & 32A+16B+8C+4D+2E+F=17,\\
n=3: & 243A+81B+27C+9D+3E+F=98,\\
n=4: & 1024A+256B+64C+16D+4E+F=354,\\
n=5: & 3125A+625B+125C+25D+5E+F=979,\\
n=6: & 7776A+1296B+216C+36D+6E+F=2275.
\end{array} \tag{9}$$

Простейший прием решения этой системы – вычитание уравнений – вытекает из сути задачи суммирования и аппарата исследования. Из этого блока (системы) уравнений можно получить еще 4 блока, вычитая из каждого уравнения предыдущее. Затем, выделяя из каждого блока по одному уравнению, получаем треугольную систему, которую запишем в таком виде:

$$\begin{array}{ll}
1)\ A+B+C+D+E+F=1, & 2)\ 31A+15B+7C+3D+E=16,\\
3)\ 180A+50B+12C+2D=65, & 4)\ 390A+60B+6C=110,\\
5)\ 360A+24B=84, & 6)\ 180A=24.
\end{array}$$

Отсюда последовательно находим: $A = 1/5$, $B = 1/2$, $C = 1/3$, $D = 0$, $E = -1/30$, $F = 0$. Подставляя полученные значения коэффициентов в $T_5(n)$, получаем: $T_5(n) = n^5/5 + n^4/2 + n^2/3 - n/30$, а после канонических преобразований приходим к формуле (3), которая, как нам кажется, устанавливается несколько проще, чем методом факториальных полиномов.

Очевидно, что левая часть (9) является частью универсальной системы, получаемой распространением ее на произвольные значения n.

Заметим еще, что уравнению (8) или соответствующему методу суммирования можно сопоставить универсальную систему уравнений, т.е.

систему с единым основным определителем, подобно системе (5). Система, соответствующая примеру 3, имеет вид:

$$\begin{array}{ll} n=1 & A+B+C+D+E=23, \\ n=2 & 16A+8B+4C+2D+E=124, \\ n=3 & 81A+27B+9C+3D+E=411, \\ n=4 & 256A+64B+16C+4D+E=1040, \\ n=5 & 625A+125B+25C+5D+E=2215. \end{array}$$

Этой системе удовлетворяют коэффициенты многочлена, полученного выше в примере 3 иным путем: $Q_4(n+1)-Q_4(1)=2n^4+6n^3+7n^2+8n$.

Таким образом, в статье обозначен общий метод суммирования значений многочлена произвольной степени при натуральных значениях аргумента и некоторые приемы его реализации. Этот метод относится к определенной методической линии в математике, которую мы называем линией неопределенных коэффициентов. Очевидно, что эта линия пересекается с другой, так называемой матричной линией.

В заключение отметим, что представленная статья примыкает к исследованиям автора, относящихся к проблеме “систематизации приемов учебной деятельности”.

Библиографический список

1. *Новоселов С.И.* Специальный курс элементарной алгебры. М.: Советская наука, 1951.
2. *Гончаров В.Л.* Теория интерполирования и приближения функций. Гос. изд. технико-теоретической литературы. М.: 1954.
3. *Галицкий М.Л., Гольдман А.М., Звавич Л.И.* Сборник задач по алгебре. 8-9. М: Просвещение, 1995.
4. *Литвиненко В.Н., Мордкович А.Г.* Практикум по элементарной математике. Алгебра. Тригонометрия. М.: Просвещение, 1991.
5. *Шарыгин И.Ф.* Решение задач. 10. М.: Просвещение, 1994.

Метод проектов в обучении основам социальной информатики

И.И. Косенко

В Национальном докладе РФ на II Международном конгрессе ЮНЕСКО “Образование и информатика” [2] были представлены современные подходы к преподаванию информатики как фундаментальной научной дисциплины. В соответствии с ними в структуру предметной области информатики были включены разделы: “Теоретическая информатика”, “Средства информатизации”, “Информационные технологии”, "Социальная информатика". При этом социальная информатика (СИ) была определена как отрасль информатики, изучающая комплекс проблем, связанных с прохождением информационных процессов в социуме и его информатизацией. Кроме того, были определены основные проблемы предмета ее исследования: информационные ресурсы как фактор социально-экономического и культурного развития общества; информационное общество – закономерности и проблемы становления и развития; информационная инфраструктура общества; проблемы информационной безопасности. В соответствии с представленными подходами к преподаванию информатики, в стандарты общего образования по информатике и ИКТ 2004 года были включены элементы социальной информатики.

В статье рассматриваются некоторые вопросы организации их изучения с использованием метода проектов.

Анализируя деятельностный подход к обучению, А.М. Новиков выделяет три аспекта деятельности: 1) уровни иерархии осуществления деятельности: операционный (человек – исполнитель), тактический (человек – деятель), стратегический (человек – творец); 2) процессуальный аспект деятельности – от целеполагания до целевыполнения; 3) видовой аспект: познавательная, ценностно-ориентировочная, преобразовательная, коммуникативная и эстетическая деятельности. Он отмечает, что "подлинно человеческая деятельность, деятельность, где человек может раскрыть все свои потенциальные возможности, – это такая деятельность, в которой будут достаточно полно представлены все виды деятельности в единстве, причем ведущим видом деятельности будет преобразовательная деятельность" [3].

Организовать такую деятельность в курсе информатики можно с использованием метода проектов.

Рассматривая различные классификации форм обучения, А.М. Новиков [4] приводит классификацию форм (систем обучения) по механизму декомпозиции содержания обучения. Он отмечает, что существуют два таких механизма: дисциплинарный механизм (предметное обучение) – когда содержание обучения разделяется на отдельные дисциплины; комплексный механизм (объектное обучение) – когда декомпозиция содержания осуществляется по выделенным объектам.

Далее ученый пишет, что наибольшую известность среди комплексных систем (форм) обучения получил метод проектов – система обучения, при которой обучающиеся приобретают новый опыт (знания, умения и т.п.) в процессе планирования и выполнения постепенно усложняющихся заданий практически жизненной направленности (проектов).

Однако метод проектов не прижился в образовании, поскольку знания и умения, получаемые обучающимися, были отрывочными и несистематизированными. В последние годы он вновь стал широко применяться в образовании, но уже в другом понимании. Учебные проекты понимаются не вместо учебных предметов, а в рамках учебных предметов или в дополнение к ним. При этом под проектом понимается завершенный цикл продуктивной деятельности как отдельного человека, коллектива, организации, так и совместной деятельности многих организаций и коллективов [4].

"Проект – это ограниченное во времени целенаправленное изменение отдельной системы с установленными требованиями к качеству результатов, возможными рамками расхода средств и ресурсов и специфической организацией" [1].

Каждый проект включает три фазы: фазу проектирования (целеобразования), технологическую фазу (целевыполнение), рефлексивную фазу (контроля, оценки и рефлексии). При таком понимании проекта деятельность обучающегося можно рассматривать как совокупность (иерархию) проектов: любая образовательная программа с позиций обучающегося – это проект. Изучение отдельных учебных курсов – это учебные проекты (подпроекты по отношению к образовательной программе). Изучение отдельных тем курса – это тоже учебные проекты (подпроекты по отношению к учебному курсу).

А.М. Новиков, рассматривая учебный процесс в логике проектов, выделяет в организации учебного процесса три параллельные, в значительной степени не зависимые друг от друга линии [4]: 1) решение традиционных учебных задач, соответствующих операционному уровню деятельности, – минипроекты учебной деятельности; 2) решение учебных задач второго уровня, соответствующих тактическому уровню, – более крупные учебные проекты (назовем их "мидипроектами"); 3) решение задач третьего уровня, соответствующих стратегическому уровню, – крупные учебные проекты (назовем их "максипроектами").

Для организации в курсе информатики интегрированной деятельности (в том числе и по усвоению основ СИ), по нашему мнению, разумно использовать проектный метод, в его современном понимании. Это позволит придать деятельности личностный смысл, творческий характер, осмысленность, самостоятельность, сформированность навыков соблюдения норм и правил информационной деятельности, принятых в обществе.

Рассмотрим, как связаны между собой содержание обучения основам СИ в курсе информатики и организация деятельности учащихся с использованием проектов.

Рассматривая уровни иерархии осуществления деятельности, можно заметить, что уже выполнение минипроектов, то есть осуществление информационной деятельности на операционном уровне, требует для обеспечения безопасности как учащихся, так и общества соблюдения учащимися правовых, морально-этических, информационно-психологических и других норм и правил информационной деятельности, которые являются элементами содержания СИ. Выполнение же макропроектов, то есть стратегический уровень осуществления информационной деятельности, без знания основ СИ просто невозможен, потому что именно СИ изучает комплекс проблем, связанных с прохождением информационных процессов в социуме и его информатизацией.

Рассматривая процессуальный аспект, можно отметить, что как для полноценного выполнения отдельных компонентов деятельности, так и для осуществления интегративной деятельности, которая включает все перечисленные компоненты в их единстве, изучение основ СИ является необходимым условием по ряду причин, среди которых можно выделить следующие:

– для того, чтобы самостоятельно ориентироваться в ситуации, в нашем случае, в условиях использования средств ИКТ, необходимо иметь представление о самой информационной среде и возможностях осуществления в ней различных видов деятельности, о новых видах деятельности возникающих с этой среде, и т.п.;

– приобретение новых необходимых знаний требует сформированных умений использования информационных ресурсов;

– правильная постановка цели действий и определение ее реальности и достижимости невозможны без знания закономерностей информационных процессов, их особенностей в обществе, возможностей их автоматизации, без осознания необходимости гуманистической ориентации глобального процесса информатизации для безопасного развития общества и т.п.;

– для определения конкретных способов и средств действий необходимы знания об информационном потенциале общества, об информационной инфраструктуре общества, об эффективности использования средств ИКТ, последствиях их использования и т.п.;

– для выполнения самой деятельности необходимы не только умения и навыки использования средств ИКТ (технических и программных), но и понимание сути самой информационной технологии, которая с помощью этих средств может быть автоматизирована, а также норм и правил ее применения в обществе. Это позволит применять технологию не формально, а обдуманно, понимая смысл ее использования и преимущества, которые дает ее автоматизация. Кроме того, у учащихся при такой организации деятельности будут формироваться умения и навыки ее безопасного (для самого учащегося и для общества) применения данной технологии как для решения учебных задач, так в дальнейшем и для удовлетворения личных потребностей;

– для определения соответствия полученных результатов поставленным целям необходимо уметь оценивать их в соответствии с некоторыми критериями, правильному выбору которых способствует осознание возможностей и последствий информатизации, влияния процесса информатизации на развитие общества и личности, осознание личной ответственности за результаты деятельности, за соблюдение норм правил правовых, моральных и т.д., принятых в обществе.

Рассматривая видовую структуру деятельности, следует отметить, что именно включение в содержание обучения элементов СИ позволяет осуществлять все виды деятельности неформально.

Поясним сказанное. Например, при работе над проектом познавательная деятельность реализуется, в том числе, и при поиске и отборе информационных материалов, то есть организуется работа с информационными ресурсами, что требует знаний о них: их видах, правил поиска, использования, цитирования и т.п. Без ценностно-ориентировочной деятельности невозможно ни поставить цели проекта, ни определить критерии для оценки его результатов, ни провести рефлексию. Поскольку результатом проекта является новый информационный объект, то преобразовательная деятельность осуществляется естественным образом, элементы СИ позволяют придать ей гуманный характер, личностную направленность, повысить чувство ответственности обучаемых за результаты их деятельности и т.п.

Коммуникативная деятельность пронизывает весь ход работы над проектом, тем более, если работа организуется в группе. Здесь и выработка приемлемого для всех решения вопроса, и координация действий как при сборе информации, так и при “сборке” информационных материалов в один продукт, и возможное общение посредством сетевых технологий, и т.п.

И, наконец, эстетическая деятельность становится возможной как в ходе работы с информационными ресурсами, являющимися, по сути, образцами культуры, так и при создании собственного информационного продукта, позволяющего реализовать способности и интересы обучаемых, их эстетические предпочтения и т.п.

Таким образом, изучение основ СИ с применением проектов различного уровня позволяет организовать интегрированную деятельность учащихся в курсе информатики.

Библиографический список

1. *Бурков В.Н., Новиков Д.А.* Как управлять проектами. М.: Синтег-ГНО, 1997.
2. *Колин К.К., Соколова И.В., Суслаков Б.А.* Социальная информатика в системе высшего образования России: Докл. на II Междунар. конгр. ЮНЕСКО "Образование и информатика". М., 1996.
3. *Новиков А.М.* Российское образование в новой эпохе // Парадоксы наследия, векторы развития. М.: Эгвес, 2000.
4. *Новиков А.М.* Методология учебной деятельности. М.: Эгвес, 2005.

Довузовская математическая подготовка школьников как необходимое условие к продолжению обучения в техническом вузе

Р.М.Зайниев

Качество подготовки специалистов инженерно-технического профиля во многом определяется отбором абитуриентов в высшие технические заведения. Вопросам качественного набора студентов в технические вузы в последние годы начали уделять внимание все больше и больше руководители вузов, ученые и педагоги. Педагогическая и научная общественность технических вузов обеспокоена тем, "что уровень знаний учащихся средней школы непрерывного снижается уже более 15 лет. Без дополнительной подготовки около половины выпускников средней школы не может качественно освоить программу высшей технической школы" [9. С. 44]. Эти утверждения относится к учащимся московских школ. Уровень математической подготовки в школах малых городов и сельских населенных пунктов еще ниже.

Известно, что традиционно сложившаяся система отбора абитуриентов в вузы страдает многими недостатками. В ней основное внимание уделяется выявлению знаний по общеобразовательным дисциплинам, причем эти знания как по математике, так и по другим дисциплинам сейчас определяются по итогам Единых государственных экзаменов (ЕГЭ), которые проводятся в школе по окончании 11 класса. В отличие от вступительных экзаменов в вузы прежних лет, ЕГЭ совмещает два экзамена – выпускной школьный и вступительный в высшее учебное заведение (вуз) или среднее специальное учебное заведение (ссуз). Какие же требования по математике предъявляет ЕГЭ к выпускникам средней (полной) школы сегодня?

Выпускной экзамен по математике проводится, чтобы оценить усвоение школьником материалов курса "Алгебра и начала анализа", который изучается в 10-11 классах, поэтому задания экзаменационной работы на выпускном экзамене проверяют усвоение материалов только этого курса.

Вступительный экзамен по математике в вузы или колледжи проводится, чтобы оценить подготовленность выпускника к обучению в вузе или колледже. Этот контроль особенно важен для абитуриентов, поступающих на инженерно-технические специальности вузов или колледжей. "В этом случае содержание экзаменационной работы значительно шире, чем на выпускном экзамене. Наряду с материалом школьного курса алгебры и начала анализа 10-11 классов (курс В) проверяется усвоение ряда вопросов курсов алгебры 7-9 классов и геометрии 7-11 классов, которые традиционно контролируются на вступительных экзаменах, - отмечано в Учебно-тренировочных материалах для подготовки к ЕГЭ по математике" [2. С. 7].

Контроль уровня математической подготовки выпускников средней (полной) школы определяет ЕГЭ. Как известно, он набирает силу, желающие поступать во все возрастающее количество вузов не уменьшается. Но чтобы поступить и получить образование в техническом вузе, надо научиться хорошо решать задачи по математике. Задания ЕГЭ различных лет и задачи в различные вузы отличались по степени сложности. Задания вступительных экзаменов отличались большим разнообразием идей и необходимостью применять очень разные методы решений. Поэтому за последние годы издано очень много методической литературы учащимся школ для подготовки по ЕГЭ, например, из серии "Домашний репетитор"[6, 4] и другие. Мы согласны с С.И. Колесниковой, которая утверждает: "Складывается впечатление, что в Министерстве образования России большое внимание уделяется методам, средствам и технологии контроля и оценки общеобразовательной подготовки экзаменуемых. Гораздо меньше внимания уделяется содержанию и способам выполнения заданий ЕГЭ. Анализ контрольно-измерительных материалов (КИМ-ов) и некоторых методических разработок, предлагаемых экспертам для проверки заданий с развернутым решением, показал, что сейчас актуальным является не количество и новизна предлагаемых задач, а умение решать задачи на классические темы" [4. С. 4-5]. В 2003-2005 гг. были проведены эксперименты по введению Единого государственного экзамена во многих субъектах Российской Федерации. Суть эксперимента состояла в совмещении итоговой аттестации выпускников общеобразовательных учреждений со вступительными испытаниями при поступлении в вузы России.

Центр тестирования Минобразования России так охарактеризовал методы проведения ЕГЭ в 2005 году:

“Оценка учебных достижений выпускников проводится стандартизировано – в максимально однородных условиях и с принятием максимально однородных по содержанию и сложности экзаменационных материалов.

Задания с выбором ответов (тип А). Каждому из таких заданий прилагаются по четыре равнопривлекательных вариантов ответов. Участник ЕГЭ должен указать один, по его мнению, верный ответ из них. В заданиях такого типа теоретически возможно случайно угадать верный ответ.

Задания с кратким ответом (тип В), который должен быть кратко сформулирован и записан в бланке ответов в виде слова или числа. Угадать при этом правильный ответ практически невозможно.

Задания с развернутым ответом (тип С) – предлагают участнику ЕГЭ записать ответ в развернутой форме. Фактически это небольшая письменная контрольная работа, которая проверяется специально подготовленными экспертами” [6. С. 3].

Вузы и колледжи (в большей степени это относится к техническим вузам) теперь не могут оказывать влияние на качество приема студентов на 1-й курс, т.к. по всем профилирующим дисциплинам (это преимущественно по математике, физике, русскому языку) приемная комиссия вузов констатирует только баллы ЕГЭ. Это, с одной стороны, упрощает прием студентов на 1-й курс, особенно в период резкого сокращения числа выпускников общеобразовательных школ России. “Так, по данным Министерства образования РФ, если число выпускников 11-х классов в 2005 году составило 1 млн. 200 тыс. человек, то в 2010 году их останется только 600 тыс. человек, т.е. за 5 лет произойдет сокращение наполовину” [1. С. 149]. С другой стороны, прием абитуриентов в вузы осуществляется только по количеству баллов ЕГЭ, при этом “совершенно не учитывается, что за человек идет учиться, что он умеет делать практически и каковы у него интересы и способности” [7. С. 9]. Эти слова, адресованные вопросам отбора абитуриентов педагогического вуза, можно полностью отнести и к техническим вузам, а именно вопросам приема абитуриентов в инженерно-технические вузы.

Технические вузы (университеты, академии, институты), как и вузы специальной подготовки (художественные, музыкальные, военные, физкультурные и т.д.), необходимо отнести к вузам специальной подготовки. С одной стороны, должен быть контроль в области математической подготовки абитуриентов, поступающих на технические специальности с учетом их будущей профессии. Здесь можно использовать тесты на выявление математических способностей абитуриентов, составленные с учетом выбранной специальности (выбранного факультета). Они должны быть составлены так, чтобы выявить у будущих студентов способности учиться именно по этой технической специальности. С другой стороны, технические вузы должны готовить своих будущих потенциальных студентов заблаговременно, начиная со средних классов (5-7-х), постепенно готовя их к профильному обучению для конкретного вуза, для конкретной специальности. Здесь невольно вспоминается проведенная в 60-е годы 20-го века огромная работа академика А.Н. Колмогорова по организации физико-математических школ (ФМШ) при МГУ и других университетах страны. "Школы-интернаты в 60-е годы при университетах были созданы с целью отработки нового профиля образования, отвечающего современным интересам" [5. С. 9]. Как никогда такие школы должны быть созданы сейчас при любом университете, техническом или педагогическом вузе с целью повышения качества подготовки школьников к продолжению обучения в вузе и как следствие – качественного набора студентов. Тесты на выявление математических способностей абитуриентов вузов или колледжей можно расширить с учетом выявления способностей абитуриентов в области физики, химии или других дисциплин до "Теста интеллекта" для выявления инженерно-технического мышления [3. С. 6-9].

Подготовка таких тестов в самом вузе уже выходит за пределы только одной кафедры (математики, физики, химии и других), даже за пределы специальности и факультета. Здесь должны быть задействованы и преподаватели кафедры математики (физики, химии и другие), и ученые-педагоги в области высшей школы, и методисты, и специалисты, и преподаватели специальных кафедр, и учителя школ. Задачу подготовки тестов и проведения тестирования среди учащихся школ и абитуриентов могла бы выполнить кафедра педагогики и психологии высшей школы. "Для этого было бы целесообразно в ведущих инженерно - технических высших школах создать кафедры педагогики высшего инженерно-технического образования, цели которых заключаются в следующем: способствовать развитию педагогики высшей школы в области технического образования..." [8. С. 102-103]. Тесты на выявление математических способностей абитуриентов, поступающих на инженерно-технические специальности, могут содержать от 20 до 30 заданий. Нами разработаны "Тесты на выявление математических способностей" для поступающих в технические колледжи и вузы. **Предлагаем некоторые задания одного из вариантов такого теста:**

1. Найти закономерность построения числовой последовательности и написать недостающие числа.

24	**21**	**19**	**18**	**15**	**13**			**7**

8. Запишите общее название для всех приведенных слов: **хорда, медиана, высота, диаметр, радиус.**

9. Запишите лишнее слово из приведенного списка: **малиновый, желтый, сиреневый, лимонный.**

11. Найдите площадь квадрата, периметр которого равен $10\sqrt{2}$ м.

12. Чему равна длина ребра куба, если площадь полной поверхности этого куба равна 96 $м^2$?

13. Длина комнаты 5,4 м, а ширина 4,2 м. В комнате два окна шириной 1,2 м и высотой 1,6 м. Освещенность комнаты считается нормальной, если площадь окон составляет 20 % от площади пола. Нормально ли освещена комната?

17. На сколько процентов увеличится площадь квадрата, если каждую его сторону увеличить на 10%?

18. Участок прямоугольной формы имеет площадь 400 га. Вычислить его периметр, если длина участка равна 10 км.

19. Чему равна сумма всех целых чисел от –102 до 104?

20. Найдите произведение всех целых чисел от –11 до 13.

Такой тест содержит 20 вопросов или заданий. Выбор ответа к каждому заданию теста должен быть сформулирован и записан в бланке ответов в виде слова или числа. Угадать это слово или число практически невозможно, необходимо выполнить решение в устной или письменной форме. Такие задания для теста нам кажутся наиболее удачными и требуют от учащихся установления логических связей, рассуждений, выполнения решений математических задач, умения проводить тождественные преобразования. Большое количество заданий связано с геометрическим материалом так необходимого для будущего специалиста инженерно-технического направления.

Время на выполнение такого теста – 30 минут. За каждое правильно решенное задание учащийся получает 1 балл. Общая сумма баллов не превосходит 20. Если абитуриент набрал 10 и выше баллов, то мы можем считать, что он обладает математическим мышлением, необходимым для овладения инженерно-технической специальностью. Эти задания мы рекомендуем для поступающих в инженерно-технические вузы (задания для тестов могут быть многовариантными и с различными заданиями в зависимости от выбранной специальности).

Таким образом, предложенная нами форма контроля уровня математической подготовки учащихся школ к продолжению обучения в техническом вузе совместно с результатами ЕГЭ является наиболее действенной и применимой для осуществления полноценного набора студентов на инженерно-технические специальности.

Библиографический список

1. *Биктимиров Р.Л., Зайниев Р.М.* Проблемы финансовой выживаемости технических вузов в условиях рыночной экономики // Сборник материалов выездного заседания НМС по математике Министерства образования и науки РФ. Набережные Челны: Изд-во Камской госуд.инж.-экон.акад., 2006. С. 148-152.
2. *Денищева Л.О., Глазков Ю.А., Краснянская К.А., Рязановский А.Р., Семеов П.В.* Учебно-тренировочные материалы для подготовки к единому государственному экзамену. Математика. М.: Интеллект-Центр, 2004. 176 с.
3. *Зайниев Р.М.* Вопросы отбора и приема учащихся в колледж инженерно-технического профиля // Социально-экономические и технические системы / Электронное периодическое издание. http://kampi.ru/sets 2006. № 6. 12 с.
4. *Колесникова С.И.* Математика. Решение сложных задач единого государственного экзамена -2-е изд., испр. М.: Айрис-пресс, 2006. 272 с.
5. *Колмогоров А.Н., Вавилов В.В., Тропин И.Т.* Физико-математические школы при МГУ. М.: Знание, 1981. 64 с.
6. Математика: реальные тесты и ответы. Сергиев Посад: ФОЛИО, 2006. 164 с.
7. *Решетников П.Е.* Нетрадиционная технологическая система подготовки учителей: Рождение мастера: Кн.для препод.высш.и средн.пед.учебн.заведений. М.: ВЛАДОС, 2000. 304 с.
8. *Розанова С.А., Зайниев Р.М.* О концепции преемственности формирования математической культуры в системе "школа-колледж-вуз" инженерно-технического профиля // Материалы Международной конференции "Образование, наука и экономика в вузах. Интеграция в международное образовательное пространство". Плоцк, Польша, 2006. С. 100-103.
9. *9. Хохлов Н.Г.* О роли высшей школы на переломном этапе // Машиностроение и инженерное образование. Изд-во МГИУ. 2005. № 1. С. 40-46.

Некоторые аспекты преподавания дисциплины "Методы оптимизации"

Н.Л. Майорова

Дисциплина "Методы оптимизации" относится к числу общепрофессиональных прикладных математических дисциплин в силу отбора изучаемого материала и его важности для подготовки специалиста. Она основывается на знаниях, полученных слушателями при изучении таких математических дисциплин, как “Математический анализ”, “Дифференциальные уравнения”, “Функциональный анализ”, “Алгебра”. Дисциплина “Методы оптимизации” обеспечивает приобретение знаний и умений в соответствии с государственным образовательным стандартом, содействует фундаментализации образования, формированию мировоззрения и развитию математического мышления.

В результате изучения дисциплины слушатели должны получить представление о многообразии оптимизационных задач и использовании алгоритмов поиска оптимума, знать постановку оптимизационных задач различных типов, необходимые и достаточные условия минимума для этих задач, уметь классифицировать тип оптимизационной задачи, применять алгоритм нахождения оптимума конкретной задачи, иметь навыки нахождения точек оптимума в задаче на экстремум, проверки достаточных условий оптимальности, численного решения оптимизационных задач.

С задачами оптимизации приходится встречаться в различных сферах деятельности человека. Каждое разумное действие является в определенном смысле и оптимальным, так как выбирается после сравнения с другими вариантами. Исторически с задачами оптимизации человечество столкнулось уже в древние века. Так, уже давно были решены разнообразные задачи геометрического типа, связанные со свойствами элементарных фигур.

Наиболее простая задача безусловной оптимизации функций многих переменных привлекла внимание математиков во времена, когда закладывались основы математического анализа. Она во многом стимулировала создание дифференциального исчисления. С появлением дифференциального исчисления появилась возможность исследования более сложных задач. Первый общий аналитический прием решения экстремальных задач был разработан Пьером Ферма и является одним из первых крупных результатов анализа. Открыт он был, по-видимому, в 1629 году, но впервые достаточно полно изложен в письме к Робервалю в 1638 году. На современном языке прием Ферма сводится к тому, что в точке экстремума $\tilde{x}$ в задаче без ограничений $f(x) \to extr$ должно иметь место равенство $\nabla f(\tilde{x}) = 0$. Первый намек на этот результат содержится в словах Кеплера из “Стереометрии винных бочек”. Точный смысл рассуждения П.Ферма приобрели через 46 лет, когда в 1684 году появилась работа Лейбница, в которой закладывались основы математического анализа. В своей статье Лейбниц не только получает в качестве необходимого условия соотношение $\nabla f(\tilde{x}) = 0$ (сейчас этот результат называют теоремой Ферма), но и употребляет второй дифференциал для различения максимума и минимума, то есть, по существу, формулирует условия экстремума второго порядка.

Большинство излагаемых Лейбницем фактов было к тому времени известно также и Ньютону, но его работа, завершенная к 1671 году, была опубликована лишь в 1736 году. Важнейшие результаты по минимизации функций были в дальнейшем получены Эйлером и Лагранжем.

Дисциплина "Методы оптимизации" в классических университетах изучается на специальности "010100 – Математика" и "010200 – Прикладная математика и информатика". Отличие состоит в том, что на отделении "Математика" эта дисциплина включает в себя изучение вопросов линейного и нелинейного программирования, а на специальности "Прикладная математика и информатика" отдельно читается курс под названием "Линейное программирование", а в следующем семестре в курсе "Методы оптимизации" изучаются вопросы нелинейного программирования в конечномерных и бесконечномерных пространствах. Учебный план по дисциплине "Методы оптимизации" на этом отделении предусматривает 54 лекционных часа (по три часа в неделю) и 18 часов для практических занятий (один час в неделю для каждой группы).

Курс является синтетическим, состоящим из трех последовательно изучаемых частей: нелинейного или математического программирования, вариационной задачи и задачи оптимального управления. Примерная разбивка по темам следующая:

- Минимизация функций, исходные понятия. Теоремы существования. Проекция точки на множество.
- Задача безусловной оптимизации. Дифференцируемые функции n-мерного эвклидова пространства. Сведения из теории квадратичных форм. Необходимые и достаточные условия минимума в задаче без ограничений.
- Задачи с ограничениями. Задачи с ограничениями в виде равенств. Геометрическая интерпретация. Множители Лагранжа. Необходимые и достаточные условия минимума задачи условной оптимизации с ограничениями-равенствами.
- Общая задача нелинейного программирования с ограничениями. Постановка задачи. Геометрическая интерпретация. Необходимые условия оптимальности. Теорема Куна-Таккера. Условия Ф.Джона. Правила множителей Лагранжа в общей задаче с ограничениями.
- Условия регулярности. Геометрический смысл. Примеры нерегулярных задач. Условие Слейтера. Отыскание решений простейших задач.

- Выпуклая задача оптимизации. Выпуклые множества. Гиперплоскости, полупространства. Полиэдральные множества. Выпуклые функции. Неравенство Йенсена. Надграфик и подграфик выпуклой функции. Критерии выпуклости дифференцируемой и дважды дифференцируемой функции.
- Необходимые и достаточные условия минимума в задаче выпуклого программирования. Теоремы Каратеодори. Теоремы об очистке.
- Простейшая вариационная задача. Задача о катеноиде и задача о брахистохроне. Постановка простейшей вариационной задачи. Интегрант функционала. Вспомогательные леммы (Дюбуа-Реймона).
- Первая вариация. Уравнение Эйлера. Уравнение Эйлера в интегральной форме. Экстремали функционала. Теорема Гильберта. Достаточное условие глобального минимума.
- Некоторые случаи интегрируемости уравнения Эйлера. Задача геометрической оптики – принцип Ферма.
- Некоторые обобщения основной задачи вариационного исчисления. Случай нескольких неизвестных функций. Функционалы, зависящие от старших производных. Обобщенное уравнение Эйлера.
- Изопериметрическая задача. Правило множителей Лагранжа. Задача Дидоны. Закон двойственности.
- Задача об оптимальном быстродействии. Понятие об управляемых объектах. Задача управления. Уравнения движения объекта. Допустимые управления.
- Метод динамического программирования. Понятие оптимального процесса. Уравнение Беллмана.
- Принцип максимума Понтрягина. Оптимальное управление линейными системами.

На первых лекциях излагаются задачи минимизации скалярных функций конечного числа переменных. До некоторой степени этот материал является повторением и обобщением знаний, полученных студентами в курсе математического анализа. Приходится также для более полного понимания использовать геометрическую интерпретацию излагаемых фактов, для чего бывает необходимым вспомнить классификацию поверхностей второго порядка, изучаемую в курсе алгебры, понятие линии и поверхности уровня функций многих переменных, а также некоторые сведения из теории квадратичных форм и алгебраический критерий Сильвестра знакопостоянства квадратичной формы.

Затем изучается переход от необходимых и достаточных условий оптимальности решений оптимизационных задач без ограничений к соответствующим критериям условных задач, то есть задач с различными типами ограничений на независимые переменные. Студентам рассказывается о том, что условная задача является наиболее общим типом оптимизационных задач нелинейного программирования (как, впрочем, и линейного), к которому приводит большой ряд инженерных задач (с ограничениями на управляемые переменные). Такие ограничения существенно уменьшают размеры области, в которой проводится поиск оптимума. На первый взгляд может показаться, что уменьшение размеров допустимой области должно упростить процедуру поиска оптимума. Между тем, напротив, процесс оптимизации становится более сложным, поскольку установленные критерии безусловной оптимизации нельзя использовать при наличии ограничений. При этом может нарушаться даже основное условие, в соответствии с которым оптимум достигается в стационарной точке, характеризующейся нулевым градиентом. Например, безусловный минимум функции $f(x) = (x-2)^2$ имеет место в стационарной точке $x = 2$. Но если задача оптимизации решается с учетом ограничения $x \geq 4$, то будет найден условный экстремум, которому соответствует точка $x = 4$. Эта точка не является стационарной точкой функции f, так как $\nabla f(4) = 4$. Поэтому для данного типа задач необходимо сформулировать новые условия оптимальности решений задач с ограничениями.

По опыту многолетнего преподавания данной дисциплины можно отметить, что ввиду недостаточности учебного времени, отведенного на практические занятия (примерно 8-9 занятий в группе за семестр на все три большие темы данной дисциплины), и невозможности полностью отработать решение каждого типа задач, во время экзамена для многих студентов (в особенности нерадивых) может являться достаточно сложной даже любая простейшая задача на условный экстремум ($xy \to extr, x+y=1$), поскольку учащиеся пользуются критерием Сильвестра для идентификации стационарной точки (является ли она точкой минимума, максимума или в ней вообще нет экстремума), который "не работает" для задач с ограничениями, а справедлива соответствующая теорема – достаточное условие оптимума для данного типа задач. Большие трудности вызывает также проверка условий регулярности при применении общего метода решений задач с ограничениями – метода множителей Лагранжа, так как все условия регулярности формулируются в терминах точки оптимума, поиск которой и ведется. Общеизвестно, что со времен Лагранжа почти на протяжении целого века правило множителей формулировалось с $\lambda_0 = 1$, хотя без дополнительных предположений, например, линейной независимости векторов-градиентов функций-ограничений в точке оптимума это правило неверно.

Отдельной темой рассматривается частный случай общей задачи условной оптимизации со смешанной системой ограничений – выпуклая задача программирования. Студентам поясняется, что доказываемые свойства выпуклых задач имеют важное значение не только в теории, но и в численных методах оптимизации, поскольку большинство существующих численных методов позволяет, вообще говоря, находить лишь локальные решения, а точнее, лишь стационарные точки задачи. Поэтому для выпуклой задачи отыскание стационарной точки означает отыскание решения, причем глобального.

Другой класс изучаемых в данном курсе задач на экстремум – это задачи вариационного исчисления. Следы интереса к ним можно найти и в античной математике, однако подлинное рождение вариационного исчисления произошло в конце 19 века, когда Иоганн Бернулли в 1696 году сформулировал знаменитую задачу о линии наискорейшего ската (брахистохроне). На современном языке она представляет собой бесконечномерную задачу безусловной оптимизации с минимизируемым функционалом специального интегрального вида. В решении задачи о брахистохроне приняли участие лучшие математики того времени: Лейбниц, Ньютон, Якоб Бернулли, Лопиталь. Первое решение задачи принадлежало Я. Бернулли, второе – Лопиталю, третье – Ньютону. После этого в 18 веке Эйлером и Лагранжем были даны общие методы решения задач вариационного исчисления. Условия экстремума первого порядка были получены Эйлером, а второго – Лагранжем и Якоби. Их работу в 19 веке продолжили Коши, Гаусс, Пуассон, Остроградский и другие. Однако решения задач были неполны до недавнего времени, и лишь в конце 19 века работами Вейерштрасса и Гильберта было дано полное решение основных задач вариационного исчисления.

За отведенное учебным планом время на лекциях и практических занятиях удается рассмотреть лишь простейшую вариационную задачу и некоторые ее обобщения для случая зависимости интегранта функционала от нескольких неизвестных функций и его зависимости от старших производных искомой функции. Кроме того изучается задача об экстремуме определенного интеграла, когда искомые функции кроме граничных условий и условий непрерывности должны удовлетворять еще дополнительным требованиям, относящимся к поведению функции во всем промежутке интегрирования. Такой тип связанного экстремума возник из частной задачи о нахождении замкнутой кривой заданной длины $2l$, ограничивающей наибольшую площадь, и получил, благодаря ей, название изопериметрической задачи. Интересным примером такого типа задач является задача Дидоны, которая подробно обсуждается со студентами.

Следует отметить, что как задачи линейного и нелинейного программирования, так и простейшая вариационная задача в течение многих лет выносились на государственную аттестацию выпускников математического факультета. В связи с этим от студентов требуется умение решать типовые задачи нахождения экстремалей интегральных функционалов, имеющих интегранты вида $y^{-\frac{1}{2}}\left(1+\dot{y}^2\right)^{\frac{1}{2}}$, $x\left(1+\dot{y}^2\right)^{\frac{1}{2}}$, $\dot{y}^{-2}\left(y^2+1\right)$, $(\dot{y}-\sin x)^2$, $-y^2+2y\dot{y}+\dot{y}^2$, $\dot{y}^3 y$ и т.п.

В конце сороковых годов 20 века начался новый этап развития методов оптимизации. Как всегда, толчком послужили задачи, поставленные практикой. Возникли динамическое программирование, теория игр, теория оптимального управления, теория дифференциальных игр и другие. В курсе методов оптимизации студенты очень кратко знакомятся с задачей оптимального управления в смысле быстродействия. При этом рассматривается лишь линейный случай. Дается понятие об управляемых объектах, допустимых управлениях, о задаче управления и уравнениях движения объекта. Выводится уравнения Беллмана, определяющее суть метода динамического программирования, в свою очередь, представляющего ценное эвристическое средство, на котором базируется метод решения задачи на быстродействие – принцип максимума Понтрягина. На практических занятиях от студентов требуется, кроме аналитического решения задачи, наглядно представить на фазовой плоскости фазовые состояния объекта – так называемый процесс управления.

По окончании семестра студенты выполняют расчетно-графическую работу, состоящую из семи задач по всем разделам курса, и сдают курсовой экзамен.

Курс “Методы оптимизации” может играть важную роль в подготовке специалиста, развивать его общую культуру.

Библиографический список

1. *Базара М., Шетти К.* Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы. М.: Мир, 1982.
2. *Поляк Б.Г.* Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983.
3. *Карманов В.Г.* Математическое программирование. М.: Наука, 1986.
4. *Габасов Р., Кириллова Ф.М.* Методы оптимизации. Минск: БГУ, 1975.
5. *Моисеев Н.Н., Иванилов Ю.П., Столярова Ю.М.* Методы оптимизации. М.: Наука, 1978.

6. *Смирнов В.И., Крылов В.И., Канторович Л.В.* Вариационное исчисление. КуБуч, 1933.
7. *Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В.* Курс методов оптимизации, М.: Наука, 1986.
8. *Рейклейтис Г., Рейвиндран А., Рэгсдел К.* Оптимизация в технике. М.: Мир, 1986. Т. 1-2.
9. *Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.* Оптимально управление. М.: Наука, 1979.
10. *Горстко А.Б., Домбровский Ю.А., Жак С.В.* Методы оптимизации: Метод. указания. М.: МГУ, 1981.
11. *Дегтярев Ю.И.* Методы оптимизации. М.: Сов. Радио, 1980.

Метод системного анализа как инструмент решения стереометрических задач

Т.М. Корикова, И.В. Суслова

Один из тех видов деятельности, которые формируются у студентов на практических занятиях по методике обучения математике и элементарной математике, касается работы с задачным материалом. Этой деятельностью студенты должны овладеть с двух позиций, во-первых, освоить методы решения задач; во-вторых, – методику обучения решению задач учащихся. Целью подготовки учителя математики является становление профессиональных качеств, приобретение знаний и умений, обеспечивающих успешную профессиональную деятельность, не имеющую полного предписания, и ее творческое развитие. Свободное владение приемами и методами решения задач, а также методикой обучения их решению является одним из условий готовности будущего учителя к профессиональной деятельности.

В данной статье речь пойдет о работе со стереометрическими задачами. В последнее время отмечается снижение уровня подготовки по геометрии у выпускников общеобразовательных школ. Естественно, что это сказывается на работе со студентами. На занятиях в университете наряду с изучением основного материала стандарта приходится заниматься ликвидацией пробелов школьной геометрической подготовки, в частности, это касается приемов и методов решения задач.

Основной причиной трудностей, возникающих при решении стереометрических задач, является то, что у студентов недостаточно сформирована деятельность по анализу поиска решения задач как самостоятельного этапа выявления системы связей, в которых выступает искомое. Довольно часто приходится наблюдать, как эта деятельность под-меняется попытками подбора подходящей формулы, по которой решались раньше какие-то типовые задачи. Если эти формулы не дают желаемого результата, то подбор других формул наугад продолжается и главным ориентиром становится другой вопрос – “ что можно найти по тем или иным данным условия задачи?” – независимо от того, нужны ли эти сведения для дальнейшего поиска решения задачи. Освоение студентами деятельности по поиску решения задачи на основе метода системного анализа позволяет наблюдать направленность действий в поиске решения.

В работе “Формирование системного стиля мышления студентов как условие профессионализации усваиваемых знаний” (1) нами выделена схема действий по поиску решения геометрических задач на основе метода системного анализа. Учитывая специфику стереометрических задач, рассмотрим более детально методику обучения их решению на основе системного анализа.

Для формирования действий системного анализа при работе со стереометрическими задачами целесообразно рассматривать две их группы.

Первая – это те задачи, через которые формируются элементы метода системного анализа:

– установление связей между элементами пространственных фигур;

– выделение подсистем рассматриваемых объектов;

– выделение целостных свойств фигур и др., т.е. задачи, содержащие действия системного анализа в отдельности.

Вторая группа – задачи по усвоению общей схемы метода.

Рассмотрим высказанные соображения на конкретных примерах.

Задача 1. Докажите, что для вычисления объема тетраэдра имеет место формула $V=\frac{1}{6}abd\sin\varphi$, где a и b – длины противоположных ребер, d – расстояние между ними, φ – угол между ребрами.

Прежде чем рассматривать доказательство предложенной формулы с учащимися, выделим задачи, помогающие проведению системного анализа основной задачи (задачи, относящиеся к первой группе).

Задача 1.1. Докажите, что через две скрещивающиеся прямые можно провести единственную пару параллельных плоскостей; расстояние между скрещивающимися прямыми равно расстоянию между плоскостями.

Задача 1.2. Дан параллелепипед $АВСДА_1В_1С_1Д_1$.

а) Ребрами какой другой пространственной фигуры могут быть отрезки ВД и $А_1С$?

б) Дан тетраэдр. Постройте параллелепипед, содержащий данный тетраэдр. Сколькими способами это можно сделать? Установите взаимосвязи элементов рассматриваемых фигур в каждом случае.

Задача 1.3. Установите зависимость между объемами параллелепипеда и тетраэдра $А_1АВД$; параллелепипеда и тетраэдра $АСВ_1Д_1$.

В задачах первого типа предлагается выполнить следующие действия системного анализа:

– выделение подсистем рассматриваемой фигуры;

– определение конкретного вида связей между фигурами путем выделения признаков и конкретных зависимостей, через которые эти связи определяются;

– развитие связей между подсистемами и др.

Задачи первого типа снимают основные трудности, возникающие при проведении системного анализа для основной задачи 1, а именно, выявление необходимости включения одной пространственной фигуры – тетраэдра, в другую – параллелепипед и установление внутренних и внешних связей между элементами рассматриваемых фигур.

Естественно, что при таком подходе к поиску решения задачи методом системного анализа дидактический прием достраивания тетраэдра до параллелепипеда не воспринимается студентами как искусственный. Каждый шаг решения становится обоснованным, сознательно выбранным на основе известных теоретических положений. Это подтверждается в дальнейшем через решение других задач. Например.

Задача 1.4. Дан тетраэдр, два противоположных ребра которого равны соответственно 6 см и 8 см, каждое из остальных ребер имеет длину 13 см. Найдите объем тетраэдра.

Способ решения этой задачи неоднозначен. Процесс поиска решения задачи методом системного анализа позволяет наблюдать направленность и обоснованность действий студентов в выборе направления поиска.

Осознается неоднозначность процесса решения, которая возникает через выбор целостных свойств фигур, появляющихся в процессе проведения системного анализа.

Примерный состав познавательных действий по системному анализу стереометрической задачи в целом может быть следующим:

– выделение из текста задачи сведений о пространственных фигурах, которые должны быть подвергнуты анализу;

– выделение подсистем рассматриваемых фигур;

– выделение существенных характеристик, связей и отношений элементов выделенных подсистем;

– определение конкретного вида связей между элементами подсистем;

– оценка достаточности известных данных для нахождения искомого через цепочку нахождения промежуточных данных;

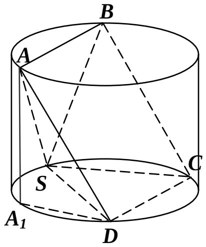
– выбор способа решения задачи, составление плана ее решения.

Рассмотрим применение предложенной схемы на конкретной задаче.

Задача 2. Около правильной четырехугольной пирамиды, каждое ребро которой равно m, описан цилиндр так, что все вершины пирамиды находятся на окружностях оснований цилиндра. Найдите объем цилиндра.

Из условия задачи 2 выделяем две пространственные фигуры – цилиндр и правильная пирамида, причем метрические соотношения даны только для одной фигуры, а именно, пирамиды. Для ответа на вопрос задачи необходимо установить связи между элементами, определяющими цилиндр и пирамиду.

Первоначально выделим две подсистемы, цилиндр и пирамиду. Основания цилиндра – круги с центрами O и O_1 – лежат в двух параллельных плоскостях. В основании пирамиды SABCД лежит квадрат, противоположные стороны которого попарно параллельны. Пусть пара параллельных ребер AB и CД основания пирамиды лежат в параллельных плоскостях и являются хордами окружностей оснований цилиндра. Вершина S пирамиды располагается на одной из окружностей верхнего или нижнего оснований цилиндра и является третьей вершиной правильного треугольника (боковой грани пирамиды), вписанного в окружность (см. чертеж).



Таким образом, мы выяснили взаимное расположение двух пространственных фигур (двух подсистем).

Выделим отношение элементов подсистем. Длина ребра пирамиды известна, следовательно, известна длина стороны правильного треугольника SCД, вписанного в окружность нижнего основания цилиндра, отсюда можно найти радиус этой окружности.

Выясним, достаточно ли данных для нахождения высоты цилиндра. Рассмотрим боковую грань пирамиды, которая не лежит в окружности основания. Поскольку все ребра пирамиды равны, боковая грань SCД – правильный треугольник со стороной, равной m. Выявим взаимосвязь между образующей цилиндра (высота цилиндра) и ребрами пирамиды. Спроектируем вершину A пирамиды, принадлежащую окружности верхнего основания цилиндра, на нижнее основание – точку A_1. Определив положение проекции – точки A_1 – на окружности нижнего основания (A_1 – середина дуги SД), установим взаимосвязь между элементами подсистем, образующей AA_1, хордой A_1Д основания цилиндра и ребром AД пирамиды. Цепочка промежуточных данных позволяет вычислить высоту пирамиды.

На основе проведенного анализа составляется план решения задачи, осуществляется исполнительная часть.

В заключениие отметим, что применение студентами метода системного анализа при работе со стереометрическими задачами существенно меняет характер их действий. Деятельность по поиску решения задачи самими студентами, а также их аналитическая деятельность при обучении решению задач школьников становится целенаправленной, преоритетным выступает анализ рассматриваемой фигуры как системы, при этом выбор метода и способа решения задачи логически обоснован.

Библиографический список

1. *Корикова Т.М., Суслова И.В.* Формирование системного стиля мышления студентов как условие профессионализации усваиваемых знаний // Труды третьих Колмогоровских чтений. Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2005. С. 265-271.
2. Формирование системного мышления в обучении: Учебное пособие для вузов / Под ред.З.А. Решетовой. М.: Юнита-Дана, 2002.

Фундирование способности к творчеству в процессе обучения математике у будущих инженеров

Е.А. Зубова, В.Н. Осташков

Современное общество нуждается в творческих людях, обладающих способностью к творчеству в учебной и профессиональной деятельности как базовой составляющей компетентности и успешности специалиста. Вместе с тем, в вузах наблюдается недостаточно эффективное использование преподавателями методов, приемов и средств, активизирующих творческую деятельность учащихся [5]. Однако с конкретизацией целей образования (для чего учить?) почти ничего не изменилось в методике организации учебного процесса (как учить?). Сохраняется противоречие между потребностью в изменении математической подготовки специалиста, исходя из государственных образовательных стандартов, и отсутствием комплексного подхода, направленного на осуществление прикладной направленности математической подготовки будущего инженера. Под комплексным подходом понимается сочетание на аудиторных и внеаудиторных занятиях по математике методов, форм и средств, связующим звеном которых является использование профессионально ориентированных задач разного типа.

Анализ результатов анкетирования преподавателей специальных кафедр показывает, что основные трудности, возникающие при изучении спецдисциплин, связаны с тем, что у студентов слабо развиты навыки моделирования проблемных производственных ситуаций, отсутствует научный интерес к современным математическим методам решения профессионально ориентированных математических задач, нет навыков самостоятельной работы над новым материалом. Полученные результаты убеждают, что положение с решением задач, связанных с репродуктивным использованием математического материала, можно считать удовлетворительным, а вот положение с решением профессионально ориентированных задач, нуждающихся в творческом подходе, является неудовлетворительным. Все это доказывает необходимость улучшения построения математического курса в техническом вузе за счет инновационных методов и подходов.

В резко изменившемся социуме, как никогда, “жизнь не спрашивает, что ты учил, но зато сурово спрашивает, что ты знаешь”. А между тем развитие творческой активности и инициативы связано с целым рядом противоречий, что делает процесс развития творческой активности студента трудным и неоднозначным. В.И. Загвязинский выдвигает три основных противоречия.

Первое противоречие связано с мотивационным обеспечением учебной деятельности студента – между его ориентацией на будущую профессию или научную деятельность и ориентацией преподавателя на учебный предмет или на педагогическую деятельность.

Второе противоречие – между стремлением к творчеству и невозможностью его осуществить без достаточной базы знания и опыта.

Третье противоречие кроется в самой природе творческого процесса: с одной стороны, нужно дать студентам определенные образцы знаний, умений и навыков, нормы деятельности, правила, а с другой – учитывать, что творческая деятельность не поддается жесткой регламентации и алгоритмизации [2].

Творческая активность инженера является одним из важнейших критериев его профессиональной подготовки. Для инженера творческая активность как интегративное качество личности является профессионально значимым, т.е. таким, которое становится системообразующей характеристикой его профессионального облика.

В настоящее время имеется несоответствие между самой сущностью изучения высшей математики в техническом вузе, ее основной задачей и состоянием обучения инженеров. Как правило, студент, владея достаточным запасом математических знаний, не может применить эти знания при изучении общетехнических и специальных дисциплин, в своей профессиональной деятельности. Таким образом, содержание обучения инженеров должно ориентироваться и на развитие творческих способностей учащихся. Это позволит после приобретения теоретических знаний как по математике, так по предметам по специальности перейти к их применению, выработке практических умений, развитию творческих способностей.

Однако курс математики для инженерных специальностей вузов в действующих учебниках изложен традиционно, связь с будущей профессиональной деятельностью выпускников выражена неявно. Основополагающая цель интегративной направленности обучения математике – это формирование математического аспекта готовности выпускника инженерной специальности вуза к профессиональной деятельности на основе единства математических знаний. Специфика профессиональной подготовки специалистов инженерного профиля состоит не только в получении новых математических знаний, но и в воспитании потребности и готовности к применению математических методов в профессиональной деятельности. Следует научить студентов грамотно формулировать инженерную задачу, наглядно моделировать, интерпретировать результат ее решения на языке реальной ситуации, проверять соответствие полученных и опытных данных. Это возможно при условии актуализации связей между математическими объектами и методами различных разделов математики путем решения профессионально – ориентированных задач.

Творческая активность личности имеет четко выраженную социальную обусловленность, и ее следует рассматривать как социальную ценность, как показатель уровня развития общества. Ее уровни и формы могут быть различными, а следовательно, может оказаться различной и объективная ценность профессиональной активности. Для инженера творческая активность как интегративное качество личности является профессионально значимым, т. е. таким, которое становится системообразующей характеристикой его профессионального облика. Качества, необходимые для творческой деятельности, не только даются от природы, но и приобретаются в результате образования и самообразования. Подлинно творческая деятельность студента возникает лишь в процессе самостоятельного поиска новых путей и способов решения задач. Поэтому рассмотрение комплекса профессионально – ориентированных задач в курсе математики должно не только устанавливать связи со специальными дисциплинами и иллюстрировать эффективность математических методов, но и аккумулировать математические знания в единую целостность, а также развивать творческую активность студентов технических вузов в процессе преподавания математики. Решение профессионально – ориентированных задач должно способствовать формированию профессиональных умений и навыков, моделировать профессиональную деятельность инженера.

Низкая самооценка творческих возможностей, как правило, сочетается с индифферентным, а иногда и с отрицательным отношением к своей специальности.

На наш взгляд, критерии, предложенные В.Г. Ивановым [3], наиболее полно учитывают мотивационно-волевую сторону творческого процесса, а соответственно, и творческой активности студентов. К ним относятся:

- ориентационный (пробуждение интереса к творчеству, ориентация на понимание возникающих проблем в ходе создаваемой ситуации);
- поисковый (включение в поисковую деятельность с учетом интересов и других качеств);
- корректирующий (составление индивидуальной программы развития творческой деятельности).

Процесс развития творческой активности студентов имеет как психологические, так педагогические аспекты, причем если первые из них связаны с выявлением и развитием творческих способностей студентов, то вторые обусловливают включение студентов в творческую деятельность и разработку ее содержания, средств и условий организации, осуществления, анализа ее результата.

Взаимодействие человека с миром и людьми актуализирует его внутренние потенциалы, что выступает основой его самопознания, саморегуляции, самореализации, обеспечивая тем самым его личностное саморазвитие. Знания и ценности, которые опосредуются в процессе обучения, могут стать достоянием студента, когда они активно перерабатываются и усваиваются не отдельным индивидом, а становятся содержанием общения и деятельности группы, если они будут интегрированы в совокупности всей той информации, которой группа располагает. В связи с этим особую важность приобретает рассмотрение проблемы организации группового взаимодействия студентов, являющегося важнейшим источником их саморазвития, самореализации и стимулом для дальнейшего личностного роста и повышения творческой активности.

При организации групповой творческой деятельности необходимо учитывать особенности различных организационных форм обучения, оказывающих положительное влияние на процесс развития творческих способностей студентов в ходе решения задач.

Так, при групповой форме работы студенты имеют возможность работать над заданием совместно, во взаимной зависимости, по согласованному между собой плану или порядку работы; использование групповых форм работы снимает психологические барьеры, является оптимальным для использования методов активизации мышления.

Таким образом, в процессе обучения творческой деятельности студентов регламентируется совместная деятельность преподавателя и студентов, степень активности студентов в творческой деятельности и способы руководства ею со стороны преподавателя.

Достижение одной из главных целей подготовки специалиста - формирование у него творческого мышления – может решаться только на основе положительных эмоции. Показано, что опыт, приобретенный на фоне таких эмоций, менее прочен, но более гибок и поддается творческой перестройке. Поэтому во всем, что имеет отношение к содержательной стороне учебно-познавательной деятельности, должен доминировать положительный эмоциональный фон.

Основным направлением формирования творческой деятельности студентов является включение студентов в процесс решения профессионально ориентированных задач.

Рассматривая вопрос о функции задач в обучении математике, приходим к выводу о том, что решение задач является ведущим средством математического развития студентов, средством развития элементов творческого мышления, существенно повышающим качество обучения и воспитания в процессе изучения курса математики [4].

Очень важно подбирать задачи, имеющие трудность, адекватную возможностям студентов. Если задача слишком трудная, студент потеряет надежду выполнить задание. Наоборот, если она слишком легкая, студент не делает никаких усилий при ее решении. В обоих случаях интерес к решению задач теряется, поэтому задача должна находиться в “зоне ближайшего развития”.

Необходимо организовать творческую деятельность студентов так, чтобы они с первых же шагов имели хотя бы небольшие успехи. Это активизирует интерес к изучаемому предмету.

Компонентами решения профессионально ориентированных задач, по мнению Ю.М. Колягина [4], являются:

1) ММ – переход от реальной ситуации к уравнению (построению математической модели);

2) исследование ММ – решение уравнения (исследование математическими методами и средствами построенной модели);

3) интерпретация – сопоставление полученного решения с реальной ситуацией (интерпретация найденного решения).

При решении задач важным является эмоциональное восприятие решаемой задачи, которое оказывает активное воздействие на деятельность творческого воображения. Воображение, возникая в ответ на стремление и побуждение студентов, реализуется в их творческой деятельности.

Таким образом, путь активизации творческой деятельности основан на включении студентов в решение профессионально ориентированных задач.

Профессионально ориентированное преподавание математики является одним из важнейших моментов мотивации при изучении высшей математики студентами инженерных специальностей.

Эффективное функционирование системы задач в качестве средства обучения математике является необходимым условием повышения качества обучения, формирования математического мышления, формирования качеств, присущих творческой личности.

Интеграция математических знаний на основе рассмотрения профессионально ориентированных задач позволяет повысить творческую активность студентов в инженерной направленности обучения математике, повысить интерес к овладению профессиональными знаниями.

В процессе решения профессионально ориентированных задач студентам приходится выполнять самые разные мыслительные операции, изобретать субъективно новые способы действия, актуализировать собственный опыт решения задач и дополнять его новыми возможными связями между математическими объектами [6].

В ситуации обращения с профессионально ориентированными математическими задачами студент приобретает опыт творческой деятельности, учится актуализировать и активно применять имеющиеся знания, овладевает новыми способами действий, тем самым создаются условия для развития творческой активности студентов.

Задачи, соответствующие профессионально ориентированным задачам, должны отличаться занимательностью, яркостью, необычностью изложения и хода решения, что является “пусковым механизмом” студенческой творческой активности. Это прививает вкус к самостоятельным исследованиям, к проявлению изобретательности, к поиску своеобразных, нешаблонных приемов работы; пробуждает положительные эмоции как в процессе решения задач, так и при достижения результата [1].

Использование задачного подхода приносит в учебную деятельность студента личностный смысл, так как он не просто усваивает новую для него информацию, а посредством ее приобретает способность применять полученные навыки в профессионально предметной деятельности. Обучение с помощью профессионально ориентированных математических задач возбуждает интерес к математическим теориям, интерес к будущей профессии, вызывает активную работу мысли, учит ставить проблемы, выдвигать гипотезы, сравнивать и моделировать. В этих условиях студент сознательно строит свое поведение, т. е. имеет место явление самоорганизации и самовоспитания как условия творческой активности.

Библиографический список

1. *Ефременкова О.В.* Развитие творческой активности студентов технических вузов посредством гуманитарно-ориентированных математических задач: Монография. Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2005. 166 с.
2. *Загвязинский В.И.* Педагогическое творчество учителя. М.: Просвещение, 1987. 156 с.
3. *Иванов В.Г.* Формулы творчества, или как научиться изобретать. М.: Просвещение, 1994. 206 с.
4. *Колягин Ю.М.* Задачи в обучении математике. Ч. 2. М.: Просвещение, 1977. 144 с.
5. *Розанова С.А.* Математическая культура студентов технических университетов. М.: Физматлит, 2003. 176 с.
6. *Худякова Г.И.* Об экономической направленности преподавания математики // Актуальные проблемы преподавания математики в экономическом вузе. Научно-методический сборник № 5. Ярославль: ЯВВФУ, 1998. С. 44-46.

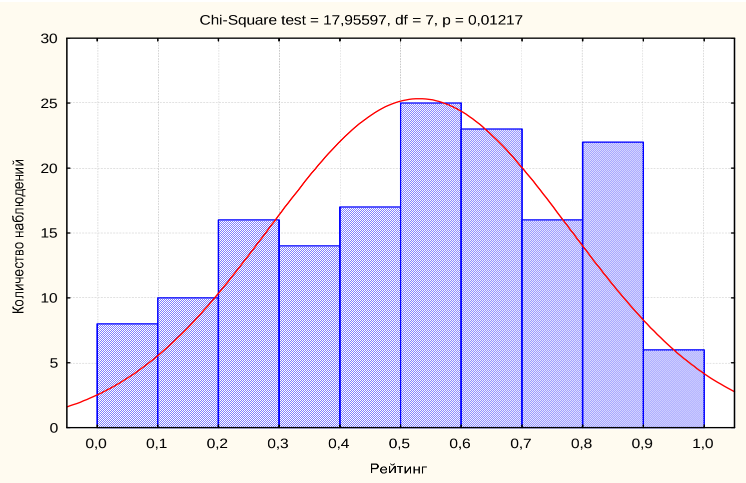
Опыт статистического анализа успеваемости студентов

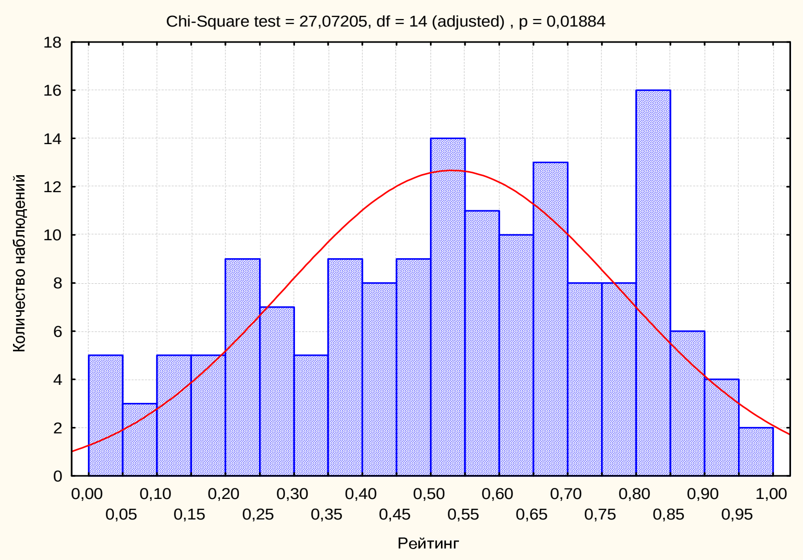
А.В. Лебедев, Л.Н. Фадеева

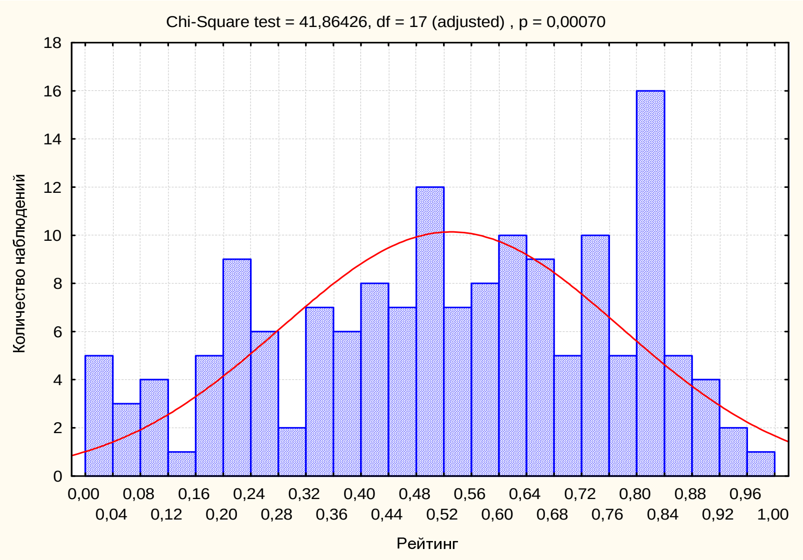
Рассматриваются данные за осенний семестр 2006/2007 учебного года об успеваемости студентов отделения “Менеджмент” по курсу “Теория вероятностей и математическая статистика” на экономическом факультете МГУ имени М.В. Ломоносова. А именно, мы проанализируем результаты трех контрольных работ, которые студенты пишут в течение семестра. Каждая контрольная состоит из 5 заданий, за каждое задание ставится от 0 до 5 баллов, и таким образом за каждую контрольную студент получает от 0 до 25 баллов. Баллы за все три контрольные суммируются, сумма делится на 75, и таким образом получается величина, называемая рейтингом (по контрольным), которая в дальнейшем учитывается (в сочетании с баллами по экзаменационной работе и данными о посещаемости) при выставлении итоговой оценки за курс.

Далее мы проанализируем данные по общему рейтингу и по оценкам за все контрольные по отдельности.

Прежде всего, из традиционных соображений можно было бы ожидать, что рейтинг будет иметь распределение, близкое к нормальному. Однако это не так. Далее представлены гистограммы с разбиением диапазона на 10, 20 и 25 интервалов, а также результатами теста хи-квадрат на нормальность.




Chi-Square test = 27,07205, df = 14 (adjusted) , p = 0,01884
Количество наблюдений
Рейтинг


Chi-Square test = 41,86426, df = 17 (adjusted) , p = 0,00070
Количество наблюдений
Рейтинг

Анализ гистограмм и критерий согласия хи-квадрат показывают, что во всех трех случаях гипотеза о нормальности должна быть отвергнута. Более того, распределение является мультимодальным (т.е. многовершинным). Можно выделить пики около значений: 1) 0; 2) 0,2; 3) 0,5; 4) 0,8. Таким образом, статистически подтверждается идея, интуитивно очевидная преподавателю: студенты не представляют собой однородную совокупность, а делятся на группы (кластеры) с различными свойствами. Можно условно выделить "основную массу", явных "отличников" и явных "двоечников".

Были вычислены выборочные средние и средние квадратические отклонения оценок по каждой контрольной:

	Среднее	Среднее квадратическое отклонение
Контрольная 1	10,83	6,92
Контрольная 2	14,06	7,25
Контрольная 3	14,89	6,94

Видно, что первая контрольная написана в среднем хуже других, а вторая и третья – почти одинаково. Среднее квадратическое отклонение по всем трем также практически одинаково.

Были вычислены выборочные коэффициенты корреляции Пирсона оценок по контрольным:

	Контрольная 2	Контрольная 3
Контрольная 1	0,74	0,59
Контрольная 2		0,63

Очевидно, что результаты сильно зависимы.

Был также проведен факторный анализ (методом главных компонент). Выделены два фактора, первый из которых объясняет дисперсию данных на 77%, а второй – на 14% (всего 91%). Загрузки факторов (их коэффициенты корреляции с исходными переменными) представлены таблицей:

	Фактор 1	Фактор 2
Контрольная 1	0,88	0,33
Контрольная 2	0,91	0,17
Контрольная 3	0,84	-0,54

Видно, что первый фактор сильно и почти одинаково коррелирует с оценками по всем трем контрольным. Таким образом, он практически совпадает (по направлению) с рейтингом. Это лишний раз показывает, что рейтинг действительно хорошо отражает реальные свойства данных (сущностные характеристики явления).

Как же интерпретировать первый фактор? По-видимому, это "качество" студента в плане его учебы. Грубо говоря, хороший студент, скорее всего, напишет все три контрольные хорошо, а плохой – плохо (хотя, конечно, бывают и исключения). Это же верно и в отношении экзаменационной оценки.

Второй фактор положительно коррелирован с оценками по первым двум контрольным и отрицательно – с оценкой по третьей. Эту разницу в знаках можно понять, учитывая, что первые две контрольные – по теории вероятностей, а третья – по математической статистике. Таким образом, данный фактор может отражать индивидуальные различия в освоении студентом этих двух предметов (объединенных в один курс).

Возникает вопрос, насколько сильно связана итоговая оценка студента с его рейтингом по контрольным? Коэффициент корреляции Пирсона между этими величинами оказывается равным 0,9.

Был также проведен дискриминантный анализ с целью установить, насколько хорошо можно прогнозировать попадание студента в одну из четырех групп по итоговой оценке (от 2 до 5) на основании его рейтинга или оценок по контрольным. Правильный прогноз по рейтингу получается в 78% случаев, а по оценкам – в 79% , т.е. практически одинаково.

В заключение можно сделать вывод, что применяемая нами контрольно-рейтинговая система позволяет эффективно и объективно оценивать качество знаний и работы студентов.

Библиографический список

1. *Тюрин Ю.Н., Макаров А.А.* Анализ данных на компьютере. М.: ИНФРА-М, 2003.
2. *Боровиков В.* STATISTICA. Искусство анализа данных на компьютере. СПб.: Питер, 2003.
3. *Андерсен Т.* Введение в многомерный статистический анализ. М.: Физматгиз, 1963.

Математическое моделирование как средство раскрытия в учебном процессе взаимосвязи математики с действительностью

Л.П. Жагорина

На современном этапе развития общества совершенствование многих видов деятельности неразрывно связано с формализацией знаний, одним из ключевых моментов которой является математическое моделирование изучаемых явлений и объектов. Применение метода математического моделирования позволяет показать универсальность математических уравнений и алгоритмов, дает возможность унифицировать описания разнообразных по своей природе процессов.

По мнению А.Д. Александрова, "математика выступает по отношению к другим наукам как метод формулировки количественных закономерностей, как аппарат для построения и разработки теорий, как средство решения задач [1. С. 43].

Понятию математической модели и методу математического моделирования посвящена обширная научная и учебно-методическая литература. Происхождение понятия модели в математике прослежено Н.Бурбаки в "Очерках по истории математики" [2. С. 34]. Авторы этой книги отмечают, что Лейбниц "первый усмотрел общее понятие изоморфизма (которое он назвал "подобием") и предвидел возможность "отождествлять" изоморфные отношения и операции; в качестве примера он дает сложение и умножение... Но эти смелые взгляды не получили отклика у его современников, надо было ждать расширения алгебры, которое имело место в середине XIX века, чтобы увидеть начало реализации того, о чем мечтал Лейбниц... Именно к этому времени начинают умножаться "модели"... и ученые привыкают переходить от одной теории к другой посредством простого изменения терминологии".

Идея моделирования нашла отражение в трудах Ф. Энгельса: "Чистая математика имеет своим объектом пространственные формы и количественные отношения действительного мира, стало быть - весьма реальный материал" [3. С. 37]. В данном определении содержится утверждение о том, что математические понятия являются абстракциями от некоторых отношений и форм реального мира, т.е. моделями реальных объектов. Они берутся из реального мира и поэтому естественным образом с ними связаны.

Это были лишь первые попытки подхода к анализу понятия математической модели, метода математического моделирования и предмета математики в целом. По мере того, как темпы развития техники, технологии, науки стали ускоряться, идея модели получила большое признание.

В настоящее время предмет математики формируется как представленность некоторых качественных систем определенного типа в "своих" собственных, количественных параметрах и соотношениях. Математическое знание представляет собой совокупность математических моделей, в которых представлена информация о качественных сторонах определенных систем через соответствующие им количественные характеристики. Широкое распространение моделирования в научном познании и отсутствие общей теории этого метода привели к большому разнообразию применений термина "модель" в современной науке. Многие исследователи рассматривают моделирование весьма широко, считая все формы познавательной деятельности в определенном смысле моделями, т.е. понятия "модель", "моделирование" вводятся им в ранг теоретико-познавательной категорий.

По словам видного американского ученого Р.Куранта, математика изучает модели, т.е. мысленные конструкции реального мира [4].

Математика предлагает другим наукам совокупность моделей действительности, обладающих замечательной общностью и применимостью. Если конкретная область знания сумеет уложить свои исходные данные в рамки той или иной математической модели, она автоматически получает в свои руки мощный аппарат, доставляющий ей новые знания об исходных фактах и обнаруживающий ранее не познанные закономерности. Тем самым математическая модель становится как бы инструментом, используемым той или иной конкретной наукой.

Начало XX в. закрепило отождествление математики с ее логической формой. Однако наряду со все возрастающей формализацией математики осуществляется и обратный процесс сближения ее с окружающим миром. В математику начинает проникать "человеческое измерение" научного знания, содержание многих математических концепций выводится за рамки их логической формы и наполняется эвристической деятельностью. Этими идеями пронизаны работы Д. Пойа, Л.Д. Кудрявцева, Г.Фрейденталя и др. [5, 6, 7].

В своей книге "Математика и правдоподобные рассуждения" Д. Пойа на многочисленных примерах из различных разделов математики иллюстрирует мысль о том, что "математика в процессе создания напоминает любые другие человеческие знания, находящиеся в процессе создания" [5].

По мнению известного математика Г. Фрейденталя: "Независимо от того, кто ставит задачу математику, лингвист или биолог, после того, как найдена ее математическая формулировка, она оказывается в самом центре чистой математики" [7].

Известно, что образование есть сфера функционирования науки, и те процессы, которые характерны для ее развития, отражаются в сфере образования. Математическое образование всегда создает в умах учащихся некоторую картину состояния и развития математики. Важно, чтобы эта картина соответствовала реальности, отражала на доступном для учащихся уровне действительные взаимосвязи математики с окружающим миром. Поэтому сейчас, в процессе перехода на новое содержание школьного математического образования, крайне важно методически правильно изложить это содержание, связав воедино теоретическую и прикладную линии в едином курсе математики.

В стиль математического исследования со второй половины XX в. активно включается человеческая деятельность. Понимание деятельности как научной методологии отражено в работах психологов А.Н. Леонтьева, С.Л. Рубинштейна и др. [8, 9]. Однако внимание психологов было переключено на разработку концепции различных видов деятельности, в частности учебной деятельности, характеризующейся учебными задачами, учебными действиями и действиями контроля и самоконтроля. Учебная задача, с постановки которой начинает развертываться учебная деятельность, направлена на овладение обобщенными способами действий, ориентированными на общие отношения осваиваемой предметной области.

Ю.М. Колягин, В.В. Пикан отмечают, что при решении текстовых задач учащиеся не явным образом знакомятся с простейшими видами математических моделей [10. С. 29].

С применением математического моделирования тесно связано осуществление прикладной направленности курса математики. Прикладную математику можно охарактеризовать как науку об оптимальном решении математических задач, возникающих вне математики. Соответственно, прикладная задача - это задача, поставленная вне математики и решаемая математическими средствами.

Задачные ситуации прикладных задач интересны учащимся, т.к. они позволяют мотивировать введение новых понятий через их практический характер, раскрывать математическую природу характеристик реальных явлений, демонстрировать универсальный характер математики на конкретных примерах и т.д. и, соответственно, обладают образовательной ценностью и значимостью, т.к. позволяют раскрыть в учебном процессе педагогический и образовательный потенциал взаимосвязей математики и действительности. Все задачи на составление уравнений или систем уравнений, неравенств или систем неравенств решаются методом моделирования.

В процессе математического моделирования выделяют три этапа:

1) формализация – перевод предложенной задачи (ситуации) на язык математической теории (построение математической модели задачи);

2) решение задачи в рамках математической теории (говорят: решение внутри модели);

3) перевод результата математического решения задачи на тот язык, на котором была сформулирована исходная задача (интерпретация найденного математического решения).

В настоящее время в отдельных учебных пособиях для средней школы упоминается понятие математической модели. Так, в учебниках А.Г. Мордковича Алгебра 7-11 формируется понятие математической модели, приведены этапы решения текстовых задач как этапы моделирования. В формулировке этих этапов упоминается понятие математической модели [11. С. 54].

В учебных пособия для учащихся средней школы "Математика-10", "Математика-11" А.Л. Вернер, А.П. Карп проводят знакомство школьников с понятием математической модели, построением различных моделей реальных процессов (например, при решении текстовых задач), окружающих нас объектов, логических рассуждений и т.п. [12,13].

В данных учебниках осуществляется знакомство с понятием математической модели на примере стихотворения. Также в этих учебниках определяются понятия "абсолютная погрешность" и "относительная погрешность" как средства оценки качества математической модели. Отмечается, что функции и графики являются одним из основных средств, применяемых при описании (моделировании) реальных процессов. Большое внимание уделяется функциям, заданным на различных промежутках разными формулами, - такие функции полезны при моделировании реальных процессов и, кроме того, их изучение предоставляет возможность обогатить арсенал исследуемых функций без серьезного увеличения трудности. Постоянно подчеркивается наглядный – геометрический смысл вводимых определений, а также их использование при моделировании реальных процессов.

В параграфе "Снова о математическом моделировании" идет обсуждение проблематики, связанной с моделированием. Показано, что модели реальных процессов могут оказаться плохими или нуждающимися в уточнении. Подразумевается, что необходимо вовлекать учащихся в обсуждение того, ответы на какие вопросы должен стараться получить исследователь при создании модели в различных ситуациях. Учащиеся должны осознать, что успешное применение того или иного метода в одной какой-либо ситуации отнюдь не гарантирует успех в другой. Так как ответы во многих предлагаемых задачах не однозначные – учащиеся должны предлагать свои аргументы в пользу своего ответа, но абсолютная доказательность тут недостижима. Одним из результатов изучения материала должен стать мотивированный переход к подробному изучению некоторых элементарных функций – это изучение дает возможность строить более точные модели. Дается представление о том, как проводятся социологические и иные исследования, в которых выводы делаются по какой-либо выборке данных. При рассмотрении предлагаемых заданий необходимо показать возможную ошибочность выводов, получаемых по неудачно составленной выборке, обсудить различные примеры составления выборки.

Таким образом, в учебниках [12, 13], предназначенных для подготовки учащихся гуманитарных классов, прослеживается линия математического моделирования, требующая своеобразных форм, средств и приемов обучения, соответствующих возрасту и интересам учащихся: дидактических игр и экспериментов, живых наблюдений и предметной деятельности.

Дадим определение линии математического моделирования. Согласно словарю русского языка С.И. Ожегова "Линия – это 1) последовательный ряд. . . , 2) направление, образ действий, взглядов (вести линию на что-нибудь, стремиться достигнуть чего-нибудь высокого)".

Таким образом, под линией математического моделирования мы понимаем последовательное рассмотрение ряда тем математики, дополненное введением понятия математической модели и его широким применением при решении задач, направленное на овладение учащимися методом математического моделирования, который позволит им в дальнейшем решать задачи прикладного характера.

Моделирование начинается с анализа проблемы, сформулированной в тексте задачи. Решая задачу, пытаются вникнуть в смысл отдельных предложений, понять их взаимосвязи, затем записывают задачу на языке математических символов. Вникают в задачу, выявляют логические взаимосвязи.

При реализации линии математического моделирования должны также выполняться следующие методические условия:

1) организация мыслительной рефлексии (умение характеризовать своими словами);

2) организация работы по овладению математическим языком (беседа, диалог);

3) установление учеником содержательно-смысловых связей;

4) ориентация на применения знаний в реальных ситуациях.

Мы предполагаем, что изучение материала должно быть направлено на развитие личности учащегося, расширять возможности его общения с современными источниками информации, совершенствовать коммуникативные способности и умение ориентироваться в общественных процессах, анализировать ситуации и принимать обоснованные решения, обогащать систему взглядов на мир.

Использование понятий, связанных с моделированием, непосредственно в процессе изучения математики позволяет совершенствовать методику ее преподавания, избегать формального подхода к обучению, осуществлять межпредметные связи. Кроме того, у учащихся формируется представление о роли математических методов в преобразующей деятельности, соотношение реального и идеального, о характере отражения математикой явлений окружающего мира.

Одна и та же математическая модель может описывать различные процессы, объекты; поэтому результаты внутримодельного исследования одного явления зачастую могут быть перенесены на другое. В этом состоит одно из основных достоинств математического моделирования. Необходимо формировать у учащихся умения, связанные с построением и исследованием математических моделей, то есть нужно использовать математическое моделирование в обучении, причем аспекты использования могут быть различными:

I. Моделирование выступает и как содержание, которое должно быть усвоено учащимися в результате обучения, и как способ познания, которым они должны овладеть.

II. Моделирование является одним из учебных средств, с помощью которого формируется учебная деятельность учащихся.

Реализация первого аспекта использования моделирования в обучении предполагает:

– формирование у учащихся представлений о модельном характере изучаемых закономерностей, введение в содержание обучения понятий "математическая модель", "моделирование", установление сущности, роли моделирования в познании и так далее;

– обучение построению моделей, т.е. обучение действию моделирования.

Рассматривая второй аспект использования моделирования в обучении, необходимо подчеркнуть следующее. Моделирование, модели служат средством, с помощью которого происходит познание изучаемых объектов; значит, учащиеся должны уметь строить эти модели и пользоваться ими.

Важно воспитывать у учащихся убежденность в том, что математика – наука полезная, а кроме того, и необходимая в их будущей работе. Для реализации этой цели преподавателю следует шире использовать на занятиях задачи, возникающие в практике и показывающие необходимость математических знаний.

Необходимо вырабатывать умения постановки задачи, перевода конкретной задачи на язык математики (то есть построение математической модели задачи), а также овладение техникой вычислений и навыки самостоятельного творческого труда. На занятиях математикой необходимо обеспечивать органическую связь теоретического и задачного материала, формировать у учащихся прочные и осознанные математические навыки, необходимые для дальнейшего изучения математики и решения прикладных задач.

По мнению Л.М.Фридмана, метод моделирования заключается в том, что построенный или выбранный объект (модель) изучают и с его помощью решают исследовательские задачи, а затем результаты решения этих задач переносят на первоначальное явление или объект. Исходя из этого, он предлагает при решении использовать метод преобразования задачи. Его сущность состоит в том: "если вы не знаете, как решить сложную задачу, никак не можете найти ее решение, зачастую целесообразно построить ее модель на другом языке, например для геометрической задачи построить ее алгебраическую модель" и затем перейти к решению [14. С. 84-101].

В методике сложилось достаточно устойчивое определение термина "математическая модель реального процесса" как приближенное описание этого процесса на языке математики, а "математическое моделирование" как построение модели и последующее ее исследование.

Построение математической модели - важнейший этап математического моделирования. Ясно, что для одной задачи можно предложить различные модели. При этом руководствуются следующими требованиями к математическим моделям:

1) адекватность процессу,

2) разрешимость модели.

Эти два основных требования находятся в противоречии друг с другом: чем модель более адекватна изучаемому реальному объекту или явлению, тем она, вообще говоря, менее проста. Искусство математического моделирования и состоит в том, чтобы для каждой конкретной задачи определить баланс между этими двумя требованиями.

Эффективность обучения во многом зависит от отбора задач, их конструирования и организации. Прикладная задача, по мнению Н.А. Терешина, это задача, поставленная вне математики и решаемая математическими средствами [15].

В целях обучения моделированию эффективным представляется использование специальным образом организованной учебной деятельности учащихся по решению прикладных задач методом моделирования. Данные задачи позволяют познакомить их с общей идеей математического исследования и сформировать конкретные умения математического моделирования. Построение математической модели выступает в роли метода познания окружающей действительности.

Одним же из основных требований к прикладным задачам для включения их в общую систему задач является наличие в них дидактических функций. Они должны способствовать созданию необходимых условий для усвоения учащимися теоретического материала курса, выработки у них умений и навыков в соответствии с требованиями учебной программы. Здесь задача выступает как самостоятельная дидактическая единица.

Итак, можно сделать вывод из всего вышесказанного: моделирование в обучении математике как методическая категория есть совокупность прикладных задач и средств и методов их реализации в учебном процессе, существенными признаками которых являются следующие характеристики: 1) применимость к курсу математики; 2) принадлежность к проблемам, реализацию которых в процессе обучения математике наиболее целесообразно осуществить в определенной методической форме.

Библиографический список

1. *Александров А.Д.* Проблемы науки и позиция ученого: Статьи и выступления. Л.: Наука. 1988.
2. *Бурбаки Н.* Очерки по истории математики. 1946.
3. *Энгельс Ф.* Анти-Дюринг // Маркс К., Энгельс Ф. Соч. 2-е изд. Т. 20. С. 5-338.
4. *Курант Р.* Математика в современном мире // Математика в современном мире. М.: Мир, 1967.
5. *Пойя Д.* Математика и правдоподобные рассуждения. М.: Наука, 1975.
6. *Кудрявцев Л.Д.* Мысли о современной математике и ее изучении. М.: Наука, 1997. С. 26.
7. *Фрейденталь Г.* Математика в науке и вокруг нас. М.: Мир, 1977.
8. *Леонтьев А.Н.* Деятельность. Сознание. Личность. М., 1975.
9. *Рубинштейн С.Л.* Проблемы общей психологии. М., 1973.
10. *Колягин Ю.М., Пикан В.В.* О прикладной и практической направленности обучения математики // Математика в школе. 1985. № 6 С. 27-32
11. *Мордкович А.Г.* Алгебра 9 кл.: В двух частях. Ч. 1: Учеб. для общеобразоват. учреждений. 6-е изд. М.: Мнемозина, 2004.

12. *Вернер А.Л., Карп А.П.* Математика: Учеб. пособие для 10 кл. гуманит. профиля. М.: Просвещение, 1999.
13. *Вернер А.Л.* Математика: Учеб. пособие для 11 кл. гуманит. профиля / А.Л. Вернер, А.П. Карп. М.: Просвещение, 2001.
14. *Фридман Л.М.* Как научиться решать задачи / Акад. пед. и соц. наук. Моск. псих.-соц. ин-т. М.: Воронеж, 1999.
15. *Терешин Н.А.* Прикладная направленность школьного курса математики. М.: Просвещение, 1990.

Механика, мехатроника, робототехника – научно-образовательная программа института механики МГУ для школьников

С.А. Довбыш, Б.Я. Локшин, М.А. Салмина

В 2004 году институт механики МГУ им. М.В. Ломоносова начал реализацию научно-образовательной программы для школьников и учителей, желающих узнать о последних достижениях механики, мехатроники и робототехники. Идея ее создания возникла в связи с проведением в институте механики МГУ ежегодного (с 1998 г.) фестиваля "Мобильные роботы", носящего ныне имя одного из его основателей – проф. Е.А. Девянина. Постепенно определилась образовательная линия фестиваля как новой образовательной технологии. Это обстоятельство, а также богатый опыт проведения школьных соревнований роботов (прежде всего, лего-роботов) поставили на повестку дня вопрос о привлечении школьников к участию в фестивале. Весной 2004 г. впервые были представлены роботы, созданные командами школьников, поэтому после проведения фестиваля было принято решение о начале реализации с осени того же года научно-образовательной программы института механики МГУ для школьников и учителей, желающих узнать о последних достижениях механики, мехатроники и робототехники. В 2005 и 2006 гг. в программу фестиваля была добавлена школьная сессия, на проведение которой специально отводился один день. Эта школьная сессия стала одной из важнейших составляющих научно-образовательной программы. Такая "уменьшенная копия" фестиваля была организована для развития интереса и демонстрации уже имеющихся достижений в научно-исследовательской деятельности школьников (без ограничения их возраста). Она включала в себя торжественное открытие, соревнования созданных школьниками роботов по нескольким видам (творческий проект, прохождение трассы, борьба сумо или "реслинг" и т.п.) и специальную школьную секцию научной Школы-конференции с докладами школьников и презентацией их конструкций и с выступлениями ведущих специалистов и учителей-руководителей школьных кружков. Следует отметить, что среди школьных разработок присутствовали не только лего-конструкции. Приятно заметить, что у нас сразу сложились хорошие деловые отношения с организаторами и участниками наиболее представительных соревнований школьных лего-роботов – Международных состязаний роботов, которые ежегодно проводятся в Москве под эгидой Института новых технологий, Департамента образования города Москвы, Центра информационных технологий и учебного оборудования (ЦИТУО) и Компании LEGO Education (Дания). Эти соревнования являются фактически национальным этапом Международной олимпиады роботов (World Robot Olympiad, http://www.wroboto.org), и их победители командируются для участия в заключительном этапе.

С другой стороны, первым шагом образовательной программы в области мехатроники и робототехники должно было стать преподавание основ общей механики, которые в обычном школьном курсе (и даже в физико-математических школах) представлены только в самых простейших аспектах. С последним обстоятельством связан и другой немаловажный момент – малая информированность школьников о тематике научных работ и исследований в области механики и, как следствие, меньшие конкурсы абитуриентов при поступлении на отделения механики университетов по сравнению с отделениями математики, физики и информатики, т.е. родственных наук, о которых школьная программа дает несколько лучшее представление (тенденция, наблюдаемая в течение уже десятилетий, несмотря на то, что набор на отделения механики меньше, чем на другие указанные отделения!). Поэтому одной из главных задач научно-образовательной программы является помощь школьникам в выборе будущей специальности, привлечение их к получению образования по дисциплинам механико-математического и робототехнического цикла. Посещение лекций и работа учащегося с научным руководителем позволяют узнать, чем занимается современная наука *механика*. Школьникам предоставляется возможность при содействии выбранного руководителя начать самостоятельную научно-исследовательскую работу, попробовать свои силы в решении и исследовании конкретных задач и конструировании робототехнических и мехатронных систем. Лучшие работы школьников рекомендуются к опубликованию в ведущих научных журналах и представлению на Колмогоровских чтениях, ежегодно проводимых в СУНЦ МГУ (школе им. А.Н. Колмогорова), научных семинарах, проходящих в институте механики МГУ, на механико-математическом факультете МГУ, в Институте прикладной математики РАН. С целью расширения кругозора школьников и учителей и их ознакомления с различными разделами механики в рамках школьной сессии фестиваля 2006 г. были организованы экскурсии участников и зрителей на уникальные экспериментальные установки института механики МГУ цикла механики сплошных сред (гидродинамическая труба, аэродинамическая труба, гидроканал).

Вопрос ознакомления с современной механикой и робототехникой оказывается актуальным не только для школьников, но и для учителей средней школы. Поэтому в рамках чтения лекций научно-образовательной программы проводятся также курсы повышения квалификации учителей.

Предлагаемые программой курсы лекций рассчитаны на учащихся 9-11 классов, читаются на доступном для школьников уровне, но охватывают широкий круг вопросов – от классических результатов в механике и робототехнике и смежных областях до новейших научных исследований. Заметим, что тематика основного курса лекций научно-образовательной программы включает не только механику, но и смежные области науки и техники (например, в лекциях 2004-2005 у.г. и 2005-2006 у.г. были представлены такие темы, как управление механическими системами через Интернет, нейронные сети, использование современной микроэлектроники и микропроцессоров, свойства зрения живых существ и их использование при создании систем технического зрения, технические и медицинские аспекты создания тренажеров, небесная механика, астероидная опасность, возобновляемые источники энергии). Периодичность основного курса – одна лекция в неделю. Кроме того, в течение года проводятся также 3-4 лекции лектория "Встречи с интересными учеными-механиками", тематика которых носит популярный характер и рассчитана на весьма широкий круг слушателей. Его лекции часто носят междисциплинарный характер и посвящены вопросам, далеким от традиционных областей общей механики и робототехники (например, явление кавитации или различные аспекты биомеханики: тренажеры для космонавтов, использование композитных материалов при протезировании костной ткани). Лекторий является существенным дополнением к основному циклу, так сказать, экскурсом в другие области механики (включая механику сплошных сред, биомеханику).

Перечислим основные аспекты программы.

Цели программы

- Выявление и поддержка творческой молодежи, мотивированной на профессиональную деятельность и получение высококачественного высшего образования в современных и перспективных областях знаний механико-математического профиля.

- Активизация научно-исследовательской деятельности учащихся.
- Повышение квалификации учителей, знакомство их с современными достижениями науки.
- Развитие и внедрение новых образовательных технологий в школьный учебный процесс.
- Создание “привлекательного имиджа” *механики* у школьников.

Направления программы

А. Работа со школьниками

- Чтение основных курсов лекций.
- Лекторий “Встречи с интересными учеными-механиками”.
- Школьная сессия фестиваля “Мобильные роботы” им. проф. Е.А. Девянина.
- Организация научной работы школьников с привлечением преподавателей школы, включая конкурсы на постановку и исполнение эксперимента.
- Проведение спецсеминаров с докладами школьников (задачи по тематике спецкурсов и другие).
- Индивидуальная работа со школьниками, консультации и руководство, подготовка выступлений школьников на школьных конференциях, конференциях молодых ученых и Ломоносовских чтениях.
- Организация и руководство работой тематических кружков (виртуальный футбол, механика снейк- и скейтборда, механика сложных колесных экипажей, лего-роботы), подготовка командных выступлений школьников.
- Подготовка элементов дистанционного обучения (включая работу со школами для детей с ограниченными возможностями).
- Организация и проведение практикумов по общей механике, робототехнике и мехатронике, в том числе на базе сети Интернет.

Б. Работа с учителями школ

- Привлечение преподавателей к руководству исследовательской работой школьников.

- Участие в проведении школьных научных конференций.
- Консультации для преподавателей по вовлечению школьников в проводимые институтом мероприятия.
- Участие преподавателей в подготовке и проведении школьной сессии фестиваля “Мобильные роботы”.
- Совместно с МИОО проведение курсов повышения квалификации преподавателей.

Соисполнители программы

К выполнению программы привлекаются преподаватели и научные сотрудники МГУ (прежде всего, механико-математического факультета), Института прикладной математики РАН им. М.В. Келдыша, МЭИ (ТУ), используются площадки Московского Политехнического музея, Московского музея образования, СУНЦ МГУ. Методическую и организационную поддержку программы обеспечивают Московский Центр непрерывного математического образования (МЦНМО), Московский институт открытого образования (МИОО), Центр информационных технологий и учебного оборудования (ЦИТУО) и другие организации. Подписаны договоры о сотрудничестве в осуществлении программы между институтом механики МГУ и МИОО и между тремя подразделениями МГУ – институтом механики, механико-математическим факультетом и СУНЦ. Идейную поддержку программы оказывают Научно-методический Совет Минобрнауки по теоретической механике и Российский Национальный Комитет по теоретической и прикладной механике.

Базовые школы

В настоящее время основным участником среди школ является школа им. А.Н. Колмогорова (СУНЦ МГУ). Кроме нее, участвуют школьники и преподаватели школ №№ 1326, 1255, 1523, 1923, 79, 444, 2, лицея № 1564, лицея № 1557 (г. Зеленоград), школы дистанционной поддержки образования (i-школа) при ЦИТУО. Выразили заинтересованность центр внешкольной работы и детского творчества “Родник” из г. Орехово-Зуево и другие учебные организации.

ЧТО еще СДЕЛАНО конкретно (кроме основного цикла лекций, лектория и школьной сессии фестиваля “Мобильные роботы”)

- **Формирование банка тем научных работ, конкурсов и задач, предлагаемых школьникам**. Создан и продолжает формироваться список научно-исследовательских задач. Второй год проводится конкурс на постановку и проведение эксперимента по исследованию свойств сухого трения.

- **Участие в школьных конференциях**. Сотрудники института приняли участие (с докладами по темам спецкурсов) в работе школьной конференции в лицее "Вторая школа", на Колмогоровских чтениях в СУНЦ (май 2005, 2006 и 2007 гг.), в заседании клуба "Технология" в ЦИТУО, специально посвященном новым образовательным технологиям института механики, с участием учителей и всех заинтересованных. Кстати, все это обсуждение достаточно подробно представлено в Интернете на сайте http://learning.9151394.ru/mod/resource/view.php?id=327
- **Участие в школьных соревнованиях**. Среди участников ежегодных Международных состязаний роботов (Москва) в 2005-2007 гг. были и школьники-слушатели курсов, а руководители – наши лекторы. По их итогам в Международной олимпиаде роботов (Таиланд-2005, Китай-2006) также приняли участие двое школьников-слушателей курсов, один из них стал призером.
- **Организация тематических кружков по робототехнике** – созданы и работают кружки в СУНЦ МГУ и институте механики МГУ.
- **Привлечение школьников** к разработке систем управления мобильным роботом, предназначенным для участия во "взрослых" соревнованиях, – фестивале "Мобильные роботы", международных соревнованиях Евробот (Швейцария-2005, Италия-2006). Подготовка к соревнованиям Евробот осуществлялась в рамках кружка, работающего в СУНЦ МГУ. Кроме того, в соревнованиях Евробот участвовали несколько учащихся других школ, являющиеся слушателями лекций или участниками других мероприятий программы.
- **Повышение квалификации учителей**. При институте механики с согласия МИОО создана группа из преподавателей различных школ, проходящих курсы повышения квалификации, посещающих наши спецкурсы и участвующих в других мероприятиях научно-образовательной программы. По окончании занятий преподаватели-участники программы получают свидетельства государственного образца от МИОО о прохождении курса повышения квалификации на базе института механики МГУ.
- **Видеозаписи лекций**. Для подготовки видеокурса лекций, необходимого, в частности, при *дистанционном обучении*, создается видеотека – исходный материал для дальнейшей обработки.

- **Участие в научно-методических конференциях:** III Международная научно-методическая конференция (Волгоград, май 2006 г.), IX Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике (Нижний Новгород, август 2006 г.), Международная научная конференция по образовательной робототехнике соревнований Евробот (Франция, май 2007 г.).
- **Участие в выставках**: Промышленная выставка в Ганновере (Германия, 2005 г.), Международные выставки "Интеллектуальные и адаптивные роботы-2005" и "Архимед-2006" на ВВЦ, Московский музей образования, Московский Политехнический музей, включая школьную выставку "Каникулы роботов в Политехническом" (январь 2006 г. и март 2007 г.), Исторический музей, презентация на выставке-конкурсе "Роботы будущего" (программа "Шаг в будущее, Москва", МГТУ имени Н.Э. Баумана, март 2007 г.), на российском этапе международных соревнований "Евробот" (апрель 2007 г.).
- **Удостоверения для школьников**. Школьники, участвовавшие в мероприятиях программы, получают соответствующие удостоверения от института механики МГУ (о прохождении спецкурса, об участии в конференции молодых ученых, в соревнованиях мобильных роботов, по виртуальному футболу и т.д.) за подписью директора института.
- **Информация в Интернете**. Регулярно обновляемая информация обо всех мероприятиях программы представлена на сайте института механики МГУ http://www.imec.msu.ru/school.

  Школьная сессия фестиваля "Мобильные роботы" освещается на сайте http://www.mobilerobots.msu.ru/ru/school-section/school.html и на сайте Школы дистанционной поддержки образования (i-школа) http://www.home-edu.ru/user/f/00000550/robot_MSU

Научно-образовательная программа института механики МГУ, стартовавшая осенью 2004 г., может быть охарактеризована как новая уникальная, не имеющая аналогов образовательная технология с весьма широким кругом задач и целей, с разными составляющими и с большими перспективами дальнейшего развития и углубления. Следует особо подчеркнуть, что она представляет собой стык университетского и школьного образований, способствует повышению квалификации учителей средней школы и привлечению школьников к научной работе, прежде всего в новых перспективных областях, определяющих современный научно-технический прогресс. Важной чертой является сочетание как теоретических (прослушивание лекций, решение задач), так и практических (конструирование и создание робототехнических систем) аспектов.

Все перечисленные выше мероприятия программы для школьников и преподавателей, осуществляемые на традиционных площадках института механики МГУ и СУНЦ МГУ (школы им. А.Н. Колмогорова), **проводятся на бесплатной основе**. Однако, по согласованию, возможно также проведение выездных лекций и семинаров, кружков, осуществление других форм сотрудничества.

Обращаем также внимание, что возможно дистанционное участие в некоторых мероприятиях программы (конкурсы, научно-исследовательская работа и т.п.) – см. информацию на сайте программы http://www.imec.msu.ru/school.

Институт механики МГУ приглашает всех заинтересованных лиц и организаций принять участие в работе научно-образовательной программы для школьников и курсах повышения квалификации учителей по механике, мехатронике и робототехнике!

Интеллектуальное развитие подростков на уроках математики

Е.А. Регеда

Высшим смыслом социального развития в последнее время принято считать отношение к человеку как к высшей ценности бытия, создание условий для свободного развития каждого человека.

Основным средством образования в этом случае становится развитие личности. Многочисленными исследованиями философов, психологов, педагогов: Л.С. Выгодского, В.В. Давыдова, А.А. Леонтьева и др. – установлено, что развитие есть результат усложняющейся деятельности человека, в процессе которой он накапливает опыт, формирует мотивы, оценки, устанавливает новые для себя отношения. Если нет усложняющейся деятельности, нет новых отношений – нет и развития.

Усложняющаяся деятельность, которая приводит к развитию человека, может быть разнообразной. Одним из видов такой деятельности является деятельность, направленная на познание окружающего мира: человек получает необходимые знания о мире, о ценностях общества, о способах деятельности, - все это происходит в процессе обучения. Следовательно, обучение должно играть ведущую роль в развитии.

Еще в 30-е годы 20-го века выдающийся психолог-гуманист Л.С. Выгодский сказал: “Усвоение знаний, умений, навыков не является конечной целью обучения, а всего лишь средством развития детей”. В процессе обучения должен происходить интеллектуальный рост школьника, проявляющийся в развитии и обогащении различных сторон его мышления, качеств и черт личности и характера. Опираясь на реально достигнутый уровень развития, обучение всегда должно опережать его, стимулировать, вести за собой. Если овладение знаниями вносит новые элементы в действия ребенка и если эти действия сопровождаются формированием новых целей, сформулированных самим ребенком, то это и есть та деятельность, которая обеспечивает развитие. В этом случае обучение называют развивающим.

Развивающее обучение – направление в теории и практике образования, ориентирующееся на развитие физических, познавательных и нравственных способностей учащихся путем использования их потенциальных возможностей.

Широкое поле деятельности по достижению всего вышеперечисленного предоставляется учителю в процессе обучения школьников математике. Развивающая функция данного учебного предмета заключается в формировании у учащихся познавательных психических процессов и свойств личности: внимания, памяти, мышления, познавательной активности и самостоятельности, способностей. К развивающей функции обучения математике также относится формирование логических приемов мыслительной деятельности (анализа, синтеза, обобщения, абстрагирования и т.п.), общеучебных приемов. Развивающая функция предполагает ориентацию на выявление и реализацию в процессе обучения потенциальных возможностей математики как науки, в частности связанных со спецификой творческой математической деятельности. Именно специфика связи математики с действительностью, специфика математической аргументации, языка, история математики определяют духовное и интеллектуальное становление и развитие личности. Развитие учащихся в процессе обучения математике означает овладение ими интеллектуальными математическими умениями.

Любое творчество базируется на определенной системе знаний, умений и навыков. Поэтому развивающее обучение должно в полной мере обеспечивать усвоение детьми системы научных знаний и овладение способами их получения. Роль знаний не должна снижаться, но при этом способ получения таких знаний не должен носить репродуктивный характер. Любое новое знание должно быть получено в результате самостоятельной поисковой или творческой работы учащихся.

Успех учебной работы со школьниками во многом зависит от знания и учета их возрастных психологических особенностей. Это положение в особой степени относится к подростковому возрасту (от 10-11 до 15 лет), который считается переломным и является наиболее трудным для обучения и воспитания, чем младший и старший возраст.

С переходом в подростковый возраст связана существенная перестройка учебной деятельности школьника. Новый, более высокий уровень учебной деятельности определяется степенью ее самостоятельности. Для подростка постепенно раскрывается смысл учебной деятельности как деятельности по самообразованию, направленной на удовлетворение познавательных потребностей.

К 11-12 годам у большинства учащихся, как правило, уже сформировались и приобрели достаточную самостоятельность такие функции, как память, внимание, воображение – подросток настолько овладел этими функциями, что теперь в состоянии управлять ими по своей воле.

У подростков внимание является преимущественно произвольным. Следовательно, учащиеся могут заставить себя сосредоточиться на неинтересной и трудной работе ради результата, который ожидается в будущем. Но на уроке внимание подростка нуждается в поддержке со стороны учителя, которому необходимо использовать эмоциональные факторы, познавательные интересы для управления вниманием учащихся, а также для того, чтобы подключить и непроизвольное внимание учащихся.

Существенные изменения в подростковом возрасте претерпевает и память. Замечается значительный прогресс в запоминании словесного и абстрактного материала. Умение подростков организовывать мыслительную работу по запоминанию определенного материала, умение пользоваться приемами заучивания развито в гораздо большей степени, чем у младших школьников. Подростки начинают сознательно применять специальные приемы запоминания и припоминания. Запоминая, производят специальную мыслительную работу сравнения, систематизации, классификации. Таким образом, память перестраивается, переходя от доминирования механического запоминания к смысловому. При этом перестраивается сама смысловая память – она приобретает опосредованный, логический характер, обязательно включается мышление. Д.В. Эльконин, характеризуя память подростков, писал, что она становится “мыслящей”. В связи с этим необходимо изменить направленность обучения с механического запоминания и воспроизведения на осмысление информации. Так, например, подростки не должны механически учить и повторять застывшие определения научных понятий, более ценным для их развития будет самостоятельный поиск и формулирование определений. Последовательность логических операций мышления при формулировке определения такова:

– подбирается понятие (А), родовое по отношению к определяемому (В);

– В выделяется из (А) на основании характерных свойств (т.е. видового отличия) Р.

Таким образом:

– каждый элемент В принадлежит А,

– каждый элемент В обладает свойством Р.

Схема определения понятия: В – это А и Р.

Например: квадрат (В) – это ромб (А) с прямым углом (Р).

В подростковом возрасте происходят существенные сдвиги в мыслительной деятельности. Достигнутый в младшем школьном возрасте уровень развития мышления позволяет подростку успешно и систематически изучать основы наук.

Все большее значение начинает приобретать теоретическое мышление, способность устанавливать максимальное количество смысловых связей в окружающем мире. Изучаемый материал становится предпосылкой для построения и проверки своих гипотез. Именно это свойство мышления необходимо использовать при изучении нового материала. При обучении математике особенно важно опираться на развивающиеся способности обобщать и рассуждать. Математика формирует тип рационального мышления. Начало систематического изучения курса алгебры стимулирует переход к более высокому уровню обобщения, который связан с абстрагированием (арифметика есть абстрагирование числа от предмета, алгебра – абстрагирование от конкретных чисел). Изучение геометрии развивает умение рассуждать, доказывать, строго логически аргументировать.

Для развития логического мышления можно предложить учащимся задания следующих типов.

Упражнения на выделение общих и существенных свойств понятий.

1) Найдите общее свойство в последовательности чисел:

1, 4, 9, 25, 36...

8, 27, 64, 125...

82, 97, 114, 133...

2) По какому основанию вы бы сравнивали равенство и уравнение?

3) Укажите свойства, принадлежащие всем прямоугольникам.

4) Укажите свойства, общие для прямоугольника и ромба.

5) Перечислите существенные признаки понятия “ромб”. И т.д.

Упражнения на усвоение родовых и видовых признаков и связей между ними.

1) в приведенных ниже определениях выделите название определяемого объекта, родовое понятие, видовые признаки и характер связи между этими признаками:

– прямым углом называется угол, равный 90 градусам;

– острым углом называется угол, меньший 90 градусов;

– пятиугольник – это многоугольник с пятью сторонами;

– числа, которые можно записать в виде обыкновенных дробей, называются рациональными.

2) Для следующих понятий укажите родовое понятие: шестиугольник, четное число, равносторонний треугольник.

3) Укажите ближайшие родовые понятия для приведенных понятий: квадрат, вертикальные углы, простое число, уравнение, равенство и т.д.

4) Назовите несколько видовых понятий для каждого из приведенных:

– геометрическая фигура;

– уравнение;

– многоугольник.

5) Для каждого из понятий подберите видовое отличие и дополните определение:

– квадрат – это четырехугольник...

– квадрат – это прямоугольник...

– ромб – это четырехугольник...

Упражнения на выделение существенных признаков математических понятий.

Необходимо из пяти предложенных терминов выбрать два, которые наиболее точно определяют математическое понятие.

1. Геометрия (фигура, точка, свойства, уравнение, теорема).

2. Уравнение (корень, равенство, сумма, неизвестное, произведение).

3. Сумма (слагаемое, равенство, плюс, делитель, множитель).

4. Дробь (делимое, делитель, частное, знаменатель, произведение).

Основной особенностью мыслительной деятельности подростка является нарастающая с каждым годом способность к абстрактному мышлению, изменение соотношения между конкретно-образным и абстрактным мышлением в пользу последнего. Поэтому необходимо постепенно отходить от большого количества наглядности при объяснении нового материала и предоставить учащимся возможность оперировать абстрактными понятиями, подключая их воображение только там, где это необходимо. По своей сути, любое математическое понятие является абстракцией. Все понятия образуются путем операции обобщения, которая неразрывно связана с абстрагированием. Так, например, в 6-м классе последовательно изучаются понятия “дробное выражение”, “отношение”, “пропорция”. Каждое из них включает в себя бесконечное множество различных примеров. Но для того, чтобы усвоить эти понятия, совсем не обязательно перебирать все возможные примеры, достаточно просто понять содержание самого понятия и научиться им пользоваться. И учащиеся вполне успешно справляются с этой задачей.

Для подростка характерно заметное развитие критичности мышления. В отличие от младшего школьника, он не склонен слепо полагаться на авторитет учителя или учебника, он стремится иметь собственное мнение, свои взгляды и суждения, хочет убедиться в справедливости той или иной мысли, того или иного положения, суждения. Само по себе это очень ценное качество мышления, и его необходимо всячески развивать, направляя в нужное русло. Например, при изучении новой темы очень часто можно услышать вопрос: “А для чего это нужно? Зачем нам надо это изучать?” Ответы на эти вопросы послужат убедительной мотивацией необходимости введения нового понятия, правила и т.п., особенно если показать практическое применение изучаемой темы в повседневной жизни. Учащиеся будут сами с удовольствием выдвигать предположения возможного применения изучаемого теоретического материала на практике.

А при изучении свойств различных понятий полезно предоставить ученикам возможность самостоятельно убедиться в справедливости того или иного свойства. Так, например, при изучении основного свойства пропорции целесообразно предложить учащимся самим сформулировать свойство, характерное для произведений крайних и средних членов пропорции, после проведения ими небольшой практической работы с несколькими различными пропорциями.

Важной особенностью рассматриваемого возраста является формирование активного, самостоятельного, творческого мышления. Подростковый возраст наиболее благоприятен для развития такого мышления. Следует всячески стимулировать самостоятельное творческое мышление подростков, для чего полезно чаще ставить их перед необходимостью самостоятельно сравнивать различные объекты, находить в них сходное и различное, делать обобщения и выводы. Известно, что активная, самостоятельная работа мысли начинается только тогда, когда перед учащимися возникает проблема, вопрос. Поэтому учителю, стремящемуся развивать своих учеников, необходимо так организовать занятия с подростками, чтобы перед ними как можно чаще вставали проблемы различной сложности, чтобы побуждать их к самостоятельному решению этих проблем.

Творческое мышление лежит в основе творческой и исследовательской деятельности учащихся. В области математики - это близкие родственные категории. Обе связаны с решением проблемных задач. И ту, и другую необходимо формировать и направлять. Нельзя предварительно создать схему такой деятельности, так как невозможно заранее предугадать все вопросы и все проблемы, которые возникнут у учащихся в ходе такой деятельности, нельзя предвидеть способы решения еще не возникших вопросов. Это реальный поиск решения новых проблем.

Любое творчество подразумевает высокую степень самостоятельности, инсайтность (внезапность, непредсказуемость открытия) и конфликтность (переживания напряженности поиска).

В рамках обучения математике творческая деятельность направлена на овладение специальными интеллектуальными способами и приемами осуществления мыслительной деятельности.

Характерными чертами творческой деятельности учащихся является следующее.

1. Самостоятельный перенос знаний и умений в новую ситуацию. При этом используется ранее изученный и усвоенный материал (причем он может быть из разных областей знаний).

2. Школьник сам должен усмотреть проблему, когда она не очевидна, не задана в явном виде.

3. Ученик, столкнувшись с ситуацией, с проблемой, проникает в суть этой проблемы, выделяет существенные и несущественные элементы объекта, основные связи и отношения.

Например: при изучении свойств сложения и вычитания отрицательных чисел, учащиеся сначала вспоминают и анализируют свойства сложения и вычитания положительных чисел, а также смысл самих операций сложения и вычитания чисел и их интерпретацию на числовой прямой, а потом пытаются перенести эти операции на множество отрицательных чисел и вывести необходимые правила.

4. Видение вариативности решения и его хода, а также выбор наиболее рационального варианта решения.

Некоторые задачи имеют несколько способов решения, и с учащимися необходимо оговаривать все эти способы и учить выбирать наиболее рациональные.

5. Построение принципиально нового способа решения, отличного от ранее известных (например, решение неравенств второй и более высоких степеней методом интервалов, а не путем рассмотрения равносильных систем неравенств первой степени).

6. Видение новых функций объекта (например, применение изучаемой темы на практике).

Но все это только переработка готовой информации. Наиболее ценно создание новой информации: глубокий и всесторонний анализ материала по данной теме, самостоятельное выдвижение идей, гипотез, формулирование проблем, постановка задач различной степени сложности, поиск возможных вариантов решения, проверка этих решений, формулирование выводов и обобщение полученного материала. А это уже исследовательская деятельность, которая неизбежно влечет за собой психические новообразования личности, а значит, и интеллектуальный рост.

Высокий уровень интеллектуальных способностей - залог не только успешной учебы в школе, но и багаж, с которым подросток войдет во взрослую жизнь, с помощью которого выберет и освоит профессию.

Библиографический список

1. *Ганеев Х.Ж.* Пути реализации развивающего обучения математике: Учебное пособие / Урал. гос. пед. университет. Екатеринбург, 1997.
2. *Крутецкий В.А.* Психология обучения и воспитания школьников. М., 1976.
3. *Мухина В.С.* Возрастная психология. М., 1999.
4. *Регеда Е.А.* Интеллектуальное развитие подростков на уроках математики. Калуга: КГПУ им. К.Э. Циолковского. 2007.
5. *Саранцев Г.И.* Методика обучения математике в средней школе: Учебное пособие для студентов мат. спец. пед. вузов и университетов. М., 2002.
6. *Фридман Л.М., Волков К.Н.* Психологическая наука – учителю. М., 1985.

Критерии отбора содержания при выборе средств дистанционных технологий

Н.В. Максименко

Средства обучения при дистанционном обучении шире традиционных, поскольку используют, помимо традиционных, средства информационных технологий. Средства обучения выступают носителями содержания и контроля обучения, а также служат для управления познавательной деятельностью студентов.

Под *средствами информационных технологий* обучения понимают программно-аппаратные средства и устройства, функционирующие на базе микропроцессорной, вычислительной техники, а также сопровождаемых средств и систем информационного обмена, обеспечивающие операции по сбору, продуцированию, накоплению, хранению, обработке, передаче информации.

Среди средств дистанционного обучения студентов-заочников особую роль выполняют электронные лекции, электронные практикумы, электронные учебники, учебно-методическая литература, информационно-поисковые системы, сетевые учебно-методические пособия.

Основной целью использования дистанционных технологий в процессе обучения является осуществление обучения студентов на расстоянии. Прежде чем применить то или иное средство обучения, нужно выделить учебный материал, при изучении которого возможно и целесообразно использование этого средства. Поэтому при использовании сочетания средств дистанционной и традиционной формы обучения при заочном обучении основная задача состоит в отборе содержания, передаваемого студентам посредством различных средств обучения. Прежде чем применить то или иное средство обучения, нужно выделить учебный материал, при изучении которого возможно и целесообразно использование этого средства, то есть сформулировать критерии отбора содержания. Большой энциклопедический словарь дает следующее определение понятию критерий: “Критерий” - средство для сужения, признак, на основании которого производится оценка, определение и классификация чего – либо. Критерии являются непосредственным инструментом определения конкретного наполнения содержания учебного материала и выступают главным признаком меры отбора источников содержания.

Необходимым условием формулировки **критериев отбора содержания,** овладение которыми осуществляется с использованием средств дистанционных технологий, является *учет возможностей этих средств.*

Проведем классификацию перечисленных средств дистанционных технологий по степени интерактивности и остановимся на возможностях, реализуемых каждым средством обучения, используемым в нашей системе:

1. Средства обучения, обеспечивающие интерактивное взаимодействие.

2. Средства обучения, предусматривающие сочетание интерактивных методов и самостоятельного изучение материала.

3. Средства обучения, не предусматривающие интерактивного взаимодействия, т.е. направленные на самостоятельное изучение материала.

Интерактивное взаимодействие может осуществляться в процессе:

интерактивной лекции, которая предусматривает следующие возможности:

– осуществление обратной связи в процессе обучения;

– улучшение понимания за счет средств мультимедиа;

– возможность получения дополнительных знаний (обзорные лекции, исторические справки и т.п.);

– контроль за процессом усвоения материала.

лабораторного практикума обучающего характера. Возможности:

– индивидуализация и дифференциация знаний;

– развитие познавательной активности студентов;

– контроль за каждым шагом усвоения материала;

– возможность диагностирования результатов продвижения по темам курса.

контроль

– контролирующая и оценочная функция;

– корректировка знаний;

– диагностика усвоения материала.

Средства обучения, *сочетающие элементы интерактивности и самостоятельного изучения* позволяют:

1. лекции на электронном носителе:

– обеспечить обратную связь;

– контролировать процесс усвоения;

– изучать учебный материал в свободное время и в собственном темпе;

– получать дополнительные сведения;

– устанавливать межпредметные связи;

– систематизировать и обобщать полученные знания.

2. электронные лабораторные практикумы по решению задач:

– развивать самостоятельность;

– развивать познавательную активность студентов;

– индивидуализировать и дифференцировать процесс обучения;

– заниматься в свободное время, в собственном темпе;

– осуществлять репетиторские функции;

– изучать предмет или явление в динамике.

3. справочно-поисковые системы:

– осуществлять поиск информации по любому вопросу;

– подготавливать творческие, расчетные работы;

– самостоятельно изучать материал;

– осуществлять самообразование;

– расширять кругозор.

4. электронная почта:

– проводить консультации;

– решать организационные вопросы;

– рассылать учебно-методические материалы;

– проводить научную работу со студентами.

5. Web-сайты предназначены для:

– решения организационных вопросов;

– сообщения планов занятий, контрольных вопросов, условий контроля знаний и пр.

– хранения конспектов лекций или других элементов содержания материала.

С помощью средств обучения, *не предусматривающих обратную связь*, т.е. представленных на печатной основе, возможно:

– предоставлять задания для самостоятельного решения (с образцами решения, выполненными в виде рабочей тетради, с ответами и пр.)

– предоставлять методические пособия, полнотекстовые лекции, конспекты лекций;

– сообщать о планах и расписаниях занятий;

– сообщать о тематике контрольных вопросов, экзаменационных билетов, темах курсовых работ и рефератов.

Основными критериями отбора содержания при разработке курса, овладение которыми осуществляется в рамках дистанционного обучения, являются:

1. Сложность восприятия учебного материала.
2. Возможность самостоятельного открытия элементов новых знаний.
3. Необходимость систематизации и обобщения полученных знаний.
4. Значимость формируемых умений в рамках изучаемой темы.

При подготовке к занятиям одна из основных задач педагога состоит в распределении содержания учебного материала для его преподавания с помощью различных средств обучения.

Как известно, процесс познания включает следующие этапы:

1. Подготовка к восприятию учебного материала;
2. Введение нового материала (восприятие и осмысление);
3. Овладение (формирование умений);
4. Контроль.

Остановимся более подробно на каждом из перечисленных выше критериев и сопоставим уровень соответствия материала каждому из критериев, учитывая процесс познания, определенному средству дистанционного обучения

1. Сложность восприятия учебного материала

Критерий сложности восприятия учебного материала является многоаспектным и может трактоваться по-разному. В нашем исследовании, мы будем рассматривать данный критерий как включающий в себя следующие компоненты:

– соотношение количества элементов новых знаний с ранее имеющимися;
– уровень абстрактности материала;
– количество тождественных преобразований;

Уровень сложности восприятия учебного материала влияет на выбор средств обучения. Введем следующие уровни данного понятия:

– высокий уровень сложности восприятия материал;
– средний уровень сложности восприятия материала;
– низкий уровень сложности восприятии материала.

Соответствие материала перечисленным уровням сложности представлено в табл. 1.

В зависимости от соответствия материала перечисленным уровням сложности восприятия материала проанализируем целесообразность использования того или иного средства дистанционного обучения на различных этапах процесса познания.

При изучении сложного материала необходима обратная связь со студентами, которая помогает усвоению материала данного уровня сложности. Поэтому его введение должно осуществляться посредством интерактивной лекции. На этапе формирования умений и навыков целесообразно использовать компьютерный лабораторный практикум обучающего характера. При контроле сложного материала необходима немедленная корректировки ответов, что достижимо посредством компьютерного теста, представленного в интерактивном режиме.

Таблица 1

Соотношение количества элементов новых знаний с ранее имеющимися	**Уровень абстрактности материала**	**Количество тождественных преобразований**	
Преобладающее количество элементов новых знаний	Высокий уровень абстрактности, необходимость наглядного изображения	Большое количество тождественных преобразований	**Высокий уровень сложности восприятия материала**
Небольшое количество элементов новых знаний	Абстрактно-конкретный материал (сочетание конкретного и абстрактного)	Небольшое количество тождественных преобразований	**Средний уровень сложности восприятия материала**
Преобладающее количество ранее полученных знаний	Низкий уровень абстрактности (конкретный материал)	Небольшое количество несложных тождественных преобразований или отсутствие тождественных преобразований	**Низкий уровень сложности восприятия материала**

Изучение материала среднего уровня сложности может осуществляться посредством средств дистанционного обучения, предусматривающих сочетание интерактивных методов и самостоятельного обучения. Поэтому введение такого материала целесообразно проводить с помощью лекции на электронном носителе. Овладение способами действий материала данного уровня сложности целесообразно осуществлять в ходе выполнения заданий электронного лабораторного практикума по решению задач или моделирующей программы. Контроль знаний среднего уровня сложности можно осуществлять посредством компьютерного тестирования, который позволяет провести диагностику уровня усвоения материала каждым студентом.

Материал низкого уровня сложности может быть отведен для самостоятельного изучения, то есть процесс познания материала такого уровня сложности может осуществляться самостоятельно с помощью средств, не предусматривающих интерактивного взаимодействия (например, представленных на бумажных носителях).

2. Возможность самостоятельного открытия элементов новых знаний

Самостоятельное открытие знаний является продуктивным методом обучения. Если содержание материала позволяет организовать такой процесс, то его целесообразно проводить в ходе выполнения практической работы. Поэтому изучение такого материала на любом этапе процесса познания лучше всего осуществлять посредством электронного лабораторного практикума обучающего характера, так как данное средство обеспечивает самостоятельное открытие элементов новых знаний и способов действий, позволяя “направлять” студентов по нужному пути и проводить диагностику результатов. Контроль самостоятельно полученных знаний можно проводить в любой форме, например, с помощью теста, представленного в интерактивном режиме.

3. Необходимость систематизации и обобщения полученных знаний

Систематизация и обобщение полученных знаний, как правило, проводится в конце изучения темы и является подведением итогов по изученному материалу. Если содержание материала позволяет провести систематизацию и обобщение знаний самостоятельно, то данный процесс может быть реализован посредством компьютерного практикума или выполнения творческого задания с помощью моделирующей программы или на бумажной основе.

Если учебный материал, предназначенный для систематизации и обобщения полученных знаний, является сложным, т.е. требует межличностного взаимодействия, процесс обобщения и систематизации знаний должен быть проведен в интерактивном режиме, т.е. с помощью интерактивной лекции или компьютерного лабораторного практикума обучающего характера.

4. Значимость формируемых умений в рамках изучаемой темы

Изучаемая тема может быть в основном направлена на формирование базовых умений. Тогда особое внимание при ее изучении уделяется отработке полученных умений и навыков. Поэтому на этапе введения материала нужно использовать интерактивную лекцию или компьютерный лабораторный практикум обучающего характера; на этапе овладения знаниями компьютерный лабораторный практикум по решению задач; контроль знаний должен осуществляться с использованием теста, представленного в интерактивном режиме, чтобы иметь возможности корректировать знания.

Если количество базовых умений темы невелико, т.е. материал содержит в основном теоретические сведения, то он может изучаться студентами самостоятельно; из вышеперечисленных средств дистанционного обучения здесь уместнее всего использовать лекции, представленные на электронных носителях, или справочно-поисковые системы. Контроль полученных знаний может осуществляться любым способом.

Представим средства дистанционного обучения, соответствующие вышеназванным критериям отбора содержания учебного материала, в таблице.

Сложность восприятия учебного материала			**Возможность самостоятельного открытия элементов новых знаний**	**Необходимость обобщения и систематизации полученных знаний**		**Соотношение количества теоретических знаний и практических умений, практическая значимость темы**		**Этап познания**
Сложный для восприятия материал	Материал среднего уровня сложности	Легкий для восприятия материал		Обобщение и систематизация знаний, требующие межличностного взаимодействия	Самостоятельное обобщение и систематизация знаний	Теоретическая направленность	Практическая направленность	
Интерактивная лекция	Лекция на электронном носителе	Лекции на бумажных носителях Учебники	Компьютерный лабораторный практикум обучающего характера	Компьютерный лабораторный практикум обучающего характера	Интерактивная лекция	Лекции на электронном носителе Справочно-поисковые системы	Компьютерный лабораторный практикум обучающего характера	Подготовка к введению и введение материала
Компьютерный лабораторный практикум обучающего характера	Электронный лабораторный практикум по решению задач	Лабораторный практикум на печатной основе	Компьютерный лабораторный практикум обучающего характера	Моделирующая программа	Компьютерный лабораторный практикум обучающего характера	Электронный лабораторный практикум по решению задач Лабораторный практикум на печатной основе	Электронный лабораторный практикум по решению задач	Овладение умениями и навыками
Компьютерный тест, представленный в интерактивном режиме	Компьютерный тест, предусматривающий интерактивность самой программой	Тест на бумажной основе	Компьютерный тест, представленный в интерактивном режиме	Тест на бумажном носителе	Компьютерный тест, представленный в интерактивном режиме	Любая форма контроля	Компьютерный тест, представленный в интерактивном режиме	Контроль знаний

Библиографический список

1. *Ганеева А.Р.* Информационные технологии в педагогическом вузе (организация самостоятельной работы студентов по геометрии): Дисс... канд. наук. Елабуга, 2005. С. 55.
2. *Образцов П.И.* Дидактический комплекс информационного обеспечения учебной дисциплины в системе дистанционного обучения.
3. *Красильникова В.А., Веденеев П.В., Заварихин А.Е., Казарина Т.Н.* Электронные компоненты информационно-образовательной среды // Открытое и дистанционное образование. 2002. № 4(8). С. 54-57.
4. *Совайленко В.К.* О содержании математического образования и качестве учебников (мнение учителя) // Педагогика. 2002. № 3. С. 35-39.

Математические коллоквиумы в средней школе

П.М. Красников

Современные реалии таковы, что числа часов, отводимых на преподавание и изучение школьниками математики, явно недостаточно для существующих школьных программ. Это касается не только общеобразовательных школ, но и классов и школ с углубленным изучением математики. Вместе с тем, качество обучения должно оставаться на высоком уровне. Как этого можно достичь в постоянно изменяющихся условиях? Одному из возможных решений данной проблемы (и дополняющему уже существующие в школе) посвящается данная статья. А именно, предлагается *форма обучения и контроля*, которая называется *коллоквиум.*

Коллоквиум (лат. colloquium), если сделать дословный перевод, – это разговор, беседа, как правило, между учителем и учеником. Сразу стоит отметить, что коллоквиум в средней школе по своим целевым установкам (и в представленной нами системе проведения) отличается от аналогичной формы работы в вузе, а тем более и от научных коллоквиумов.

Предполагается, что на коллоквиуме учащийся имеет тетрадь с решенными заданиями из заранее определенного тематического списка. Разговор ведется на основе этих решений, составленных учеником.

Итак, сама система проведения коллоквиумов предполагает:

– регулярность их проведения по всем математическим дисциплинам (план их проведения формируется на полугодие);

– на коллоквиум выносится одна пройденная тема (или ее часть), и само задание учащиеся получают за две-три недели до проведения коллоквиума;

– часть задач и теорем обсуждается во время проведения учебных занятий, для формирования еженедельных домашних заданий;

– на коллоквиум учащиеся должны представить тетрадь с тщательно оформленными и полностью аргументированными решениями задач и доказательствами теорем (при этом чертежи должны быть выполнены циркулем и линейкой и в цвете);

– прием коллоквиума (точнее, беседа по теме) проводится только два раза; на первый коллоквиум не допускаются учащиеся, выполнившие менее 70% всего задания;

– проведение коллоквиума проходит, как правило, в рамках основных учебных часов по данной дисциплине или за сеткой, если первое невозможно по той или иной причине;

– работа ученика оценивается по пятибалльной системе, и оценка выставляется в классный журнал.

Данная форма работы успешно используется в специализированной школе им. А.Н. Колмогорова при Московском государственном университете. Однако это не означает, что такая форма не может быть использована в основной школе; при этом, конечно, нужно внести некоторые коррективы. И все же стоит отметить, что одним из основных, на наш взгляд, отличий специализированных школ состоит в том, что учащиеся (прошедшие конкурсный отбор), так или иначе, уже проявили интерес к изучению математики или других смежных дисциплин.

Преимущества проведения коллоквиумов состоят в следующем:

– более эффективное использование учебного времени, когда на текущий контроль (опрос, проверка домашнего задания, самостоятельная или контрольная работа) тратится значительно меньшее время;

– повышается качество промежуточного контроля результатов обучения и ликвидируется избыточные формы контроля; упрощается проведение зачетов и экзаменов (там, где они проводятся);

– возникает плановая схема накопляемости текущих оценок и появляется возможность использовать более качественную рейтинговую систему оценки качества обучения;

– повышается эффективность выполнения домашних заданий, так как они формируются учителем по материалам заданий будущих коллоквиумов (что известно школьникам заранее) и часть из “домашних” задач выносится в обязательный список задач данного коллоквиума;

– регулярные беседы учителя с учеником практически по всем темам программы обучения сами по себе важны, так как они позволяют более качественно реализовать принцип индивидуального обучения и быстро ликвидировать пробелы в знаниях и умениях у данного ученика;

– коллоквиумы позволяют включить в учебный процесс дополнительный стимул обучения и повысить интерес учащихся к изучению предмета;

– такая форма способствует активизации самостоятельной деятельности учеников – за одно полугодие каждый учащийся имеет тетрадь с полными решениями примерно двухсот задач, проверенных учителем во время личной беседы с учеником;

– появляется возможность привлечь учащихся к проведению небольших самостоятельных исследований, а некоторых из них – к ведению серьезной научно-исследовательской работы.

Выделим основные методические принципы, в соответствии с которыми составлялись задания коллоквиумов:

1. Принцип последовательного изложения материала: задание условно разделить на блоки, внутри которых имеется некоторая логическая структура, подразумевающая наличие задач следующих типов:

- базовые задачи (лежащие в основе темы), которые содержат в себе метод решения других задач, либо применение результатов этих задач значительно приближает к решению следующих далее упражнений;
- подготовительные задачи (как правило, к этим базовым задачам);
- тренировочные задачи (задачи на усвоение и закрепление только что полученных фактов);
- задачи, являющиеся следствиями предыдущих (частными случаями) или сводящиеся к ним;
- задачи-обобщения (задачи, включающие в себя постановку предыдущей задачи, как частный случай, например, задачи, которые отличаются от предыдущих тем, что вместо конкретных значений дан произвольный параметр);
- задачи, содержащие признаки и свойства какого-либо понятия (задачи, выявляющие необходимые и достаточные признаки выполнения некоторого условия);
- задачи, которые получены из предыдущей посредством изменения какого-либо условия при сохранении остальных;
- аккумулирующие задачи (те, которые являются некоторым итогом данной темы).

В рамках одного блока большинство задач подчиняются принципу – “от простого к сложному”.

2. Принцип активного обучения (обучение в “зоне ближайшего развития”, осуществление частично-поисковой деятельности учащимися), который состоит в том, что сложная задача или теорема разбивается на несколько подзадач, решив которые, учащийся приходит к решению всей задачи.

3. Задание коллоквиума состоит из нескольких типов задач: вычислительных, теоретического характера (теоремы и задачи на доказательство), исследовательского характера (проекты).

4. Задачи исследовательского характера (проекты) нацелены на более углубленное изучение темы коллоквиума, на развитие эвристических навыков и интереса к творческой деятельности в целом (в частности, для подготовки докладов учащихся на школьные конференции). Решение таких задач не является обязательным для сдачи коллоквиума.

5. При составлении заданий коллоквиума принятие во внимание познавательных действий и умений, а также мыслительных операций, которые могут быть использованы при решении задач из него.

6. Наличие дополнительной мотивации учащихся, осуществляемой посредством:

- включения задач с красивыми рисунками и чертежами, которые учащиеся выполняют самостоятельно;
- включения задач и теорем, занимающих важное место в истории развития математики;
- использования задач, показывает эстетическую красоту математики как науки и ее методов.

7. Особое место уделяется усвоению различных методов решения задач: составлению заданий коллоквиумов с тем расчетом, чтобы подстегнуть учащихся к их решению различными математическими методами.

8. Уделяется внимание наличию задач, иллюстрирующих связи различных областей математики между собой, а также задач, устанавливающих тесные связи между школьной и вузовской математикой (например, задач, в которых речь идет об элементарных аналогах формул и фактов из высшей математики, таких как дискретный аналог формулы Ньютона-Лейбница в коллоквиуме “Две прогрессии”).

Ниже перечисляются темы коллоквиумов, предлагавшиеся учащимся в последние годы: По следам теоремы Пифагора. Бесконечные периодические десятичные дроби. Площадь многоугольника. Равносоставленность многоугольников. Инверсия. Максимумы и минимумы в геометрии. Линейная и квадратичная функции. Задачи с параметрами. Производная и касательная. Площадь и интеграл. Геометрия и тригонометрия триэдров. Геометрия тетраэдра. Сечения многогранников. Классические неравенства. Центр масс и момент инерции в геометрии. Площадь круга и его частей. Принцип Дирихле. Принцип включения-исключения. Две прогрессии. Метод математической индукции в геометрии. Многоликий алгоритм Евклида.

В качестве конкретного примера приведем текст заданий одного из коллоквиумов.

По следам теоремы Пифагора

Цели: Повторение и изучение различных доказательств теоремы Пифагора и ее обобщений. Рассмотрение доказательств этой теоремы, полученных Евклидом, Паппом и другими авторами. Подробное изучение конструкции Евклида (“пифагоровы штаны”), лежащей в основе его доказательства теоремы Пифагора в конце первой книги “Начал”.

1. Используя рис. 1, известный по меньшей мере с 2000 г. до новой эры, завершите доказательство теоремы Пифагора для (египетского) прямоугольного треугольника со сторонами 3, 4, 5. Разберите по аналогии общий случай.

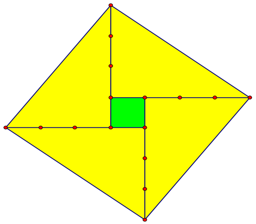


Рис.1

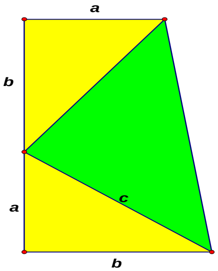


Рис.2

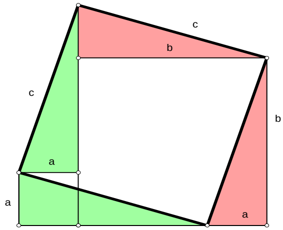


Рис.3

2. Доказательство теоремы Пифагора на основе рис. 2 было найдено генералом Д.Э. Гарфильдом за несколько лет до того, как он стал президентом США. Оно было опубликовано примерно в 1875 году в New England Journal of Education. Восстановите это доказательство, выразив тот факт, что площадь четырехугольника равна сумме площадей трех треугольников.

3. Используя построения на рис. 3, придуманные американским ученым Генри Перигалем, докажите теорему Пифагора еще одним способом.

4. При помощи циркуля и линейки постройте

а) квадрат, равновеликий данному прямоугольнику;

б) квадрат, площадь которого равна сумме площадей двух данных квадратов;

в) квадрат, равновеликий данному выпуклому четырехугольнику.

5. Найдите расстояние до вершины прямого угла прямоугольного треугольника с катетами и b до центра квадрата, построенного вне треугольника на его гипотенузе.

6. (***Евклид.***) Докажите, что на “пифагоровых штанах” (рис. 4) имеет место равенство

$$S(\Delta\, AEC) = S(\Delta\, AE'D').$$

Как с помощью этого доказать теорему Пифагора?

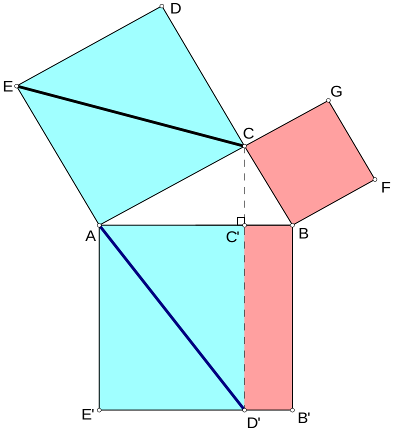


Рис.4

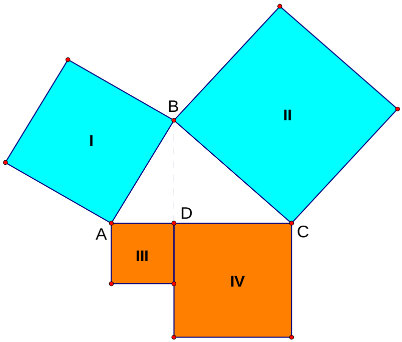


Рис.5

На рис. 5 треугольник ABC – остроугольный, $BD \perp AC$ и I, II, III, IV – квадраты. Докажите, что

$$[II] \text{ - } [I] = [IV] \text{ - } [III],$$

где $[X]$ обозначает площадь квадрата X.

8. (***Теорема Евклида.***) Докажите следующие два утверждения:

а) квадрат стороны, лежащей против острого угла треугольника, равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения одной из этих сторон на проекцию на нее другой стороны (рис. 6);

б) квадрат стороны, лежащей против тупого угла тупоугольного треугольника, равен сумме квадратов двух других сторон, сложенной с удвоенным произведением одной из этих сторон на проекцию на нее другой стороны.

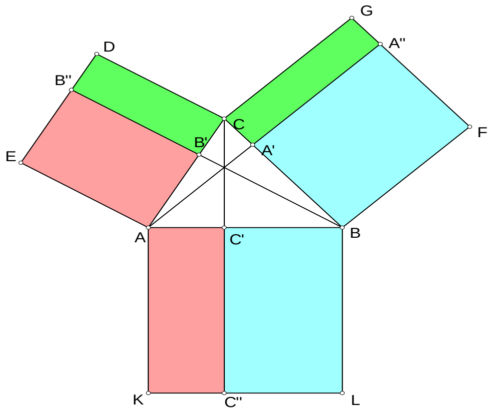


Рис. 6

9. На сторонах треугольника ABC во внешнюю сторону построены квадраты $PQBA$, $RSCB$ и $TUAC$. Найдите площадь шестиугольника $PQRSTU$, если AB=15, BC=14 и CA=13.

10. (***Теорема Паппа.***) Пусть ABC – произвольный треугольник и на сторонах AB и AC во внешнюю сторону построены произвольные параллелограммы $AA'B'B$ и $ACC''A''$ (рис. 7) таким образом, чтобы они не накладывались друг на друга. На стороне BC построим параллелограмм $BB'''C'''C$ также во внешнюю сторону, у которого $BB'''||AP$ и $BB''' = AP$, где P – точка пересечения прямых $A'B'$ и $A''C''$. Тогда площадь третьего параллелограмма равна сумме площадей первых двух.

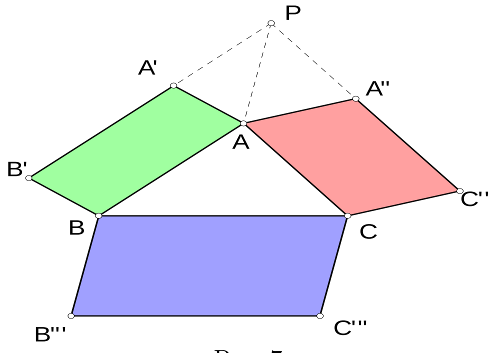


Рис. 7

11. а) Найдите разность площадей параллелограммов $MLHD$ и $FIKJ$ (рис. 8; ABC – прямоугольный треугольник, на сторонах которого построены квадраты), если известна разность площадей квадратов $BCGF$ и $ACED$.

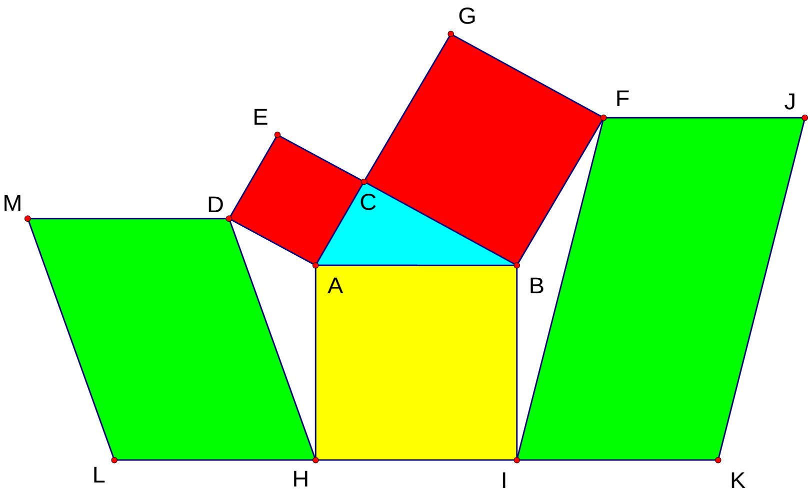


Рис. 8

б) Чему равна разность площадей квадратов, построенных на сторонах DH и FI вместо параллелограммов?

12. (***Исследовательский проект.***) Пусть X, Y, Z – центры квадратов (рис. 9), построенных на сторонах прямоугольного треугольника.

а) Докажите, что $XC = YZ, XC \perp YZ, AY \perp XZ, AZ \parallel XC, SP \parallel AC$, $AQ = QR$.

б) Докажите, что точки в каждой из троек

$$(E, C, F), \quad (D, R, B'), \quad (A, R, Y)$$

лежат на одной прямой.

в) Найдите длины отрезков BE, CE', DB', ZY, XY.

г) Выясните, какие из утверждений в пунктах а)–в) остаются справедливыми для произвольного, исходного на рис. 9, треугольника ABC.

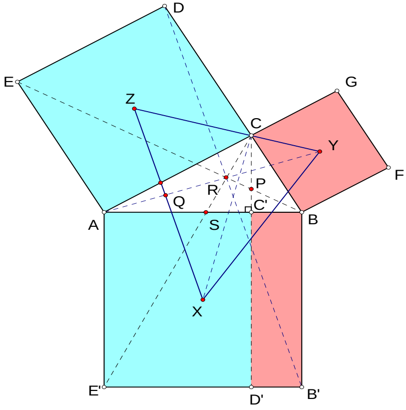


Рис. 9

Глава 4

История математики и математического образования

Леонард Эйлер в развитии математики и математического образования в России (к 300-летию со дня рождения великого ученого)

С.С. Демидов

1. Петр Великий и начало современной науки в России. Математика как предмет исследований и математическое образование в современном понимании этих терминов появились в России в результате деятельности Петра Великого. Все связанное с математикой, что было в нашей стране до этого, естественно отнести к средневековой математической культуре[1]. Широко отмечавшееся в 2001 году 300-летие математического образования в нашей стране было приурочено к трехсотлетней годовщине организации Математико-навигацкой школы в Москве, выдающийся преподаватель которой Л.Ф. Магницкий создал знаменитую "Арифметику" [3] – ту самую, которую рыбацкий сын Михайло Ломоносов нес в своей котомке, направляясь в 1730 году на учение в Москву. Наиболее важным актом в деле организации науки и научного образования в Российской Империи стало создание Петром Академии наук.

Безусловно умные и, разумеется, доброжелательные советники императора отговаривали его от этого шага. Существует анекдот, который вполне мог быть и историческим фактом, что некоторые из них советовали начинать насаждение наук и просвещения в государстве с совершенно другого конца: организовать сеть начальных школ, следом училищ более высокого уровня, наиболее способных их выпускников отправлять учиться за границу; возвратившиеся впоследствии могут организовать и высшие школы, из которых начнут выходить ученые. Вот тогда можно думать и об учреждении Академии. Зачем нужна Академия наук, если все ее члены будут приглашены из-за рубежа, ибо своих

---

[1] О математических знаниях в допетровской Руси см., например, первые главы классического труда А.П. Юшкевича [1], а также в работах Р.А. Симонова – в [2] и др.

взять неоткуда – почти все население Империи не умеет ни читать, ни писать. Это одно и то же, говорили мудрые советники, что выстроить водяную мельницу, не подведя к ней вначале воду. Петр Великий, согласно этой легенде, ответствовал так: "Я свой народ знаю. Если действовать так, как вы предлагаете, то ничего никогда и не будет. Вот я мельницу построю, тогда, может быть, к ней и воду подведут". Проект будущей Академии Петр обсуждал с Г.В. Лейбницем, а 2 февраля (22 января) 1724 года незадолго до своей кончины утвердил проект положения об Академии. Свою деятельность Академия начала уже после его смерти – первые ее собрания начались в августе 1725 года. И как показало дальнейшее развитие событий, Петр оказался прав: воду к построенной им мельнице россияне подвели.

Математике Петр I , а также, естественно, и его советник Г.В. Лейбниц придавали особое значение. Поэтому неудивительно, что среди 23 академиков, составивших Академию в первые годы ее существования, 7 оказались математиками. Вот их имена: Я. Герман, Николай и Даниил Бернулли, Х. Гольдбах, Ф.Х. Майер, Г.В. Крафт, Л. Эйлер. Уже сам этот список говорит о многом – вошедшие в него ученые относятся к числу крупнейших математиков XVIII века. Но самое замечательное в нем имя – Леонард Эйлер (1707-1783), 300-летие которого мы отмечаем в этом году.

Приезд Л. Эйлера в Россию. Эйлер приехал в Санкт-Петербург 24 мая 1727 года совсем молодым человеком, делавшим в науке первые шаги, и сразу погрузился в работу недавно созданного научного учреждения[1]. Из Петербурга в Берлин он уезжал в 1741 году уже одним из крупнейших математиков Европы, автором около 55 трудов, в том числе двухтомной "Механики" (1736), содержавшей аналитическое построение динамики точки. Но что особенно важно для развитии математики и математического образования в России – в этот первый петербургский период его творчества в полной мере раскрылось его необычайное педагогическое дарование[2]. Усилиями Л. Эйлера и его учеников и последователей в России была создана эффективная система школьного математического образования, которая стала решающим фактором в процессе становления научных исследований, выдвинувших Россию в XIX веке в число стран, обладающих крупными математическими школами.

---

[1]О жизни и творчестве Л. Эйлера см. [1. С. 103-215], а также [3, 4].

[2]Этой стороне его деятельности посвящена значительная литература, из которой особо выделим статьи А.П. Юшкевича [5, 6], опубликованные в "Математике в школе", а также книги Т.С. Поляковой [7] и, особенно, [8], специально посвященную этому сюжету.

Л. Эйлер и академическая гимназия. Академия наук, согласно идеям ее создателей, должна была не только проводить научные исследования и реализовывать их практические приложения на нужды государства Российского, но и готовить новое поколение ученых, происходящих из собственных подданных. Для этого при Академии были учреждены гимназия и университет. Преподавателями в них должны были служить члены Академии, в их числе и Л. Эйлер. Этим своим обязанностям Л. Эйлер отдался со свойственными ему энергией и добросовестностью. По ходу этой деятельности выявился его необычайный педагогический дар.

Работая в учрежденной в 1737 году комиссии по улучшению работы академической гимназии, Л. Эйлер подготовил свой проект системы гимназического образования. В его основу он положил следующие положения [8, 9]. Во-первых, целью обучения в гимназии провозглашалась подготовка к учебе в университете[1]. Во-вторых, программа обучения должна строиться таким образом, чтобы учащийся мог прервать обучение, если приобретенные им знания окажутся достаточными для его будущих целей[2]. В-третьих, обучение должно быть бессословным и бесплатным, ибо именно такой подход служит интересам государства. Оптимальной продолжительностью учебы в гимназии Эйлер считал 10 лет: начинать обучение следует в пять лет, а заканчивать в 15-16.

Математике в системе гимназического образования должно принадлежать особое место: “За языками следуют математические науки, из которых элементарные и наиболее необходимые в обычной жизни должны основательно изучаться в гимназии. Из их изучения не только каждый извлечет большую пользу, какую бы деятельность он впоследствии не выбрал, но основательный и верный метод преподавания просветит его разум и сделает его способным во всех науках отличать недосказанное от твердо усвоенного, истинное от ложного” (цит. по [10. С. 248]).

С самого начала своей преподавательской деятельности Эйлер начал выделять из математики некоторый базис, который, по его мнению, должен составить основу преподаваемого в школе: это – арифметика,

[1]“Главная задача гимназии приготовить университетских слушателей, и весь учебный план должен получить направленный к этой цели характер” (цит. по [9. С. 561]).

[2]“Те же, которые не склонны продолжать свои занятия дальше, не терпят ущерба, так как они могут оставить Гимназию еще до окончания полного курса, как только их уровень подготовки окажется достаточным для их целей” (цит. по [9. С. 561]).

алгебра, геометрия и тригонометрия. Эти разделы и стали классическим набором дисциплин для средней школы и составили содержание так называемой "элементарной математики"[1].

Особое место в проекте отводилось учебникам, которые должны отвечать требованиям научности[2] и доступности[3].

И хотя проект, представленный Л. Эйлером, и не был утвержден, однако заложенные в нем идеи не остались похороненными. Через посредство его учеников и последователей они были воплощены в системе российского математического образования, в строительстве которой, осуществлявшемся в ходе реформ Александра I, они (С.Я. Румовский, Н.И. Фусс и др.) принимали деятельное участие.

4. Л. Эйлер и учебники математики. Создание учебной литературы стало одним из приоритетов деятельности Л. Эйлера и его учеников. Сам Эйлер написал цитировавшееся нами выше "Руководство к арифметике для употребления в гимназии при Императорской Академии наук" [11] (вышло в двух томах в Санкт-Петербурге по-немецки в 1738-1740 гг. и по-русски в 1740-1760 гг.). Наконец, в 1768-1769 гг. в том же Санкт-Петербурге появилась в русском переводе его двухтомная "Универсальная арифметика" (немецкий оригинал увидел свет в 1770 году) – лучшее из имевшихся тогда в Европе руководств по алгебре, сочетавшее в себе, как и в большинстве книг Л. Эйлера, качества научной монографии и учебника.

Книга эта, однако, сложна для восприятия школьника. Ее адаптированным вариантом стала переработка, выполненная его учеником и помощником Н.И. Фуссом, увидевшая свет первоначально по-французски в 1783 году. В 1799 она появилась по-русски под названием: "Начальные основания алгебры, выбранные из алгебры Леонарда Эйлера". Этой

---

[1]Выделив эти четыре дисциплины, Л. Эйлер разумно ограничил программу обучения гимназиста в противовес популярной тогда чрезвычайно перегруженной программе Х. Вольфа.

[2]Так, к примеру, в предисловии к "Руководству к арифметике для употребления в гимназии при Императорской Академии наук в Санкт-Петербурге" [11] он писал : "если арифметика без оснований и доказательств показываться будет, то оная не довольна ни к разрешению всех случаев, ни к поощрению человеческого разума, о чем наипаче надлежало бы стараться".

[3]То есть не походить на те учебники, в которых "хотя праведные основания сея науки и показываются, – здесь мы вновь обращаемся к предисловию к тому же "Руководству к арифметике. . ." [11] – однако же так трудным и непонятным образом, что ежели кто к математическому порядку не привык, то не можно почти того и выразуметь".

книгой была заложена русская традиция учебников по алгебре, продолжавшаяся вплоть до знаменитой “Алгебры” А.П. Киселева, обучение по которой осуществлялось до 60-х годов XX столетия [12].

Н.И. Фуссу принадлежат также учебники по геометрии (“Геометрия в пользу и употребление обучающегося благородного юношества в Сухопутном шляхетском корпусе” (СПб, 1799)) и плоской тригонометрии (“Начальные основания плоской тригонометрии” (СПб, 1804)), нашедшие широкое применение в русской школе.

Как известно, современная форма изложения тригонометрии принадлежит Л. Эйлеру. Сам Эйлер изложения тригонометрии, приспособленного для нужд школы, так и не дал. Сделал это впервые его ученик С.Е. Головин в книге “Плоская и сферическая тригонометрия с алгебраическими доказательствами” (СПб, 1789). Подобного изложения тригонометрии в других странах пришлось ждать еще многие годы.

С.Е. Головину принадлежат также получившее значительное распространение учебники по арифметике (“Руководство к арифметике для употребления в народных училищах”. Ч. 1, 2. СПб, 1786) и геометрии (“Краткое руководство к геометрии для народных училищ”. СПб, 1786).

Ученики и последователи Л. Эйлера – С.К. Котельников, Н.Г. Курганов, С.Я. Румовский, Н.И. Фусс, М.Е. Головин – создали корпус превосходной по тем временам учебной литературы[1] (некоторые из их сочинений упомянуты выше), в значительной мере определившей тот мощный рывок в области математики, который был совершен в России в первой половине XIX столетия (Н.И. Лобачевский, М.В. Остроградский, П.Л. Чебышев). Их целенаправленная многолетняя деятельность позволяет говорить о “методической школе” Л. Эйлера (термин Т.С. Поляковой), которая составила органическую часть его математической школы (здесь еще следует добавить И.-А. Эйлера, А.И. Лекселя, Ф.И. Шуберта, С.Е. Гурьева) – первой математической школы в истории России.

5. Создание в России системы народного образования. На годы активной деятельности учеников Л. Эйлера пришлась пора реформ Александра I, в том числе упомянутых нами реформ в области образования. В результате этих реформ была создана *система* народного образования. Вершиной этой системы стало организованное в 1802 году Министерство народного просвещения. Вся территория Империи была поделена на шесть образовательных округов. Головной организа-

[1] Отдельной благодарности заслуживает проведенная ими громадная работа по созданию русской математической терминологии.

цией (этот термин заимствован нами уже из другой эпохи – из реалий советской истории) в каждом из округов стал университет. В его подчинении оказывались гимназии, которые должны были быть созданы в каждом губернском городе, входящем в округ. А уже в подчинении гимназий оказывались училища, которые открывались в каждом уездном городе. Так как на территории Империи существовал к этому времени один-единственный университет – Московский, основанный в 1755 году, то императорскими указами были учреждены университеты в Дерпте (1802), в Вильно (1803)[1], в Харькове и Казани (1805). Близость власти, а также наличие квалифицированных ученых из Императорской Академии наук позволили Санкт-Петербургскому округу до поры до времени обходиться без университета, который был основан лишь в 1819 году.

Координационную работу в рамках всей системы народного образования (программы, учебники, кадры и др.) осуществляло Министерство, в котором было организовано Главное управление училищ. В это управление вошли ученики Л. Эйлера С.Я. Румовский и Н.И. Фусс, которые и ведали математическим образованием на просторах Империи. Под их контролем и с их участием формировались школьные программы по математике, они оценивали качество учебных руководств. Им и их сотрудникам Россия была в значительной мере обязана достаточно высоким уровнем математической подготовки гимназистов.

Велико было влияние Эйлеровской школы на деятельность университетов. Самым замечательным примером может служить работа С.Я. Румовского в качестве попечителя Казанского округа. Решая вопрос о корпусе профессоров по физико-математическим наукам в создаваемом Казанском университете он, использовав свои широкие знакомства и связи, сумел привлечь из европейских университетов таких замечательных педагогов, как друг и учитель К.Ф. Гаусса М.Ф. Бартельс, известный астроном И.А. Литров, физик К.И. Броннер, математик К.Ф. Реннер. В итоге уже первый университетский выпуск дал миру одного из крупнейших геометров XIX века Н.И. Лобачевского.

6. Леонард Эйлер и начало математических исследований в России. Разумеется, если говорить о влиянии деятельности Эйлера и его школы на развитие математических исследований в России, то оно проявилось прежде всего опосредствованным образом: через созданную

[1]По политическим причинам Виленский университет был закрыт в 1832 году. Взамен его в 1834 был основан университет в Киеве – университет Св. Владимира.

ими эффективную систему математического образования, прежде всего, среднего[1].

Прямое влияние идей Л. Эйлера на исследования ученых, выросших непосредственно на российской почве (если не считать оригинальных математических работ С.К. Котельникова, М. Софронова, С.Я. Румовского, И.-А. Эйлера, А.И. Лекселя, Н.И. Фусса, Ф.И. Шуберта, С.Е. Гурьева, которые, однако, не выходили на уровень, сколь-нибудь сравнимый с эйлеровским – о них см. [1]), стало возможным только тогда, когда в российских университетах выросло поколение математиков, способных воспринимать и развивать эти идеи. Наиболее ярким проявлением такого влияния стало рождение чебышевской школы теории чисел.

Принимая во внимание прикладную направленность гения П.Л. Чебышева, его сугубый прагматизм, можно было бы лишь удивляться появившейся у него заинтересованности лишенными приложений проблемами теории чисел, если не знать обстоятельств, при которых это произошло. Высоко одаренный амбициозный молодой математик, приехавший из Москвы завоевывать столицу, получил предложение от академика В.Я. Буняковского работать над изданием теоретико-числовых трудов Л. Эйлера. Предложение было заманчивым – оно вводило молодого человека в круг наиболее влиятельных столичных математиков, в том числе членов академии, создавая предпосылки для успешной математической карьеры. Включившись в работу, П.Л. Чебышев соприкоснулся с гением Л. Эйлера и увлекся задачами теории чисел. Так в чебышевской школе – одной из важнейших математических школ XIX – начала XX века – определилось одно из главных ее направлений, противоречащее всему духу петербургской математики того времени, направление, отмеченное высочайшими достижениями самого П.Л. Чебышева, а также А.Н. Коркина, Е.И. Золотарева, А.А. Маркова, В.Я. Успенского [13].

Таким образом, благодаря влиянию трудов Леонарда Эйлера, был существенным образом расширен диапазон исследований Петербургской математической школы, преодолена ограниченность интересов ее представителей исключительно задачами, имевшими приложения.

Л. Эйлер – математик и педагог. Так уж случилось, что Л. Эйлер объединил в одном лице крупнейшего математика своего времени и выдающегося педагога. Свои книги он писал таким образом, что вдум-

[1]Что же касается образования высшего, то и здесь наблюдается влияние эйлеровской школы: об одном примере такого влияния – прямом воздействии С.Я. Румовского на формирование системы преподавания физико-математических наук в только что созданном Казанском университете – мы только что говорили.

чивый читатель мог без особого труда овладеть достаточно сложными математическими вопросами[1]. Ученый, перегруженный работой, он не жалел времени на решение задач чисто дидактических. Как сказал 23 октября 1783 года в своей "Похвальной речи покойному Леонарду Эйлеру" Н.И. Фусс [14. С. 358]: "... великий геометр не вменял себе за унижение трудиться над сочинением, которое было ниже сил его, но важно по намерению, с которым было написано". Именно Л. Эйлер и его ученики положили начало традиции, живущей в России по сию пору: пристального внимания математической элиты к проблемам школьного математического образования. Традиция эта[2] отмечена именами величайших российских математиков – Н.И. Лобачевского, П.Л. Чебышева, А.Н. Колмогорова. Проблемам средней школы был отведен в XIX столетии специальный раздел журнала "Математический сборник", они живо обсуждались на математической секции всероссийских съездов естествоиспытателей и врачей, собиравших как представителей академической и университетской науки, так и преподавателей средней школы. В XX веке в старейшем Московском математическом обществе была учреждена и с успехом действует поныне специальная секция средней школы. В Российской академии наук функционирует специальная комиссия по вопросам математического образования в средней школе.

Гений Л. Эйлера определил основные направления и границы, в которых развивалось математическое образование в России на протяжении последующих двух столетий. Системообразующими дисциплинами этой системы стали арифметика, алгебра, геометрия и тригонометрия. Ее направляющим ориентиром – понятие функции и выработка у учащихся того мышления, которое впоследствии назвали функциональным. Этот ориентир поначалу лишь угадывался в знаменитой его трилогии: "Введение в анализ бесконечных", "Дифференциальное исчисление", "Интегральное исчисление" (об этой трилогии см., например, в [1]), ставшей для нескольких поколений учащихся введением в мир большой математики. В этой трилогии зачастую еще в зачаточной форме содер-

[1] Приспосабливая изложение своей "Универсальной арифметики" к уровню понимания читателя, не обладающего достаточной математической подготовкой, Эйлер, по свидетельству Н.И. Фусса [14], прибег к следующему приему. Диктуя ее текст мальчику-слуге, почти слепой Эйлер следил за тем как этот мальчик, вовсе незнакомый с математикой, этот текст понимает. По ходу работы мальчик не только понял содержание книги, но оказался в состоянии решать задачи и самостоятельно проводить вычисления.

[2] Для ее обозначения Т.С. Полякова предложила термин "патронаж" математического образования со стороны математики как науки в лице ее выдающихся деятелей [7].

жались основные идеи “высшей математики” XIX – первой половины XX века. Школьная математика, по замыслу Л. Эйлера, должна была готовить к вступлению в *этот мир.* В соответствии с этой задачей он сам и его ученики начали выстраивать систему школьного математического образования – программы, учебники. Эта система, подвергнутая ряду корректировок, наиболее серьезной из которых стала реформа школьного математического образования конца XIX – начала XX века (Ф. Клейн, Меранская программа, Российская подкомиссия по реформе школьного математического образования – см. [15. Лекция 12]), нацеленная на воспитание у учащегося функционального мышления, просуществовала до середины XX века. В это время в математическом сообществе (круг Н. Бурбаки, А.Н. Колмогоров и др.) начало проявляться ощущение необходимости фундаментального реформирования математического образования с целью приближения его содержания к реалиям современной математики. Началась эпоха всякого рода перестроек и экспериментов в самых разных направлениях и с совершенно неясными ориентирами. В наши дни – в период активного роста и чрезвычайной дифференциации знаний (в том числе математических) и все увеличивающегося отрыва творцов науки от деятелей школьного образования – становится несбыточной надежда на появление нового Эйлера, соединяющего в себе великого математика, понимающего суть происходящего в современной науке и угадывающего ее перспективы, и педагога, способного учить математике детей. Единственный путь решения чрезвычайно сложной задачи – создания успешно функционирующей системы математического образования, отвечающего уровню современного математического знания и запросам жизни – лежит на пути укрепления союза крупнейших математиков, которым дано видеть далекие горизонты будущей науки, и педагогов-практиков, знающих как можно и нужно учить математике ребенка. Начало этому союзу в нашей стране положил великий Эйлер.

8. Леонард Эйлер и Россия. Появление в России Л. Эйлера стало для нашей науки чрезвычайной удачей[1]. Конечно, если бы его приезд и не состоялся, математика все равно пустила бы в России свои корни.

---

[1]Приезд в Россию стал благом и для самого Л. Эйлера. Вот как он писал об этом в 1749 году И.Д. Шумахеру: “Я и все прочие, имевшие счастье некоторое время состоять при русской Императорской Академии, должны признать, что всем, что собой представляем, обязаны благоприятным обстоятельствам, в которых там находились. Что касается собственно меня, то при отсутствии такого превосходного обстоятельства я бы вынужден был, главным образом, обратиться к другим занятиям, в которых по всем признакам мог бы заниматься только крохоборством” (цит. по [3. С. 17]).

Акцент на математику, сделанный основателями Академии, без сомнения, принес бы свои результаты, тем более, что русские оказались к ней чрезвычайно восприимчивыми и проявили немалые математические способности. Но вряд ли российская математика сумела бы заговорить своим голосом так быстро: ведь уже в 1829 году в "Казанском вестнике" началось печатание знаменитого мемуара Н.И. Лобачевского "О началах геометрии" – первого великого достижения россиян в области математики.

Библиографический список

1. *Юшкевич А.П.* История математики в России до 1917 года. М.: Наука, 1968.
2. *Симонов Р.А.* Математическая мысль Древней Руси. М.: Наука, 1977.
3. *Юшкевич А.П.* Леонард Эйлер. М.: Знание, 1982.
4. *Fellmann E.A.* Leonhard Euler. Birkhäuser-Verlag: Basel-Boston-Berlin, 2007.
5. *Юшкевич А.П.* Математика и ее преподавание в России в XVII-XIX вв. // Математика в школе. 1947. № 3. С. 1-13.
6. *Юшкевич А.П.* Математика и ее преподавание в России в XVII-XIX вв. // Математика в школе. 1947. № 4. С. 17-30.
7. *Полякова Т.С.* История математического образования в России. М.: Изд-во Московского университета, 2002.
8. *Полякова Т.С.* Леонард Эйлер и математическое образование в России. М.: URSS, 2007.
9. *Кулябко Е.С.* Педагогические воззрения Леонарда Эйлера // Леонард Эйлер. Сборник статей в честь 250-летия со дня рождения, представленных Академией наук СССР / Под редакцией М.А. Лаврентьева, А.П. Юшкевича, А.Т. Григорьяна. М.: Изд-во АН СССР. С. 557-568.
10. *Белый Ю.А.* Об учебнике Л. Эйлера по элементарной геометрии // Историко-математические исследования. Вып. 14. 1961. С. 237-284.
11. *Эйлер Л.* Руководство к арифметике для употребления в гимназии при Императорской Академии наук, переведенное с немецкого через Василия Адодурова, Академии наук Адъюнкта. СПб, 1740.
12. *Юшкевич А.П.* Леонард Эйлер и математическое просвещение в России // Математика в школе. 1983. № 5. С. 71-74.
13. *Делоне Б.Н.* Петербургская школа теории чисел. М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1947.
14. *Фусс Н.И.* Похвальная речь покойному Леонарду Эйлеру // Развитие идей Леонарда Эйлера и современная наука / Под ред. Н.Н. Бо-

голюбова, Г.К. Михайлова, А.П. Юшкевича. М.: Наука, 1988. С. 353-382.

15. *Колягин Ю.М.* Русская школа и математическое образование. М.: Просвещение, 2001.

Переводы математических и астрономических трудов ученых VIII-XIV вв. и их роль в истории науки

М.М. Рожанская

Доклад посвящен двум группам переводов “исламских” математических текстов, на арабский язык и с арабского языка, сделанных в эпоху средневековья. Обе они чрезвычайно важны для истории математики.

Первую группу можно, в свою очередь, подразделить на две части. 1. Переводы преимущественно античных авторов с греческого на арабский и 2. Переводы индийской математической и астрономической литературы с санскрита на арабский и реже обратно, на арабский и иногда на греческий через посредство арабского.

Эти переводы были первым и необходимым этапом изучения греческого и индийского научного наследия в средневековье.

1. Хорошо известно, что труды многих античных и эллинистических авторов утрачены в V-VII вв. во время войн и других политических и экономических событий. Но, к счастью, значительное их число дошло до нас благодаря двойным переводам с греческого на сирийский и с сирийского на арабский, а кроме того, и большей частью непосредственно с греческого на арабский. В арабском мире появляются библиотеки, которые пополнялись рукописями из всех областей рухнувшего эллинистического мира, в том числе даже из Византии. Известно, что два крупнейших ученых-математика IX в., Коста ибн Лука и ал-Хаджадж (см. ниже) посетили Византию со специальной целью пополнения рукописями багдадских библиотек. Эта активность достигла своего пика именно в IX-X вв., в эпоху расцвета Багдадской научной школы, так называемого Багдадского “Дома мудрости”. На арабский было переведено огромное количество сочинений античных авторов. Большинство крупнейших арабских ученых – участников “Дома мудрости” – были переводчиками, вернее, именно с переводов начиналась их научная деятельность.

В течение IX-X вв. были переведены на арабский язык основные труды Евклида, Архимеда, Аполлония, Птолемея, Менелая, Диофанта, Герона Александрийского, а некоторые из них – по нескольку раз.

Например, знаменитый математик IX в., участник “Дома мудрости” Сабит ибн Кора перевел и сделал обработку “Начал” Евклида. Большинство более поздних переводов и обработок “Начал”, таких, например, как “Тахрир Уклидис” Насир ад-Дина ат-Туси (XIII в.), опирались на его перевод.

Другой ранний перевод “Начал” принадлежит ал-Хаджаджу (кон. VIII – нач. IX вв.). Ал-Хаджадж сделал даже две версии перевода. Он также – один из первых переводчиков “Алмагеста” Птолемея.

Многие переводы выполнены не только в Багдаде – научной столице арабского халифата в IX-XI вв., но и в других центрах халифата: Дамаске, Рее, Каире, Бухаре. Один из переводчиков и копиистов, живший в Дамаске, даже получил прозвище “ал-Укмедиси” – в честь Евклида.

Упомянутый выше Сабит ибн Корра выполнил массу переводов и других авторов, в частности, не только с греческого, но и с сирийского, и ко многим из них составил комментарий. Среди его переводов трактаты Архимеда “О сфере и цилиндре”, “Леммы”, “О семиугольнике”, “О касающихся кругах”, а также V-VII книги “Коников” Аполлония. Кроме первого из упомянутых сочинений, эти произведения дошли до нас только в его переводе. Он также перевел “Введение в арифметику” Никомаха Геразского. Ему же принадлежат переводы целой серии “малых” трактатов, так называемых “промежуточных”, или “средних” книг. Это были фактически учебные пособия, которые учащимся полагалось изучать “между” “Началами” Евклида и “Алмагестом” Птолемея, точнее после Евклида, но до Птолемея. (Птолемей предполагался доступным только после основательной математической подготовки.)

Целую серию переводов выполнили современники и коллеги Ибн Корры по “Дому мудрости”. Особенно известен среди них Коста ибн Лука. Он перевел с греческого некоторые “средние” книги, а также “Механику” Герона Александрийского и IV-VII книги “Арифметики” Диофанта. Они дошли до нас только в его арабском переводе (IX в.). Сами по себе эти переводы – неоценимый источник в истории арабской математики.

2. Переводы на арабский язык астрономических сочинений появляются несколько ранее математических, и это в первую очередь переводы сочинений индийских авторов. Первые переводы появились еще в VIII веке, после визита индийского посла ко двору халифа ал-Мансура. Он преподнес ал-Мансуру два астрономических трактата. Автор обоих – крупнейший индийский астроном и математик Брахмагупта (VII вв.). Это “Брахма-спхута-сиддханта” и “Кхандакхадьяка”. Первый из них перевел на арабский придворный астроном халифа ал-Фазари, который

слегка обработал его, придав ему форму зиджа (т.е. канонических астрономических таблиц), и снабдил текст комментарием. Впоследствии, в IX в., он получил название “Синдхинд” (от названия индийской провинции Синд). Позже, когда был осуществлен полный перевод, его назвали “Большой синдхинд” (в отличие от “Малого синдхинда”, одной из многочисленных его обработок).

Другой астроном, современник ал-Фазари Якуб ибн Тарик, перевел второй трактат Брахмагупты, получивший в арабской транскрипции название “ал-Арканд”. Эти два сочинения и еще трактат “Шах-и-Зидж” (т.е. “шахские таблицы”) примерно того же времени, написанный на среднеперсидском языке, переведенный частично и сохранившийся только во фрагментах (например, в Зидже ал-Хорезми, IX в.) стали основой арабоязычной астрономии вплоть до IX в. – эпохи “Дома мудрости”, когда появляются переводы и обработки Птолемея.

Большую роль в переводе индийских математических и астрономических сочинений сыграл ал-Бируни (X-XI вв.). Он попал в Индию как пленник султана Махмуда Газнийского во время его набега на Хорезм, в котором жил и работал в то время ал-Бируни. Впоследствии он уже как свободный человек состоял при его дворе и дворе его сына Масуда и внука Маудуда.

В его “Фихристе” (списке трудов), составленном им самим, числится целый ряд индийских научных сочинений. Значительная часть их, по его собственным словам, в “Фихристе” не упоминается. Частично они вошли в состав его фундаментального сочинения “Индия”. Он, в частности, – автор еще одного перевода “ал-Арканда”. В его переводах и обработках получили известность труды индийских авторов по теории отношений (“Книга об индийских рашиках”) и трактаты, в которых, кроме тригонометрических линий в треугольниках (“прямой” и “обратной” теней – котангенса и тангенса) впервые вводится определение линии синуса.

В IX-XI вв. появляются первые, а затем массовые переводы “Алмагеста” (Заметим, значительно раньше, чем появились первые переводы с греческого на латинский язык в Европе). Вообще для IX-XI вв. – эпохи “мусульманского Ренессанса” – характерно появление групп рукописей, получивших название “арабский Евклид”, “арабский Архимед” “арабский Птолемей” и т.д.

Такова была первая стадия переводческой деятельности средневековых математиков и астрономов.

Вторая стадия получила в специальной литературе название “великой эпохи переводов”. Арабская научная литература интенсивно проникает в Западную Европу через посредство множества специальных переводческих центров, возникших в городах Испании, Южной Италии, Южной Франции, Южной Германии, некоторых городах Англии и даже Ирландии.

На латинский язык были переведены оба математических трактата ал-Хорезми, арифметический и алгебраический. Арифметический трактат сохранился только в латинском переводе, восходящем к XII в. (так называемая Кембриджская рукопись). Это, очевидно, неточный перевод, скорее всего обработка нескольких арабских, а затем латинских текстов. Переводчик – Иоанн Севильский (XII в.). Переводчик другой версии – известный автор XII в. Аделард из Бата (Англия), работавший в переводческом центре в Толедо.

Второй трактат, алгебраический, под названием "Книга об исчислении алгебры и ал-мукабалы" (буквально "Книга о восполнении и противопоставлении"), откуда современный термин "алгебра" (ал-джабр, восполнение) дошел до нас в нескольких рукописях. Перевод на латинский язык, по современным данным, выполнен, по крайней мере, двумя переводчиками: Робертом Честерским и Герардо Кремонским в Толедо.

Зидж ал-Хорезми переведен на латинский язык упомянутым выше Аделардом из Бата и известен в обработке математика X-XI вв. ал-Маджрити, главы Андалузской математической школы в этот период.

Известен латинский перевод труда выдающегося багдадского астронома X в. Ал-Фергани "Книга об астрономии", точнее три перевода, два из которых сделаны в XII в. Герардо Кремонским и Иоанном Севильским. Перевод Иоанна Севильского лег в основу печатного издания, предпринятого в XV в. Региомонтаном. Книга ал-Фергани содержит значительные по величине фрагменты из "Алмагеста". Таким образом, это – своеобразный двойной перевод, и таких переводов немало. Широко были распространены переводы циклов "арабского Евклида", Архимеда, Птолемея, Диофанта, Аполлония и др. Авторы переведенных сочинений обретали легко узнаваемые латинизированные имена: ал-Хорезми – Алгоритми (отсюда современный термин "алгоритм"), ал-Фергани – Алфраганус, Ибн Сина – Авиценна, ал-Битруджи (известный арабо-испанский астроном XIII в.) – Алпетрагий и т.д.

К сожалению, только небольшая часть известных в настоящее время важнейших трудов арабских математиков и астрономов была переведена на латынь и известна в средневековой Европе. Трактаты таких, например, без преувеличения великих ученых, как ал-Бируни и Омар Хайям, стали известны европейской науке только в XIX-XX вв.

Подведем итог, если речь идет о роли и важности двух вкратце рассмотренных стадий переводческой деятельности в истории науки и культуры вообще.

Эти переводы, их последовательное "перемещение", влияние и проникновение не были простым "переносом" классического научного наследия последующим поколениям средневекового мира ислама и Западной Европы. Это не было и простым "сплавом" двух или нескольких научных традиций. "Перенос" и проникновение научных знаний сформировали базис будущего культурного и научного подъема.

Переводы, обработки, комментарии привели к развитию и созданию новых областей и направлений в математике, механике и астрономии. В математике это новые области геометрии, в особенности сферическая геометрия и учение о параллельных на основе перевода "Начал" и комментариев к ним. Это прорыв в теории чисел и теории и практике решения уравнений, формирование сферической и плоской тригонометрии как самостоятельной области математики. В механике это – проблема сущности и единства движений в "надлунном" и "подлунном" мирах, а также проблема источника движения. В астрономии это "уточнение" модели Птолемея и создание новых моделей для описания движения небесных тел.

В эпоху Ренессанса это знание стало основой того естествознания, которое подготовило почву для научной революции XVII в.

Библиографический список

1. *Юшкевич А.П.* История математики в средние века. М., 1961.
2. *Розенфельд Б.А., Юшкевич А.П.* Теория параллельных линий на средневековом Востоке IX-XIV вв. М., 1983.
3. *Матвиевская Г.П.* Учение о числе на средневековом, Среднем и Ближнем Востоке. Ташкент, 1967.
4. *Рожанская М.М.* Статика на средневековом Востоке. М., 1976.
5. *Матвиевская Г.П., Розенфельд Б.А.* Математики и астрономы мусульманского средневековья и их труды (VIII-XVII вв.). Т. I-III. М., 1983.
6. Encyclopedia of the History of Arabic Science. Vol. I-III. Ed. By Roshdi Rashed. London-New York, 1996.

О магико-хронологических расчетах на Руси

Р.А. Симонов

Отношение к магии (во всем мире, а не только в России) в целом сохраняется как к суеверию. При этом не всегда учитывается историчность магических представлений. В момент их возникновения в седой древности они могли не быть суевериями в том случае, если оказывались в положении средства познания окружающего мира, отражающего также количественные характеристики, в силу чего могут быть источниками по истории математики.

В период Возрождения в Западной Европе возродился интерес к древним магическим верованиям, которые стали разрабатываться и в университетах. В связи с этим на медицинских факультетах возникли так называемые ятронаправления (от греческого "ятро" – врач) в составе ятроматематики (врачебной астрологии), ятрофизики (врачебной физики), ятрохимии (врачебной химии) и др. В ятро- и других "научных" направлениях, связанных с магией, развивались математика, физика, химия и прочие дисциплины, которые в Новое время сформировались в науки современного типа.

Ятронаука способствовала развитию математики. И.М. Рабинович, изучавший этот вопрос применительно к реалиям Западной Европы XVI в., отмечал, что в рамках ятроматематики (врачебной астрологии) в обязанности математика входили хронологические расчеты. Одной из проблем, встававших перед ятродисциплинами, преимущественно – ятроматематикой (врачебной астрологией), была область хронологии, связанная с четким фиксированием и измерением временных интервалов, включая доли суток: "Совершенно ясно, что вопрос о способах определения и обозначения промежутков времени особенно остро стоял перед медиками. Ведь врач не только прописывает лекарство, но определяет также, как часто надо принимать микстуру, когда сменить повязку, сколько дней оставаться в постели... Требовалось определить режим лечения в терминах, не связанных с названиями конкретных дней, и научить вести учет долям суток. Мы предполагаем, что профессора медицины справлялись с этой задачей при помощи своих коллег – математиков, обучавших будущих медиков приемам вычислений, нужных для ятроматематики" [1].

В России также существовали элементы ятронауки, что настоятельно диктует необходимость в истории русской науки выделить особую ятронаучную стадию [2, 3]. Изучение новых источников ведет к выделению и в истории русской математики также ятронаучной стадии. Она следует после стадии формирования календарно-арифметических знаний, обусловленных творчеством Кирика Новгородца и его окружения. Так, от XV-XVI вв. сохранились русские ятроматематические источники: астрологические таблицы и расчеты медицинского назначения [4, 5].

Ятронаучная стадия в истории русской математики предваряет и "сопровождает" формирование стадии массовой профессиональной деятельности в области математики XVI-XVIII вв., где главными источниками выступают рукописные тексты по арифметике и геометрии типа

“Цифирной счетной мудрости” и “Книги именуемой геометрия или землемерие радиксом и циркулем” и др. [6].

Разработка ятронаучной стадии древнерусской математики требует решения ряда задач. В первую очередь это: 1) выявление и 2) изучение соответствующих источников. Указанные две задачи взаимосвязаны. Невозможно выявить искомые источники вне ятронаучного контекста. Значит, необходимо опираться на реалии, которые питали ятронауку. Таковыми являются магические представления, которые возникли в начальный период истории Руси и в определенных формах существуют до настоящего времени.

Недавно вышел русский перевод книги известного британского ученого В.Ф. Райана[1], посвященной русской магии [7]. Данная монография, содержащая обстоятельный очерк истории русской магии от появления первых сведений о случаях вохвования и колдовства на Руси до настоящего времени, позволяет не “изобретать велосипед” в указанной сфере, а соотносить изложение настоящей статьи с текстом Райана (ссылки в цитатах даются в тексте без названия книги).

По убеждению Райана, русская магия заслуживает глубокого изучения не только сама по себе, но и из-за известной недооценки и превратного ее толкования обществом: “Я не верю ни в магию, ни в гадания и считаю наблюдавшееся в настоящее время их возрождение и использование достойными сожаления; но тем не менее я считаю, что они играют чрезвычайно важную роль в социальной и культурной истории. При этом нередко приходится сталкиваться с недооценкой или превратным пониманием сущности этих явлений, которые окончательно не исчезнут никогда” [7. С. 12].

До сих пор остается не до конца понятым сам феномен магии и ее востребованности отдельными слоями общества современного мира. Райан не ставит задачей дать ответ на этот вопрос. Косвенно можно заключить, что он магические представления связывает с интуицией. Это следует из того, что многочисленные эсхатологические[2] и демонологические расчеты, предпринимавшиеся (и делающиеся до сих пор) людьми, по Райану, “удовлетворяют слишком большому числу инстинктов, чтобы склонность к подобным расчетам могла когда-нибудь бесследно

[1] Вильям Френсис Райан – член Британской академии, президент Британского общества фольклористов, защитил диссертацию в 1970 г. (Оксфорд) “Астрономическая и астрологическая терминология в древнерусской литературе” на ученую степень доктора философии.

[2] Эсхатологические расчеты принадлежат к определению времени Конца Света.

исчезнуть" [7. С. 456]. Отсюда можно заключить, что магия, принадлежа к архетипическим представлениям, связана с подсознанием, чем и объясняется устойчивость интереса к ней и исключительная сложность научного понимания самого феномена магии.

Британский автор выделяет в качестве одного из вопросов, на которые общественность обращает пристальное внимание, связь между магией и религией. Его книга не предлагает новых решений "весьма дискуссионного вопроса о природе магии и о ее отличиях от религии. Я лишь отмечаю, что цели магии в России, как и везде, в огромном большинстве отражают личные устремления к сексу, власти, богатству, мести, избавлению от болезни, защите от вреда, причиненного чьими-то магическими действиями. Религии же, даже в своих наименее привлекательных проявлениях, имеют обычно социальные, этические духовные и теологические аспекты, которые ставят их выше устремлений отдельного индивидуума" [7. С. 15].

Вместе с тем не всегда можно провести четкую грань между магическими и религиозными проявлениями: "Нередко как в Европе, так и в России к различным видам магии прибегали священнослужители основных религиозных конфессий; иногда невозможно четко разграничить формы и функции православной и магической молитвы, иконы и амулета" [7. С. 18]. Не обошел стороной Райан вопрос об отношении к магии советских властей как к составной части старого мира, не заслуживающей обсуждения или подлежащей искоренению: "Нельзя сказать, что игнорировался сам предмет, однако большинство российских ученых до последнего времени не имели возможности отделять задачи научного анализа от целей политической пропаганды и общественного перевоспитания" [7. С. 20].

Общий вывод В. Райана (который он считает самоочевидным), что магия и гадания на Руси восходят к периоду поздней античности через византийское посредство. Вместе с тем, следуя за Полом Бушковичем, Райан парадоксально полагает, что "неизвестно, насколько создаваемая нами на основе доступных скудных исторических данных картина соответствует тому, во что на самом деле верили и что делали разные люди в разных местах и в разное время" [7. С. 34].

В современном сознании укоренилось и относится к числу устойчивых (особенно, как ни странно, в кругу ученых-естествоиспытателей) мнение о магии как исключительно суеверии. К чести В.Ф. Райана, надо сказать, что он борется с этим ограниченным представлением, однако не совсем энергично. В его сочинении магия как метод и средство познания на разных этапах человеческой истории, в том числе русской, уходит как бы на периферию основной канвы изложения.

Вопреки декларируемому Райаном нежеланию делать далеко идущие теоретические обобщения, сам даваемый исследователем фактический материал наталкивает на мысль, что за обилием сведений из области русской магии, кажущихся нередко отрывочными и в значительной степени заимствованными, стоит некая еще не разгаданная картина складывания на Руси попыток рационального познания окружающего мира, облаченного в иррациональные "одежды" магии.

Кстати, это не противоречит положительному отношению Райана к фундаментальному труду Линна Торндайка "История магии и экспериментальной науки". С названием указанного труда согласуется мнение Райана, "что наука и магия, рассматриваемые сегодня как противоположные друг другу феномены, для большинства людей древности, Средневековья и начала Нового времени составляли более или менее единую область знаний и верований, были частью цельного мировоззрения, теснейшим образом связанного с религией" [7. С. 12].

Благодаря ятро- и др. магическим представлениям, которые в период Возрождения служили почвой, основой и средой складывания современных естественных наук, человечество должно быть признательно магии, особенно в форме ятронаправлений. Последние в условиях университетской науки Возрождения были предвестниками и пестователями знаний, из которых возникла современная наука, с позиции которой (сейчас) они являются суевериями. В этом заключается двойственность возрожденческой магии: сохраняя в себе сверхъестественное, она в то же время породила новую (современную) науку, которая сразу стала преследовать и развенчивать свою мать – магию.

Райан в слабой степени, но все же касается вопроса о ятронауке в России. Так, он указывает на определенное знакомство здесь с ятрохимией: "После Парацельса развитие школы ятрохимии естественным образом привело к тому, что значительное число врачей, искавших счастья в Московии (многие из которых были просто авантюристами), должны были претендовать хотя бы на какое-то знание алхимии, не говоря уже об астрологии и других тайных науках, - следует полагать, что этого просто требовала их квалификация" [7. С. 527-528].

Например, к числу русских ятрохимических (а точнее – алхимических) относится документ (о котором Райан, кстати, не знал), датируемый примерно концом XVII – началом XVIII вв., когда в окружении Петра I изыскивали средства для ведения войн и финансирования проводившихся широких государственных преобразований, не брезгуя перспективой раздобыть рецепт философского камня[1] для получения алхимического золота [8].

Русские магико-хронологические источники о счете времени часами XV-XVI вв., открытые недавно и в массе своей неизвестные Райану, существенно дополняют источниковую базу по истории русской математики ятронаучной стадии. Следует отметить, что, по мнению Райана, на Руси "никакого развития математики или астрономии не отмечается вплоть до конца XV века" (С. 537); "В области календарных расчетов Русь к концу XV века практически не продвинулась дальше тех сведений, которыми располагал Кирик Новгородец (XII век)" (С. 563). Однако вновь открытые источники и осмысление прежних данных в их свете и контексте свидетельствуют, что после стадии формирования календарно-арифметических знаний, обусловленных творчеством Кирика Новгородца и его окружения, по-видимому, не позже начала XV в., а не с конца XV в., как считает Райан, сложилась неизвестная до последнего времени русская ятроматематическая традиция[2].

В древнерусской книжности встречаются тексты о прогнозировании событий по времени (в часах), которые могут рассматриваться как свидетельства не отраженной в историографии деятельности вольнодумцев, существовавшей преимущественно в Москве в XV-XVI вв. В летописании [10] это отразилось в сообщении под 1404 г. об установлении в Московском Кремле великим князем Василием Дмитриевичем (сыном Дмитрия Донского) "часника" (башенных часов) для "часомерия" (очевидно, выполнявшего и прогностическую функцию). Создателем "часника" и, по-видимому, идейным вдохновителем "часомерного" прогнозирования был афонский монах "сербин" Лазарь. Академик Д.С. Лихачев установку этих часов "сербином" Лазарем рассматривал в качестве фактора распространения в русском обществе историзма сознания в рамках ренессансных идей русского Предвозрождения [11].

Русское часовое прогнозирование, о котором идет речь, восходит к магической практике Вавилона и Древней Греции (часовой хрономантии), в которой предсказания даются по счету времени часами. В истории науки этот способ описывается так: "Разделив сутки на 24 часа, древневавилонские астрологи составили представление, будто каждый час суток находится под покровительством определенной планеты, которая как бы "управляет" им. Счет часов был начат с субботы: первым

---

[1] Кстати, в Англии поисками философского камня занимался Исаак Ньютон.

[2] О наиболее раннем (на данный момент) медико-магическом древнерусском тексте числового характера см. [9].

ее часом “управлял” Сатурн, вторым – Юпитер, третьим – Марс, четвертым – Солнце, пятым – Венера, шестым – Меркурий и седьмым – Луна. После этого цикл снова повторялся...” [12].

Данные об “управлении” часами в соответствии с хрономантией, как она описана выше, представлены в виде таблицы в славяно-русском рукописном Сборнике рубежа XVII-XVIII вв. [13, 14].

Если часы 1404 г. использовались для хрономантического прогнозирования, то должны были существовать соответствующие славяно-русские “пособия” и следы применения соответствующей магической практики. И действительно, такого рода прогностические “пособия” и реминисценции их использования сохранились (обзор данных см. [15].

Так, одно из “пособий” имеет название “Часы на седмь дни: добры и средни и злы”. Содержится оно в древнерусском рукописном сборнике середины XV в. (РНБ, Кирилло-Белозерское собрание, № 22/1099). Текст опубликован [16]. Райан о нем упоминает (без исследования) в своей книге: “Существует и перечень “добрых”, “злых” и “средних” часов на каждый из дней недели (например, в воскресенье “час 1 добр, час 2 добр, час 3 зол, час 4 средни...”, со ссылкой на публикацию Тихонравова [7. С. 547; 561, прим. 71].

Второе хрономантическое “пособие” представляет собой набор таблиц, по которым можно установить прогностическую “окраску” часа любой даты (в прошлом и будущем). Этот комплекс таблиц имеет название “По сему часы разумети дневные и ночные”; содержится он в рукописной Псалтыри с восследованием конца XV – начала XVI вв. [17]. Райаном это произведение не упоминается. Оба “пособия” взаимосвязаны. Так, из второго, “свернутого”, можно было “развернуть” первое. Второй текст содержит инверсию двух показателей, что может свидетельствовать о неоднократном его копировании, в процессе чего произошла описка (инверсия показателей). Возможно, протограф второго “пособия” предшествовал первому, относясь к 1-й половине XV в., то есть был примерно на столетие ближе по времени к часам 1404 г., чем сохранившийся список таблиц.

Со времен Птолемея (2 в. от РХ) хрономантией предписывалось считать благоприятными (“добрыми”) Юпитер и Венеру, неблагоприятными (“злыми”) Сатурн и Марс, нейтральными (“средними”) Солнце и Меркурий. Птолемеевская трактовка светил до сих пор является ядром хрономантии как составной части астрологии (см. [18].

Обоим славяно-русским хрономантическим “пособиям” присуща общая удивительная особенность, состоящая в отличной от принятой в классической астрологии птолемеевской “окраске” светил и “управляемых” ими часов. Так, Сатурн по славяно-русской версии был не “злым”, а "добрым"; Юпитер не "добрым", а "злым" и так далее. Единственным совпадением была "доброта" Венеры в обеих традициях – птолемеевской и славяно-русской. Никаких объяснений оригинальной славяно-русской трактовке светил (по сравнению с общепринятой птолемеевской) в "пособиях" или других средневековых источниках как будто бы не содержится.

Откуда пришла на Русь идея об указанной трактовке светил, или она местного происхождения? В этом вопросе полной ясности нет. Однако некоторые обстоятельства его проясняют. Так, в историографии известен еще один источник, аналогичный двум рассмотренным "пособиям", с оригинальной славяно-русской трактовкой светил и "управляемых" ими часов. "Я хочу сослаться на мало известную работу раннего средневековья, - писал недавно известный астролог, – найденную в одном из сербских монастырей. Там каждому часу дня приписано качество: добрые часы, злые, нейтральные. Связав эти качества с планетами часа, можно видеть, что все плохие часы – часы Меркурия и Юпитера, все добрые часы – Солнца, Сатурна и Венеры, а нейтральные – Луны и Марса" [19].

Сведения о нахождении текста в сербском монастыре перекликаются с летописным известием о том, что московские часы 1404 г. были построены афонским монахом "сербином" Лазарем. Нельзя исключать, что Лазарь скопировал на Афоне или в Сербии в монастырской библиотеке текст с хрономантической трактовкой светил. Эту копию он привез в Москву для прогнозирования событий по часам, которые установил в Кремле. Об этом протографе "в одном из сербских монастырей" могла идти речь у Левина, а сохранившиеся русские "пособия" XV в. есть восходящие к нему тексты.

Покровительство великого князя Василия Дмитриевича, видимо, на первых порах благоприятствовало хрономантическому прогнозированию по часам. Об этом косвенно свидетельствует текст "Сказания о Мамаевом побоище", о времени написания которого мнения историков сильно расходятся (от 1380 по 1521 гг.). В "Сказании" ключевой персонаж – воевода Д.М. Боброк-Волынец – ждет наступления 8-го часа, счастливого ("доброго" в славяно-русской, а не птолемеевской трактовке) для атаки засадного полка, решившей исход Куликовского сражения.

Неоднократно упоминаются "добрые" и "злые" часы в магико-гадательной книге Рафли, сохранившейся в единственном русском списке рубежа XVII-XVIII вв. [20, 21]. Нашедшие текст А.А. Турилов и А.В. Чернецов считают автором-составителем Рафлей псковича Ивана Рыкова и достаточно обоснованно датируют компиляцию 1579 г. Райан полагает, что первоначальный славянский вариант Рафлей до его переработки Иваном Рыковым был плодом еретиков “жидовствующих” [7. С. 490-492], переводческая деятельность которых приходится на 2-ю половину XV в.

Благоприятно оценивается прогнозирование по часам в “Сказании царя Соломона, что есть печать большая”. По мнению акад. А.И. Соболевского, текст этого “Сказания” был составлен “в Московской Руси не позднее конца XVI века” [22]. В указанном сочинении царю Соломону приписывается изобретение многих наук и полезных знаний, в том числе “каков к чему час” для прогноза, “в коем часу куда ходити или ехати или з сильным стречатися”.

Осудительное отношение к хрономантическому прогнозу по часам, кажется, впервые встречается в послании старца Псковского Елеазарова монастыря Филофея “О злых днях и часах” (ок. 1524 г.). Здесь дается отрицательная оценка прогнозу жизни человека по часу его рождения. Такой прогноз Филофей причисляет к ложным басням, а соответствующее прогнозирование – к кощунственным деяниям. При этом монах, вопреки ожиданиям, строит изложение не в назидательном духе, а прибегает к логике. Он мотивирует невозможность сотворения Богом “злых” часов тем, что в таком случае Бог не в праве наказывать (“мучити”) злодеев, которые становятся такими по его воле, родившись в “злой” час.

Обычно церковные послания строились на авторитете Священного Писания и богословских сочинений Отцов Церкви, а не на логике. На необычность логической аргументации Филофея указывалось в дореволюционной историографии (например, К. Голоскевичем, В. Малининым). Однако отсутствовало объяснение, чем обусловлен такой необычный случай. Не претендуя на окончательное решение вопроса, можно предположить, что у прогнозирования по хрономантической “окрашенности” часов были покровители в церковной и правительственной верхушке. В таком случае Филофей не мог, выступая против такого способа прогнозирования, лишь сослаться на чей-то авторитет, поэтому прибег к аргументации на основе логики – для убеждения власть имущих, а не для пропаганды зависимых людей.

Решения Стоглавого Собора 1551 г. поставили точку в вопросе о прогнозировании по часам. Оно было запрещено, наряду с другими сокровенными практиками: осуждены прорицатели, которые “смотрят дней и часов и теми дьяволскими действы мир прельщают и от Бога отлучают” [23]. В индекс запрещенных для христиан учений, практик и книг в славяно-русском списке XVI в. было включено “часомерие” [24]. Возможно, “часомерием” изначально называлось хрономантическое прогнозирование по часам. Во всяком случае, "часомерие" не могло попасть в разряд запрещенных сокровенных знаний лишь по причине обычного (как теперь) использования часов.

По-видимому, в одном из последних случаев осудительного упоминания часовая хрономантия "удостоилась" в Кирилловой книге, изданной в 1644 г. по приказу царя Михаила Федоровича. Здесь в ряду гадательных и предвещательных книг и знаний говорилось "о часах добрых и злых". Прогнозирование по часам в Кирилловой книге трактуется, наряду с другими отреченными верованиями, как относящееся к волхвованию, которому предаются "безумныи людие".

Возникнув в XV в., скорее всего, с его начала – в связи с возведением "часника" в Московском Кремле в 1404 г., древнерусский вариант часовой хрономантии просуществовал до середины XVI в., будучи запрещенным Стоглавом 1551 г. Затухание хрономантического прогнозирования было также обусловлено переходом в России примерно тогда же на новую систему счета часами. Московский "часник" 1404 г., очевидно, предназначался для так называемых "косых" часов переменной длительности (равных 1/12 части отдельно дня и отдельно ночи) [25]. Так, именно для "косых" часов предназначалось прогностическое "пособие" "По сему часы разумети дневные и ночные". С середины XVI в. в Москве, а затем по всей России, перешли на счет часами постоянной длительности в 60 мин. Начало отсчета в этой системе велось "дневными" часами с рассвета и "ночными" с заката (подробнее см. [26]. В условиях церковного запрета и нового русского часового счета хрономантическое прогнозирование, основанное на "косых" часах, было обречено.

Возвращаясь к книге Райана, можно сказать, что она дает истории русской хрономантии дополнительный импульс. Дело в том, что если славяно-русская часовая хрономантия имела местное распространение, то за рубежом о ней было бы мало известно. И действительно, Райан отмечает, что, например, понятие "злой час" отсутствует в латинских и немецких предсказаниях: "Однако у русских лунников имеется характерная особенность: к предсказаниям почти на каждый день добавляется указание на "злой час" (отсутствующее в латинских и немецких версиях)" (С. 546). Таким образом, данные книги Райана подтверждают оригинальность существовавшей в XV – XVI вв. славяно-русской традиции хрономантического прогнозирования по часам.

Концепция ятронаучной стадиии истории русской математики получает дополнительное подкрепление источниками о магическом толковании на Руси времени посредством оригинального славяно-русского варианта часовой хрономантии, очевидно, восходящего к началу XV в.

Вероятно, от того времени сохранилось благопожелание “В добрый час”. Сейчас оно воспринимается как метафора, но раньше могло иметь реальный смысл “доброго” часа, сулившего успешный исход событиям, которые начинались или происходили в такой час.

Библиографический список

1. *Рабинович И.М.* О ятроматематиках // Историко-математические исследования. М., 1974. Вып. 19. С. 227, 228.
2. *Симонов Р.А.* Ятронаучный этап русской естественно-научной книжности (конец XV – начало XVI вв.) // Вопросы истории естествознания и техники. 2007. № 1. С. 58-89.
3. *Симонов Р.А.* Русская ятронаука – прорыв в истории науки // Румянцевские чтения-2007. М., 2007. С. 304-308.
4. *Морозов Б.Н., Симонов Р.А.* Датировка и атрибуция медико-астрологических расчетов, приписанных к Травнику 1534 года // Древняя Русь. Вопросы медиевистики. 2004. № 4 (18). С. 5-21.
5. *Симонов Р.А.* Тексты по практической ятроматематике в России XVI-XVII веков // Книга в пространстве культуры. М., 2005. Вып. 1. С. 31-42.
6. *Симонов Р.А.* Математика Древней Руси: новая концептуальная трактовка // Современное математическое образование и проблемы истории и методологии математики. Тамбов, 2006. С. 36-41.
7. *Райан В.Ф.* Баня в полночь: Исторический обзор магии и гаданий в России / Пер. с англ.; отв. ред. А.В. Чернецов. М., 2006. 720 с.; ил.
8. *Яковлев С.Е.* Алхимический рецепт в России // Памятники культуры: Новые открытия. Ежегодник, 1999. М., 2000. С. 12-18.
9. *Симонов Р.А.* Берестяная грамота № 715 XIII в. с числовым заклинанием // Труды четвертых Колмогоровских чтений. Ярославль, 2006. С. 284-290.
10. Полное собрание русских летописей. СПб., 1913. Т. 18. С. 281.
11. *Лихачев Д.С.* О филологии. М., 1989. С. 148-149.
12. *Климишин И.А.* Календарь и хронология. М., 1990. С. 79-80.
13. Российская государственная библиотека, фонд 439, картон 21, единица хранения 3. Л. 227 об.
14. *Симонов Р.А.* Уникальный астролого-хрономантический документ из собрания НИОР РГБ // Румянцевские чтения-2004. М., 2004. С. 228-233.

15. *Симонов Р.А.* Тайна древнерусского времени: новый синтез // Календарно-хронологическая культура и проблемы ее изучения: к 870-летию “Учения” Кирика Новгородца. М., 2006. С. 149-159.
16. *Тихонравов Н.* Памятники отреченной русской литературы. М., 1863. Т. 2. С. 382-384.
17. РГБ, фонд 354, № 14. Л. 663.
18. *Саплин А.Ю.* Астрологический энциклопедический словарь. М., 1994. С. 417.
19. *Левин М.Б.* Лекции по астрологии. М., 1992. С. 60-61.
20. РГБ, фонд 439, картон 21, ед. хр. 3. Л. 1-204 об.
21. *Турилов А.А., Чернецов А.В.* Сокровенная книга Рафли // ТОДРЛ. Л., 1985. Т. 40. С. 302 (дважды), 318, 323, 331, 332.
22. *Соболевский А.И.* Переводная литература Московскуой Руси XIV-XVII веков. СПб., 1903. С. 433.
23. Стоглав. М., 1890. С. 181-182.
24. РНБ, Соф. 1285. Л. 46.
25. *Пипуныров В.Н., Чернягин Б.М.* Развитие хронометрии в России. М., 1977. С. 13.
26. *Симонов Р.А.* Косой, дневной, ночной час // Русская речь. 1993. № 4. С. 68-74.

Из истории циркуля

Г.А. Зверкина

Исторически сложилось так, что сейчас циркули – это инструменты для вычерчивания окружностей или измерения двух групп, состоящие из двух скрепленных шарниром или иным способом стержней-ножек (кронциркули) и представляющие собой рейку с закрепленными и подвижными насадками с выступающими стержнями (штангенциркули). Несмотря на простоту принципа действия циркуля, сейчас существуют чрезвычайно изобретательно сконструированные циркули для удобного вычерчивания очень больших окружностей или измерения очень маленьких предметов; многие особо точные штангенциркули снабжаются электронными устройствами.

Инструменты первой группы циркулей – чертежные и измерительные циркули, “козьи ножки”, циркули-измерители – это наиболее известные геометрические инструменты. В мифологии многих народов такие циркули (часто вместе с другим геометрическим инструментом - угольником) связывались со знанием и божественным покровительством наук. Так, мифические прародители китайцев император Фу-Си и его супруга Нюй-Ва традиционно изображаются с циркулем и угольником в руках, атрибутами римской музы астрономии Урании является глобус и циркуль и т.п. Позднее в геральдике циркуль стал символом правосудия, глубины знаний и глубокого понимания мироздания; он входил в гербы некоторых дворянских родов Европы, а позднее (но уже несколько по другой причине) вместе с угольником стал символом "Вольных каменщиков" - масонов. В недавнее время циркуль был частью герба ГДР.

Циркуль стал неотъемлемой частью современной цивилизации; казалось бы, он существовал всегда. И действительно, нам известны бронзовые циркули, обнаруженные в развалинах Помпей, разрушенных в 79 г. н.э. А не так давно во Франции при раскопках захоронения I в. н.э. был также обнаружен (возможно, древнейший из сохранившихся) бронзовый циркуль.

Как известно, необходимость заниматься землемерием (а именно так переводится слово "геометрия" с греческого языка) возникла у древнего человека вместе с переходом его к оседлому образу жизни. Древнему земледельцу надо было строить постоянное жилище, размечать границы сельскохозяйственных угодий и защищать их от диких животных (т.е. рассчитывать необходимое количество материала для изготовления ограды), а с развитием торговли пришлось научиться оценивать и объемы реализуемой продукции. В это время и возникает первый "циркуль" - шнур, с помощью которого измерялись расстояния и намечались прямые линии, т.е. шнур играл роль сразу двух геометрических инструментов – циркуля и линейки. В течение многих веков именно шнур был главным геодезическим инструментом древнего землемера (вспомним "гарпедонаптов", т.е. натягивающих веревку, у которых учился Демокрит). И долгое время шнур с привязанными на его концах колышками выполняет роль циркуля в землемерии.

Но древний человек занимался не только земледелием – с развитием общества начали развиваться ремесла, в первую очередь обслуживающие бытовые потребности людей. О материальной культуре тех времен мы можем судить лишь по археологическим находкам, а подавляющую часть из них составляет керамика.

Как известно, сначала керамические изделия изготавливались из глины выдавливанием или "сборкой" из длинной глиняной колбаски; украшались такие изделия, в основном, выдавленным орнаментом. Но после изобретения гончарного круга керамические изделия начали украшаться горизонтальными полосами вокруг их поверхности, такой рисунок получался при вращении сосуда на гончарном круге, когда стенки сосуда касалась кисть. Со временем рисунок усложнялся, в него входили нарисованные от руки орнаменты, но и здесь часто присутствуют концентрические окружности на донышках, которые могли быть нарисованы также на вращающемся вокруг своей оси изделии.

В X-IX веках до н.э. на греческой керамике появляются концентрические окружности, нарисованные уже на боках сосудов. В центре каждой группы таких окружностей присутствует след острия циркуля или подобного ему инструмента. Иногда это крупный рисунок, заполняющий значительную часть стенки сосуда, но встречаются и группы идентичных концентрических окружностей маленьких размеров, играющие роль орнамента на ободке богато украшенной вазы. И если в случае крупных рисунков с окружностями можно предположить, что окружности вычерчены древним прототипом циркуля – с помощью закрепленной на остром стерженьке бечевки, - то в более поздних рисунках следует предположить наличие уже жесткой конструкции, позволявшей точно вычерчивать окружности одинаковых диаметров.

Подтверждением этого могут служить археологические находки на территории древнего Новгорода (см. [2]). На территории древней Руси были чрезвычайно широко распространены циркульные орнаменты на предметах быта, в частности, на гребешках, найденных в огромных количествах российскими археологами. Массовость производства таких гребешков и одинаковое качество узора дают основание предполагать, что в IX-X вв. на территории России использовались специальные инструменты для процарапывания маленьких кружочков с обозначением их центров. И, действительно, такой инструмент был обнаружен – он представляет собой специальным образом выкованную металлическую пластину с рукояткой, противоположный рукоятке конец имеет С-образную выемку с двумя острыми концами, с помощью которых и процарапывались дуги окружностей.

Надо заметить, что круг с отмеченным центром – это древний символ солнца, известный у многих народов; изображения таких кружочков встречаются в орнаментах практически всех известных цивилизаций древности. И, возвращаясь к греческой керамике, мы можем предположить, что для вычерчивания таких кружочков и наборов концентрических окружностей существовали инструменты, представлявшие собой острый колышек и закрепленные на некотором расстоянии от него одну или несколько кисточек – т.е. инструмент, относящийся к группе штангенциркулей.

Солярные символы чрезвычайно часто встречаются в греческой протогеометрической и геометрической керамике, но не всегда их окружности правильны – видимо, не все мастера могли позволить себе иметь дорогой инструмент для их вычерчивания. И, кроме того, ясно, что археологические находки – это по большей части разрозненные группы предметов, принадлежавших разным слоям населения. Принадлежавшие богатым грекам предметы были украшены более причудливым и точным в исполнении рисунком, а посуда бедняков изготавливалась дешевыми мастерскими и украшалась весьма схематично сделанными орнаментами. То есть инструменты для точного создания геометрических орнаментов (циркули) не были дешевы, и не всякая мастерская могла их использовать. (Так, например, на богато украшенной греческой керамике встречается идеально нанесенный циркульный узор в виде чешуек, который на более простых изделиях выписывался весьма неточно.) Этим, видимо, объясняется и то, что античные циркули были найдены в Помпеях – в случае не столь стремительных катастроф хозяева инструментов спасали их, а традиций захоронения утвари вместе с умершим греки и римляне не придерживались.

Но обратимся к наиболее древнему упоминанию о циркуле. Греки приписывают изобретение племяннику знаменитого Дедала:

“Один из учеников Дедала по имени Талос или Пердикс, сын его сестры Поликасты, превзошел своего наставника в кузнечном искусстве, когда был еще двенадцатилетним мальчиком. Подобрав однажды змеиную челюсть или, как утверждают некоторые, рыбий позвоночник, и убедившись, что им можно перепилить пополам палку, Талос сделал железную копию челюсти и, таким образом, изобрел пилу. Это и другие его изобретения, например гончарный круг, а также приспособление для черчения окружностей, завоевали ему большой авторитет в Афинах, а Дедал, который утверждал, что сам выковал первую пилу, стал испытывать невыносимую зависть к Талосу” [1].

Здесь мы видим естественное желание молодой греческой нации, окруженной древними культурами Египта и Месопотамии, во-первых, объяснить происхождение общеизвестных технических открытий, а, во-вторых, поднять свое самомнение, приписав эти открытия своим предкам (общепринятой точкой зрения в Античности было происхождение любого открытия лишь в одном месте и лишь один раз; изобретение одного и того же в разное время в разных местах считалось невозможным). Упоминание такого инструмента в легенде о Дедале относит его изобретение к глубокой древности.

Итак, племяннику Дедала приписывается изобретение “инструмента для черчения окружностей”. Что же это был за инструмент, нужный изобретателю и ремесленнику? Возможно, это был один из типов штангенциркулей, когда на рейке имелись бегунки с острыми штырями: закрепив (например, с помощью клиньев) их положение, можно было не только вычертить окружность достаточно большого диаметра, но и переносить размеры сооружаемых объектов.

Обратившись к древнерусской и византийской культуре, мы видим на древних иконах следы процарапывания нимбов святых, сделанные циркулем большого размера (более того, на одной из кипрских мозаик персонаж представлен с таким инструментом в руке). Разумнее всего предположить, что они вычерчивались штангенциркулями. А для процарапывания маленьких нимбов одинакового размера для групп святых или на клеймах икон использовались небольшие циркули, вероятно, подобные новгородским инструментам для вычерчивания циркульных орнаментов. Традиции православной и византийской иконописи предполагают предварительнуь прорисовку иконы и процарапывание ее наиболее важных деталей; пропорции ликов выверялись с помощью циркуля [3].

Что же касается привычного нам кронциркуля, т.е. двух соединенных концами ножек, то его происхождение представляется нам также очень древним. Дело в том, что круговой след вращающегося предмета использовался еще в каменном веке, когда просверливались отверстия, например, в каменных топорах. Поэтому использование раздвоенной ветки для рисования окружностей должно быть очень древним. Другой вопрос – когда же такого рода инструменты стали изготовляться из металла – может быть косвенно решен с помощью археологии.

В упоминавшихся уже Помпеях в так называемом “Доме хирурга” (Casa del Chirurgo) был обнаружен набор хирургических инструментов, по своему качеству не уступавших современным медицинским пинцетам, щипцам, крючкам, зондам и т.п. [5]. Подобные инструменты неоднократно обнаруживались в греческих поселениях и в других регионах.

Пинцеты, имеющие соединенные в вершине пружиной ножки и щипцы, имеющие шарнирное соединение частей, по своей конструкции близки к кронциркулям, из чего можно сделать предположение, что подобные конструкции использовались и при создании циркулей. Если же учесть, что хирургические инструменты были известны уже не менее 400 лет, то и использование металлических циркулей в Риме и Греции можно отнести к периоду до 400 г. до н.э.

Если же учесть, что древнеегипетская медицина во многом не уступала римской (по сведениям из папирусов), и, кроме того, на рельефах и фресках в Египте обнаружены изображения хирургических инструментов и нечто похожее на циркули в изображении труда ремесленников, то можно предположить, что небольшие кронциркули использовались еще в Древнем Египте. Однако сомнительно, что до начала создания и последующего переписывания геометрических трактатов греческие ученые пользовались циркулем. Практическое применение геометрической алгебры предполагало использование соразмерных изделию инструментов, в теоретических рассуждениях хватало построенного на песке (крайне неточного) чертежа (хотя Платон в диалоге "Филеб" упоминает циркуль, он указывает на него как на инструмент ремесленника в ряду других инструментов; Платон считает циркуль инструментом практика, а не теоретика). Однако с развитием геометрии и началом ее преподавания, по-видимому, циркуль начинает использоваться и как научный инструмент. Произошло это не ранее времени жизни Платона и не позднее распространения "Начал" Евклида в античном мире (ок. 300 г. до н.э.). После изобретения пергамента и начала массового распространения научных трактатов (после II в. до н.э.) началось широкое использование циркуля в привычной для нас роли. Создание и переписывание многочисленных сочинений по математике и прикладным наукам (например, по полиоркетике – искусству осады) привело к необходимости использования циркуля в иллюстрировании этих книг.

Итак, циркуль как средство измерения и вычерчивания кругов возник вместе с возникновением ремесел – сначала в виде натянутого шнура, затем в виде штангенциркуля и кронциркуля.

Но с развитием цивилизации стали возникать специальные циркули, ориентированные на решение некоторых специальных задач.

Одним из наиболее ранних специальных циркулей был "циркуль золотого сечения", обнаруженный в Помпеях, его ножки скреплялись шарниром в точке, делящей их на части длиной 56 мм и 90 мм, т.е. в отношении золотого сечения, равного примерно 1:1,618. Известно, что золотое сечение широко использовалось в архитектуре и изобразительном искусстве, и этот "золотой" циркуль позволял откладывать отрезки, имеющие такое отношение длин.

Другим примером специализированного циркуля является "совершенный" циркуль – это циркуль для вычерчивания конических сечений. Он представляет собой ось (ножку циркуля), которую можно закрепить под данным углом к плоскости. Вокруг конца этой оси вращается цилиндр, составляющий с осью постоянный угол, через цилиндр пропущена другая ножка циркуля, которая может выдвигаться на разное расстояние. При вращении вокруг оси подвижная ножка ометает поверхность конуса и, выдвигаясь или вдвигаясь в цилиндр, описывает своим концом на плоскости сечение, которое образует плоскость с конусом.

Конструкция этого циркуля полностью соответствует описанию конуса в трактате Аполлония Пергского о конических сечениях; можно предположить, что именно с помощью подобного инструмента пытался вычерчивать конические сечения их изобретатель Менехм, ученик Платона. (Конические сечения были изобретены для решения задач третьего порядка, таких, как "удвоение куба" и "трисекция угла", и для применения этих кривых необходимо было их вычерчивать. Лишь после определения характерных свойств конических сечений математики смогли их вычерчивать более простыми методами.) Упоминаний о таком циркуле в греческих источниках не сохранилось, и в конце X в. его устройство излагает персидский математик ас-Сиджизи. Однако использование конических сечений для решения конкретных задач в арабской математике не применялось: математики Востока владели хорошо развитой технологией вычислений в позиционной нумерации. Если же вспомнить, что в это время математики Востока активно изучали античное научное наследие, естественно предположить, что ас-Сиджизи реконструировал совершенный циркуль по известным ему греческим источникам. В пользу этого говорит практическая непригодность совершенного циркуля: точное вычерчивание с его помощью кривых требует чрезвычайной аккуратности и в реальных условиях практически невозможно. Надо отметить, что в Италии в музее истории науки имеется модель совершенного циркуля, созданная с помощью современных технологий.

Для использования циркуля в практических приложениях античные и средневековые ремесленники изменяли форму его ножек, приспособив циркуль для измерения внутренних и внешних размеров предметов различных размеров; часто на одной из ножек закреплялась шкала, на которой фиксировался угол между ножками. Подобные усовершенствования привели в итоге к созданию большого семейства пропорциональных циркулей. Эти циркули вместо тонких ножек имели широкие пластины, на которых гравировались многочисленные шкалы. Часто на пластины наносились прямые под разными углами таким образом, что при определенном расположении циркуля можно было определить угол между двумя прямыми, иногда наносились и числовые характеристики (тригонометрические функции) этих углов. На пластинах размечались квадратные и кубические корни и некоторые другие функции.

Отметим также описанный ал-Хорезми в “Книге о действиях с астролябиями” “специальный циркуль для определения мусульманских молитв”. Он представлял собой одновременно циркуль и гномон солнечных часов. Для определения времени молитвы циркуль складывается и втыкается в землю на ровном месте, т. е. превращается в гномон, далее отмечается тень этого гномона, которая измеряется с помощью того же циркуля и сравнивается со значениями в таблице, написанной на циркуле: если тень имеет длину, указанную в таблице, это – время молитвы, если тень отличается от табличной, следует подождать, пока она не совпадет с ней [4].

Для вычерчивания некоторых кривых также создавались специальные инструменты, которые иногда называли циркулями, как, например, эллиптический циркуль, действующий по способу, предложенному Проклом Диадохом (V в.).

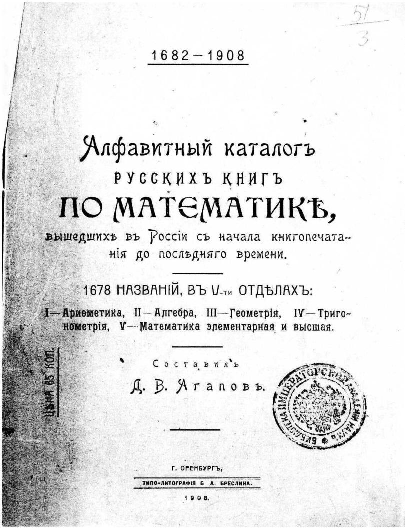
Библиографический список

1. *Грейвс Р.* Мифы Древней Греции / Пер. с англ. К.П. Лукьяненко. М.: Прогресс, 1992.
2. *Колчин Б.А.* Железообрабатывающее ремесло Новгорода Великого // МИА. 1959. № 65.
3. Монахиня Иулиания (Соколова). Труд иконописца. Изд-во Троице-Сергиевой Лавры, 1999.
4. *Розенфельд Б.А.* Астрономия стран ислама // Историко-астрономические исследования. 1984. Вып. XVII.
5. *Сорокина Т.С.* История медицины: Учебник для студ. высш. мед. учеб. заведений / 4-е изд., стеротип. М.: Издательский центр “Академия”, 2005. 560 с. 250 ил., схемы, табл., библиогр.

Забытый Лобачевский

В.П. Одинец

В книге [1] Д.В. Агапова “Каталог русских книг по математике, вышедших в России до 1908 г.” (см. рис. 1) в интервале 1820–1840 гг. есть только одна книга [2] по геометрии на фамилию Лобачевский, и эта книга, изданная в 1833 г., принадлежит не известному математику Николаю Ивановичу Лобачевскому, а помощнику библиотекаря Императорской медико-хирургической Академии (г. Санкт-Петербург) Ивану Васильевичу Лобачевскому.



1682—1908

Алфавитный каталогъ
русскихъ книгъ
ПО МАТЕМАТИКѢ,
вышедшихъ въ Россіи съ начала книгопечатанія до послѣдняго времени.

1678 НАЗВАНІЙ, ВЪ V-ти ОТДѢЛАХЪ:

I—Ариѳметика, II—Алгебра, III—Геометрія, IV—Тригонометрія, V—Математика элементарная и высшая.

Составилъ
Д. В. Агаповъ.

Цѣна 85 коп.

Г. ОРЕНБУРГЪ,
ТИПО-ЛИТОГРАФІЯ Б. А. БРЕСЛИНА.
1908.

Рис. 1

В сборнике [3] Императорского исторического общества встречаем упоминание о трех Лобачевских: о Николае Ивановиче (математике), Алексее Ивановиче (химике, младшем брате Н.И. Лобачевского) и Иване Васильевиче, названном писателем.

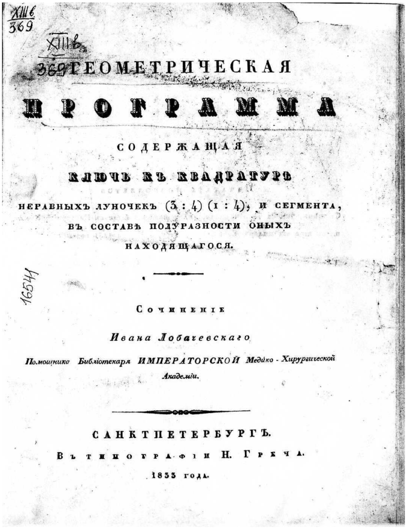
Кто же такой Иван Васильевич Лобачевский? Из [4. С. 325] “Истории Императорской Военно-медицинской (бывшей Медико-хирургической) Академии за 100 лет: 1798-1898” узнаем, что штабс-лекарь Иван Васильевич Лобачевский стал помощником библиотекаря в 1824 году.

В 1839 г. он становится библиотекарем [4. С. 440-441]. К этому времени И.В. Лобачевский был уже адъюнктом и даже принимал участие в приеме экзаменов по иностранным языкам. В 1840 г. часть адъюнктов Академии получила возможность стать экстраординарными профессорами, однако в [4] нет упоминания о том, что И.В. Лобачевский стал таким профессором. Заметим, что в [5. С. 377] И.В. Лобачевский представлен как адъюнкт-профессор математики и физики.

В 1857 г. в связи с обвинениями в краже книг из библиотеки (позже не подтвержденными) И.В. Лобачевский оставляет службу в Академии (в должности библиотекаря) и кончает жизнь самоубийством.

Возвращаясь к книге И.В. Лобачевского [2] (см. рис. 2) “Геометрическая программа, содержащая ключ к квадратуре неравных луночек

(3:4) (1:4) и сегмента в составе полуразностей оных находящихся", отметим, что она претендовала на разрешение классической задачи древних о квадратуре круга с помощью только циркуля и линейки, то есть так, как ставил задачу Платон (см., например, [6] или [7]).



ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ
ПРОГРАММА
СОДЕРЖАЩАЯ
КЛЮЧЪ КЪ КВАДРАТУРѢ
НЕРАВНЫХЪ ЛУНОЧЕКЪ (3 : 4) (1 : 4), И СЕГМЕНТА,
ВЪ СОСТАВѢ ПОЛУРАЗНОСТИ ОНЫХЪ
НАХОДЯЩАГОСЯ.

Сочиненіе
Ивана Лобачевскаго
Помощника Библіотекаря ИМПЕРАТОРСКОЙ Медико-Хирургической Академіи.

САНКТПЕТЕРБУРГЪ.
Въ типографіи Н. Греча.
1833 года.

Рис. 2

Каково же содержание "Геометрической программы" И.В. Лобачевского? Формально он ищет прямоугольник, равный по площади кругу. Надо отдать ему должное – он разделяет две задачи: задачу нахождения длины окружности радиуса R (т.е. задачу спрямления или ректификации) и задачу квадратуры круга. Метод, который он использует, – это квадрирование луночек вместе с кругом. В начале своей работы он напоминает, что впервые квадрировать луночки стал Гиппократ Хиосский (жил в V веке до н.э), который нашел три вида квадрируемых луночек, отвечающих отношениям 2:1, 3:1 и 3:2 квадратов диаметров используемых кругов [6. С. 60-61].

И.В. Лобачевский рассматривает еще две луночки, отвечающие отношениям 3:4 и 1:4 и с их помощью пытается оценить отношение площади круга к квадрату радиуса этого круга с применением цепных дробей. В результате он получает число, равное 3,166823896944. Иными словами, получается, что отношение площади круга к квадрату радиуса круга **не равно** отношению длины окружности к диаметру. Заметим, что как в школах, так и в вузах факт равенства этих отношений (и что оба отношения равны π) принимается без достаточного обоснования. Однако этот факт не очевидный (подробнее см., например, [7] и [8]).

На этом можно было бы и закончить статью, однако через 7 лет после выхода книги И.В. Лобачевского, подвергнутой в тогдашней петербургской прессе серии насмешек (см. [5. С. 344-345]), во вполне респектабельном немецком математическом “Журнале Крелля” появилась заметка [9] уже немолодого немецкого астронома Томаса Клаузена (Thomas Clausen, 1801-1885), переехавшего в Россию в г. Дерпт (Юрьев). В этой работе Т. Клаузен находит еще две квадрируемые луночки, отвечающие отношениям 5:1 и 5:3, а также высказывает гипотезу, что других квадрируемых луночек не существует.

Гипотеза Клаузена больше 100 лет не поддавалась доказательству, хотя ею занимались многие, в том числе и известные, математики, как, например, Э. Ландау (Edmund Landau, 1877-1938) или Н.Г. Чеботарев (1894-1947). Наконец, в 1947 г. А.В. Дороднов (1908-1991) в [11], опираясь на результат Н.Г. Чеботарева [10], ставит победную точку, то есть, говоря современным математическим языком, доказывает, что *для многочлена*

$$P(x) = n\left(\frac{x^m - 1}{x - 1}\right)^2 - mx^{m-n}\left(\frac{x^n - 1}{x - 1}\right)^2$$

имеются ровно пять пар целых положительных взаимно простых чисел m, n, $m>n$, таких, что группа Галуа какого-либо его неприводимого множителя имеет порядок, равный степени числа 2. *Это* 2:1, 3:1, 3:2, 5:1, 5:3.

Библиографический список

1. *Агапов Д.В.* Алфавитный каталог русских книг по математике, вышедших в России с начала книгопечатания до последнего времени. 1682-1908. Оренбург: Типо-литография Б.А. Бреслина, 1908.
2. *Лобачевский И.* Геометрическая программа, содержащая ключ к квадратуре неравных луночек (5:4) (1:4) и сегмента в составе полуразности оных находящегося. СПб.: Типография Н. Греча, 1833.
3. Сборник Императорского Исторического общества. Т. 60. СПб., 1887.
4. История Императорской Военно-медицинской (бывшей медико-хирургической) Академии за сто лет 1798-1898 / Ред. проф. И. Ивановский. СПб.: Типограф. Мин. Внутр. дел, 1898.

5. Новые материалы к биографии Н.И. Лобачевского / Сост. Б.Л. Федоренко. Научное наследство. Т. 12. Л.: Наука, 1988.
6. *Цейтен Г.Г.* История математики в древности и в средние века. М.-Л.: ГТТИ, 1932.
7. *ОдинецВ.П.* Зарисовки по истории математики: Учебное пособие. Сыктывкар: Изд-во Коми гос. пед. ин.-та, 2005.
8. *Одинец В.П., Поволоцкий А.И.* Построение элементарных функций. СПб.: Образование, 1995.
9. *Clausen T.* Vier neue mondförmige Flächen, deren Inhalt quadrirbar ist. Crelle Journ., XXI (1840), 375-376.
10. *Tschebotaröw.* Über quadrirbare Kreisbogenzweiecke. Math. Zeitschr., 39 (1935), 161-175.
11. *Дороднов А.В.* О круговых луночках, квадрируемых при помощи циркуля и линейки / ДАН СССР. Т. 58. № 6 (1947), 965-968.

Задача о назначениях: исторический обзор

А.Е. Шухман

Теория дискретной оптимизации – важный раздел исследования операций. Задачи дискретной оптимизации широко используются, прежде всего, для анализа экономических процессов. В современной математике существует много методов для решения задач такого рода. Среди методов есть универсальные – пригодные для широкого класса задач, но менее эффективные, и специальные, более эффективные, методы для решения конкретных задач.

Задача о назначениях – одна из наиболее известных дискретных оптимизационных задач. Цель задачи — найти оптимальное (минимальной стоимости) распределение работников по заданным работам. Задача о назначениях имеет широкое применение, например, при закреплении машин за маршрутами, распределении инструментов для обработки различных марок стали и т.д.

Задача формализуется следующим образом: задана матрица стоимостей $=({}_{ij})$, найти перестановку π чисел $1,\ldots,n$, для которой сумма $\sum_{i=1}^{n} {}_{i,\pi(i)}$ будет минимальной [1]. Очевидный метод решения задачи заключается в переборе $n!$ перестановок. Однако на практике такой неэффективный способ становится неприменимым уже для матриц небольших размеров.

Задача о назначениях является частным случаем общих классов оптимизационных задач, и поэтому существует много разнообразных методов ее решения. История решения задачи о назначениях показывает, как постепенно математики приходили к пониманию вычислительной сложности методов, как далеко не сразу была осознана необходимость поиска эффективных алгоритмов, удобных для практического применения.

Впервые задача о назначениях была рассмотрена Гаспаром Монжем (1746-1818) в 1784 году в геометрической форме. Монж рассматривает задачу о перевозке земли с одного участка на другой, с той же площадью. При этом земля на участке рассматривается как множество "молекул" разного веса, и ставится задача выбора такого способа транспортировки, при котором суммарное перемещение молекул будет минимальным. Монж предложил геометрический способ решения задачи: перемещать молекулы по прямым, касательным к обеим областям. Позднее, в начале XX века, была показана некорректность решения Монжа [9].

Следующие шаги в решении задачи о назначениях относятся к первой трети XX века и связаны с именами Кенига и Эгервари. Задача о назначениях может быть переформулирована как задача поиска совершенного паросочетания минимального веса во взвешенном двудольном графе. При этом вершины графа соответствуют строкам и столбцам матрицы стоимостей, а ребра имеют веса, равные элементам матрицы [3]. Кениг доказал теорему о том, что максимальный размер паросочетания совпадает с размером минимального вершинного покрытия, а Эгервари впервые рассмотрел паросочетание во взвешенном графе и доказал теорему для оценки максимальной суммы весов ребер в паросочетании [9]. Доказательство теоремы содержало алгоритм, позволяющий путем последовательного преобразования матрицы найти эту сумму. Работы Кенига и Эгервари стали основой для "венгерского" метода решения задачи о назначениях, разработанного Куном в 50-х годах [9].

В конце 40-х годов XX века были созданы первые ЭВМ. Задача о назначениях была в ряду первых задач, которые решались с помощью компьютера. Как вспоминает Данциг, первые программы для решения задачи о назначениях были основаны на неэффективном переборе всех перестановок [2]. Развитие вычислительной техники привело к бурному развитию методов оптимизации. Примерно в это же время были опубликованы алгоритмы Истефилда и Робинсона [9]. Робинсон впервые связал условие оптимальности решения задачи о назначениях с существованием цикла отрицательного веса. Предложенные алгоритмы были более эффективными, чем полный перебор, но по-прежнему имели экспоненциальную сложность.

Тем временем, в 1947 году Данциг предложил очень эффективный метод для решения общей задачи линейного программирования, получивший название симплекс-метод. Задача о назначениях может быть легко сведена к задаче линейного программирования, если ввести для каждого элемента матрицы стоимостей свою переменную, принимающую значения 0 или 1, и записать $2n$ ограничений, что в каждом столбце и каждой строке сумма элементов строго равна единице. В 1951 году Данциг замечает, что при решении задачи о назначениях симлекс-методом решение автоматически получается целочисленным [2]. Сразу после этого появились сообщения о том, что удалось решить с помощью симплекс-метода задачу о назначениях 10x10. Однако при этом пришлось решать задачу со 100 неизвестными и 20 ограничениями, что было на пределе возможностей компьютеров того времени. Кун пишет, что "в тот момент в мире не было компьютера, способного решать задачи такого размера" [8]. Кроме того, в то время еще не было известно доказательство полиномиальной оценки сложности симплекс-метода для задач транспортного типа. Это доказательство было получено только в 1973 году [9].

До широкого использования вычислительной техники математики считали методы решения задач, которые сводятся к перебору конечного числа вариантов, вполне приемлемыми и практически не занимались исследованиями по поиску эффективных алгоритмов. Практические специалисты, например психологи, вынуждены были использовать некоторые приближенные методы [9].

В 1955 году Кун опубликовал первый полиномиальный алгоритм решения задачи о назначениях – венгерский метод. Изучив работы Кенига и Эгервари, Кун совмещает метод чередующихся цепей Кенига для поиска наибольшего паросочетания с преобразованием Эгервари [8].

Венгерский метод Куна состоит из трех шагов [1]:

Шаг 1. Редукция матрицы.

В исходной матрице стоимостей в каждой строке определяется минимальная стоимость и вычитается от всех элементов строки. В полученной матрице в каждом столбце определяется минимальная стоимость и вычитается от всех элементов столбца. В результате в каждой строке и в каждом столбце матрицы появятся нулевые элементы.

Шаг 2. Построение паросочетания.

Строится двудольный граф, вершины которого соответствуют строкам и столбцам матрицы, а ребра – нулевым элементам, стоящим на пересечении соответствующих строк и столбцов. Ищется наибольшее паросочетание в построенном графе. Если паросочетание окажется полным, то оно задает оптимальное решение задачи о назначениях, иначе выполняется шаг 3.

Шаг 3. Преобразование Эгервари.

В последней матрице проводится минимальное число горизонтальных и вертикальных прямых по строкам и столбцам так, чтобы в матрице вычеркнулись все нулевые элементы. Наименьший невычеркнутый элемент вычитается из всех невычеркнутых элементов и прибавляется к элементам, стоящим на пересечении проведенных прямых. В результате в матрице количество нулевых элементов увеличится. Далее снова выполняется шаг 2.

Вычислительная сложность венгерского алгоритма – $O(n^4)$. Кун пишет: "Осенью 1953 года я решил несколько задач о назначениях размера 12x12 с трехзначными целыми данными. Каждый из этих примеров занял до двух часов, и я убедился, что комбинированный алгоритм был "хорошим". Это был один из последних моментов, когда карандаш и бумага смогли победить самые большие и быстрые компьютеры в мире" [8].

Дальнейший прогресс в методах решения задачи о назначениях связан с улучшенными реализациями венгерского метода, что позволило получить оценку сложности $O(n^3)$, и сведением задачи к поиску максимального потока минимальной стоимости.

Рассмотрим двудольный граф, ребра которого будут связывать каждого работника (множество I) с каждой работой (множество J). Стоимость ребер сделаем равной коэффициенту c_{ij} в матрице стоимостей. Введем в рассмотрение еще две вершины, которые назовем исток и сток. Исток соединим со всеми вершинами множества I, а сток соединим со всеми вершинами множества J. Все добавленные ребра имеют нулевую стоимость. Пропускная способность всех ребер равна 1. Поток в сети – функция f, которая каждому ребру сети ставит в соответствие действительное число, причем в каждой вершине, кроме истока и стока, суммарный поток по входящим ребрам равен суммарному исходящему потоку, а поток по ребру не превосходит его пропускной способности. Величина потока – суммарный исходящий поток из истока. Стоимость – сумма произведений потока по ребру на стоимость ребра. Максимальный поток минимальной стоимости в полученной сети определяет решение задачи о назначениях [6].

Задача о максимальном потоке минимальной стоимости была поставлена в 50-е гг. Данцигом и Фалкерсоном. В 1961 году Басакер и Гоуэн опубликовали алгоритм для ее решения [4]. Для текущего потока в графе строится остаточная сеть, которая для каждой пары вершин содержит прямое ребро, если поток строго меньше пропускной способности и обратное – если поток ненулевой. Стоимость прямого ребра равна стоимости исходного ребра, стоимость обратного ребра – ей противоположна. Алгоритм состоит в выполнении итераций: пока в остаточной сети существует цепь из истока в сток минимальной стоимости, увеличивать поток вдоль этой цепи. Сложность алгоритма для задачи о назначениях – $O(n^4)$, для общей задачи экспоненциальна.

В 1967 г. Клейн предложил другой способ отыскания максимального потока минимальной стоимости, основанный на "вычеркивании" циклов отрицательной стоимости [6]. В алгоритме сначала находится произвольный максимальный поток, а затем итеративно уменьшается его стоимость в произвольном цикле с отрицательной стоимостью в остаточной сети. Процедура продолжается до тех пор, пока не останется ни одного такого цикла. Сложность алгоритма $O(Mn^3)$, где M – суммарная стоимость ребер.

Полиномиальный алгоритм для задачи о максимальном потоке минимальной стоимости был впервые предложен в 1987 г. Гольдбергом и Тарьяном [7]. Алгоритм Голдберга-Тарьяна основан на алгоритме Клейна, однако вычеркиваются не произвольные циклы, а циклы с минимальной средней стоимостью.

Теоретический анализ сложности алгоритмов не позволяет сделать выводы о том, какой алгоритм является наилучшим. Так, алгоритмы Куна и Басакера-Гоуэна имеют одинаковую сложность, значительно меньшую, чем у алгоритма Гольдберга-Тарьяна. Однако для последнего алгоритма анализ производился в общем случае без учета единичных ограничений на пропускную способность ребер.

Окончательное решение о практической применимости метода может дать только эмпирическое исследование. Нами было проведено такое исследование для алгоритмов Куна, Басакера-Гоуэна и Гольдберга-Тарьяна [5]. Для алгоритма Куна эмпирическая сложность имеет вид $T(n) = n^{2.2}$, для алгоритма Басакера-Гоуэна – $T(n) = n^{3.05}$, для алгоритма Голдберга-Тарьяна – $T(n) = n^{5.4}$. Анализируя экспериментальные результаты, можно сделать следующий вывод. Наиболее быстрым алгоритмом для решения задачи о назначениях является венгерский метод. Несмотря на совпадение теоретической сложности венгерского метода и метода Басакера-Гоуэна, эмпирический анализ показывает, что на практике первый имеет рост, близкий к квадратичному, второй – близкий к кубическому

Библиографический список

1. *Асанов М.О., Баранский В.А., Расин В.В.* Дискретная математика: графы, матроиды, алгоритмы. Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2001. 288 с.
2. *Данциг Г.Б.* Воспоминания о началах линейного программирования. www.webcenter.ru/~zwb/origins.htm (Оригинальный текст: Dantzig G.B. Reminiscences about the Origins of Linear Programming //

Mathematical Programming: The State of the Art.Berlin: Springer Verlag, 1983.P. 79-86.)
3. *Ловас Л., Пламмер М.* Прикладные задачи теории графов. Теория паросочетаний в математике, физике, химии. М.: Мир, 1998. 653 с.
4. *Ху Т.* Целочисленное программирование и потоки в сетях М.: Мир, 1974. 520 с.
5. *Шухман А.Е., Шухман Е.В.* Эмпирический анализ методов решения задачи о назначениях // Вызовы XXI века и образование. Материалы всеросс. науч.-пр. конференции. Оренбург: ОГУ, 2006. С. 227-230.
6. *Goemans M.X.* Network Flows – Massachusetts: MIT, 1994. ftp://theory.lcs.mit.edu/pub/classes/18.415/notes-flow.ps
7. *Goldberg A.V.* Combinatorial Optimization: Lecture Notes for CS363/OR349. Stanford: Stanford University, 1993. http://shade.msu.ru/~mab/lib/files/comb-opt-notes.rar
8. *Kuhn H.W.* On the Origin of the Hungarian Method //History of Mathematical Programming. CWI-North-Holland, 1991. P. 77-81.
9. *Schrijver A.* On the history of combinatorial optimization (till 1960) Amsterdam: CWI and University of Amsterdam, 2004 57 p.

Об истории вывода расчетных формул для значений тригонометрических функций в работах Л. Эйлера

Е.В. Шухман

Великий математик XVIII века Леонард Эйлер (1707-1783) большое внимание в своих работах уделял приближенным вычислениям с помощью бесконечных рядов или произведений. Так, в мемуаре “О произведениях, состоящих из бесконечного числа сомножителей” (“De productis ex infinitis factoribus ortis”, E122), опубликованном в 1750 г. [5], Эйлер применяет бесконечные произведения для вычисления некоторых интегралов от иррациональных функций, таких как $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ [5. С. 27]. Он утверждает, что в анализе часто встречаются такие количества, которые не выражаются рациональными или иррациональными числами, но которые удобно представлять в виде бесконечных выражений. С помощью таких бесконечных выражений эти количества хорошо определяются и оцениваются [5. С .3].

В 4-й главе второй части “Дифференциального исчисления”, озаглавленной “О представлении функций рядами” [1. С. 255-280], Эйлер получает разложение в степенной ряд вида $z = y + \frac{\omega\, dy}{dx} + \frac{\omega^2\, d^2y}{1\cdot 2dx^2} + \frac{\omega^3\, d^3y}{1\cdot 2\cdot 3dx^3} + \ldots$ для различных функций (таких, как $y = x^n$, $y = \ln x$, $y = a^x$, $y =$

$\arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \sin x$, $y = \cos x$ и $y = \operatorname{tg} x$) с целью приближенного вычисления их значений.

Вопросам решения дифференциальных уравнений при помощи теории рядов Эйлер посвятил главы VII, VIII, XI второго тома "Интегрального исчисления" [2. С. 135-182, 222-244]. Аппарат теории рядов Эйлер использует также при решении уравнений. Так, в 9-й главе второй части "Дифференциального исчисления", озаглавленной "О применении дифференциального исчисления к решению уравнений" [1. С. 367-385], он рассматривает некоторые методы приближенного решения уравнений с использованием бесконечных рядов.

Отдельно следует отметить работы Л. Эйлера, в которых он с помощью бесконечных рядов или произведений получает удобные расчетные формулы для вычисления значений трансцендентных функций. Одним из примеров таких работ является работа "Метод, облегчающий подсчет синусов и тангенсов углов, как естественных, так и искусственных" ("Methodus facilis computandi angulorum sinus ac tangentes tam naturales quam artificiales", E128), написанная в 1739 г., опубликованная в 1750 г. [6]. В этой работе Эйлер представляет функции синус, косинус, тангенс, котангенс и их логарифмы в виде бесконечных рядов или произведений. Аналогичные результаты вошли в опубликованный ранее (в 1748 г.) основополагающий учебник "Введение в анализ бесконечно малых", но там они получены более сложным способом – без дифференцирования и решения дифференциальных уравнений. Однако еще раньше аналогичные выкладки встречаются на страницах записной книжки № 131, датированной 1736-1739 гг. [7]

Работа "Methodus facilis computandi angulorum sinus ac tangentes tam naturales quam artificiales" содержит пять задач с решениями. В первой задаче Эйлер находит произведение бесконечного числа сомножителей: $\frac{1+p}{1} \cdot \frac{4+p}{4} \cdot \frac{9+p}{9} \cdot \frac{16+p}{16} \cdot \frac{25+p}{25} \ldots$ После логарифмирования выражения и разложения в полученном ряде слагаемых в степенные ряды он дифференцирует результат и заменяет в каждом слагаемом ряд на его сумму, а затем полученный ряд опять сворачивает в сумму. При этом для исходного произведения s получается дифференциальное уравнение $\frac{ds}{s\,dp} = \frac{\pi\sqrt{p}-1}{2p} + \frac{\pi\sqrt{p}}{p(e^{2\pi\sqrt{p}}-1)}$. После этого Эйлер делает подстановку $p = q^2$, тогда $dp = 2q\,dq$ и $\frac{ds}{s} = \pi\,dq - \frac{dq}{q} + \frac{2\pi\,dq}{e^{2\pi\,q}-1} = -\pi\,dq - \frac{dq}{q} + \frac{2e^{2\pi\,q}\pi\,dq}{e^{2\pi\,q}-1}$. Проинтегрировав это дифференциальное уравнение, Эйлер получает $\ln s = \ln C - \pi\,q - \ln q + \ln(e^{2\pi\,q} - 1)$. Отсюда $s = \frac{C(e^{2\pi\,q}-1)}{e^{\pi\,q}q} = \frac{C(e^{2\pi\,\sqrt{p}}-1)}{e^{2\pi\,\sqrt{p}}\sqrt{p}}$. Далее находится значение , равное $\frac{1}{2\pi}$, и получается, что бесконечное произведение $\frac{1+p}{1} \cdot \frac{4+p}{4} \cdot \frac{9+p}{9} \cdot \frac{16+p}{16} \cdot \frac{25+p}{25} \ldots$ равно $\frac{e^{2\pi\,\sqrt{p}}-1}{2e^{2\pi\,\sqrt{p}}\pi\sqrt{p}}$.

Во второй задаче Эйлер аналогичным способом находит, что произведение бесконечного числа сомножителей $\frac{1-p}{1}\cdot\frac{4-p}{4}\cdot\frac{9-p}{9}\cdot\frac{16-p}{16}\cdot\frac{25-p}{25}\ldots$ равно $\frac{\sin\pi\sqrt{p}}{\pi\sqrt{p}}$. Затем он предполагает, что $p=\frac{m^2}{n^2}$, подставляет дробь $\frac{m^2}{n^2}$ в полученные формулы, делает замену $\pi=2q$ (то есть $q=90^\circ$) и выводит следующие разложения: $\sin\frac{m}{n}q=\frac{m}{n}q\cdot\frac{4n^2-m^2}{4n^2}\cdot\frac{16n^2-m^2}{16n^2}\cdot\frac{36n^2-m^2}{36n^2}\cdot\frac{64n^2-m^2}{64n^2}\ldots$, $\operatorname{cos}ec\,\frac{m}{n}q=\frac{n}{m\,q}\cdot\frac{4n^2}{4n^2-m^2}\cdot\frac{16n^2}{16n^2-m^2}\cdot\frac{36n^2}{36n^2-m^2}\cdot\frac{64n^2}{64n^2-m^2}\ldots$, $\cos\frac{m}{n}q=\frac{n^2-m^2}{n^2}\cdot\frac{9n^2-m^2}{9n^2}\cdot\frac{25n^2-m^2}{25n^2}\cdot\frac{49n^2-m^2}{49n^2}\ldots$, $\sec\frac{m}{n}q=\frac{n^2}{n^2-m^2}\cdot\frac{9n^2}{9n^2-m^2}\cdot\frac{25n^2}{25n^2-m^2}\cdot\frac{49n^2}{49n^2-m^2}\ldots$, $\operatorname{tg}\frac{m}{n}q=\frac{m}{n}q\cdot\frac{n^2}{n^2-m^2}\cdot\frac{4n^2-m^2}{4n^2}\cdot\frac{9n^2}{9n^2-m^2}\cdot\frac{16n^2-m^2}{16n^2}\ldots$, $\operatorname{ctg}\frac{m}{n}q=\frac{n}{m\,q}\cdot\frac{n^2-m^2}{n^2}\cdot\frac{4n^2}{4n^2-m^2}\cdot\frac{9n^2-m^2}{9n^2}\cdot\frac{16n^2}{16n^2-m^2}\ldots$

Эти выражения для синуса, косинуса и тангенса можно найти на странице 482 записной книжки № 131 [8. Л. 482].

Третья задача, которую решает Эйлер, формулируется следующим образом: найти метод подсчета синусов и косинусов углов, удобный для применения.

Полагая угол равным s, Эйлер приводит два разложения в ряд, который в современном математическом анализе называется рядом Тейлора: $\sin s=s-\frac{s^3}{1\cdot2\cdot3}+\frac{s^5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}-\frac{s^7}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}+\ldots$ и $\cos s=1-\frac{s^2}{1\cdot2}+\frac{s^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4}-\frac{s^6}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}+\ldots$ Подставляя вместо s выражение $\frac{m}{n}q$, где $q=90^\circ$, он получает: $\sin\frac{m}{n}q=\frac{m}{n}\cdot q-\frac{m^3}{n^3}\cdot\frac{q^3}{1\cdot2\cdot3}+\frac{m^5}{n^5}\cdot\frac{q^5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}-\ldots$ и $\cos\frac{m}{n}q=1-\frac{m^2}{n^2}\cdot\frac{q^2}{1\cdot2}+\frac{m^4}{n^4}\cdot\frac{q^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4}-\ldots$ Затем он полагает $q=1,570796326794896619231313216916$ и находит коэффициенты этих рядов с точностью до 30 знаков после запятой. Аналогичные вычисления Эйлер делает на страницах 484-486 записной книжки № 131 [10-12]. При этом сначала он вычисляет все коэффициенты вида $\frac{(\frac{\pi}{2})^n}{n!}$ до 27 члена с 26 верными знаками и получает разложения синуса и косинуса, но, не удовлетворенный полученной точностью, делает перерасчет с 30 знаками, который и вошел в рассматриваемую работу.

Далее Эйлер делает проверку. Для этого он найденным методом вычисляет косинус и синус угла в 90°. В результате получается расхождение с точным значением лишь в 28 десятичном знаке. После этого, подставляя вместо $\frac{m}{n}$ дробь $\frac{1}{10}$, Эйлер вычисляет синус и косинус 9°. Точно такой же расчет косинуса 9°приведен на странице 482 записной книжки № 131.

Следующая задача, которую решает Эйлер, заключается в вычислении значений тангенсов и котангенсов углов $\frac{m}{n}q$.

При решении этой задачи Эйлер использует следующую формулу: $\operatorname{tg}\frac{m}{n}90^\circ = \frac{2m}{nq}(\frac{n^2}{n^2-m^2} + \frac{n^2}{9n^2-m^2} + \frac{n^2}{25n^2-m^2} + \ldots)$. Разлагая каждое слагаемое в ряд, он получает следующее выражение

$$
\begin{array}{lllll}
\operatorname{tg}\frac{m}{n}90^\circ & = & + & & \frac{2mn}{(n^2-m^2)q} \\
 & + & \frac{2m}{nq} & & (\frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots) \\
 & + & \frac{2m^3}{n^3q} & & (\frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \ldots) \\
 & + & \frac{2m^5}{n^5q} & & (\frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \ldots), \\
 & & \ldots & &
\end{array}
$$

после чего находит числовые коэффициенты этого ряда с точностью до 13-го знака. Аналогичным образом получается выражение для котангенса.

После этого Эйлер показывает, что эти формулы применимы не для всех углов. Так, если по ним вычислять котангенс прямого угла, истинное значение которого равно нулю, то он получится равным 0,6366197723675. Поэтому в следующей задаче Эйлер находит ряды, сходящиеся быстрее.

Пятая задача формулируется следующим образом: найти логарифмы (как натуральные, так и десятичные) синусов и косинусов произвольно предложенных углов.

При решении этой задачи Эйлер использует формулы, полученные при решении первых двух задач. Для нахождения логарифма от синуса некоторого угла он логарифмирует формулу $\sin\frac{m}{n}q = \frac{m}{n}q \cdot \frac{4n^2-m^2}{4n^2} \cdot \frac{16n^2-m^2}{16n^2} \cdot \frac{36n^2-m^2}{36n^2} \cdot \frac{64n^2-m^2}{64n^2} \ldots$ и после выкладок получает ряд

$$
\begin{array}{llll}
\ln\sin\frac{m}{n}q = & \ln q - \ln\frac{n}{m} & -\ln\frac{4n^2}{4n^2-m^2} & \\
 & & -\frac{m^2}{4n^2}\cdot & (\frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots) \\
 & & -\frac{m^4}{2\cdot 4^2 n^4}\cdot & (\frac{1}{4^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{16^2} + \ldots) \\
 & & -\frac{m^6}{3\cdot 4^3 n^6}\cdot & (\frac{1}{4^3} + \frac{1}{9^3} + \frac{1}{16^3} + \ldots) \\
 & & -\frac{m^8}{4\cdot 4^4 n^8}\cdot & (\frac{1}{4^4} + \frac{1}{9^4} + \frac{1}{16^4} + \ldots) \\
 & & \ldots &
\end{array}
$$

Далее Эйлер находит числовые коэффициенты этого ряда и вычисляет логарифм от синуса 45°. Аналогичным образом он находит выражения для логарифмов косинусов и тангенсов. Отметим, что ряд для логарифма косинуса приведен на странице 483 записной книжки № 131

[9]. Там же приводится разложение в ряд логарифма косинуса и вычислено приближенное значение $\ln \cos 9^\circ$.

Таким образом, изучение записных книжек и ранних работ Эйлера позволяет проследить историю вывода основных расчетных формул для тригонометрических функций, применяемых им в более поздних работах.

Библиографический список

1. *Эйлер Л.* Дифференциальное исчисление / Пер. М.Я. Выгодского М.-Л: Гостехтеориздат, 1949.
2. *Эйлер Л.* Интегральное исчисление / Пер. С.Я. Лурье и М.Я. Выгодского. Т 2. М., 1956.
3. *Эйлер Л.* Введение в анализ бесконечно малых / Пер. Е.Л. Пацановского М.: ОНТИ, 1936.
4. *Euler L.* De seriebus divergentibus // Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae. 1760 Vol. 5 P. 205-237.
5. *Euler L.* De productis ex infinitis factoribus factoribus ortis // Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae. 1750 Vol. 11. P. 3-31.
6. *Euler L.* Methodus facilis computandi angulorum sinus ac tangentes tam naturales quam artificiales // Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae. 1750 Vol. 11. P. 194-230.
7. Санкт-Петербургский филиал Архива РАН (ПФА РАН). Ф. 136. Оп. 1. № 129-140.
8. ПФА РАН. Ф. 136. Оп. 1. № 131. Л. 482.
9. ПФА РАН. Ф. 136. Оп. 1. № 131. Л. 483.
10. ПФА РАН. Ф. 136. Оп. 1. № 131. Л. 484.
11. ПФА РАН. Ф. 136. Оп. 1. № 131. Л. 485.
12. ПФА РАН. Ф. 136. Оп. 1. № 131. Л. 486.

Историческое развитие математики как основа концепции школьного курса математики

В.И. Михеев, В.О. Ваганян, Н. Хамди, Ю.А. Игнатьев

Историческое развитие математики академик Андрей Николаевич Колмогоров делил на четыре периода: **первый период – Зарождение математики** (до VI-V вв. до н.э.); это – период накопления математических фактов, полученных в основном опытным путем. **Второй период**

– **период Математики постоянных величин** (до XVII-XVIII вв.); в этот период понятия математики начинают систематизироваться, обобщаться. Созданием буквенного алгебраического исчисления второй период завершается. **Третий период – период Математики переменных величин** (до XIX-XX вв.). Понятия переменной величины, функции, предела, производной, интеграла и т.п. определяют облик третьего периода. **Четвертый период – Современная математика, или период Математики переменных отношений** – начался в конце XVIII века. Он характеризуется объединяющими и обобщающими понятиями и теориями, которые не являются непосредственным отражением опыта, а представляют собой продукты и потребности уже внутреннего развития самой математики – теория групп, математическая логика, функциональный анализ, теория категорий, теория доказательств и др. Разумеется, делить историю математики на исторические периоды можно и другими способами, но это, можно сказать, есть классическое деление, оно ясно и отчетливо выделяет всю историческую тенденцию развития математики: 1) Сначала идет достаточно примитивный сбор отдельных, локальных, простых математических фактов; в этом процессе нет глобальных и глубоких связей, закономерностей, нет системы, нет плавного движения от одного математического объекта или явления к другому, нет механизмов, задающих или подготавливающих изменение, развитие, нет времени, все статично. Говоря образно, зарождение математики есть лишь обработка почвы для взращивания на ней математического Древа; 2) Затем появляются постоянные величины – своеобразные, окостенелые скелеты будущих переменных величин. Если переменные величины имитируют изменение, движение, то постоянные величины – прообраз переменных величин – изображают лишь застывшую букву, константу. Вместе с тем, математика постоянных величин уже является системой, наукой, а не справочником формул для измерений и вычислений. Постоянные величины не могли не привести математику к переменным величинам, и привели. Это создало условия для моделирования изменения, движения, времени. Математика постоянных величин – ствол Математики. Он достаточно тверд, статичен, но всем корпусом, методично и бесповоротно растет во времени! 3) Наконец, появляются переменные величины – своеобразные "агенты Времени". В математике начинается благоприятная экспансия Времени, но пока только на описательном уровне. Это уже дает сильный результат – на математическую арену выходят Дифференциальное и Интегральное исчисления. Начинается эпоха Математического Анализа. Математика как наука расцветает и разветвляется. 4) Появляются условия для моделирования изменения и движения различных по своей природе объектов. Статичная математика постоянных величин возникла как естественная систематизация, улучшение, дополнение, расширение, обобщение и резюме статичной математики первого периода. Аналогично, должен был формироваться и последний период развития математики как период систематизации, улучшения, дополнения, расширения, обобщения и резюме "внешне-динамичной" математики третьего периода. И этот период возник. Это – современная математика. Слово "современная", разумеется, понятие относительное, временное. Есть и другое название – математика переменных отношений. В этой математике изменения имитируют не только математические объекты, но и математические отношения. Например, в выражении x∘y (x,y – числа, а ∘ – знак арифметического действия "+" или "–") x и y – переменные величины, а ∘ – переменное отношение. В математике переменных величин отношения между числами были всегда постоянными, а в математике переменных отношений они уже могут быть переменными. Иначе говоря, экспансия Времени в математике стала распространяться и на отношения между объектами. Но это еще не все, на что способно Время в математике. Оно нынче отчаянно усиливает свое присутствие в науке. Яркий пример тому – компьютерное моделирование...

Содержание и методология школьного курса математики в конце XIX века и в начале XX века относились, в основном, к Математике постоянных величин. Для преодоления статичности школьного курса математики, возникла необходимость в усилении в нем функциональной линии и введении тем из Математики переменных величин. Но методология колмогоровских учебников, в основном, была ориентирована на Современную математику. Авторы постколмогоровских учебников, традиционных, нетрадиционных, в вопросах содержания и методологии остаются, в основном, в пределах Математики переменных величин. Во всех учебниках, в той или иной форме, решается проблема преодоления статичности старых учебников. В рамках решения этой проблемы представляется плодотворным учет в школьном курсе математики общих исторических тенденций развития математики, в том числе геометрии. А тенденции эти заключаются в усилении динамичности математики, другими словами, усилении фактора времени в математике. Время рассматривается в трех формах: физическое, структурное и историческое.

Физическое время. Физическое время в Современной математике не является математической категорией, однако в небольшом количестве оно может быть полезным в курсе геометрии основной школы. Например, интересны такие задачи: 1) Зависит ли от времени истинность аксиомы, истинность теоремы? 2) Длина отрезка равна 5 см. Чему была равна длина этого отрезка час назад? Сто лет назад? Чему будет она равняться через тысячелетие? Другой пример. Можно на внеклассных занятиях провести доказательства одной-двух теорем с использование физического времени. Например, с использованием времени (в процессе физического движения) можно доказать теорему Фалеса и теорему: "Если треугольник отсекать параллельно одной стороне прямой, то получится треугольник, подобный исходному". Эти доказательства не заменяют чисто математических доказательств и даются лишь после них. Отмечается, что такие доказательства в математике не считаются строгими. Однако они несут в себе интересные межпредметные связи и полезны в этом качестве.

"Дан треугольник ABC (рис. 1а)). Пересечем две ее стороны отрезком MN, параллельно третьей стороне AB (рис. 1б)).

Докажем, что $\Delta ABC \sim \Delta MNC$. Через вершину C треугольника ABC проведем прямую m, параллельно стороне AB, а также прямую n, содержащую сторону AC (рис. 1в)).

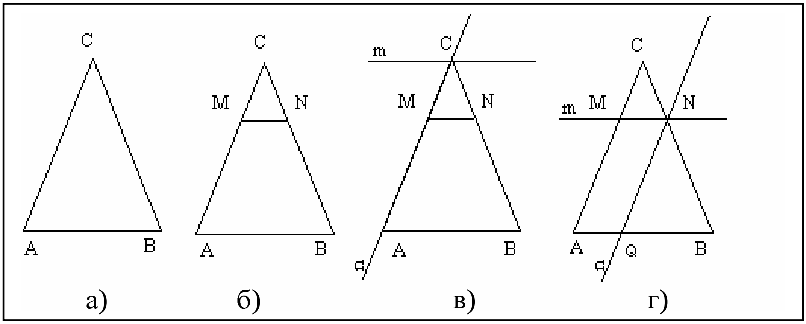


Рис. 1

Мы часто применяем математику в решениях задач по физике. Теперь применим физику в решении математической задач. Совершим одновременный параллельный перенос прямых m и n так, чтобы их точка пересечения прямолинейно и с постоянной скоростью перешла в точку N, а затем – в точку B (рис. 1г)). Скорость движения точки M по прямой CA обозначим через V_1, а скорость движения точки N по прямой CB – через V_2. Скорость движения точки Q по прямой AB обозначим через V_3. Время, потраченное прямой m на параллельный перенос из точки C в точки M и N, обозначим через t_1, а в точки A и B – через t_2. За время t_1 прямая n перейдет из точек A и C в точки Q и N, а за время t_2 – в точку B. Как известно из курса физики, при прямолинейном равномерном движении путь S, скорость V и время t связаны формулой S = Vt. Применим эту формулу к нашей задаче:

$$\mathrm{MC} = \mathrm{V_1 t_1},\ \mathrm{AC} = \mathrm{V_1 t_2}.$$

Отсюда

$$\mathrm{AC/MC} = \mathrm{V_1 t_2} \ / \ \mathrm{V_1 t_1} = \mathrm{t_2/t_1} \qquad (1)$$

$$\mathrm{BC} = \mathrm{V_2 t_2},\ \mathrm{NC} = \mathrm{V_2 t_1}.$$

Отсюда

$$\mathrm{BC/NC} = \mathrm{V_2 t_2}/\ \mathrm{V_2 t_1} = \mathrm{t_2/t_1} \qquad (2)$$

$$\mathrm{AB} = \mathrm{V_3 t_2},\ \mathrm{MN} = \mathrm{V_3 t_1}.$$

Отсюда

$$\mathrm{AB/MN} = \mathrm{V_3 t_2}/\ \mathrm{V_3 t_1} = \mathrm{t_2/t_1}. \qquad (3)$$

Из (1), (2) и (3) получим

$$\mathrm{AC/MC} = \mathrm{BC/NC} = \mathrm{AB/MN}$$

Это означает, что три стороны треугольника ABC соответственно пропорциональны трем сторонам треугольника MNC. В этих треугольниках угол C – общий, а углы CAB и CMN, ABC и MNC равны как соответственные. Мы доказали, что в треугольниках ABC и MNC (рис. 1б)) соответствующие стороны пропорциональны и соответствующие углы равны, то есть $\Delta ABC \sim \Delta\mathrm{MNC}$.

Нами доказана:

Теорема. *Прямая, параллельная какой-либо стороне треугольника и пересекающая две другие стороны, отсекает от треугольника подобный ему треугольник".*

В конце темы дается "послесловие" к этому доказательству. Приведем из него отрывок: « В математике не принято теоремы доказывать с помощью физики, в частности, с использованием такого понятия, как время. Математики считают, что математика особая, элитная наука: ее применения в физике и других науках развивают и украшают эти науки, а применения других, "грубых" наук в математике выглядят не соответствующим сущности науки математика. Мы привели такое "сомнительное" доказательство. С точки зрения физики в этом доказательстве все в порядке. Математики предпочитают другие, более сложные, но более строгие доказательства... Данная теорема – вспомогательная. Поэтому мы можем себе позволить привлекать в доказательстве "инородное" понятие – "время"». От одного-двух "недозволенных" доказательств теорем ничего не изменится в облике математики, но зато привносится что-то новое. Приведенное доказательство – оригинальный пример межпредметных связей между математикой и физикой. Это – качественно новый ответ на требование усилить связь с физикой. Кроме того, оно показывает, что происходит не только математизация наук, но и обратный к ней процесс – другие науки вступают во владения математики.

Структурное время. Под структурным временем в методике обучения геометрии понимаем наглядное изображение процесса построения объекта. Например, ученику обычно предлагается рисунок в готовом, завершенном виде. Такой рисунок, особенно в начале обучения геометрии, школьник трудно понимает. Полезно сложные рисунки представлять поэтапно несколькими промежуточными рисунками, приводящими к итоговому рисунку. Такие рисунки более понятны и отражают процесс построения объекта. Другой пример. Аналогично рисунку, ученику предлагаются определение понятия в готовом, завершенном виде. Полезно строить структурные схемы для важнейших определений, изображающих генетически механизм происхождения неосновного понятия из других неосновных, основных и интуитивных понятий. Структурные схемы эффективно давать в конце курса геометрии основной школы, во время повторения курса.

Историческое время. Часто методически более целесообразно следовать исторической, а не логической закономерности развития понятия. Например, исторически геометрия как наука возникла раньше, чем она стала строиться на аксиоматической основе. Полезно учитывать этот порядок в школьном курсе геометрии: курс геометрии основной школы строится на явной аксиоматической основе лишь со второго года систематического изучения геометрии, т.е. с VIII класса. В VII классе проявления аксиоматического метода несколько смягчаются: понятия “аксиома”, “теорема” и “доказательство” вводятся в конце курса VII класса, хотя эти понятия неявно функционируют до их определения. Такой подход усиливает доступность курса геометрии в первый год ее обучения и не влияет отрицательно на ее научность. В конце курса VII класса у учащихся уже есть некоторая геометрическая база и им уже значительно легче понять идею аксиоматического метода.

О библиографической работе в области преподавания математики

В.М. Бусев

Каждому пишущему на какую-либо тему известно, как бывает порою непросто найти требуемую информацию. Приходится тратить массу времени на поиск в каталогах библиотек, заказывать последние в году номера журналов, чтобы просмотреть содержание всех номеров за год... Все это, конечно, является неотъемлемой частью работы над темой, но кому же из нас не хочется облегчить себе жизнь, не тратя драгоценное время на поиски? В целях такого облегчения создаются различные справочно-библиографические системы, частным случаем которых являются библиографические указатели – списки печатных информационных единиц, объединенных по какому-либо принципу.

В статье дан обзор наиболее важных библиографических пособий, в которые включены книги, статьи и диссертации, посвященные преподаванию математики и истории ее преподавания в России (СССР)[1]. Пособия расположены в хронологическом порядке.

I. Русская физико-математическая библиография

Этот указатель – первая библиографическая работа в области точных наук в России. Составителем его является В.В. Бобынин, известный деятель математического образования конца XIX – начала XX века, историк математики, редактор и издатель журнала “Физико-математические науки в их настоящем и прошедшем”. Труд В.В. Бобынина охватывает период книгоиздания от XVI века до 1816 года и включает не только отдельные издания по физике и математике, но также и календари, и научную периодику.

Библиографический указатель состоит из трех томов, которые выходили отдельными выпусками. Каждый выпуск содержит книги и статьи за определенный временной интервал: Т. I. Вып. 1 (XVI–XVII века, 1701–1725); Т. I. Вып. 2 (1726–1745); Т. I. Вып. 3 (1746–1763); Т. II. Вып. 1 (1764–1774); Т. II. Вып. 2 (1775–1786); Т. II. Вып. 3 (1787–1791); Т. II. Вып. 4 (1792–1799); Т. III. Вып. 1 (1800–1805); Т. III. Вып. 2 (1806–1809); Т. III. Вып. 3 (1810–1816).

Каждая книга или сборник статей подробно охарактеризованы составителем: дается развернутое содержание (с указанием глав, параграфов и страниц); как правило, в характеристику книги входит пункт “Цели и задачи, преследуемые автором”, в котором даются выдержки из предисловия, характеризующие издание. Необходимость в такого рода подробных описаниях вызвана, по В.В. Бобынину, тем, что часто многие книги достать невозможно, особенно читателю из провинции.

В конце каждого выпуска имеются “Дополнения”, в которые включены материалы, хронологически относящиеся к предыдущим томам и выпускам, но в силу каких-либо обстоятельств не включенные в них. Каж-

[1]Некоторые из этих пособий имеются в электронном виде на сайте www.mathedu.ru.

дый выпуск имеет систематический указатель материалов; источники сгруппированы по темам (в алфавитном порядке): Алгебра, Аналитическая геометрия, Арифметика, Артиллерия и фортификация,... География, Геометрия, Гидравлика,... Преподавание физико-математических наук, Теория чисел, Тригонометрия, Физика и т.д.

Из сказанного видно, что В.В. Бобынин проделал огромную работу по систематизации литературы по математике и физике, изданной в России с XVI по начало XIX века. Он не только собрал все опубликованное воедино, но и нашел силы для подробной аннотации многих изданий. Труд В.В. Бобынина тем более заслуживает восхищения, что при всей своей очевидной значимости он, однако, не нашел поддержки в официальных органах – Министерстве просвещения и Академии наук. Вот что пишет составитель в предисловии к последнему выпуску "Библиографии": "...автор, при начале своей издательской деятельности в 1886 году, обращался за содействием к Министерству народного просвещения, но у последнего, как и во многих других подобных случаях, средств для этого не оказалось" [С. I]. В.В. Бобынин издал первые два тома сам, а затем представил их на конкурс в Петербургскую Академию наук. Однако "Академия нашла возможным присудить изданию только почетный отзыв" [С. II]. Мало того, рецензент Б.Б. Голицын в своем отзыве на труд Бобынина критикует последнего за то, что он "не потрудился провести границу между сочинениями, имеющими какое-нибудь научное значение, и сочинениями, совершенно его лишенными" [С. II]. На это Бобынин замечает, что при таком критерии отбора бóльшая часть физико-математической литературы XVIII столетия не вошла бы в указатель вообще. Книги "ненаучного" содержания имеют, по мнению составителя, очень большое значение: "Являясь проводниками соответствующих знаний в народность, отставшую от общего движения человечества, они дают ей средства сперва овладеть знаниями, приобретенными наукой, а затем выделить из своей среды членов, способных принять активное участие в дальнейшем научном прогрессе" [С. II].

Окончание В.В. Бобыниным "Русской физико-математической библиографии" не означало, однако, прекращения его библиографической деятельности: в этом же предисловии к последнему выпуску он пишет, что намерен составить более узкое сочинение – указатель "Русская математическая литература XIX столетия". Один из отделов указателя планировалось посвятить учебной математической литературе для начальной и средней школы. Издавать новый указатель согласилось Московское математическое общество во главе с Н.В. Бугаевым, а сама библиографическая деятельность В.В. Бобынина получила на X Съезде русских естествоиспытателей и врачей "едва ли не в первый раз в России признание" [С. I].

Однако эта работа по неизвестным причинам не была выполнена.

II. Алфавитный каталог русских книг по математике, вышедших в России с начала книгопечатания до последнего времени. 1682–1908

"Алфавитный каталог" составлен на основе указателя В.В. Бобынина оренбургским преподавателем Д.В. Агаповым, автором нескольких десятков книг по элементарной математике.

Он состоит из пяти разделов:

Арифметика – 695 наименований (с. 1–45); Алгебра – 216 наименований (с. 45–56); Геометрия – 386 наименований (с. 57–78); Тригонометрия – 102 наименования (с. 78–83); Математика элементарная и высшая – 279 наименований (с. 84–99).

В отделах издания расположены по алфавиту, нумерация в каждом отделе своя. Охарактеризуем кратко каждый раздел указателя.

Арифметика. Курсы арифметики для начальной и средней школы, коммерческая арифметика, методические руководства для учителей, сборники задач, решебники, пособия по устному счету, таблицы перевода метрических мер в русские, занимательная арифметика, а также арифметика для маленьких детей.

Алгебра. Учебники для средней школы, сборники задач, решебники, пособия по методам решения уравнений, приложение алгебры к решению геометрических задач на построение, таблицы логарифмов.

Геометрия. Учебники для средней школы, сборники задач, решебники, аналитическая и начертательная геометрии, переводы "Начал" Евклида, прикладная геометрия, научно-популярные книги (о теореме Пифагора, трисекции угла, квадратуре круга, началах геометрии Лобачевского), книги для маленьких.

Тригонометрия. Руководства плоской и сферической тригонометрии, сборники задач, решебники.

Математика элементарная и высшая. Дифференциальное и интегральное исчисления, вариационное исчисление, функциональные уравнения, теория чисел, высшая алгебра, теория вероятностей, дифференциальные уравнения, сборники задач (в том числе по высшей математике), сборники формул (памятки-шпаргалки), история и методология математики, математика в образовании.

В "Алфавитный каталог" вошли не все книги: если книга выдержала несколько изданий, то включалось только одно (видимо, из соображений экономии). Каталог не имеет вспомогательных указателей (например, алфавитного указателя авторов).

III. Указатели к журналу “Педагогический сборник”

К “Педагогическому сборнику” существуют шесть указателей, четыре из которых вышли в виде приложений к журналу и охватывают небольшие временные периоды. Нас будут интересовать последние два указателя, составленные С.А. Переселенковым:

1. Систематический указатель статей, напечатанных в неофициальной части Педагогического сборника за последние пятьдесят лет (1864–1914). – Пг., 1915.

2. Систематический указатель статей, напечатанных в официальной части Педагогического сборника за последние пятьдесят лет (1864–1914). – Пг., 1917.

Общую структуру обоих указателей лучше всего охарактеризовал сам составитель в предисловии к первой части: “Составляя указатель. . . , мы главным образом руководились желанием дать возможность интересующимся теми или другими вопросами с наименьшей затратой сил и времени отыскать нужный им материал. Этим объясняется, что материал мы разбили на мелкие рубрики и иногда одну и ту же статью внесли в разные отделы. . . В расположении материала по рубрикам мы придерживались главным образом *хронологического* порядка, но в некоторых отделах нашли удобным соединить такой порядок с *алфавитным*. В конце помещен алфавитный список лиц, упоминаемых в «Указателе»” [С. IX–X].

Отдел “Математика” делится на рубрики: Арифметика, Алгебра, Геометрия, Тригонометрия, Аналитическая геометрия, Начертательная геометрия и Анализ бесконечно малых. Он занимает в указателе с. 79–91 и включает более 300 статей, посвященных различным вопросам преподавания математики.

В указателе имеется также отдел “Рецензии”, где собраны отзывы на книги и статьи, сюда же включены библиографические обзоры и подборки литературы по теме. В математических подрубриках “Арифметика”, “Алгебра”, “Геометрия” и т.д. собрано около 200 статей такого рода.

Второй указатель включает, как это видно из названия, официальные материалы: высочайшие приказы, высочайшие резолюции, министерские программы и др. Инструкции, программы, методические письма, относящиеся к преподаванию математики, насчитывают 26 наименований и расположены на с. 99–100 указателя.

IV. Педагогическая библиография

Является крупнейшим библиографическим пособием по педагогическим наукам в СССР. Первая часть библиографии издана в 1925–1926 годах и охватывает период 1917–1924 гг. Библиография состоит из 6 книг. Вторая книга “Школьное образование (методика обучения)” имеет раздел “Математика”. В него вошли книги, журнальные статьи и программы, изданные за указанный временной интервал. Материалы не делятся на дополнительные рубрики, а перечисляются в алфавитном порядке. В указателе принята сквозная нумерация (математика: № 1429–1658, с. 133–155). Рецензии на книги даются сразу после рецензируемых изданий. Аннотации не предусмотрены. Имеются вспомогательные указатели: алфавитный список авторов и рецензентов и список периодических изданий, выходивших в 1917–1924 гг.

“Педагогическая библиография”, которая была издана позже, готовилась уже другими авторами, совсем в других условиях, а потому, хотя и является продолжением рассмотренного труда, все же отличается от него. Библиография включает 4 тома, которые охватывают период 1924–1949 гг. План и структура всех томов построены в соответствии с системой, принятой в Государственной научной педагогической библиотеке им. К.Д. Ушинского (ГНПБ).

В систематизации материала довольно широко применяется система отсылок: когда одна и та же работа тематически относится к двум или более отделам, полное ее описание дается в одном месте, а в других – краткая характеристика и ссылка на номер подробного описания. В пределах рубрик литература помещается в алфавитном порядке. Рецензии помещены под рецензируемыми работами. Иногда источники аннотируются (впрочем, аннотации обычно не несут важной дополнительной информации), для сборников статей приводится их содержание. В указателе принята сплошная нумерация, имеется алфавитный указатель авторов, редакторов, заглавий книг и статей без авторов. В конце указателя дан список всех педагогических журналов, выходивших за рассматриваемый период.

В предисловии к отдельным томам отмечается, что основными источниками для составления библиографии стали периодические издания Всесоюзной книжной палаты (“Книжная летопись”, “Летопись журнальных статей”), а также каталоги ГНПБ им. К.Д. Ушинского и Государственной библиотеки им. В.И. Ленина.

“Педагогическая библиография” состоит из следующих томов:

I том – 1924–1930 (М.: Просвещение, 1967);

II том – 1931–1935 (М.: Просвещение, 1970);

III том – 1936–1940 (М.: Педагогика, 1973);

IV том – 1941–1949 (в 20 выпусках, М.: Педагогика, 1983–1995).

Методика преподавания математики в средней школе представлена в разделе VI первых трех томов:

I том – №№ 8494–8819, с. 278–290;
II том – №№ 6949–7508, с. 244–262;
III том – №№ 5066–5791, с. 182–207.

Начиная с третьего тома, рубрика "Математика" делится на тематические подрубрики. Материалы, относящиеся к математическому образованию, имеются и в других разделах указателя ("Профессионально-техническое и специальное образование в СССР", "Библиография педагогической литературы", "Педагоги и деятели по народному образованию" и т.д.).

Выпуск 10 четвертого тома (М.: Педагогика, 1987) посвящен методике преподавания математики. Издание имеет тематическую рубрикацию, алфавитный указатель авторов и заглавий книг без авторов. Нумерация сплошная (№№ 1–644), имеются перекрестные ссылки. В подрубриках принят алфавитный порядок перечисления литературы.

V. Библиографические указатели по методике преподавания математики Ф.М. Шустеф

Ряд указателей по методике преподавания математики составлен Ф.М. Шустеф. Все они были изданы минским издательством "Вышэйшая школа". Вот полный их список:

(1) Повышение эффективности преподавания математики (1963);
(2) Общая методика преподавания математики (1969);
(3) Общая методика преподавания математики (1975);
(4) Методика преподавания алгебры и элементарных функций (1977);
(5) Методика преподавания геометрии (1980).

Во все указатели вошли как статьи из журналов, так и материалы сборников, и отдельные книги. Указатели охватывают литературу, вышедшую примерно в 1945–1977 годах. Однако в предлагаемые работы включены далеко не все опубликованные за это время материалы: для первого указателя "выбраны вопросы, имеющие непосредственное отношение к повышению эффективности урока" [(1). С. 3], во второй "не включались работы, имеющие слишком специальный характер, равно как и некоторые малотиражные издания" [(2). С. 3].

Указатели пересекаются и хронологически, и тематически: в последующие указатели включались статьи и книги, по каким-либо соображениям не упомянутые в более ранних указателях. Так, рубрики "Методика обучения доказательству теорем", "Методика обучения решению геометрических задач" и др. имеются как в указателе (2), так и в указателе (5). Аналогично обстоит дело с алгеброй и элементарными функциями. При этом материалы, уже упомянутые ранее, в новые указатели не вошли. Таким образом, публикации, связанные между собой общей темой, оказались рассеянными по всем пяти указателям.

Внутри разделов и рубрик всех указателей материалы располагаются в алфавитном порядке. В первых двух указателях все публикации пронумерованы (в каждой рубрике нумерация своя). Однако в указателях (3)–(5) нумерации нет, что можно объяснить ее практической бесполезностью – нумерация нужна для ссылок между разделами и/или для организации алфавитного указателя авторов. Ни того, ни другого в рассматриваемых пособиях нет. Составитель в предисловиях пишет о трудностях, возникающих при отнесении статьи или книги в ту или иную рубрику, но отмечает, что из-за экономии места дублирование не производится.

Часть материалов аннотирована: "Достаточно подробная рубрикация указателя позволила свести к минимуму необходимость в аннотациях. Краткими аннотациями снабжены лишь провинциальные или малотиражные издания, а также те работы, название которых недостаточно раскрывает их содержание" [(5). С. 4].

Остановимся чуть подробнее на структуре каждого пособия.

(1) В данный указатель вошли в основном материалы, связанные с организацией учебного процесса (обычно урока): структура и типы уроков, воспитание внимания и интереса учащихся, борьба с формализмом в знаниях, предупреждение неуспеваемости, самостоятельная работа учащихся и контроль знаний, упражнения, опросы, контрольные работы и др. Второй раздел указателя посвящен ряду дискуссий, возникших на страницах советской периодики по проблеме повышения эффективности урока.

(2) Хотя указатель посвящен общей методике, в нем есть масса материалов по частным вопросам: понятия и определения в курсах арифметики, алгебры и геометрии; методика обучения решению задач по математике (арифметических, алгебраических, геометрических). Сюда же включены вопросы межпредметных связей и прикладные вопросы математики.

(3) Этот указатель весьма похож по структуре на предыдущий, в него вошли методы и формы обучения математике, организация обучения математике, работа с понятиями и определениями, обучение решению задач, материалы для проведения факультативных занятий и др.

(4) Указатель по алгебре и элементарным функциям состоит из двух разделов: общие вопросы методики и методика изучения отдельных тем курса. Во вторую часть вошли такие вопросы: изучение чисел (от натуральных до комплексных), тождественные преобразования, уравнения и неравенства, функции.

(5) Указатель по геометрии аналогичен по структуре указателю по алгебре: он также делится на общую и частную методики.

VI. Библиографический указатель диссертаций по методике преподавания математики

Составлен В.А. Далингером и С.Т. Тхамафоковой, издан АПН СССР (1980). Указатель имеет два раздела: в первый вошли кандидатские диссертации, во второй – докторские. Кроме диссертаций по методике преподавания математики, в пособии представлены также диссертационные исследования по психологии и педагогике, связанные с проблемами обучения математике.

В первом разделе диссертации сгруппированы по темам в отдельных рубриках (всего рубрик 23). Внутри каждой из них принят алфавитный порядок расположения. Для каждой диссертации указан автор, название, место и год издания. Вспомогательных указателей нет, нумерации нет.

VII. Указатели к журналу “Математика в школе”

К журналу “Математика в школе” существуют два указателя:

Айзенберг А.К., Асимов К.У. Тематический указатель статей журнала “Математика в школе” (1937–1966). – Душанбе, 1970.

Бусев В.М. “Математика в школе” за 15 лет: Тематический указатель статей журнала за 1990–2004 годы. – Ярославль, 2005.

Первый из них имеет предысторию: этот указатель – переработанное и дополненное третье издание аналогичной работы (1-е издание – 1959 год, учтены статьи за 1938–1959 годы; 2-е издание – 1963 год, учтены статьи за 1937–1963 годы). Все издания составлены в Душанбинском педагогическом институте.

Указатель состоит из пяти глав, которые включают статьи по организации учебного процесса, вопросы преподавания арифметики, алгебры, геометрии и тригонометрии. Материалы биографического характера, заметки о проходивших конференциях, история математики и математического образования, олимпиады – все это отнесено в первый отдел. Вопросы преподавания начал анализа в школе включены в третий отдел (алгебра).

Каждая глава делится на параграфы, статьи в параграфах расположены в алфавитном порядке (кроме § 21 главы I, где собраны биографические очерки). Часть статей аннотирована (но не сказано, по какому критерию отбираются статьи для аннотации). Нумерации в данной работе нет, вспомогательных указателей тоже.

Второй указатель составлен автором настоящей статьи. Он состоит из четырех разделов, каждый из которых делится на рубрики. В первом разделе собраны в основном официальные статьи (документы, выпускные экзамены, методические рекомендации к учебникам); второй раздел посвящен общим вопросам методики математики; третий – частным методикам; в четвертом собраны все остальные материалы (занимательная математика, история математики, рецензии на книги и др.).

Часть статей аннотирована. Статья аннотируется в двух случаях: если из названия невозможно понять, о чем она; или же для более полного раскрытия ее содержания. В указателе принята сквозная нумерация статей, имеется система перекрестных ссылок: обычно статья помещается в одном разделе, а в другом (или других) дается ссылка на нее (указывается номер публикации). Из вспомогательных указателей имеется алфавитный список авторов.

Библиографическая работа с журналом "Математика в школе" продолжается: в ближайшее время планируется издать указатель, который будет охватывать статьи, начиная с 1927 года.

VIII. "Квант" за 30 лет (Путеводитель)

Данное библиографическое пособие составлено В.А. Тихомировой, оно вышло к тридцатилетию журнала "Квант" в виде приложения (2000. № 1). Указатель содержит большинство материалов, опубликованных в журнале за 1970–1999 годы. "Единственное, что не вошло в Путеводитель полностью, – это отдельные мелкие материалы и задачи, разбросанные по страницам журнала", – пишет составитель в предисловии [С. 4]. Рубрикация, принятая в указателе, совпадает с рубрикацией журнала. Поэтому материалы, объединенные общей темой, оказались в разных местах указателя. Так, статьи по математике нужно искать не только в рубрике "Статьи по математике", но также в рубриках "«Квант» для младших школьников", "Калейдоскоп «Кванта»", "Школа в «Кванте»" и др.

В пределах рубрик (и подрубрик) материалы даны в алфавитном порядке, причем записи начинаются не с фамилии автора, а с названия заметки или статьи, и лишь только после названия указывается фамилия автора. Далее следуют год и номер журнала; номера страниц не даются. Библиографические ссылки не пронумерованы, отсутствует алфавитный список авторов.

Другая, более совершенная система поиска, предложена на официальном сайте журнала "Квант" (www.kvant.mccme.ru). Здесь же читатель найдет и сам журнал в электронном виде.

IX. Из истории математики и математического образования: Путеводитель по литературе

Несколько особняком от всех вышеперечисленных указателей стоит пособие, составленное Р.З. Гушель (Ярославль, 1999). Этот указатель не специально педагогический, а больше исторический, что, видимо, и продиктовало составителю своеобразную структуру пособия.

Указатель состоит из трех глав:

1) история математики в древности и в средние века;
2) история математики нового и новейшего времени;
3) история математики и математического образования в России.

Каждая глава делится на параграфы, каждый параграф – на пункты. Пункт посвящен или какому-либо деятелю (например, п. 1.15. Архимед), или же какому-либо отдельному вопросу истории математики или математического образования (например, п. 3.12. Из истории понятия группы). В пределах пункта соответствующие библиографические данные даются в алфавитном порядке. Если подборка посвящена личности, то сначала приводятся работы биографического характера, а затем основные труды рассматриваемого деятеля.

Охарактеризуем кратко каждую главу указателя. В первой главе собраны материалы, отражающие развитие математики в странах Древнего мира – Египта, Вавилона, Греции, Китая, Индии, арабского Востока. Греческая математика представлена персоналиями – от Фалеса до Диофанта.

Глава вторая посвящена зарождению и развитию европейской математики. Часть главы содержит материалы по истории создания основных понятий современной математики (буквенное счисление, логарифмы и др.) – всего 22 темы. Другая часть главы включает библиографические подборки о жизни и деятельности крупных математиков – от Леонардо да Винчи (XVI век) до Г. Вейля (XX век).

Третья глава открывается материалами о математиках нашей страны – от Кирика Новгородца (XII век) до А.Н. Колмогорова (XX век). Один параграф посвящен библиографическому обзору материалов, в которых отражены основные этапы развития отечественного математического образования; здесь же даны сведения о жизни и списки трудов русских методистов-математиков – от С.К. Котельникова (XVIII век) до А.И. Маркушевича (XX век). Предпоследний параграф указателя посвящен развитию математики в российских университетах – Московском, Санкт-Петербургском, Казанском и других. Завершает работу параграф о русских историках математики, их жизни и трудах – от М.Е. Ващенко-Захарченко (XIX век) до С.С. Демидова (XX век).

Всего в указатель Р.З. Гушель вошло около 150 персоналий.

Из приведенного описания может сложиться впечатление, что "Путеводитель по литературе" рассчитан на достаточно узкую аудиторию историков математики и образования. Однако это не так. В предисловии к работе автор пишет, что ее указатель рассчитан не только на историков науки и образования, но также и на студентов педвузов и, конечно, на учителей. Всякая наука немыслима без своей истории, однако часто оказывается так, что при изложении темы (в школе или в вузе) исторический аспект остается в тени. По мнению Р.З. Гушель, это связано с тем, что "у нас нет традиции в таком подходе", преподаватели не привыкли рассказывать вместе с наукой ее историю. Поэтому "нужно убедить таких педагогов в ошибочности их точки зрения" [С. 12]. Данный указатель призван быть путеводителем по литературе, быстро дать в руки учителя библиографический материал по интересующей теме.

X. Школьное геометрическое образование

Этот справочник, вышедший в 2006 г. в Калуге (автор – Ю.А. Дробышев), можно условно разделить на три части: библиографическую, историческую и биографическую.

К библиографии относятся списки учебных книг по геометрии XVIII – начала XX вв.; публикации, посвященные преподаванию математики (как современные, так и дореволюционные); диссертации по истории математического образования и библиографические пособия. Хотя в оглавлении справочника говорится, что публикации и диссертации посвящены русскому учебнику геометрии, в ряде случаев это не так: в соответствующие отделы справочника внесены работы, весьма далекие от заявленной темы. К библиографии относятся также разделы "История геометрии" и "Журналы". В последнем представлены исследования, посвященные отечественной педагогической и методико-математической периодике.

В исторической части представлены фрагменты программ по математике для средних учебных заведений (хотя есть и программы испытаний по геометрии на звание учительницы). Здесь же (в ряде случаев) даны учебные планы, пояснительные записки к программам. Фрагментарность сведений объясняется тем, что автор включил в справочник только геометрические разделы программ.

В биографической части приводятся краткие сведения о жизни деятелей математического образования, причем наряду со сведениями об отечественных педагогах даны справки и о зарубежных педагогах и ученых. К сожалению, в некоторых случаях приведена столь краткая информация, что из нее практически невозможно почерпнуть что-то существенное. Это, по всей видимости, объясняется тем, что автору в ряде случаев не удалось найти каких-либо сведений и он ограничился лишь констатацией факта былого существования математиков-педагогов. Несмотря на это, биографическая часть справочника ценна именно тем, что в ней сообщаются хоть какие-то данные о забытых сегодня учителях и методистах прошлого. Это – первый шаг на пути создания биографического словаря деятелей математического образования.

Как видно из обзора содержания справочника, в него вошли темы, весьма далекие друг от друга: это и учебники геометрии, и история геометрии, и программы учебных заведений, и биографические сведения о педагогах. Однако при такой пестроте и неоднородности материалов справочник весьма фрагментарен – из-за установки автора на геометрическую составляющую. Представляется более удобным, если бы он был разделен на несколько тематических справочников: в один войдут списки учебников и пособий по математике, в другой – программы учебных заведений, в третий – биографии педагогов. Работу со справочником также затрудняют имеющиеся пропуски слов (иногда весьма важных) и отсутствие корректуры.

О научном и педагогическом наследии Тимофея Федоровича Осиповского

О.О. Барабанов, Н.А. Юлина

Цель настоящей работы состоит в том, чтобы внести определенный вклад в дело восстановления исторической и гражданской справедливости по отношению к человеку, имя которого должно стоять в истории отечественной науки и образования по времени между именами Ломоносова и Лобачевского и на одном уровне с ними.

Биографический очерк. Тимофей Федорович Осиповский родился 2 февраля (по новому стилю) 1765 или 1766 г. в селе Осипово Ковровского уезда Владимирской губернии в семье попа Федора Ивановича. Для получения образования юный Тимофей был отдан во Владимирскую духовную семинарию, при записи в которую он и получил свою фамилию. В 1783 г. в числе 150 лучших студентов философского и богословского классов духовных семинарий России Тимофей Осиповский попал в первый набор Учительской гимназии в Петербурге, предназначенной для подготовки учителей. В этой гимназии он учился без каникул с ноября 1783 г. по август 1786 г., занимаясь физико-математическими науками, и как “*отличнейший студент по этой части со второй поло-*

вины курса был даже назначен репетитором для своих товарищей" [1. С. 173]. После окончания Учительской гимназии Тимофею Осиповскому как одному из лучших выпускников было предложено по собственному усмотрению выбрать местом службы Петербург или Москву. Он выбрал Москву как место ближайшее к родительским местам. Так Т.Ф. Осиповский стал преподавателем физико-математических наук и русской словесности в Главном народном училище в Москве. Его плодотворная работа в этом училище продолжалась 14 лет. По приглашению Комиссии о народных училищах в марте 1800 г. Тимофей Федорович занимает кафедру физико-математических наук в Петербургской Учительской гимназии как профессор физики и математики (в 1819 г. эта гимназия была преобразована в Петербургский университет). В это же время Академия наук предложила Тимофею Федоровичу вступить в число ее членов со званием адъюнкта по математике. Поясним, что звание адъюнкта Академии (помощника академика) примерно соответствовало современному званию члена-корреспондента и сопровождалось значительным материальным обеспечением. По правилам тех лет Т.Ф. Осиповский должен был подать прошение на отставку с занимаемой должности, что было противно его независимому характеру. Прошение Тимофей Федорович не подал.

В конце 1802 г. ему было предложено место профессора математики в открываемом Харьковском университете. "*По чрезвычайному обременению делами,* – пишет Т.Ф. Осиповский, – *от коего я даже сделался болен, подумав несколько недель, решился я принять сие предложение, но с тем, чтобы* ***мне не проситься у начальства, а чтобы попечитель сам просил меня у начальства***". Тимофей Федорович прибыл в Харьков в 1803 г. и горячо принялся за работу по открытию университета. К чтению лекций Т.Ф. Осиповский приступил в феврале 1805 г. Тимофей Федорович читал различные курсы: так называемую чистую математику, прикладную математику, механику, оптику и астрономию. Этим, однако, не исчерпывается деятельность Тимофея Федоровича на пользу университета. Еще в апреле 1804 г. Т.Ф. Осиповский назначается членом Комитета для ускорения дел по открытию университета, а затем он – непременный заседатель Правления; ему поручается присмотр за кассой университета; он – член училищного комитета и комитета по испытанию чиновников гражданского ведомства. Сам Тимофей Федорович никогда не стремился к занятию административных должностей. Это видно из того, что он дважды (в 1808 и 1810 гг.) отказывался от ректорского звания, хотя был избран в Совете большинством голосов. С отстранением от должности в 1813 г. ректора Стойковича, скомпрометированного коммерческими операциями, Т.Ф. Осиповский избирается проректором, а затем и ректором и переизбирается на следующие трехлетия в 1816 г. и 1819 г. В результате интриг, враждебных настоящей науке, после семи лет ректорства в 1820 г. Тимофей Федорович вынужден был оставить свое детище – Харьковский университет.

После увольнения Т.Ф. Осиповский переехал на постоянное жительство в Москву, где предался исключительно ученым занятиям. Он окончил начатый им в 1802 г. перевод первых четырех томов "Небесной механики" Лапласа. В Москве Т.Ф. Осиповский напечатал в виде отдельных изданий два своих сочинения по астрономии и оптике.

Умер Тимофей Федорович 12 июня 1832 года.

Осиповский как математик. "Курс математики" Осиповского стал наряду с учебником академика Гурьева первым фундаментальным изложением высших разделов современной ему математики на русском языке. Глубокое содержание, строгая научная последовательность, новизна в освещении многих вопросов обеспечили этому курсу заслуженную репутацию как одного из лучших руководств того времени по дифференциальному и интегральному исчислению.

По свидетельству академика Остроградского [2], "*математические сочинения Осиповского обратили на себя внимание французской академии наук, признавшей их достойными помещения в своем периодическом издании; они не были помещены там единственно потому, что уже прежде напечатаны по-русски, а в изданиях французской академии не допускаются сочинения, изданные уже в свет на каком бы то ни было языке*".

Осиповский читал курс математики, по свидетельству профессора Харьковского университета А. Рославского-Петровского, "*частью по запискам, а частью по изданному им курсу, который в свое время был одним из лучших математических руководств не только в русской литературе, но и в иностранной*" [3. С. 17].

Первые два тома "Курса математики" Т.Ф. Осиповского выдержали несколько изданий. В двадцатых годах появился и третий том, содержащий теорию функций (571 с.). Этот том был составлен Т.Ф. Осиповским еще в 1810 г. и тогда же представлен в Главное правление училищ. В официальном документе 1810 г. Министерства народного просвещения читаем: "*Ординарный профессор Харьковского университета, коллежский советник Осиповский в службе состоит 24 года. Он сочинил в двух томах курс чистой математики. Сочинение это признано классическим и, будучи издано бывшей комиссией о народных училищах, употребляется не только в училищах, подведомственных Министер-*

ству народного просвещения, но и во многих других учебных заведениях... Ныне представил он в Главное правление училищ сочиненный им 3-ий том математики в двух частях – о дифференциальных, интегральных и вариационных вычислениях. Это последнее сочинение, по поручению правления училищ, рассматривал член его, действительный статский советник академик Фусс, и донес, что оно заключает в себе отвлеченные исследования, весьма превышающие тот курс чистой математики, который преподается в университетах, а потому не только полезно, но даже необходимо для всех тех, кои избрали математику главным предметом своего учения, в особенности же для тех, кто не знает иностранного языка, ибо, сколько известно, нет еще на русском языке такого сочинения, в котором бы так пространно, как тут, рассуждалось бы о приложении теории функций к кривым линиям и поверхностям".

Высшая школа России конца XVIII в. пользовалась "Курсом математики" Э. Безу в пяти томах, полный перевод которых был напечатан в 1804-1806 гг., и учебником академика Н.И. Фусса. Сравнительный анализ этих учебников и "Курса математики" Т.Ф. Осиповского с точки зрения алгебры, проведенный А.К. Сушкевичем, привел к следующему выводу: "*Учебники Осиповского были гораздо полнее, чем рассмотренные выше учебники Фусса и Безу. Это был первый русский учебник алгебры, материал которого в значительной своей части относился к высшей алгебре*" [4. С. 255].

Осиповский как естествоиспытатель. Тимофей Федорович интересовался механикой, физикой и астрономией. Большое теоретическое значение имели его труды по механике – "Теория движения тел, бросаемых на поверхность земли" и "О действии сил на гибкие тела и о происходящем от того равновесии". В 1817 г. Тимофей Федорович представил "Обществу наук" при Харьковском университете работу "О разделении электричества в разобщенных отводах при держании перед ними в некотором удалении наэлектризованного тела". Т.Ф. Осиповский во всех областях стремился сказать новое, передовое слово. Он, в частности, обратил внимание на необходимость реформы календаря. В своей статье "О календаре" ("Украинский вестник", май, 1816 г.) Т.Ф. Осиповский показал отставание астрономического года от старого календаря и предложил, начиная с 1817 г. подряд на протяжении 48 лет, не отмечать високосных годов, т.е. считать в каждом году 365 дней, пока отставание календаря не будет компенсировано. Другие оригинальные астрономические труды Т.Ф. Осиповского – "Исследование светлых явлений, видимых иногда на небе в определенном положении, в рассуждении солнца или луны”, “О вычислении аберрации” и “Об астрономических преломлениях”.

Осиповский как философ. Тимофей Федорович внимательно следил за современной ему западной философией. По его опубликованным философским работам можно заключить, что он являлся продолжателем того способа философствования, который на российскую почву был перенесен из Германии Ломоносовым. Как известно, Ломоносов был учеником Вольфа, который сам, в свою очередь, был учеником великого Лейбница. Принцип необходимости достаточного основания Лейбница, выглядящий для философских виртуозов слишком тривиальным, как нельзя лучше пришелся для энергических устремлений первых русских ученых (к сожалению, этот принцип не успел как следует пропитать российскую почву из-за Французской революции). Здесь уместно напомнить, что у науки, в том числе и у философии, нет национальных границ. Поэтому Т.Ф. Осиповский использовал свой опыт перевода “Логики” Кондильяка в применении принципа необходимости достаточного основания Лейбница для дискуссии со своими оппонентами в Харьковском университете. Приверженность к этому принципу привела Тимофея Федоровича к отрицанию учения Канта об априорном и субъективном характере наших представлений о пространстве и времени. Осиповский и его сторонники встретили упорное сопротивление со стороны мистически настроенных профессоров, имевших могучую поддержку в лице попечителя Карнеева и министра просвещения Голицына. О научной квалификации Карнеева говорит, например, то, что “*профессору физики Комлешинскому он заметил, что молния падает, имея в своем конце треугольник, который изображает собой святую Троицу*” [5. С. 478].

Философские взгляды Т.Ф. Осиповского ярко выражены в его актовых речах. В первые десятилетия существования Харьковского университета актовые речи занимали видное место в научно-литературной деятельности профессоров. В речи “О пространстве и времени”, произнесенной 30 августа 1807 года “в торжественном собрании университета”, Тимофей Федорович подвергает представления Канта о пространстве и времени критическому разбору и формулирует свое собственное мнение: “*Мое суждение о пространстве таково: понятие о нем производится по впечатлениям, происходящим от него посредством наружных наших чувств на наши внутренние чувства. Впечатление же и тот предмет, который оное производит, не суть одно и то же, но чрезвычайно разнятся между собою, подобно, как цветы, солнцем производимые, разнятся от самого солнца. Может даже статься, и веро-*

ятно, что сие впечатление в разных людях, по различному образованию чувств для принятия его устроенных, бывает различно, или по крайней мере имеет чувствительные оттенки. По сему, что такое есть пространство в своей сущности, нам неизвестно, и мы не имеем способа узнать его сущность; но оно находится в самой природе, и сущность его имеет постоянное отношение к тому впечатлению, которое оно в наших чувствах производит; а потому сравнение впечатлений, частями пространства производимых выходит таково же, как и сравнение самых сих частей пространства" [6].

Последняя фраза вновь напрямую согласована с принципом достаточного основания и, кроме того, заставляет нас вспомнить о более поздней философии концептуализма Пуанкаре.

В речи Т.Ф. Осиповского "О динамической системе Канта" (1813 г.), посвященной опровержению идеи Канта о метафизических основах естественной науки, читаем: "*Ежели вы слышите или читаете, что философ природы постановляет a priori какой-либо закон ея, то буде он не доказывает его с математической строгостью, не полагайтесь на слова сего философа с искреннею к нему достоверностью, как бы сей закон ни обворожал воображение, но испытайте прежде его на оселке строгости математической и тогда только считайте его вероятным, когда он выдержит сию пробу*" [7].

Вновь мы видим неявное употребление принципа достаточного основания Лейбница.

По поводу актовых речей Т.Ф. Осиповского проф. К.А. Андреев писал следующее: "*В то время как математические произведения Осиповского, несмотря на свою высокую цену для современников, теперь должны считаться устаревшими, его воззрения философские сохранили свою свежесть до сих пор. Можно сказать, что в этих воззрениях он опередил своих сотоварищей по науке лет на пятьдесят. Это можно объяснить самым складом его ума. Сильный и искусный в построении ряда логических построений, он хорошо видел, что все эти заключения теряют всякую цену, если основания, из которых они исходят, недостаточно прочны. Опираясь поэтому на немногие, но верные данные наблюдательных наук, он прозревал в глубь будущих успехов знания гораздо далее тех мыслителей, которые, прельщаясь смелыми гипотезами, строили философские воззрения на зыбкой почве этих гипотез*" [1. С. 190-191].

В итоге приведенного краткого анализа философских воззрений Т.Ф. Осиповского мы обязаны подвергнуть сомнению оценку Т.Ф. Осиповского как вульгарного материалиста, данную в [8] современным историком математики Л.И. Брылевской.

Осиповский как педагог. Тимофей Федорович был талантливейшим педагогом. С первых дней открытия Харьковского университета Т.Ф. Осиповский снискал к себе глубокое уважение и любовь студентов. Его лекции слушались с захватывающим интересом. Свыше 50 лет спустя после своего обучения в университете бывший студент Розальон-Сошальский писал: "*Профессоры русской словесности И.С. Рижский (первый ректор университета), юриспруденции – Илья Федорович Тимковский и высшей математики Тимофей Федорович Осиповский – пользовались глубочайшим уважением студентов и всего общества, как преподаватели и как люди... Мягкий и добрый, Осиповский, весь проникнутый любовью к своему предмету и к своей обязанности, умел для слушателей своих, в том числе и для меня, поэтизировать даже дифференциальное и интегральное исчисление. По своим нравственным качествам, это было – так все на него смотрели – совершенство, насколько человек может достигать его*" [9].

Хорошо известна роль научной школы в общем процессе научного творчества. Очень выразительно писал об этом академик Н.Н. Лузин: "*...следует со всею силою подчеркнуть, что, чем старее школа, тем она ценнее. Ибо школа есть совокупность накопленных веками творческих приемов, традиций, устных преданий об отшедших ученых или ныне живущих, их манере работать, их взглядах на предмет исследований. Эти устные предания, – накапливающиеся столетиями и не подлежащие печати или сообщению тем, кого считают неподходящим для этого – эти устные предания суть сокровища, действенность которых трудно даже представить себе и оценить... Если искать каких-либо параллелей или сравнений, то возраст школы, накопление ею традиций и устных преданий, есть не что иное, как энергия школы, в неявной форме*" [10].

Мы не рискнем сказать, что Осиповский оставил после себя школу. Однако первый российский математик с громкой европейской известностью, Михаил Васильевич Остроградский, был его учеником. Хорошо известно, что он унаследовал многие качества Осиповского как ученого и всегда хранил о своем учителе благодарную память. Кроме Остроградского, учениками Осиповского были профессора А.Ф. Павловский и М.А. Байков. Изгнание Т.Ф. Осиповского и взаимосвязанное с этим изгнание Остроградского (без аттестата!) из Харьковского университета безусловно помешали созданию яркой научной школы на юге России. Однако остался в употреблении всех российских гимназий и университетов "Курс математики" Т.Ф. Осиповского – одно из немногих качественных руководств на русском языке, по которому изучали математику основатели и деятели будущих знаменитых научных школ России. Как писал проф. И.И. Сомов, "*избравши образцом преимущественно Эйле-*

ра, Осиповский по ясности и строгости изложения был достойным последователем великого математика. Обязанный своими познаниями собственному таланту и неутомимой ревности, с которою изучал творения европейских ученых, он излагал открытия гениальных двигателей науки с ясным и глубоким знанием дела; его университетские чтения служили превосходною школою для слушателей, указывали им верный путь и давали прочный залог для дальнейших самостоятельных занятий" [1. С. 182].

На наш взгляд, "Курс математики" Т.Ф. Осиповского не потерял педагогического значения и по сей день (см., например, [11]).

Драматизм судьбы Осиповского. Судьба крупного ученого редко бывает безоблачной. Чтобы понять личную драму Т.Ф. Осиповского, следует, как писал Тацит, "*без гнева и пристрастия*" оценить два фактора – внешние обстоятельства и характер Т.Ф. Осиповского как ученого и гражданина.

Внешние обстоятельства состояли в том, что начало XIX века ознаменовалось оживлением университетского образования в России. Российские университеты получили новый устав (1804 г.), дававший им единообразную организацию, определенное самоуправление и автономию в деле преподавания. Увеличение числа университетов в России способствовало росту кадров самостоятельно мыслящей интеллигенции. По-видимому, это вскоре напугало правительство. К 1817 г. устав 1804 г. фактически отменяется, свобода преподавания уничтожается, права советов университетов резко ограничиваются. Само существование университетов ставится под угрозу. М.А. Салтыков писал в 1817 г. Ф.К. Броннеру[1]: "*Более нежели вероятно, что за исключением Московского все остальные наши университеты будут упразднены, вопрос о закрытии университетов Казанского и Харьковского уже поставлен на очередь*". Министерство народного просвещения было преобразовано в 1817 г. в "Министерство духовных дел и народного просвещения". Историк Петербургского университета В.В. Григорьев писал: "*Университет в самом скором времени принял вид средневекового католического монастыря*" [12. С. 34]. В среде студентов и профессоров университетов возникает острая борьба двух лагерей. В исторической науке советского времени один лагерь назывался реакционным, другой – прогрессивным. Не испытывая нужды в идеологической раскраске, отнесем к первому лагерю мистиков и шарлатанов, а ко второму – сторонников рационального знания. В Харьковском университете начала XIX в. первый лагерь, состоявший из наиболее значительной части профессуры и студенче-

[1] Ф.К. Броннер (1759-1850) – профессор физики Казанского университета; М.А. Салтыков (1767-1851) – попечитель Казанского учебного округа.

ства, поддерживали мистически настроенный министр и другие влиятельные лица. Второй лагерь, не имевший опоры в "высших сферах", возглавлялся Т.Ф. Осиповским. Тимофей Федорович дорожил своим человеческим достоинством, своим делом и своими учениками. Очевидно, что с такими человеческими установками он не мог миновать изгнания из Харьковского университета, которое ему подготовило само время, см. [13. С. 133; 14. С. 710]. Однако возникшие трудности не сломили дух Т.Ф. Осиповского как ученого. К нему можно отнести слова Белинского о Ломоносове: "*гений умеет торжествовать над всеми препятствиями, какие ни противопоставляет ему враждебная судьба*". После отставки он завершает перевод четвертого тома "Небесной механики" Лапласа и в своем отверженном положении умудряется опубликовать две оригинальные работы. Тимофей Федорович продолжает перерабатывать свой объемистый четырехтомный курс математики. Он пишет министру: "*Мне нейдет хвалить свой курс, скажу только, что я никакому автору при сочинении его не следовал, но писал его по собственному своему плану. Сказывают, что курс мой переведен уже в Англии на английский язык и введен в училища*". В 1812, 1826, 1831 годах Т.Ф. Осиповский предлагает Министерству издать полностью четыре тома своего курса, а также сделанный им перевод "Небесной механики" Лапласа, но каждый раз получает отказ.

В истории с увольнением Т.Ф. Осиповского есть много поучительного для нас, его далеких потомков. Вновь расползается зараза оккультизма, мистики и паранауки, благоприятной средой для которых является, с одной стороны, доверчивое простодушие народа, а с другой – неуважение к достижениям настоящей науки и к национальной истории.

Имеется ряд обстоятельных исследований творчества Т.Ф. Осиповского, выполненных в советское время [15-17]. В этих исследованиях увольнение Т.Ф. Осиповского из Харьковского университета характеризуется как победа реакционного идеалистического крыла университетской профессуры над прогрессивным материалистическим крылом. В наше время мы можем взглянуть на драму Т.Ф. Осиповского иначе. Самая простая классификация философии делит последнюю на философию науки и философию духа. При этом философия науки имеет скромную цель обеспечения только науки, а философия духа, изучающая общие вопросы бытия и сознания, автоматически становится выше философии науки. В этом, на наш взгляд, и заключается основной источник конфликта, сломавшего общественную судьбу ученого. Дело в том, что естествоиспытателю философия духа мало интересна, что и демонстрировал Т.Ф. Осиповский всей своей деятельностью. С другой стороны, любой крупный естествоиспытатель, в том числе и Т.Ф. Осиповский, не только уважает философию науки, но и сам является ее явным (как Пуанкаре) или неявным творцом (как Эйнштейн). В итоге научные интересы двух практически противоположных школ, мало пересекаясь, создают почву для обид как с той, так и с другой стороны. Обиды такого рода и привели в Харьковском университете к увольнениям по доносам сначала в 1816 году профессора философии Шада (протеже великого Гете), а затем Т.Ф. Осиповского. К чести Тимофея Федоровича, он, будучи в 1816 ректором, в конфликте с Шадом занимал нейтральную позицию, хотя и не разделял его философских убеждений. Ни Шад, ни Т.Ф. Осиповский не добились официального объяснения увольнения.

Заключение. Даже краткий очерк деятельности Т.Ф. Осиповского свидетельствует о его уникальной роли в становлении отечественной науки и отечественного образования. К сожалению, память об Т.Ф. Осиповском более хранима на Украине, чем в современной России. Соответственно, в некоторых документах, статьях и книгах Осиповского записывают в малороссы и называют великим украинским ученым, ставя его рядом с малороссами Вернадским и Зелинским, см. [18-21]. Впрочем, эта ошибка может быть и предметом гордости братских славянских народов. Получается, что Т.Ф. Осиповский и после смерти осуществляет культурную связь между нашими народами, открывая для нас возможность называть российским ученым Михаила Васильевича Остроградского. По-видимому, необходимы какие-то общественно значимые меры на всероссийском и областном уровнях для того, чтобы по-настоящему "вернуть" Тимофея Федоровича Осиповского своим потомкам.

Тимофей Федорович Осиповский похоронен на Ваганьковском кладбище в Москве. Надгробная надпись, согласно [15], гласит:

Осиповский Тимофей Федорович
первый знаменитый русский математик
ректор Харьковского университета
заслуженный профессор высшей математики и астрономии.

Библиографический список

1. *Смирнов А.В.* Уроженцы и деятели Владимирской губернии, получившие известность на различных поприщах общественной пользы. (Материалы для биобиблиографического словаря). Вып. 4-й. Губ. гор. Владимир: Типография Губернского Правления, 1910.
2. С-Петербургские ведомости. 1858. № 40. С. 221.
3. *Рославский-Петровский А.* Об ученой деятельности Харьковского университета в первое десятилетие его существования // Журнал министерства народного просвещения. Июль 1855 г.

4. *Сушкевич А.К.* Материалы к истории алгебры в России // Историко-математические исследования. Вып. IV / Под ред. Г.Ф. Рыбкина и А.П. Юшкевича. М.: Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1951. С. 237-451.
5. *Чириков Г.С.* Тимофей Федорович Осиповский // Русская старина. 1876. Ноябрь. С. 463-490.
6. *Осиповский Т.Ф.* О пространстве и времени. Речь, говоренная в торжественном собрании Харьковского ун-та 30 августа 1807 г. // Историко-математические исследования. Вып. V / Под ред. Г.Ф. Рыбкина и А.П. Юшкевича. М.: Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1952. С. 9-17.
7. *Осиповский Т.Ф.* Рассуждение о динамической системе Канта. Речь, говоренная в торжественном собрании Харьковского ун-та 30 августа 1813 г. // Историко-математические исследования. Вып. V / Под ред. Г.Ф. Рыбкина и А.П. Юшкевича. М.: Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1952. С. 18-27.
8. *Брылевская Л.И.* Миф об Остроградском: правда и вымысел // Историко-математические исследования. Вторая сер. Вып.7 (42). М.: Янус-К, 2002.
9. *Розальон-Сошальский.* Мои воспоминания // Харьковские губернские ведомости. 15 апреля 1869 г. № 4.
10. Письмо Н.Н. Лузина Н.Г. Ованесову от 6.01.1948 г. (из личного архива Н.Г. Ованесова).
11. *Барабанов О.О.* Вопросы на проценты как проблема нормы словоупотребления // Математика в школе. 2003. № 5. С. 50-60.
12. *Григорьев В.В.* Императорский СПб. университет в течение первых 60 лет его существования. СПб., 1870.
13. *Рыбкин Г.Ф.* Материалистические черты мировоззрения М.В. Остроградского и его учителя Т.Ф. Осиповского // Успехи математических наук. Т. VII. Вып. 2(48). М.-Л.: Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1952. С. 123-144.
14. *Багалей Д.И.* Опыт истории Харьковского университета. Т. II. Харьков, 1910.
15. *Бахмутская Э.Я.* Тимофей Федорович Осиповский и его “Курс математики” // Историко-математические исследования. Вып. V / Под ред. Г.Ф. Рыбкина и А.П. Юшкевича. М.: Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1952. С. 28-74.
16. *Прудников В.Е.* Дополнительные сведения об Т.Ф. Осиповском // Историко-математические исследования. Вып. V / Под ред. Г.Ф. Рыбкина и А.П. Юшкевича. М.: Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1952. С. 75-83.

17. *Кравец И.Н.* Т.Ф. Осиповский – выдающийся русский ученый и мыслитель. М.: Изд-во АН СССР, 1955.
18. http://www.crimea.edu/edu/prog/hist.html
19. *Духопельников В.М.* О перспективах изучения русской культуры в курсе истории // http://www.niurr.gov.ua/ukr/dialog_1999/duhopelnikov.html
20. *Лосский Н.* Украинский и белорусский сепаратизм // Грани, 1958. С. 39.
21. *Назаров М.* Тайна России. Ч. 2. М.: Русская идея, 1999.

О задачах из “Курса математики” Т.Ф. Осиповского

Н.А. Юлина

В недавней статье В.М. Бусева “О печатном наследии в области преподавания математики” [1] не упомянут выдающийся автор отечественной математической литературы Тимофей Федорович Осиповский. В дополнение к статье [1] следует упомянуть, что в первой четверти XIX века в качестве руководств для гимназии были рекомендованы три учебника: “Начальные основания математики” А.Г. Кестнера, “Курс математики” Т.Ф. Осиповского и “Начальные основания чистой математики” Н.И. Фусса, см. [2. С. 7]. При этом лишь учебник Т.Ф. Осиповского выдержал три издания и почти на десятилетие (с 1805 г. по 1814 г.) был основным руководством для гимназий, несмотря на то, что объем материала, изложенного в пособии, значительно превышал гимназические требования [3. С. 252].

Тимофей Федорович Осиповский – первый русский математик, получивший специальное педагогическое образование. Кроме того, он – механик, физик, астроном, философ, блестящий педагог и организатор образования, неутомимый переводчик передовой западной мысли на русский язык. В истории отечественной науки и образования Т.Ф. Осиповский стоит по времени между М.В. Ломоносовым и Н.И. Лобачевским и на одном уровне с ними. При этом столь же ярких ученых в России в этот промежуток времени не наблюдается.

Фундаментальным трудом Т.Ф. Осиповского является его “Курс математики”. Остановимся только на одном аспекте первого тома [4] этого труда. В первом томе много прикладных задач, в том числе и с экономическим содержанием. Задачи такого плана впервые по тексту появляются в теме “О логарифмах” для иллюстрации практического применения логарифмов.

Задача 1. *"Капитал, состоящий из 20000 рублей, отдан в рост по 5 процентов. Спрашивается, во сколько времени он, причитая ежегодно проценты к капиталу, возрастет до 50000 руб.?"* [4. § 118].

Решение по Осиповскому. "*Капитал, отданный по 5 процентов в год, увеличивается ежегодно* $\frac{5}{100}$ или $\frac{1}{20}$ *его; следовательно, по прошествии года будет* $\frac{21}{20}$ *его, по прошествии другого года* $\frac{21}{20} \cdot \frac{21}{20} = \left(\frac{21}{20}\right)^2$ *его, и так далее; и через искомое число x лет будет* $\left(\frac{21}{20}\right)^x \cdot 20\,000$. *Поелику же сие число должно быть* $= 50\,000$; *по сему* $\left(\frac{21}{20}\right)^x \cdot 20\,000 = 50\,000$. *Разделим оба сии числа на* $10\,000$, *тогда получим* $\left(\frac{21}{20}\right)^x \cdot 2 = 5$. *Разделив еще на 2, получим* $\left(\frac{21}{20}\right)^x = \frac{5}{2}$; *взяв же с обеих сторон логарифмы, получим* $x\,(\lg 21 - \lg 20) = \lg 5 - \lg 2$; *поелику же x, взятое* $(\lg 21 - \lg 20)$ *раз, составляет* $\lg 5 - \lg 2$, *посему один* $x = \frac{\lg 5 - \lg 2}{\lg 21 - \lg 20} = 18{,}7802$ *годам, то есть* 18 *годам и* $284\frac{3}{4}$ дням".

Как видим, при решении этой задачи используется формула сложных процентов.

Экономические задачи встречаются и в теме "О содержаниях, пропорциях и прогрессиях". В основном это задачи прикладного характера на перевод денег из одной валюты в другую и на вычисление прибыли. Под геометрическим содержанием Осиповский понимает современное отношение двух величин, под геометрической пропорцией – равенство двух отношений. Большое внимание он уделяет тройному правилу. "***Тройное правило*** *не что иное есть, как приложение геометрической пропорции к решению задач, в общежитии случающихся. Оно по великому своему употреблению называется также* ***золотым правилом***" (§ 145). Далее в статье "Правило тройное, простое" (§ 150) встречается следующая задача, из которой мы можем понять смысл тройного правила.

Задача 2. *"Купец по векселю на Амстердам должен заплатить 35829 гульденов. Курс в газетах означен по* $32\frac{3}{4}$ *штиверов на рубль серебряной монеты; гульден же содержит 20 штиверов. Спрашивается, сколько ему заплатить надобно нашею серебряною монетою?"* (§ 150).

Решение по Осиповскому. "$32\frac{3}{4} : 20 = 35\,829 : x$, *и найдется* $x = 21\,800$ *руб.* $30\frac{70}{131}$ *коп. или почти* $21\,880$*руб.*$30\frac{1}{2}$*коп*".

Наш комментарий. Как видно из этого отрывка, простое тройное правило у Осиповского есть решение уравнения $a : b = c : x$ в виде $x = \frac{b \cdot c}{a}$.

Сложное тройное правило Т.Ф. Осиповский связывает с уравнением $(a \cdot p) : (b \cdot q) = c : x$.

К сложному тройному правилу Т.Ф. Осиповский относит и цепные правила, “*употребляемые в коммерции при переводе денег одного государства на деньги другого, по сравнению с деньгами государств посредствующих, по известным курсам, как меняются одни деньги на деньги другие*” (§ 152). Суть цепного правила Т.Ф. Осиповский показывает при решении задачи на перевод денег. Порассуждаем вместе с ним. Если цены монет, находящихся в четырех государствах, обозначить буквами α, β, γ, δ и из курсов известно, что

$$m\alpha = n\beta, \quad p\beta = q\gamma, \quad r\gamma = s\delta,$$

то, перемножив полученные равенства между собою и разделив на $\beta\gamma$, получим, что

$$mpr\alpha = nqs\delta. \tag{1}$$

Таким образом можно найти отношение монет α и δ. Зная это отношение, можем узнать, сколько t монет α составят в монетах δ. Пусть t монет α составят x монет δ, то есть

$$t\alpha = x\delta. \tag{2}$$

Разделив равенство (1) на (2), получим $\frac{mpr}{t} = \frac{nqs}{x}$, или $mpr : t = nqs : x$, или

$$mpr : nqs = t : x, \tag{3}$$

откуда x легко можно найти.

Задача 3. “*Чего стоить будут во Франции 2860 руб. 40 коп., когда курс в Петербурге на Амстердам по* $29\frac{1}{2}$ *штиверов за рубль, в Амстердаме на Гамбург по 33 штивера за вексельной талер банко, а в Гамбурге на Францию по 37 Любских шилингов банко за ефимок*” (§ 152).

Решение по Осиповскому. “*Здесь будет*

100 коп. = 29 $\frac{1}{2}$ штив.
33 штив. = 32 шилин. банко
27 шил. = 1 ефимику
ибо талер банко = 32 шил. банко

Посему оная пропорция $mpr : nqs = t : x$ *будет здесь*

$$100 \cdot 33 \cdot 27 : 29\frac{1}{2} \cdot 32 \cdot 1 = 286\,040 : x;$$

откуда найдется

$$x = \frac{286\,040 \cdot 32 \cdot 29\frac{1}{2}}{100 \cdot 33 \cdot 27} = \frac{28\,604 \cdot 59 \cdot 16}{10 \cdot 33 \cdot 27} = 3\,030\frac{2438}{4455}\text{ефимков,}$$

то есть 2 860 *руб. и* 40 *коп. во Франции стоить будут* $3\,030\frac{2438}{4455}$ *ефимков, или* 3 030 *ефим. и почти* $39\frac{1}{2}$ *су*".

Наш комментарий. Здесь "*оная пропорция*" – это формула (3).

Полученное правило обобщается для перевода "*другия меры одного государства на меры другаго*".

Задача 4. *"Сколько Российских саженей будет в 254 Французских туазах?"* (§ 152).

Решение по Осиповскому. "*Здесь будет*

$$\begin{aligned}&1\text{ Фр. туа.} = 6\text{ Фр. Фут}\\&15\text{ Фр. Фут} = 16\text{ фут. Англ.}\\&7\text{ фут. Англ.} = 1\text{ саж. Российс.}\end{aligned}$$

По сему будет пропорция $15 \cdot 7 : 6 \cdot 16 = 5 \cdot 7 : 2 \cdot 16 = 254 : x$*саж., и найдется* $x = \frac{254 \cdot 32}{35}$ *саж.*$= 232\frac{8}{35}$ *саж. или* 232*саж.*$1\frac{3}{5}$*фут*".

Наш комментарий. В начале XIX века российская сажень равнялась 3 аршинам, 1 аршин равнялся 0,7112 м. Отсюда можно найти значения тогдашних футов и французского туаза [5. С. 115].

В §153 для распределения прибыли в различных предприятиях формулируется "правило товарищества": "*если данную величину надо разделить на несколько частей, пропорциональных данным числам, то сумма всех чисел, пропорционально которым разделить требуется, относится к данной величине, как одно какое-либо из данных чисел к пропорциональной ему части*".

Наш комментарий. На современном математическом языке это правило называется делением отрезка в заданном отношении и лучше всего понимается с точки зрения выпуклых комбинаций.

Задача 5. *"Трое купцов составили компанию, положив первый 12000 рублей, 2-ой – 18000 руб., 3-ий – 20000 рублей, и в некоторое время приобрели на сию общую сумму 24000 руб. барыша. Спрашивается, по сколько из сего общего барыша каждому достанется?"* (§ 153).

Решение по Осиповскому. "*Здесь прибыль каждого должна быть пропорциональна его сумме. Таким образом, 12000+18000+20000 = 50000 руб.,*

$$\begin{aligned}&50000{:}24000 = 12000{:}\text{x} \quad \text{прибыль первого, или}\\&25{:}12 = 12000{:}\text{x} = 5760\text{ руб.} \quad \text{прибыль первого,}\\&25{:}12 = 18000{:}\text{x} = 8640\text{ руб.} \quad \text{прибыль второго,}\\&25{:}12 = 20000{:}\text{x} = 9600\text{ руб.} \quad \text{прибыль третьего купца.}\end{aligned}$$

Если сложить полученные прибыли, то действительно получим общую прибыль 24000 руб”.

Задача 6. *“Некоторый купец, должный четырем заимодавцам, первому – 15000 руб. другому – 25000 руб. третьему – 36000 руб. четвертому – 24000 руб., объявил себя банкротом, и продано с аукциону все его имение за 40000 руб. Спрашивается, сколько каждый заимодавец из этой суммы получить должен?”* (§ 153).

Решение по Осиповскому. “*15000+25000+36000+24000 = 100000 руб.*

100000 : 40000, или

5:2 = 15000:x = 6000 руб. на часть первого,
5:2 = 25000:x = 10000 руб. на часть второго,
5:2 = 36000:x = 14400 руб. на часть третьего,
5:2 = 24000:x = 9600 руб. на часть четвертого”.

Наш комментарий. Как видно по решению этих задач, при составлении пропорции неизвестная величина находится в знаменателе. По-видимому, такая формулировка связана с непосредственной экономической интерпретацией задачи. Ведь числа, пропорционально которым данную величину требуется разделить, фактически являются планом распределения, а значит, с точки зрения купца предпочтительнее, то есть их сумма должна быть в числителе. И еще одно замечание. Внимательный читатель заметил некорректное (для нас) отношение Т.Ф. Осиповского к знаку равенства. Это объяснить можно только тем, что знак “ = ”, который мы сейчас понимаем исключительно как знак количественного тождества, во времена Т.Ф. Осиповского имел еще и расширительное значение сокращенного обозначения эквивалентности. Вероятно, это было свойственно стилю всех математических текстов того времени. На нашем языке вышеприведенный фрагмент мог бы выглядеть так:

$$25 : 12 = 12\,000 : x \Leftrightarrow x = 5760.$$

Завершается статья “О тройных правилах” параграфом *“Употребление прогрессии при вычислении интересов”* (§ 154). Под интересом здесь, в соответствии с современной ему языковой нормой, Т.Ф. Осиповский имеет в виду финансовую выгоду. Т.Ф. Осиповский начинает параграф с вывода двух формул начисления сложных процентов, используя теорию геометрической прогрессии.

Первая формула – формула накопления капитала при его приращениях:

$$S = k^n a + \frac{k^n - 1}{k - 1} b = \frac{k^n(b + (k-1)a) - b}{k - 1}, \tag{4}$$

где S – накопленный капитал, a – первоначальный капитал, b – ежегодно вносимый капитал, n – количество лет, $k = \frac{100+p}{100}$, p – годовые проценты. Вторая формула – формула накопления капитала при его изъятиях:

$$S = k^n a - \frac{k^n - 1}{k - 1} b = \frac{k^n((k-1)a - b) + b}{k - 1}, \tag{5}$$

где S – оставшийся капитал, b – ежегодно забираемый капитал.

Фактически, это современные нам формулы финансовых потоков.

Изложив общую теорию, Т.Ф. Осиповский переходит к рассмотрению конкретных задач с применением формул (4) и (5).

Задача 7. *"Положим, например, отдан в ломбард капитал, состоящий из 10000 рублей, по 5 процентов, и ежегодно еще вносится по 800 рублей. Спрашивается, после 12 лет сколь велик капитал сей будет?"* (§ 154)

Решение по Осиповскому с использованием (4). "*Здесь $p = 5$, следовательно, $k = \frac{100+p}{100} = \frac{105}{100} = \frac{21}{20}, k - 1 = \frac{21}{20} - 1 = \frac{1}{20}$; $\quad a = 10000 b = 800$; по сему*

$$S = \frac{\left(\frac{21}{20}\right)^{12} \cdot \left(800 + \frac{1}{20} \cdot 10\,000\right) - 800}{\frac{1}{20}} = \left(\frac{21}{20}\right)^{12} \cdot (16\,000 + 10\,000) - 16\,000 = \\ = \left(\frac{21}{20}\right)^{12} \cdot 26\,000 - 16\,000.$$

Найдем сперва, сколько составляет $\left(\frac{21}{20}\right)^{12} \cdot 26\,000$. Логарифм сего числа $= 12\,(\lg 21 - \lg 20) - \lg 26\,000 = 12\,(1,3222193 - 1,3010300) + 4,4149733 = 4,669249$.

Коему логарифму соответствующее число 46692,26. Из сего вычтя оные 16000, получится 30692,26 руб. или 30692 руб. 26 коп".

Задача 8. *"Из банка выдано в проценты 25000 руб., по 5 процентов, и должник ежегодно вносит в уплату по 8 процентов на весь капитал. Спрашивается, сколько еще останется доплатить ему по прошествии 15 лет"* (§ 154).

Решение по Осиповскому с использованием (5). "*Здесь, как и в предыдущем примере, $k = \frac{21}{20}, k - 1 = \frac{1}{20}$; $a = 25\,000, b = \frac{8}{100} \cdot 25\,000 = 2\,000$, по сему по прошествии 15 лет останется*

$$S = \frac{\left(\frac{21}{20}\right)^{15} \cdot \left(\frac{1}{20} \cdot 25\,000 - 2\,000\right) + 2\,000}{\frac{1}{20}} = \left(\frac{21}{20}\right)^{15} \cdot (25\,000 - 40\,000) + 40\,000 = \\ = 40\,000 - \left(\frac{21}{20}\right)^{15} \cdot 15\,000.$$

Найдем сперва $\left(\frac{21}{20}\right)^{15} \cdot 15\,000$. *Логарифм его будет* $= 15\,(\lg 21 - \lg 20) + \lg 15\,000 = 15 \cdot 0,0211893 + 4,1760913 = 4,4939308$, *и соответствующее ему число найдется 31183,91, и если вычтем сие число из 40000, то останется 8816,09; следовательно, еще доплачивать останется 8816 руб. и 9 коп”.*

Заключение. Рассмотренные задачи свидетельствуют о том, что:

- основным критерием подбора задач у Т.Ф. Осиповского была их прикладная значимость;
- исходя из соображений педагогической целесообразности, Т.Ф. Осиповский чередует переходы от общего к частному и от частного к общему, что делает его текст увлекательным.

В целом анализ первого тома “Курса математики” Т.Ф. Осиповского говорит о том, что Т.Ф. Осиповский остался верен заветам своего учителя по Петербургской учительской гимназии Ф.И. Янковича де Мириево: “Стараться более учители должны об образовании и изощрении разума учеников, нежели о пополнении и упражнении памяти...”, “Начинать при учении всегда следует с легкого и идти потом к трудному...” Цит. по [6. С. 184].

Даже только перечисленные качества учебника Осиповского делают его интересным для современного читателя.

Нами ведется работа по современному изданию первого тома “Курса математики” Т.Ф. Осиповского.

Библиографический список

1. *Бусев В.М.* О печатном наследии в области преподавания математики // Математика в школе. 2006. № 9. С. 58-61.
2. *Прудников В.Е.* О русских учебниках математики для средних школ в XIX в. // Математика в школе. 1954. № 3.
3. *Полякова Т.С.* История математического образования в России. М.: Изд-во Московского ун-та, 2002.
4. *Осиповский Т.Ф.* Курс математики. Т. 1. СПб, 1802.
5. *Шостьин Н.А.* Очерки истории русской метрологии. XI – начало XX века. М.: Издательство стандартов, 1975.
6. *Прудников В.Е.* Русские педагоги-математики XVIII-XIX в. М.: Учпедгиз, 1956.

Использование исторических сведений на занятиях по методике преподавания математики: к 100-летию ЯГПУ и 1000-летию Ярославля

Н.М. Епифанова

Одним из направлений реализации идеи гуманизации и гуманитаризации образования, в том числе математического, является использование историко-научного материала в учебном процессе. Оно включает в себя продуманное, планомерное ознакомление студентов, учащихся с элементами истории, их тесное сплетение с систематическим изучением программного материала.

Преподаватели кафедры теории и методике обучения математики (ТМОМ) ЯГПУ прежде чем провести занятие со студентами, посвященное анализу задачного и теоретического материала учебной литературы прошлых веков, выводят студентов на экскурсию по городу, ибо "просвещению народа" в Ярославле во все века уделялось достаточно внимания.

– В начале XIII века в Ярославле было открыто первое в этой части Руси духовное училище, а в 1747 году – одна из первых в России духовных "славяно-латинских семинарий", основанная митрополитом Ростовским Арсением Мацеевичем.

– В Ярославле преподавали известные в России педагоги М. Розин (1767-1814(?)) и К.Д. Ушинский (1824-1870).

– В 1902 году в губернии насчитывалось 87 библиотек, 396 школ.

– В 1916 году в городе было 12 специальных и 12 частных учебных заведений, 44 начальных училища (17 городских, 15 церковно-приходских, 2 железнодорожных, 10 фабричных) [4].

Экскурсия проводится силами студентов. Каждый из них заранее рассказывает о том или ином школьном здании, а на семинарском занятии анализирует учебную литературу, по которой велось преподавание в данном учебном заведении.

Программа экскурсии "Школьные здания Ярославля"

Волжская набережная, 17. Здание, в котором ныне находится музей истории города, построено в 1860 году на средства семьи купцов Друженковых, имевших "суконную и мануфактурную торговлю". В 1902 году дом переходит в ведение Ф.А. Некрасова – младшего брата великого поэта Н.А. Некрасова, крупнейшего домовладельца Ярославля, имевшего, по данным на 1909, год 18 каменных домов в городе. С 1902 по 1909 годы Ф.А. Некрасов сдавал этот дом под женскую гимназию П.Д. Антиповой. (Портрет П.Д. Антиповой кисти В.А. Серова находится в экспозиции Ярославского художественного музея).

С 1909 по 1916 годы это здание арендует уже трехгодичный учительский институт (Учительский институт существовал в Ярославле с 1908 года), который “принимал преимущественно сельского учителя” [4]. Студентам предоставлялось 60 “казенных” стипендий по 170 рублей. При институте было открыто и высшее начальное училище. В 1916 году институт переехал в другое здание, на противоположный угол бывшего Ильинского переулка и Волжской набережной. (Здание не сохранилось.)

Дом Некрасовых в бывшем Ильинском переулке

В 1918 году институт был преобразован в педагогический, в 1922 году вошел на правах факультета в состав университета, а после закрытия университета в 1924 преобразован в самостоятельное высшее учебное заведение - педагогический институт. С 1918 года находится по адресу улица Республиканская, 108.

Волжская набережная, 27. В XVIII веке на этом месте стоял дом купца Мякушина, построенный до принятия регулярного плана застройки города. В этом доме 19 лет жил, находясь в ссылке, герцог Э. Бирон, всемогущий царедворец императрицы Анны Иоанновны. Позже в нем располагались острог, полицейская часть, а в начале XX века вплоть до 1917 года – городское трехклассное училище, предназначенное для низших слоев городского населения. С 1875 года по 1905 год почетным смотрителем училища был Я.С. Колмогоров – дед выдающегося математика А.Н. Колмогорова. (Я.С. Колмогоров ежегодно вносил в фонд училища 150 руб.) Я.С. Колмогоров был также попечителем школы в селе Туношна. За большой вклад в дело образования он получил чин титулярного советника по ведомству Просвещения.

Сегодня в этом доме расположилось Управление народного образования мэрии г. Ярославля. Училище не могло вместить всех желающих. Поэтому известный ярославский купец Н.М. Градусов подарил городу дом, построенный на собственные средства (ул. Б.Федоровская, 27, ныне здание Ярославского художественного училища), в котором в 1906 году было открыто 2-е имени Н.М. Градусова городское трехклассное училище для детей низших слоев населения.

Городское училище [7]

Красный съезд, 8. (Бывший Семеновский спуск, 6) До 1917 года в здании, построенным в 1883 году купцом Вахрамеевым, находились Дирекция народных училищ и один из семи музеев города Ярославля – педагогический [4]. Музей славился большой коллекцией (более 1600) экспонатов, выставкой ученических поделок и работ. При музее была обширная педагогическая библиотека методик, пособий и руководств.

Красный съезд, 8 [2]

Волжская набережная, 59/6. В здании управления Северной железной дороги (дата постройки 1860-1908 гг.) ранее находилось женское училище духовного ведомства, переведенное из Солигалича еще в 1848 году. В 1916 году в училище обучалось 255 девиц. Начальницей училища долгое время была Ольга Платоновна Вейс, сестра жены известного композитора Сергея Михайловича Ляпунова (1859-1924 гг.). Старший брат С.М. Ляпунова, Александр Михайлович Ляпунов (1857-1818 гг.), был академиком, выдающимся математиком, а младший, Борис Михайлович (1862-1843), – академиком-славянистом. Их отец – Михаил Васильевич Ляпунов, ученый-астроном, с 1856 по 1864 года был директором лицея, гимназии и училищ Ярославской губернии.

Стрелка. Украшением Стрелки являлось здание Ярославского Демидовского юридического лицея. 29 апреля 1803 года в Ярославле на средства П.Г. Демидова, крупнейшего промышленника и землевладельца, потомка известного рода Демидовых было открыто Демидовских высших наук училище. Сначала училище снимало помещение в здании Архиерейского дома на Стрелке, потом в усадьбе Матвеевских на бывшей Плацпарадной площади. Отдельный дом для Демидовского училища был открыт в 1812 году. В 1833 году Демидовское Высших наук училище было преобразовано в лицей; юридическим, с университетским курсом, он становится с 1870 года. Первые семь лет своего существования лицей являлся как бы филиалом Московского университета, чьи выпускники здесь и преподавали.

Одним из первых директоров Демидовского лицея был поэт и баснописец М.А. Майков (1770-1848). С 1856 по 1864 год директором Демидовского лицея был известный ученый – астроном М.В. Ляпунов, отец композитора С.М. Ляпунова и выдающегося математика А.М. Ляпунова. Одним из профессоров лицея был А.З. Зиновьев, в будущем – гувернер М.Ю. Лермонтова. В 1846-1849 годах в лицее преподавал К.Д. Ушинский. В его стенах учились поэты – М.А. Богданович (классик белорусской литературы), К.Д. Бальмонт (поэт “серебряного века”).

Демидовский юридический лицей.
Репродукция из книги "Ярославль в старых открытках и фотографиях". М., 1998.

Летом 1918 года во время антибольшевистского восстания здание Демидовского лицея полностью сгорело. Большая часть научной библиотеки лицея, уступавшей только библиотеке Московского университета, сгорела во время пожара, но многие редкие и ценные книги удалось спасти, и сегодня – это основа Фонда редкой книги научной библиотеки ЯГПУ им. К.Д. Ушинского.

Андропова (Крестьянская), 10. Здание построено в 1786 году по проекту архитекторов К.А. Говоркова и И.М. Левенгагена. В этом доме, с необычным для нас историческим названием – Дом призрения ближнего, находились приют для престарелых и школа для сирот.

В августе 1786 года генерал–губернатором ярославским и вологодским А.П. Мельгуновым было получено “именное повеление” императрицы Екатерины II “Об учреждении народных училищ (главных и малых) в губерниях России”. Училище решили разместить в Доме призрения ближнего. Днем открытия главного народного училища в Ярославле, как и училищ в других губерниях, было определено 22 сентября, день празднования коронации Екатерины II. Открытие главного народного училища в Ярославле было обставлено торжественно. Оно началось богослужением в Успенском кафедральном соборе, после которого был дан 51 выстрел из пушек. “Наконец, все заключено было приличною к сему высокоторжественному случаю речью, которую говорил высшего класса учитель Михайло Розин и коя помещена будет в ежемесячных изданиях под названием « Уединенный Пошехонец»” [6]. Главное народное училище состояло из 4 классов. (В 4 классе учились два года.) В 1790 года Комиссия об учреждении училищ признала “за благо ярославского народного училища учителя верхних классов Михайла Розина переместить в губернию Санкт-петербургскую”. В 1797 году в Петербурге вышел в свет учебник геометрии, составленный М. Розиным “в пользу и употребление обучающегося юношества”. (По этому учебнику в гимназиях России велось преподавание геометрии более 40 лет.)

С 1805 по 1812 год в здании находилась гимназия, преобразованная из Главного народного училища. В 1900 году гимназия переехала в собственное здание на Семеновской (Красной) площади (ул.Советская, 14).

В 1812 году в этом здании открылось Дворянское собрание, принявшее решение об организации ополчения под руководством Я.И. Дедюлина. Несколько позже в Доме призрения ближнего был открыт солдатский госпиталь на 100 раненых. Еще позже в этом здании открылась первая дворянская гимназия, а в конце XIX века – женская богадельня, пансионат для девочек и мальчиков и Екатерининская женская гимназия, после событий 1917 года – школа № 34 им. Пирогова. В настоящее время здание передано ЯрГУ и Дому народного творчества.

Кстати, в этом здании в 1900 году проходило празднование 150-летия русского театра, а в 1890 году М.А. Балакирев (1836-1910), композитор, создатель "Могучей кучки", отец которого работал в Ярославской казенной палате, дал два концерта в пользу малосостоятельных студентов лицея.

Революционная, 11/3. Большое желтое здание было построено в 1787-1793 годах по проекту И.М. Левенгагена для ярославских гражданских губернаторов, затем здание было передано откупной конторе, а в 1809 году – гимназии, в которой с 1832 по 1837 год учился Н.А. Некрасов. В 1853 году гимназия переехала в другое здание (ул. Андропова, 1/11). Последнее назначение здания – Спасские казармы.

Советская, 17. Здание построено в 1913 году по проекту архитектора Н.Д. Раевского. В 1914 году лепные работы выполняла артель Павла Анисимова, эта же артель украшала театр им. Ф.Г. Волкова. В здании разместились два объединенных (трехклассных) специальных учебных заведения: Торговая школа и Коммерческое училище, которое было открыто еще в 1910 году и размещалось в доме Разумова на Стрелке (ул. Челюскинцев, 5). Попечительский совет возглавлял П.П. Вахрамеев. Одним из преподавателей этих учебных заведений был известный исследователь местной истории, журналист П.А. Критский (1865-1922). В первые годы советской власти здание было передано под Дворец труда и рабфак. В 1941 году здание было отдано под Дворец пионеров.

Советская, 10. В 1861 году в здании была открыта одна из первых в России Мариинская женская казенная гимназия, уделявшей много внимания изучению иностранных языков. В гимназии училась русская поэтесса Мария Петровых, мать А.Н. Колмогорова и три его тетушки. (Мать А.Н. Колмогорова имела право по окончании гимназии работать "домашней учительницей по математике").

Советская, 14. С 1900 года в этом здании находилась Губернская имени Александра I Благословленного мужская гимназия, открытая еще в 1805 году. (Ныне это здание принадлежит ЯрГУ.) Здесь учились братья Богдановичи:

– Максим Богданович (1891-1917) – классик белорусской литературы (В Ярославле есть музей Богдановича, улица, названная его именем.);

– Лев Богданович (1893-1918), проявлявший еще в школьные годы незаурядные математические способности; постоянный участник конкурсов задач, объявляемых в начале 20 века журналом "Вестник опытной физики и математики", автор задач, вошедших в школьные учебники математики;

- Павел Богданович, долгие годы преподававший математику в школе № 33 г. Ярославля.

Площадь Богоявления. Ярославский миллионер А.П. Пастухов в 1850 году построил для магазинов и гостиницы одно из крупнейших в свое время частных зданий в городе. (Сейчас это здание занимает почтамт.) В здании Пастухова в разное время существовали:

– гостиница, в которой останавливались Н.А. Некрасов, классик французской литературы А. Дюма;

– гимназия О.Н. Корсунской;

– бесплатная народная библиотека-читальня, активное участие в судьбе библиотеки принимал П.А. Критский (Позже жена брата поэта Н.А. Некрасова пожертвовала деньги на постройку собственного здания для библиотеки.)

Республиканская, 42. До революции в здании, занимавшем целый квартал, помещалось низшее механико-техническое училище им. Н. Пастухова (одно из немногих учебных заведений, где обучение было бесплатным, вернее, за счет основателя училища Н. Пастухова) и ремесленная школа при техническом училище.

Которосльная набережная, 24. Автор “образцового фасада” (соответствующего образцу из альбома “Образцовые фасады каменных домов”) Духовной консистории – петербургский архитектор Луижди Руска. В 1919 году здесь находился отдел народного образования и редакция газеты “Творческие дела”. (С 1922 года газета стала выходить под названием “Северный рабочий”.)

Которосльная набережная, 46. На этом месте в XVIII веке стоял дом генерал-губернатора А.П. Мельгунова, который позже переехал во дворец на Ильинской площади. С разрушением по приказу Павла I дворца на Ильинской площади губернаторы снова вернулись в здание на Духовской улице, которое занимали вплоть до 1820 года. Здание, быстро ветшавшее, было передано духовному училищу (бурсе). В 1900 году на этом месте было построено здание духовной семинарии и общежитие для семинаристов. (Ныне здания принадлежат ЯГПУ.)

Республиканская, 108. В бывшем доме Н.А. Горяиновой, построенном в самом начале XVIII века и частично перестроенном в 1882-1883 годах, находился Общественный (дворянский) клуб, а 1880 по 1918 год – Ионафановское епархиальное училище, выпускавшее преимущественно учительниц начальных школ. В 1918 году здесь располагался штаб Ярославского военного округа, позже госпиталь, с 1918 по 1924 год – Ярославский университет, в состав которого входил педагогический институт, преобразованный из учительского института в 1918 году.

Ионафановское епархиальное училище [2]

Библиографический список

1. *Барщевская И.И.* Старые дома рассказывают: прогулки по волжской набережной. Ярославль, 2005.
2. *Жельвис В.И.* Прогулки по Ярославлю. Ярославль, 2001.
3. *Иванов А.Н.* Учитель Лермонтова А.З. Зиновьев и его педагогическая деятельность в Ярославле. Ярославль, 1966.
4. *Критский П.А.* Прогулки по Ярославлю. Ярославль, 1912.
5. *Мельгунов Б.В.* Всему начало здесь... Ярославль, 1977.
6. Труды Ярославского Статистического Комитета. Вып. X. 1. Статистическое обозрение народного образования в Ярославской губернии за 1881-1899 годы. 2. Из истории народной школы в Ярославской губернии. Ярославль, 1900.
7. Ярославль. История города в документах и материалах от первых упоминаний до 1917 года / Под ред. А.М. Пономарева. Ярославль, 1990.
8. Ярославль в старых открытках и фотографиях. М., 1998.
9. Ярославский край в энциклопедическом словаре Брокгауза и Ефрона / Под ред. А.М. Селиванова. Ярославль, 1996.

Учебный курс “История математики и техники” как составляющая введения в специальность для студентов-математиков

И.К. Зубова

Курс “История математики и техники” на математическом факультете Оренбургского государственного университета обычно читается в первом или втором семестрах, поэтому для студентов он в значительной степени играет роль некоторой составляющей введения в специальность. В связи с этим в значительной части курса особое внимание уделяется вопросам истории алгебры и геометрии, причем приходится учитывать тот небольшой объем знаний в области самой математики, который имеется у первокурсников.

В основу курса положена периодизация развития математики, предложенная академиком А.Н. Колмогоровым, знакомство с которой должно помочь студенту-первокурснику систематизировать уже имеющиеся у него знания о математике.

Курс алгебры и теории чисел, читаемый студентам математического факультета, обычно состоит из 54 лекционных и 54 семинарских часов и включен в учебный план первого семестра. Слушая во втором семестре лекции по истории математики, студенты должны вспомнить основные разделы алгебры и сформировать общее представление о месте ее в современной науке. Это часто непростая задача, поскольку приходится вспоминать уже “пройденный” и весьма насыщенный разнообразными совершенно новыми сведениями курс.

Выделив основные черты первого этапа развития математики, мы прежде всего останавливаемся на формировании понятия числа и системах счисления, предшествовавших десятичной позиционной. Этим вопросам посвящается отдельная лекция. Затем студентам предлагается самостоятельно познакомиться с рядом научно-популярных статей и брошюр по этой теме. Выступления, подготовленные ими после этого, заслушиваются на семинарских занятиях.

Следующие две лекции посвящены математике древнего Египта и Вавилона. Здесь выделяется вопрос о формировании зачатков алгебры. При подготовке к лекциям и семинарам используются книги Б.Л. Ван дер Вардена “Пробуждающаяся наука” [6] и М.Я. Выгодского “Арифметика и алгебра в древнем мире” [7].

Курс геометрии и топологии обычно также состоит из 54 лекционных и 54 практических часов и читается во втором семестре параллельно с курсом истории математики, состоящим из 36 лекционных и 36 практических часов. Для более подробного обзора выбираются следующие вопросы истории геометрии:

1. Геометрическая алгебра древних греков.
2. Аксиоматическое построение геометрии в “Началах” Евклида.
3. Пятый постулат Евклида и возникновение неевклидовых геометрий.
4. Три знаменитые задачи древности.
5. Возникновение и развитие теории конических сечений.

Изложим подробнее схемы построения лекций и семинаров, посвященных этим темам.

Теме “Геометрическая алгебра древних греков” целесообразно посвятить лекцию и семинар. На лекции объясняются причины возникновения геометрической алгебры как нового исчисления древних греков, говорится о геометрической интерпретации алгебраических тождеств, например, тождества $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Семинар проводится как продолжение лекции, но примеры, иллюстрирующие объяснения преподавателя, разбирают студенты, заранее подготовившие свои выступления. Геометрические построения производятся с помощью циркуля и линейки и сопровождаются подробными комментариями. Демонстрируется геометрическая интерпретация алгебраического тождества $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = ab$, определяется фигура, называвшаяся гномоном, объясняется роль и значение этой фигуры в задачах геометрической алгебры. Отдельные выступления посвящаются геометрическому решению линейных и квадратных уравнений, к которым сводятся параболическая, эллиптическая и гиперболическая задачи. Во время этого семинара удается напомнить студентам некоторые сведения из элементарной геометрии и элементарной алгебры, установить связь между этими дисциплинами.

Приступая к теме « Аксиоматическое построение геометрии в “Началах” Евклида», необходимо прежде всего обратить внимание на то, что студент – первокурсник еще плохо представляет себе, что такое аксиоматическое построение математической теории и какое значение имеет система аксиом в геометрии. Соответствующая лекция в курсе истории математики дает хорошую возможность остановиться на этих основополагающих моментах. Здесь удается также добиться точности понимания самих терминов “аксиома”, “постулат”, “теорема”. К сожалению, такое понимание не всегда присутствует у выпускников средней школы.

Поскольку сравнительно небольшой по объему курс геометрии и топологии не предполагает глубокого знакомства с неевклидовыми геометриями, соответствующую лекцию по истории математики, посвященную “Началам” Евклида, целесообразно использовать и для того, чтобы в доступной форме рассказать слушателям о роли пятого постулата Евклида в возникновении новых геометрий.

Темам « Аксиоматическое построение геометрии в “Началах” Евклида» и “Пятый постулат Евклида и возникновение неевклидовых геометрий" посвящается одна лекция. На семинаре студентам предлагается познакомиться хотя бы с первой книгой "Начал" и выступить с сообщениями о жизни и деятельности создателей новых геометрий, прежде всего Н.И. Лобачевского (1792-1856).

При обсуждении темы "Три знаменитые задачи древности" появляется возможность ближе познакомить слушателей с механическими кривыми и кривыми второго порядка, с которыми студенты встречаются впоследствии в различных математических курсах. Трем знаменитым задачам древности, происхождению кривых второго порядка, появлению самих терминов "эллипс", "гипербола", "парабола", целесообразно посвятить как можно больше времени, поскольку на лекции иногда приходится даже формулировать определения кривых второго порядка. Студенты первого курса часто еще не знают этих определений, но имеют уже некоторое представление о самих кривых. Представляется полезным провести на семинаре построение эллипса, гиперболы и параболы с помощью простых приспособлений, а также продемонстрировать эти кривые как сечения остроугольного, тупоугольного и прямоугольного конусов плоскостью, перпендикулярной к образующей (по Менехму) и как сечения произвольного конуса (по Аполлонию). Можно также проследить на примере одной из кривых происхождение ее названия, скажем, показать, как при решении параболической задачи выясняется основное свойство точек параболы.

При изложении этого материала удается, как правило, придерживаться хронологического порядка, попутно напоминая слушателям основные сведения школьного курса истории и по возможности расширяя и дополняя их. Нарушить такой порядок приходится только говоря о неевклидовых геометриях. В общей сложности обзор указанных пяти тем занимает приблизительно четырнадцать часов (четыре лекции и три семинарских занятия).

В заключительной лекции по греческой математике рассматривается творчество Диофанта (сер. IV в.) Здесь особое внимание обращается на возвращение к числовой алгебре и отказ от геометрической формы ее изложения, а также на первые идеи создания символического языка алгебры, которые не получали развития на протяжении целого тысячелетия. Рекомендуемая литература: Б.Л. Ван дер Варден. "Пробуждающаяся наука" [6]; История математики с древнейших времен до начала XIX столетия (под ред. А.П. Юшкевича) [1].

Математике средневекового Востока посвящаются шесть лекционных часов. В первой из этих лекций особое внимание уделяется важнейшим моментам истории арифметики и алгебры – началу широкого применения десятичной позиционной системы счисления с нулем и решению алгебраических уравнений второй степени. При подготовке к семинарам студенты должны уделить особое внимание научной деятельности Ал-Хорезми (ок. 783-ок. 850).

Для изучения предлагается пособие С.Х. Сираждинова и Г.П. Матвиевской “Ал-Хорезми – выдающийся математик и астроном средневековья” [17].

Дальнейшей истории развития алгебры посвящаются восемь часов (четыре лекционных и четыре семинарских). Вначале студентам поручается выделить основные этапы формирования этой науки до XVI века. Затем читается лекция, посвященная решению уравнений третьей и четвертой степеней Сципионом дель Ферро (1465-1526), Никколо Тартальей (1499-1557), Джироламо Кардано (1501-1576) и Луиджи Феррари (1526-1565).

Особо подчеркивается, что введение математической символики – одно из первых самостоятельных достижений европейских математиков после периода усвоения Европой античной и восточной науки (по периодизации, предложенной В.П. Шереметевским в его “Очерках по истории математики”) [22].

Исторический обзор развития алгебры завершает рассказ о попытках разрешения в радикалах уравнений степеней выше четвертой, поисках условий разрешимости этих уравнений и возникшей в связи с этим теорией Эвариста Галуа (1811-1832). Здесь нужно отметить статью Ю.П. Соловьева “Эварист Галуа” [18], в которой, на наш взгляд, кратко и наиболее доходчиво изложена основная идея теории Галуа, история происхождения теории групп, а также представлено сжатое, но увлекательное описание яркой и трагически короткой жизни этого гениального математика. Статья используется при подготовке последней лекции по истории алгебры. Ее математическая часть иногда предлагается сильным студентам для подготовки более подробного сообщения на семинаре.

Мы не коснулись здесь вопросов истории математического анализа в нашем курсе. Эти вопросы занимают в нем заключительную часть, которая наиболее трудна для слушателей и требует некоторого продолжения в рамках математических курсов, читающихся в следующих семестрах.

Основная цель лекций и семинаров по истории математики и техники на первом курсе математического факультета – помочь студенту расширить представление о математике, осуществить переход от элементарной математики к высшей.

Ниже приводим список литературы, использующейся при подготовке к лекциям и семинарам по первым двум частям нашего курса. Разумеется, его нельзя считать исчерпывающе полным для любого курса истории математики.

Библиографический список

1. *Башмакова И.Г.* Древняя Греция // История математики. Т. 1. М: Наука, 1970. Гл. 4. С. 58-105.
2. *Белозеров С.Е.* Пять знаменитых задач древности (История и современная теория). Ростов н/Д: Изд. Ростовского университета, 1975. 320 с.
3. *Болгарский Б.В.* Очерки по истории математики. Минск: Вышэйшая школа, 1974. 288 с.
4. *Берман Г.Н.* Счет и число: в серии "Научно-популярная библиотека". М.-Л.: Гостехиздат, 1948. 31 с.
5. *Берман Г.Н.* Число и наука о нем: общедоступные очерки по арифметике натуральных чисел. М: Гостехтеориздат, 1954. 164 с.
6. *Ван дер Варден Б.Л.* Пробуждающаяся наука / Пер. с голланд. И.Н. Веселовского. М: Государственное изд-во физико-математической литературы, 1959. 459 с.
7. *Выгодский М.Я.* Арифметика и алгебра в древнем мире. М.: Наука, 1967. 367 с.
8. *Гутер Р.С., Полунов Ю.Л.* Джироламо Кардано: в серии "Творцы науки и техники". М.: Знание, 1980. 191 с.
9. *Дальма А.* Эварист Галуа, революционер и математик / Пер. с франц. Ю.С. Родман. М: Наука, 1984. 110 с.
10. *Депман И.Я.* История арифметики: Пособие для учителей М.: Просвещение, 1965. 415 с.
11. *Дорофеева А.В.* Страницы истории на уроках математики. Львов: Журнал "Квантор", 1991. 97 с.
12. *Зверкина Г.А.* История математики: Учеб. пособие. М: МИИТ, 2005. 108 с.
13. *Марков С.Н.* Курс истории математики: учеб.пособие. Изд. Иркутского университета, 1995. 247 с.
14. *Розенфельд Б.А.* Аполлоний Пергский. М: Изд. Московского центра непрерывного образования, 2004. 176 с.
15. *Рыбников К.А.* История математики: Учебник. М: Изд. МГУ, 1994. 496 с.
16. *Рыбников К.А.* Возникновение и развитие математической науки: Кн. для учителя. - М.: Просвещение, 1987. 159 с.
17. *Сираждинов С.Х., Матвиевская Г.П.* Ал-Хорезми – выдающийся математик и астроном средневековья: Пособие для учащихся. М.: Просвещение, 1983. 78 с.
18. *Соловьев Ю.П.* Эварист Галуа // Рассказы о математике и математиках: Сб. ст. М.: МЦНМО, 2000. С. 80-90.

19. *Стройк Д.Я.* Краткий очерк истории математики М.: Наука, 1990. 256 с.
20. *Фомин С.В.* Системы счисления: В сер.“Популярные лекции по математике”. М.: Наука, 1968. 46 с.
21. *Чистяков В.Д.* Три знаменитые задачи древности. М.: Государственное учебно-педагогическое издательство Министерства просвещения РСФСР, 1963. 95 с.
22. *Шереметевский В.П.* Очерки по истории математики. М.: Государственное учебно-педагогическое издательство наркомпроса РСФСР, 1940. 179 с.

Формирование историко-математической компетенции в рамках курса истории математики

О.В. Головина

Во все времена возникал волнующий вопрос о причинах, в силу которых математика обладает огромными возможностями практических применений. Согласно мнению группы видных французских ученых, печатающихся под псевдонимом Николай Бурбаки, “неясно и, возможно, навсегда останется неразрешимой загадкой, каким образом результаты математики находят применение в практике”. Имеется и другое мнение, согласно которому возможность применения математики объясняется случайностью. Приведем здесь хорошо известное мнение Пьера Бутру, высказанное им еще в 1920 году: “Если математика почти точно согласуется с эмпирическими условиями, то это не результат ее внутренних свойств, а лишь внешних обстоятельств. Выяснилось, что сравнительно простая наука способна объяснить явления природы. Это счастливая случайность, которая не должна была с необходимостью наступить”. Сам вывод, что возможность применения математики к задачам практики является счастливой случайностью, на наш взгляд, не является случайностью, он представляет собой логическое продолжение определенных представлений о формировании математических понятий. Ошибочность таких взглядов становится ясной, когда перед глазами находится не только окончательно формализованная математическая дисциплина, но и весь исторический путь ее развития.

При этом удается проследить путь возникновения и становления ее понятий из почти интуитивных представлений, подсказанных практикой или частными задачами. Если же замкнуться в уже сформировавшейся формализованной математической схеме и за ее пределами не желать ничего видеть, то связи математики с практикой, с проблемами, стоящими или стоявшими перед обществом, теряются; при этом теряется и искажается сам процесс возникновения и развития основных понятий науки.

На сегодняшний день встала проблема совершенствования уже сложившейся системы подготовки учителя математики в рамках компетентностного подхода. В этих условиях важно не упустить ни одного из компонентов сложившейся системы. Мы считаем, что в качестве одного из таких компонентов выступает историко-математическая подготовка, которая осуществляется преимущественно в рамках курса истории математики. В ходе математической подготовки возникают различные противоречия сложившейся системы подготовки учителя математики.

Во-первых, это противоречие между историческим и логическим в мышлении учителя математики. Фундаментальное образование в области математики и сопровождающих ее дисциплин формирует преимущественно логическое мышление и практически не влияет на развитие исторического мышления учителя математики. Курс истории математики способствует устранению дисбаланса между историческим и логическим в мышлении учителя математики.

Во-вторых, это постоянно присущее высшему педагогическому образованию противоречие между общекультурным и специальным блоками подготовки учителя математики. Будучи компонентом каждого из этих блоков, осуществляя интерблоковые и интердисциплинарные связи, курс истории математики в состоянии сгладить и это противоречие. Нам представляется очень важным целенаправленное формирование историко-математической компетентности будущего учителя математики, охватывающее все виды учебно-познавательной деятельности студентов в процессе предметной подготовки. Это даст возможность спроецировать основные элементы историко-математической компетентности на содержание изучаемых математических курсов, тем самым профессионально ориентировать научные знания студентов и повысить качество их профессиональной подготовки за счет усиления историко-математического компонента.

В-третьих, это противоречие между активно проникающими в современные образовательные системы новыми технологиями и актуальными подходами, в частности компетентностными. Курс истории математики способствует формированию историко-математической компетенции.

Историко-математическая компетентность относится к профессиональной компетентности учителя математики, которой должен обладать учитель, работающий в современной школе. Она связана с необходимостью использования профессионально ориентированных научных знаний в области педагогики, психологии, информационных технологий, истории математики и методики ее преподавания для решения различных образовательных задач. В этом смысле деятельность учителя во многом приближается к деятельности ученого: и тот, и другой занимаются решением проблем повышения качества обучения, развития способностей и личностных качеств учащихся и т.п.

С общих позиций историко-математическую компетентность учителя математики можно определить как культуру мышления, основанную на историко-математических знаниях. На теоретическом уровне – это овладение научным стилем мышления, основанным на принципе историзма; на практическом уровне – умение проектировать и конструировать процесс обучения математике, навыки осознания, формулирования и творческого решения задач в области педагогики, психологии и методики обучения математике с учетом исторического развития науки.

Придерживаясь позиции В.А. Козырева, М.Ф. Родионовой, профессиональную компетентность будем понимать как совокупности ключевой, базовой и специальной компетентностей. Ключевые компетентности необходимы для любой профессиональной деятельности, они связаны с успехом личности в быстро меняющемся мире. Можно выделить четыре группы умений, которые отражают ключевую компетентность современного специалиста:

– решать профессиональные задачи на основе информации прошлого и настоящего;

– строить перспективы, конструировать, осуществлять планирование профессиональной деятельности с опорой на опыт предков;

– анализировать и делать соответствующие выводы в контексте своей деятельности;

– осуществлять самообразование.

В рамках такой трактовки можно утверждать, что историко-математическая компетентность проявляется в способности решать профессиональные задачи на основе анализа идей прошлого и их трактовки в современном обществе, в построении логических рассуждений, позволяет более адекватно оценивать сложившуюся ситуацию и находить рациональные пути решения.

Базовые компетентности отражают специфику определенной профессиональной деятельности, в частности, педагогической. Для профессиональной педагогической деятельности базовыми будут компетентности, необходимые для "построения" профессиональной деятельности в контексте требований к системе образования на определенном этапе развития общества. Выделим основные группы умений, которыми должен обладать современный учитель в рамках базовой компетентности:

– видеть ребенка (ученика) в образовательном процессе;

– строить образовательный процесс, ориентированный на достижение целей конкретной ступени образования на основе принципа историзма;

– проектировать и осуществлять профессиональное самообразование, опираясь на историю развития науки.

На основе этого сформированность историко-математической компетентности носит немаловажный характер. Во-первых, ее наличие влияет на формирование культуры учителя тем, что существенно расширяет его общий кругозор, внося свой вклад в его эрудицию, оказывая влияние на формирование современной системы ценностей и профессиональное поведение. Во-вторых, историко-математическая компетентность позволяет по-новому осмыслить свою профессиональную деятельность, что способствует успешному решению задач модернизации образования. В-третьих, она дает возможность проектировать и осуществлять профессиональное самообразование.

Специальные компетентности отражают специфику конкретной предметной или надпредметной сферы профессиональной деятельности. Специальные компетентности можно рассматривать как реализацию ключевых и базовых компетентностей в области конкретного учебного предмета, в частности, математики. Выделим умения, характеризующие ключевую компетентность современного учителя математики:

– проектирование и осуществление учебного процесса на основе исторического подхода;

– анализ и проведение диагностики сформированности различных умений и навыков на основе принципа историзма;

– создание и использование в учебных целях педагогической среды;

– осуществление самообразования.

Не каждый студент педвуза проводит самостоятельное научно-педагогическое исследование, но он должен иметь представление об основных этапах развития математики, фактах, накопленных в ходе ее развития; владеть знаниями в области истории математики; обладать основными математическими умениями. Курс истории математики в состоянии существенно влиять на фундаментализацию подготовки учителя математики, так как сама задача изучения генезиса процесса развития математики фундаментализирует математическую подготовку учителя математики. Будущий учитель начинает оценивать не только результат этого развития, но и трудные его пути. Он осознает не только несомненные факты математики как науки, но и начинают понимать, почему она развивалась так или иначе.

Нам представляется, что систему формирования историко-математической компетентности студентов – будущих учителей математики в процессе предметной подготовки условно можно представить в виде четырех компонентов: теоретическая, практическая подготовка в вузе, педагогическая практика в школе и самообразование.

В процессе теоретической подготовки студенты осваивают историко-математические знания, способствующие формированию целостного видения предмета; знакомятся с различными способами решения проблемных задач. При этом очень важно использовать в процессе преподавания математических дисциплин исторический подход, позволяющий формировать взгляд на математику изнутри: видеть проблему и соотносить с ней фактический материал, видеть взаимосвязь проблем, выражать проблему в конкретных задачах, находить различные пути решения.

Практическая подготовка основана на решении различных исторических задач с использованием "изначальных" методов решения под руководством преподавателя. Важным элементом такой работы является оценка и сопоставление решений, основанных на научном и обыденном опыте.

В период практической работы в школе студенты осмысливают опыт работы учителей, самостоятельно пытаются решать профессиональные задачи, осуществляют процесс проектирования и конструирования учебно-воспитательного процесса на основе принципа историзма.

В процессе самообразования будущий учитель математики повышает уровень своей историко-математической подготовки за счет самостоятельного изучения различных источников. На первый план выходит научно-исследовательская деятельность студентов, которая должна привить им навыки самообразования.

Математическая составляющая подготовки учителя в Смоленском учительском институте (1912-1918 гг.)

О.Н. Куприкова

С 2006-2007 учебного года в Смоленском государственном университете читается специальный курс "История отечественного математического образования". Несмотря на довольно большое количество литературы, касающейся этой тематики, ощущается недостаток фактических архивных материалов. В связи с этим исторические факты и события математического образования целесообразно иллюстрировать подлинными документами и материалами, в частности для этих целей возможно использование Государственного архива Смоленской области.

Например, при изучении в рамках данного специального курса вопроса о системе образования начала XX в. для воссоздания исторической картины системы образования, для проникновения духом того времени возможным видится рассмотрение истории того или иного учебного заведения, изучение его учебных программ, методической и учебной литературы.

Остановимся в данной статье на математической подготовке учителя в Смоленском учительском институте.

Учительские институты в дореволюционной России являлись средними учебными заведениями, занимавшимися подготовкой педагогических кадров преимущественно для городских и других начальных училищ повышенного типа. Городские училища были созданы по "Положению о городских училищах ведомства министерства народного просвещения" от 31 мая 1872 года и имели целью "сообщить детям всех классов городского населения правильное общее начальное образование и необходимые по местным потребностям прикладные знания" [2. С. 3]. С целью подготовки учителей для городских училищ в этом же году были созданы специальные учебные заведения – учительские институты. Срок обучения в них устанавливался три года. При этом следует помнить, что учительские институты, как и учительские семинарии, не являлись привилегированными учебными заведениями, их выпускникам не разрешалось держать экзамен на звание воспитателя гимназии, хотя такие права были даны выпускникам гимназий и реальных училищ.

Впервые вопрос об учреждении учительского института в Смоленске был поднят губернской управой в сентябре 1869 г. В конце 1871 г. Министерство народного просвещения выразило согласие на учреждение учительского института, но без пособия от казны. Только 40 лет спустя по инициативе Смоленского городского самоуправления и при поддержке членов Городской Думы от Смоленской губернии Н.А. Хомякова, Н.Н. Опочинина, княгини М.К. Тенишевой было приняло решение об учреждении в Смоленске учительского института [3. С. 113].

Учительский институт и городское училище при нем разрешено было открыть 1 июля 1912 года. Через два года, благодаря ходатайству педагогического совета, учебное заведение стало именоваться "Смоленский учительский институт, учрежденный в память 100-летия Отечественной войны" [4]. Управление институтом осуществлялось педагогическим советом, возглавляемым директором. На эту должность был назначен бывший директор Алферевской учительской семинарии Алексей Венедиктович Булатов, остававшийся на своем посту бессменно до 1918 года. Среди первых преподавателей математики – выпускник Московского университета С.В. Воронин.

Содержание обучения в учительском институте было значительно сокращено по сравнению с гимназическим. Однако выпускники институтов получали необходимую педагогическую и методическую подготовку, которая отсутствовала даже у выпускников университетов. Многие учащихся при поступлении в институт уже имели элементарную педагогическую подготовку, так как большинство из них уже работали учителями начальных училищ. Как пишет И.К. Андронов, учительские институты не давали высокой математической культуры, но в руках практика-преподавателя высших начальных училищ элементы математики передавались так, что усваивались большинством учащихся [1. С. 72].

Курс математической подготовки учителя включал в себя арифметику, алгебру, геометрию, тригонометрию, а также методику математики.

Приведем полное содержание учебных программ по этим дисциплинам, действовавших в период с 1912 по 1918 года в Смоленском учительском институте.

Программа по арифметике
1-й класс (2 недельных часа)
Учебный план

Введение: свойства математических величин и чисел; свойства натурального ряда чисел. Нумерация. Сложение, вычитание, умножение и деление чисел. О делимости чисел. Признаки делимости чисел. Общий наибольший делитель и наименьшее кратное. Теория простых чисел. Теория дробей простых и десятичных. Приближенные вычисления.

Программа

Свойства математических величин. Определение Гроссмана. Аксиомы равенства и неравенства. Определение числа Евклида и Ньютона. Современные взгляды на число. Идея порядка. Натуральный ряд чисел и его свойства.

Цели, достигаемые введением определенных систем нумерации устной и письменной. Различные принципы, полагаемые в её основание. Сравнительный разбор римской, славянской и нашей нумерации. Краткий исторический очерк возникновения принципа “положения”. Счетные приборы, в особенности “абак”.

Перечень определений, даваемых сложению, недостатки отдельных из них. Аксиома Грассмана. Равенства и неравенства. Выяснение способа доказательства от n к $n+1$ (способ совершенной индукции). Пять основных законов сложения и доказательства законов ассоциативного, коммутативного и закона монотонности.

Определение действий вычитания и их сравнительная оценка. Теоремы, относящиеся к этому действию.

Определение действия умножения. Шесть основных свойств произведения. Доказательства законов дистрибутивного, ассоциативного, коммутативного и закона монотонности. Теоремы, опирающиеся на эти свойства.

Определение действия деления; теоремы к этому действию.

Общие замечания о приложении вышеизложенных теорем к выполнению действий. Значение сокращенных способов вычислений.

Делимость чисел. Основные определения и теоремы. Вывод признаков делимости, некоторые обобщения. Теоремы Фермата. Наибольший делитель и наименьшее кратное; теоремы к нахождению их.

Теория простых чисел: основные определения и теоремы. Число простых чисел; таблица простых чисел; распределение простых чисел в натуральном ряду. Разложение чисел на простые сомножители. Число и сумма всех делителей числа.

Теория дробей: основные понятия, определения и теоремы. Дробь как пара чисел и как оператор. Формальные законы выполнения четырех действий над дробями.

Приближенные вычисления. Действия с приближенными величинами. Понятие об ошибках относительных [5].

Программа по алгебре
1-й класс (2 часа)

Введение. Действия над явными и неявными количествами. Учение о равенствах и неравенствах первой степени. Учение о степенях и корнях.

2-й класс (3 часа)

Уравнения и неравенства высших степеней в связи с изучением некоторых функций второго порядка. Прогрессии и логарифмы. Основы учения о мнимых и комплексных числах. Теория соединений. Бином Ньютона. Неопределенные уравнения. Непрерывные дроби.

Программа

Предварительные понятия и определения. Положительные и отрицательные количества. Действия над явными количествами. Понятие об аналитической геометрии на прямой. Неявные количества; первые четыре действия над ними. Разложение на множители. О делимости на биномы $(x \pm a)$, $(px \pm q)$ и некоторые другие свойства полиномов, целых относительно x. Общий наивысший делитель и наинизшее кратное. Неявные дроби и действия над ними.

Разделение равенств. Основные свойства тождеств. Пропорции. Основные свойства уравнений. Особые формы алгебраических выражений. Общие способы преобразования уравнений. Линейные уравнения с одним, двумя и многими неизвестными: способы решений, исследование смысла получаемых результатов. Общие понятия о неравенствах и основные свойства последних. Неравенства 1-й степени с одним неизвестным.

Понятие об аналитической геометрии на плоскости. Графическое изображение функций 1-го порядка от одного неизвестного переменного; его применение к исследованию корней и к изучению ходы функций. Понятие о производной.

Возведение в степень явных и неявных количеств. Извлечение корней из явных и неявных количеств. Действия над иррациональными выражениями. Несоизмеримые числа и действия над ними.

Квадратные уравнения с одним и несколькими переменными. Биквадратные уравнения. Иррациональные уравнения, содержащие неизвестное под знаком квадратного радикала. Преобразование радикала вида $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$. Квадратный трехчлен. Решение квадратных неравенств с одним неизвестным.

Графическое изображение некоторых функций 2-го порядка; исследование их геометрических свойств. Производные простейших функций; применение производной функции к исследованию свойств первообразной. Приложение понятия о производной функции к физике: определение скорости и ускорения в неравномерном движении.

Арифметическая и геометрическая прогрессии.

Обобщение понятия о показателе. Свойства показательной функции и её графика. Понятие о логарифме; свойства логарифмов; вычисления с помощью логарифмических таблиц. Приложение логарифмов к решению задач. Показательные уравнения.

Понятие о мнимых и комплексных числах; геометрическое представление комплексных чисел. Теория соединений. Бином Ньютона. Неопределенные уравнения (первой степени с двумя неизвестными) [6].

Программа по геометрии
1-й класс (2 часа)

Предмет геометрии. Прямая линия. Окружность. Подобные фигуры. Измерение окружности. Измерение площадей. Решение задач на вычисление и построение.

2-й класс (2 часа)

Прямые и плоскости. Многогранники. Круглые тела. Решение задач на вычисление и построение.

Программа

Пространство физическое и геометрическое; основные свойства того и другого. Определения, аксиомы (постулаты) и теоремы. Связь между прямыми и обратными теоремами. Задачи абстрактной и приближенной геометрии.

Основные свойства прямой линии. Углы. Треугольники. Перпендикуляры и наклонная. Параллельные линии. Симметрия фигур на плоскости. Четырехугольники.

Окружность: дуги и хорды; касательная; взаимные положения окружности и прямой, двух окружностей, углы в окружности.

Многоугольники вписанные и описанные.

Геометрическая квадратура площадей.

Теория пределов: безгранично большие и безгранично малые количества. Смысл действий над переменными количествами; действия над бесконечно малыми количествами. Понятие о пределе. Главнейшие теоремы о пределах.

Величины пропорциональные. Измерение величин. Измерение углов.

Подобие треугольников и многоугольников. Теоремы о пропорциональных линиях. Количественные соотношения между элементами треугольника и некоторых других фигур.

Правильные многоугольники. Задача о разделении окружности на равные части.

Вычисление длины окружности и её частей; вычисление π; понятие о “квадратуре круга”.

Измерение площадей многоугольников. Площадь круга и его частей.

Понятие о приложениях алгебры к геометрии. Основные свойства плоскости. Относительные положения прямых и плоскостей. Перпендикулярные прямые и плоскости. Параллельные прямые и плоскости. Углы прямых и плоскостей. Понятие о симметрии фигур в пространстве.

Многогранники: свойства их, измерение поверхностей и объемов. Правильные многогранники. Подобие многогранников. Тела вращения: свойства их; измерение поверхностей и объемов. Понятие о сферических треугольниках. Конические сечения [7].

Тригонометрия
3-й класс (1 недельный час)

Введение. О тригонометрических функциях. Тригонометрические таблицы. Решение треугольников. Решение геометрических задач с помощью тригонометрии. Измерения на местности.

Программа

Предмет тригонометрии. Измерение дуг и углов. Определение тригонометрических функций острого угла, выведенное из рассмотрения прямоугольного треугольника и первой четверти окружности. Понятие о решении треугольников с помощью таблицы натуральных тригонометрических величин. Зависимость между тригонометрическими функциями одного и того же угла. Тригонометрические функции одного и того же угла. Тригонометрические функции дополнительного угла. Тригонометрические функции углов от 90° до 360°; их изменение по знаку и величине. Графики $\sin x$, $\cos x$, tgx и $ctgx$. Формулы приведения. Углы отрицательные и большие 360°; периодичность тригонометрических функций.

Тригонометрические функции суммы и разности углов, двойного угла и половины угла. Приведение выражений к виду, удобному для логарифмирования. Тригонометрические уравнения.

Понятие о составлении тригонометрических таблиц. Употребление таблиц логарифмов.

Решение прямоугольных треугольников. Основные формулы тригонометрии: синусов, косинусов, Пифагора для косоугольных треугольников, высот; формулы Непера, Мольвейде и другие, необходимые для решения косоугольных треугольников.

Решение косоугольных треугольников. Решение планиметрических и стереометрических задач с применением тригонометрии. Применение тригонометрии к измерениям на местности [8].

Приведем два варианта программы по методики математике.

Методика математики
3-й класс (1 недельный час)

Ценность математики как науки и как учебного предмета. Задачи общеобразовательной школы. Особые цели преподавания математики. Связь математики с другими предметами школьного обучения. Общие приемы преподавания математики. Объем и характер курса математики в Высшем начальном училище; связь последнего с начальной школой. Краткое изложение методики арифметики и геометрии в начальной школе.

Методика преподавания так называемого систематического курса арифметики.

Связь арифметики с алгеброй; задачи начального курса алгебры; способы их достижения. Характер курса геометрии в Высшем начальном училище. Способы распределения учебного материала, проработка отдельных глав.

Учебные пособия и учебники по математике, соответствующие курсы Высшего начального училища. Обзор методической литературы.

Пособия: Аржеников. Методика арифметики.

Беллюстин. Методика арифметики.

Эрн. Очерки по методике арифметики.

Шохор-Троцкий. Методика арифметики, часть II, для учителей учебных заведений с полным курсом арифметики.

Трейтлейн. Методика геометрии, I и II части.

Беллюстин. Очерки по методике геометрии.

Симон. Дидактика и методика математики в средней школе [9].

Методика математики
3-й класс (1 недельный час)

Математические знания у детей, поступающих в Высшее начальное училище.

Объем и характер курса математики в Высшем начальном училище.

Общие приемы преподавания математики в высшем начальном училище.

Задачи "систематического" курса арифметики.

Ознакомление с различными системами нумерации.

Определение четырех арифметических действий; приемы их выполнения.

Объем теоретических сведений, возможный в вышеупомянутой главе.

Правильная постановка устных вычислений.

Глава об измерениях величин; меры; таблицы мер.

Действия над так называемыми "именованными числами".

Глава о делимости чисел; значение этой главы.

Задачи на так называемое "тройное правило". Практическая и общеобразовательная ценность подобных задач.

Роль задач в курсе арифметики.

Распределение учебного материала.

Связь арифметики с алгеброй, как сделать незаметным переход от арифметики к алгебре.

Задачи начального курса алгебры. Какие главы обладают наибольшей общеобразовательной или прикладной ценностью.

Алгебраические обозначения.

Положительные и отрицательные числа. Необходимые алгебраические преобразования. Уравнения и их приложения к решению задач.

Характер курса геометрии в Высшем начальном училище.

Способы распределения учебного материала; преимущества и недостатки отдельных из них.

Наилучшие методы проработки отдельных глав планиметрии и стереометрии.

Чертежные приборы. Значение правильных чертежей для усвоения теорем.

Роль логики и интуиции в курсе геометрии.

Задачи на построение и вычисление.

Построение геометрических образов, особенно стереометрических.

Наглядные пособия по геометрии.

Приложение геометрии к решению простейших топографических задач.

Связь преподавания в Высшем начальном училище курсов арифметики, алгебры и геометрии между собой.

Устная геометрия и алгебра.

Графический метод в курсе математики.

Важность исторического элемента в преподавании.

Классные и домашние работы; обычные ошибки, как следует бороться с ними. Подготовка учителя к уроку. Обычный тип урока математики. Классная дисциплина. Форма ответов. Успевающие и отстающие ученики. Учебные пособия и учебники по математике; наилучшие способы их использования. Обзор методической литературы по математике [10].

Таким образом, курс математики предъявлял достаточно высокие требования к учащимся. Но такие углубленные программы в учительских институтах были введены после 1912 года, в связи с произведением преобразования городских училищ в высшие начальные училища, что требовало расширения первоначально существующих программ.

Проведение подобных исторических исследований возможно также и при изучении постановки преподавания в гимназиях, реальных училищах, городских училищ, земских школах. Подобные специальные курсы направлены в первую очередь на передачу студентам обширного педагогического наследия предшествующих столетий, на формирование у них историко-методической культуры, помогающей дать адекватную оценку сегодняшней образовательной ситуации.

Библиографический список

1. *Андронов И.К.* Подготовка преподавателей математики для гимназий и учителей для народных училищ в России и полвека развития новой системы подготовки математиков-педагогов единой советской школы СССР // Ученые записки МОПИ. М., 1968. Т. 202. Вып. 6. С. 69-82.
2. *Кузьмин Н.Н.* Учительские институты в России. Челябинск, 1975. 41 с.
3. Смоленское земство и народное образование. 1865-1918 годы: Сборник материалов. Смоленск: Манджента, 2004. 320 с.
4. ГАСО. Ф. 7. Оп. 4. Д. 280. Л. 56.
5. ГАСО. Ф. 82. Оп. 1. Д. 25. Л. 74.

6. ГАСО. Ф. 82. Оп. 1. Д. 25. Л. 75.
7. ГАСО. Ф. 82. Оп. 1. Д. 25. Л. 76.
8. ГАСО. Ф. 82. Оп. 1. Д. 25. Л. 86.
9. ГАСО. Ф. 82. Оп. 1. Д. 25. Л. 86.
10. ГАСО. Ф. 82. Оп. 1. Д. 25. Л. 89.

Об организации профессионально-исторической подготовки учителя математики в условиях многоуровневого образования университетского типа [1]

В.Е. Пырков

Высшее педагогическое образование претерпевает в настоящее время существенные изменения, которые являются следствием проведения инновационной политики в сфере высшего образования и связаны с инновациями в учебном процессе вуза, в использовании информационно-коммуникационных технологий, в организации деятельности вуза и управлении вузовской системой. Одним из результатов последнего явилось создание крупнейших диверсифицированных государственных образовательных учреждений – Южного Федерального университета и Сибирского Федерального университета, представляющих собой некий конгломерат высшего профессионального образования. В состав этого конгломерата вошли и учреждения высшего педагогического образования, что актуализирует проблему их самоидентификации и условий полноценного функционирования в новой образовательной системе.

Одними из современных направлений функционирования педагогического образования университетского типа являются его многоуровневость и интердисциплинарность. Многоуровневость проявляется в существовании системы бакалавриат – магистратура – аспирантура с определенными для каждого уровня специфическими целями и задачами профессиональной подготовки учителя математики. Реализующие интердисциплинарность междисциплинарные образовательные программы позволяют существенным образом диверсифицировать образовательные траектории и обеспечить ориентацию на потребности и интересы студентов. Кроме того, в качестве одного из положений, интердисциплинарность предполагает гуманитаризацию естественно-научного образования за счет интеграционных связей специальной и общекультурной

[1]Работа выполнена в рамках научных исследований по гранту Президента РФ для государственной поддержки молодых российских ученых (проект № МК-800.2007.6).

подготовки в единстве с гармоничным развитием личностных качеств будущих учителей математики.

Для того, чтобы приобретаемые студентами гуманитарные знания стали профессиональными знаниями учителя математики, нужно рассматривать их в контексте будущей профессиональной деятельности, т.е. учитывать особенности их использования в профессиональной деятельности учителя математики. Поэтому профессионально-историческая подготовка, рассматриваемая как подсистема профессиональной подготовки учителя математики, предполагает ориентацию предметов гуманитарного цикла с учетом специфики образовательной области математика.

Под профессионально-исторической подготовкой учителя математики мы понимаем процесс и результат формирования готовности учителя к практическому применению комплекса исторических компетенций в своей профессиональной деятельности, которые осуществляются посредством овладения совокупностью специальных знаний, умений, навыков и качеств.

Разрабатываемая нами *система профессионально-исторической подготовки учителя математики* включает в себя следующие компоненты: 1) историко-математический; 2) историко-методический; 3) историко-педагогический; 4) историко-философский; 5) культурно-исторический; 6) регионально-исторический. Полноценное функционирование этой системы обеспечивается интеграционными связями ее структурных компонентов.

В настоящее время некоторые из перечисленных компонентов уже существуют и самостоятельно развиваются во многих педагогических вузах. Но их содержание и его акценты часто разрозненны, в результате чего становятся возможными не только повторы в фактологическом материале, но и дезориентация студентов в объективной оценке роли того или иного исторического объекта. Рассмотрение перечисленных компонентов в качестве структурных в системе профессионально-исторической подготовки учителя математики позволит достигнуть коммулятивного эффекта от их использования.

В качестве *системообразующих компонентов профессионально-исторической подготовки учителя математики* мы выделяем историко-математический, историко-методический и регионально-исторический компоненты. Рассмотрим каждый из них подробнее.

Историко-математический компонент профессионально-исторической подготовки учителя математики представлен на каждом из уровней педагогического образования университетского типа. До четвертого курса он носит латентный характер и является органичной частью специальных математических курсов за счет включения в их содержание элементов истории и методологии математики. На этом этапе его основными характеристиками являются дискретность и интродисциплинарность. Для бакалавров он реализуется на четвертом году обучения в виде единого курса "История математики". С учетом специфики подготовки бакалавров математического образования, этот курс призван дать целостное представление об основных периодах развития математики и сформировать систему историко-математических знаний с акцентом на историю школьных разделов математики. Основными его характеристиками на данном этапе являются фундаментальность, целостность, непрерывность. Для магистров математического образования историко-математический компонент получает развитие во-первых, за счет интегративного курса "История математики и математического образования в России"; во-вторых, за счет системы специализированных историко-математических курсов, посвященных отдельным математическим дисциплинам и реализующим возможную специализацию. Так, в Педагогическом институте Южного Федерального университета под руководством доктора педагогических наук, проф. Т.С. Поляковой разработаны следующие курсы: "История избранных разделов высшей геометрии" (Ю.В. Романов), "История избранных разделов алгебры и теории чисел" (Е.А. Галдина), "Историко-методологические проблемы основ математического анализа" (Е.В. Белик) и др. За счет перечисленных спецкурсов на уровне магистратуры историко-математический компонент профессиональной подготовки учителя математики носит вариативный характер. Для соискателей и аспирантов развитие историко-математического компонента идет в рамках 1) подготовки к кандидатскому экзамену по истории и философии математики; 2) разработки истории отдельных математических проблем, непосредственно связанных с тематикой исследования. Для этого уровня характерен явно выраженный индивидуализированный характер реализации историко-математического компонента.

Историко-методический компонент профессионально-исторической подготовки учителя математики в качестве самостоятельного образовательного объекта был инициирован в докторской диссертации Т.С. Поляковой (1998 г.). Предложенная ею модель историко-методической подготовки учителя математики с учетом многоуровневости университетского педагогического образования в основном соответствует разрабатываемой нами системе. Кратко опишем структуру историко-методической подготовки. На уровне бакалавриата она носит латентный характер и представлена дискретными включениями, сопровождающими курс методики обучения конкретной школьной дисциплине. На уровне магистратуры она функционирует в форме интегрированного курса "История математики и математического образования в России" в рамках второй его части "История отечественного школьного математического образования", поэтому ее основными характеристиками является целостность, непрерывность и массовость. В плане реализации научно-исследовательского потенциала магистранта предусмотрена индивидуализированная работа, включающая элементы историко-методических исследований, необходимых при подготовке магистерских диссертаций по проблемам дидактики и частных методик. Эта работа получает свое дальнейшее развитие на этапе постмагистерской подготовки (соискательство, аспирантура).

Регионально-исторический компонент профессионально-исторической подготовки учителя математики целостно реализуется, в нашем случае, за счет элективного курса "История математики и математического образования на Дону" для магистров математического образования. Фрагментарное привлечение регионального материала происходит в рамках изучения перечисленных выше курсов историко-профессиональной направленности.

Помимо предметно-ориентированных и общеобразовательных целей, все три системообразующих компонента несут в себе мощный воспитательный потенциал, способствуют формированию системы мировоззрения учителя математики, его математической и педагогико-методической культуры, формируют и развивают профессионально-историческое мышление учителя математики, развивают его творческую активность.

Качественное и актуальное современное профессиональное образование, а тем более его будущее уже не мыслимы без обеспечения его компьютерной поддержки и разработки методики его использования. Иногда без компьютерной поддержки оно даже вряд ли становится возможным в принципе. Многие ли библиотеки педагогических вузов могут предоставить для массовой учебно-исследовательской работы студентов уникальные материалы, связанные с историей отечественной математики и математического образования, например XVIII в.? Использование электронных хрестоматий, предоставляющих возможность ознакомиться с этой информацией в ее первозданном виде на цифровом носителе, в значительной степени решает данную проблему.

В качестве одного из современных средств формирования и развития каждого из системообразующих компонентов нами разработаны и используются соответствующие электронные учебно-дидактические комплексы. Они реализованы на CD в виде локальной версии web-сайта и имеют примерно одинаковую структуру. Опишем содержание основных разделов электронных учебно-дидактических комплексов.

Раздел ***“Учебник”*** содержит в себе *развернутые планы лекций* по предмету. К каждой лекции средствами PowerPoint разработана *компьютерная презентация*, содержащая основные теоретические положения темы лекции в сопровождении большого количества иллюстративного материала и вставок видеофрагментов.

Раздел ***“Самостоятельная работа”*** содержит *развернутые планы семинарских занятий*, сопровождающиеся сформулированными заданиями для общей и индивидуальной подготовки, а также вопросами для самоконтроля. Каждый пункт плана семинарского занятия содержит ссылки на соответствующую ему литературу, рекомендуемую для самостоятельного ознакомления. В этом же разделе выделена web-страница, содержащая *темы рефератов* и ссылки на рекомендуемую для их написания литературу. На отдельной странице находятся задания для творческой самостоятельной *работы с первоисточниками*.

В разделе ***“Контроль”*** содержится *программа зачета или экзамена* по курсу и *компьютерный тест* для самостоятельного определения уровня подготовленности к отчетности по данному курсу. Тест создан на базе свободно распространяемой программы ADTester и предусматривает ответы на вопросы пяти типов: 1) с выбором одного ответа; 2) с множественным выбором ответа; 3) с самостоятельным вводом ответа; 4) предусматривающий восстановление соответствия и 5) предусматривающий восстановление порядка действий. Для курса “История математики” данный раздел учебно-дидактического комплекса содержит еще историко-математические задачи для контрольной работы.

Раздел ***“Литература к курсу”*** содержит в себе тексты ставших библиографической редкостью фундаментальных работ по изучаемым дисциплинам, необходимых для подготовки к семинарам, написания рефератов и работы с первоисточниками. Цифровые версии книг представляют собой файлы DjVu формата и снабжены электронным оглавлением.

Одним из достоинств применения учебно-дидактических комплексов такого рода является предоставление равных возможностей профессионально-исторической подготовки для студентов стационарной и заочной формы обучения за счет четкой организации и содержательной обеспеченности их самостоятельной работы.

На каждом из уровней педагогического образования университетского типа предлагается использовать адекватные его целям и задачам формы проведения занятий. Так, например, для магистров в качестве нестандартных форм организации практических занятий мы используем 1) работу с первоисточниками учебно-методической литературы по математике XVIII-нач. XX вв. в фонде редких книг и книжных ценностей Донской государственной публичной библиотеки; 2) мемориальные экскурсии по памятным местам, связанным с биографией и творческой деятельностью выдающихся земляков-математиков, внесших существенный вклад в развитие математического образования на Дону, и др.

Библиографический список

1. *Белик Е.В.* Возможности реконструирования содержания математических дисциплин в контексте общей культуры //Математическое образование и наука в педвузах на современном этапе: Сб. науч. тр. ПГПУ, 2006. С. 150-157.
2. *Гушель Р.З.* Система работы по истории математики со студентами математических специальностей // Психолого-педагогические основы преподавания математических дисциплин в пединституте. Обучение и развитие. Ульяновск: УГПИ, 1991. С. 36.
3. *Дробышев Ю.А.* Пути формирования историко-математических знаний о методах решения алгебраических уравнений. Калуга: Изд-во КГПУ им. К.Э. Циолковского, 2003.
4. Инновационная политика в сфере высшего образования. Факторы, влияющие на эффективность инновационной политики // Портал “Сравнительная образовательная политика” http://comparative.edu.ru
5. *Полякова Т.С.* Историко-методическая подготовка учителя математики: Методический аппарат. Ростов-н/Д: Изд-во РГПУ, 1997.
6. *Полякова Т.С., Пырков В.Е.* Методическое наследие выдающихся отечественных математиков как источник создания современных методических систем обучения математике // Математика в современном мире: Материалы II Российской научно-практической конференции. 8-9 октября 2004 г., Калуга / Под ред. Ю.А. Дробышева. Калуга: Изд-во КГПУ, 2004. С. 62-70.
7. *Полякова Т.С., Романов Ю.В.* Структура и содержание историко-математической подготовки будущих учителей математики в педуниверситете // Материалы VI межвузовской научно-практической конференции “Проблемы педагогической инноватики”. – Тобольск: Изд-во ТГПИ, 2001. Ч. 4. С. 38-40.
8. *Ясинский В.Б.* Каким должен быть электронный учебник в формате HTML // Электронный журнал “Исследовано в России” http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2001/011.pdf

Сведения об авторах

1. Асланов Рамиз Муталлим Оглы – доктор педагогических наук, профессор МПГУ, Москва.
2. Барабанов Олег Олегович – кандидат физико-математических наук, доцент Государственной технологической академии, Ковров.
3. Башкин Михаил Анатольевич – кандидат физико-математических наук, доцент ЯрГУ, Ярославль.
4. Бережной Евгений Иванович – доктор физико-математических наук, профессор ЯрГУ, Ярославль.
5. Большаков Юрий Иванович – кандидат физико-математических наук, доцент ЯрГУ, Ярославль.
6. Бородин Александр Васильевич – кандидат физико-математических наук, доцент ЯГТУ, Ярославль.
7. Бусев Василий Михайлович – аспирант ИИЕТ РАН, Москва.
8. Вавилов Валерий Васильевич – кандидат физико-математических наук, доцент Специализированного учебно-научного центра МГУ, Москва.
9. Ваганян Виктор Оганесович – кандидат педагогических наук, доцент РУДН, Москва.
10. Гарипова Екатерина Сагитовна – аспирантка ЯрГУ, Ярославль.
11. Головина Ольга Владимировна – аспирантка Калужского государственного педагогического университета, Калуга.
12. Гушель Ревекка Залмановна – ст. преподаватель ЯГПУ, Ярославль.
13. Демидов Сергей Сергеевич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий сектором ИИЕТ РАН, Москва.
14. Довбыш Сергей Александрович – кандидат физико-математических наук, доцент МГУ, Москва.
15. Дубинина Екатерина Сергеевна – ст. преподаватель Ставропольского государственного университета, Ставрополь.
16. Епифанова Нина Михайловна – кандидат педагогических наук, доцент ЯГПУ, Ярославль.
17. Жагорина Людмила Петровна – аспирантка ПГПУ, Псков.
18. Жохов Аркадий Львович – доктор педагогических наук, профессор ЯГПУ, Ярославль.
19. Заводчиков Михаил Александрович – ассистент ЯГПУ, Ярославль.

20. Зайниев Роберт Махмутович – кандидат физико-математических наук, доцент Камской государственной инженерно-экономической академии.
21. Зверкина Галина Александровна – кандидат физико-математических наук, доцент Московского государственного университета путей сообщения, Москва.
22. Зубова Елена Анатольевна – ассистент Тюменского института нефти и газа, Тюмень.
23. Зубова Инна Каримовна – кандидат физико-математических наук, доцент Оренбургского государственного университета, Оренбург.
24. Ивашев-Мусатов Олег Сергеевич – кандидат физико-математических наук, доцент МГУ, Москва.
25. Игнатьев Юрий Анатольевич – кандидат физико-математических наук, доцент РУДН, Москва.
26. Казарин Лев Сергеевич – доктор физико-математических наук, профессор ЯрГУ, Ярославль.
27. Капустина Татьяна Васильевна – доктор педагогических наук, профессор Елабужского государственного педагогического университета, Елабуга.
28. Козырев Сергей Борисович – кандидат физико-математических наук, доцент Костромского государственного университета, Кострома.
29. Колоскова Мария Евгеньевна – аспирантка МГУ, Москва.
30. Корикова Тамара Михайловна – кандидат педагогических наук, доцент ЯГПУ, Ярославль.
31. Косенко Ирина Ивановна – кандидат педагогических наук, доцент МПГУ, Москва.
32. Красников Павел Марэнович – аспирант МГУ, Москва.
33. Кузичев Александр Сергеевич – кандидат физико-математических наук, доцент МГУ, Москва.
34. Кулешов Сергей Алексеевич – доктор физико-математических наук, профессор Военно-Воздушной Академии, Москва.
35. Куприкова Ольга Николаевна – кандидат педагогических наук, ассистент Смоленского государственного педагогического университета, Смоленск.
36. Кучугурова Нина Дмитриевна – доктор педагогических наук, профессор Российского государственного социального университета, Москва.
37. Латышева Любовь Павловна – кандидат педагогических наук, доцент Пермского государственного педагогического университета, Пермь.

38. Лебедев Алексей Викторович – кандидат физико-математических наук, доцент МГУ, Москва.
39. Локшин Борис Яковлевич – кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Специализированного учебно-научного центра МГУ, Москва.
40. Лунгу Константин Никитович – кандидат физико-математических наук, доцент МОПУ, Москва.
41. Майорова Наталья Львовна – кандидат педагогических наук, доцент ЯрГУ, Ярославль.
42. Максименко Наталья Вадимовна – кандидат физико-математических наук, доцент РУДН, Москва.
43. Михеев Виктор Иванович – доктор педагогических наук, профессор РУДН, Москва.
44. Одинец Владимир Петрович – доктор физико-математических наук, профессор РГПУ, С.-Петербург.
45. Осташков Владимир Николаевич – кандидат физико-математических наук, доцент Тюменского института нефти и газа, Тюмень.
46. Перфильев Алексей Анатольевич – кандидат физико-математических наук, доцент, Москва.
47. Пырков Вячеслав Евгеньевич – кандидат педагогических наук, ст. преподаватель Южного Федерального университета, Ростов-на-Дону.
48. Регеда Елена Анатольевна – учитель средней школы, Калуга.
49. Рожанская Мариам Михайловна – доктор исторических наук, профессор, ведущий научный сотрудник ИИЕТ РАН, Москва.
50. Розанова Светлана Алексеевна – доктор педагогических наук, профессор МИРЭА, Москва.
51. Ройтенберг Владимир Шлеймович – кандидат физико-математических наук, доцент ЯГТУ, Ярославль.
52. Салмина Мария Алексеевна – кандидат педагогических наук, старший научный сотрудник института механики МГУ, Москва.
53. Секованов Валерий Сергеевич – доктор педагогических наук, профессор Костромского государственного университета, Кострома.
54. Симонов Рэм Александрович – доктор исторических наук, профессор Российской государственной Академии печати, Москва.
55. Синчуков Александр Валерьевич – кандидат педагогических наук, доцент МПГУ, Москва.
56. Степанов Дмитрий Анатольевич – МГТУ, Москва.
57. Суслова Ирина Васильевна – ст. преподаватель ЯГПУ, Ярославль.

58. Тарамова Хэди Сумановна – кандидат физико-математических наук, доцент Чеченского государственного педагогического университета, Грозный.
59. Тестов Владимир Афанасьевич – доктор педагогических наук, профессор Вологодского государственного педагогического университета, Вологда.
60. Тимофеева Ирина Леонидовна – доктор педагогических наук, профессор МПГУ, Москва.
61. Уваров Артем Дмитриевич – ассистент ЯГПУ, Ярославль.
62. Фирстов Виктор Егорович – кандидат физико-математических наук, доцент Саратовского государственного университета, Саратов.
63. Хамди Нибаль – РУДН, Москва.
64. Цыкина Светлана Викторовна – ассистент Тамбовского государственного университета, Тамбов.
65. Шарнина Светлана Николаевна – магистр Пермского государственного педагогического университета, Пермь.
66. Штерн Александр Савельевич – кандидат физико-математических наук, доцент Омского государственного университета, Омск.
67. Шухман Александр Евгеньевич – кандидат педагогических наук, доцент Оренбургского государственного университета, Оренбург.
68. Шухман Елена Владимировна – аспирантка Оренбургского государственного педагогического университета, Оренбург.
69. Юлина Наталья Анатольевна – ст. преподаватель Государственной технологической академии, Ковров.

Научное издание

Труды пятых Колмогоровских чтений

Редактор *Л.К.Шереметьева*
Компьютерная подготовка оригинал-макета *Т.Л.Трошиной*

Подписано в печать 15.10.2007. Формат 60×92 1/16.
Уч.-изд. л. 24. Усл. печ. л. 25. Заказ 1255. Тираж 100.

Издательство Ярославского государственного педагогического университета имени К.Д.Ушинского (ЯГПУ)
150000, Ярославль, Республиканская ул., 108

Типография ЯГПУ
150000, Ярославль, Которосльная наб., 44
Тел.: (4852) 72-64-05, 32-98-69