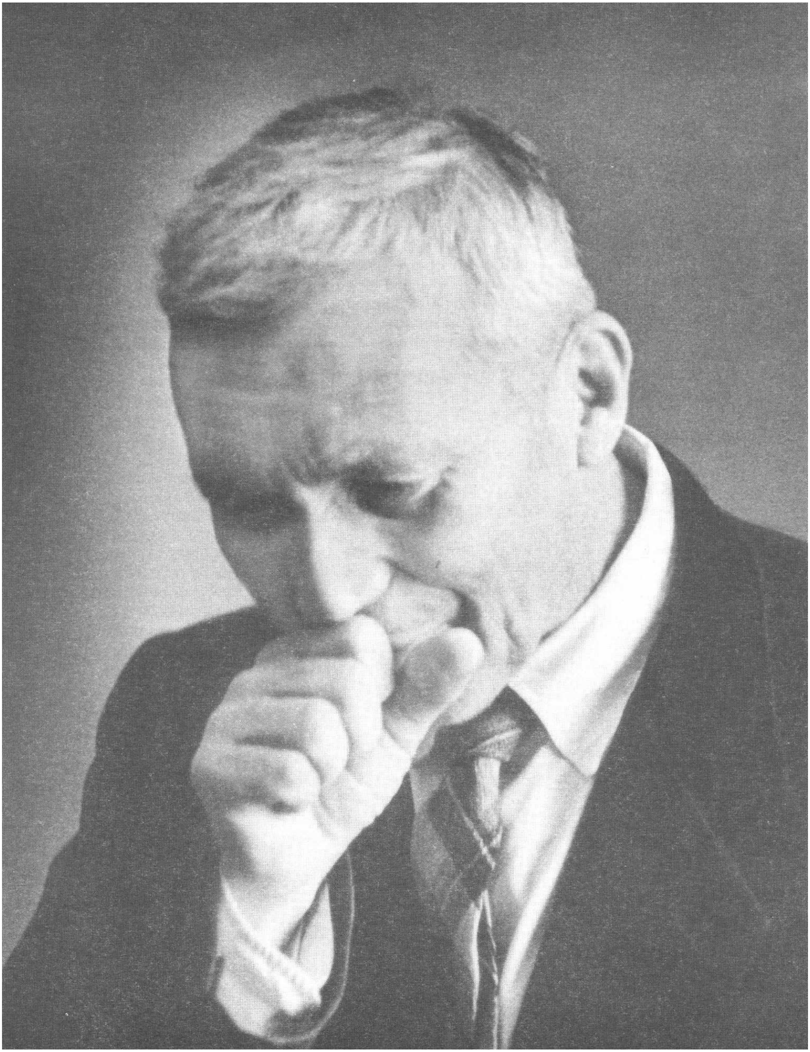


Андрей Николаевич Колмогоров (1903–1987)

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ЯРОСЛАВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ К.Д. УШИНСКОГО

ТРУДЫ

ЧЕТВЕРТЫХ КОЛМОГОРОВСКИХ ЧТЕНИЙ

Ярославль
2006

УДК 51; 51:372.8; 51(091)
ББК 22.1 я434
Т 782

Труды четвертых Колмогоровских чтений. Ярославль:
Т 782 Изд-во ЯГПУ, 2006. 395 с.

ISBN 5–87555–340–5

Начиная с юбилея (100-летия со дня рождения академика А.Н. Колмогорова, 2003 г.), на родине выдающегося математика XX столетия в Ярославле проводятся традиционные Колмогоровские чтения.

Настоящий сборник статей четвертых Колмогоровских чтений (2006 г.) так или иначе отражает интересы А.Н. Колмогорова во многих областях математики, теории и методики обучения математике, истории математики и математического образования. Воспоминания учеников и коллег А.Н.Колмогорова содержат новые факты его биографии и аспекты научно-методических интересов ученого.

Настоящий сборник будет полезен преподавателям школ и вузов, студентам и всем, кто интересуется математикой, методикой ее преподавания и историей российского образования.

УДК 51; 51:372.8; 51(091)
ББК 22.1 я434

ISBN 5–87555–340–5

Оглавление

Глава 1

Пленарные доклады: А.Н. Колмогоров и математика XX столетия

Повесть о двух городах

С.С. Демидов

1. Две столицы. Основанный в 1703 году Петром Великим Санкт-Петербург обозначил для России направление вектора дальнейшего культурного развития – западно-европейского. Новая столица противопоставила себя старой – Москве, ставшей символом ушедшего Московского царства, старого уклада жизни, старых культурных традиций. Северный для Руси, западный по ориентации Петербург, не заслуживший в народной традиции ни одного лестного эпитета, противопоставил себя столице старой, именовавшейся в народе Москвой-матушкой. Две столицы с самого начала оказались в культурной оппозиции. При этом Петербург всегда ощущал себя городом европейским – не говоря уже о самом своем облике, о настроениях в области литературы и искусства, здесь всегда более отчетливо проявлялись прозападные религиозные, философские и политические устремления. Здесь царил дух совсем иной, чем в златоглавой, с ее спокойным размеренным бытом, с ее подчеркнутой русскостью, православием, большей, чем в северной столице, преданностью престолу. Разумеется, мы говорим здесь о настроениях доминирующих, ибо в обеих столицах обнаруживался достаточно широкий их спектр. Это противостояние проходит через всю историю русской культурной и общественной жизни XVIII – XX веков (сохраняется она и сегодня), время от времени проявляясь резко, например, в виде знаменитого бегства Н.В. Гоголя в конце его жизни из Петербурга в Москву. Напряжение, созданное этой оппозицией, в значительной мере определило основные пути развития русской культуры, в частности науки, в том числе математики.

Надо заметить, что математика в том смысле, который вкладывался в этот термин в Новое время, появилась в России достаточно поздно – в результате петровских реформ[1]. В 1724 году Петр Великий утвердил

[1] Математическую культуру, существовавшую в допетровской Руси, следует характеризовать как средневековую математическую культуру (об этом см. , например, [12]).

проект положения об Академии, а в августе 1725 состоялось первое ее собрание.

2. Саженец приживается. Высаженный на болотистую петербургскую почву росток новой европейской науки на удивление быстро прижился и стал давать первые побеги. Приглашенные с Запада первые академики Петербургской академии наук начали развивать науку на берегах Невы.

Первым академикам было вменено в обязанность готовить национальные научные кадры. Особенно успешной на педагогическом поприще оказалась деятельность Л. Эйлера. Из числа его учеников появились и первые академики в области точных наук, русские по происхождению. Это С.К. Котельников, С.Я. Румовский, М.Е. Головин. И хотя среди них не было ученых первого ранга, их роль в истории российской культуры невозможно переоценить. Активные деятели преобразований в области народного просвещения первых лет царствования Александра I, ученики и последователи Л. Эйлера организовали в стране превосходную систему математического образования, функционирование которой очень быстро начало давать замечательные результаты. Одним из таких результатов стало появление российских математиков мирового уровня – Н.И. Лобачевского и М.В. Остроградского.

К концу 20-х годов центрами математической активности в России стали Санкт-Петербург и Казань. В Петербурге ее степень определяла Императорская Академия наук. Ведущими фигурами здесь выступали М.В. Остроградский и В.Я. Буняковский. В Казани действовал Н.И. Лобачевский. Москва же в математическом отношении являла собой глубокую провинцию.

3. Москва пробуждается. Московский университет, основанный в 1755 году, – старейший в России. Однако математика в XVIII – первых десятилетиях XIX века преподавалась там плохо. Во всем, что касалось точных наук, Москва, как мы уже говорили, представляла собою глубокую провинцию, не шедшую ни в какое сравнение с Петербургом или Казанью. Ситуация начала меняться в 30-е годы, и связано это было с деятельностью двух выдающихся профессоров – Н.Е. Зернова (1804–1862) и Н.Д. Брашмана (1796–1866).

Благодаря их усилиям, преподавание математики в Московском университете было поднято на чрезвычайно высокий уровень. Результатом их деятельности стало появление плеяды замечательных математиков, определивших судьбу развития математических исследований в России во второй половине XIX – начале XX века. Вот некоторые из них:

О.И. Сомов (1815–1876; выпускник 1835 года), А.Ю. Давидов (1823–1886, выпускник 1849 года), Н.В. Бугаев (1837–1903, выпускник 1859 года), наконец, крупнейший русский математик второй половины XIX века П.Л. Чебышев (1821–1894, выпускник 1841 года).

В 1864 году в Москве было основано одно из старейших математических обществ мира – Московское математическое общество. Его первым президентом стал Н.Д. Брашман, а вице-президентом – А.Ю. Давидов (см. [3]). "По своему значению, – писал известный русский историк математики А.П. Юшкевич [12. С. 317], – (для развития математики в России – С.Д.) Московское математическое общество уступало только Академии наук". Одним из его членов-учредителей выступил П.Л. Чебышев. Сам он в это время уже был членом Петербургской академии наук и проживал в Петербурге, где вокруг него сложилась одна из самых знаменитых математических школ XIX – начала XX веков – школа, известная в истории как школа П.Л. Чебышева.

4. Школа П.Л. Чебышева. В истории математики П.Л. Чебышев известен выдающимися результатами в теории вероятностей, теории распределения простых чисел, теории диофантовых приближений и теории интегрирования алгебраических функций. Результаты эти получили международное признание. Выдающийся педагог, Чебышев создал замечательную школу, получившую известность достижениями в области теории вероятностей (А.А. Марков, А.М. Ляпунов), теории чисел (А.Н. Коркин, Е.И. Золотарев, А.А. Марков, Г.Ф. Вороной), конструктивной теории функций (Е.И. Золотарев, А.А. Марков, В.А. Марков), математической физики и аналитической механики (А.М. Ляпунов, В.А. Стеклов, Н.М. Гюнтер). Для исследований этой школы характерны ярко выраженный прикладной характер (исключением служит разве лишь теория чисел – область, традиционная для петербуржцев со времен Эйлера), постоянное стремление к строгому и одновременно эффективному решению математических задач, к построению алгоритма, позволяющего доводить решение задачи либо до точного числового ответа, либо до пригодного приближенного решения, стремление к простоте и элементарности используемых средств. Такая направленность деятельности школы определяла известное недоверие к новомодным направлениям западной математики (в частности, новаторские идеи Б. Римана оценивались как математический декаданс), к новым веяниям в математике. При этом общее осмысление математики и ее места в мире носило позитивистский характер. "Мы решаем конкретные задачи, конкретными строгими методами (строгость понималась в смысле возможно точного установления пределов погрешностей используемых методов) и никакого философского тумана (скажем, в стиле Г. Кантора) мы не потерпим".

Свое крайнее выражение позиции петербургской школы нашли у А.А. Маркова, ставшего после смерти учителя фактическим ее лидером. Свойственные ему антирелигиозность, либеральные прозападные устремления, антимонархизм на время стали доминирующими в школе настроениями.

5. Московская философско-математическая школа. Совсем иные настроения царили в математических кругах первопрестольной. Прежде всего в Москве был совершенно иной, как мы уже сказали выше, интеллектуальный климат. В отличие от устремленной на Запад северной столицы, Москва была более консервативна, более православна, более привержена монархизму. Идеологическое и культурное противостояние двух столиц нашло свое выражение и в математике – во взаимоотношениях московского и петербургского математических сообществ.

Пожалуй, самым ярким выразителем настроений москвичей стал наиболее влиятельный московский математик конца XIX – начала XX века Н.В. Бугаев (1837–1903). Уже в ранние годы он увлекся философией. Начав с модного в те годы позитивизма, он в 80-е годы эволюционировал в идеалиста-лейбницианца, автора оригинальной философской системы – "эволюционная монадология". Особая роль в его построениях принадлежала математике, которую он рассматривал как теорию функций по преимуществу. При этом он делал акцент на теории разрывных функций, считая, что в будущей математике и математическом естествознании именно такие функции будут иметь наиболее важное значение. И если раньше центральным объектом математики были очень гладкие аналитические функции, а базирующееся на их основе "аналитическое мировоззрение" было детерминистическим, то новая математика – математика разрывных функций – позволит, считал Н.В. Бугаев, построить новое научное мировоззрение, преодолевающее ограниченность старых детерминистических воззрений [1]. Идеи Н.В. Бугаева были с интересом восприняты русскими философами и получили дальнейшее развитие, например, у П.А. Флоренского (см. [4]).

Сам Н.В. Бугаев и его ученики пытались строить теорию разрывных функций, взяв в качестве отправной точки теорию теоретико-числовых функций. Это (как мы сегодня понимаем, тупиковое) направление было названо самим Бугаевым аритмологией.

Аритмология, тесно связанная с работами Бугаева и его школы по теории чисел, далеко не исчерпывала математическую тематику москвичей, группировавшихся вокруг Московского университета и функционировавшего при нем Московского математического общества. Успешнее всего в Москве развивались два направления – дифференциальная геометрия и прикладная математика. Родоначальником исследований в Москве в первом из указанных направлений стал скромный учитель московской немецкой гимназии К. М. Петерсон (1828–1881). Его работы, публиковавшиеся преимущественно в "Математическом сборнике" по-русски, довольно поздно стали известны на Западе. Но уже в начале XX века Московская школа дифференциальной геометрии (Б.К. Млодзеевский, Д.Ф. Егоров и др.) и ее центральная тематика (проблема "изгибания на главном основании") получила признание на Западе. Заметим, что геометрические изыскания москвичей не ограничивались дифференциальной геометрией – они успешно работали также в области проективной геометрии. К исследованиям по дифференциальной геометрии примыкали также работы Д.Ф. Егорова по геометрической теории дифференциальных уравнений с частными производными, действительная значимость которых обнаружилась лишь в последние десятилетия.

Вторым из наиболее успешно разрабатываемых в Москве направлений исследований стала прикладная математика, представленная работами Н.Е. Жуковского и его учеников (С.А. Чаплыгина и др.) (см. [12]). Москвичам принадлежали также интересные результаты по теории функций комплексного переменного и теории вероятностей (П.А. Некрасов; см. [8, 9, 10]).

Для работ москвичей характерны интерес к прикладной математике (культивировавшийся со времен Н.Д. Брашмана), приверженность к ясным геометрическим конструкциям, склонность, как мы уже говорили, к философии. Последнее дало основание назвать школу, сформировавшуюся в Москве в последней трети XIX – начале XX столетия, "философско-математической" (см. [7]).

6. Противостояние двух столиц. Петербуржцы с неодобрением наблюдали и за настроениями, царившими в Москве, и за тематикой проводимых москвичами исследований. В результате сложились конфронтационные взаимоотношения, зачастую приводившие к открытым столкновениям. Первой такой крупной баталией стали дебаты по поводу результатов В.Г. Имшенецкого 1887–1891 гг. о методах нахождении дробно-рациональных интегралов линейных дифференциальных уравнений, все коэффициенты которых и свободный член – целые рациональные функции (см. [12. С. 433]). Москвичи (К.А. Андреев, П.А. Некрасов и др.) поддержали петербургского академика, с яростной критикой которого выступили его петербургские коллеги (А.А. Марков, А.Н. Коркин, К.А. Поссе). Другое серьезное столкновение произошло из-за классических результатов С.В. Ковалевской об интегрировании уравнений движения твердого тела вокруг неподвижной точки, в 1888 г. удостоенных премии Академии наук Франции. А.А. Марков обнаружил пробелы в ее доказательствах и выступил с резкими нападками. В ее защиту выступили московские математики П.А. Некрасов, Г.Г. Аппельрот, попытавшиеся заполнить эти пробелы (см. [6]). Наконец, широкую известность получили столкновения А.А. Маркова с П.А. Некрасовым относительно центральной предельной теоремы (см. [10]). Особенно усилилась эта конфронтация после смерти П.Л. Чебышева, связь которого с Alma mater не прерывалась до конца его жизни.

Течение математической жизни Петербурга определялась деятельностью математического класса Императорской академии наук, учреждения элитарного, возвышающегося над повседневной деятельностью российского математического сообщества, заметный рост которого начался в период реформ Александра I и который чрезвычайно активизировался в эпоху реформ Александра II. Пожалуй, ведущую роль в этом процессе взяла на себя Москва с ее старейшим российским университетом и Московским математическим обществом при нем. Особую роль при этом стал играть издаваемый обществом “Математический сборник”, ставший ведущим математическим журналом национального математического сообщества (см. [2]).

7. Ответ Москвы. Разумеется молодых честолюбивых москвичей никак не устраивало положение математиков, если даже в Европе и признанных, то уж во всяком случае не в качестве представителей направлений, определявших лицо современной математики. И они искали тематику, которая позволила бы им выйти на передовые рубежи тогдашней науки. В то же время эта тематика должна была лежать в стороне от главных интересов петербуржцев: оказаться у них в учениках также не хотелось. И этой тематикой стала теория функций действительного переменного – новое направление, разработку которого в 90-е годы начали на базе теории множеств Г. Кантора французские математики Э. Борель, Р. Бэр и А. Лебег.

Выбор, сделанный москвичами, был совершенно естественным, прежде всего потому, что стараниями Н.В. Бугаева в Москве царил повышенный интерес к изучению разрывных функций и молодые московские математики быстро распознали в новых французских разработках чаемую ими теорию. К тому же теологические одеяния некоторых рассуждений Г. Кантора не вызвали у них чувства отторжения как, например, у Э. Бореля, убиравшего эти рассуждения из французских переводов Г. Кантора, или как у петербуржцев, которые вообще не желали рассматривать теорию множеств Г. Кантора как математику, записывая ее по ведомству теологии.

Датой рождения Московской школы теории функций действительного переменного принято считать 1911 год – год опубликования в Comptes Rendus Академии наук Франции заметки Д.Ф. Егорова "О последовательности измеримых функций", содержащей известную носящую теперь его имя теорему. А в следующем году в том же журнале появилась заметка его ученика Н.Н. Лузина о так называемом C-свойстве измеримых функций. Далее события развивались с головокружительной быстротой. В 1915 году появилась знаменитая диссертация Н.Н. Лузина "Интеграл и тригонометрический ряд", к 1917 году сформировалось первое поколение лузинских учеников, из которых назовем Д.Е. Меньшова, М.Я. Суслина, А.Я. Хинчина, П.С. Александрова, результаты которых сразу получили европейскую известность. А открытие в 1916 году М.Я. Суслиным A-множеств сразу выдвинуло московскую школу на самый передний край математики того времени.

Интересна реакция на эти события лидеров Петербургской школы. Рассказывают, что В.А. Стеклов, демонстрируя собеседникам названную выше диссертацию Н.Н. Лузина, задавал им риторический вопрос: "Вы посмотрите, здесь же нет формул, разве это математика?" А другой петербургский академик, Я.В. Успенский, дал в письме, написанном в 1926 году академику А.Н. Крылову, такую оценку математического творчества Н.Н. Лузина: "Относительно Лузина я знаю, что он хороший специалист в своей области (теория множеств и связанная с нею канторовско-лебеговская дребедень), блестящий профессор, создавший в Москве школу своих учеников и своим влиянием упразднивший настоящую математику в Москве" (цит. по статье [5. С. 193]).

8. Москва – столица СССР. В 1918 году советское правительство переехало в Москву, что автоматически повлекло за собой изменение статуса московского математического сообщества. Хотя в обстановке общей разрухи, вызванной гражданской войной и остановкой нормального функционирования институтов власти, московские математики этого не ощутили. Невозможность найти в послереволюционной Москве пропитание, а зимою и топливо вынудила многих московских математиков покинуть столицу. Но скоро ситуация начала выправляться. В 1921 году закончилась гражданская война и стала постепенно налаживаться мирная жизнь. В 1922 году в Московском университете был организован Научно-исследовательский институт математики и механики, директором которого с 1923 года стал Д.Ф. Егоров. Он приложил все усилия, чтобы математическая жизнь в Москве вошла в нормальное русло: стабилизировался учебный процесс у студентов, была налажена работа аспирантуры, регулярно проводились заседания Московского математического общества, наконец, возобновлено издание "Математического сборника", который начал печатать статьи не только на русском, но и на основных европейских языках – немецком, французском, итальянском и английском. В итоге журнал стал международным. На его страницах во второй половине 20-х – в 30-е годы охотно печатали свои статьи крупнейшие математики Запада.

Исследовательская активность в Москве стремительно возрастала. Еще в 1920 году в город вернулся Н.Н. Лузин, и возобновились заседания его семинара, на которых вместе с преподавателями В.В. Степановым, П.С. Александровым и П.С. Урысоном принимали участие студенты Н.К. Бари, В.И. Гливенко, Л.Г. Шнирельман. Затем к ним присоединился А.Н. Колмогоров, в конце 1921 года – М.А. Лаврентьев, в 1922 – Л.В. Келдыш, Е.А. Леонтович, П.С. Новиков и Г.А. Селиверстов. Вернулись в Москву и включились в работу "старики" – И.И. Привалов, Д.Е. Меньшов и А.Я. Хинчин.

Уже в начале 20-х годов в школе Егорова-Лузина отчетливо проявилась тенденция к расширению тематики исследований. Отправной точкой для работы в новых направлениях стали собственные разработки школы в области метрической теории функций, которая оказывала определяющее влияние и на используемые в новых областях методы.

Еще в годы революции сам Н.Н. Лузин и его ученики (И.И. Привалов, В.В. Голубев, Д.Е. Меньшов, А.Я. Хинчин) начали исследования в области теории функций комплексного переменного; в 1925 году к ним присоединился М.А. Лаврентьев, в свою очередь воспитавший такого ученика, как М.В. Келдыш.

П.С. Урысон и П.С. Александров приступили к исследованиям, заложившим основы советской топологической школы. В 1925 году под руководством П.С. Александрова начал работать топологический семинар, из которого вышли такие знаменитые впоследствии математики, как А.Н. Тихонов и Л.С. Понтрягин.

В 1923 году А.Я. Хинчин получил первые важные результаты по теории вероятностей. В конце 20-х – начале 30-х годов этими вопросами начал заниматься крупнейший русский математик XX века А.Н. Колмогоров, в 1933 году предложивший свою знаменитую аксиоматику теории – так начиналась знаменитая Московская школа теории вероятностей.

В те же годы А.Я. Хинчин приступил к исследованиям в области теории чисел. В 1925/26 учебном году он организовал семинар по теории чисел, в котором участвовали молодые тогда А.О. Гельфонд и Л.Г. Шнирельман.

В конце 20-х – начале 30-х годов Л.А. Люстерник, Л.Г. Шнирельман, эмигрировавший из Германии А.И. Плеснер и А.Н. Колмогоров заложили основы советской школы функционального анализа, из которой вышел один из крупнейших современных математиков – И.М. Гельфанд.

В.В. Степанов вел работу в области теории дифференциальных уравнений. В конце 20-х к нему присоединились молодые И.Г. Петровский и В.В. Немыцкий.

Д.Ф. Егоров и В.А. Костицын вели работу в области теории интегральных уравнений. Позднее к ним присоединился И.Г. Петровский.

И.И. Жегалкин, А.Н. Колмогоров и впоследствии П.С. Новиков занимались проблемами математической логики.

Если к этому добавить и такие традиционные для Москвы области исследований, как дифференциальная геометрия (Д.Ф. Егоров, С.П. Фиников), обогащенная трудами приехавшего из Одессы В.Ф. Кагана, прикладная математика (С.А. Чаплыгин) и завезенная из Киева учеником Д.А. Граве О.Ю. Шмидтом новая алгебра, к занятиям которой позднее присоединились А.Г. Курош и А.И. Мальцев, исследования приехавшего из Киева известного специалиста в области теории вероятностей и математической статистики Е.Е. Слуцкого, а также учесть значимость полученных москвичами в этих направлениях результатов, то можно сказать, что Москва к началу 30-х годов превратилась в один из ведущих в мире математических центров.

Когда жизнь московского математического сообщества начала налаживаться, его лидеры (прежде всего сам Д.Ф. Егоров) начали работу по возрождению математического сообщества в масштабах страны. Этому в значительной степени способствовало возрождение в 1924 году "Математического сборника", теперь уже как общесоюзного математического журнала. Они начали работу по подготовке издания Полного собрания сочинений Н.И. Лобачевского. Наконец, они подготовили и в 1927 году успешно провели Всероссийский математический съезд, который ознаменовал возрождение регулярной деятельности математического сообщества в масштабах всей страны – на нем было принято решение о проведении в 1930 году Первого всесоюзного съезда математиков в Харькове и создан оргкомитет для его подготовки (см. [11]).

9. Математический Ленинград 20-х годов. Петербургское (оно же Петроградское, оно же Ленинградское – северная столица дважды на протяжении десятилетия сменила свое имя) математическое сообщество значительно тяжелее пережило события революции и последовавшей за ней Гражданской войны. Во-первых, в этот тяжелый период оно понесло невосполнимые потери: ушли из жизни А.М. Ляпунов, А.А. Марков (впрочем, подобное происходило и в Москве, хотя, пожалуй, не в таких катастрофических масштабах). Во-вторых, город перестал быть столицей и, следовательно, основным притягательным центром интеллектуальной жизни страны. В-третьих, математическая жизнь Петербурга традиционно организовывалась вокруг Академии наук, положение которой в первые послереволюционные годы оставалось неопределенным. В-четвертых, ряд ведущих петербургских математиков (академик Я.В. Успенский, молодые ученики В.А. Стеклова Я.Д. Тамаркин, А.С. Безикович и др.) эмигрировали на Запад.

Тем не менее по окончании гражданской войны жизнь начала постепенно налаживаться. В 1921 году был основан Физико-математический институт Академии наук, директором которого стал В.А. Стеклов. Дальнейшее формирование отныне уже ленинградского математического сообщества происходило вокруг математического отдела этого института, которому в 1927 году (после смерти В.А. Стеклова) было присвоено его имя[1], и математических кафедр университета. Наиболее важными направлениями исследований ленинградских математиков стали математическая физика (В.А. Стеклов, Н.М. Гюнтер, В.И. Смирнов), теория дифференциальных уравнений обыкновенных (А.Н. Крылов, В.И. Смирнов, И.А. Лаппо-Данилевский) и с частными производными (В.А. Стеклов, Н.М. Гюнтер), теория чисел (И.И. Иванов, Б.Н. Делоне, И.М. Виноградов, Н.С. Кошляков, Р.О. Кузьмин, Б.А. Венков), математические методы в механике (А.Н. Крылов, Н.Е. Кочин). В конце 20-х годов начали свою творческую деятельность С.Л. Соболев и Л.В. Канторович.

К концу 20-х годов Ленинград уже восстановил статус одного из важнейших европейских математических центров. В нем продолжались активные изыскания в традиционных петербургских направлениях – теории чисел и математической физике. Несколько ослабленные позиции в теории вероятностей и конструктивной теории функций были укреплены переездом в 1933 году из Харькова близкого по духу чебышевской школе С.Н. Бернштейна. Математики среднего поколения

[1] Из этого института в 1934 году выделился математический институт им. В.А. Стеклова – один из ведущих математических институтов XX века.

и молодые математики начали ломать стереотипы, укоренившиеся в северной столице, – появились интересные исследования в области теории функций действительного переменного (Г.М. Фихтенгольц), теории функций комплексного переменного (В.И. Смирнов), алгебры (Б.Н. Делоне), зарождался интерес к функциональному анализу (С.Л. Соболев) и теории функций действительного переменного (Л.В. Канторович). Однако лидирующие позиции в национальном математическом сообществе перешли к Москве, предубеждения к которой у ленинградской математической элиты сохранялись еще долго.

10. "Брак" по принуждению. К началу 30-х годов жизнь национального математического сообщества вошла в устойчивое русло. И хотя главные ее события происходили в Москве и Ленинграде, ее успешное развитие наблюдалось и в других научных центрах. Активные математические исследования велись на Украине – в Киеве, Харькове и Одессе. Существенную роль здесь играла созданная в 1918 году Всеукраинская академия наук в Киеве. Успешно работали ученики Д.А. Граве (М.Ф. Кравчук, Н.И. Ахиезер, М.Г. Крейн). Делала свои первые шаги по теории нелинейных колебаний школа Н.М. Крылова-Н.Н. Боголюбова. В Харькове продолжал (до 1933 года) свои выдающиеся работы по теории дифференциальных уравнений, конструктивной теории функций и теории вероятностей С.Н. Бернштейн. Публиковал результаты своих геометрических исследований Д.М. Синцов. Из других математических центров страны выделим Казань, где традиционно развивались исследования по геометрии и куда в 1928 году переехал из Одессы выдающийся алгебраист Н.Г. Чеботарев. Новым пунктом на математической карте страны стал Тифлис (Г.Н. Николадзе, А.М. Размадзе, Н.И. Мусхелишвили), где в 1918 году был открыт университет.

Дальнейший путь организации математических исследований в стране был определен планами И.В. Сталина по строительству советской науки. Согласно им, головной ее организацией ("штабом советской науки") должна была стать Академия наук СССР. Это положение было закреплено новым уставом Академии, принятым в 1927 году. Основной задачей Академии провозглашалась задача социалистического строительства. В состав реформируемой Академии был включен ряд членов партии. Один из них, избранный в 1929 году "старый большевик" Г.М. Кржижановский, стал ее вице-президентом. Ему и было вменено в обязанность надзирать за Академией. Разумеется, "штаб советской науки" должен был находиться у вождя "под рукой". Поэтому в 1934 году президиум Академии был переведен в Москву. Следом был переведен и ряд ведущих институтов. Среди них – Математический институт им. В.А. Стеклова. В Москву переехали С.Н. Бернштейн, Б.Н. Делоне, И.М. Виноградов, Н.Е. Кочин, С.Л. Соболев.

В результате две ведущие национальные школы – Московская и Петербургская – Ленинградская – оказались в одном городе. Волею вождя находившиеся в конфронтации школы были вынуждены жить вместе. Итог такого "общежития" оказался чрезвычайно плодотворным. Произошел синтез двух, хотя и имевших общие источники, но в то же время идеологически различных школ. Произошел синтез традиции петербургской школы математической физики (С.Л. Соболев) и московской, восходящей к К.М. Петерсону традиции исследований в области теории дифференциальных уравнений с частными производными (И.Г. Петровский), московского (А.Н. Колмогоров, А.И. Плеснер) и ленинградского (С.Л. Соболев) направлений в функциональном анализе, чебышевской линии развития теории вероятностей, наследником которой выступал С.Н. Бернштейн, с московской, выросшей в недрах метрической теории функций (А.Я. Хинчин, А.Н. Колмогоров), встретились две линии развития теории чисел – чебышевская (И.М. Виноградов) и новая московская (А.Я. Хинчин, А.О. Гельфонд, Л.Г. Шнирельман), две линии развития алгебраических исследований, восходящих к киевской школе Д.А. Граве – московская (О.Ю. Шмидт, А.Г. Курош) и ленинградская (Б.Н. Делоне). Возник мощнейший исследовательский потенциал, объединенный вокруг Математического института им. В.А. Стеклова. механико-математического факультета МГУ и Московского математического общества.

Так в середине 30-х годов родилась советская математическая школа – одна из наиболее влиятельных в XX веке. Ей предстояла долгая и непростая жизнь. В конце 30-х годов начал опускаться железный занавес. Советские математики надолго оказались в относительной изоляции. Однако внутренний потенциал отечественной математической школы оказался настолько мощным, что она и в этой ситуации продолжала активно и успешно развиваться. Из тяжелых лет войны, принесших стране и ее науке неисчислимые потери, она вышла, чрезвычайно расширив свою географию. Эвакуация на Восток ведущих научных и образовательных учреждений привела к организации новых математических центров на Востоке страны – в Заволжье, в Сибири, в Средней Азии и Закавказье.

И когда со смертью И.В. Сталина железный занавес начал подниматься, советская математическая школа открылась миру во всей широте тематического охвата поля математических исследований, в силе и глубине своих результатов. В 1958 году в Париж приехал А.Н. Колмогоров. Это был его первый после длительного перерыва визит во Францию. В течение семестра он читал здесь лекции о своих достижениях и результатах своих учеников, полученных за последние годы. Это были ставшие ныне классическими результаты по теории динамических систем, заложившие основы теории, известной ныне как КАМ-теория (т.е. теория Колмогорова-Арнольда-Мозера), по теории информации, результаты по теории суперпозиции функций (содержавшие только что полученное решение 13-й проблемы Гильберта), по теории приближения функций и теории вероятностей. Эти результаты стали ярким свидетельством творческого силы советской математической школы. Подлинным ее триумфом стал Международный конгресс математиков 1966 года, успешно прошедший в Москве и ставший самым представительным за весь XX век.

Так в феномене советской математической школы, родившейся в результате синтеза Московской и Ленинградской математической школ, завершилась конфронтация математических сообществ двух городов.

Библиографический список

1. *Демидов С.С.* Н.В. Бугаев и возникновение московской школы теории функций действительного переменного // Историко-математические исследования. Вып. 29. 1985. С. 113–124.
2. La revue “Matematicheskii Sbornik” dans les années 1866–1935 / P. Ausejo E., Hormigon M. (Eds.) Messengers of Mathematics: European Mathematical Journals (1800–1946). Zaragoza. 1993. P. 235–256.
3. *Демидов С.С., Токарева Т.А., Тихомиров В.М.* The Moscow mathematical society. P. European Mathematical Society. Newsletter. 2003. Issue 50. P. 17–19; 2004. Issue 51. P. 25–27.
4. *Демидов С.С., Форд Ч.* On the Road to a Unified World View: Priest Pavel Florensky–Theologian, Philosopher and Scientist. P. Koetsier T., Bergmans L. (Eds.) Mathematics and the Divine: A Historical Study. Amsterdam: Elsevier B.V. 2005. P. 595–612.
5. *Ермолаева Н.С.* Новые материалы к биографии Н.Н. Лузина // Историко-математические исследования. Вып. 31. 1989. С. 60–102.
6. *Михайлов Г.К., Степанов С.Я.* К истории задачи о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки в случаях Гесса и Ковалевской и их геометрического моделирования // Историко-математические исследования. 1-я сер. Вып. 28. 1984. С. 223–246.

7. *Некрасов П.А.* Московская философско-математическая школа и ее основатели // Математический сборник. Т. 25. Вып. 1. 1904. С. 1–249.
8. *Petrova S.S., Solov'ev A.D.* The Origin of the Method of Steepest Descent. P. Historia Mathematica. V. 24. 1997. P. 361–375.
9. *Seneta E.* The central limit problem and linear least squares in pre-Revolutionary Russia. The background. P. Math. Sci. V. 9 1984. P. 37–77.
10. *Соловьев А.Д.* П.А. Некрасов и центральная предельная теорема теории вероятностей // Историко-математические исследования. 2-я сер. Вып. 2(37). 1997. С. 9–21.
11. *Токарева Т.А.* Первые съезды отечественных математиков: предыстория и формирование советской математической школы // Историко-математические исследования. 2-я сер. Вып. 6(41). 2001. С. 213–231.
12. *Юшкевич А.П.* История математики в России. М.: Наука. 1968.

Опыт внутривузовской системы оценки качества обучения в университете

А.Г. Луканкин, *Г.Л. Луканкин*

В условиях модернизации системы образования России, в частности, стандартизации образования и сертификации образовательных услуг, происходит перестройка основ и системы высшего педагогического образования. Сегодня уже недостаточно готовить учителей, обладающих предметными знаниями. Изменение структуры и содержания образования, введение профильного обучения в старшей школе, использование современных технологий в школьном образовании, повышение требований к педагогическому сообществу в связи с вхождением России в Болонский процесс настоятельно требуют особого внимания к качеству педагогического образования.

Поэтому в число главных задач каждого высшего педагогического учебного заведения входит создание системы внутривузовской оценки качества обучения, т.е. системы контроля уровня знаний и управления качеством обучения студентов. Европейское образовательное пространство и современное российское общество выдвигают высокие требования к уровню квалификации и компетенции выпускников высших профессиональных учебных заведений, которые могут быть достигнуты лишь при условии научной обоснованности, организационной четкости и контроля качества обучения, всех составляющих процесса профессиональной подготовки специалиста.

Условия, определяющие качество подготовки специалистов в университетах, в частности и в МГОУ, самые разнообразные: кадры, учебная и научно-исследовательская деятельность, международное сотрудничество, ресурсы (материально-техническая база, социально-бытовые условия, финансовое обеспечение) и т.д.

Проблема обеспечения качества профессионального образования – проблема многоаспектная. Как известно, качество образования - это совокупность трех составляющих: обучения, воспитания, развития. Кроме того, это качество содержания образования, качество технологий обучения, качество результатов образования.

Под качеством подготовки специалистов понимается совокупность свойств и характеристик, определяющих готовность специалистов к эффективной профессиональной деятельности, включающей в себя способность к быстрой адаптации в любых профессиональных условиях, владение профессиональными умениями и навыками, умение использовать полученные знания для решения профессиональных задач, способность к восприятию инноваций в образовании и др.

Остановимся на некоторых коцептуальных основах оценки качества обучения студентов. Во-первых, это – фундаментальность обучения. Во-вторых, целевая специализация обучения. В-третьих, наличие творческих навыков и способности к интеграции нововведений. В-четвертых, умение и способность реализации знаний и инновационных проектов в профессиональной деятельности.

Существует мнение, что образовательный процесс нужно рассматривать, четко различая два понятия: качество подготовки студентов и качество самого этого процесса.

Качество знаний оценивается:

– по уровню требований при конкурсном отборе абитуриентов на основе анализа вступительных экзаменационных испытаний и их результатов;

– по уровню требований в ходе текущих аттестаций студентов (в ходе выполнения домашних и семестровых заданий, контрольных и лабораторных работ, сдачи коллоквиумов);

– по уровню требований в ходе промежуточных аттестаций студентов (уровень программ экзаменов по учебным дисциплинам, курсовых работ, результаты сдачи экзаменов);

– по степени усвоения студентами программного материала на основе контрольных опросов по утвержденным фондам контрольных заданий (тестов);

– по результатам итоговых аттестаций выпускников (уровню требований к перечню и содержанию выпускных квалификационных экзаменов, данным анализа тематики выпускных квалификационных работ, их соответствию профилям подготовки, организации и проведению итоговых аттестаций выпускников, ориентации на внешнюю оценку);

– по активности участия в НИРС и УИРС.

Для проведения контроля знаний студентов необходимо не только создать фонды контрольных заданий (тестов), хотя это и первоочередные задачи УМК факультетов, НМС университета, кафедр, но и определить базовые нормативные и правовые основы системы.

При определении характеристик и показателей качества обучения кафедры и факультеты (институты) университета руководствуются нормативно-правовыми документами федерального, регионального и вузовского уровня.

На основе вышеуказанных нормативно-правовых документов большинством кафедр университета разработаны и внедрены в учебный процесс критерии оценок знаний студентов по учебным курсам, требования общего порядка. Кроме того, критерии и требования ГОС ВПО по различным специальностям отдельными кафедрами расшифрованы в конкретных технологиях.

На некоторых факультетах, например, дефектологическом, физико-математическом, технологии и препринимательства, разработаны общие критерии для всех кафедр по контролю качества усвоения учебных дисциплин. При этом основополагающими называются следующие критерии: наличие представлений об изучаемом объекте; возможность выполнения студентом заданий на воспроизведение знаний, повторение информации, операций, действий; способность студента оперировать знаниями и умениями при решении теоретических и практических задач, которые приобретаются при изучении конкретных учебных дисциплин; умение решать типовые задачи, рассмотренные в процессе обучения; способность студента выполнять действия не только с уже изученным алгоритмом, но и с новым содержанием; способность самостоятельно "добывать" знания; способность студента решать специальные творческие задачи научно-исследовательской, профессионально-педагогической деятельности.

На кафедрах университета, как правило, элементами системы контроля и управления качеством подготовки студентов, будущих педагогов, считают следующие: анализ результатов вступительных испытаний (экзаменов) студентов, принятых на первый курс; обсуждение и анализ текущей аттестации и промежуточного контроля обучения студентов младших курсов; анализ результатов зачетно-экзаменационных сессий; отслеживание динамики качества знаний студентов от первого к выпускному курсу.

Кроме того, результативными называют заведующие кафедрами и деканы факультетов такие формы контроля и управления качеством обучения, как групповые обсуждения различного вида студенческих работ, сравнительный анализ подготовленности городских и сельских школьников, мониторинг качества подготовки студентов младших и старших курсов. Эффективны такие методы управления, как обмен опытом оценки и управления качеством обучения на кафедральных методологических, научно-методических семинарах, в рамках УМК факультетов (кафедры математического анализа, высшей алгебры, элементарной математики и методики преподавания математики, теоретической физики, педагогики, основ производства и машиноведения и др.).

Используются и различные формы контроля качества деятельности преподавателей: взаимопосещение коллегами учебных занятий, систематическое посещение занятий заведующими кафедрами с последующим их анализом, проведение "открытых" занятий, анализ подготовленных преподавателями учебно-методических материалов и комплексов, контроль проведения индивидуальной работы со студентами, консультирование по выпускным (дипломным) и курсовым работам.

К сожалению, приходится констатировать, что и в первом, и во втором поколениях государственных образовательных стандартов высшего профессионального образования отсутствуют показатели контроля знаний. Во всех нормативных документах указывается, сколько времени отводится на лекции, семинары, реже на индивидуальную работу, но не на контроль, который необходим не только во время сессий. Нужен и текущий, и промежуточный. Думается, есть необходимость отказаться от оценки качества обучения, в целом образования, только по показателям учебной успеваемости и перейти к комплексу оценок профессионального педагогического образования: качества знаний, умений, навыков, показателей личностного развития, всех тех показателей, что прописаны в квалификационных характеристиках педагогических специальностей и обозначены моделью выпускника вуза.

Что касается контроля знаний, сформированности профессиональных умений и навыков, контроля успеваемости студентов, следует сказать о разработанности специальных программ с указанием требований, критериев оценки, профессиональных характеристик многими кафедрами университета.

На всех факультетах университета формируются определенные системы педагогической диагностики знаний студентов с подразделением на текущий, тематический, промежуточный, итоговый контроль. Функционирование каждого вида педагогического контроля специфично: это и мотивация обучения через опрос, контрольные задания, проверку данных самоконтроля; это и оценка результатов работы студентов над определенной темой или разделом курса; это и подведение итогов на заключительном этапе изучения курса через зачет, экзамен; это и определение квалификации выпускника при сдаче государственных экзаменов и при защите выпускных квалификационных работ. По числу студентов используется индивидуальный, индивидуально-групповой и фронтальный контроль.

Систему контроля на большинстве кафедр университета образуют экзамены, зачеты, межсессионный учет, устные опросы, письменные контрольные работы. Кроме того, семестровые работы, дневниковые записи, коллоквиумы; срезово-комплексные контрольные работы, реферирование; “сюжетно-ролевые игры”, решение “ситуационных задач” в системе текущего контроля; практико-ориентированные задания; подготовка и презентация исследовательских работ, посвященных выдающимся политическим и историческим личностям, известным предпринимателям, мыслителям (например, на факультете истории, политологии и права); задания на пленэрных и педагогических практиках, выставки студенческих работ на кафедрах ИЗО и НР.

Преподавателями, ведущими работу со студентами в институте дистанционного образования, практикуется проведение зачета с использованием письменных тестов, включающих множество заданий. Использование такого рода заданий позволяет сделать контроль достаточно валидным.

У большинства кафедр университета имеется опыт использования не только традиционных, но и новых контрольных мероприятий оценки качества обучения студентов.

К их числу можно отнести проектирование педагогических процессов и их моделирование, защиту индивидуальных творческих работ, защиту коллективных творческих проектов на кафедрах, спартакиады, предметные олимпиады, предметные конкурсы (факультеты – физико-математический, географо-экологический, ИЗО и НР, биолого-химический, физической культуры, русской филологии, педагогический, переводческий, лингвистический); участие студенческих работ в региональных и российских конкурсах и др.

Надо проявлять осторожность в использовании инновационных технологий. Причины самые различные. И все же в университете накоплен определенный опыт их использования при контроле и управлении качеством обучения и мониторинга, например, использование модульно-рейтинговой системы оценки учебных знаний студентов.

Вводимая на некоторых кафедрах рейтинговая система оценки знаний студентов позволяет повысить качество подготовки учителей. Организация непрерывного контроля в течение всего срока изучения дисциплины стимулирует работу студентов в семестре. Своевременное выполнение контрольных мероприятий и получение высокого рейтинга на начальной стадии изучения дисциплины повышает, как правило, интерес студента к предмету. Только при рейтинговой системе контроля возможно получение экзамена-“автомата”.

Рейтинг можно рассматривать не только как способ оценки знаний, умений и навыков, но, как показывает опыт применения рейтинга, он является системой, организующей учебный процесс и активно влияющей на его качество и эффективность. Следует отметить, что в течение семестра студентов необходимо регулярно информировать о текущем рейтинге, который можно повысить, используя дополнительные виды контролируемых работ. К ним относятся участие в научной работе на кафедре, написание реферата, участие в олимпиадах, различного вида творческих конкурсах, научные доклады на конференциях и т.д.

Рейтинговая сумма баллов формируется по результатам трех основных видов контроля: текущего (на занятиях); промежуточного (контрольные мероприятия разных видов и жанров); итогового (зачет или экзамен). Используется также контроль исходного уровня и отсроченный контроль на остаточность знаний.

Опыт применения рейтинга на кафедрах и факультетах позволяет сделать заключение прежде всего о его положительных сторонах.

Во-первых, наблюдается значительное снижение числа пропусков занятий; во-вторых, студенты проявляют более ответственное отношение к своевременной и систематической подготовке к практическим и лабораторным занятиям. Стимулируется познавательная активность студентов, так как отказ от обсуждения темы занятия означает понижение рейтинга. В-третьих, преподаватели отмечают высокую активность реферативной работы. В-четвертых, снижается эмоциональное напряжение у студентов при сдаче экзамена. "Неожиданные" оценки практически исключены, так как доля экзамена в оценке за предмет не превышает 40%.

Таким образом, рейтинг служит развитию и закреплению системного подхода к изучению дисциплины. Это, пожалуй, наиболее важная положительная сторона рейтинга кроме отмеченных выше.

На кафедрах факультетов (физико-математический, географо-экологический, ИЗО и НР) считают рейтинговую систему эффективной в следующем:

– она учитывает текущую успеваемость студента и тем самым значительно активизирует его самостоятельную работу;

– более объективно и точно оценивает знания студента за счет использования 100-балльной шкалы оценок;

– создает основу для дифференцированного подхода к обучению.

Рассматривая рейтинг как метод упорядоченного ранжирования студентов и как способ контроля качества обучения, преподаватели кафедр вышеназванных факультетов формируют сумму баллов по результатам трех основных видов контроля: текущего (на занятиях), промежуточного (контрольные работы), итогового (зачеты или экзамены). Причем каждый вид контроля оценивает различные виды деятельности студентов.

Включение модульно-рейтингового подхода в систему контроля и управления качеством обучения наших студентов требует определения стандартного инструмента измерения, которым является правильно построенный и хорошо составленный тест. Педагогический тест используют значительное количество кафедр университета.

Особое отношение к тестам у преподавателей факультета ИЗО и НР, читающих специальные дисциплины. Ведь здесь статистический подход, лежащий в основе тестирования как средства контроля знаний студентов, входит в противоречие с сутью искусства как вида творчества. В данном случае тесты необходимы как предварительный фильтр.

Тесты по социально-гуманитарным дисциплинам в системе контроля качества профессиональной подготовки педагогов должны быть направлены и на проверку конкретных знаний, и на выявление способностей студентов к ассоциативному, творческому мышлению. Правильно составленные тесты рассчитаны не на механическое воспроизведение тех или иных фактов, а на сотворчество тестируемых. Предполагается, что тестируемый студент должен логически "вычислить" автора той или иной реплики, важной для текста фразы, основываясь на интонации, бытовых биографических реалиях, лексических особенностях, в целом речевой манере персонажа. Целесообразно предлагать для "узнавания" ключевые фразы текста с тем, чтобы в дальнейшем обратиться к ним, проанализировать их концептуальную роль и роль в тексте автора той или иной реплики.

Каким бы специфическим ни был тест по содержанию, по целеполаганию, основным принципом диагностики уровня сформированности знаний и умений студентов методом тестового контроля можно назвать принцип научности конструирования дидактических тестов и точности измерений.

В основу диагностики должна быть положена система тестового контроля как упорядоченная совокупность взаимосвязанных элементов, включающая пропедевтический, тематический, итоговый, тестовый контроль, тест-контроль остаточных знаний.

Пропедевтический контроль. Анализ показывает, что пропедевтическому диагностироваию уделяется недостаточное внимание, зачастую он и совсем упускается, хотя предварительное выявление уровня знаний обученности рассматривается педагогикой как необходимое звено.

Выявление объема начальных знаний студентов по конкретной дисциплине, оценка их в количественном и качественном отношениях, определение их процента от всей учебной программы обеспечивает пропедевтическое диагностирование посредством специально разработанных тестов. Такие тесты должны включать задания, позволяющие выявить ориентацию студентов по основным терминам, понятиям и положениям изучаемой дисциплины, уровень "житейских" знаний и эрудицию в соответствующей области научного знания.

При тематическом контроле тесты используются в режиме контроля и в режиме обучения. В этом случае тестирование позволяет реализовать следующие функции: осуществление обратной связи, диагностирование хода дидактического рейтинга студента, измерение результатов учебного процесса.

Применение тематического тестового контроля выступает как стимул регулярной учебной работы студента в течение всего семестра, а не только перед итоговым контролем.

Итоговый тестовый контроль, осуществляемый после завершения обучения по всему курсу, выступает как элемент общей системы диагностики уровня усвоения знаний и умений студентов, позволяющий систематизировать и обобщить учебный материал. Он организуется как личностно-ориентированный процесс на основе пропедевтического диагностирования и прогнозирования деятельности студентов, предполагая свободу выбора в определении степени сложности тестов.

Тест – контроль остаточных знаний позволяет выявить сформировавшийся и закрепившийся уровень знаний и умений студентов в области конкретного научного знания по истечении определенного срока после завершения изучения какой-либо дисциплины.

Одним из существенных ограничений применения тестирования являются ограничения, накладываемые на ответы. В силу этого анализ способов решения задач и мыслительных операций, которые использует обучаемый, в большинстве случаев оказывается затруднен или вообще невозможен. Это обстоятельство указывает, что тестирование не следует рассматривать как идеальный и единственный метод объективного диагностирования знаний и умений. В ходе обучения тестирование обязательно должно сочетаться с другими формами и методами контроля.

Анализ психолого-педагогической литературы позволил выделить две группы недостатков тестов:

– они не исключают случайного выбора ответов наугад или методом исключения;

– при контроле отсутствует речевой аппарат, что делает невозможным проследить логику рассуждения обучаемого.

Однако и в рамках существующих ограничений диагностирование уровня сформированности знаний и умений обучаемых методом тестирования является наиболее основательным, надежным и объективным.

Банк тестов создан на значительном количестве кафедр университета. На протяжении ряда лет на кафедрах педагогики, физиологии и экологии человека с основами медицинских знаний, иностранного языка, экономической теории, социальных наук и государственного управления, гражданско-правовых дисциплин, уголовно-правовых дисциплин, государственно-правовых дисциплин, ведущих работу в институте дистанционного образования, успешно осуществляется текущий контроль знаний студентов с помощью письменных тестовых заданий, содержащихся в публикациях кафедр. Более того, по ряду курсов вводится самоконтроль знаний на основе специально разработанных электронных программ, содержащих тестовые задания, на основе использования кейс-технологии.

Не все современные методы оценки знаний, получаемых в процессе обучения, отражают реально заложенный уровень профессиональной подготовки учителя, а тем более – качества образования, понимание которого включает не только профессиональные знания, но и характер и уровень образования в целом, культуру, способность самостоятельно найти решение проблемы и многое другое. В связи с этим многими кафедрами используются новые подходы в выражении требований к профессиональной подготовке студентов с учетом всех четырех компонентов содержания образования – знаний, умений (способов деятельности), опыта ценностных отношений и опыта творческой деятельности. Новизна заключается в том, что для определения критериев используются слова, точнее раскрывающие смысл категорий "знать" и "уметь", в частности, "знать-называть", объяснить, уметь-применять, выражать ценностные отношения, различать, сравнивать, использовать и т.д. Такой подход дает основания говорить о комплексном контроле и управлении качеством обучения, систематичности, последовательности и целостности контролирующих процедур.

Все вышесказанное доказывает, что эффективное управление обучением студентов университета невозможно без четко организованной системы контроля, который как органический компонент учебно-воспитательного процесса в вузе выполняет следующие функции:

– контролирующую;

– обучающую, цель которой – систематизация в процессе контроля знаний, профессиональных умений и навыков, их обобщение, логическая группировка, закрепление и совершенствование;

– диагностирующую, для которой первоочередным является определение объективно существующего уровня владения студентами профессиональными навыками, умениями и знаниями на конкретном этапе обучения, выявление положительного/отрицательного результата обучения, пробелов в подготовке, а также трудностей усвоения и эффективности избранной методики обучения;

– корректирующую – установление уровня сформированности развиваемых навыков и умений и их совершенствование путем внесения коррекции в учебный процесс;

– стимулирующую, цель которой – создание положительных мотивов овладения педагогической профессией, повышение интереса к ее освоению;

– воспитывающую, развивающую и дисциплинирующую.

Их реализация в системе контроля и управления качеством обучения обеспечивает развитие умений быстрой концентрации усилий для решения в определенный срок конкретной умственной задачи, сосредоточенности, мобилизации внутренних резервов студента, его самостоятельной мыслительной деятельности, воспитание критического отношения к своему труду, культуры мышления, логики, умений анализировать и обобщать, систематизировать и классифицировать и т.д.

Таким образом, система контроля и управления качеством обучения в нашем университете призвана повысить уровень профессиональной подготовки педагога, требования к которому должны быть обозначены в классификационных характеристиках всех педагогических специальностей.

Инновации интегративного курса стохастики в подготовке учителя математики

В.В. Афанасьев

В новых стандартах для средней (полной) школы введена стохастическая линия. Новая содержательная линия изучения математики призвана сформировать понимание детерминированности и случайности, помочь осознать, что многие законы природы и общества имеют вероятностный характер, реальные явления и процессы описываются вероятностными моделями. Введение нового школьного предмета стохастики, который представляет собой соединение элементов теории вероятностей и математической статистики, предполагает и новые подходы к преподаванию одноименного курса в педагогическом вузе.

Особенностью авторского курса теории вероятностей является применение активных форм изложения предмета с систематическим использованием графов, предложение по трансформации результатов в другие области математики, фундирование школьных математических знаний.

В порядке узаконенного МО РФ эксперимента на физико-математическом факультете Ярославского педуниверситета апробировался следующий материал курса и порядок его рассмотрения:

Семестр I. Комбинаторика.

Семестр II. Случайные события.

Семестр III. Случайные величины.

Семестр IV. Энтропия и информация.

Семестр V. Математическая статистика.

Семестр VI. Элементы теории игр.

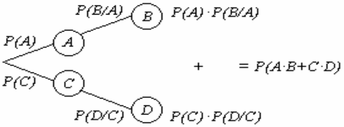
Материал первых пяти семестров изложен в [1], а затем обобщен и по рекомендации УМО по педагогическому образованию недавно издан [2].

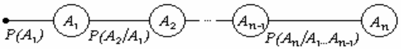
В курсе выделены опорные понятия, дан перечень основных знаний, умений, навыков, методов и алгоритмов, предложены спирали фундирования важнейших вероятностных понятий.

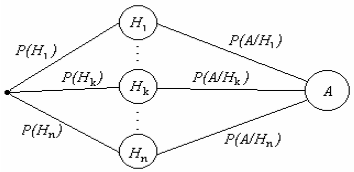
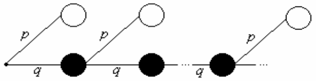
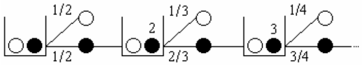
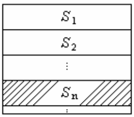
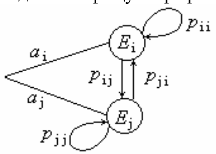
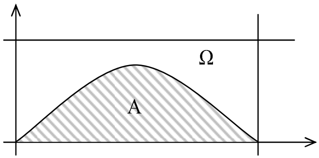
Покажем здесь анонсированный подход на примере рассмотрения двух важнейших разделов курса стохастики, которые могут изучаться и в школьном курсе.

1. Случайные события

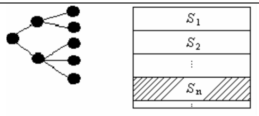
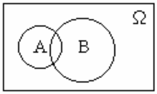
1.1. Опорная таблица

<table>
<tr><th colspan="3">ОСНОВНЫЕ</th></tr>
<tr><th colspan="2">ЗНАНИЯ</th><th rowspan="2">УМЕНИЯ НАВЫКИ</th></tr>
<tr><th>ПОНЯТИЯ</th><th>ТЕОРЕМЫ</th></tr>
<tr><td>Случайные события</td><td>Алгебра событий</td><td>Проводить операции (бинарные и унарную) над событиями</td></tr>
<tr><td>Вероятность случайного события</td><td>Свойства вероятностей</td><td>Строить вероятностное дерево исходов
Использовать элементы комбинаторики</td></tr>
<tr><td>Совместные и несовместные события</td><td>$P(A+B) =$
$P(A)+P(B)-P(A\cdot B)$;
$P(A+B)=P(A)+P(B)$,
если $A\cdot B=0$;
$P(A)+P(\overline{A})=1$</td><td rowspan="2">Выражать одни события через другие, определять их несовместность


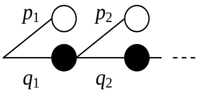
Выяснять независимость событий

</td></tr>
<tr><td>События зависимые и независимые</td><td>$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$;
$P(A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_n)=$
$=P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)\cdot\ldots\cdot$
$\cdot P(A_n/A_1A_2A_{n-1})$</td></tr>
</table>

Полная группа событий	Формула полной вероятности $P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(H_i)\cdot P(A/H_i)$ Формула Байеса $P(H_k/A)=\dfrac{P(H_k)\cdot P(A/H_k)}{P(A)}$	Выдвигать гипотезы, строить граф 
Повторные независимые испытания	Формула Бернулли $P_n(m)=C_n^m p^m q^n$ Наивероятнейшее число $np-q\le m_0\le np+p$ Геометрическая прогрессия Закон больших чисел Локальная и интегральная теоремы Муавра-Лапласа	Различать последовательности испытаний  Находить вероятностное дерево исходов
Повторные зависимые испытания Вероятность как счетно-аддитивная мера	Вероятностные и геометрические способы суммирования некоторых числовых рядов	Строить вероятностные и геометрические модели   $S_1+S_2+\ldots+S_n+\ldots=1$
Цепи Маркова Матрица и граф перехода Вектор начальных вероятностей	$\mathbf{P}^{(n)}=\mathbf{P}^{n}$ $p_{ij}^{(n)}=\sum_{m=1}^{k}p_{im}\cdot p_{mj}^{(n-1)}$ $(n=2,3,\ldots)$	Вычислять вероятность нахождения системы в определенном состоянии Находить матрицу и граф перехода  $\mathbf{P}=(p_{ij}),\ \vec{a}=(a_1,a_2,\ldots,a_k)$
Геометрическая вероятность	$P(A)=0,\ A=\varnothing$ $P(A)=1,\ A=\Omega$ Задача Бюффона	Находить меру геометрической фигуры 

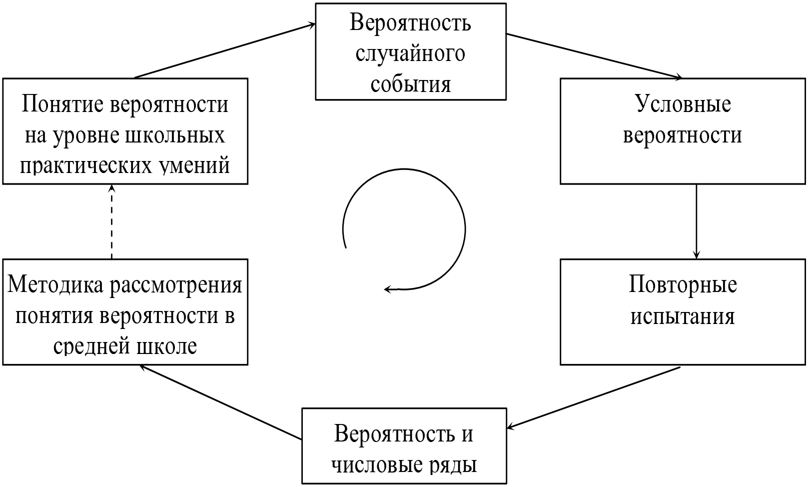
1.2. Методы

Комбинаторный	Геометрический	Логический
$\lvert A\times B\rvert=\lvert A\rvert\cdot\lvert B\rvert$ A_n^m, P_n, C_n^m $\overline{A}_n^m, \overline{C}_n^m, P_{n_1,n_2,\dots n_k}$		 A+B, A·B, $\overline{A}$, A⊂B
Метод математической индукции $n:=n+1$		

1.3. Алгоритмы

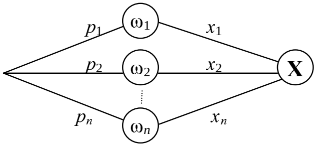
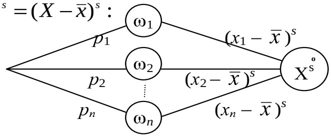
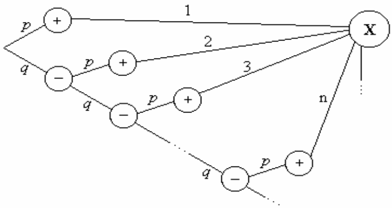
Разложить событие на элементарные составляющие	Определение несовместности и независимости событий	Построение вероятностных графов испытаний
$\{\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_k\}=A\subseteq\Omega$	$A\cdot B=0$ $P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$	

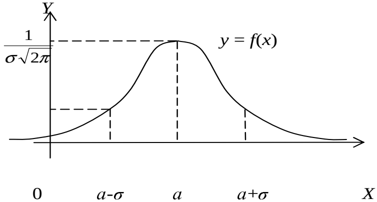
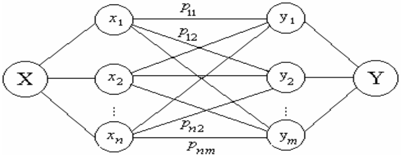
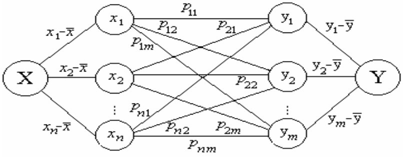
1.4. Спираль фундирования понятия вероятности случайного события

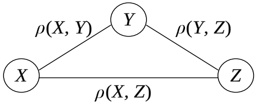


2. Случайные величины

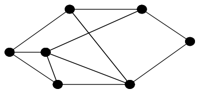
2.1. Опорная таблица

ОСНОВНЫЕ		
ЗНАНИЯ		УМЕНИЯ НАВЫКИ
ПОНЯТИЯ	ТЕОРЕМЫ	
Законы распределения дискретной случайной величины. Интегральная функция Индикатор события	$\sum_i p_i = 1$, где $p_i = P\{X = x_i\}$, $0 \le F(x) \le 1$; $P\{a \le x < b\} = F(b) - F(a)$; $F(x_1) \le F(x_2)$, если $x_1 < x_2$; $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$ $\alpha_s[I_A] = p$	Находить закон распределения. Строить граф распределения 
Характеристики положения: начальные моменты, математическое ожидание, мода, медиана. Центральные моменты: дисперсия, среднее квадратическое отклонение	$M[C] = C$; $M[C \cdot X] = CM[X]$; $M[X \pm Y] = M[X] \pm M[Y]$; $M[X \cdot Y] = M[X] \cdot M[Y]$; X, Y – независимые случайные величины, $D[X] = M[X^2] - M[X]^2$; $D[C] = 0$; $D[C \cdot X] = C^2 D[X]$; $D[X \pm Y] = D[X] + D[Y]$	Находить начальные моменты как полный вес графа распределения X^s. Находить центральные моменты μ_s как полный вес графа распределения случайной величины $\overset{o}{X}{}^s = (X - \bar{x})^s$: 
Равномерное распределение. Биномиальный закон распределения. Распределение Пуассона. Геометрический закон распределения	$M[X] = \frac{n+1}{2}$, $D[X] = \frac{n^2-1}{2}$; $M[X] = np$, $D[X] = npq$; $M[X] = D[X] = \lambda$; $M[X] = \frac{1}{p}$, $D[X] = \frac{q}{p^2}$	Находить характеристики положения и рассеивания 
Дифференциальная функция распределения непрерывной случайной величины $f(x) = F'(x)$	$f(x) \ge 0$, $P\{a < x < b\} = \int_a^b f(x)dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$, $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$	Строить графики функций плотности вероятностей и интегральных функций распределения

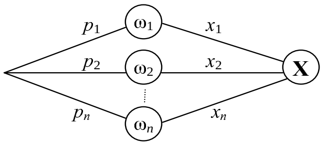
Математическое ожидание $M[X]=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx.$ Дисперсия $D[X]=$ $=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(x-\bar{x})^2 f(x)dx.$ Асимметрия $A_s=\mu_3/\sigma^3$. Эксцесс $E_k=\mu_4/\sigma^4-3$	$M[X]=\frac{a+b}{2}$, $D[X]=\frac{(a+b)^2}{12}$ для равномерного распределения X. $M[X]=\sigma_x=\frac{1}{\lambda}$ для показательного распределения	Вычислять характеристики положения (математическое ожидание, моду, медиану) и характеристики рассеивания (дисперсию, среднее квадратическое отклонение); асимметрию и эксцесс
Нормальный закон распределения $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$	$M[X]=a$, $D[X]=\sigma^2$, $A_s=E_k=0$. Правило трех сигм: $P\{a–3\sigma < a+3\sigma\}\approx 0{,}998$	Находить математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение по графику функции плотности вероятностей: 
Закон распределения дискретной двумерной случайной величины. Интегральная и дифференциальная функции распределения Условные математические ожидания	$f(x, y)\geq 0$; $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=1;$ $f(x,y)=F''_{xy}(x,y);$ $P\{(x,y)\in D\}=$ $=\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy$ $M[Y/x_i]=$ $=\sum\limits_j y_j P\{Y=y_j/X=x_i\};$ $M[Y/x_i]=$ $=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} yf(y/x_i)dy$	Находить закон распределения. Строить граф распределения  Находить законы распределения одномерных составляющих и их числовые характеристики. Строить графики линий регрессии
Начальные и центральные моменты. Ковариация $Cov(X,Y)=$ $=M[(X-\bar{x})(Y-\bar{y})]$. Коэффициент корреляции $\rho(X,Y)=$ $=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D[X]\cdot D[Y]}}$	$\mu_{2,0}=D[X]$; $\mu_{0,2}=D[Y]$; $\mu_{1,1}=Cov(X,Y)$; $Cov(X,Y)=$ $=\sum\limits_i\sum\limits_j(x_i-\bar{x})(y_j-\bar{y})p_{ij};$ $Cov(X,Y)=$ $=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(x_i-\bar{x})(y_j-\bar{y})\times$ $\times f(x,y)dxdy;$ $Cov(X, Y) = 0$, если X, Y не зависимы; $\lvert\rho(X,Y)\rvert\leq 1$; $\lvert\rho(X,Y)\rvert=1$, если $Y = A\cdot X+B$	Находить ковариацию и коэффициент корреляции по ковариационному графу: 

Многомерные случайные величины	$\rho(X, Y) = \rho(Y, X)$	Находить характеристики двумерных составляющих. Строить корреляционный граф 

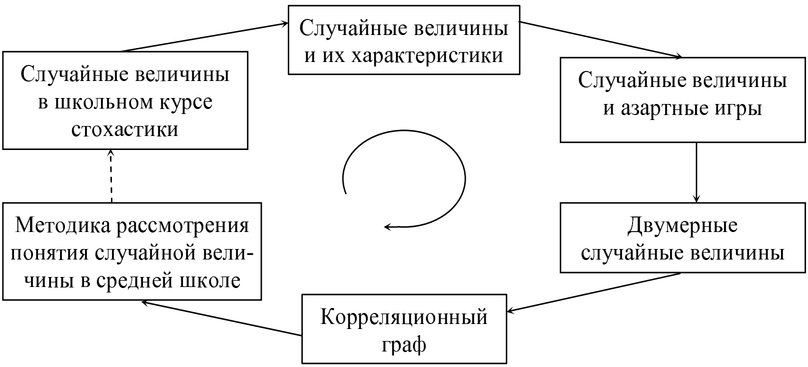
2.2. Методы

Комбинаторный	Аналитический	Графический
Основные правила нахождения различных комбинаций	$M[X]=\sum_{m=0}^{+\infty} m\cdot\frac{\lambda^m}{m!}\cdot e^{-\lambda};$ $D[X]=$ $=D[X_1]+D[X_2]+...+D[X_n]$	

2.3. Алгоритмы

Нахождение законов или функций распределения	Построение графов распределения и их вариаций	Вычисление числовых характеристик
$P\{x = x_i\} = pi$ $F(x) = P\{X < x\}$ $f(x) = F'(x)$		$M[X]$, M_o, M_e, $D[X]$, σ_x, A_s, E_k, $Cov\ (X, Y)$, $\rho\ (X, Y)$

2.4. Спираль фундирования случайных величин



Предложенный материал может быть основой школьной стохастической линии. Его изучение, понимание основных принципов, определений, теорем, методов и алгоритмов, неформальное владение этими принципами имеет большое методологическое и мировоззренческое значение, повышает математическую культуру учащихся. При этом закладываются основы для дальнейшего восприятия теории вероятностей и математической статистики и будущей профессиональной деятельности студентов.

Библиографический список

1. *Афанасьев В.В.* Дидактический модуль курса стохастики (I–V семестры): Учебное пособие. Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 1999–2003. 214 с.
2. *Афанасьев В.В.* Теория вероятностей: Учебное пособие. М.: Изд-во ВЛАДОС, 2006. 352 с.

Факторизация бирациональных отображений рациональных G-поверхностей[1]

В.А. Исковских

В заметке изучаются G-инвариантные бирациональные отображения между неособыми проективными рациональными поверхностями над $\mathbb{C}$, на которых задано действие конечной группы G.

Введение

Понятие рациональной G-поверхности было введено Ю.И. Маниным [1] в связи с изучением следующих двух проблем (см. также [3, 4]):

A) Классификация с точностью до бирациональной эквивалентности рациональных поверхностей S, определенных над совершенным полем $\mathbf{k}$; здесь G – это группа Галуа расширения $K/\mathbf{k}$, над которым поверхность $S_K := S \otimes_{\mathbf{k}} K$ становится бирационально эквивалентной $\mathbb{P}^2_K$.

B) Классификация с точностью до сопряженности конечных подгрупп в группе Кремоны $\mathrm{Cr}(2)$ бирациональных автоморфизмов плоскости $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. Ясно, что $\mathrm{Cr}(2) \simeq \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}\mathbb{C}(x, y)$, где $\mathbb{C}(x, y)$ – поле рациональных функций от двух переменных.

[1]Работа частично поддержана грантом РФФИ (номер 05-01-00353-а), CRDF грант RUMI-2692-MO-05, а также грантом НШ (номер 9968).

Проблема A) называется обычно *арифметической*, а B) – *геометрической*. Обе проблемы изучаются параллельно в контексте G-эквивариантной бирациональной теории рациональных поверхностей. Хотя общие концептуальные теоремы одинаковы, существуют и специфические различия.

Много работ посвящено изучению обоих случаев (см., например, обзоры [2, 6]). Случай A) изучен почти исчерпывающе, итоги подведены в [6].

В этой заметке мы изучаем только геометрический случай по образцу [6]. Основным результатом является классификация элементарных линков (по аналогии с классификацией в арифметическом случае [6]), на которые раскладывается любое G-эквивариантное бирациональное отображение минимальных G-поверхностей (см. теорему ниже). Из-за ограниченности объема заметки мы делаем только наброски доказательств и там, где возможно, указываем ссылки на литературу.

Автор благодарит Оргкомитет “Колмогоровских чтений–IV” за приглашение и предоставленную возможность сделать доклад.

Некоторые общие результаты

Определение 1. Пусть G – конечная группа. G-поверхностью называется пара (S, ρ) (или (S, G)), где S – неособая проективная поверхность над $\mathbb{C}$, а $\rho\colon G \hookrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(S)$ – заданное действие G на S. Стандартным образом определяются G-эквивариантные рациональные отображения G-поверхностей.

Мы изучаем здесь только рациональные G-поверхности. Так как S рациональна, то существует бирациональное отображение $\varphi : S \dashrightarrow \mathbb{P}^2$. Оно определяет вложение группы G в группу Кремоны $\mathrm{Cr}(2)$ по формуле $g \mapsto \varphi \cdot \rho(g) \cdot \varphi^{-1}$, где $g \in G$. Когда φ пробегает всевозможные такие отображения, образы G составляют один класс сопряженности $[G]$ в $\mathrm{Cr}(2)$.

Обратно:

Предложение 1 (см., например, [7]). *Пусть $G \subset \mathrm{Cr}(2)$ – конечная подгруппа. Тогда существует рациональная G-поверхность (S, ρ) и бирациональное отображение $\varphi : S \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ такие, что $\rho(g) = \varphi \cdot g \cdot \varphi^{-1}$, $g \in G$.*

Таким образом, классификация конечных подгрупп в $\mathrm{Cr}(2)$ с точностью до сопряженности эквивалентна классификации рациональных G-поверхностей с точностью до G-эквивариантных бирациональных отображений.

Определение 2. G-поверхность (S,ρ) называется минимальной, если любой G-эквивариантный бирациональный морфизм $(S,\rho)\to(S',\rho')$ является G-изоморфизмом.

Теорема 1 [5, 9]. *Минимальные рациональные G-поверхности исчерпываются следующими:*

$\{\mathcal{D}\}=\{\mathcal{D}_d, d=1,2,...,6,8,9\}$ *– семейство G-поверхностей Дель Пеццо S с G-инвариантной группой Пикара $\mathrm{Pic}(S)^G\simeq\mathbb{Z}$, порожденной $-K_S$ в случаях $d:=K_S^2=1,2,...,6$; $-\frac{1}{2}K_S$ – в случае $d=K_S^2=8$ (квадрика $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1\subset\mathbb{P}^3$), $-\frac{1}{3}K_S$ – в случае $d=K_S^2=9$ (плоскость $\mathbb{P}^2$);*

$\{\mathcal{C}\}=\{\mathcal{C}_d, d=8,6,7,...,1,0,-1,-2,...\}$ *– семейство эквивариантных G-расслоений на коники $\pi:S\to\mathbb{P}^1$ с $d:=K_S^2=8,7,6,...$, и $k=8-d$ вырожденных (приводимых $\mathbb{P}^1\vee\mathbb{P}^1$) слоев; если $d=8$, то вырожденных слоев нет и $\pi:S=\mathbb{F}_N\to\mathbb{P}^1$ – геометрически линейчатая поверхность, $N=0,2,3,...$; при $d\leq 6$ будет $\mathrm{Pic}(S)^G\simeq\mathbb{Z}(-K_S)+\mathbb{Z}(f)$, где f – класс слоя морфизма π; при $d=8$ и $S\not\simeq\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ $\mathrm{Pic}(S)^G$ порожден классом отрицательного сечения и классом слоя.*

Замечание 1. В современной терминологии минимальные рациональные G-поверхности – это двумерные рациональные Мори G-расслоения, т.е. экстремальные G-эквивариантные стягивания $\varphi:S\to C$, где $C=\mathrm{pt}$ – точка для семейства $\{\mathcal{D}\}$ и $C=\mathbb{P}^1$ (с действием G) для семейства $\{\mathcal{C}\}$. Оказывается (см. теорему 2 ниже), всякое G-эквивариантное бирациональное отображение между рациональными Мори G-расслоениями (т.е. минимальными рациональными G-поверхностями) является композицией *элементарных линков*, которые мы классифицируем во втором параграфе. А сейчас приведем их общее определение: они разбиваются на 4 типа.

Определение линков. Имеем:

Линки типа I. Это коммутативные диаграммы вида

$$\begin{array}{ccc} S & \xleftarrow{\sigma} Z = & S' \\ \downarrow\varphi & & \downarrow\varphi' \\ C & \xleftarrow{\alpha} & C', \end{array}$$

где $S\in\{\mathcal{D}\}$, $S'\in\{\mathcal{C}\}$, $\sigma:Z\to S$ – раздутие 0-мерной G-орбиты Gx длины l (например, $S=\mathbb{P}^2$, $\sigma:\mathbb{F}_1\to\mathbb{P}^2$ – раздутие G-неподвижной точки, $\alpha:\mathbb{P}^1\to\mathrm{pt}$ – морфизм в точку).

Линки типа II. Это коммутативные диаграммы вида

$$\begin{array}{ccccc} S & \xleftarrow{\sigma} & Z & \xrightarrow{\sigma'} & S' \\ \downarrow\varphi & & & & \downarrow\varphi' \\ C & & \simeq & & C', \end{array}$$

где σ, σ' – раздутия 0-мерных G-орбит $Gx \subset S$, $Gx' \subset S'$; если $S, S' \in \{\mathcal{D}\}$, тогда $C = C' = \mathrm{pt}$. В другом случае $S, S' \in \{\mathcal{C}\}$, тогда $C = C' = \mathbb{P}^1$.

Линки типа III. Это линки, обратные к линкам типа I.

Линки типа IV. Это диаграммы вида

$$\begin{array}{ccc} S & = & S' \\ \downarrow\varphi & & \downarrow\varphi' \\ C = \mathbb{P}^1 & & C' = \mathbb{P}^1, \end{array}$$

где φ, φ' – различные структуры расслоений на коники. Как правило, переход от одной структуры к другой осуществляется при помощи G-эквивариантной бирегулярной инволюции. Например, если $S = S'$ – поверхность Дель Пеццо степени 1 или 2 со структурой расслоения на коники, то инволюции Бертини, соответственно, Гейзера осуществляют такую перестановку.

Теорема 2 [см. 6, 5]. *Любое G-эквивариантное бирациональное отображение между минимальными рациональными G-поверхностями является композицией линков.*

Классификация линков

Для бирационального G-отображения $\chi : S \dashrightarrow S'$ введем следующие обозначения: $\mathcal{H}'$ – G-эквивариантная линейная система на S' без базисных точек и неподвижных компонент, например, $\mathcal{H}' = |-K_{S'}|$, если $S \in \{\mathcal{D}\}$, или $\mathcal{H}' = |f'|$, если $S' \in \{\mathcal{C}\}$, где f' – класс слоя структурного морфизма $\varphi' \colon S' \to C' \simeq \mathbb{P}^1$; пусть $\mathcal{H} = \mathcal{H}_S = \chi_*^{-1}(\mathcal{H}')$ – собственный прообраз на S линейной системы $\mathcal{H}'$, тогда $\mathcal{H} \subset |-aK_S|$ для некоторого $a \in \frac{1}{6}\mathbb{Z}$, если $S \in \{\mathcal{D}\}$, и $\mathcal{H} \subset |-aK_S + bf|$ для некоторых $a \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Q}$, где f – класс слоя морфизма $\varphi : S \to C \simeq \mathbb{P}^1$, если $S \in \{\mathcal{C}\}$.

Теорема 3 [классификация линков типа I]. *Здесь $S \in \{\mathcal{D}\}$, $S' \in \{\mathcal{C}\}$, $\sigma \colon Z \to S$ – раздутие 0-орбиты Gx длины $l = l(x)$, $\mathcal{H}' = |f'|$, $\mathcal{H} = |-aK_S - r(Gx)|$, где r – кратность $\mathrm{mult}_x\mathcal{H}$ линейной системы $\mathcal{H}$ в точке x (значит, в каждой точке орбиты Gx). Тогда возможны только следующие случаи:*

$d = K_S^2 = 9$:

- $S = \mathbb{P}^2$, $S' = \mathbb{F}^1$, $a = \frac{1}{3}$, $l = 1$, $r = 1$;
- $S = \mathbb{P}^2$, $S' \in \{\mathcal{C}_5\}$, $a = \frac{2}{3}$, $l = 4$, $r = 1$.

$d = K_S^2 = 8$:

- $S = \mathbb{F}_0$, $\mathrm{Pic}(\mathbb{F}_0)^G = \mathbb{Z}$, $a = \frac{1}{2}$, $l = 2$, $r = 1$.

$d = K_S^2 = 4$:

- $S \in \{\mathcal{D}_4\}$, $S' \in \{\mathcal{C}_3\}$ – *кубическая поверхность с одной G-инвариантной прямой E*, $a = 1$, $l = 1$, $r = 2$.

Доказательство (набросок доказательства). Имеем $(-aK_S - r(Gx))^2 = a^2d - r^2l = 0$, $(-aK_S - r(Gx), -K_S) = ad - rl$. Здесь $r > a$ – целое, $l < K_S^2$ – натуральное. Отсюда простым перебором параметров получаем требуемые решения, которые фактически реализуются. Q.e.d.

Теорема 4 (классификация линков типа II: случай $S, S' \in \{\mathcal{D}\}$). *Здесь $S \xleftarrow{\sigma} Z \xrightarrow{\sigma'} S'$ – раздутие 0-орбиты Gx и стягивание в 0-орбиту Gx' на S', собственный прообраз $|-K_{S'}|$ на S – это $\mathcal{H} = |-aK_S - r(Gx)|$, где $r = r(x)$ – кратность $\mathcal{H}$ в орбите Gx, $l = l(Gx)$ – длина орбиты; аналогично, $\mathcal{H}' = |-a'K_{S'} - r'(Gx')|$ – собственный прообраз $|-K_S|$ на S' с $r' = r'(x')$ – кратность $\mathcal{H}'$ в G-орбите Gx', $l' = l'(Gx')$ – длина орбиты Gx'. Возможны только следующие случаи:*

$d = K_S^2 = 9$:

- $S \simeq S' \simeq \mathbb{P}^2$, $a = a' = 17$, $l = l' = 8$, $r = r' = 18$ – *это инволюция Бертини;*
- $S \simeq S' \simeq \mathbb{P}^2$, $a = a' = 8$, $l = l' = 7$, $r = r' = 9$ – *это инволюция Гейзера;*
- $S \simeq S' \simeq \mathbb{P}^2$, $a = a' = 5$, $l = l' = 6$, $r = r' = 6$;
- $S \simeq \mathbb{P}^2$, $S' \in \{\mathcal{D}_5\}$, $a = \frac{5}{3}$, $a' = 3$, $l = 5$, $l' = 1$, $r = 2$, $r' = 6$ – *это проекция из касательной плоскости G-инвариантной точки на поверхности Дель Пеццо степени 5;*
- $S \simeq S' \simeq \mathbb{P}^2$, $a = a' = \frac{2}{3}$, $l = l' = 3$, $r = r' = 1$ – *стандартное квадратичное преобразование;*
- $S \simeq \mathbb{P}^2$, $S' \simeq \mathbb{F}_0$ *с* $\mathrm{Pic}\,(\mathbb{F}_0)^G = \mathbb{Z}$, $a = \frac{4}{3}$, $a' = \frac{3}{2}$, $l = 2$, $l' = 1$, $r = 2$, $r' = 3$ – *стереографическая проекция из G-инвариантной точки на квадрике.*

$d = K_S^2 = 8$:

- $S \simeq S' \simeq \mathbb{F}_0$, $a = a' = 15$, $l = l' = 7$, $r = r' = 16$ – *инволюция Бертини на квадрике;*
- $S \simeq S' \simeq \mathbb{F}_0$, $a = a' = 7$, $l = l' = 6$, $r = r' = 8$ – *инволюция Гейзера на квадрике;*

- $S \simeq \mathbb{F}_0$, $S' \in \{\mathcal{D}_5\}$, $a = \frac{5}{2}$, $a' = 4$, $l = 5$, $l' = 2$, $r = 3$, $r' = 6$;
- $S \simeq S'\mathbb{F}_0$, $a = a' = 3$, $l = l' = 4$, $r = r' = 4$;
- $S \simeq \mathbb{F}_0$, $S' \in \{\mathcal{D}_6\}$, $a = \frac{3}{2}$, $a' = 2$, $l = 3$, $l' = 1$, $r = 2$, $r' = 4$ – *проекция из касательной плоскости к G-инвариантной точке на поверхности Дель Пеццо степени* 6;
- $S \simeq \mathbb{F}_0$, $S' \simeq \mathbb{P}^2$, $a = \frac{3}{2}$, $a' = \frac{4}{3}$, $l = 1$, $l' = 2$, $r = 3$, $r' = 2$ – *линк, обратный соответствующему линку с* $d = 9$.

$d = K_S^2 = 6$:

- $S \simeq S' \in \{\mathcal{D}_6\}$, $a = a' = 11$, $l = l' = 5$, $r = r' = 12$ – *вариант инволюции Бертини;*
- $S \simeq S' \in \{\mathcal{D}_6\}$, $a = a' = 5$, $l = l' = 4$, $r = r' = 6$ – *вариант инволюции Гейзера;*
- $S \simeq S' \in \{\mathcal{D}_6\}$, $a = a' = 3$, $l = l' = 3$, $r = r' = 4$;
- $S \simeq S' \in \{\mathcal{D}_6\}$, $a = a' = 2$, $l = l' = 2$, $r = r' = 3$;
- $S \in \{\mathcal{D}_6\}$, $S' \simeq \mathbb{F}_0$ – *линк, обратный соответствующему линку с* $d = 8$.

$d = K_S^2 = 5$:

- $S \simeq S' \in \{\mathcal{D}_5\}$, $a = a' = 9$, $l = l' = 4$, $r = r' = 10$ – *вариант инволюции Бертини;*
- $S \simeq S' \in \{\mathcal{D}_5\}$, $a = a' = 4$, $l = l' = 3$, $r = r' = 5$ – *вариант инволюции Гейзера;*
- $S \in \{\mathcal{D}_5\}$, $S' \simeq \mathbb{F}_0$ – *линк, обратный соответствующему линку с* $d = 8$;
- $S \in \{\mathcal{D}_5\}$, $S' \simeq \mathbb{P}^2$ – *линк, обратный соответствующему линку с* $d = 9$.

$d = K_S^2 = 4$:

- $S \simeq S'$, $a = a' = 7$, $l = l' = 3$, $r = r' = 8$ – *вариант инволюции Бертини;*
- $S \simeq S'$, $a = a' = 3$, $l = l' = 2$, $r = r' = 4$ – *вариант инволюции Гейзера.*

$d = K_S^2 = 3$:

- $S \simeq S'$, $a = a' = 5$, $l = l' = 2$, $r = r' = 6$ – *вариант инволюции Бертини;*
- $S \simeq S'$, $a = a' = 2$, $l = l' = 1$, $r = r' = 3$ – *вариант инволюции Гейзера.*

$d = K_S^2 = 2$:

- $S \simeq S'$, $a = a' = 3$, $l = l' = 1$, $r = r' = 4$ – *вариант инволюции Бертини.*

Доказательство. Непосредственная проверка.

Теорема 5 (классификация линков типа II – случай $S, S' \in \{\mathcal{C}\}$). *Здесь $S, S' \in \{\mathcal{C}_d, d = 8, 6, 5, \dots, 0, -1, -2, \dots\}$, и каждый линк является элементарным преобразованием, то есть раздутием 0-орбиты Gx на S, точки которой $x, x', x'', \dots$ не лежат на приводимых слоях и никакие две из них не лежат на одном слое, и стягиванием собственных прообразов слоев, на которых лежат точки орбиты Gx, в 0-мерную G-орбиту Gx' на S'. Действие линка задается формулами*

$$|-K_S| \mapsto |-K_{S'} + lf' - 2(Gx')|,$$

$$|f| \mapsto |f'|,$$

где $l = l(Gx) = l(Gx')$ – длина орбиты.

Все линки типа III – это обратные бирациональные G-отображения линков типа I.

Теорема 6 (классификация линков типа IV). *Здесь $S = S' \in \{\mathcal{C}\}$ и линк состоит в переходе от одной структуры расслоения на коники $\varphi\colon S \to C = \mathbb{P}^1$ к другой $\varphi'\colon S \to C' = \mathbb{P}^1$. Здесь всегда $-K_S$ обилен и имеются только следующие возможности:*

$d = K_S^2 = 8$*:*

- $S = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. *Линк является инволюцией (не всегда G-эквивариантной) перестановки множителей.*

$d = K_S^2 = 4$*:*

- $S \in \{\mathcal{C}_4\}$, *если $\varphi\colon S \to \mathbb{P}^1$ – одна из структур расслоения на коники, то другая $\varphi'\colon S \to \mathbb{P}^1$ задается пучком $|-K_S - f|$, где f – слой φ.*

В общем случае переход от одной структуры к другой не задается G-эквивариантной инволюцией.

$d = K_S^2 = 2$*:*

- *линк задается инволюцией Гейзера.*

$d = K_S^2 = 1$*:*

- *линк задается инволюцией Бертини.*

Библиографический список

1. *Манин Ю.И.* Рациональные поверхности над совершенными полями II // Матем. сб. 1967. Т. 72 (114). С. 161–192.

2. *Манин Ю.И., Цфасман М.А.* Рациональные многообразия: алгебра, геометрия, арифметика // УМН. 1986 Т. 1. № 2. С. 43–94.
3. *Исковских В.А.* Рациональные поверхности с пучком рациональных кривых // Матем. сб. 1967. Т. 74 (116). № 4. С. 608–638.
4. *Исковских В.А.* Рациональные поверхности с пучком рациональных кривых и с положительным квадратом канонического класса // Матем. сб. 1970. Т. 83 (125). № 1. С. 90–119.
5. *Исковских В.А.* Минимальные модели рациональных поверхностей над произвольными полями // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1979. Т. 43. № 1. С. 19–43.
6. *Исковских В.А.* Факторизация бирациональных отображений рациональных поверхностей с точки зрения теории Мори // УМН. 1996. Т. 51. № 4. С. 3–79.
7. *De Fernex T., Ein L.* Resolution of indeterminacy of pairs. Algebraic Geometry, M.C. Beltrametti et al. Eds., de Gruyter, 2002. P. 165–177.
8. *Corti A.* Factorizing birational maps of threefolds after sarkisov // J. Algebraic Geom. 1995. V. 4. P. 223–254.
9. *Mori S.* Threefolds whose canonical bunles are not numerically effective // Ann. Math. 1982. V. 115. P. 133–176.

О математических исследованиях учащихся школы имени А.Н. Колмогорова

В.В. Вавилов

Вся система преподавания математических дисциплин в нашей школе нацелена на развитие способностей и умений учащихся решать задачи, ставить новые задачи и на формирование у них исследовательских навыков. Исследовательские темы и новые постановки задач у учащихся, в основном, появляются во время участия их в работе одного из специальных (факультативных) курсов, семинаров, кружков. Иногда они возникают из естественного желания более глубоко разобраться в темах, изучаемых непосредственно на классных уроках. В первую очередь здесь нужны постановки новых, разумных и посильных задач для исследований, а это работа "штучная" и индивидуальная. Такие исследовательские темы может поставить и сформулировать только тот, кто сам активно работает в той или иной научной области или, по крайней мере, следит за научной периодикой. В нашей школе многие из преподавателей математики "сидят на двух стульях", работая, по основному месту работы, на механико-математическом факультете Московском государственного университета им. М.В. Ломоносова, имеют свои собственные научные интересы и руководят работой студентов и аспирантов.

В качестве примеров приведу несколько тем исследований и докладов на конференциях бывших и сегодняшних учащихся школы, выполненных под моим научным руководством в последние годы.

1. ***Т. Лепский*** изучал ряд неожиданных свойств известных трансцендентных чисел. Он уточнил расположение числа е на интервале $((1+1/n)^n; (1+1/n)^{n+1})$ и показал, на основе некоторых элементарных и новых наблюдений, в частности, что при любом n число е расположено во второй четверти этого интервала.

Попытки уточнить расположение числа е во второй четверти указанного интервала при всех n к успеху не привели, но дали хорошие асимптотические (и быстро сходящиеся) формулы для вычисления числа е.

Эта задача появилась с целым рядом других. Так, например, изучался вопрос об уточнении расположении числа π в интервале (p_n, q_n), где p_n и q_n – периметры правильных вписанных и описанных многоугольников в окружность радиуса 1/ 2. Кроме того, была сделана попытка улучшить известные асимптотики для вычисления постоянной Эйлера.

2. ***Д. Туляков*** исследовал конфигурации из 60 паскалевых прямых шестиугольника, вписанного в кривую второго порядка, получив целый ряд совершенно неожиданных и новых результатов. Для их изучения автором были привлечены также и двойственные к возникающим здесь конфигурации. Все начиналось в этом исследовании с занятий на уроках геометрии, где доказывалась теорема о "мистическом шестиугольнике", а в домашней стадии изучения темы некоторыми школьниками были изготовлены на ватманских листах три соответствующих чертежа (для эллипса, параболы и гиперболы). Затем были написаны программы, и такие "картинки" уже рисовал компьютер. Когда их "проанализировали и покрутили" на компьютере, возник целый ряд правдоподобных гипотез, ряд из которых удалось доказать. Позднее выяснилось, что подобными вопросами занимались Штейнер и Киркман, которые выявили ситуации, когда три паскалевых прямых пересекаются в одной точке (при соответствующем выборе шестиугольников с данными вершинами). Ими же было установлено, что эти прямые пересекаются по три в 20 точках типа точек Штейнера и в 40 точках типа точек Киркмана.

Д. Туляковым были разработаны собственные алгоритм и программы по поиску троек Штейнера и Киркмана (что само по себе не является простым упражнением). Довольно сильное впечатление произвел полученный здесь пример тройки шестиугольников и их прямых Паскаля, которые пересекаются в одной точке, а сама эта точка не принадлежала к множеству точек типов Штейнера и Киркмана: такими являются, например, шестиугольники $ABEDFCA$, $ACBEFD$, $ABCDFED$.

3. ***Ю. Гиматов*** успешно справился с одной трудной логической задачей П. Эрдеша. С этой задачей автора (и всех других членов кафедры математики школы) познакомил Ю.В. Нестеренко, вернувшись с математического конгресса во Франции. Долгое время она "блуждала" между школьниками и преподавателями, пока не была не только решена, но и обобщена; был рассмотрен и целый ряд модификаций этой задачи. Здесь предварительно также проводились многочисленные компьютерные эксперименты.

Исходная задача была такова: Математик R сказал математикам P и S: "Я задумал два натуральных числа. Каждое из них больше единицы, а сумма их меньше 100. Математику З я сейчас сообщу – по секрету от S – произведение этих чисел, а математику S я сообщу – по секрету от P – их сумму". Он выполнил обещанное и предложил отгадать задуманные числа. Между P и S произошел следующий диалог (высказывания P мы обозначаем буквой π с индексами, высказывания S – буквой σ):

– Я, пожалуй, не могу сказать, чему равны задуманные числа. $(\pi 1)$

– Я заранее знал, что Вы этого не сможете. $(\sigma 1)$

– А ведь тогда я их знаю. $(\pi 2)$

– А тогда и я их знаю. $(\sigma 2)$

Попробуйте теперь и вы отгадать задуманные числа.

4. ***Ю. Хашин*** исследовал итерационный метод секущих и касательных Ньютона для алгебраических уравнений и получил любопытные дополнения к известной теореме Шарковского. В частности, для уравнений третьей степени им было установлено, что если в методе Ньютона итерационная последовательность $\{X_n\}$, при некотором выборе начального приближения $X_0 = a$, конечна и имеет длину p, то для любого $k > p$ существуют такие значения начальных приближений $X_0 = a$, для которых эта последовательность будет иметь длину k. Изучались также структура и характеристика аттракторов (и возникающие здесь фрактальные множества) для всех корней произвольного алгебраического уравнения, при этом не ограничиваясь только действительными значениями параметра $X_0 = a$.

5. ***А. Хоренко*** в работе "Касательные к параболе" получил конструктивно-новое элементарное доказательство классической теоремы о том, что существует единственная парабола, которая касается сторон четырехугольника или их продолжений.

В другой своей работе он досконально исследовал свойства площадей клеток "косоугольной шахматной доски", установив взаимосвязи с дискретными гармоническими функциями на плоскости (см. определение ниже в работе Д. Веселина). В частности, им было показано, что "клеточки" с наибольшей и наименьшей площадями находятся в противоположных углах такой "шахматной доски". Кроме этого, им были получены интересные пространственные аналоги полученных результатов для призм и пирамид.

В исследовании "Об одном уравнении Эйлера" изучались уравнения вида

$$x^y = y^x, \quad x^{y^x} = y^{x^y}$$

и их естественные обобщения над множеством натуральных чисел. Первое из этих уравнений встречается в записных книжках Л. Эйлера. Показано, в частности, что при $x \neq y$ уравнения такого вида (в том числе, когда справа стоит "башня" из m этажей, а слева – из n этажей) решений в натуральных числах решений не имеют; исключение составляет уравнение Эйлера, для которого пары (2;4) и (4;2) являются его полным множеством решений среди натуральных чисел. Эта тематика получила свое продолжение в работе *"Об итерации экспонент",* в которой было показано, что если $1/\mathrm{e}^{\mathrm{e}} \leq a_n \leq \mathrm{e}^{1/\mathrm{e}}$, то последовательность итераций экспоненциальных функций $y = a_n^x$ равномерно сходится на отрезке [0;e]. Основным следствием этой теоремы является утверждение о сходимости "бесконечной башни" из чисел, удовлетворяющих условию теоремы.

6. ***Д. Веселин*** исследовал свойства дискретных гармонических функций и не только получил ряд аналогов из классической теории потенциала, но и обнаружил эффекты, которых там нет.

В работе для таких функций *установлены теорема Лиувилля и принцип максимума для неограниченных областей* (который отсутствует в "непрерывной теории"). Для доказательства этого принципа пришлось установить сначала аналог принципа Дирихле для дискретных гармонических функций.

7. ***Е. Мычка и И. Седошкин*** в работе *"Правильные многоугольники на мозаиках"* продолжили тему, которая была впервые рассмотрена на одном из геометрических кружков, которым руководил А.Н. Колмо-

горов в 1972 году. Там изучался, в частности, вопрос о числе паркетов из правильных многоугольников. Существует ровно 11 таких паркетов.

Вопрос, который изучался авторами, состоял в том, чтобы выяснить, какие из правильных многоугольников можно расположить на паркете так, чтобы все вершины многоугольника находились в узлах паркета. Ответом на вопрос, выражаясь “житейским” языком, является следующая

Теорема. *На каждой из мозаик можно расположить только те правильные многоугольники, которые видны “невооруженным взглядом”.*

8. ***Н. Однобоков*** в работе *“Пифагоровы штаны”* исследовал одно сегодня довольно забытое доказательство теоремы Пифагора о сумме квадратов катетов прямоугольного треугольника. В этом доказательстве Евклид в своей знаменитой книге “Начала” использовал конструкцию, которая известна как “Пифагоровы штаны” (квадраты, построенные на сторонах треугольника). Автором *для произвольного треугольника* изучается эта конструкция с целью установления широкого спектра ее геометрических свойств и получения для нее самых различных формул и соотношений. В частности, интересной является полученная геометрическая интерпретация величины, *равной разности квадратов катетов прямоугольного треугольника.*

Другая работа Н. Однобокова (“*Окружности и паркеты*”) была посвящена изучению вопроса о возможности так расположить окружность на одном из одиннадцати правильных паркетов (мозаик), чтобы она содержала заданное число узлов паркета. Им было установлено, что *для каждого из таких паркетов, кроме паркета* $4^2 3^3$ *(к каждому узлу которого примыкают два квадрата и три треугольника) и заданного натурального числа n, существуют открытые круги и окружности, содержашие ровно n узлов паркета.* Это исследование потребовало глубокого изучения теории решений уравнений в целых числах второй степени и умения описывать множества всех целочисленных уравнений таких уравнений.

9. ***А. Колчин*** в довольно общей ситуации, близкой к реальной, в работе *“Нетипичные тройки игроков в турнирах”* получил формулы для количества нетипичных троек игроков в теннисных турнирах. При этом тройка игроков i, j, l называется нетипичной, если игрок i выиграл у игрока j, игрок j выиграл у игрока l, а игрок l выиграл у игрока i. Относительно итоговой турнирной таблицы предполагается, что если

игрок i выиграл у игрока j, то $g(j) \geq g(i) - 1$, где $g(\alpha)$ – количество партий, которые выиграл игрок α в этом турнире.

Доказано, что число нетипичных троек в таком турнире из k участников равно

$$k(k-2)(k+2)/24 \quad (\text{для четных } k)$$

и

$$(k(k-1)(k+1)/24) - s/2 \quad (\text{для нечетных } k),$$

где s – некоторое натуральное число.

10. ***А. Бекларян*** в работе "*Красивая жизнь замечательных точек треугольника*" изучил возможные траектории движения замечательных точек треугольника, вершины которого перемещаются по двум пересекающимся окружностям (конструкция однозначно определяется окружностями и выбором одной вершины). Показано, что при перемещении одной вершины такого треугольника по окружности точки пересечения его медиан, высот, серединных перпендикуляров, биссектрис описывают также окружности, а прямая Эйлера имеет центр вращения. Описываемые траектории упомянутых и ряда других точек наглядно демонстрируются в рамках математической компьютерной среды Geometer's Sketchpad (Живая геометрия).

В другой своей прекрасной работе (*"Сравнение площадей четырехугольников"*) А. Бекларян решил одну довольно старую геометрическую задачу о площади "медианного четырехугольника" произвольного выпуклого четырехугольника и затем значительно обобщил полученный результат. Отправной точкой исследований послужила одна древнегреческая задача (так называемый "латинский крест") о том, что отношение площади *медианного* квадрата к площади исходного квадрата равна $1/5$. Напомним, что для выпуклого четырехугольника его α-*медианный* четырехугольник получается после соединения всех вершин исходного четырехугольника с некоторыми точками его сторон следующим образом. Пусть $', B', C', D'$ обозначают такие точки на сторонах CD, DA, AB, BD (соответственно) выпуклого четырехугольника $ABCD$, что $A' : D = DB' : DA = AC' : AB = BD' : DC = \alpha$. Прямые $', DD', CC', DD'$ разбивают исходный четырехугольник на пять четырехугольников и четыре треугольника. Тот из полученных четырехугольников, который расположен строго внутри $ABCD$, и называется его α-*медианным* четырехугольником (при $\alpha = 1/2$ – просто медианный).

Основным содержанием работы является следующая

Теорема. *Пусть S и $S(\alpha)$ обозначают площадь выпуклого четырехугольника и площадь его α-медианного четырехугольника. Тогда*

$$\frac{(1-\alpha)^3}{\alpha^2-\alpha+1} < \frac{S(\alpha)}{S} \leq \frac{(1-\alpha)^2}{1+\alpha^2},$$

и оба неравенства являются точными.

Следствие. *Отношение площадей медианного и исходного четырехугольников содержится в полуинтервале* $(1/6; 1/5]$.

11. ***А. Драль*** изучал вопросы, связанные с оценками высоты цепной дроби рационального числа. Рассмотрим множество чисел вида

$$R_m = \left\{ \frac{p_k}{q_k} : 1 \leq p_k < q_k \leq m, (p_k, q_k) = 1, k = 1, 2, ..., n \right\},$$

где $n = (m^2 - m)/2$ и рациональные числа p_k/q_k перенумерованы каким-либо способом. Пусть α_k обозначает высоту (число этажей) цепной дроби для числа $p_k/q_k \in \mathbf{R}_m$ и

$$T(m) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \alpha_k.$$

Для проведения численных экспериментов и обработки их результатов были составлены соответствующие компьютерные программы. Сделанные наблюдения позволили высказать ряд правдоподобных гипотез, а затем и установить некоторые асимптотические формулы для функции $T(m)$ при $m \to\propto$.

12. ***Е. Осаковская и Е. Филоненко*** в работе "*Правильные многоугольники на решетках*" построили и обосновали алгоритмы нахождения правильных многоугольников с вершинами в *заданных окрестностях* узлов клетчатой бумаги.

Известно, что никакой правильный многоугольник (кроме квадрата) нельзя расположить на целочисленной решетке $\mathbf{Z}^2$ так, чтобы его вершины являлись узлами этой решетки. С другой стороны, если окружить каждый узел целочисленной решетки кружком сколь угодно малого радиуса, то уже найдутся любые правильные многоугольники, все вершины которых расположены в этих малых окрестностях узлов.

Работа посвящена поиску конкретных алгоритмов, которые позволили бы по заданному радиусу указанных кружков построить данный правильный многоугольник. В случае правильного треугольника рассматриваются два алгоритма. Первый из них основан на применении одной теоремы Кронекера и на свойствах цепных дробей, а второй - на свойствах рекуррентных целочисленных последовательностей, тесно связанных с решениями некоторых диофантовых уравнений.

13. ***Е. Падюкова и И. Субботин*** получили довольно неожиданные характеристические свойства медиан и средних линий треугольника в своей работе *"О серединах сторон треугольника"*.

Три медианы треугольника делят его на шесть равновеликих треугольников, а три средние линии - на четыре равных (и равновеликих) треугольника. *А какие из этих свойств являются характеристическими?* Другими словами, верно ли, что если три чевианы треугольника конкурентны (т.е. пересекаются в одной точке G) и делят его на шесть (пять, четыре, три) равновеликих треугольников, то эти чевианы являются медианами (рис. 1)? Верно ли, что если для трех точек, выбранных на сторонах треугольника, отрезки, их соединяющие, делят его на четыре равновеликих треугольника, то эти точки являются серединами сторон треугольника (рис. 2)?

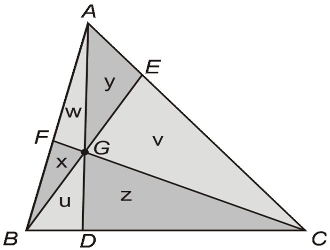


Рис. 1

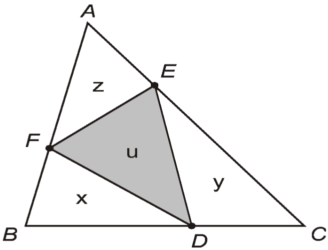


Рис. 2

Теорема 1. *Имеют место следующие два утверждения:*

1^0. *Если площади любых трех треугольников равны, то точка G – центр тяжести треугольника ABC.*

2^0. *Если площади двух треугольников (рис. 1) из разных "трилистников" равны (один "трилистник" состоит из треугольников с площадями x, y, z а другой – из трех оставшихся треугольников), то, по крайней мере, одна из трех чевиан является медианой треугольника ABC.*

Теорема 2. *Если все четыре треугольника на рис. 2 равновелики* ($x = y = z = u$), *то точки* E, F, G *являются серединами сторон треугольника* ABC. *При этом из равенства площадей только трех треугольников, вообще говоря, не следует, что среди отрезков* EF, FD, ED *имеется, по крайней мере, одна средняя линия треугольника* ABC.

14. **С. Воинов и А. Горяева** в трудоемкой работе "Правильные паркеты на сфере" исследовали вопрос о правильных паркетах на сфере (о числе футбольных мячей). Известно, что существует ровно 11 различных разбиений плоскости на правильные многоугольники (*правильных паркетов*) и таких, чтобы около каждого узла паркета было одно и то же расположение многоугольников и любые два многоугольника такого разбиения или имеют общую сторону, или имеют только одну общую вершину, или вообще не пересекаются. *А как обстоит дело на сфере?* Имеет место

Теорема. *На сфере существует* 18 *различных правильных паркетов.*

При доказательстве последовательно разбираются возможные устройства узлов паркета (три, четыре, пять многоугольников в узле); перебор возможностей, в каждом из этих случаев, проводится при помощи формулы Эйлера для выпуклых многогранников. Интересно отметить, что по итогом такого перебора возникает 26 различных наборов значений нужных величин и, как показано, только 18 из них действительно приводят к правильному паркету на сфере.

15. ***Е. Падюкова*** сравнила три классических результата в своей работе *"Об эффективности формул Архимеда, Гюйгенса и Чебышева для приближенного вычисления длины окружности".*

Архимед (287–212 до н.э.) в своей работе "Об измерении круга" для приближенного вычисления числа π использовал приближенные формулы

$$\pi \approx p_n, \quad \pi \approx q_n,$$

где p_n, q_n обозначают периметры правильных многоугольников, вписанных в окружность радиуса 1/ 2 и описанных около нее, соответственно, $n = 3, 4, \ldots$. Используя эти формулы для правильных 96-угольников, он и доказал, что

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70}.$$

Х. Гюйгенс (1629–1695) в 25-летнем возрасте в работе "О величине круга" использовал приближенную формулу

$$\pi \approx \gamma_n, \quad \gamma_n = \frac{2}{3}p_n + \frac{1}{3}q_n.$$

П.Л. Чебышев (1821–1894), изучая траектории движения точек, тесно связанных с шарнирными механизмами (так называемыми кривыми Уатта), в своем широко известном мемуаре 1853 года "Теория механизмов, известных под именем параллелограммов" получил, в частности, следующую приближенную формулу

$$\pi \approx h_n, \quad h_n^2 = 5p_{2n}^2 + \frac{1}{3}(p_{2n}^2 - p_n^2),$$

аналогичную, по своей структуре, приближенной формуле

$$\pi \approx \chi_n, \quad \chi_n = \frac{4}{3}p_{2n} - \frac{1}{3}p_n,$$

которая может быть получена на основе дальнейшего развития геометрических соображений из работы Гюйгенса.

Теорема. *Имеют место следующие соотношения*

$$\lim_{n\to\infty} n^2(\pi - p_n) = C_1, \qquad \lim_{n\to\infty} n^4(\gamma_n - \pi) = C_2;$$
$$\lim_{n\to\infty} n^4(\pi - \chi_n) = C_3, \qquad \lim_{n\to\infty} n^5(\pi - h_n) = C_4,$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 – положительные постоянные и в совокупности не превосходят 3.

16. ***К. Джигарджян*** (Лицей информационных технологий № 1533) в работе *"О распределении корней многочленов"* активно использовал компьютерные программы, которые сам и разрабатывал.

Пусть

$$M_{s+1} = \{z : 1 + z^{k_1} + z^{k_2} + \ldots + z^{k_s} = 0,\ 0 < k_1 < k_2 < \ldots < k_s\},\ s = 1, 2, \ldots$$

обозначает множество нулей всех многочленов указанного вида (при произвольном выборе степеней k_i и фиксированном s). Основной целью работы является изучение множества нулей всех таких многочленов, а именно, множества

$$M = \bigcup_{s=1}^{\infty} M_{s+1}.$$

Другими словами, в работе изучаются свойства множества нулей всех конечных подсумм (начинающихся с 1) степенного ряда

$$1 + z + z^2 + z^3 + \dots$$

В результате работы программы формируется база данных (большого объема), куда заносятся корни многочленов и которая может быть проанализирована и обработана разнообразными способами, в зависимости от поставленных задач.

Качественный анализ созданный базы данных для множеств M_{s+1} позволил высказать ряд гипотез теоретического характера в теории распределения корней многочленов. Некоторые из них получили свое подтверждение. В частности, имеет место следующая

Теорема. *Множество M всюду плотно в кольце* $K = \{z : 1/2 < |z| < 2\}$.

17. ***Ю. Демидова*** изучала расположение нулей производных аналитических в области функций.

Теорема Гаусса утверждает, что корни производной многочлена лежат внутри или на границе многоугольника Ньютона – минимального замкнутого выпуклого многоугольника, содержащего все корни многочлена.

Основной целью работы *"Многоугольник Ньютона и теорема Гаусса"* является распространение этой классической теоремы Гаусса на произвольные области и функции с постоянным модулем на границе этой области. Одним из примеров может служить функция, аналитическая внутри единичного круга и заданная равенством

$$f(z) = \prod_{k=1}^{n} \frac{z - a_k}{1 - \overline{a_k} z}.$$

Под конформной прямой в области G понимаются те кривые, которые при конформном отображении области G на произвольный круг переходят в дуги окружностей, ортогональных к границе этого круга. При этом через всякие две точки области G проходит ровно одна такая прямая, а также – через точку области проходит ровно одна конформная прямая по заданному направлению. Множество M из области G называется конформно-выпуклым относительно данной области, если отрезок конформной прямой, соединяющий две точки множества M, целиком принадлежит множеству M. Многоугольником Ньютона функции

$f(z)$, ассоциированным с областью G, назовем наименьший конформно-выпуклый многоугольник (сторонами которого являются отрезки конформных прямых), содержащий все нули функции $f(z)$.

Имеет место следующая

Теорема. *Пусть функция $f(z)$ аналитична внутри области G и на ее границе ∂G. Тогда, если на границе ∂G функция $f(z)$ принимает значения, постоянные по модулю, то все нули производной $f'(z)$ содержатся в многоугольнике Ньютона этой функции, ассоциированном с областью G.*

18. ***А. Паунов и В. Петкиева*** нашли множество точек плоскости (пространства), где могут находиться вершины треугольника (ортоцентрического тетраэдра), при заданном ортоцентре и центре описанной окружности (сферы).

Пусть в плоскости π даны две точки O и H и Δ обозначает любой треугольник, для которого точка O является центром его описанной окружности, а точка H – его ортоцентром; через T обозначим ортоцентрический тетраэдр, для которого точка O является центром описанной сферы, а точка H – его ортоцентром.

В их работе "*Из жизни двух замечательных точек треугольника и тетраэдра*" изучаются множества точек на плоскости и в пространстве, где могут находиться вершины треугольников Δ и тетраэдров T.

Теорема 1. *Множество всех точек плоскости π, где могут находиться вершины треугольников Δ (рис. 3) представляет собой плоскость, из которой удалены окружность Γ_1 с диаметром HG и внутренность круга, ограниченного окружностью Γ_2 с диаметром GH', где G – такая точка отрезка HO, для которой $HG = 2\ GO$ (центр тяжести треугольника Δ), а H' – точка, симметричная точке H относительно точки O. При этом (A – одна из вершин треугольника Δ, Γ_3 – окружность с диаметром HH'),*

1^0. *если $A \in \Gamma_3$, то Δ – прямоугольный треугольник;*

2^0. *если вершина A расположена внутри Γ_3, но вне Γ_1, то Δ – тупоугольный треугольник и угол A – острый;*

3^0. *если вершина A расположена внутри Γ_1, то Δ – тупоугольный треугольник и угол A – тупой.*

4^0. *если вершина A расположена вне Γ_3, то Δ – остроугольный треугольник.*

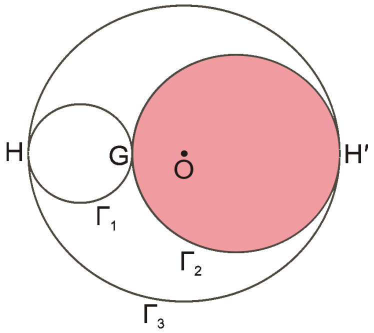


Рис. 3

Теорема 2. *Множество всех точек пространства, где могут быть расположены вершины тетраэдров T, с заданным центром описанной сферы O и заданным центром тяжести G, состоит из всех точек пространства, расположенных вне сферы $\sum_1$, за исключением точки сферы $\sum_2$. Здесь $\sum_1$ имеет диаметр GH' (G – середина отрезка OH и центр тяжести тетраэдра T, H' – точка, симметричная H относительно точки O), а $\sum_2$ имеет диаметр GH (центры обеих сфер принадлежат прямой OH).*

О семье Колмогоровых в Ярославской губернии

Р.З. Гушель

Выдающийся отечественный математик, академик АН СССР Андрей Николаевич Колмогоров провел свое раннее детство на Ярославской земле, в имении деда по матери Якова Степановича Колмогорова в селе Туношна и в его городском доме.

Младшая из шести дочерей Я.С. Колмогорова Мария состояла в гражданском браке с Николаем Матвеевичем Катаевым. Н.М. Катаев окончил курс в бывшей Петровской сельскохозяйственной академии. В 1897–1899 гг. он – губернский агроном Курской губернии. В конце 1899 года его назначили ярославским губернским агрономом. По должности своей губернский агроном был также секретарем экономического совета при губернской земской управе. В этой должности Николай Матвеевич находился до весны 1901 года, когда он просил или предоставить ему по личным обстоятельствам полугодовой отпуск без сохранения содержания, или уволить от службы. Судя по тому, что позднее его фамилия в документах экономического совета не встречается, он был уволен, но остался в Ярославле.

Состоя губернским агрономом, Н.М. Катаев участвовал в организации уездных выставок животноводства, а также инициировал устройство в Ярославской губернии "учебно-практической сельскохозяйственной мастерской для обучения изготовлению простейших сельскохозяйственных машин и орудий". Он выступал за усовершенствование приемов льнообработки и предлагал устроить в губернии образцовое льнообделочное заведение [1].

В апреле 1903 года у Марии Яковлевны родился сын. Это случилось в Тамбове, куда будущая мать заехала, возвращаясь из Крыма. Роды стоили ей жизни. Мальчика забрала семья Колмогоровых. Его тетушка Вера Яковлевна усыновила мальчика. Отец его в том же году уехал из Ярославля и в воспитании сына практически не участвовал.

По свидетельству ярославского историка, доктора исторических наук А.В. Ефременко, Н.М. Катаев около 1910 года стал начальником учебной части департамента земледелия Главного управления землеустройства и земледелия. Он участвовал в совещаниях по высшему и среднему сельскохозяйственному образованию при департаменте земледелия в С.-Петербурге. Среди его печатных трудов отметим книгу "Главные основания организации сельскохозяйственного института в черноземной полосе", вышедшую в Петербурге в 1910 году [2] .

Детство Андрея Николаевича прошло, главным образом, в имении деда под Ярославлем. Яков Степанович Колмогоров (1837–1909) был довольно известным человеком и в Ярославле, и в губернии. С 1869 по 1880 год он был депутатом дворянского собрания в Ярославском уезде, с 1881 по 1886 – в Мологском. С 1885 по 1892 год он являлся угличским уездным предводителем дворянства. В его семье большое значение придавали образованию. Все дочери Я.С.Колмогорова окончили Ярославскую Мариинскую женскую гимназию, а сын учился в Училище правоведения в С.-Петербурге.

Род Колмогоровых не был старинным дворянским родом. Отец Якова Степановича Степан Петрович Колмогоров, бывший сыном оберофицера, поступил на службу в 15 лет. Он начинал с должности кописта в Пензенской Казенной палате. Спустя 11 лет, в 1824 году, по

Указу Правительствующего Сената он был определен в Ярославскую казенную палату, где в 1839 году получил чин коллежского ассесора, дававший право на потомственное дворянство [9]. В 1844 году род Колмогоровых был возведен в дворянское достоинство.

На те годы, когда Яков Степанович Колмогоров был в Угличе предводителем дворянства, приходится одно важное историческое событие. В 1891 году исполнилось 300 лет со времени гибели царевича Дмитрия. В связи с этим было принято решение о реставрации дворца царевича в Угличе, являющегося памятником архитектуры XV века. В июне 1889 года специальная комиссия во главе с Я.С. Колмогоровым осмотрела дворец и составила соответствующий акт, на основании которого и было принято решение о реставрации. Помимо местных специалистов, к участию в работе этой комиссии был приглашен действительный член Императорского русского археологического общества Н.В. Султанов.

Я.С. Колмогоров как уездный предводитель и заместитель председателя комиссии по реставрации дворца (председателем был губернатор) руководил всеми реставрационными работами, жертвовал на это и свои личные средства. 3 июня 1892 года он принимал Великого Князя Сергея Александровича и Великую Княгиню Елизавету Федоровну, приехавших в Углич на открытие дворца. Яков Степанович поднес Великому Князю "Жития, страдания и чудеса св. Дмитрия Царевича с оригинала подлинного почерка св. Димитрия, митрополита Ростовского" [3].

Я.С. Колмогоров создал в Угличе музей древностей, находившийся в ведении Петербургской археологической комиссии и Московского археологического общества. Он передал в дар этому музею хоругви XVI и XVII веков.

Будучи предводителем, Я.С. Колмогоров возглавлял уездный училищный совет. И в этом качестве он много сделал для уезда. В 1888 году губернская земская управа предложила уездным управам передать все земские школы церкви, т.е. слить их с церковно-приходскими. А вместо этого земству предлагалось учреждать профессиональные школы. Угличское земство согласилось на то, чтобы отдать свои школы церкви, так как содержать и начальные, и профессиональные школы оно не могло. Однако крестьяне были против церковно-приходской школы. Они ходатайствовали о сохранении земской школы. Их ходатайства поддержал председатель училищного совета Я.С. Колмогоров.

В отчете о земских училищах за 1889 год он сказал уездному земскому собранию: "В последнее время и в правительстве, и в доброжелательном к народу интеллигентном обществе возникло стремление к заботам о религиозно-нравственном просвещении народа присоединить и заботы о распространении в народе, чрез посредство школ, сведений технических, ремесленных, земледельческих и других тому подобных с целью поднять благосостояние сельского населения. Угличский совет вполне разделяет эти добрые пожелания... Но разве нравственность народа для земства должна представлять меньшую важность?! Наконец, разве трезвость, бережливость, трудолюбие и вообще умственное и нравственное развитие не ведут к поднятию народного благосостояния?! Училищный совет полагает, что качества эти содействуют народному благосостоянию даже в большей степени, нежели знания профессиональные, но эти качества не являются ли плодами религиозно-нравственного воспитания, которое и должны дать правильно поставленные начальные общеобразовательные школы?" [4. С. 39].

Учитывая пожелания населения и "благодаря стойкому голосу г. Колмогорова, собрание постановило временно оставить земские школы на правилах, выработанных управою" [4. С. 40].

В том же отчете за 1889 год был поднят вопрос об улучшении материального положения учителей народных школ. Предлагалось установить прогрессивную шкалу, при которой учитель, прослуживший 20 лет, получал бы 420 рублей в год (в самых богатых в губернии Ярославском и Рыбинском уездах высший оклад составлял 300 рублей). Земская управа утверждала, что на такое повышение не найдется денег. Однако училищный совет во главе с Я.С. Колмогоровым убедил управу и в необходимости, и в реалистичности такой меры. Соответствующее решение было принято осенью 1890 года [4].

Тогда же ярославский губернатор А.Я. Фриде обратился к уездным предводителям с предложением организовать при начальных училищах сады и огороды с целью развития в регионе этой отрасли хозяйства. Опыт такой работы в других губерниях дал хорошие результаты.

Яков Степанович на свои средства организовал в одном из училищ уезда занятия по садоводству и огородничеству. Летом 1891 года он, опять-таки на свои средства, командировал учителя этого училища на курсы садоводства и огородничества, организованные в Москве специально для учителей народных школ.

Из ежегодных отчетов училищной комиссии и некоторых других ее документов видно, что Я.С. Колмогоров с большим интересом и вниманием следил за успехами народной школы и старался ей помогать.

В течение тридцати лет (1875–1905 гг.) Яков Степанович служил по ведомству Министерства народного просвещения. Он был почетным смотрителем Ярославского городского трехклассного (позднее – четырехклассного) училища. И Я.С. Колмогоров, и его жена в разные годы были попечителями Туношенской школы и школы села Прусово, где они тоже имели земли. В своем завещании Яков Степанович просил наследников, чтобы они "выдавали из дачи моей ежегодно пиленых дров двум земским школам, под названием Прусовская и Туношенская, каждой по 25 саженей в год".

Я.С. Колмогоров состоял членом Ярославской губернской ученой архивной комиссии (ЯГУАК). К нему как владельцу богатой библиотеки нередко обращались по разным вопросам за консультацией. После кончины Якова Степановича его вдова Юлия Ивановна передала более 400 книг в библиотеку ЯГУАК.

В 1900 году исполнилось 150 лет со времени основания русского национального театра. Для организации этого юбилея была создана специальная Волковская подкомиссия ЯГУАК, и Я.С. Колмогоров был избран ее членом. Он активно работал в подкомиссии и передал в ее распоряжение ряд ценных материалов по истории театра, в том числе рукописи XVIII – начала XIX вв. [5, 6].

В начале XX века Яков Степанович состоял председателем Ярославского отдела Российского общества сельскохозяйственного птицеводства, участвовал в губернских птицеводческих выставках. На выставке 1903 года он получил большую серебряную медаль за выведение породы "черных голоногих лонгшан и плимут-рок" кур [7].

Участвовал Я.С. Колмогоров и в работе некоторых других местных обществ. Так, он состоял действительным членом Ярославского естественно-исторического общества и внес 150 рублей на издание первого тома его трудов, осуществленное в 1902 году. С 1897 года, т.е. с самого основания, он состоял членом Общества для содействия народному образованию в Ярославской губернии.

В 1900 году в это общество вступили Мария Яковлевна Колмогорова и Николай Матвеевич Катаев. Возможно, именно здесь и познакомились родители А.Н. Колмогорова. Они работали вместе в комиссии народных чтений. Н.М. Катаев был секретарем комиссии, а Мария Яковлевна заведовала ее имуществом. В отчете комиссии за 1900 год сказано: "В настоящее время комиссия имеет 26 волшебных фонарей и 2048 картин для народных чтений. Брошюрами и картинами комиссии в текущем году пользовались 56 аудиторий, из них 15 – в г. Ярославле, 9 – в Ярославском уезде, 8 – в Ростовском, 5 – в Любимском, 4 – в Пошехонском, 4 – в Даниловском, 4 – в Мологском, 3 – в Угличском, 3 – в Рыбинском и 1 – в Романовском. В течение года было исполнено 171 требование" [8]. Среди организаций, пользовавшихся картинами и брошюрами, были земские и церковно-приходские школы, больницы, библиотеки, тюрьмы.

В 1909 году Яков Степанович скончался, и Вера Яковлевна уехала с Андрюшей в Москву, где мальчика вскоре отдали в гимназию.

Дом Колмогоровых в Туношне до наших дней не сохранился, но сохранился их городской дом, расположенный в самом центре города на Пробойной (Ильинской, ныне – Советской) улице. Этот дом был куплен еще в середине XIX века прадедом ученого Степаном Петровичем Колмогоровым. В 2003 году к столетию Андрея Николаевича на доме была установлена мемориальная доска с надписью: "В этом доме в 1903–1910 годах жил выдающийся математик академик Андрей Николаевич Колмогоров". Постановлением мэрии г. Ярославля одну из новых улиц города было решено назвать именем академика А.Н. Колмогорова.

Рассмотренные материалы дают возможность заключить, что будущий великий ученый рос в семье, где очень большое значение придавалось образованию, книге, истории родного края. Не случайно первая научная работа Андрея Николаевича была посвящена проблемам отечественной истории. Став математиком, он не потерял вкус к этим вопросам.

И разумеется, не случаен пристальный интерес А.Н. Колмогорова к вопросам просвещения. Есть все основания считать, что этот интерес начал формироваться у него именно под влиянием семьи.

Библиографический список

1. Вестник Ярославского земства. Ярославль, 1899-1901. №327-342.
2. *Ефременко А.В.* Сельскохозяйственное образование в России (конец XVIII–начало XX в.). Ярославль, 1997. С. 126.
3. Ярославские епархиальные ведомости. 1892. № 26. Стб. 401–410.
4. Очерк деятельности Угличского земства по народному образованию (1865–1899) / Сост. К.Е. Ливанов. Ярославль, 1901.
5. Труды Ярославской губернской ученой архивной комиссии. Ярославль, 1914. Кн. VI. Вып. 1. С. 96–97.
6. *Гушель Р.З.* Семья академика А.Н. Колмогорова и Ярославский

край // Труды школы-семинара по проблемам фундирования профессиональной подготовки учителя математики. Ярославль, 2003. С. 71–74.

7. Вестник Ярославского земства. 1903. № 15. С. 184.
8. Отчет о деятельности общества для содействия народному образованию в Ярославской губернии за 1900 год. Ярославль, 1901. С. 69–73.
9. Государственный архив Ярославской области. Фонд 213. Оп. 1 Дело 1655. О дворянстве рода Колмогоровых. Л. 4–5.

Глава 2

Математика в ее многообразии

[PostScript=dvips,small,pilespacing=2pt,labelstyle=]$misplaced\newarrow$

О бирациональной жесткости (гипотеза открытости) [1]

М.М.Гриненко, И.А.Чельцов

В алгебраической геометрии иногда встречаются так называемые "открытые" свойства. Речь идет о следующей ситуации. Предположим, что мы имеем семейство объектов, параметризованных некоторой схемой. Применительно к этому семейству какое-либо свойство называется открытым, если им обладают все объекты, лежащие над некоторым открытым по Зарисскому подмножеством параметризующей их схемы. Простейшим примером является свойство "быть неособым" для гиперповерхностей заданной степени в проективном пространстве, как это утверждает теорема Бертини. В данной заметке обсуждается вопрос, является ли бирациональная жесткость открытым свойством.

1. Бирациональная жесткость. Напомним, что тройка $\mu : V \to S$ называется *расслоением Мори*, если многообразие V принадлежит категории Мори (то есть является проективным с $\mathbb{Q}$-факториальными терминальными особенностями), база S – нормальное многообразие размерности строго меньшей, чем размерность V, и структурный морфизм μ – экстремальное стягивание расслоенного типа, то есть относительное число Пикара $\rho(V/S) = \rho(V) - \rho(S)$ равно 1 и $(-K_V)$ относительно обилен. Мы будем также писать V/S или даже просто V, если из контекста ясно, о каких структурных морфизмах и базах идет речь.

Трехмерные расслоения Мори подразделяются на многообразия Фано, расслоения на поверхности дель Пеццо и расслоения на коники в зависимости от того, чему равна размерность базы: 0, 1 или 2. Ниже будет идти речь, главным образом, о многообразиях Фано.

---

[1]Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 05-01-00353а, НШ-9969.2006.1, МД-4261.2006.1, CRDF RUM1-2692-MO-05.

Существует два определения бирациональной жесткости: самое первое, принадлежащее А.В. Пухликову, и другое, возникшее из программы Саркисова, но для многообразий Фано они дают одно и то же. По определению, многообразие Фано называется *бирационально жестким* (или просто жестким), если оно единственное (с точностью до изоморфизма) расслоение Мори в своем классе бирациональной эквивалентности. Другими словами, если V бирационально жесткое многообразие Фано и $\mu : U \to S$ расслоение Мори такое, что существует бирациональный изоморфизм $\chi : V \dashrightarrow U$, то U бирегулярно изоморфно V, а χ можно рассматривать как бирациональный автоморфизм V.

Подробнее о проблеме бирациональной жесткости для многообразий Фано можно прочитать в обзоре [1], а здесь мы рассмотрим следующие примеры. Пусть $X_4 \subset \mathbb{P}^4$ неособая гиперповерхность степени 4. В основополагающей работе [2] В.А. Исковских и Ю.И. Маниным было доказано, что такие квартики не только жесткие, а даже сверхжесткие, то есть не имеют бирациональных автоморфизмов, отличных от бирегулярных. Другими словами, для них $\mathrm{Bir}(X_4) = \mathrm{Aut}(X_4)$, где $\mathrm{Bir}(X_4)$ обозначает группу бирациональных автоморфизмов X_4.

Что будет, если мы начнем вырождать неособую квартику? Пусть X_4 будет квартикой, имеющей ровно одну обыкновенную двойную точку (в подходящих локальных координатах такая особая точка задается уравнением $xy + zw = 0$). Предположим, что X_4 является общей в следующем смысле: через особую точку проходят ровно 24 прямые. В этих предположениях А.В. Пухликов доказал ([3]), что X_4 бирационально жестко, но уже не сверхжестко. Существуют 24 бирациональные инволюции, связанные с прямыми, проходящими через особую точку, и еще одна инволюция, устроенная так: общая прямая, проходящая через особую точку, пересекает X_4 еще в двух точках, и эта инволюция просто переставляет их. Показано, что между этими инволюциями нет соотношений.

Будем вырождать X_4 дальше и потребуем, чтобы она содержала единственную особую точку вида $xy + z^2 + w^n = 0$ при $n \geq 3$. Для таких квартик существует гипотеза ([4]), что они являются жесткими. Но если мы "испортим" особую точку иным образом, потребовав ее локального уравнения $xy + z^3 + w^3 = 0$, то в предположениях общности такой квартики А. Корти и М. Мелла ([4]) доказали, что X_4 бирационально изоморфна некоторому многообразию Фано $Y_{3,4} \subset \mathbb{P}(1^4, 2^2)$, являющемуся полным пересечением кубики и квартики. Более того, показано, что X_4 и $Y_{3,4}$ единственные расслоения Мори в своем классе бирациональной эквивалентности. Как видно, это уже нежесткое многообразие.

Приведенные выше примеры показывают, что нежесткость может не сохраняться при малых деформациях: квартика с особой точкой вида $xy + z^3 + w^3 = 0$, как в последнем примере, является, очевидно, вырождением неособой квартики (или квартики с двойной точкой). А что происходит при деформациях жестких многообразий?

Существует гипотеза о том, что бирациональная жесткость является открытым свойством, иными словами, малые деформации жесткого многообразия снова приводят к жесткому (например, [5. Conjecture 1.4]). Ниже, однако, рассматриваются конструкции, являющиеся кандидатами на контрпример к этой гипотезе.

2. Нежесткие пересечения квадрики и кубики. Известно, что неособое многообразие Фано V_3^6 индекса 1 и степени 6 реализуется как пересечение квадрики и кубики в $\mathbb{P}^5$, причем общее такое многообразие бирационально жестко ([6]). Мы сейчас покажем, как модифицировать эту конструкцию и получить нежесткое многообразие.

Пусть H, Q_1, Q_2 и T однородные многочлены степеней соответственно 1, 2, 2 и 3 от переменных $x_0, x_1, \ldots, x_4$, и пусть гиперповерхность $X \subset \mathbb{P}^4$ степени 4 задается уравнением

$$HT - Q_1Q_2 = 0.$$

Потребуем, чтобы эти однородные многочлены были общими в том смысле, что гиперповерхности в $\mathbb{P}^4$, определяемые этими многочленами, находились в общем положении по отношению друг к другу. Тогда квартика X имеет ровно двенадцать обыкновенных двойных точек, задаваемых условием $H = T = Q_1 = Q_2 = 0$, и никаких иных особых точек нет. Нетрудно видеть, что гиперплоскость $L = \{H = 0\} \simeq \mathbb{P}^3$ высекает на X две квадратичные поверхности S_1 и S_2, уравнения которых в L будут ограничениями $Q_1 = 0$ и $Q_2 = 0$, причем в группе классов дивизоров Вейля $\mathrm{Cl}(X)$ выполнено соотношение $S_1 + S_2 \sim -K_X$.

Отметим, что X является горенштейновым, то есть $K_X \in \mathrm{Pic}(X)$, но не $\mathbb{Q}$-факториальным многообразием: никакая кратность дивизоров S_1 и S_2 не будет дивизором Картье. Последнее следует, например, из того, что S_1 и дивизор $T = Q_2 = 0$ пересекаются только в особых точках X.

Иначе это можно выразить так:

$$\begin{aligned}&\mathrm{Pic}(X) = \mathbb{Z}[-K_X],\\ &\mathrm{Cl}(X) = \mathbb{Z}[-K_X] \oplus \mathbb{Z}[S_1].\end{aligned}$$

Мы видим, что многообразие X не лежит в категории Мори (терминально, но не $\mathbb{Q}$-факториально), однако из него можно получить два многообразия Фано при помощи так называемой “обратной проекции”. Именно, пусть $x_0, x_1, \ldots, x_5$ однородные координаты в $\mathbb{P}^5$. Рассмотрим многообразия Фано V_1 и V_2 в $\mathbb{P}^5$, заданные уравнениями

$$V_1 = \left\{ \begin{array}{ccc} x_5 H & = & Q_1 \\ x_5 Q_2 & = & T \end{array} \right., \quad V_2 = \left\{ \begin{array}{ccc} x_5 H & = & Q_2 \\ x_5 Q_1 & = & T \end{array} \right. .$$

Отметим, что V_1 и V_2 являются многообразиями Фано индекса один и степени 6 (пересечения квадрик и кубик), и каждое имеет обыкновенную двойную точку с координатами $(0:0:0:0:0:1)$. Если в уравнениях для этих многообразий исключить x_5, мы получим уравнение квартики X. Таким образом, V_1 и V_2 бирационально изоморфны. Чтобы получить V_1 из X, надо раздуть поверхность $S_2 \subset \mathbb{P}^4$, чем достигается малое разрешение особенностей X, и затем стянуть ее собственный прообраз. Отметим, что V_1 содержит собственный прообраз $\tilde{S}_1$ поверхности S_1, а также 12 прямых, которые вклеились на место особых точек X и проходят через двойную точку V_1. Аналогично получается V_2: раздуваем поверхность S_1 и стягиваем ее собственный прообраз. Многообразие V_2 содержит собственный прообраз $\tilde{S}_2$ поверхности S_2.

Если теперь раздуть двойную точку на V_1, сделать флоп одновременно в прообразах указанных 12 прямых, а затем стянуть собственный прообраз поверхности $\tilde{S}_1$, мы получим бирациональный изоморфизм $\chi : V_1 \dashrightarrow V_2$. Отметим, что в общем случае V_1 и V_2 не изоморфны. Обозначим через $\mathcal{F}$ семейство многообразий Фано, получаемых описанной выше конструкцией. Итак, мы доказали следующее:

Предложение. *Общие многообразия из семейства $\mathcal{F}$ бирационально нежесткие.*

Мы сейчас покажем, как модифицировать конструкцию, чтобы получить вероятные контрпримеры к гипотезе о том, что бирациональная жесткость является открытым свойством.

3. Кандидаты на контрпример к гипотезе открытости. Мы приведем два варианта прежней конструкции. Используем те же обозначения.

Вариант первый. Предположим, что многочлены H и T инвариантны относительно некоторой инволюции $\tau \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^4)$, и пусть $Q_2 = \tau(Q_1)$. Тогда τ является также инволюцией на квартике X. Отметим, что τ можно продолжить до инволюции в $\mathbb{P}^5$, полагая $\tau(x_5) = x_5$. Теперь очевидно, что многообразия Фано V_1 и V_2 бирегулярно изоморфны, то есть $V_1 \cong V_2$, и отображение χ можно рассматривать как бирациональный автоморфизм V_1. Семейство получаемых таким образом многообразий Фано обозначим $\mathcal{F}_1$.

Вариант второй. Рассмотрим многообразие X с уравнением

$$HT + Q^2 = 0,$$

где Q некоторый однородный многочлен второго порядка. В общем случае X имеет особенность вдоль кривой $C = \{H = T = Q = 0\}$ (“протянутая” вдоль C обыкновенная двойная точка), неособо вне этой кривой, и содержит поверхность $S = \{H = Q = 0\}$. Таким образом, многообразие X имеет канонические особенности и является $\mathbb{Q}$-факториальным: хотя $S \subset X$ не дивизор Картье, но $2S \sim -K_X$. Чтобы получить из X расслоение Мори, достаточно раздуть S и стянуть собственный прообраз этой поверхности. Полученное многообразие $V \subset \mathbb{P}^5$ можно задать уравнениями

$$\begin{cases} x_5 H &= Q \\ x_5 Q &= T \end{cases}$$

Иными словами, эта конструкция является “вырожденным” вариантом общей, когда Q_2 и Q_1 совпадают, а отображение χ становится тождественным. Многообразие V является многообразием Фано индекса 1 и степени 6, или, как видно из уравнений, пересечением квадрики и кубики в $\mathbb{P}^5$. Семейство многообразий Фано, полученных таким образом, обозначим $\mathcal{F}_2$.

Гипотеза. *Общие многообразия из семейств $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ бирационально жесткие.*

Итак, если справедлива эта гипотеза (что представляется весьма вероятным), то бирациональная жесткость не является открытым свойством: общие малые деформации жестких многообразий из семейств $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ приведут к нежестким многообразиям семейства $\mathcal{F}$.

Библиографический список

1. *Чельцов И.А.* Бирационально жесткие многообразия Фано // УМН, 60:5 (2005). С. 71–160.
2. *Исковских В.А., Манин Ю.А.* Трехмерные квартики и контрпримеры к проблеме Люрота // Матем. сборник. 1971. Т. 86. № 1. С. 140–166.
3. *Пухликов А.В.* Бирациональные автоморфизмы трехмерной квартики с простейшей особенностью // Матем. сборник. 1988. Т. 135. № 4. С. 472–496.
4. *Corti A., Mella M.* Birational geometry of quartic terminal 3-folds. I // Amer. J. Math. 2004. V. 126. № 4. P. 739–761.
5. *Corti A.* Singularities of linear systems and 3-fold birational geometry // in “Explicit Birational Geometry of 3-folds”, LMS LNS 281, A. Corti and M. Reid Eds., CUP, 2000. P. 259–312.
6. *Iskovskikh V.A., Pukhlikov A.V.* Birational automorphisms of multidimensional algebraic manifolds // Journal of Math. Sciences, 82:4 (1996). P. 3528–3613.

Об одном достаточном условии стабильности трехиндексного тензора

Б.В. Карпов

В работе [1] для описания многообразий модулей полустабильных пучков на комплексной проективной плоскости используется следующее утверждение (мы формулируем его в измененных обозначениях).

Пусть U, V и W – комплексные конечномерные векторные пространства, $\sigma\colon U \otimes W \to V$ – ненулевое линейное отображение. Тогда образ σ в проективизации пространства линейных отображений из $U \otimes W$ в V стабилен относительно действия $SL(U) \times SL(V)$ в смысле геометрической теории инвариантов (см. [2] или [1]) тогда и только тогда, когда для любых подпространств $U' \subset U$ и $V' \subset V$ таких, что $\sigma(U' \otimes W) \subset V'$, справедливо неравенство

$$\frac{\dim U'}{\dim U} < \frac{\dim V'}{\dim V}. \tag{1}$$

Свойство полустабильности характеризуется нестрогим неравенством.

Рассмотрим соответствующее линейное отображение $\tilde{\sigma}\colon W \to U^* \otimes V$. Тогда условие $\sigma(U' \otimes W) \subset V'$ равносильно тому, что для любого $w \in W$

$$\tilde{\sigma}(w) \in \Big(U'' \otimes V + U^* \otimes V'\Big), \tag{2}$$

где $U'' = \operatorname{Ann} U' \subset U^*$, а неравенство (1) означает, что размерности подпространств U'' и V' удовлетворяют условию

$$\frac{\dim U''}{\dim U} + \frac{\dim V'}{\dim V} > 1. \tag{3}$$

При такой интерпретации, если $\tilde{\sigma}(w) \neq 0$, то его образ в $P(U^* \otimes V)$ стабилен относительно действия $SL(U) \times SL(V)$ тогда и только тогда, когда для любых подпространств $U'' \subset U^*$ и $V' \subset V$, удовлетворяющих условию (2), имеет место (3).

В настоящей работе делается попытка распространить эти результаты на случай тензорного произведения трех пространств при действии группы на каждом сомножителе. На этом пути пока удалось получить только достаточное условие стабильности, к которому мы и переходим.

Пусть $0 \neq \tau \in V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$. Будем называть τ *стабильным*, если его образ в $P(V_1 \otimes V_2 \otimes V_3)$ стабилен относительно действия группы $SL(V_1) \times \times SL(V_2) \times SL(V_3)$ в смысле геометрической теории инвариантов.

Теорема 1. *Если для любых подпространств $V_i'' \subset V_i$, $i = 1, 2, 3$, таких, что*

$$\tau \in \Big(V_1'' \otimes V_2 \otimes V_3 + V_1 \otimes V_2'' \otimes V_3 + V_1 \otimes V_2 \otimes V_3''\Big) \tag{4}$$

выполняется неравенство

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\dim V_i''}{\dim V_i} > 2, \tag{5}$$

то τ стабилен.

Гипотетически это условие не является необходимым; есть надежда, что со временем будет получен критерий стабильности и в этом случае.

Доказательство теоремы 1. От противного: пусть τ не стабилен; покажем, что найдутся подпространства $V_i'' \subset V_i$ такие, что имеет место (4) и выполняется неравенство

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\dim V_i''}{\dim V_i} \leq 2. \tag{6}$$

Согласно критерию Гильберта–Мамфорда, существует однопараметрическая подгруппа $c\colon \mathbb{C}^* \to SL(V_1) \times SL(V_2) \times SL(V_3)$ такая, что замыкание орбиты $c\tau$ содержит 0. В подходящих базисах

$$e_1, \ldots, e_{n_1}; \qquad f_1, \ldots, f_{n_2}; \qquad h_1, \ldots, h_{n_3} \tag{7}$$

пространств V_1, V_2, V_3 действие c имеет диагональный вид:

$$e_i \otimes f_j \otimes h_k \xmapsto{c(t)} t^{\lambda_i + \mu_j + \nu_k} e_i \otimes f_j \otimes h_k, \text{ где } \sum_{i=1}^{n_1} \lambda_i = \sum_{j=1}^{n_2} \mu_j = \sum_{k=1}^{n_3} \nu_k = 0,$$

причем мы можем считать показатели степеней упорядоченными:

$$\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_{n_1}; \qquad \mu_1 \leq \ldots \leq \mu_{n_2}; \qquad \nu_1 \leq \ldots \leq \nu_{n_3}.$$

Поскольку замыкание орбиты $c\tau$ содержит 0, имеем:

$$\lambda_i + \mu_j + \nu_k \leq 0 \quad \Longrightarrow \quad \tau_{ijk} = 0,$$

где τ_{ijk} – компоненты тензора τ в базисе $e_i \otimes f_j \otimes h_k$ пространства $V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$. В частности, если $\lambda_{i_0} + \mu_{j_0} + \nu_{k_0} \leq 0$, то $\tau_{ijk} = 0$ для всех $1 \leq i \leq i_0$, $1 \leq j \leq j_0$, $1 \leq k \leq k_0$, т. е. имеет место (4) для подпространств

$$V_1'' = \langle e_{i_0+1}, \ldots, e_{n_1} \rangle; \quad V_2'' = \langle f_{j_0+1}, \ldots, f_{n_2} \rangle; \quad V_3'' = \langle e_{k_0+1}, \ldots, e_{n_3} \rangle.$$

Так как $\dim V_1'' = n_1 - i_0$, $\dim V_2'' = n_2 - j_0$, $\dim V_3'' = n_3 - k_0$, неравенство (6) равносильно неравенству $i_0/n_1 + j_0/n_2 + k_0/n_3 \geq 1$, и для существования указанных подпространств достаточно доказать следующее утверждение:

$$\text{найдется тройка } (i_0, j_0, k_0) \text{ такая, что } \begin{cases} \lambda_{i_0} + \mu_{j_0} + \nu_{k_0} \leq 0 \\ \dfrac{i_0}{n_1} + \dfrac{j_0}{n_2} + \dfrac{k_0}{n_3} \geq 1. \end{cases}$$

В свою очередь, для существования такого набора чисел (i_0, j_0, k_0) достаточно показать, что

$$\sum_{(i,j,k) \in M} (\lambda_i + \mu_j + \nu_k) \leq 0, \tag{8}$$

где M – некоторое подмножество целых точек параллелепипеда $1 \leq i \leq$ $\leq n_1$, $1 \leq j \leq n_2$, $1 \leq k \leq n_3$, содержащееся в полупространстве

$$\frac{i}{n_1} + \frac{j}{n_2} + \frac{k}{n_3} \geq 1. \tag{9}$$

Возьмем в качестве M множество точек (i,j,k), удовлетворяющих соотношениям:

$$1 \le i \le n_1 \tag{10}$$

$$1 \le j \le \left\lfloor n_2\left(1-\frac{i}{n_1}\right)\right\rfloor \tag{11}$$

$$k = k(i,j) = \max\left(1, \left\lceil n_3\left(1-\frac{i}{n_1}-\frac{j}{n_2}\right)\right\rceil\right). \tag{12}$$

Отметим, что при фиксированных i и j, удовлетворяющих соотношениям (10) и (11), число $k(i,j)$ равно наименьшему целому $k \ge 1$, для которого справедливо неравенство (9). Таким образом, заданное множество M можно представлять себе как "множество целых точек, лежащих непосредственно над гиперплоскостью $i/n_1+j/n_2+k/n_3=1$ или в ней".

Обозначим через M' множество пар (i,j), удовлетворяющих соотношениям (10) и (11), т.е. проекцию M на плоскость (i,j). Сумма в левой части неравенства (8) распадается на три суммы: $\sum_M \lambda_i$, $\sum_M \mu_j$ и $\sum_M \nu_k$. Первые две из них равны $\sum_{(i,j)\in M'} \lambda_i$ и $\sum_{(i,j)\in M'} \mu_j$ соответственно; эти суммы, очевидно, неположительны. Покажем, что

$$\sum_{(i,j,k)\in M} \nu_k = \sum_{(i,j)\in M'} \nu_{k(i,j)} \le 0. \tag{13}$$

Рассмотрим базисные последовательности

$$s_k^{(l)} = \begin{cases} -l & \text{при } k \le n_3 - l; \\ n_3 - l & \text{при } k > n_3 - l, \end{cases} \qquad \text{где } 1 \le l \le n_3 - 1.$$

Поскольку последовательность $\nu_k = \sum_{l=1}^{n_3-1} \alpha_l s_k^{(l)}$ – линейная комбинация с рациональными коэффициентами $\alpha_l \ge 0$, неравенство (13) достаточно доказать для всех последовательностей $s_k^{(l)}$.

Имеем: $s_{k(i,j)}^{(l)} = n_3 - l$ при $k(i,j) > n_3 - l$, что равносильно

$$n_3\left(1-\frac{i}{n_1}-\frac{j}{n_2}\right) > n_3 - l,$$

поскольку $n_3 - l \in \mathbb{Z}$. Последнее неравенство преобразуется к виду

$$j < n_2\left(\frac{l}{n_3}-\frac{i}{n_1}\right) \quad \text{или} \quad j \le \left\lceil n_2\left(\frac{l}{n_3}-\frac{i}{n_1}\right)\right\rceil - 1.$$

Итак,

$$s_{k(i,j)}^{(l)} = \begin{cases} -l & \text{при } \ j \geq \left\lceil n_2 \left(\frac{l}{n_3} - \frac{i}{n_1} \right) \right\rceil \\ n_3 - l & \text{при } \ j \leq \left\lceil n_2 \left(\frac{l}{n_3} - \frac{i}{n_1} \right) \right\rceil - 1. \end{cases}$$

Отметим, что второй случай ($s_{k(i,j)}^{(l)} = n_3 - l$) бывает возможен не при всех i, а только при тех, для которых

$$\left\lceil n_2 \left(\frac{l}{n_3} - \frac{i}{n_1} \right) \right\rceil - 1 \geq 1, \quad \text{или} \quad \left\lceil n_2 \left(\frac{l}{n_3} - \frac{i}{n_1} \right) \right\rceil - 1 > 0,$$

что эквивалентно

$$\left\lceil n_2 \left(\frac{l}{n_3} - \frac{i}{n_1} \right) \right\rceil > 1; \qquad n_2 \left(\frac{l}{n_3} - \frac{i}{n_1} \right) > 1;$$

$$i < n_1 \left(\frac{l}{n_3} - \frac{1}{n_2} \right); \qquad i < \left\lceil n_1 \left(\frac{l}{n_3} - \frac{1}{n_2} \right) \right\rceil.$$

(Выбор строгого неравенства выше объясняется необходимостью корректно снять верхнюю целую часть.) Введем обозначения

$$m_1 = \left\lceil n_1 \left(\frac{l}{n_3} - \frac{1}{n_2} \right) \right\rceil \quad \text{и} \quad m_2(i) = \left\lceil n_2 \left(\frac{l}{n_3} - \frac{i}{n_1} \right) \right\rceil,$$

это «границы по i и по j».

Итак,

$$\sum_{(i,j) \in M'} s_{k(i,j)}^{(l)} = (-l)\Sigma_1 + (-l)\Sigma_2 + (n_3 - l)\Sigma_3, \tag{14}$$

где

$$\Sigma_1 = \sum_{i=m_1}^{n_1} m_2(i); \qquad \Sigma_2 = \sum_{i=1}^{m_1-1} \left(\left\lfloor n_2 \left(1 - \frac{i}{n_1} \right) \right\rfloor - m_2(i) + 1 \right);$$

$$\Sigma_3 = \sum_{i=1}^{m_1-1} \left(m_2(i) - 1 \right).$$

Отбросив первое слагаемое в (14), которое неположительно, имеем:

$$(-l)\Sigma_2 + (n_3 - l)\Sigma_3 = \sum_{i=1}^{m_1-1} \left((-l) \left\lfloor n_2 \left(1 - \frac{i}{n_1} \right) \right\rfloor + n_3(m_2(i) - 1) \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m_1-1}\left((-l)\left\lfloor n_2\left(1-\frac{i}{n_1}\right)\right\rfloor + n_3\left(\left\lceil n_2\left(\frac{l}{n_3}-\frac{i}{n_1}\right)\right\rceil - 1\right)\right) \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{m_1-1}\left(-l\,n_2\left(1-\frac{i}{n_1}\right) + n_3 n_2\left(\frac{l}{n_3}-\frac{i}{n_1}\right)\right) = \sum_{i=1}^{m_1-1}\frac{n_2 i(l-n_3)}{n_1} < 0.$$

Это завершает доказательство.

Библиографический список

1. *Drezet J.-M.* Fibrés exceptionnels et variétés de modules de faisceaux semi-stables sur $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ // J. Reine Angew. Math. **380** (1987). P. 14–58.
2. *Mumford D., Fogarty J.* Geometric Invariant Theory. Erg. der Math. Wiss. **34**. Berlin-Heidelberg-New York, 1982.

Модель сальтаторного проведения пачек импульсов по миелинизированному аксону

С.Е. Ануфриенко, В.В. Майоров

В [3] исследована модель проведения одиночного импульса по миелинизированному нервному волокну. В реальных биологических экспериментах наблюдался и другой вид нейронной активности, который называется пачечным: на постоянное электрическое деполяризующее воздействие нейрон отвечает залпом (пачкой) импульсов [4].

Рассмотрим участок нервного волокна, содержащий $N+1$ перехват Ранвье. Присвоим перехватам номера от 0 до N и обозначим через $u_i(t)$ их мембранные потенциалы. Потенциал миелинизированного участка, находящегося между перехватами с номерами i и $i-1$, обозначим $v_i(t)$ $(i=1,\ldots,N)$. Мембранные потенциалы перехватов Ранвье и миелинизированных участков будем отсчитывать от уровня максимальной гиперполяризации, поэтому $u_i(t)\geq 0$ и $v_i(t)\geq 0$. Выпишем систему уравнений, моделирующую процесс распространения импульса по миелинизированному волокну:

$$\dot{u}_0 = \lambda[-1-f^0_{Na}(u_0)+f^0_K(u_0(t-1))]u_0+g(t); \tag{1}$$

$$\begin{gathered}\dot{u}_i=\lambda[-1-f_{Na}(u_i)+f_K(u_i(t-1))]u_i+\varepsilon+e^{-\lambda\sigma}(v_i-2u_i+v_{i+1});\\ i=1,\ldots,N;\quad v_{N+1}(t)\equiv u_N(t);\end{gathered} \tag{2}$$

$$\dot{v}_i = \lambda(u_{i-1} - 2v_i + u_i), \quad i = 1, \ldots N. \tag{3}$$

Здесь параметр $\lambda >> 1$отражает высокую скорость протекания электрических процессов, параметр $0 < \varepsilon << 1$ учитывает токи утечки, проходящие через мембраны перехватов. Положительные достаточно гладкие функции $f_{Na}(u)$, $f^0_{Na}(u)$, $f_K(u)$ и $f^0_K(u)$ монотонно убывают к нулю при $u \to \infty$ быстрее, чем $O(u^{-1})$. Они описывают состояние натриевых и калиевых каналов мембран перехватов. Введем параметры:

$$\begin{aligned}
&\alpha = 1 + f_{Na}(0) - f_K(0) > 0, \ \ \alpha_1 = f_K(0) - 1 > 1,\\
&\alpha_2 = f_{Na}(0) + 1 > \alpha_1, \ \ 0 < \sigma < \alpha_1,\\
&\alpha^0 = f^0_K(0) - f^0_{Na}(0) - 1 > 0, \ \ \alpha^0_1 = f^0_K(0) - 1 > 1,\\
&\alpha^0_2 = f^0_{Na}(0) + 1 > \alpha^0_1.
\end{aligned}$$

Функция $g(t)$ в уравнении (1) имеет вид:

$$g(t) = \begin{cases} e^{-\lambda\sigma_0}, & t \in [0, T],\\ 0, & t > T, \end{cases}$$

где T – достаточно большое число, $0 < \sigma_0 < \alpha^0_2$.

Число $f_K(0) - f_{Na}(1) - 1 > 0$ связано с пороговым значением: будем считать, что спайк i-го перехвата начинается в момент времени t_s, такой что $u_i(t_s) = 1, \quad u_i(t) < 1$ при $t_s - 1 < t < t_s$. Токи утечки через миелиновые оболочки не учитываются.

Система (1)–(3) отличается от соответствующей системы, рассмотренной в [3]. Уравнение (1) описывает динамику нейрона, который в течение промежутка времени $t \in [0, T]$ генерирует пачку спайков. Уравнения (2)–(3) описывают последовательность перехватов Ранвье, связанных между собой посредством миелинизированных участков.

Зададим начальные условия:

$$\begin{gathered}
u_0(s) = \varphi_0(s) \in S, \quad s \in [-1, 0];\\
u_i(s) = u_* \approx \tfrac{\varepsilon}{\alpha\lambda}, \quad s \in [-1, 0], \quad i = 1, \ldots, N;\\
v_i(0) = u_*, \quad i = 1, \ldots, N.
\end{gathered}$$

Класс S состоит из непрерывных на отрезке $s \in [-1,\ 0]$ функций $\varphi\,(s)$, удовлетворяющих условиям: $\varphi\,(0) = 1$ и $0 \le \varphi\,(s) \le \exp\big(\lambda\alpha^0 s/2\big)$.

Проанализируем уравнение (1) при $\lambda \to \infty$. В момент времени $t = 0$ начинается спайк нейрона. Сделаем замечание. Вообще говоря, параметры α_1 и α_1^0 различны, но принципиального значения это не имеет. Для упрощения выкладок будем считать, что $\alpha_1^0 = \alpha_1$.

На промежутке $t \in [\delta, 1-\delta]$, где $0 < \delta << 1$ – произвольно малое фиксированное число, имеем: $u(t) >> 1$, $u(t-1) << 1$. Уравнение (1) примет вид:

$$\dot{u}_0 = \lambda(\alpha_1 + o(1))u_0 + o(1),$$
$$u_0(0) = 1.$$

Здесь $o(1)$ – слагаемые, которые стремятся к нулю при $\lambda \to \infty$. Решение имеет вид:

$$u_0(t) = \exp(\lambda\alpha_1(t + o(1))).$$

При $t > 1$ в течение некоторого промежутка времени имеем: $u(t) >> 1$, $u(t-1) >> 1$. На промежутке $t \in [1+\delta, t_1-\delta]$, где t_1 определяется из условия $u_0(t_1) = 1$, уравнение (1) примет вид:

$$\dot{u}_0 = \lambda(-1 + o(1))u_0 + o(1),$$
$$u_0(1) = \exp(\lambda\alpha_1(1 + o(1))).$$

Решение имеет вид:

$$u_0(t) = \exp(\lambda(\alpha_1 - (t-1) + o(1))).$$

Найдем $t_1 \exp(\lambda(\alpha_1 - (t-1) + o(1)))$:

$$\exp(\lambda(\alpha_1 - (t_1 - 1) + o(1))) = 1,$$
$$t_1 = \alpha_1 + 1 + o(1).$$

На промежутке $t \in [1+\alpha_1+\delta, 2+\alpha_1-\delta]$ имеем: $u(t) << 1$, $u(t-1) >> 1$, уравнение (1) примет вид:

$$\dot{u}_0 = -\lambda(\alpha_2^0 + o(1))u_0 + \exp(-\lambda\sigma_0),$$
$$u_0(\alpha_1 + 1) = 1.$$

Его решение имеет вид:

$$u_0(t) = C\exp(-\lambda(\alpha_2^0 + o(1))(t - \alpha_1 - 1)) + \exp(-\lambda(\sigma_0 + o(1))), \quad \text{где}$$
$$C = 1 - \exp(-\lambda(\sigma_0 + o(1))).$$

Учитывая, что $\sigma_0 < \alpha_2^0$, выделим главную часть решения:

$$u_0(t) = \exp(-\lambda(\sigma_0 + o(1))).$$

На промежутке $t \in [2+\alpha_1+\delta, t_2-\delta]$, где t_2 определяется из условия $u_0(t_2) = 1$, имеем: $u(t) << 1$, $u(t-1) << 1$, уравнение (1) примет вид:

$$\dot{u}_0 = \lambda(\alpha^0 + o(1))u_0 + \exp(-\lambda\sigma_0),$$
$$u_0(\alpha_1 + 2) = \exp(-\lambda(\sigma_0 + o(1))).$$

Его решение имеет вид:

$$u_0(t) = C\exp(\lambda(\alpha^0 + o(1))(t - \alpha_1 - 2)) - \exp(-\lambda(\sigma_0 + o(1))), \quad \text{где}$$
$$C = \exp(-\lambda(\sigma_0 + o(1))).$$

Перепишем решение в виде:

$$u_0(t) = \exp(\lambda(\alpha^0(t - \alpha_1 - 2) - \sigma_0 + o(1))).$$

Найдем t_2:

$$\exp(\lambda(\alpha^0(t_2 - \alpha_1 - 2) - \sigma_0 + o(1))) = 1,$$
$$t_2 = 2 + \alpha_1 + \tfrac{\sigma_0}{\alpha^0} + o(1).$$

В момент времени t_2 у нейрона начинается новый спайк, который полностью повторит предыдущий (с точностью до сдвига по времени). Картина будет повторяться на всем промежутке $t \in [0, T]$ с периодом $2+\alpha_1+\frac{\sigma_0}{\alpha^0}$ (с точностью до слагаемых $o(1)$).

Таким образом, формулы, описывающие динамику мембранного потенциала нулевого нейрона, имеют вид:

$$u_0(t) = \begin{cases} \exp(\lambda\alpha_1(t + o(1))), \ t \in [\delta, 1-\delta]; \\ \exp(\lambda(\alpha_1 - (t-1) + o(1))), \ t \in [1+\delta, 1+\alpha_1-\delta]; \\ \exp(-\lambda(\sigma_0 + o(1))), \ t \in [1+\alpha_1+\delta, 2+\alpha_1-\delta]; \\ \exp(\lambda(\alpha^0(t-\alpha_1-2)-\sigma_0+o(1))), \ t \in [2+\alpha_1+\delta, 2+\alpha_1+\frac{\sigma_0}{\alpha^0}-\delta]. \end{cases} \tag{4}$$

Рассуждения, полностью аналогичные проведенным в [3], позволяют сделать вывод, что первый спайк нулевого нейрона породит волну импульсов, которая будет распространяться по цепочке перехватов Ранвье в направлении возрастания их номеров. При этом мембранный потенциал первого перехвата Ранвье определяется формулами:

$$u_1(t)=\begin{cases}\exp(\lambda\alpha_1(t-\tau+o(1))),\ t\in[\tau+\delta\,,\ 1+\tau-\delta];\\ \exp(\lambda(\alpha_1-(t-\tau-1)+o(1))),\ t\in[1+\tau+\delta,1+\alpha_1+\tau-\delta];\\ \frac{\varepsilon+o(1)}{\lambda\alpha_2},\ t\in[1+\alpha_1+\tau+\delta,2+\alpha_1+\tau-\delta];\\ \frac{\varepsilon+o(1)}{\lambda\alpha},\ t\geq 2+\alpha_1+\tau+\delta.\end{cases}\tag{5}$$

Здесь $\tau=\frac{\sigma}{\alpha_1}<1$.

Формулы, задающие мембранный потенциал первого миелинизированного участка, имеют вид:

$$v_1(t)=\begin{cases}\exp(\lambda\alpha_1(t+o(1))),\ t\in[\delta,1-\delta];\\ \exp(\lambda(\alpha_1-(t-1)+o(1))),\ t\in[1+\delta,t_*-\delta];\\ \exp(\lambda\alpha_1(t-\tau+o(1))),\ t\in[t_*+\delta,1+\tau-\delta];\\ \exp(\lambda(\alpha_1-(t-\tau-1)+o(1))),\ t\in[1+\tau+\delta,1+\alpha_1+\tau-\delta];\\ \frac{\varepsilon+o(1)}{\lambda\alpha_2},\ t\in[1+\alpha_1+\tau+\delta,2+\alpha_1-\delta];\\ \frac{\varepsilon(\alpha+\alpha_2)+o(1)}{2\lambda\alpha\,\alpha_2},\ t\in[2+\alpha_1+\delta,2+\alpha_1+\tau-\delta];\\ \frac{\varepsilon+o(1)}{\lambda\alpha},\ t\geq 2+\alpha_1+\tau+\delta.\end{cases}\tag{6}$$

Здесь $t_*=\frac{\alpha_1\tau}{\alpha_1+1}+1$. Очевидно, что $1<t_*<1+\tau$. Формулы (5), (6) описывают состояние первого перехвата и первого миелинизированного слоя до нового спайка нулевого нейрона. Мембранные потенциалы других перехватов и миелинизированных участков определяются формулами:

$$\begin{cases}u_i(t)=u_1(t-(i-1)\tau)\ \text{ при }\ t>(i-1)\tau,\ \ i=2,\dots,N,\\[2ex] v_i(t)=v_1(t-(i-1)\tau)\ \text{ при }\ t>(i-1)\tau,\ \ i=2,\dots,N\end{cases}\tag{7}$$

(с точностью до слагаемых $o(1)$), которые справедливы до прихода нового сигнала.

В момент $t_2=2+\alpha_1+\frac{\sigma_0}{\alpha^0}+o(1)$ начинается новый спайк нулевого нейрона. К этому времени первый миелинизированный участок и первый перехват успеют восстановиться, поскольку, согласно биологическим данным [4], параметр $\alpha^0>0$ мал по величине. По цепочке перехватов будет распространяться вторая волна нейронной активности. Формулы, описывающие динамику мембранных потенциалов перехватов Ранвье и миелинизированных участков, получаются из формул (5), (6), (7) сдвигом по времени на величину $2 + \alpha_1 + \frac{\sigma_0}{\alpha^0}$ (с точностью до слагаемых $o(1)$). Описанный процесс будет периодически повторяться. Каждый последующий спайк нулевого нейрона вызовет новую волну, бегущую по цепочке перехватов Ранвье в направлении возрастания их номеров.

Библиографический список

1. *Тасаки И.* Нервное возбуждение. М.: Мир, 1971.
2. *Шаде Дж., Форд Д.* Основы неврологии. М.: Мир, 1976.
3. *Майоров В.В., Ануфриенко С.Е.* Анализ системы сингулярно возмущенных уравнений, описывающих проведение возбуждения по нервному волокну // Труды третьих Колмогоровских чтений. Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2005. С. 175–182.
4. *Ходоров Б.И.* Общая физиология возбудимых мембран. М.: Наука, 1975.

Гиббсовское предельное распределение для марковских случайных систем с конечным множеством состояний

М.Б. Аверинцев

Марковский случайный процесс, представляющий временную эволюцию гиббсовской случайной системы, был рассмотрен в [1]. Заметим, что метод моделирования случайного процесса, предложенный в этой работе, требует весьма громоздких вычислений на каждом временном шаге. В настоящей работе рассматриваются случайные системы более частного вида, которые чаще встречаются на практике. Моделирование таких систем существенно упрощается с помощью метода, описанного в настоящей работе.

Использование гиббсовского описания для случайных систем было обосновано в ряде работ (см. [2–6]). Заметим, что гиббсовское описание случайного поля соответствует подходу статистической физики, а описание эволюции случайных систем соответствует физической кинетике. В настоящей работе мы будем рассматривать системы на n-мерной целочисленной решеткеZ^n, т.е. на наборе векторов $z = (z_1, z_2, ..., z_n)$, $z_i \in Z$.

Каждая точка решетки может находиться в одном из состояний, описываемых множеством $X = \{\omega, x_1, x_2, ..., x_k\}$, состояние ω называется вакуумным и соответствует отсутствию в данной точке каких-либо частиц.

Выделим в множестве Z^n куб со стороной $2a$, который обозначим

$$V = V_a = \{z \in Z^n \,|{-a} \le z_i \le a, i = 1, 2, ...n\}, \tag{1}$$

обозначим через X^V множество функций, определенных на V и принимающих значения в X, а через $x(A)$ – график функции $x(\cdot)$ на множестве $A \subset Z^n$.

Гиббсовское распределение на конфигурациях $x(V)$задается формулой

$$P_\Gamma(x(V)) = \frac{1}{\Xi}\exp\{H(x(V))\}, \tag{2}$$

где функция $H(\cdot)$ называется гамильтонианом системы, $\frac{1}{\Xi}$ – нормирующий множитель. Обычно (см. [2]) гамильтониан имеет вид:

$$H(x(V)) = \sum_{A \cap V \neq \emptyset} U_A(x(A)), \tag{3}$$

где множество A принадлежит некоторому набору конечных множеств, а функция $U_A(\cdot)$ называется потенциалом. Предполагается также, что если при некотором $z \in A$ $x(z) = \omega$, то $U_A(x(A)) = 0$.

Для полного задания гиббсовской меры (2) необходимо определить конфигурацию на границе V. Обычно полагают $x(z) = \omega$ при $z \notin V$, этот случай называется случаем с нулевыми граничными условиями, либо придают V топологию n-мерного тора, отождествляя противоположные грани V, такие граничные условия называются периодическими граничными условиями.

Для описания эволюции системы рассмотрим двухкомпонентный марковский случайный процесс (ξ_t, η_t) , где $\xi_t \in X^V$, $\eta_t \in V$. Переходные вероятности этого процесса имеют вид:

$$P\{(\xi_{t+1}, \eta_{t+1}) = (y(\cdot), v_j) \mid (\xi_t, \eta_t) = (x(\cdot), v_i)\} = \frac{1}{N}P_i(y(\cdot) \mid x(\cdot))$$

Первый множитель соответствует тому, что на каждом шаге с вероятностью $\frac{1}{N}$ выбирается произвольный элемент множества V, второй множитель соответствует вероятности изменения конфигурации. Здесь

$N = |V|$ – количество элементов множества V. Предполагается, что изменяется состояние только элемента v_i , т.е. при $y(v) = x(v)$ для $v \neq v_i$, $P_i(\, y(\cdot) \mid x(\cdot)) = \frac{1}{\Xi_i(x(\cdot))} \exp\{H(y(\cdot))\}$, в противном случае $P_i(y(\cdot) \,|x(\cdot)) = 0$.

Этот процесс является дискретным аналогом процессов с непрерывным временем, рассмотренных в [4]. Имеет место следующая

Теорема. *Описанный выше марковский процесс является эргодическим, а его предельные вероятности являются гиббсовскими, т.е. имеют вид:*

$$P((\xi_t, \eta_t) = (x(\cdot), v_i)) = \frac{1}{N} P_\Gamma(x(V)).$$

Используя результаты работ [7, 8] и наличие вакуумного состояния, можно найти коэффициент эргодичности данного процесса, т.е. оценить скорость сходимости к предельному распределению. Эта скорость оказывается весьма малой, так как на каждом шаге изменяется значение конфигурации только в одной точке. Используя некоторые дополнительные свойства потенциала, можно существенно повысить коэффициент эргодичности. Рассмотрим одну из таких возможностей.

Обозначим через А класс множеств $A \subset V$ таких, что $\overline{0} \in A$ и $U_A(x(A)) \neq 0$ хотя бы при одном $x(\cdot)$, через zA – параллельный перенос множества A на вектор z и через zА набор множеств zA, $A \in$ А. Предположим, что потенциал обладает следующим свойством трансляционной инвариантности: если $U(x(B)) \neq 0$, то при всех $z \in B$ $B \in z$А. Кроме того, будем считать, что $\{\overline{0}\} \in$ А. Обозначим через B_z объединение множеств zА и через B_0 объединение множеств из А. Предположим также, что существует такой набор векторов G, что при любом $z \in B_0$ множество V содержится в объединении множеств B_{g+z} при различных $g \in G$ и множества B_{g+z} не пересекаются при различных $g \in G$.

В этом случае моделирование случайного процесса можно упростить, учитывая, что гиббсовские вероятности (2) распадаются на произведение вероятностей для отдельных B_{g+z}. В этом случае можно предположить, что $\eta_t \in B_0$ и вероятность того, что $\eta_t = v, v \in B_0$, будет равна $\frac{1}{|B_0|}$. Обычно количество точек в множестве B_0 много меньше N, поэтому можно за гораздо меньшее число вычислительных циклов приблизиться к стационарному гиббсовскому распределению. Следует учитывать, что одновременно мы можем пересчитать конфигурацию для всех точек $z = v + g$, $g \in G, z \in V$. Такой подход существенно увеличивает коэффициент эргодичности и упрощает получение типичных конфигураций, соответствующих различным потенциалам в формуле (3).

Библиографический список

1. *Аверинцев М.Б.* Взаимодействующие марковские процессы и гиббсовские случайные поля // Труды третьих колмогоровских чтений. Ярославль, 2005. С. 182–184.
2. *Georgii H.O.* Gibbs measures and phase transitions. Walter de Gruyter. Berlin New York. 1988.
3. *Averintsev M.B.* Gibbs description of random fields whose conditional probabilities may vanish. Probl. Inform. Transmiss. 11. 1975. P. 326–334.
4. *Liggett T.M.* Interacting Particle Systems. Springer-Verlag New York Berlin Heidelberg Tokio. 1989.
5. *Maruani A., Pechersky E., Sigelle M.* On Gibbs fields in image processing. Markov Processes Relat. Fields. 1. 1995. P. 419–442.
6. *Younes L.* (1996) Representation of Gibbs fields with synchronous random fields. Markov Processes Relat. Fields 2. 1996. P. 285–316.
7. *Перов А.И., Белоусова Е.П.* Признаки эргодичности марковских и колмогоровских систем // Вестник ВГУ. Сер. физика, математика. 2. 2002. С. 77–91.
8. *Розанов Ю.А.* Случайные процессы. М.: Наука. 1979.

Элементарные преобразования и очень обильные дивизоры на проективных расслоениях над кривыми

Н.П. Гушель

Пусть $\pi : P(E) \to$C – проективное расслоение, где E – векторное расслоение над неособой неприводимой кривой C рода g над алгебраически замкнутым полем характеристики ноль. Пусть расслоение E – нормализованное, т.е. $h^0(E) \neq 0$ и $h^0(E \otimes L) = 0$ для всякого обратимого пучка L над C, степени $\deg L < 0$. Обозначим через $M = O_{P(E)}(1)$ тавтологический пучок Гротендика (по определению $\pi_* M \cong E$) и $L_P = \pi^* O_C(P)$. Теми же буквами будем обозначать классы дивизоров, соответствующих этим пучкам.

Пусть E – двумерное векторное расслоение над неособой неприводимой алгебраической кривой C рода g над алгебраически замкнутым полем характеристики ноль, $\pi : X \cong \mathbf{P}(E) \to C$ – проективное расслоение над C, C_0 – минимальное сечение на поверхности X. Если D –

дивизор из группы Пикара X, то D линейно эквивалентен $aC_0 + \pi^* B$, где $B \in \operatorname{Pic} C$.

Одним из способов исследования условий очень обильности дивизоров D на X является использование более слабого условия отсутствия базисных точек (свободность). Известно (см., например, [1]), что линейная система $|D|$ не имеет базисных точек (свободна), если

$$h^1(X, D) = h^1(X, D - \pi^* y), \quad \forall y \in C, a \geq 1, \tag{$*$}$$

где $h^i(X, D)$ – размерность группы когомологий $H^i(X, O_X(D))$ одномерного локально свободного пучка $O_X(D)$, соответствующего дивизору D. Если $a = 1$, то условие $(*)$ является также необходимым условием свободности системы $|D|$.

В данном сообщении доказывается критерий свободности линейной системы $|aC_0 + \pi^* B|$ при $a \geq 1$ в случае $g = 1$, $-C_0^2 = -1$ и приводится пример линейной системы при $a \geq 2$, которая свободна, но не удовлетворяет условию $(*)$.

Если E – нормализованное векторное расслоение ранга 2 на C, то $-\Lambda^2 E$ имеет степень $e(X) = e$, являющуюся инвариантом X. Сечение C_0 называется минимальным, если $C_0^2 = -e$. Фиксируем минимальное сечение C_0 такое, что $O_X(C_0) \cong O_{P(E)}(1)$.

Рассмотрим элементарное преобразование elm_P с центром в точке $P \in X$. Пусть $f : \bar{X} \to X$ – моноидальное преобразование с центром P, Γ – исключительная кривая преобразования f. Если Z – кривая на X, то через $\bar{Z}$ (соответственно Z') обозначим собственный образ Z относительно f (соответственно elm_P). Пусть $L_y = \pi^{-1}(y)$, где $y = \pi(P)$, $g : \bar{X} \to X'$ – морфизм, стягивающий $\bar{L}_y$ в точку, тогда мы имеем элементарное преобразование $\operatorname{elm}_P = g \cdot f^{-1}$.

Лемма 1. *Если точка P лежит на минимальном сечении Z поверхности X, то собственный образ Z' также минимален на поверхности $X' = \operatorname{elm}_P X$ и $e(X') = e(X) + 1$. В противном случае X' имеет инвариант $e - 1$.*

Доказательство. Если Z – сечение, которое проходит (соответственно не проходит) через P, то $Z'^2 = Z^2 - 1$ (соответственно $Z'^2 = Z^2 + 1$). Действительно, если $P \in Z$, то

$$Z'^2 = \bar{Z}^2 = (f^* Z - \Gamma)^2 = Z^2 - 1.$$

Если $P \notin Z$, то

$$Z^2 = \bar{Z}^2 = (g^* Z' - \bar{L}_y)^2 = Z'^2 - 1.$$

Отсюда получим, что если $P \in Z$ и Z – минимальное сечение на X, то Z' – минимальное сечение на X'. Следовательно, $e(X') = e(X) + 1$.

Пусть через P не проходит ни одного из минимальных сечений. Если Z – сечение, имеющее наименьший индекс самопересечения среди сечений, проходящих через P, то $Z'^2 \geq C_0'^2 = -e + 1$. Действительно, если предположить, что $Z'^2 < C_0'^2$, то получим $C_0^2 < Z^2 < C_0^2 + 2$ и, следовательно, $Z^2 = C_0^2 + 1$. С другой стороны, $Z \sim C_0 + \pi^* B$ и $Z^2 = C_0^2 + 2degB$. Получаем противоречие. Итак, в этом случае $e(X') = e(X) - 1$.

Лемма 2. *Если X – эллиптическая линейчатая поверхность с инвариантом $e = -1$, то*

(i) каждое минимальное сечение C_M на X линейно эквивалентно $C_0 + \pi^* M$, где $M \in \operatorname{Pic} C$ и $degM = 0$;

(ii) через каждую точку $P \in X$ проходит по крайней мере одно минимальное сечение.

Доказательство. Утверждение (i) доказано в [2]. Предположим противное (ii), тогда из (1) получим, что $e(X') = -2$. Однако для всякой эллиптической поверхности имеем $e(X') \geq -1$.

Теорема. *Пусть X – эллиптическая линейчатая поверхность с инвариантом $e = -1$. Дивизор $D \sim aC_0 + \pi^* B$ свободен тогда и только тогда, когда $a > 0$ и $degB \geq 1 - a/2$.*

Доказательство. Если линейная система $|D|$ не имеет базисных точек, то ее ограничение на любую не особую кривую также не имеет базисных точек. Известно [2], что линейная система $|-K_X| = |C_0 - \pi^* detE|$ содержит не особую эллиптическую кривую Y. Следовательно, $degD|_Y = a + 2degB \geq 2$.

Обратно, пусть $a > 0$ и $degB \geq 1 - a/2$. Согласно лемме 2, через каждую точку $P \in X$ проходит минимальное сечение поверхности X. Следовательно, достаточно доказать, что ограничение линейной системы $|D|$ на любое минимальное сечение C_M свободно.

В точной последовательности групп когомологий

$$0 \to H^0(X, D - C_M) \to H^0(X, D) \to H^0(C_M, D|C_M) \to H^1(X, D - C_M) \to \ldots$$

Имеем $h^0(X, D - C_M) = 1/2a(2b + a - 1)$, $h^0(X, D) = 1/2(a+1)(a+2b)$ и $h^1(X, D - C_M) = 0$. Так как $(D \cdot C_M) = a + b \geq a + (2-a)/2 = 1 + a/2$ и $h^0(C_M, D|C_M) = h^0(C_M, L) = a + b$, то L – эффективный дивизор степени $a + b \geq 2$. Линейный ряд $|D||C_M = |L|$ на эллиптической кривой C_M свободен при $degL \geq 2$.

Замечания. 1) При $a \geq 2$ условие $(*)$ может не выполняться для некоторых свободных линейных систем $|D|$ и, следовательно, является лишь достаточным условием свободности линейной системы | D|, то есть при a ≥ 2 из свободности $|D|$ не вытекает порождаемость глобальными сечениями векторного расслоения $\pi_*(O_X(D))$.

Пример. Пусть X – эллиптическая линейчатая поверхность с инвариантом $e = -1$, $D \sim -mK_X + \pi^* y$, $y \in C$ и $m \geq 1$. Так как $K_X \sim -2C_0 + \pi^* detE$, то согласно теореме линейная система $|D|$ свободна. Далее $h^1(X, D) = 0$ (см. [2]) и $h^0(X, D - \pi^* y) = h^0(X, -mK_X) = h^1(X, -mK_X)$ по теореме Римана-Роха. Так как $h^0(X, -K_X) > 0$, то $h^0(X, -mK_X) > 0$ при $m \geq 1$ и, следовательно, $h^0(X, -mK_X) = h^1(X, D - \pi^* y) \neq 0$.

2) При $a \geq 2$ свободность линейной системы $|D - \pi^* y|$ не является необходимым условием очень обильности $|D|$.

Пример. Пусть X – эллиптическая линейчатая поверхность с инвариантом $e = -1$ и $D \sim aC_0 + \pi^* B$. Дивизор D очень обилен тогда и только тогда, когда $b \geq (3 - a)/2$ (см. [2]). Для дивизора $D' = D - \pi^* y$, $y \in C$ имеем $D' \equiv aC_0 + (b-1)L_y$, $L_y = \pi^{-1}(y)$ и $b' = b - 1 \geq (3-a)/2 - 1 = (1 - a)/2$, следовательно, согласно теореме, дивизор D' не является свободным. Например, при $a = 3$, $b \geq 0$ дивизор $D = 3C_0$ – очень обилен, а дивизор $D' = D - \pi^* y$, согласно теореме, не является свободным.

Библиографический список

1. *Гушель Н.П.* Очень обильные дивизоры на проективных расслоениях над кривыми // Алгебра и анализ. 1992. 4. Вып. 2. С. 116–128.
2. *Homma Y.* Projective normality and the defining equations of an elliptic ruled surfaces with negative invariant. Natur. Sci. Rept., Ochanomizu Univ., 1982. 33. № 1–2. P. 17–26.

Функциональные интервальные округления

Т.Э. Каминский, А.Л. Крюкова

1. Введение

Построенное на основе интервальной арифметики IR, множество Φ *интервальных округлений* (I-округлений), т.е. отображений $\varphi : \mathrm{IR} \to \mathrm{IR}$, удовлетворяющее следующим аксиомам:

$O_1.(\forall A \in \mathrm{IR})\,(A \subseteq \varphi\,(A))$;
$O_2.\ (\forall A,\ B \in \mathrm{IR})\,(A \subseteq B \Rightarrow \varphi\,(A) \subseteq \varphi\,(B))$; изучалось в ряде ра-
$O_3.\ \varphi^2 = \varphi$,
бот [1, 2, 4–7]. Это множество обширно, кроме отображений, обладающих интуитивно понимаемыми свойствами округлений, к которым относятся, например, регулярные округления (r-округления).

$$\varphi^{(k,l)}\,([a;b]) = \left[a_k^-;b_l^+\right], \tag{1}$$

где $a_k^- = g^{-k}\left[g^k \cdot a\right]$, $b_l^+ = g^{-l}\left\lceil g^l \cdot b\right\rceil$, g – основание системы счисления, $k, l \in \mathrm{Z}$ (здесь $\lceil x \rceil$ – наибольшее целое число, не меньшее x, а $[x]$ – целая часть x). Во множестве Φ содержится ряд элементов, совершенно не похожих ни на регулярные округления, ни на приближения вообще, так как результат указанных отображений весьма далек от прообраза. Примерами таких округлений являются:

$$\varphi_M\,([a;\ b]) = [-\max\,(|\,a\,|\,,\ |\,b\,|)\,;\,\max\,(|\,a\,|\,,\ |\,b\,|)]\,, \tag{2}$$

$$\varphi_U\,([a;\ b]) = \begin{cases} [a;\ b]\,, & [a;\ b] \cap U = \emptyset, \\ [\min\,(a,\ u)\,;\,\max\,(b,\ v)]\,, & [a;\ b] \cap U \neq \emptyset, \end{cases} \tag{3}$$

где $U = [u;\ v]$ фиксированный отрезок, содержащий 0,

$$\varphi_\delta\,([a,\ b]) = \begin{cases} [\delta,\ b]\,, & a \geq \delta, \\ [a,\ -\delta]\,, & b \leq -\delta, \\ [a,\ b]\,, & \text{в остальных случаях}, \end{cases} \tag{4}$$

где δ – фиксированное положительное число.

Одной из задач теории интервальных округлений является ограничение множества Φ, т.е. выделения в нем в определенном смысле максимальных подмножеств $\overline{\Phi}$, содержащих все регулярные округления, в которые не попадали бы отображения, подобные примерам (2)–(4). Одним из бросающихся в глаза свойств регулярных округлений является тот факт, что левый (правый) конец отрезка $\varphi^{(k,\ l)}\,(A)$ является функцией только левого (правого) конца отрезка A. Отображения φ_M, φ_U этим свойством, как легко видеть, не обладают. В настоящей заметке во множестве Φ выделяется подмножество Φ^F I-округений, для которых указанное свойство является характеристическим. Такие I-округления естественно назвать *функциональными* (F-округлениями).

2. Понятие *F*-округления

Рассмотрим два множества F_i $(i = 1,\ 2)$ функций $\mathrm{R} \to \mathrm{R}$, удовлетворяющих условиям:

$$f \in F_1 \Rightarrow (\forall x)\,(f\,(x) \le x)\,; \quad f \in F_2 \Rightarrow (\forall x)\,(x \le f\,(x))\,; \tag{5}$$

$$f \in F_i \Rightarrow (x \le y \Rightarrow f\,(x) \le f\,(y))\,; \tag{6}$$

$$f,\ g \in F_i \Rightarrow (fg = gf)\,; \tag{7}$$

$$f \in F_i \Rightarrow f^2 = f. \tag{8}$$

($f_1 f_2$ – композиция отображений $f_1,\ f_2$: $(f_1 f_2)\,(x) = f_2\,(f_1\,(x))$).

Легко видеть, что множества $F_1,\ F_2$ обладают тем свойством, что если $f \in F_1$, $g \in F_2$ и $x \le y$, то $f\,(x) \le g\,(y)$ и, таким образом, можно при условии $x \le y$ рассматривать интервал $[f\,(x)\,;\ g\,(y)]$.

Определение 1. Отображение $\varphi :\ \mathrm{IR} \to \mathrm{IR}$, действующее по правилу

$$\varphi\,([\underline{a};\ \overline{a}]) = [f\,(\underline{a})\,;\ g\,(\overline{a})]\,,\ f \in F_1,\ g \in F_2, \tag{9}$$

назовем *функциональным* округлением (F-округлением).

Разумеется, регулярные округления являются функциональными, но класс F-округлений не исчерпывается только r-округлениями. Например, к функциональным отображениям относятся δ-округления – (4), *нуль-кусочные* округления, которые определяются следующим образом:

$$\varphi_0^{(k,\ l)}\,([a;\ b]) = \begin{cases} \left[a;\ b_l^+\right], & a \ge 0, \\ \left[a_k^-;\ b\right], & b \le 0, \\ \left[a_k^-;\ b_l^+\right], & a < 0 < b. \end{cases} \tag{10}$$

3. Операции и алгебраические структуры F-округлений

Под произведением $\varphi\psi$ округлений $\varphi,\ \psi$ принято понимать композицию этих отображений $(\varphi\psi)\,(A) = \psi\,(\varphi\,(A))$.

Теорема 1. [2] *Произведения $\varphi\psi$ и $\psi\varphi$ I-округлений φ и ψ являются I-округлениями тогда и только тогда, когда φ и ψ коммутируют: $\varphi\psi = \psi\varphi$.*

Предложение 1. *F-округления коммутируют друг с другом $\varphi\psi = \psi\varphi$.*

Действительно, если $\varphi\,(A) = [f_1\,(\underline{a})\,; g_1\,(\overline{a})]\,,\ \psi\,(A) = [f_2\,(\underline{a})\,; g_2\,(\overline{a})]$, то $(\varphi\psi)\,(A) = \psi\,(\varphi\,(A)) = \psi\,([f_1\,(\underline{a})\,; g_1\,(\overline{a})]) = [f_2\,(f_1\,(\underline{a}))\,; g_2\,(g_1\,(\overline{a}))] = [f_1\,(f_2\,(\underline{a}))\,; g_1\,(g_2\,(\overline{a}))] = [f_1\,(f_2\,(\underline{a}))\,; g_1\,(g_2\,(\overline{a}))] = \varphi\,(\psi\,(A)) = (\psi\varphi)\,(A)$.

В силу *теоремы 1* из *предложения 1* следует, что произведение двух F-округлений является I-округлением. Кроме того, имеет место более сильное утверждение.

Предложение 2. *Произведение двух F-округлений является F-округлением.*

Доказательство следует из замкнутости множеств F_1, F_2 относительно умножения отображений, что, в свою очередь, сводится к не представляющей трудностей проверке для произведения $f_1 \cdot f_2$ $(f_1, f_2 \in F_i,\ i = 1, 2)$ условий (5)–(8).

Таким образом, имеет место

Теорема 2. *Алгебра $\left\langle \Phi^F;\ \cdot\ \right\rangle$ является коммутативной полугруппой идемпотентов.*

Рассмотрим далее на множествах F_1, F_2 соответственно операции, определяемые условиями

$$f_1,\ f_2 \in F_1:\ (f_1 + f_2)(x) = \max\left(f_1(x),\ f_2(x)\right),$$

$$f_1,\ f_2 \in F_2:\ (f_1 + f_2)(x) = \min\left(f_1(x),\ f_2(x)\right).$$

Предложение 3. *Множества F_1, F_2 замкнуты относительно операции сложения: $f_1, f_2 \in F_1 \Rightarrow f_1 + f_2 \in F_1$; $f_1, f_2 \in F_2 \Rightarrow f_1 + f_2 \in F_2$.*

Доказательство сводится к несложной, но кропотливой, а от того утомительной проверке условий (5)–(8).

Зададим на множестве Φ операцию сложения, полагая $(\varphi + \psi)(A) = \varphi(A) \cap \psi(A)$.

Без труда устанавливается, что сумма двух F-округлений является I-округлением, более того, справедливо

Предложение 4. *Сумма двух F-округлений является F-округлением.*

Действительно, $(\varphi + \psi)([\underline{a}; \overline{a}]) = \varphi([\underline{a}; \overline{a}]) + \psi([\underline{a}; \overline{a}]) = [f_1(\underline{a}); g_1(\overline{a})] \cap [f_2(\underline{a}); g_2(\overline{a})] = [\max(f_1(\underline{a}), f_2(\underline{a})); \max(g_1(\overline{a}), g_2(\overline{a}))]$, где $f_1,\ f_2 \in F_1$; $g_1, g_2 \in F_2$. Окончание доказательства теперь сводится к предложению 3.

Определение 2. [8] Алгебра $\langle X, +, \cdot\rangle$, в которой обе операции ассоциативны, кроме того, сложение коммутативно, идемпотентно и выполняются левый и правый дистрибутивные законы: $x(y + z) = xy + xz$, $(x + y)z = xz + yz$, называется *идемпотентным полукольцом.*

Предложение 5. *Для F-округлений выполняются левый и правый дистрибутивные законы.*

Действительно, $(\chi(\varphi+\psi))(A)=(\varphi+\psi)(\chi(A))=\varphi(\chi(A))\cap\psi(\chi(A)) = (\chi\varphi)(A)\cap(\chi\psi)(A) = (\chi\varphi+\chi\psi)(A)$, то есть $\chi(\varphi+\psi) = \chi\varphi+\chi\psi((\varphi+\psi)\cdot \cdot\chi)(A) = (\chi(\varphi+\psi))(A) = (\chi\varphi+\chi\psi)(A) = (\varphi\chi+\psi\chi)(A)\,, \quad (\varphi+\psi)\chi = \varphi\chi+\psi\chi$.

Таким образом, справедлива

Теорема 2. *Алгебра $\left\langle \Phi^F;+,\cdot\right\rangle$ является коммутативным идемпотентным полукольцом.*

Определение 3. [7] Определим *объединение округлений* следующим образом:

$$(\forall A\in \mathrm{IR})\left(\left(\varphi\cup\psi\right)(A)=\varphi(A)\cup\psi(A)\right). \tag{11}$$

Легко видеть, что объединение двух округлений удовлетворяет аксиомам (O.1) и (O.2), но совсем не обязано быть идемпотентным, то есть не всегда является интервальным округлением. Однако имеют место включения $\varphi\cup\psi\subseteq\varphi\psi\subseteq(\varphi\cup\psi)\cdot(\varphi\cup\psi)\subseteq\varphi\psi\cdot\varphi\psi=\varphi\psi$, таким образом

$$\varphi\psi=(\varphi\cup\psi)\cdot(\varphi\cup\psi)\,. \tag{12}$$

Предложение 6. *Если округления φ, χ коммутируют между собой и таковы, что их объединение также округление, то их композиция совпадает с объединением $(\varphi\chi)(A)=\varphi(A)\cup\chi(A)$.*

Из (O.1) и (O.2) следует, что $(\forall A\in IR)\,(A\subseteq\varphi(A))\Rightarrow\chi(A)\subseteq\chi(\varphi(A))$. Запишем кратко $\chi\subseteq\varphi\chi$, аналогично можно получить включение: $\varphi\subseteq\chi\varphi$. Рассмотрим $\varphi\cup\chi\subseteq\varphi\chi\cup\chi\varphi$, тогда в силу коммутативности $\varphi\cup\chi\subseteq\varphi\chi$. С другой стороны, $\varphi\subseteq\varphi\cup\chi$ и $\chi\subseteq\varphi\cup\chi$, тогда $\varphi\chi\subseteq(\varphi\cup\chi)\cdot(\varphi\cup\chi)\subseteq\varphi\cup\chi$. Таким образом, мы получили, что $\varphi\cup\chi\subseteq\varphi\chi\subseteq\varphi\cup\chi$, следовательно, $\varphi\chi=\varphi\cup\chi$.

Предложение 7. *Произведение $\varphi\psi$ F-округлений φ, ψ совпадает с объединением этих округлений.*

Библиографический список

1. *Каминская Э.Л., Каминский Т.Э.* К теории округлений // Сб. научных трудов МГПИ им. Ленина “Вычислительная математика и программирование”. М., 1983. С. 89–36.

2. *Каминский Т.Э.* К теории интервальных округлений // Исследования по математическому анализу и методике преподавания математики. Вологда: Русь, 2000. С. 23–36.
3. *Kaminsky T.E., Kreinovich V.* Natural requirements for natural roundings lead to a hardware-independent characterization of standard rounding procedures // Notes on intuitionisic fuzzy sets. 1998. Vol. II. № 3. P. 57–64.
4. *Каминский Т.Э., Крюкова А.Л.* Дистрибутивность решетки интервальных округлений // Тр. третьих Колмогоровских чтений. Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2005. С. 134–137.
5. *Крюкова А.Л.* О полугруппе интервальных округлений // Тр. 35-й региональной молодежной конференции 26–30 января 2004 года. Екатеринбург, 2004. С. 34–37.
6. *Крюкова А.Л.* К описанию идемпотентного полукольца интервальных округлений // Сб. трудов молодых ученых. Череповец: ГОУ ВПО ЧГУ, 2005. С. 163–166.
7. *Крюкова А.Л.* Алгебраические и порядковые структуры интервальных округлений // Интервальный анализ / Тр. XIII Байкальской международной школы-семинара “Методы оптимизации и их приложения”, Иркутск, Байкал, 2–8 июля 2005 г. Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 2005. Т. 4. С. 56–61.
8. *Соболевский А.Н.* Интервальная арифметика и линейная алгебра над идемпотентными полукольцами // Доклады РАН. 1999. Т. 39. № 6. С. 747–749.

О некоторых свойствах преобразований Фурье функций из пространства L^P

С.В. Зотиков

1. Пусть на $[0,1[$ заданы две произвольные ортонормированные системы функции (о.н.с.) $\varphi=(\varphi_k)_{k=0}^{\infty}$ и $\psi=(\psi_k)_{k=0}^{\infty}$. Положим для $\forall k\in\mathrm{N}$ и для $\forall l\in\mathrm{N}$ ($\mathrm{N}=\{0,1,2\dots\}$):

$$\varphi_k(l+t)=\varphi_k(t),\quad \psi_k(l+t)=\psi_t(t),\quad \text{где}\quad t\in[0;1[.$$

Скрещенным произведением о.н.с. φ на о.н.с. ψ называется функция $K_{\varphi\psi}$, определенная на $\mathrm{R}_0 \times \mathrm{R}_0$ соотношением

$$K_{\varphi\psi}(x, y) = \varphi_{[y]}(x) \cdot \psi_{[x]}(y),$$

где $[a]$ – целая часть числа $\in \mathrm{R}_0$ (см. [1]). Легко видеть, что функция $K_{\varphi\psi}$ может рассматриваться как континуальный аналог каждой из о.н.с. φ и ψ.

Если φ и ψ – ограниченные о.н.с., то их скрещенное произведение $K_{\varphi\psi}$ порождает для всякой функции $f \in L^1(0; \infty)$ интегральные преобразования вида

$$\hat{f}(y) = \int\limits_0^\infty f(x)\overline{K_{\varphi\psi}(x, y)}dx, y \in \mathrm{R}_0 \quad \text{и} \quad f^*(x) = \int\limits_0^\infty f(y)K_{\varphi\psi}(x, y)dy, x \in \mathrm{R}_0, \tag{1}$$

которые являются аналогами классического преобразования Фурье и которые мы называем преобразованиями Фурье функции f по отношению к $K_{\varphi\psi}$. Очевидно, что преобразование $\hat{f}$ является континуальным аналогом коэффициентов Фурье интегрируемой функции f по о.н.с. φ, а преобразование f^* является континуальным аналогом коэффициентов Фурье той же функции по о.н.с. ψ. Отметим, что если имеют место соотношения (1), то при этом выполняются неравенства

$$\forall y \in \mathrm{R}_0 : \quad \left|\hat{f}(y)\right| \le C_{\varphi\psi} \|f\|_1 \quad \text{и} \quad \forall x \in \mathrm{R}_0 : \quad |f^*(x)| \le C_{\varphi\psi} \|f\|_1 ,$$

где $C_{\varphi\psi}$ – абсолютная константа, зависящая от φ и ψ.

Для функции f из пространства $L^2_{[0;+\infty[}$ ее преобразования Фурье по отношению к произвольному скрещенному произведению $K_{\varphi\psi}$ определены в работе [2] равенствами:

$$\hat{f}(y) \overset{L^2}{=} \int\limits_0^\infty f(x)\overline{K_{\varphi\psi}(x, y)}dx, \quad f^*(x) \overset{L^2}{=} \int\limits_0^\infty f(y)K_{\varphi\psi}(x, y)dy. \tag{2}$$

При этом выполняются неравенства $\left\|\hat{f}\right\|_2 \le \|f\|_2$ и $\|f^*\|_2 \le \|f\|_2$, которые являются континуальными аналогами неравенства Бесселя, связывающего коэффициенты Фурье функции $f \in L^2(0; 1)$ по любой о.н.с. с нормой функции f. Если о.н.с. φ является полной, то при любой о.н.с. ψ имеет место равенство $\left\|\hat{f}\right\|_2 = \|f\|_2$. Если же полной является о.н.с. ψ, то при любой о.н.с. φ выполняется равенство $\|f^*\|_2 = \|f\|_2$ (см. теоремы 1 и 2 в [2]). Эти равенства вместе с соотношением $\left\|\hat{f}\right\|_2 = \|f^*\|_2 = \|f\|_2$ в случае полноты обеих компонент скрещенного произведения $K_{\varphi\psi}$ являются континуальными аналогами равенства Парсеваля, связывающего коэффициенты Фурье функции $f \in L^2(0;1)$ по полной о.н.с. с нормой этой функции.

Пусть теперь f и g – произвольные функции из пространства $L^2(0;\infty)$. Заменяя в указанных выше равенствах f на $tf + g$ и проварьировав соответствующим образом скаляр t, получаем континуальные аналоги поляризованной формулы Парсеваля, которые доставляются следующими утверждениями:

Предложение 1. *Если φ – произвольная полная о.н.с., ψ – произвольная о.н.с., то для любых функций f и g из пространства $L^2(0;\infty)$и их преобразований Фурье $\hat{f}$ и $\hat{g}$ по отношению к скрещенному произведению $K_{\varphi\psi}$ выполняется равенство*

$$\int\limits_0^\infty \hat{f}(y)\overline{\hat{g}(y)}dy = \int\limits_0^\infty f(x)\overline{g(x)}dx.$$

Предложение 2. *Если φ – произвольная о.н.с., а ψ – произвольная полная о.н.с., то для любых функций f и g из пространства $L^2(0;\infty)$ и их преобразований Фурье f^* и g^* по отношению к $K_{\varphi\psi}$ справедливо равенство*

$$\int\limits_0^\infty f^*(x)\overline{g^*(x)}dx = \int\limits_0^\infty f(y)\overline{g(y)}dy.$$

Предложение 3. *Если φ и ψ – произвольные полные о.н.с., то для любых функций $f, g \in L^2(0;\infty)$ и их преобразований Фурье по отношению к $K_{\varphi\psi}$ имеет место соотношение*

$$\int\limits_0^\infty \hat{f}(y)\overline{\hat{g}(y)}dy = \int\limits_0^\infty f^*(x)\overline{g^*(x)}dx = \int\limits_0^\infty f(x)\overline{g(x)}dx.$$

2. В заметке [3] для любой функции f из пространства $L^P(0;\infty)$, $1 \le p \le 2$, определены ее преобразования Фурье по отношению к скрещенному произведению $K_{\varphi\psi}$, образованному ограниченными о.н.с. φ и

ψ, следующими соотношениями:

$$\hat{f}(y) \overset{L^q}{=} \int\limits_0^\infty f(x)\overline{K_{\varphi\psi}(x,y)}dx, \;\; f^*(x) \overset{L^q}{=} \int\limits_0^\infty f(y)K_{\varphi\psi}(x,y)dy, \text{где } \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1. \tag{3}$$

При этом выполняются неравенства $\left\|\hat{f}\right\|_q \leq C_{\varphi\psi}\left\|f\right\|_p$, $\left\|f^*\right\|_q \leq C_{\varphi\psi}\left\|f\right\|_p$, где $C_{\varphi\psi}$ – абсолютная константа, зависящая от φ и ψ. Очевидно, что соотношения (3) при $p=1$ дают равенства (1), а при $p=2$ – равенства (2), но лишь при условии ограниченности о.н.с. φ и ψ.

Имеет место

Теорема 1. *Пусть φ и ψ – произвольные ограниченные о.н.с., а $K_{\varphi\psi}$ – их скрещенное произведение. Тогда для любых функций f и g из пространства $L^P(0;\infty)$, $1 \leq p \leq 2$, и их преобразований Фурье $\hat{f}$ и g^* по отношению к $K_{\varphi\psi}$ справедливо равенство*

$$\int\limits_0^\infty \hat{f}(y)\overline{g(y)}dy = \int\limits_0^\infty f(x)\overline{g^*(x)}dx. \tag{4}$$

Доказательство. Пусть скрещенное произведение $K_{\varphi\psi}$ образовано произвольными ограниченными о.н.с. φ и ψ, функции f и g – произвольные функции из пространства $L^P(0;\infty)$, $1 \leq p \leq 2$, а $\hat{f}$ и g^* – соответствующие преобразования Фурье этих функций по отношению к $K_{\varphi\psi}$

$$\hat{f}(y) \overset{L^q}{=} \int\limits_0^\infty f(x)\overline{K_{\varphi\psi}(x,y)}dx, \quad g^*(x) \overset{L^q}{=} \int\limits_0^\infty g(y)K_{\varphi\psi}(x,y)dy, \;\; \text{где } \; \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

Теперь отметим, что интегралы в обеих частях доказываемого равенства (4) существуют и сходятся абсолютно. Действительно, по условию $f, g \in L^P(0;\infty)$, $1 \leq p \leq 2$, а в силу соотношений (3) $\hat{f}, g^* \in L^q(0;\infty)$, $q \geq 2$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Тогда при $p \neq 1$ оба интеграла в (4) сходятся абсолютно в силу неравенства Гельдера, а при $p=1$ – в силу ограниченности $\hat{f}$ и g^*.

Далее для произвольного $a \in \mathrm{R}_0$ положим

$$\hat{f}_a(y) = \int\limits_0^a f(x)\overline{K_{\varphi\psi}(x,y)}dx, \quad y \in \mathrm{R}_0.$$

В силу определения $\hat{f}$ имеем $\hat{f}(y) \overset{L^q}{=} \lim\limits_{a\to+\infty} \hat{f}_a(y)$, $y \in \mathrm{R}_0$, $q \geq 2$.

Умножим обе части предыдущего равенства на $\overline{g}(y)$ и проинтегрируем полученное равенство по промежутку $[0; b[$, где b – произвольное число из R_+:

$$\int\limits_0^b \hat{f}_a(y)\overline{g(y)}dy = \int\limits_0^b \overline{g(y)} \int\limits_0^a f(x)\overline{K_{\varphi\psi}(x,y)}dxdy.$$

Так как оба интеграла справа берутся по конечным промежуткам, то

$$\int\limits_0^b \hat{f}_a(y)\overline{g(y)}dy = \int\limits_0^a f(x)(\overline{\int\limits_0^b g(y)K_{\varphi\psi}(x,y)dy})dx = \int\limits_0^a f(x)\overline{g_b^*(x)}dx$$

Устремляя $a \to +\infty$, получим

$$\lim_{a\to+\infty} \int\limits_0^b \hat{f}_a(y)\overline{g(y)}dy = \lim_{a\to+\infty} \int\limits_0^a f(x)\overline{g_b^*(x)}dx,$$

то есть

$$\int\limits_0^b \hat{f}(y)\overline{g(y)}dy = \int\limits_0^\infty f(x)\overline{g_b^*(x)}dx.$$

Поскольку в силу определения преобразования g^* функции g выполняется соотношение $\|g_b^* - g^*\|_q \underset{b\to\infty}{\longrightarrow} 0$, то, переходя в последнем равенстве к пределу при $b \to +\infty$, завершаем доказательство теоремы 1.

Следствие 1. *Для любой функции $f \in L^P(0;\infty)$, $1 \leq p \leq 2$ и ее преобразований Фурье $\hat{f}$ и f^* по отношению к скрещенному произведению $K_{\varphi\psi}$, образованному любыми ограниченными о.н.с. φ и ψ, выполняется равенство*

$$\int\limits_0^\infty \hat{f}(y)\overline{f(y)}dy = \int\limits_0^\infty f(x)\overline{f^*(x)}dx.$$

Следствие 2. *Если φ – ограниченная о.н.с., то для любых функций $f, g \in L^P(0;\infty)$, $1 \leq p \leq 2$ и преобразований Фурье $\hat{f}, g^*, \hat{\hat{g}}, \overline{f}^*$ по* *отношению к $K_{\varphi\varphi}$ имеют место соотношения*

$$\int\limits_0^\infty \hat{f}(y)\overline{g(y)}dy = \int\limits_0^\infty f(x)\,\overset{\wedge}{\overline{g(x)}}\,dx, \quad \int\limits_0^\infty g(y)\overline{f(y)}^{\,*}dy = \int\limits_0^\infty g^*(x)\overline{f(x)}dx.$$

Следствие 3. *Если φ – ограниченная о.н.с., то для любой функции $f \in L^P(0;\infty)$, $1 \le p \le 2$, и преобразований Фурье функций f и $\overline{f}$ по отношению к $K_{\varphi\varphi}$ справедливы равенства:*

$$\int\limits_0^\infty \hat{f}(y)\overline{f(y)}dy = \int\limits_0^\infty f(x)\,\overset{\wedge}{\overline{f(x)}}\,dx, \quad \int\limits_0^\infty f(y)\overline{f(y)}^{\,*}dy = \int\limits_0^\infty f^*(x)\overline{f(x)}dx.$$

3. Теперь заметим, что в случае, когда функции $f, g \in L^2(0;\infty)$, требование ограниченности о.н.с. φ и ψ в условии теоремы 1 можно снять. Точнее, справедлива

Теорема 2. *Пусть φ и ψ произвольные о.н.с., а $K_{\varphi\psi}$ – их скрещенное произведение. Тогда для любых функций f и g из пространства $L^2(0;\infty)$ и их преобразований Фурье $\hat{f}, f^*, \hat{g}$ и g^* по отношению к $K_{\varphi\psi}$ имеют место соотношения*

$$\int\limits_0^\infty \hat{f}(y)\overline{g(y)}dy = \int\limits_0^\infty f(x)\overline{g^*(x)}dx, \tag{4'}$$

$$\int\limits_0^\infty \hat{f}(y)\overline{\hat{g}(y)}dy = \int\limits_0^\infty f(x)\overline{\hat{g}^*(x)}dx, \tag{5}$$

$$\int\limits_0^\infty f^*(x)\overline{g^*(x)}dx = \int\limits_0^\infty f(y)\overline{\overset{\wedge}{g^*}(y)}dy. \tag{6}$$

Доказательство. Пусть скрещенное произведение $K_{\varphi\psi}$ образованно произвольными о.н.с. φ и ψ, функции f и g – произвольные функции из пространства $L^2(0;\infty)$. В силу определений их преобразований Фурье по отношению к $K_{\varphi\psi}$ (см. (2)) вместе с функциями f и g пространству $L^2(0;\infty)$ принадлежат и их преобразования Фурье $\hat{f}, f^*, \hat{g}$ и g^*. Поэтому все интегралы в доказываемых равенствах существуют и сходятся абсолютно в силу неравенства Коши для интегралов. Доказательство равенства (4′) повторяет доказательство теоремы 1 с учетом соотношений (2), где φ и ψ – произвольные о.н.с. Таким же способом доказываются соотношения (5) и (6). Кроме этого, равенство (5) можно получить из равенства (4′) заменой в нем g на $\hat{g}$. Равенство (6) можно получить из равенства (4′) сначала заменой в нем f на f^*, затем поменяв ролями f и g, и, наконец, переходя от полученного равенства к комплексно-сопряженному равенству. Теорема 2 доказана.

Замечание 1. Из справедливости соотношения (4′) следует, что все равенства, доставляемые следствиями 1–3 из теоремы 1, справедливы для любых функций $f, g \in L^2(0;\infty)$ и соответствующих преобразований Фурье по отношению к $K_{\varphi\psi}$ или $K_{\varphi\varphi}$, где φ и ψ – любые о.н.с.

Замечание 2. Используя предложения 1–3, можно установить вид равенств (5) и (6) в случаях, когда φ и \ или ψ – полные о.н.с. и \ или когда $\varphi = \psi$. Например, из предложения 1 и равенства (5) теоремы 2 следует

Предложение 4. *Если φ – произвольная полная о.н.с., ψ – произвольная о.н.с., то для любых функций f и g из пространства $L^2(0;\infty)$ и их преобразований Фурье по отношению к скрещенному произведению $K_{\varphi\psi}$ выполняется соотношение*

$$\int_0^\infty \hat{f}(y)\overline{\hat{g}(y)}dy = \int_0^\infty f(x)\overline{g(x)}dx = \int_0^\infty f(x)\overline{\hat{g}^*(x)}dx.$$

Библиографический список

1. *Виленкин Н.Я., Зотиков С.В.* О скрещенных произведениях ортонормированных систем функций // Матем. заметки. 1973. Т. 13. № 3. С. 469–480.
2. *Зотиков С.В.* Определение преобразования и интеграла Фурье по отношению к скрещенному произведению ортонормированных систем функций в пространстве L^2 // Применение функционального анализа в теории приближений. КГУ: Калинин, 1988. С. 26–32.
3. *Зотиков С.В.* О преобразовании Фурье по отношению к скрещенному произведению ортонормированных систем функций в пространстве L^P. Конструктивная теория функций. Тезисы докладов конференции, посвященной 70-летию проф. В.С. Виденского. СПб., 1992. С. 29–30.

О граничной задаче для системы составного типа с младшими членами

Н.М. Курбатова

Рассмотрим систему

$$
\begin{aligned}
U_x + V_y + W_z + a_{11}U + a_{12}V + a_{13}W = 0,\\
\alpha U_x + U_y - V_x + a_{21}U + a_{22}V + a_{23}W = 0,\\
\beta U_y + U_z - W_x + a_{31}U + a_{32}V + a_{33}W = 0.
\end{aligned} \tag{1}
$$

Характеристический определитель системы имеет вид

$$\lambda_1(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \alpha\lambda_1\lambda_2 + \beta\lambda_2\lambda_3),$$

т.е. система (1) составного типа, если

$$\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} < 2.$$

Относительно коэффициентов системы α, β, a_{ij} будем предполагать, что они являются непрерывно дифференцируемыми функциями переменных x, y, z.

Из второго и третьего уравнений системы (1) выразим функции U и V соответственно

$$
\begin{aligned}
V = \int\limits_0^x (\alpha U_x + U_y + a_{21}U + a_{22}V + a_{23}W)dx + \varphi(y,z),\\
W = \int\limits_0^x (\beta U_y + U_z + a_{31}U + a_{32}V + a_{33}W)dx + \phi(y,z).
\end{aligned} \tag{2}
$$

Подставляя соотношения (2) в первое уравнение системы (1), получим

$$
\begin{gathered}
U_x + \int\limits_0^x (\alpha_y U_x + \alpha U_{xy} + U_{yy} + \tfrac{\partial a_{21}}{\partial y}U + a_{21}U_y + \tfrac{\partial a_{22}}{\partial y}V + \tfrac{\partial a_{23}}{\partial y}W +\\
a_{23}W_y + \beta_z U_y + \beta U_{yz} + U_{zz} + \tfrac{\partial a_{31}}{\partial z}U + a_{31}U_z + \tfrac{\partial a_{32}}{\partial z}V +\\
\tfrac{\partial a_{33}}{\partial z}W + a_{33}W_z)dx + \varphi_y + \phi_z + a_{11}U + a_{12}V + a_{13}W = 0.
\end{gathered} \tag{3}
$$

При $x = x_0$ имеем

$$U_x\big|_{x=x_0} = -\varphi_y - \phi_z - | \tag{4}$$

Продифференцировав уравнение (3) по переменной x, имеем

$$\begin{gathered}U_{xx}+U_{yy}+U_{zz}+\alpha U_{xy}+\beta U_{yz}+(\alpha_y+a_{11})U_x+(a_{21}+\beta_z)U_y+\\ a_{31}U_z+a_{12}V_x+a_{22}V_y+a_{32}V_z+a_{13}W_x+a_{23}W_y+a_{33}W_z+\\ (\tfrac{\partial a_{11}}{\partial x}+\tfrac{\partial a_{21}}{\partial y}+\tfrac{\partial a_{31}}{\partial z})U+(\tfrac{\partial a_{12}}{\partial x}+\tfrac{\partial a_{22}}{\partial y}+\tfrac{\partial a_{32}}{\partial z})V+\\ (\tfrac{\partial a_{13}}{\partial x}+\tfrac{\partial a_{23}}{\partial y}+\tfrac{\partial a_{33}}{\partial z})W=0.\end{gathered} \tag{5}$$

Предположим, что $a_{22}=a_{23}$, заменим в уравнении (5) сумму V_x+W_y ее значением из первого уравнения системы (1), а вместо V_x и W_x их значения из второго и третьего уравнений системы (1), предполагая при этом, что

$$\begin{gathered}a_{23}=a_{32}=a_{11}=0,\\ \tfrac{\partial a_{12}}{\partial x}+\tfrac{\partial a_{22}}{\partial y}=0,\\ \tfrac{\partial a_{13}}{\partial x}+\tfrac{\partial a_{33}}{\partial z}=0,\end{gathered}$$

получим уравнение

$$\begin{gathered}U_{xx}+U_{yy}+U_{zz}+\alpha U_{xy}+\beta U_{yz}+(\alpha_y-\alpha a_{12}+a_{11}-a_{12})U_x+\\ (\beta a_{13}+\beta_z+a_{12}+a_{21})U_y+(a_{13}+a_{31})U_z+\\ (a_{12}a_{21}+a_{13}a_{31})U=0.\end{gathered} \tag{6}$$

При условии, что $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}<2$, уравнение (6) эллиптическое.

Система уравнений (2), (4), (6) эквивалентна системе (1). Будем рассматривать систему (1) в области D, расположенную в полупространстве $x>0$, граница которой состоит из поверхности Ляпунова S, ортогонально подходящей к плоскости $x=0$, и множества E части плоскости $x=0$, на которую поверхность S проектируется однозначно. В области D для системы (1) рассмотрим задачу:

Найти регулярное решение системы (1), удовлетворяющее граничным условиям

$$\begin{gathered}V|_E=f(y,z),\quad W|_E=g(y,z),\\ U|_S=h(x,y,z),\quad U_x|_E=-f_y-g_z-a_{12}f-a_{13}g.\end{gathered} \tag{7}$$

Третье и четвертое соотношения (7) представляют собой смешанную задачу для эллиптического уравнения (6), которая, как известно, при

$$a_{12}a_{21}+a_{13}a_{31}\le 0$$

имеет единственное решение. Таким образом, функция U находится однозначно.

Учитывая первое и второе условия (7) и уравнения (2) ,относительно функций V и W получим уравнения Вольтерра второго рода

$$V = \int\limits_0^x (\alpha U_x + U_y + a_{21}U + a_{22}V)dx + f(y,z),$$

$$W = \int\limits_0^x (\beta U_y + U_z + a_{31}U + a_{33}W)dx + g(y,z),$$

отсюда следует, что V и W находятся однозначно. Таким образом, справедлива следующая

Теорема. *Для системы уравнений* (1) *с непрерывно дифференцируемыми коэффициентами в области* D *при ограничениях на коэффициенты*

$$a_{22} = a_{23},$$

$$a_{23} = a_{32} = a_{11} = 0,$$
$$\frac{\partial a_{12}}{\partial x} + \frac{\partial a_{22}}{\partial y} = 0,$$
$$\frac{\partial a_{13}}{\partial x} + \frac{\partial a_{33}}{\partial z} = 0,$$

задача (7)

$$a_{12}a_{21} + a_{13}a_{31} \leq 0,$$
$$\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} < 2.$$

имеет единственное решение.

Библиографический список

1. *Курбатова Н.М.* Об одной системе первого порядка с постоянными коэффициентами и краевых задачах для нее // Дифференциальные операторы и их приложения: Межвузовский сборник научных работ. Чита: ЧПИ, 1991. С. 30–36.
2. *Курбатова Н.М.* О граничной задаче для одной системы составного типа. Проблемы модернизации инфраструктуры транссибирской магистрали: Сборник научных трудов. Чита: ЗабИЖТ, 2005. С. 219–221.
3. *Миранда К.* Уравнения с частными производными эллиптического типа. М.: ИЛ, 1957. 256 с.
4. *Янушаускас А.И.* Об одной системе первого порядка // Сибирск. матем. журнал, 1973. Т. 14. № 5. С. 1149–1152.

Уточнение проекционной константы $\lambda(n-3, n)$

В.В. Локоть

Пусть Y – банахово пространство и X – замкнутое подпространство Y. Относительной проекционной константой X в Y называется число

$$\lambda(X,Y) = \inf\{||\pi||, \quad \pi \ - \ \text{проекция } Y \ \text{ на } X\}.$$

В случае конечномерных пространств $X_k \subset Y_n$ обозначим $\lambda(k,n) = \sup\{\lambda(X_k,Y_n) \ |X_k \subset Y_n\}$. Точное значение чисел $\lambda(k,n)$ для $k \leq n-2$ неизвестно.

В качестве Y_n возьмем пространство l_1^n элементов $y = \{y_i\}$ с нормой $||y|| = \sum\limits_{i=1}^{n} |y_i|$, а $X_{n-3} = f^{-1}(0) \cap g^{-1}(0) \cap h^{-1}(0)$, где

$$\begin{gathered} f = (1\ldots1, 0\ldots0, 0\ldots0, s\ldots s, s\ldots s, 0\ldots0, r\ldots r), \\ g = (0\ldots0, 1\ldots1, 0\ldots0, s\ldots s, 0\ldots0, s\ldots s, r\ldots r), \\ h = (\underbrace{0...0}_{m}, \underbrace{0...0}_{m}, \underbrace{1...1}_{m}, \underbrace{0...0}_{m}, \underbrace{s...s}_{m}, \ \underbrace{s...s}_{m}, \ \underbrace{r...r}_{m}) \end{gathered}$$

линейные функционалы, определенные на l_1^n $(0 \leq s \leq 1,\ 0 \leq r \leq 1,\ m \geq 1)$, $f^{-1}(0) = \{y \in l_1^n | f(y) = \sum\limits_{i=1}^{n} f_i y_i = 0\}$ – гиперплоскость в пространстве l_1^n. Аналогично определяются $g^{-1}(0)$ и $h^{-1}(0)$.

Мы рассматриваем случай $n = 7m$.

Известно, что любая проекция Y_n на X_{n-3} имеет вид

$$\begin{gathered} \pi_{\alpha,\beta,\gamma}(y) = y - \alpha f(y) - \beta g(y) - \gamma h(y) \text{ при условии} \\ f(\alpha) = g(\beta) = h(\gamma) = 1,\ \ f(\beta) = f(\gamma) = g(\alpha) = g(\gamma) = h(\alpha) = h(\beta) = 0. \end{gathered} \tag{1}$$

Норма оператора $\pi_{\alpha,\beta,\gamma}$ вычисляется по формуле $||\pi_{\alpha,\beta,\gamma}|| = \max M_j$, где $M_j = \sum\limits_{i=1}^{n} |\delta_{ij} - \alpha_i f_j - \beta_i g_j - \gamma_i h_j|$, $(j = 1, \ldots, n)$.

Введем обозначения:

$$A_k = \sum_{i=(k-1)m+1}^{km} \alpha_i,\ \ B_k = \sum_{i=(k-1)m+1}^{km} \beta_i,\ C_k = \sum_{i=(k-1)m+1}^{km} \gamma_i, \\ (k = 1, \ldots, 7).$$

Условия (1) примут вид:

$$\begin{array}{ll} A_1 = 1 - s(A_4 + A_5) - rA_7, & A_2 = -s(A_4 + A_6) - rA_7, \\ A_3 = -s(A_5 + A_6) - rA_7, & \\ B_1 = -s(B_4 + B_5) - rB_7, & B_2 = 1 - s(B_4 + B_6) - rB_7, \\ B_3 = -s(B_5 + B_6) - rB_7, & \\ C_1 = -s(C_4 + C_5) - rC_7, & C_2 = -s(C_4 + C_6) - rC_7, \\ C_3 = 1 - s(C_5 + C_6) - rC_7. & \end{array} \qquad (2)$$

Оценим $M_j = \sum\limits_{i=1}^{7m} |\delta_{ij} - \alpha_i f_j - \beta_i g_j - \gamma_i h_j|$.

I. $1 \le j \le m$. $\sum\limits_{j=1}^{m} M_j = \sum\limits_{j=1}^{m} \left(\sum\limits_{i=1}^{m} |\delta_{ij} - \alpha_i| + \sum\limits_{i=m+1}^{7m} |\alpha_i| \right) \ge m + (m-2)A_1 + m(-A_2 - A_3 + A_4 + A_5 - A_6 + A_7)$.

II. $m+1 \le j \le 2m$. $\sum\limits_{j=m+1}^{2m} M_j = \sum\limits_{j=m+1}^{2m} \left(\sum\limits_{i=1}^{m} |\beta_i| + \sum\limits_{i=m+1}^{2m} |\delta_{ij} - \beta_i| + \sum\limits_{i=2m+1}^{7m} |\beta_i| \right) \ge m + (m-2)B_2 + m(-B_1 - B_3 + B_4 - B_5 + B_6 + B_7)$.

III. $2m+1 \le j \le 3m$. $\sum\limits_{j=2m+1}^{3m} M_j = \sum\limits_{j=2m+1}^{3m} \left(\sum\limits_{i=1}^{2m} |\gamma_i| + \sum\limits_{i=2m+1}^{3m} |\delta_{ij} - \gamma_i| + \sum\limits_{i=3m+1}^{7m} |\gamma_i| \right) \ge m + (m-2)C_3 + m(-C_1 - C_2 - C_4 + C_5 + C_6 + C_7)$.

IV. $3m+1 \le j \le 4m$. $\sum\limits_{j=3m+1}^{4m} M_j = \sum\limits_{j=3m+1}^{4m} (s \sum\limits_{i=1}^{3m} |\alpha_i + \beta_i| + \sum\limits_{i=3m+1}^{4m} |\delta_{ij} - s(\alpha_i + \beta_i)| + \mu s \sum\limits_{i=4m+1}^{6m} |\alpha_i + \beta_i| + s \sum\limits_{6m+1}^{7m} |\alpha_i + \beta_i|) \ge m + s(m-2)(A_4 + B_4) + sm(A_1 + B_1 + A_2 + B_2 - A_3 - B_3 + A_7 + B_7) + \mu ms(A_5 + B_5 + A_6 + B_6)$, $|\mu| \le 1$.

V. $4m+1 \le j \le 5m$. $\sum\limits_{j=4m+1}^{5m} M_j = \sum\limits_{j=4m+1}^{5m} (s \sum\limits_{i=1}^{3m} |\alpha_i + \gamma_i| + \sum\limits_{i=4m+1}^{5m} |\delta_{ij} - s(\alpha_i + \gamma_i)| + \mu s \left(\sum\limits_{i=3m+1}^{4m} |\alpha_i + \gamma_i| + \sum\limits_{i=5m+1}^{6m} |\alpha_i + \gamma_i|) + s \sum\limits_{6m+1}^{7m} |\alpha_i + \gamma_i| \right) \ge m + s(m-2)(A_5 + C_5) + sm(A_1 + C_1 - A_2 - C_2 + A_3 + C_3 + A_7 + C_7) + \mu ms(A_4 + C_4 + A_6 + C_6)$.

VI. $5m+1 \le j \le 6m$. $\sum\limits_{j=5m+1}^{6m} \left(s \sum\limits_{i=1}^{3m} |\beta_i + \gamma_i| + \sum\limits_{i=5m+1}^{6m} |\delta_{ij} - s(\beta_i + \gamma_i)| + \mu ms \sum\limits_{i=3m+1}^{5m} |\beta_i + \gamma_i| + s \sum\limits_{6m+1}^{7m} |\beta_i + \gamma_i| \right)) \ge m + s(m-2)(B_6 + C_6) + sm(-B_1 -$

$C_1+B_2+C_2+B_3+C_3+B_7+C_7)+\mu ms(B_4+C_4+B_5+C_5)$.

VII. $6m+1 \le j \le 7m$. $\sum\limits_{j=6m+1}^{7m} M_j = \sum\limits_{j=6m+1}^{7m} (r\sum\limits_{i=1}^{6m}|\alpha_i+\beta_i+\gamma_i| + \sum\limits_{i=6m+1}^{7m}|\delta_{ij}-r(\alpha_i+\beta_i+\gamma_i)| \ge m+r(m-2)(A_7+B_7+C_7)+mr(A_1+B_1+C_1+A_2+B_2+C_2+A_3+B_3+C_3+A_4+B_4+C_4+A_5+B_5+C_5+A_6+B_6+C_6)$.

Используя равенства (2), получим:

I – III. $1 \le j \le 3m$.

$$3m||\pi|| \ge \sum_{j=1}^{3m} M_j \ge 3m+(m-2)(A_1+B_2+C_3)- \\ m(A_2+A_3+B_1+B_3+C_1+C_2)+m(A_4+A_5+B_4+B_6+C_5+C_6)- \\ m(A_6+B_5+C_4)=3m+(m-2)(3-s(A_4+A_5+B_4+B_6+C_5+C_6)- \\ r(A_7+B_7+C_7))+m(s(A_4+A_5+B_4+B_6+C_5+C_6)+ \\ 2s(A_6+B_5+C_4)+2r(A_7+B_7+C_7)+m(A_4+A_5+B_4+B_6+C_5+C_6) \\ -m(A_6+B_5+C_4)+m(A_7+B_7+C_7)=6(m-1)+(m+2s)u+ \\ m(2s-1)v+(mr+m+2r)w, \tag{3}$$

где $u=A_4+A_5+B_4+B_6+C_5+C_6$, $v=A_6+B_5+C_4$, $w=A_7+B_7+C_7$.

IV – VI. $3m+1 \le j \le 6m$.

$$3m||\pi|| \ge 3m+2ms(A_1+B_2+C_3)+s((m-2)+\mu m)\cdot \\ \cdot(A_4+A_5+B_4+B_6+C_5+C_6)+2sm(A_7+B_7+C_7)+ \\ 2\mu ms(A_6+B_5+C_4)=3m(1+2s)+s(m-2- \\ 2ms+\mu m)u+2\mu msv+2sm(1-r)w. \tag{4}$$

VII. $6m+1 \le j \le 7m$.

$$m||\pi|| \ge m+r(m-2)(A_7+B_7+C_7)+mr(3-(2s-1)\cdot \\ \cdot(A_4+A_5+B_4+B_6+C_5+C_6)-(2s-1)(A_6+B_5+C_4)- \\ 3r(A_7+B_7+C_7)=m(1+3r)+mr(1-2s)u+ \\ mr(1-2s)v+r(m-2-3mr)w. \tag{5}$$

Умножим левые и правые части неравенств (3)–(5) на положительные числа k,l,p (соответственно) и сложим их. Получим

$$(3k+3l+p)m||\pi|| \ge 6(m-1)k+3m(2s+1)l+m(3r+1)p+ \\ +((m+2s)k+s(m-2-2ms+\mu m)l+mr(1-2s)p)u+ \\ (m(2s-1)k+2\mu msl+mr(1-2s)p)v+ \\ +((mr+m+2r)k+2sm(1-r)l+r(m-2-3mr)p)w. \tag{6}$$

Подберем k, l, p и μ таким образом, чтобы коэффициенты при u, v и w обратились в нуль. Решая систему

$$\begin{cases} (m+2s)k + s(m-2-2ms+\mu m)l + mr(1-2s)p = 0, \\ m(2s-1)k + 2\mu msl + mr(1-2s)p = 0, \\ (mr+m+2r)k + 2ms(1-r)l + r(m-2-3mr)p = 0, \end{cases}$$

получим: $l = r(m^2(5r-4rs-1)+m(4rs+r-4s+3)+4s)$, $p = 2s(m^2(2rs-2r+1)+m(2s+1)+2r)$, $k = 2sr(m^2(2s-1)r+m(3r+2s-2)+2)$,

$$\mu = \frac{(2s-1)(1-r)(m^2+3m-2)}{m^2(5r-4rs-1)+m(4rs-4s+r+3)+4s}.$$

При выполнении условий $r(5-4s) \geq 1$, $2s \geq 1$, $2r(1-s) \leq 1$, $r(2-s) \geq s$ числа k, l, p положительны, а $\mu \in [0;1]$. Неравенство (6) примет вид

$$(3k+3l+p)m||\pi|| \geq 6(m-1)k + 3m(1+2s)l + m(3r+1)p,$$

откуда

$$||\pi|| \geq \frac{6(m-1)k+3m(2s+1)l+m(3r+1)p}{m(3k+3l+p)} = 1 + \frac{P(m,r,s)}{Q(m,r,s)} = \varphi(m,r,s),$$

где $P(m,r,s) = 12rs(m^3r + m^2(3r+1) + m(3-2r) - 2)$, а $Q(m,r,s) = m^3(3r^2(4s^2-6s+5) + r(4s^2-4s-3) + 2s) + m^2(3r^2(10s+1) + 3r(4s^2-8s+3) + 2s(2s+1)) + 28mrs$.

Эта оценка точная. Она означает, что существуют $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$, при которых $M_j = \varphi(m,r,s)$ для любых $1 \leq j \leq 7m$. В силу громоздкости формул для вычисления $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ мы их не приводим. Таким образом, $\lambda(X_{7m-3}, l_1^{7m}) = \varphi(m,r,s)$, а $\lambda(7m-3, 7m) \geq \varphi(m,r,s)$. В [1] рассматривался случай $r = 1$. При $\frac{2s}{-4s^2+2s+3} \leq r < 1$ и $4s^2 \leq 3\varphi(m,r,s) > \varphi(m,1,s)$, следовательно, полученный результат улучшает оценку$\lambda(7m-3, 7m)$ снизу.

Библиографический список

1. *Локоть В.В.* О проекционной константе $\lambda(n-3,n)$ // Теоретические и методические проблемы обучения в школе и вузе (математика, информатика): Межвузовский сборник научных трудов. СПб.–Мурманск, 2005. С. 45–48.

Критерий существования H-полярного разложения матрицы

Ю.И. Большаков

В работах [1] и [2] доказаны критерии существования H–полярного разложения матрицы $X \in \mathbb{F}^{n\times n}$ над полями $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ и $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ соответственно, т.е. найдены необходимые и достаточные условия представления матрицы $X \in \mathbb{F}^{n\times n}$ в виде:

$$X = UA, \tag{1}$$

где U – H-унитарная, ($U^{[*]}U = I$,) A – H–самосопряженная ($A^{[*]} = A$). Операция $[*]$ определена на $\mathbb{F}^{n\times n}$ соотношением: $X^{[*]} = H^{-1}X^*H$. Здесь $H^* = H$, $det\ H \neq 0$ – фиксированная эрмитова матрица, X – произвольная $n\times n$ – матрица с элементами из $\mathbb{F}$. Приведем соответствующий результат из работы [2].

Теорема 1. *Пусть* $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. *Тогда*

(i) Для любого отрицательного собственного числа λ *матрицы* $X^{[*]}X$ *та часть канонической формы* $(X^{[*]}X, H)$, *которая этому* λ *соответствует, может быть представлена в виде:*

$$(diag\ (A_i)_{i=1}^m,\ diag\ (H_i)_{i=1}^m), \tag{2}$$

где для всех $i = 1, 2, \ldots, m$

$$A_i = \begin{bmatrix} J_{k_i}(\lambda) & 0 \\ 0 & J_{k_i}(\lambda) \end{bmatrix}, H_i = \begin{bmatrix} Q_{k_i} & 0 \\ 0 & -Q_{k_i} \end{bmatrix}, \tag{3}$$

(В матрице Q_p *все элементы равны нулю, за исключением единиц, расположенных на побочной диагонали матрицы, т.е.* $q_{ij} = \delta_{i+j,p+1}$*).*

(ii) Часть канонической формы $(X^{[*]}X,\ H)$, *отвечающая нулевому собственному числу, может быть представлена в виде:*

$$(diag\ (B_i)_{i=0}^m,\ \ diag\ (H_i)_{i=0}^m), \tag{4}$$

где $B_0 = O_{k_0\times k_0}$, $H_0 = I_{p_0} \oplus -I_{n_0}$, $p_0 + n_0 = k_0$, *а для* $i = 1, 2, \ldots, m$ *пара* $(H_i,\ B_i)$ *имеет одну из следующих двух форм:*

$$B_i = \begin{bmatrix} J_{k_i}(0) & 0 \\ 0 & J_{k_i}(0) \end{bmatrix}, H_i = \begin{bmatrix} Q_{k_i} & 0 \\ 0 & -Q_{k_i} \end{bmatrix},\ \ k_i \geq 1, \tag{5}$$

или

$$B_i = \begin{bmatrix} J_{k_i}(0) & 0 \\ 0 & J_{k_i-1}(0) \end{bmatrix},\ H_i = \varepsilon_i \begin{bmatrix} Q_{k_i} & 0 \\ 0 & -Q_{k_i-1} \end{bmatrix}, \tag{6}$$

где $\varepsilon_i = 1$ *или* $\varepsilon_i = -1$, $k_i > 1$.

(iii) Пусть (ii) имеет место. Обозначим базис, отвечающий нильпотентной части $(X^{[*]}X,\ H)$, *символом*

$$\{e_{ij}\}_{i=0,\ j=1}^{m,\ l_i}, \tag{7}$$

где $l_0 = k_0$, *а параметр* l_i *суть размер матрицы* B_i *при* $i > 1$.

В этих обозначениях

$$\begin{aligned} Ker\ X = \quad & Span\ \{e_{i,1} + e_{i,k_i+1} | l_i = 2k_i,\ i = 1, 2, \ldots, m\} \oplus \\ & Span\ \{e_{i,1} | l_i = 2k_i - 1,\ i = 1, 2, \ldots, m\} \oplus \\ & Span\ \{e_{0,j}\}_{j=1}^{k_0}. \end{aligned} \tag{8}$$

Приведем более эффективный критерий существования H-полярного разложения матрицы X. С этой целью введем понятие цепи нильпотентной матрицы.

Определение 1. Пусть $A = \bigoplus\limits_{i=1}^{p} J_{m_i}(0)$ – нильпотентная матрица, составленная из жордановых блоков $J_{m_i}(0)$ с $m_1 \geq m_2 \geq \ldots m_p$. Всякую ее подматрицу $A_0 = \bigoplus\limits_{i=1}^{s} J_{m_i}(0)$ назовем цепью, если разность $m_i - m_{i+1} = 0$ или $m_i - m_{i+1} = 1,\ i = 1, 2, \ldots, s-1$. Блоки J_{m_i} – звенья цепи, m_i – их длины.

Определение 2. Цепь A_0, определенную матрицей A, назовем максимальной, если к ней нельзя добавить ни одного звена из A так, чтобы вновь полученное объединение давало бы вновь цепь.

Очевидно, что всякая нильпотентная матрица A однозначно разбивается в дизъюнктивное объединение максимальных цепей, т.е. таких, что ни одна их пара не имеет общих звеньев.

Лемма 1. *Для того, чтобы матричное уравнение* $X^2 = A$ *с заданной нильпотентной матрицей* A *имело бы решение, необходимо и достаточно, чтобы каждая максимальная цепь матрицы* A, *не содержащая звеньев длины 1, состояла бы из четного числа звеньев.*

Доказательство этой леммы имеется в работе [3].

Не нарушая общности в рассуждениях, мы будем считать, что нильпотентная матрица $X^{[*]}X$ представляет собой одну максимальную цепь. Тройка $(X^{[*]}X,\ H,\ Ker\ X)$ характеризуется $3 \times 2s$–целочисленной матрицей

$$K = \left[\begin{array}{cccc|ccc} n_1 & n_2 & \ldots & n_s & l_1^0 & l_2^0 & \ldots l_s^0 \\ k_1^+ & k_2^+ & \ldots & k_s^+ & l_1^+ & l_2^+ & \ldots l_s^+ \\ k_1^- & k_2^- & \ldots & k_s^- & l_1^- & l_2^- & \ldots l_s^- \end{array} \right]. \tag{9}$$

Здесь $k_j^+(k_j^-)$ жордановых клеток матрицы $X^{[*]}X$ с $\varepsilon_j = 1(\varepsilon_j = -1)$ имеют размер $n_j \times n_j,\ j = 1, 2, \ldots, s$. Параметры $l_t^+,\ l_t^-,\ l_t^0$, характеризующие подпространство $Ker\ X$, удовлетворяют системе неравенств

$$l_t^+ + l_t^0 \le k_t^+,\ l_t^- + l_t^0 \le k_t^-,\ t = 1, 2, \ldots, s. \tag{10}$$

Здесь l_t^+ (l_t^-) – число векторов подпространства $KerX$, являющихся собственными векторами той нильпотентной части жордановой матрицы $X^{[*}]X$, которая отвечает k_t^+ (k_t^-) клеткам размера $n_t \times n_t$ и $\varepsilon = 1$ $(\varepsilon = -1)$; l_t^0 – число векторов подпространства $Ker\ X$, являющихся суммами пар векторов, при этом первая компонента пары берется из числа k_t^+, а вторая – из числа k_t^-. Кроме того, $n_1 > n_2 > \ldots > n_s$.

Но, поскольку $X^{[*]}X$ – цепь, то $n_1 = p,\ n_2 = p-1,\ n_3 = p-2, \ldots, n_s = p - s + 1$. Более того, поскольку цепь $X^{[*]}X$ удовлетворяет условиям (ii) и (iii) теоремы 1, то при $\varepsilon = 1$ (т.е. для первых двух строк матрицы K) должны иметь место те соотношения между параметрами матрицы K, которые указаны в следующей таблице:

Размер клетки	Число клеток одного размера, до объединения их в пары	Число клеток одного размера, оставшихся после их объединения в пары с клетками того же размера с $\varepsilon = -1$	Число клеток данного размера, подлежащих объединению с клетками на единицу меньшего размера и $\varepsilon = 1$
$n_1 = p$	k_1^+	$k_1^+ - l_1^0$	$l_1^+ = k_1^+ - l_1^0$
$n_2 = p - 1$	$k_2^+ - l_1^+$	$k_2^+ - l_1^+ - l_2^0$	$l_2^+ = k_2^+ - l_1^+ - l_2^0$
$n_3 = p - 2$	$k_3^+ - l_2^+$	$k_3^+ - l_2^+ l_3^0$	$l_3^+ = k_3^+ - l_2^+ - l_3^0$
$n_4 = p - 3$	$k_4^+ - l_3^+$	$k_4^+ - l_3^+ - l_4^0$	$l_4^+ = k_4^+ - l_3^+ - l_4^0$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$n_{s-1} = p-s+2$	$k_{s-1}^+ - l_{s-2}^+$	$k_{s-1}^+ - l_{s-2}^+ - l_{s-1}^0$	$l_{s-1}^+ = k_{s-1}^+ - l_{s-2}^+ - l_{s-1}^0$
Если $n_s = p - s + 1 > 1$	$k_s^+ - l_{s-1}^+$	$k_s^+ - l_{s-1}^+ - l_s^0 = 0$	$l_s^+ = 0$
Если $n_s = p - s + 1 = 1$	$k_s^+ - l_{s-1}^+$	$k_s^+ - l_{s-1}^+ - l_s^0$	$l_s^+ = k_s^+ - l_{s-1}^+ - l_s^0$

Заметим, что символ l_s^+ в последней строке суть число клеток размера 1×1 и $\varepsilon = 1$, отвечающих $Ker\ X$.

Аналогичная таблица строится для $\varepsilon = -1$ с соответствующими заменами верхних индексов "+" на "-" и $\varepsilon = 1$ на $\varepsilon = -1$ и обратно, а соответствующие соотношения относятся к 1-й и 3-й строкам матрицы K.

Легко видеть, что если $n_s = 1$, то $l_t^+ = \sum\limits_{j=1}^{t}(-1)^{t-j}(k_j^+ - l_j^0),\ t = 1, 2, \ldots, s$, если $n_s > 1$, то l_t^+ имеет тот же вид, что и в предыдущем случае, для $t \leq s-1,\ l_s^+ = 0$. И мы приходим к следующему критерию H-полярного разложения, который дает необходимые и достаточные условия возможности представления нильпотентной части матрицы $X^{[*]}X$ в том виде, в котором они указаны в пунктах (ii) и (iii) теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть H – невырожденная комплексная самосопряженная $n \times n$-матрица и пусть для заданной матрицы $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ матрица $X^{[*]}X$ представляет собой цепь, состоящую из четного числа нильпотентных звеньев, если цепь не содержит звеньев длины* 1, *и без ограничения на их количество, если цепь содержит звенья длины* 1. *При этом тройка $(X^{[*]}X,\ H,\ Ker\ X)$ определена целочисленной матрицей K вида* (9) *с натуральными $n_j = p - j + 1,\ j = 1, 2, \ldots, s$. Тогда матрица X допускает H-полярное разложение тогда и только тогда, когда целочисленные параметры, составляющие матрицу K, удовлетворяют системе*

$$\begin{cases} k_t^+ = l_t^+ + l_{t-1}^+ + l_t^0 \\ k_t^- = l_t^- + l_{t-1}^- + l_t^0,\ t = 1, 2, \ldots s, \end{cases} \tag{11}$$

если $n_s = 1$. Здесь $l_0^+ = l_0^- = 0$. Если же $n_s > 1$, то исключением в формуле (11) будут служить лишь параметры k_s^+ и k_s^-, для которых $l_s^+ = l_s^- = 0$.

Библиографический список

1. *Большаков Ю.И.* Псевдополярное разложение линейного оператора // Вопросы теории групп и гомологической алгебры. Ярославль: ЯрГУ, 1994. С. 23–32.
2. *Yu. Bolshakov, C.V.M. van der Mee, A.C.M. Ran, B. Reichstein and L. Rodman.* Polar decomposition in finite dimensional indefinite scalar product spaces: General theory, Linear Algebra Appl. 261: 91–141 (1997).

3. *Большаков Ю.И.* Матричное уравнение $X^2 = A$ // Вопросы теории групп и гомологической алгебры. Ярославль: ЯрГУ, 1990. С. 21–25.

Расслоение сферы, индуцируемое главным расслоением 3-алгебры второго типа, и его полуконформная интерпретация

М.В. Дъячкова

Введение. Пусть $\mathfrak{A}$ – ассоциативная унитальная алгебра размерности n с умножением xy, $G \subset \mathfrak{A}$ – множество ее обратимых элементов. Как известно, это группа Ли с тем же умножением. Пусть $\mathfrak{B}$ – унитальная подалгебра алгебры $\mathfrak{A}$ и $H \subset \mathfrak{B}$ – множество ее обратимых элементов. Тогда H – подгруппа Ли группы G. Рассмотрим факторпространство G/H правых смежных классов. Тогда расслоение $(G, \pi, M = G/H)$, где π – каноническая проекция, есть главное расслоение со структурной группой H [5]. Как известно [2], существует только три типа 3-мерных ассоциативных унитальных неприводимых алгебр. Все унитальные подалгебры этих алгебр и соответствующие главные расслоения найдены Н.Е.Беловой в работе [1]. Рассмотрим 3-алгебру второго типа, базисные единицы которой умножаются следующим образом: $e_1^2 = 1; \quad e_1e_2 = -e_2e_1 = e_2; \quad e_2^2 = 0$. Элементы алгебры в этом базисе имеют вид $x = x_0 + x_1e_1 + x_2e_2$.

Рассмотрим для нее билинейную форму

$$(x, y) = \frac{1}{2}(x\overline{y} + y\overline{x}). \tag{1}$$

Она равна $(x, y) = x_0y_0 - x_1y_1$, принимает вещественные значения и определяет вырожденное скалярное произведение. Тем самым эта алгебра имеет структуру полуевклидова векторного пространства ранга 2.

Целью настоящей работы является рассмотрение расслоения, определяемого подалгеброй указанной алгебры, и изучение расслоения, индуцированного на полуевклидовой сфере этого пространства. Затем мы рассматриваем полуконформную интерпретацию этого расслоения.

Это некоммутативная алгебра. Умножение элементов имеет вид

$$xy = x_0y_0 + x_1y_1 + (x_0y_1 + x_1y_0)e_1 + (x_2(y_0 - y_1) + (x_0 + x_1)y_2)e_2, \tag{2}$$

а обратный элемент находится по формуле

$$x^{-1} = \frac{x_0 - x_1e_1 - x_2e_2}{(x_0)^2 - (x_1)^2}. \tag{3}$$

Подмножество обратимых элементов есть $G = \{x \in \mathfrak{A} \mid (x_0)^2 - (x_1)^2 \neq 0\}$. Это некоммутативная группа Ли, многообразие которой есть $\mathbb{R}^3$ без двух пересекающихся 2-плоскостей. Она состоит, следовательно, из четырех связных компонент.

Теорема (Белова Н.Е. [1]). *Любая 2-плоскость, содержащая единицу алгебры $\mathfrak{A}$, является 2-подалгеброй, изоморфной либо алгебре двойных, либо алгебре дуальных чисел.*

I. Расслоение, определяемое подалгеброй двойных чисел

Рассмотрим подалгебру $\mathfrak{B} = \mathbb{R}(e_1)$ с базисом $\{1, e_1\}$ – 2-алгебру двойных чисел. Множество ее обратимых элементов $H_1 = \{x_0 + x_1 e_1 \in \mathbb{R}(e_1) \mid x_0^2 - x_1^2 \neq 0\}$ есть подгруппа Ли группы G – 2-плоскость без пары пересекающихся прямых. Рассмотрим далее пространство правых смежных классов по этой подгруппе и соответствующее расслоение. Тогда справедлива

Теорема (Белова Н.Е. [1]). *Расслоение $(G, \pi, G/H_1)$ определяется формулой*

$$\pi(x) = \frac{x_2}{x_0 + x_1} \tag{4}$$

и является главным тривиальным расслоением над вещественной прямой $\mathbb{R}$ с типовым слоем – 2-плоскостью без пары пересекающихся прямых и структурной группой H_1.

Следовательно, многообразие группы G диффеоморфно произведению $\mathbb{R} \times H_1$.

Найдем уравнения слоев. Положив $\pi(x) = u$, получим

$$u(x_0 + x_1) - x_2 = 0. \tag{5}$$

Это однопараметрическое семейство 2-плоскостей, расслаивающих группу G, которое в $\mathbb{R}^3$ изображается пучком плоскостей с осью, определяемой системой уравнений $x_0 + x_1 = 0$, $x_2 = 0$. Естественно, в этих плоскостях надо исключить точки их пересечения с плоскостями $x_0 \pm x_1 = 0$. Они имеют координаты $(t, -t, 0)$ и $(t, t, 2ut)$. Отметим, что если расширить базу расслоения π до проективной прямой, то в семейство (5) включается и плоскость $x_0 + x_1 = 0$.

Аналогично происходит расслоение группы на левые смежные классы с проекцией

$$\pi'(x) = \frac{x_2}{x_0 - x_1}. \tag{6}$$

Рассмотрим левые сдвиги $x' = ax$ на группе G.

Теорема. *Левые сдвиги образуют 3-параметрическую группу Ли линейных преобразований. Они сохраняют слои тогда и только тогда, когда $a \in H_1$.*

Доказательство. Полагая $a = (a_0, a_1, a_2)$, где $a_0^2 - a_1^2 \neq 0$, и используя формулу (2), получим 3-параметрическую группу линейных преобразований с матрицей

$$L(a) = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 \\ a_2 & -a_2 & a_0 + a_1 \end{pmatrix} \tag{7}$$

и определителем $\det L(a) = (a_0^2 - a_1^2)(a_0 + a_1)$. Эта группа состоит из четырех связных компонент, которые соответствуют различным комбинациям знаков выражений $a_0 + a_1$ и $|a|^2 = a_0^2 - a_1^2$. Преобразования этой группы, вообще говоря, не сохраняют расслоение. Они оставляют слои инвариантными тогда и только тогда, когда выполнено условие $\pi(x) = \pi(x')$. В силу (4) и (7) это условие имеет место только при $a_2 = 0$. Следовательно, левые сдвиги сводятся к действию структурной группы. $\square$

Рассмотрим теперь множество правых сдвигов $x' = xb$.

Теорема. *Правые сдвиги образуют 3-параметрическую группу Ли линейных преобразований. Они сохраняют расслоение и индуцируют на базе 2-параметрическую группу аффинных преобразований.*

Доказательство. Так как правые сдвиги преобразуют правые смежные классы в правые смежные классы $(H_1 x)b = H_1(xb)$ и перестановочны с левыми сдвигами, в частности, с действием структурной группы, то они являются автоморфизмами расслоения. Учитывая формулу (2), получим 3-параметрическую группу линейных преобразований с матрицей

$$R(b) = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & 0 \\ b_1 & b_0 & 0 \\ b_2 & b_2 & b_0 - b_1 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Преобразуя слои, правые сдвиги индуцируют на базе расслоения некоторую 2-параметрическую группу. Найдем ее преобразования. Положив $\pi(x) = u$, $\pi(x') = u'$ и используя формулы (4) и (8), получим

$$u' = \alpha u + \beta,$$

где $\alpha = \frac{\pi(b)}{\pi'(b)} = \frac{b_0 - b_1}{b_0 + b_1} \neq 0$, $\beta = \pi(b)$. Это группа аффинных преобразований. $\square$

Теорема. *Всякое вращение первого и второго рода полуевклидова пространства может быть представлено соответственно в виде*

$$x' = axb \quad \textit{или} \quad x' = a\overline{x}b \tag{9}$$

при $|a|^2 = \pm 1$, $|b|^2 = \pm 1$.

Доказательство. Так как в обоих случаях $|x'|^2 = \pm|x|^2$, то преобразования (9) образуют 4-параметрическую группу вращений первого и второго рода полуевклидова пространства. Поэтому она является подгруппой в группе всех вращений этого пространства. Но оператор A любого вращения сохраняет скалярное произведение и, следовательно, определяется условием $A^T \Phi A = \Phi$, где

$$A = \begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 \\ A_1^3 & A_2^3 & A_3^3 \end{pmatrix}, \quad \Phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Из этого условия следует, что можно положить
$A_1^1 = \varepsilon_1 \operatorname{ch}\varphi$; $A_1^2 = \operatorname{sh}\varphi$; $A_2^1 = \operatorname{sh}\psi$; $A_2^2 = \varepsilon_2 \operatorname{ch}\psi$; $A_3^1 = t$; $A_3^2 = \varepsilon_3 t$,
где $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 = \pm 1$. Подставляя в условие новые переменные, получаем, что $t = 0$. Таким образом, операторы A образуют 4-параметрическую группу вращений с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \operatorname{ch}\varphi & \varepsilon_1\varepsilon_2 \operatorname{sh}\varphi & 0 \\ \operatorname{sh}\varphi & \varepsilon_2 \operatorname{ch}\varphi & 0 \\ A_1^3 & A_2^3 & A_3^3 \end{pmatrix}$$

и определителем $\mathrm{detA} = \varepsilon_1\varepsilon_2 \mathrm{A}_3^3 \neq 0$. Она состоит из четырех связных компонент.

Применяя формулы (7) и (8), найдем преобразования $x' = axb$. Их матрицы имееют вид

$$B = \begin{pmatrix} a_0b_0 + a_1b_1 & a_0b_1 + a_1b_0 & 0 \\ a_0b_1 + a_1b_0 & a_0b_0 + a_1b_1 & 0 \\ (a_0+a_1)b_2 + a_2(b_0-b_1) & (a_0+a_1)b_2 - a_2(b_0-b_1) & (a_0+a_1)(b_0-b_1) \end{pmatrix},$$

и так как $|a|^2 = a_0^2 - a_1^2 = \pm 1$, $|b|^2 = b_0^2 - b_1^2 = \pm 1$, то $\mathrm{detB} = \pm(\mathrm{a}_0 + \mathrm{a}_1)(\mathrm{b}_0 - \mathrm{b}_1) \neq 0$. Аналогично определяются матрицы преобразований $x' = a\overline{x}b$.

Так как все связные компоненты группы вращений диффеоморфны, то теорему достаточно доказать лишь для связных компонент единицы, то есть, когда в матрице A $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$. В этом случае элементы матрицы B выражаются через элементы матрицы A следующим образом:

$$\left\{\begin{array}{l} a_0^2 = \frac{(A_3^3 \exp\varphi + 1)^2}{4|A_3^3|\exp\varphi}; \\ a_1^2 = \frac{(A_3^3 \exp\varphi - 1)^2}{4|A_3^3|\exp\varphi}; \\ a_2 = \frac{A_1^3 - A_2^3}{2(b_0 - b_1)}; \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} b_0^2 = \frac{(\exp\varphi + A_3^3)^2}{4|A_3^3|\exp\varphi}; \\ b_1^2 = \frac{(\exp\varphi - A_3^3)^2}{4|A_3^3|\exp\varphi}; \\ b_2 = \frac{A_1^3 + A_2^3}{2(a_0 + a_1)}. \end{array}\right.$$

Отображение $f : B \to A$ – гомоморфизм, и поэтому прообразом единичной матрицы E является матрица B, в которой $a_0 = b_0 = \sigma, a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = 0$, где $\sigma = \pm 1$. Таким образом, 4-параметрическая группа вращений первого и второго рода (9) полуевклидова пространства двулистно накрывает группу всех вращений A. $\square$

Введем в полуевклидовом пространстве координаты (u, λ, φ), адаптированные к расслоению, где u – базисная, λ, φ – слоевые координаты. Базисная координата u определяется уравнением (5). Полуевклидово пространство G состоит из четырех связных компонент, в двух из которых модуль является вещественным числом, а в двух других - мнимым. Если $|x|^2 > 0$, то выберем $\lambda = \pm\sqrt{x_0^2 - x_1^2} \neq 0$, где знак числа λ равен знаку x_0 [6]. Таким образом, $x_0^2 - x_1^2 = \lambda^2$. Отсюда следует, что можно положить $x_0 = \lambda \operatorname{ch}\varphi$; $x_1 = \lambda \operatorname{sh}\varphi$. Из полученных выражений и уравнения (5) находим $x_2 = u\lambda \exp\varphi$. Таким образом, координаты, адаптированные к расслоению, в этом случае имеют вид:

$$x_0 = \lambda \operatorname{ch}\varphi; \quad x_1 = \lambda \operatorname{sh}\varphi; \quad x_2 = u\lambda \exp\varphi, \tag{10}$$

где $\lambda \in \mathbb{R}_0, \quad u, \varphi \in \mathbb{R}$.

Если $|x|^2 < 0$, то положим $\lambda = \pm\sqrt{x_1^2 - x_0^2}$, где знак числа λ равен знаку x_1. Аналогичными рассуждениями получим координаты, адаптированные к расслоению, в тех компонентах связности, где модуль – мнимое число

$$x_0 = \lambda \operatorname{sh}\varphi; \quad x_1 = \lambda \operatorname{ch}\varphi; \quad x_2 = u\lambda \exp\varphi, \tag{11}$$

В адаптированных координатах уравнения слоев (5) имеют вид: $u = C$, $C = \mathrm{const}$.

Структурная группа расслоения действует следующим образом:

$$u' = u; \quad \lambda' = \lambda\rho; \quad \varphi' = \varphi + \psi, \tag{12}$$

где (u, λ, φ) - адаптированные координаты элемента x пространства G, на который действует элемент структурной группы $a(0, \rho, \psi)$. В зависимости от того, к каким компонентам связности принадлежат элементы

a и x в преобразовании $x' = ax$ левого сдвига, полученные координаты (u', λ', φ') представляются в виде (10) или (11). А также, учитывая знак ρ, получаем 4 связные компоненты этой группы.

II. Расслоение полуевклидовой сферы

Как уже было отмечено, в алгебре $\mathfrak{A}$ второго типа скалярное произведение имеет вид $(x, y) = x_0 y_0 - x_1 y_1$, так что $\mathfrak{A}$ является 3-мерным полуевклидовым пространством ранга 2. Элементы алгебры $\mathfrak{A}$, скалярные квадраты которых равны единице: $|x|^2 = 1$, образуют полуевклидову сферу (полусферу) единичного радиуса $S^2(1) = \{x \in \mathfrak{A} \mid x_0^2 - x_1^2 = 1\}$, которая изображается в $\mathbb{R}^3$ гиперболическим цилиндром и состоит из двух полостей. Элементы алгебры мнимоединичного модуля: $|x|^2 = -1$, образуют полуевклидову сферу $S^2(-1)$ мнимоединичного радиуса. Она аналогична предыдущей, и поэтому достаточно рассмотреть только первый случай.

Рассмотрим ограничение расслоения $(G, \pi, \mathbb{R})$ на сферу $S^2(1)$, т. е. расслоение $\pi : S^2(1) \to \mathbb{R}$. Его слои суть пересечения этой сферы 2-плоскостями (5).

Ограничение группы H_1 двойных чисел на полусферу $S^2(1)$ есть подгруппа Ли двойных чисел единичного модуля $S_1 = \{a_0 + a_1 e_1 \in H_1 \mid a_0^2 - a_1^2 = 1\}$. Эта группа содержит две связные компоненты и в $\mathbb{R}^2$ изображается гиперболой.

Теорема. *Расслоение $(S^2(1), \pi, \mathbb{R})$ есть главное расслоение группы $S^2(1)$ на правые смежные классы по подгруппе Ли S_1.*

Доказательство. Пусть x и y – две точки полусферы, принадлежащие одному слою в $(G, \pi, \mathbb{R})$. Так как это главное расслоение, то существует единственный элемент $a \in H_1 : y = ax$. Тогда $|y|^2 = |a|^2 |x|^2$, и, следовательно, $|a|^2 = 1$, т. е. $a \in S_1$. $\square$

Введем на $S^2(1)$ координаты, адаптированные к расслоению. Если $x \in S^2(1)$, то из (10) получим $\lambda = \varepsilon, \varepsilon = \pm 1$. Тогда параметрическое уравнение полусферы, отнесенной к адаптированным координатам (u, φ), представимо в виде:

$$\mathbf{r}(u, \varphi) = \varepsilon(\operatorname{ch}\varphi, \operatorname{sh}\varphi, u \exp\varphi), \tag{13}$$

где u – базисная, φ – слоевая координаты. Разным значениям ε соответствуют разные полости полусферы $S^2(1)$.

Найдем действие структурной группы S_1 на полусфере. Учитывая (12) и то, что элементы полусферы a и x имеют адаптированные координаты $a(0, \varepsilon_1, \psi)$, $x(u, \varepsilon, \varphi)$, получим:

$$u' = u; \quad \varepsilon' = \varepsilon\varepsilon_1; \quad \varphi' = \varphi + \psi.$$

Эта группа состоит из двух связных компонент.

Найдем метрику полусферы, отнесенной к адаптированным координатам. Подсчитывая компоненты матрицы метрического тензора, получим

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{rank} = 1$$

и, следовательно,

$$ds_1^2 = -d\varphi^2. \tag{14}$$

III. Полуконформная модель расслоения $(S^2(1), \pi, \mathbb{R})$.

Построим полуконформную модель расслоения $(S^2(1), \pi, \mathbb{R})$. Для этого рассмотрим стереографическую проекцию сферы $S^2(1)$ из точки $N(-1, 0, 0) \in S^2(1)$ (полюса) на экваториальную плоскость $\mathbb{R}^2$ с уравнением $x_0 = 0$. Представим стереографическое отображение в координатном виде. Для этого найдем уравнение прямой, проходящей через полюс, и произвольную точку сферы. При пересечении этой прямой с экваториальной плоскостью получаем формулы стереографического отображения $f : S^2(1) \to \mathbb{R}^2$ при $x_0 \neq -1$:

$$x = \frac{x_1}{x_0 + 1}; \quad y = \frac{x_2}{x_0 + 1}, \tag{15}$$

где $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, (x_0, x_1, x_2) – координаты точки на $S^2(1)$. Обратное отображение $f^{-1} : \mathbb{R}^2 \to S^2(1)$ при $x \neq \pm 1$ имеет вид:

$$x_0 = \frac{1 + x^2}{1 - x^2}; \quad x_1 = \frac{2x}{1 - x^2}; \quad x_2 = \frac{2y}{1 - x^2}\,. \tag{16}$$

Если в формулы (15) подставить (13), то возникает зависимость координат x, y с адаптированными координатами u, φ на полусфере:

$$f: \quad x = \frac{\operatorname{sh}\varphi}{\operatorname{ch}\varphi + \varepsilon}; \quad y = \frac{u\exp\varphi}{\operatorname{ch}\varphi + \varepsilon}\,.$$

Отображение, обратное к данному, имеет вид:

$$\varphi = \varepsilon \ln\left|\frac{1 + x}{1 - x}\right|; \quad u = \frac{2y}{(1 + x)^2}\,. \tag{17}$$

Стереографическое отображение f есть диффеоморфизм, если дополнить $\mathbb{R}^2$ до полуконформной плоскости C^2 бесконечно удаленной точкой и идеальной прямой, проходящей через нее. Эта бесконечно удаленная точка соответствует точке N. Идеальная прямая является образом прямолинейной образующей полусферы $S^2(1)$, проходящей через полюс: $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ [4]. При этом из $\mathbb{R}^2$ необходимо исключить прямые $x \neq \pm 1$.

Рассмотрим следующую коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} S^2(1) & & \xrightarrow{f} & & C^2 \\ & \pi \searrow & & \swarrow p & \\ & & \mathbb{R} & & \end{array}$$

Отображение $p = \pi \circ f^{-1} : C^2 \to \mathbb{R}$ определяется с помощью этой диаграммы. Найдем координатное выражение этого отображения

$$p(x,y) = \pi\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}, \frac{2x}{1-x^2}, \frac{2y}{1-x^2}\right).$$

В результате проекция p принимает вид:

$$u = \frac{2y}{(x+1)^2}.$$

Таким образом, $p : C^2 \to \mathbb{R}$ есть главное расслоение с базой $\mathbb{R}$ и структурной группой S_1.

Теорема. *Отображение $f : S^2(1) \to C^2$ является конформным.*

Доказательство. Метрика в G индуцирует метрику в C^2. В координатах x, y она имеет вид

$$d\widetilde{s}^2 = -dx^2. \tag{18}$$

Найдем метрику полусферы, соответствующую метрике в C^2. С помощью формул (17) получим $d\varphi = \frac{2\varepsilon}{x^2-1}$. Поэтому, согласно формулам (14) и (18), $ds_1^2 = \frac{4}{(x^2-1)^2} d\widetilde{s}^2$. Плоскость C^2 с такой метрикой назовем *полуконформной*. Таким образом, линейный элемент полусферы отличается от линейного элемента полуплоскости на конформный множитель, поэтому отображение f конформное. $\square$

Найдем уравнения слоев в $\mathbb{C}^2$. В адаптированных координатах (13) 1-параметрическое семейство слоев расслоения $(S^2(1), \pi, \mathbb{R})$ задается уравнениями: $u = C, \quad C \in \mathbb{R}$. Используя формулу (16), получим образ этого семейства при отображении f

$$y = \frac{C}{2}(x+1)^2.$$

Таким образом, полуконформная плоскость расслаивается 1-параметрическим семейством кривых, изображаемых параболами с осью симметрии $x = -1$ и с вершиной в точке $(-1, 0)$.

Библиографический список

1. *Белова Н.Е.* Расслоения алгебр размерности 3 // Казанск. ун-т. Казань, 1999. 9 с. Деп. в ВИНИТИ 11.10.99. № 3036–В99.
2. *Вишневский В.В, Широков А.П., Шурыгин В.В.* Пространства над алгебрами. Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1985. 263 с.
3. *Кузьмина И.А., Шапуков Б.Н.* Конформная и эллиптическая модели расслоения Хопфа // Казань: Изд-во Казанск. мат. общ-ва. Труды геометр. семин. 2003. Вып. 24. С. 81–98.
4. *Розенфельд Б.А.* Многомерные пространства. М.: Наука. 1966. 746 с.
5. *Шапуков Б.Н.* Задачи по группам Ли и их приложениям. М: РХД, 2002. 255 с.
6. *Яглом И.М.* Принцип относительности Галилея и неевклидова геометрия. М.: Наука. 1969. 304 с.

Конусы функций с одним и двумя условиями монотонности

Ю.В. Бондаренко

В настоящей статье рассматривается конус функций с двумя условиями убывания. Даны необходимые и достаточные условия для того, чтобы конус с двумя условиями убывания совпадал с конусом с одним условием убывания. Выписаны крайние функции конусов с двумя условиями убывания и найдено представление произвольной функции из конуса через крайние функции этого конуса.

Определение 1. Пусть задана положительная функция $\psi(t)$ на $\mathbf{R}^+ = \{t \in \mathbf{R} : t > o\}$. Символом $K(\psi \downarrow)$ (соответственно, $K(\psi \uparrow)$) будем обозначать множество неотрицательных измеримых функций на $\mathbf{R}^+$, для каждой из которых выполнено условие:

$$\forall t > 0, \quad \forall h > 0 \quad x(t+h) \cdot \psi(t+h) \le x(t) \cdot \psi(t)$$

(соответственно

$$\forall t > 0, \quad \forall h > 0 \quad x(t+h) \cdot \psi(t+h) \geq x(t) \cdot \psi(t).$$

Определение 2. Пусть заданы две положительные функции $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ на $\mathbf{R}^+$. Символами $K(\psi_1 \downarrow, \psi_2 \downarrow)$ (соответственно $K(\psi_1 \uparrow, \psi_2 \uparrow)$) будем обозначать множество неотрицательных измеримых функций на $\mathbf{R}^+$, для каждой из которых выполнены условия:

$$\forall t > 0, \quad \forall h > 0 \quad x(t+h) \cdot \psi_1(t+h) \leq x(t) \cdot \psi_1(t),$$

$$\forall t > 0, \quad \forall h > 0 \quad x(t+h) \cdot \psi_2(t+h) \leq x(t) \cdot \psi_2(t),$$

(соответственно $\forall\ t > 0, \forall h > 0 \ \ x(t+h) \cdot \psi_1(t+h) \geq x(t) \cdot \psi_1(t)$, $\forall t > 0$, $\forall h > 0 \quad x(t+h) \cdot \psi_2(t+h) \geq x(t) \cdot \psi_2(t)$).

Определение 3. Пусть заданы две положительные функции $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ на $\mathbf{R}^+$. Символом $K(\psi_1 \uparrow, \psi_2 \downarrow)$ будем обозначать множество неотрицательных измеримых функций на $\mathbf{R}^+$, для каждой из которых выполнены условия:

$$\forall t > 0, \quad \forall h > 0 \quad x(t+h) \cdot \psi_1(t+h) \geq x(t) \cdot \psi_1(t),$$

$$\forall t > 0, \quad \forall h > 0 \quad x(t+h) \cdot \psi_2(t+h) \leq x(t) \cdot \psi_2(t).$$

Рассмотрим сначала конус $K(\psi \downarrow)$.

Отметим, что какова бы ни была функция ψ, конус $K(\psi \downarrow)$ всегда содержит ненулевые элементы, например, функцию $\frac{1}{\psi(t)}$.

Следующая теорема описывает все крайние лучи конуса $K(\psi, \downarrow)$.

Теорема 1. *Пусть фиксирована функция $\psi(t)$. Для того, чтобы функция φ была крайней в конусе $K(\psi, \downarrow)$ необходимо и достаточно, чтобы нашлись числа a, $t_0 \geq 0$ такие, что эта функция имеет вид:*

$$\varphi_0(t) = a \begin{cases} \frac{1}{\psi(t)}, & \text{если} \ \ 0 \leq t \leq t_0, \\ 0, & \text{если} \ \ t > t_0, \end{cases}$$

или

$$\varphi_1(t) = a \begin{cases} \frac{1}{\psi(t)}, & \text{если} \ \ 0 \leq t < t_0, \\ 0, & \text{если} \ \ t \geq t_0. \end{cases}$$

Доказательство. Докажем достаточность, причем мы разберем только случай функции φ_0. Итак, пусть при всех $t \geq 0$ выполнено равенство

$$\varphi_0(t) = \frac{x_0(t) + x_1(t)}{2},$$

где функции x_0, x_1 лежат в конусе $K(\psi, \downarrow)$.

Поскольку все функции из конуса $K(\psi, \downarrow)$ неотрицательны, то при всех $t > t_0$ справедливы равенства

$$\varphi_0(t) = x_0(t) = x_1(t) \equiv 0.$$

Пусть теперь $t \leq t_0$. Тогда, умножая равенство

$$\varphi_0(t) = \frac{x_0(t) + x_1(t)}{2}$$

на $\psi(t)$, получим, что при всех $t \leq t_0$ верно соотношение

$$2a \equiv \psi(t)x_0(t) + \psi(t)x_1(t).$$

Поскольку правая часть есть сумма невозрастающих функций, а левая часть есть константа, то каждое слагаемое в правой части есть константа и, следовательно, выполняются равенства

$$x_0(t) \equiv b_1 \frac{1}{\psi(t)}; \qquad x_1(t) \equiv b_2 \frac{1}{\psi(t)},$$

где $(b_1 + b_2)/2 = a$.

Достаточность доказана.

Докажем необходимость. Предположим, что функция $\varphi(t)$ является крайним лучом в конусе $K(\psi, \downarrow)$, то есть из равенства

$$\varphi(t) = \frac{x_0(t) + x_1(t)}{2}$$

следует, что

$$x_0(t) \equiv a\varphi(t); \qquad x_2(t) \equiv b\varphi(t),$$

причем $(a + b)/2$.

Умножим функцию $\varphi(t)$ на функцию $\psi(t)$ и положим $\varphi_0(t) = \psi(t) \cdot \varphi(t)$. Тогда функция $\varphi_0(t)$ не возрастает. Положим $m_1 = \sup_{t>0} \varphi_0(t) = \varphi_0(0)$, $m_2 = \inf_{t>0} \varphi_0(t) = \lim_{t\to\infty} \varphi_0(t)$. Покажем, что не существует точки $t_1 \in (0, \infty)$ такой, что выполняются неравенства $m_2 < \varphi_0(t_0) < m_1$.

Предположим противное. Если существует точка $t_1 \in (0, \infty)$, в которой выполняется неравенство $m_2 < \varphi_0(t_1) < m_1$, то положим

$$x_0(t) = \frac{a}{\psi(t)} \begin{cases} \frac{\varphi_0(t)+\varphi_0(t_1)}{2}, & \text{если } \ 0 \le t \le t_1, \\ \varphi_0(t), & \text{если } \ t > t_1 \end{cases}$$

и

$$x_0(t) = \frac{a}{\psi(t)} \begin{cases} \frac{\varphi_0(t)-\varphi_0(t_1)}{2}, & \text{если } \ 0 \le t \le t_1, \\ \varphi_0(t), & \text{если } \ t > t_1. \end{cases}$$

Тогда обе эти функции, x_0 и x_1, лежат в конусе $K(\psi, \downarrow)$, и прямо из определения следует, что справедливо равенство

$$\varphi_0(t) \equiv \frac{x_0(t) + x_1(t)}{2}.$$

Из того, что функция $\varphi_0(t)$ является крайней, следует, что при $0 \le t \le t_1$ выполняются соотношения

$$\varphi_0(t) = \lambda \frac{\varphi_0(t) - \varphi_0(t_1)}{2}, \quad \varphi_0(t) = \alpha \frac{\varphi_0(t) - \varphi_0(t_1)}{2}$$

и $\lambda, \alpha > 0$; $1 = \lambda + \alpha$.

Из этих соотношений следует, что при $0 \le t \le t_1$ выполнено равенство

$$\varphi_0(t) \equiv \varphi_0(t_1).$$

Противоречие.

Итак, функция $\varphi_0(t)$ принимает лишь два значения $a > b \ge 0$. Покажем, что $b = 0$. Опять предположим противное. Пусть $\varphi_0(t) \equiv a$, при $t \in [0, t_1]$ и $\varphi_0(t) \equiv b$, при $t > t_1$. Положим

$$x_0(t) = \frac{1}{\psi(t)} \begin{cases} a, & \text{если } \ 0 \le t \le t_1, \\ b + \frac{a-b}{2}, & \text{если } \ t > t_1 \end{cases}$$

и

$$x_1(t) = \frac{1}{\psi(t)} \begin{cases} a, & \text{если } \ 0 \le t \le t_1, \\ b - \frac{a-b}{2}, & \text{если } \ t > t_1. \end{cases}$$

Тогда обе эти функции, x_0 и x_1, лежат в конусе $K(\psi, \downarrow)$, и прямо из определения следует, что справедливо равенство

$$\varphi_0(t) \equiv \frac{x_0(t) + x_1(t)}{2}.$$

Из того, что функция $\varphi_0(t)$ является крайней, следует, что при $0 \le t \le t_1$ выполняются соотношения

$$\varphi_0(t) = \lambda \frac{\varphi_0(t) - \varphi_0(t_1)}{2},$$

$$\varphi_0(t) = \alpha \frac{\varphi_0(t) - \varphi_0(t_1)}{2}$$

и $\lambda, \alpha > 0$; $1 = \lambda + \alpha$.

Из этих соотношений следует, что при $0 \le t \le t_1$ выполнено равенство

$$\varphi_0(t) \equiv \varphi_0(t_1).$$

Противоречие.

Таким образом, теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть заданы две функции ψ_1, ψ_2, по которым построены два конуса $K(\psi_1, \downarrow)$, $K(\psi_2, \downarrow)$. Для того, чтобы выполнялось вложение*

$$K(\psi_1, \downarrow) \subseteq K(\psi_2, \downarrow),$$

необходимо и достаточно, чтобы для всех $t > 0$ и $h > 0$ выполнялось соотношение

$$\frac{\psi_2(t+h)}{\psi_1(t+h)} \le \frac{\psi_2(t)}{\psi_1(t)}, \tag{2}$$

то есть функция $\frac{\psi_2(t)}{\psi_1(t)}$ не возрастает.

Доказательство. Теперь мы переходим к изучению различных операций над конусами $K(\psi_1, \downarrow)$, $K(\psi_2, \downarrow)$. Первая теорема дает необходимые и достаточные условия для того, чтобы объединение конусов было конусом.

Теорема 3. *Пусть задано две функции ψ_1, ψ_2, по которым построено два конуса $K(\psi_1, \downarrow)$, $K(\psi_2, \downarrow)$. Множество $K(\psi_1, \downarrow) \cup K(\psi_2, \downarrow)$ является конусом тогда и только тогда, когда выполнено одно из соотношений*

$$\frac{\psi_1(t+h)}{\psi_2(t+h)} \le \frac{\psi_1(t)}{\psi_2(t)}, \qquad \frac{\psi_2(t+h)}{\psi_1(t+h)} \le \frac{\psi_2(t)}{\psi_1(t)}. \tag{3}$$

В первом случае верно равенство

$$K(\psi_1, \downarrow) \cup K(\psi_2, \downarrow) = K(\psi_1, \downarrow), \tag{4}$$

а во втором справедливо равенство

$$K(\psi_1, \downarrow) \cup K(\psi_2, \downarrow) = K(\psi_2, \downarrow). \tag{5}$$

Доказательство. Если выполнено одно из соотношений (3), то очевидно, что объединение конусов будет конусом и равенство (4) будет выполнено.

Пусть теперь $K(\psi_1,\downarrow) \cup K(\psi_2,\downarrow)$ является конусом. Очевидно, что выполняются соотношения

$$\frac{1}{\psi_1(t)} \in K(\psi_1,\downarrow) \subseteq K(\psi_1,\downarrow) \cup K(\psi_2,\downarrow),$$

$$\frac{1}{\psi_2(t)} \in K(\psi_2,\downarrow) \subseteq K(\psi_1,\downarrow) \cup K(\psi_2,\downarrow).$$

Поскольку множество $K(\psi_1,\downarrow) \cup K(\psi_2,\downarrow)$ является конусом, то

$$\frac{1}{\psi_1(t)} + \frac{1}{\psi_2(t)} \in K(\psi_1,\downarrow) \cup K(\psi_2,\downarrow),$$

и значит, выполняется одно (или оба сразу) из соотношений

$$(\frac{1}{\psi_1(t)} + \frac{1}{\psi_2(t)}) \cdot \psi_1(t) = 1 + \frac{\psi_1(t)}{\psi_2(t)} \downarrow,$$

$$(\frac{1}{\psi_1(t)} + \frac{1}{\psi_2(t)}) \cdot \psi_2(t) = 1 + \frac{\psi_2(t)}{\psi_1(t)} \downarrow.$$

Отсюда следует, что выполняются условия (3)–(5).

Теорема доказана.

Библиографический список

1. *Бережной Е.И.* Точные оценки операторов на конусах в идеальных пространствах // Труды МИАН им.В.А. Стеклова. 1993. Т. 204. С. 3–36.
2. *Красносельский М.А.* Положительные решения операторных уравнений. М.: Физматлит, 1962.
3. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.

Об одном способе задания преобразований пространства P_3

В.Л. Виноградов

В работе изучен класс преобразований пространства P_3, порождаемых композицией стереографического и косого проектирований квадрики на плоскость и имеющих пучок слабо инвариантных плоскостей.

В пространстве P_3 рассмотрим вещественную квадрику Q, точку S квадрики, плоскость π ($S \notin \pi$) и конгруэнцию $G(1,m)$ первого порядка класса m прямых.

Определим следующее преобразование f плоскости π. Произвольной точке $M \in \pi$ поставим в соответствие точку M', где $M' = t \cap \pi$, $t \in G(1,m)$, $M_1 \in t$, $M_1 = SM \cap Q$, $S \neq M_1$. Итак, $f = \alpha_2 \circ \alpha_1^{-1}$, где α_1 – проектирование точек квадрики Q на плоскость π из центра S (стереографическое проектирование квадрики на плоскость из центра S), α_2 – проектирование точек квадрики на плоскость посредством прямых конгруэнции $G(1,m)$ (косое проектирование квадрики на плоскость).

Известно, что конгруэнция $G(1,m)$ образована прямыми, пересекающими фиксированную прямую l и кривую L порядка m, для которой l является $(m-1)$-секантой. Если $l \subset Q$, то определено преобразование $f^{-1} = \alpha_1 \circ \alpha_2^{-1}$.

Рассматривая в пространстве P_3 пучок $\{\pi\}$ плоскостей с осью $p \subset \pi$ и задавая указанным способом преобразование f в каждой плоскости этого пучка, получим некоторое преобразование T пространства P_3. Вид преобразований f в плоскостях пучка $\{\pi\}$, а следовательно, и вид преобразования T пространства зависит от типа квадрики Q и взаимного расположения S, l, p, L.

Рассмотрим отдельные случаи в зависимости от класса m конгруэнции G.

1. $m = 0$.

В данном случае конгруэнция G вырождается в связку прямых и α_2, как и α_1, является стереографическим проектированием. Центр S_0 этой связки должен принадлежать квадрике Q (в противном случае преобразование f^{-1} было бы одно-двузначным), и преобразование f в плоскости π определяется так: $M \in \pi$, $SM \cap Q = M_1$, $M_1 \neq S$; $S_0M_1 \cap \pi = M'$; $f(M) = M'$. Легко убедиться, что f – квадратичное преобразование. Действительно, проектирование α_1^{-1} произвольную прямую d плоскости π переводит в конику $k_2 = Q \cap (S,d)$, которая проектируется из S_0 на π в виде коники k'_2, то есть $f(d) = k'_2$.

Пусть γ и γ_0 – касательные плоскости к квадрике Q соответственно в точках S и S_0; $\gamma \cap \pi = s$, $\gamma_0 \cap \pi = s_0$, $SS_0 \cap \pi = P$. Свойства преобразования T пространства, расслаивающегося на преобразования f в плоскостях пучка $\{\pi\}$, зависят от типа квадрики Q и расположения оси p пучка относительно прямой SS_0 и прямой $q = \gamma \cap \gamma_0$.

Пусть квадрика Q – овальная. Из способа задания преобразования f следует, что P – фундаментальная точка преобразований f и f^{-1}; в первом случае P-элементом этой точки является прямая s_0, а во втором – прямая s. Других F-элементов преобразования f и f^{-1} не имеют.

Если ось p пучка $\{\pi\}$ имеет общее расположение относительно q и SS_0, то преобразование T пространства является кубическим. Действительно, прямая p принадлежит F-системе преобразования T, ее P-поверхностью является конус K_2^0 второго порядка с вершиной S_0 и направляющей $k_2^0 = (S, p) \cap Q$. Итак, образ произвольной плоскости пучка $\{\pi\}$ распадается на эту плоскость и конус K_2^0, а следовательно, порядок преобразования T равен 3. Если p является бисекантой прямых q и SS_0, то конус вырождается в плоскость (S, p), а следовательно, порядок преобразования T равен 2.

Если p совпадает с q, то преобразование T является кубической инволюцией.

Рассмотрим уравнения преобразования T. В качестве Q возьмем квадрику с уравнением $x_1^2 + x_2^2 - x_3x_4 = 0$. Тогда вершины $A_3(0,0,1,0)$ и $A_4(0,0,0,1)$ координатного тетраэдра принадлежат Q (примем их за центры S и S_0 проектирований α_1 и α_2), а вершины $A_1(1,0,0,0)$ и $A_2(0,1,0,0)$ принадлежат прямой q. Если ось p пучка $\{\pi\}$ имеет общее расположение относительно SS_0 и q, например, совпадает с прямой $E_{23}E_{14}$, где $E_{23}(0,1,1,0)$ и $E_{14}(1,0,0,1)$, то преобразования T и T^{-1} имеют уравнения:
$T_3 : x_1' : x_2' : x_3' : x_4' = (x_2 - x_3)x_1x_4 : (x_2 - x_3)x_2x_4 : (x_2 - x_3) : [(x_1^2 + x_2^2 - x_3x_4)(x_1 - x_4) + (x_2 - x_3)x_4^2];$
$T_3^{-1} : x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = (x_1' - x_2')x_1'x_3' : (x_1' - x_4')x_2'x_3' : [(x_1' - x_4')x_3'^2 + (x_1'^2 + x_2'^2 - x_3'x_4')(x_2' - x_3')] : (x_1'^2 + x_2'^2)(x_1' - x_2').$

Если p является бисекантой прямых SS_0 и q, например, совпадает с прямой $E_{12}E_{34}$, где $E_{12}(1,1,0,0)$ и $E_{34}(0,0,1,1)$, то имеем:
$T_2 : x_1' : x_2' : x_3' : x_4' = x_1x_4 : x_2x_4 : (x_1^2 + x_2^2) : [(x_4 - x_3)x_4 + (x_1^2 + x_2^2)];$
$T_2^{-1} : x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = x_1'x_3' : x_2'x_3' : [(x_3' - x_4')x_3' + (x_1'^2 + x_2'^2)] : (x_1'^2 + x_2'^2).$

Если p совпадает с q, то преобразование является кубической инволюцией I_{3-3} с уравнениями:
$I_{3-3} : x_1' : x_2' : x_3' : x_4' = x_1x_3x_4 : x_2x_3x_4 : (x_1^2 + x_2^2)x_3 : (x_1^2 + x_2^2)x_4.$

Рассмотрим случай, когда квадрика Q линейчатая. Пусть l_1 и l_1', l_2 и l_2' – прямолинейные образующие квадрики Q, проходящие, соответственно, через S и S_0. Преобразование $f(f^{-1})$ в плоскости π имеет три фундаментальные точки: $L_1 = l_1 \cap \pi$, $L_1' = l_1' \cap \pi$, и P ($L_2 = l_2 \cap \pi$, $L_2' = l_2' \cap \pi$ и P), их P-элементами являются, соответственно, прямые $(l_1, p) \cap \pi$, $(l_1', p) \cap \pi$, L_1L_1' ($(l_2, p) \cap \pi$, $(l_2', p) \cap \pi$, L_2L_2'). Прямые l_1 и l_1' (l_2 и l_2') входят в состав P-системы преобразования $T(T^{-1})$, их P-элементами являются, соответственно, плоскости (l_1, SS_0) и (l_2, SS_0) $((l'_1, SS_0)$ и $(l'_2, SS_0))$. Как и выше, можно показать, что: 1) если ось p пучка $\{\pi\}$ имеет произвольное расположение относительно SS_0 и q, то T – кубическое преобразование; 2) если p пересекает SS_0, то T – квадратичное; 3) если p совпадает с q, то T – кубическая инволюция.

Если в качестве Q взять квадрику $x_1x_3 - x_2x_4 = 0$, а центры S и S_0 проектирований поместить в точки $A_4(0,0,0,1)$ и $A_2(0,1,0,0)$, то уравнения преобразований T и T^{-1} имеют вид:

1) $T : x'_1 : x'_2 : x'_3 : x'_4 = x_1x_2(x_3-x_4) : [(x_1-x_2)(x_1x_3-x_2x_{4)+}x_2^2(x_3-x_4)] : x_2x_3(x_3-x_4) : x_1x_3(x_3-x_4)$. (В данном случае ось p пучка $\{\pi\}$ имеет уравнения $x_1 - x_2 = 0$, $x_3 - x_4 = 0$ и является бисекантой пары прямолинейных образующих различных семейств квадрики, проходящих через S и S_0; конус K_2 распадается на пару плоскостей $x_1 = 0$ и $x_3 - x_4 = 0$).
$T^{-1} : x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = x'_1x'_4(x'_1 - x'_2) : x'_1x'_3(x'_1 - x'_2) : x'_3x'_4(x'_1 - x'_2) : [(x'_3 - x'_4)(x'_1x'_3 - x'_2x'_4) + x'^2_4(x'_1 - x'_2)$.

2) Если p – бисеканта прямых SS_0 и q совпадает с прямой $E_{24}E_{13}$ ($E_{24}(0,1,0,1)$, $E_{13}(1,0,1,0)$) и имеет, следовательно, уравнения $x_2-x_4 = 0$, $x_1 - x_3 = 0$, то имеем:
$T : x'_1 : x'_2 : x'_3 : x'_4 = x_1x_2 : (x_1x_3 - x_2x_4 + x_2^2) : x_2x_3 : x_1x_3;$
$T^{-1} : x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = x'_1x'_4 : x'_1x'_3 : x'_3x'_4 : (x'_1x'_3 - x'_2x'_4 + x'^2_4).$

Преобразование T – центральное. Центр связки E_{24} инвариантных прямых является изолированной F-точкой с P-поверхностью $x_4 = 0$ ($x_2 = 0$ – в преобразовании T^{-1}).

3) $p = q$ ($q = \gamma \cap \gamma_0$ и имеет уравнения $x_{2=}x_4 = 0$). Преобразование является кубической инволюцией и имеет уравнения:
$I_{3-3} : x'_1 : x'_2 : x'_3 : x'_4 = x_1x_2x_4 : x_1x_2x_3 : x_2x_3x_4 : x_1x_3x_4.$

Это преобразование является преобразованием тетраэдрального типа: фиксированная кривая ω пересечения двух гомалоидов (F-кривая преобразования) распадается на шесть прямых, являющихся ребрами координатного тетраэдра. Каждой точке каждой из прямых A_1A_3 и A_2A_4 соответствует вся эта прямая, а каждой точке каждой из прямых A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4 и A_1A_4 соответствуют все точки прямых SA_3A_4, A_1A_4, A_1A_2 и A_2A_3 соответственно. Вершины A_1, A_2, A_3 и A_4 являются изолированными F-точками с P-поверхностями $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$ соответственно.

2. $m = 1$.

Пусть l и m – направляющие конгруэнции $G(1,1)$. Одна из них, например, l, как и центр проектирования S, должны принадлежать квадрике Q, так как в противном случае преобразование f не будет взаимнооднозначным для любой точки плоскости π.

Существенно различными являются следующие случаи.

1) $S \notin l$. Преобразование f в плоскости π является кубическим. Действительно, произвольная прямая d проектируется из S на квадрику Q в конику k_2. Известно, что если l, m и k_2 не имеют общих точек, то прямые конгруэнции $G(1,1)$, косо проектирующие точки коники k_2, образуют линейчатую поверхность V_4 четвертого порядка. Но в данном случае k_2 и l имеют общую точку S_1, поэтому V_4 распадается на плоскость (S,m) и поверхность третьего порядка V_3. Образом прямой d в преобразовании f является кривая третьего порядка, по которой поверхность V_3 пересекает плоскость π. Найдем F-систему преобразований f и f^{-1}. Обозначим через s_1 и s_2 квадрики Q, инцидентные S, причем s_1 и l – образующие одной серии; $s_1 \cap \pi = B_1$, $s_2 \cap \pi = B_2$, $l \cap \pi = B_3$, $m \cap \pi = C$. Точки B_i – фундаментальные точки преобразования f : B_2 и B_3 – простые F-точки, их P-элементами являются соответственно прямые B_2B_3 и B_3C; B_1 – двукратная F-точка, ее P-элементом является коника, по которой плоскость π пересекает линейчатую квадрику, содержащую прямые s_1, l и m. К фундаментальным относятся и точки M и N, которые являются проекциями на плоскость π точек M_1 и N_1 пересечения прямой m с квадрикой Q; их P-элементами являются прямые пересечения плоскости π с плоскостями (M_1,l) и (N_1,l). F-система преобразования f^{-1} состоит из простых F-точек C (P-прямая – проекция из S на π прямой пересечения плоскости (C,l) с квадрикой Q), $C_1 = m_1 \cap \pi$ и $C_2 = m_2 \cap \pi$, где m_1 и m_2 – образующие квадрики, проходящие соответственно через точки M_1 и N_1 и пересекающие образующую l (P-прямыми являются соответственно B_1C_1 и B_1C_2), $D = t \cap \pi$, где t – прямая конгруэнции G (P-прямая B_1B_2), и двукратной F-точки B_3 (P-элемент – коника, являющаяся проекцией из S на π коники, по которой плоскость (B_3,m) пересекает Q).

Найдем фундаментальную систему преобразований T и T^{-1} пространства с пучком $\{\pi\}$ слабо-инвариантных плоскостей, в каждой из которых задано преобразование f. В состав F-кривой преобразования T входят: однократные прямые s, SM_1 и SN_1 (P-элементами являются, соответственно, плоскости (s_2,l), (M_1,l), (N_1,l)), двукратная прямая s_1 (P-поверхность – линейчатая квадрика, определяемая прямыми s_1, l и m), трехкратная прямая p (P-поверхность – линейчатая поверхность третьего порядка V_3); F-кривая преобразования T^{-1} состоит из однократных прямых m_1, m_2 и l (с P-поверхностями – плоскостями, определяемыми парами прямых l и m_1, l и m_2, s_1 и s_2), двукратных прямых l и m и трехкратной прямой p.

Для получения уравнений преобразований T и T^{-1} введем в пространстве P_3 проективную систему координат, в которой квадрика Q

имеет уравнение $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 0$, а прямые l, m и p – соответственно уравнения $x_1 + x_4 = x_2 - x_3 = 0$, $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = x_4 = 0$; за S примем точку $(1, 0, 0, 1)$. Тогда уравнения преобразования $T(T^{-1})$ имеют вид:
$T : x'_1 : x'_2 : x'_3 : x'_4 = [x_2^2 - x_1^2 - (x_1 - x_4)^2][x_4(x_1 - x_4) - x_3(x_2 + x_3)] : 2x_2(x_1 - x_4)[x_3(x_2 + x_3) - x_4(x_1 - x_4)] : x_3(x_1 - x_4)[(x_2 + x_3)^2 + (x_1 - x_4)^2 : x_4(x_1 - x_4)[(x_2 + x_3)^2 + (x_1 - x_4)^2]$;
$T^{-1} : x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = [2x'_1x'_3(x'^2_3 + x'^2_4 - x'_1x'_4 - x'_2x'_3) + x'_2x'_4(x'^2_3 + x'^2_4 - x'^2_1 - x'^2_2)] : x'_2x'_3[(x'_1 + x'_4) + (x'_2 - x'_3)^2] : x'_3[2x'_3(x'^2_1 + x'^2_2 - x'_2x'_3 + x'_1x'_4) + x'_2(x'^2_3 + x'^2_4 - x'^2_1 - x'^2_2)] : x'_4[2(x'_3(x'^2_1 + x'^2_2 - x'_2x'_3 + x'_1x'_4) + x'_2(x'^2_3 + x'^2_4 - x'^2_1 - x'^2_2)]$.

Преобразования f и f^{-1} в плоскостях пучка $\{\pi\}$ имеют уравнения:
$f : x'_1 : x'_2 : x'_3 : x'_4 = [x_2^2 - x_3^2 - (x_1 - x_3)^2](x_1 - x_2 - 2x_3) : 2x_2(x_1 - x_3)(x_2 + 2x_3 - x_1) : (x_1 - x_3)[(x_2 + x_3)^2 + (x_1 - x_3)^2]$;
$f^{-1} : x_1 : x_2 : x_3 = [2x'_1x'_3(2x'_3 + x'_1 - x'_2) + x'_2(2x'^2_3 - x'^2_1 - x'^2_2)] : x'_2[(x'_1 + x'^2_3 + (x'_2 - x'_3)^2] : 2x'_3(x'^2_1 + x'^2_2 - x'_2x'_3 + x'_1x'_3) + x'_2(2x'^2_3 - x'^2_1 - x'^2_2)$.

2) $S \in l$. В качестве S возьмем точку $(0, 1, 1, 0)$. Тогда уравнения имеют вид:
$T : x'_1 : x'_2 : x'_3 : x'_4 = 2x_1(x_1 + x_4)(x_3 - x_2) : \{(x_2 - x_3)[(x_2^2 - x_3^2) + (x_1^2 - x_4^2)] + (x_1 + x_4)[(x_1^2 - x_4^2) - (x_2 - x_3)^2]\} : 2x_3(x_1 + x_4)(x_3 - x_2) : 2x_4(x_1 + x_4)(x_3 - x_2)$;
$T^{-1} : x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = x'_1x'_4[(x'_1 + x'_4)^2 + (x'_2 - x'_3)^2] : x'_1x'_3(x'^2_1 + x'^2_2 - x'^2_3 - x'^2_4) + x'_2x'_4(x'^2_1 + x'^2_2 + x'_1x'_4 - x'_2x'_3) : [(x'^2_1 + x'^2_2 - x'^2_3 - x'^2_4)x'_1 + 2x'_4(x'^2_1 + x'^2_2 + x'_1x'_4 - x'_2x'_3)]x'_3 : [(x'^2_1 + x'^2_2 - x'^2_3 - x'^2_4)x'_1 + 2x'_4(x'^2_1 + x'^2_2 + x'_1x'_4 - x'_2x'_3)]x'_4$.

Из уравнений непосредственно следует, что в состав F-системы преобразования T входят: прямая l в качестве двукратной F-прямой с P-поверхностью $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_4 - x_2x_3 = 0$ (линейчатая полуквадрика с направляющими l и m); простая F-прямая l_1 – образующая квадрики Q, проходящая через S и отличная от l, с P-плоскостью $x_2 - x_3 = 0$ (касательная плоскость к квадрике Q в точке S); трехкратная F-прямая p с P-поверхностью

$$(x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2)x_1 + 2x_4(x_1^2 + x_2^2 + x_1x_4 - x_2x_3) = 0.$$

Отдельно рассмотрим случай, когда $S \in m$, то есть S – одна из точек пересечения прямой m с квадрикой Q. Если m имеет уравнения $x_1 = x_3 = 0$ и $S(0, 1, 0, 1)$, а остальное – как и ранее, то:
$T : x'_1 : x'_2 : x'_3 : x'_4 = x_1(x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + x_4^2) : [(x_1 + x_3 + x_4)(x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2) + 2x_2(x_4^2 - x_2^2) : x_3(x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2) : x_4(x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + x_4^2)$;
$T^{-1} : x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = x'_1[(x'_1 + x'_4)^2 - (x'_2 - x'_3)^2] : (x'_1 + x'_3 + x'_4)(x'^2_3 + x'^2_4 - x'^2_1 - x'^2_2) + 2x'_2(x'^2_1 - x'^2_3 + x'_2x'_3 + x'_1x'_4) : x'_3[(x'_1 + x'_4)^2 - (x'_2 - x'_3)^2] : x'_4[(x'_1 + x'_4)^2 - (x'_2 - x'_3)^2]$.

В состав F-системы этого преобразования входят: простые F-прямые m и s_1 (образующая квадрики Q, проходящая через S и не пересекающая l) с P-плоскостями (l, M_0) и (s_1, M_0), где $M_0 \in m \cap Q$, $M_0 \neq S$; двукратные F-прямые l и p. P-поверхностью прямой l является линейчатая полуквадрика с направляющими l, m и p. Найдем P-поверхность прямой p. В данном случае p пересекает прямую m. Поэтому проекцией прямой p из центра S на квадрику Q является коника k_2, пересекающая дважды прямую m (в точках S и M_0) и один раз – прямую l. Следовательно, прямые конгруэнции G, проектирующие конику k_2, заполняют плоскость (p, S). Эта плоскость пересекает любую плоскость пучка$\{\pi\}$по прямой p. Итак, $T(p) = p$. Но на прямой p находятся две изолированные F-точки: $P_1 = m \cap p$, $P_2 = \sigma \cap p$, где σ – касательная плоскость к квадрике Q в точке S; P-поверхностями этих точек являются, соответственно, плоскости (l, M_0) и (l, S), которые имеют в данной системе координат уравнения $x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0$ и $x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0$ (это непосредственно следует из уравнений преобразования: два последних уравнения имеют общий множитель, приравняв который к нулю, получим уравнение P-поверхности тех F-элементов, которые инцидентны оси p расслаивающего пучка).

3. $m = 3$.

Пусть l – ось конгруэнции $G(1, 3)$, L – направляющая конгруэнции, то есть L – кривая третьего порядка пространства P_3 (нормкривая), для которой прямая l является бисекантой. При этом ось конгруэнции должна быть образующей линейчатой квадрики Q. Рассмотрим случай, когда ось пучка $\{\pi\}$ тоже принадлежит квадрике, причем l и p принадлежат одному семейству прямолинейных образующих квадрики. За центр S проектирования возьмем точку, принадлежащую L и не принадлежащую прямым l и p.

Систему координат $R = (A_1, A_2, A_3, E)$ пространства P_3 выберем так, чтобы прямая l имела уравнения $x_2 = x_3 = 0$, прямая p – уравнения $x_1 = x_4 = 0$, кривая L – уравнения $x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \lambda^3 : \lambda^2\mu : \lambda\mu^2 : \mu^3$, а точка S совпала с единичной точкой E. При этом уравнения преобразований T и T^{-1} будут иметь вид:

$T : x'_1 : x'_2 : x'_3 : x'_4 = (x_2 - x_1)(x_3 - x_4)(x_4 - x_1)[(x_2 - x_1)^2 - (x_3 - x_4)^2]x_1 : (x_2 - x_1)[(x_2 - x_1)(x_3 - x_4)(x_4 - x_1)(x_1x_3 - x_2x_4) - (x_2 - x_3)(x_4(x_2 - x_1)^3 - x_1(x_3 - x_4)^3)] : (x_3 - x_4)[(x_2 - x_1)(x_3 - x_4)(x_4 - x_1)(x_1x_3 - x_2x_4) - (x_2 - x_3)(x_4(x_2 - x_1)^3 - x_1(x_3 - x_4)^3)] : (x_2 - x_1)(x_3 - x_4)(x_4 - x_1)[(x_2 - x_1)^2 - (x_3 - x_4)^2]x_4;$

$T^{-1} : x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = (x'_2 - x'_3)(x'_1 x'^3_3 - x'^3_2 x'_4)x'_1 : (x'_2x'_4 - x'_1x'_3)(x'_1 x'^3_3 - x'^3_2 x'_4) + x'_2x'_3(x'_1 - x'_4)(x'_1x'_3 - x'^2_2 + x'^2_3 - x'_2x'_4)x'_2 : (x'_2x'_4 - x'_1x'_3)(x'_1 x'^3_3 - x'^3_2 x'_4) + x'_2x'_3(x'_1 - x'_4)(x'_1x'_3 - x'^2_2 + x'^2_3 - x'_2x'_4)x'_2 : (x'_2 - x'_3)(x'_1 x'^3_3 - x'^3_2 x'_4)x'_4.$

Вторая P-система преобразования T имеет уравнение $(x'_2-x'_3)^2(x'_1-x'_4)(x'_1x'^3_3-x'^3_2x'_4)(x'^2_2x'_4+x'_1x'^2_3-x'^2_2x'_3-x'_2x'^2_3)=0$. Первая F-система инцидентна квадрике Q. В ее состав входят: четырехкратная F-прямая p – ось пучка $\{\pi\}$ (проектирование α_1^{-1} переводит прямую p в себя, а прямые конгруэнции $G(1,3)$, проектирующие точки этой прямой, образуют линейчатую поверхность четвертого порядка с трехкратной прямой l и уравнением $x'_1x'^3_3-x'^3_2x'_4=0$); трехкратная F-прямая l – ось конгруэнции $G(1,3)$ (плоскость π пучка $\{\pi\}$, проходящая через произвольную точку L прямой l, пересекает кривую L в трех точках L_1, L_2, L_3; проектирование α_1^{-1} переводит точку L в себя, а прямые LL_1, LL_2, LL_3 являются проектирующими прямыми точки L в проектировании α_2, и так как эти прямые принадлежат плоскости π, то они являются P-кривой точки L; когда точка L описывает прямую l, эта кривая описывает поверхность с уравнением $x'^2_2x'_4-x'_1x'^2_3-x'^2_2x'_3-x'_2x'^2_3=0$, которая и является P-поверхностью F-прямой l); изолированная F-точка $E_{23}(0,1,1,0)$ – точка пересечения прямых p и SE_{14}, где $E_{14}(1,0,0,1)$ (проектирование α_1^{-1} отображает точку E_{23} в прямую SE_{23}, а прямые конгруэнции G, проектирующие точки этой прямой, заполняют плоскость $A_1A_2E_{23}$ с уравнением $x'_2-x'_3=0$, которая и является P-плоскостью F-точки E_{23}); изолированная F-точка $S(1.1.1.1)$ – центр проектирования α_1^{-1} (в качестве образа точки S в отображении α_1^{-1} можно рассматривать любую точку квадрики Q, а образы точек квадрики Q в отображении α_2 заполняют плоскость $x'_1-x'_4=0$, которая и является P-поверхностью F-точки. В состав второй F-системы преобразования T входит ось l конгруэнции G в качестве пятикратной F-прямой (произвольная плоскость $\pi\in\{\pi\}$ пересекает l в точке L; проектирующие прямые отображения α_2 этой точки образуют коническую поверхность третьего порядка; эта поверхность пересекает Q по кривой шестого порядка, которая распадается на прямую l и кривую пятого порядка L_5; эта кривая в отображении α_2 проектируется на плоскость π в кривую L'_5, которая является P-элементом F-точки L; когда плоскость π описывает пучок $\{\pi\}$, кривая L'_5 описывает поверхность с уравнением $(x_2-x_1)(x_3-x_4)(x_4-x_1)(x_1x_3-x_2x_4)-(x_2-x_3)[x_4(x_2-x_1)^3-x_1(x_3-x_4)^3]=0$, которая и является P-поверхностью F-прямой l).

4. Общий случай.

Пусть в данной системе координат элементы, задающие преобразование пространства, имеют уравнения: квадрика Q: $x_1x_3-x_2x_4=0$, ось p пучка плоскостей $\{\pi\}: x_1=x_3=0$, ось l конгруэнции $G(1,m):$ $x_2=x_4=0$, направляющая L конгруэнции – параметрические уравнения $x_1:x_2:x_3:x_4=t^2\varphi_{m-2}(t):t\varphi_{m-2}(t)\mu:t\mu^{m-1}:\mu^m$ (здесь $\varphi_{m-2}(t)$ – однородный полином степени $m-2$ от t), $S(1,1,1,1)$. Тогда преобразования T и T^{-1} имеют уравнения:

$T : x_1' : x_2' : x_3' : x_4' = x_1[(x_2 - x_3)^2(x_3 - x_4)\varphi_{m-2}(x_2 - x_3) + (x_1 - x_2)(x_1 - x_4)^m] : (x_2 - x_3)\{[-x_3(x_2 - x_3)(x_1 - x_2) + (x_1 - x_3)(x_1x_3 - x_2x_4)(x_1 - x_4)]\varphi_{m-2}(x_2 - x_3) + x_1(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_1 - x_4)^{m-1}\} : x_3(x_2 - x_3)[(x_2 - x_3)^2(x_3 - x_4)\varphi_{m-2}(x_2 - x_3) + (x_1 - x_2)(x_1 - x_4)^m : x_3[(x_2 - x_3)^3(x_3 - x_4)\varphi_{m-2}(x_2 - x_3) + (x_1 - x_2)(x_1 - x_4)^{m+1}]$;
$T^{-1} : x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = x_1'x_3'[(-x'^3_3 + x_2'x_3'x_4' - x_1'x'^2_4 + x_3'x'^2_4)\varphi_{m-2}(x_3') + (x_1'x_3' - x_2'x_4')x'^{m-1}_4] : x'^2_3\{[(x_2'x_3'x_4' - x_1'x'^2_3 + x_1'x_2'x_3' - x_2'x'^2_3 - x'^2_1x_4' + x_1'x_3'x_4')]\varphi_{m-2}(x_3') - x_1'x_3'(x_2'x_4' - x_1'x_3')x'^{m-1}_4\} : x'^2_3[(x_2'x_3'x_4' - x'^3_3 - x_1'x'^2_4 + x_3'x'^2_4)\varphi_{m-2}(x_3') + (x_1'x_3' - x_2'x_4')x'^{m-1}_4] : x_3'(x_2'x'^2_3x_4' - x_1'x'^3_3 + x_1'x'^2_3x_4' - x'^3_3x_4' - x_1'x'^3_4 + x_3'x'^3_4)\varphi_{m-2}(x_3') + (-x_1'x_2'x_3'x_4' + x'^2_1x'^2_3 + x_1'x_2'x'^2_4 - x_2'x_3'x'^2_4 - x'^2_1x_3'x_4' + x_1'x'^2_3x_4')x'^{m-1}_4$.

Ось p пучка плоскостей $\{\pi\}$является F-прямой первого вида преобразования T, P-элементом которой является поверхность порядка $m+2$, распадающаяся на плоскость $x_3 = 0$ (P-элемент изолированной F-точки $A_4(0, 0, 0, 1)$) и линейчатую поверхность с уравнением $(x_2x_3x_4 - x_3^3 - x_1x_4^2 + x_3x_4^2)\varphi_{m-2}(x_3) + (x_1x_3 - x_2x_4)x_4^{m-1} = 0$, образованную бисекантами коники $k_2 = Q \cap A_2A_4S$ и кривой L.

Если в качестве оси p пучка $\{\pi\}$ взять прямую $x_1 - x_2 = x_1 - x_3 = 0$, в качестве S – точку $(0, 0, 1, 0)$, а все остальное – как и ранее (в данном случае прямые p и l – скрещивающиеся), то преобразование имеет уравнения:
$T : x_1' : x_2' : x_3' : x_4' = x_2[(x_1^3 + x_1^2x_2 - x_1^2x_3 + x_2^2x_4 - x_1x_2x_3)\varphi_{m-2}(x_2) - x_1^{m+1}] : x_1x_2[(x_1x_2 + x_2^2 - x_2x_3 + x_2x_4 - x_1x_3)\varphi_{m-2}(x_2) - x_1^{m-1}x_2] : x_2^2x_4[(x_1 + x_2 - x_3)\varphi_{m-2}(x_2) - x_1^{m-1}] + x_2(x_2x_4 - x_1x_3)x_1^{m-1} : x_1x_2x_4[(x_1 + x_2 - x_3)\varphi^{m-2}(x_2) - x_1^{m-1}] + (x_2x_4 - x_1x_3)x_1^m$;
$T^{-1} : x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = x_3'x_4'(x_2' - x_1')(x_1'x_4' - x_2'x_3')\varphi_{m-2}(x_3') : x'^2_3(x_2' - x_1')(x_1'x_4' - x_2'x_3')\varphi_{m-2}(x_3') : x_3'(x_1'x_4' - x_2'x_3')(x'^2_3 + x_2'x_4' - x_1'{}_3' - x_3'x_4')\varphi_{m-2}(x_3') : x_4'(x_2' - x_1')[x_3'(x'^2_4 - x'^2_3)\varphi_{m-2}(x_3') - (x_1'x_3' - x_2'x_4')x'^{m-1}_4]$.

Ось p пучка $\{\pi\}$ входит в состав F-системы преобразования T с P-поверхностью $x_3(x_3 - x_4)\cdot(x_1x_4 - x_2x_3)\varphi_{m-2}(x_3) = 0$ и в состав F-системы преобразования T^{-1} с P-поверхностью $x_2[(x_1^2 + x_1x_2 - x_2x_4)\varphi_{m-2}(x_2) - x_1^m] = 0$.

О геометрии второй канонической связности $\mathcal{LCAS}$-многообразий

И.А. Мухометзянова

Пусть (M, g) – $2n + 1$-мерное риманово многообразие, $\mathcal{X}(M)$ – модуль гладких векторных полей на M, $\bigtriangledown$ – оператор Кошуля римановой связности метрики g.

Определение 1. Почти контактной метрической структурой ($\mathcal{AC}$-структурой) на M называется совокупность $\{\Phi, \xi, \eta, g\}$ – тензорных полей на M, где $g =<,>$ – риманова метрика, Φ – тензор типа $(1,1)$, который называется структурным оператором, ξ – структурный вектор, η – контактная 1-форма:

$$\Phi(\xi) = 0, \eta \circ \Phi = 0, \Phi^2 = -id + \xi \otimes \eta, \eta(X) =< \xi, X >,$$

$$< \Phi X, \Phi Y >=< X, Y > -\eta(X)\eta(Y), X, Y \in \mathcal{X}(M).$$

Фундаментальной формой $\mathcal{AC}$-структуры называется кососимметричный дважды ковариантный тензор $\Omega(X, Y) =< X, \Phi Y >$.

Известно [1], что если фундаментальная форма удовлетворяет условию $d\eta = \Omega$, то почти контактная метрическая структура называется контактной метрической структурой или почти сасакиевой (короче $\mathcal{AS}$-) структурой на M. Если к тому же η – форма Киллинга, т.е. $\bigtriangledown_j(\eta)_i + \bigtriangledown_i(\eta)_j = 0$, где $i, j = \overline{0, 2n}$, то $\mathcal{AC}$-структура называется K-контактной. А если присоединенная Q-алгебра этого многообразия абелева [2], то это многообразие называется многообразием келерова типа.

Переход от $\mathcal{AC}$-структуры $\{\Phi, \xi, \eta, g\}$ к $\mathcal{AC}$-структуре $\{\Phi, e^{\sigma}\xi, e^{-\sigma}\eta, e^{-2\sigma}g\}$ называется конформным преобразованием структуры, где σ – функция на M, называемая определяющей функцией преобразования. Если $\sigma = const$, то конформное преобразование называется гомотетией.

Определение 2. $\mathcal{AC}$-структура называется локально конформно почти сасакиевой (короче, $\mathcal{LCAS}$-) структурой, если в некоторой окрестности каждой точки многообразия эта структура допускает конформное преобразование в почти сасакиеву структуру.

Определение 3. $\mathcal{LCAS}$ - многообразие назовем обобщенным L-многообразием, если $\forall X \in \mathcal{L} \Longrightarrow X(\sigma) = 0$.

Тождество $X(\sigma) = 0, X \in \mathcal{L} \Longrightarrow \sigma^a = 0$.

Теорема 1. *Пусть D–$\mathcal{LCAS}$-структура. Тогда следующие условия эквивалентны:*
1) *D–нормальная $\mathcal{AC}$-структура,*
2) *D локально конформно сасакиева обобщенная $L-$структура.*

Определение 4. Связность $\widetilde{\nabla}$ на M называется полусимметрической, если ее тензор кручения S имеет вид [4]:
1) $S(X, Y) = \varsigma(X)Y - \varsigma(Y)X$, где $\varsigma \in \Lambda_1(M)$ – дифференциальная 1-форма на M,
2) $\widetilde{\nabla} g = 0$. (1)
В частности, если $\varsigma = 0$, то $\widetilde{\nabla}$–риманова связность.

Теорема 2. *Пусть* $\varsigma \in \Lambda_1(M)$ *– произвольная дифференциальная* 1-*форма на* M, *тогда существует и при том только одна полусимметрическая связность на* M, *для которой выполняются соотношения* (1).

Доказательство. Пусть T – тензор типа $(2,1)$ аффинной деформации связности ∇ и $\widetilde{\nabla}$, то есть

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + T(X,Y). \tag{2}$$

Согласно (1)

$$S(X,Y) = \widetilde{\nabla}_X Y - \widetilde{\nabla}_Y X - [X,Y] = \tau(X)Y - \tau(Y)X.$$

С учетом (2), имеем

$$S(X,Y) = \widetilde{\nabla}_X Y - \widetilde{\nabla}_Y X - [X,Y] =$$

$$= \nabla_X Y + T(X,Y) - \nabla_Y X - T(Y,X) - [X,Y] = \tau(X)Y - \tau(Y)X,$$

то есть

$$(\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]) + T(X,Y) - T(Y,X) = \tau(X)Y - \tau(Y)X$$

и так как ∇–риманова связность, имеем

$$T(X,Y) - T(Y,X) = \tau(X)Y - \tau(Y)X. \tag{3}$$

С другой стороны,

$$\widetilde{\nabla}_X(g)(Y,Z) = 0,$$

следовательно

$$\widetilde{\nabla}_X(g(Y,Z)) = g(\widetilde{\nabla}_X Y, Z) + g(Y, \widetilde{\nabla}_X Z).$$

С учетом (2), имеем

$$X(g(Y,Z)) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z) = g(T(X,Y),Z) + g(Y,T(X,Z)).$$

Так как $\nabla g = 0$, имеем

$$g(T(X,Y),Z) + g(Y,T(X,Z)) = 0$$

или

$$< T(X,Y), Z > + < Y, T(X,Z) >= 0. \tag{4}$$

Сделаем замену $X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow X$

$$< T(Y,Z), X > + < Z, T(Y,X) >= 0. \tag{5}$$

Сделаем замену $X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow X$

$$< T(Z,X), Y > + < X, T(Z,Y) >= 0. \tag{6}$$

Почленно сложим тождества (4) и (5) и почленно вычтем тождество (6):

$$< T(X,Y) + T(Y,X), Z > + < T(Y,Z) - T(Z,Y), X > + \\ < T(X,Z) - T(Z,X), Y >= 0.$$

С учетом (3), имеем

$$< T(X,Y) + T(Y,X), Z > + < \tau(Y)Z - \tau(Z)Y, X > + \\ < \tau(X)Z - \tau(Z)X, Y >= 0$$

или

$$< T(X,Y) + T(Y,X), Z >= -\tau(X) < Y, Z > +\tau(Z) < X, Y > - \\ \tau(Y) < Z, X > +\tau(Z) < Y, X > .$$

Умножим равенство (3) на Z, имеем

$$< T(X,Y) - T(Y,X), Z >= \tau(X) < Y, Z > -\tau(Y) < X, Z > .$$

Складывая два последних равенства, получим

$$< T(X,Y), Z >= \tau(Z) < X, Y > -\tau(Y) < X, Z >, Z \in \mathcal{X}(M).$$

Таким образом,

$$T(X,Y) = -\tau(Y)X + < X, Y > \tau^\sharp,$$

где $\tau^\sharp$-вектор, дуальный 1-форме τ.

Обратно, пусть

$$T(X,Y) = -\tau(Y)X + < X, Y > \tau^\sharp.$$

Тогда в связности $\widetilde{\nabla} = \nabla + T$ имеем

1) $\widetilde{\nabla} g = 0$,

2) $S(X,Y) = T(X,Y) - T(Y,X) = -\tau(Y)X + < X, Y > \tau^\sharp + \tau(X)Y - < Y, X > \tau^\sharp = \tau(X)Y - \tau(Y)X$.

Теорема доказана.

Для $\mathcal{LCAS}$-многообразия канонически определена полусимметрическая связность:

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - (d\sigma)(Y)X + < X, Y > grad(\sigma).$$

Назовем ее 2-й канонической связностью.

Теорема 3. *Тензор S кручения 2-й канонической связности $\mathcal{LCAS}$-многообразия M удовлетворяет любому из тождеств:*

$$\begin{gathered}\eta \circ S(\Phi X, \Phi Y) = 0, \Phi^2 S(\Phi^2 X, \xi) + \Phi S(\Phi X, \xi) = 0,\\ -\Phi^2 S(\Phi^2 X, \Phi^2 Y) + \Phi^2 S(\Phi X, \Phi Y) - \Phi S(\Phi^2 X, \Phi Y) -\\ \Phi S(\Phi X, \Phi^2 Y) = 0, X, Y \in \mathcal{X}(M).\end{gathered}$$

Теорема 4. *$\mathcal{LCAS}$-многообразие M локально конформно обобщенному L-многообразию тогда и только тогда, когда тензор S кручения 2-й канонической связности удовлетворяет любому из тождеств:*

$$\Phi S(\Phi^2 X, \Phi Y) + \Phi S(\Phi X, \Phi^2 Y) = 0,$$

$$\Phi^2 S(\Phi X, \Phi Y) - \Phi S(\Phi X, \Phi^2 Y) = 0,$$

$$\eta \circ S(\xi, \Phi X) = 0, X, Y \in \mathcal{X}(M).$$

Теорема 5. *Определяющая функция конформного преобразования исходной структуры в $\mathcal{AC}$-структуру является первым интегралом поля характеристического вектора тогда и только тогда, когда тензор S кручения 2-й канонической связности удовлетворяет тождеству:*

$$-\Phi^2 S(\Phi^2 X, \xi) + \Phi S(\Phi X, \xi) = 0, X \in \mathcal{X}(M).$$

Библиографический список

1. *Кириченко В.Ф.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. М.: МПГУ, 2003.
2. *Кириченко В.Ф.* Аксиома Ф-голоморфных плоскостей в контактной метрической геометрии // Известия Академии Наук СССР. Серия математическая.1984. Т. 48. № 4. С. 711–734.
3. *Кириченко В.Ф., Рустанов А.Р.* Дифференциальная геометрия квази-сасакиевых многообразий. Математический сборник, 2002. V. 193. № 8. С. 71–105
4. *Pandey P.N.* Dubey Sudhit Rumar. Almost Grayan manifold admitting semi-symmetric metric connection.Tensor, N.S., Vol. 65 (2004). P. 143–152.

Примеры полных систем функций, не являющихся представляющими системами

Е.А. Зыкова

В предлагаемой статье мы приводим простые примеры систем функций, которые являются полными, но не являются системами представления.

Пусть E сепарабельное банахово пространство, $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ – базис пространства E.

Прямо из определения базиса следует, что выполняются неравенства

$$\inf_{x\in \mathcal{L}(e_{k+1},\dots)} \|e_k - x\| > \delta_k > 0, \ \overline{\lim_{k\to\infty}}\delta_k > \delta_0 > 0. \tag{1}$$

Наряду с базисами в геометрической теории банаховых пространств важную роль играют так называемые полные системы и системы представления. Напомним определение системы представления.

Определение 1. Система элементов $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ сепарабельного пространства E называется *системой представления* в E, если для любого элемента $f \in E$ существует ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k x_k$, такой, что

$$\lim_{n\to\infty} \left\| f - \sum_{k=1}^{n} c_k x_k \right\|_E = 0.$$

Покажем, что в каждом банаховом пространстве с базисом существуют полные системы, которые не являются системами представления.

Зафиксируем базис $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ в пространстве E и определим систему $\{\varphi_n\}$ с помощью равенств:

$$\begin{aligned}
&\varphi_1 = e_1 + \tfrac{1}{2}e_2,\\
&\varphi_2 = \tfrac{1}{2}e_2 + \tfrac{1}{3}e_3,\\
&\varphi_3 = \tfrac{1}{3}e_3 + e_4,\\
&\varphi_4 = e_4 + \tfrac{1}{5}e_5,\\
&\dots\\
&\varphi_{3n+1} = e_{3n+1} + \tfrac{1}{3n+2}e_{3n+2},\\
&\varphi_{3n+2} = \tfrac{1}{3n+2}e_{3n+2} + \tfrac{1}{3n+3}e_{3n+3},\\
&\varphi_{3(n+1)} = \tfrac{1}{3n+3}e_{3n+3} + e_{3n+4},\\
&\dots
\end{aligned}$$

Покажем, что система $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ полная, т.е. что каждый элемент $f \in E$ можно приблизить с любой степенью точности линейной оболочкой системы $\{\varphi_n\}$.

Начнем с e_1. Покажем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует сумма $\sum\limits_{i=1}^{n} d_i\varphi_i$, такая что

$$\left\| e_1 - \sum_{i=1}^{n} d_i\varphi_i \right\| < \varepsilon.$$

Для этого выберем число $n \neq 3k$ и положим $d_i = (-1)^{i-1}$, $i = \overline{1,n}$. Тогда получим

$$\left\| e_1 - \sum_{i=1}^{n} d_i\varphi_i \right\| = \left\| e_1 - \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1}\varphi_i \right\| =$$

$$= \left\| e_1 - (e_1 + \frac{1}{2}e_2) + (\frac{1}{2}e_2 + \frac{1}{3}e_3) - (\frac{1}{3}e_3 + e_4) - \ldots \right\| =$$

$$= \left\| e_1 - e_1 - e_2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) - e_3(-\frac{1}{3} + \frac{1}{3}) - \ldots - e_{n+1}(-1)^{n-1}q \right\| = \left\| e_{n+1}(-1)^n \frac{1}{n+1} \right\|.$$

Таким образом, мы получаем, что если $n \neq 3k$, $k \in N$, то

$$\left\| e_1 - \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1}\varphi_i \right\| = \left\| \frac{1}{n+1} e_{n+1} (-1)^n \right\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Аналогичным образом можно показать, что каждый элмент e_k можно приблизить с любой степенью точности линейной оболочкой системы $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$. Поскольку система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ является базисом пространства E, то и система $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ будет полной в E.

Покажем теперь, что не существует ни одного ряда по системе $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$, такого, что $e_1 = \sum\limits_{i=1}^{\infty} d_i\varphi_i$.

Предположим противное, что такой ряд нашелся, т.е.

$$e_1 = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} d_i\varphi_i. \tag{2}$$

$$\left\| e_1 - \sum_{i=1}^{n} d_i\varphi_i \right\| = \left\| e_1 - d_1(e_1 + \frac{1}{2}e_2) - d_2(\frac{1}{2}e_2 + \frac{1}{3}e_3) - d_3(\frac{1}{3}e_3 + e_4) - \ldots \right\|$$

Используя условие (1), получим:

$$\left\| e_1 - d_1(e_1 + \frac{1}{2}e_2) - d_2(\frac{1}{2}e_2 + \frac{1}{3}e_3) - d_3(\frac{1}{3}e_3 + e_4) - \ldots \right\| \geq |1 - d_1|\delta_1.$$

Из условия (2) следует, что $d_1 = 1$. Тогда

$$\left\| e_1 - \sum_{i=1}^{n} d_i\varphi_i \right\| = \left\| -\frac{1}{2}e_2 - d_2(\frac{1}{2}e_2 + \frac{1}{3}e_3) - d_3(\frac{1}{3}e_3 + e_4) - \ldots \right\|$$

Снова используем условие (1), получим

$$\left\| -\frac{1}{2}e_2 - d_2(\frac{1}{2}e_2 + \frac{1}{3}e_3) - d_3(\frac{1}{3}e_3 + e_4) - \ldots \right\| \geq \frac{1}{2}|1 + d_2|\delta_2.$$

Из условия (2) следует, что $d_2 = -1$. Продолжая действовать аналогичным образом, получаем, что $d_i = (-1)^{i-1}$, $i = \overline{1, n}$.

Таким образом, мы показали, что если и существует ряд, представляющий e_1, то он может быть только следующего вида: $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(-1)^{i-1}\varphi_i$.

Покажем, что этот ряд расходится. Положим $n = 3k$, $k \in N$. Тогда

$$a_n = a_{3k} = (-1)^{3k-1}(\frac{1}{3k}e_{3k} + e_{3k+1}).$$

Получаем, что $a_n \nrightarrow 0$ при $n \to \infty$. Так как общий член ряда не стремится к нулю с ростом n, то ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(-1)^{i-1}\varphi_i$ расходится.

Мы показали, что система $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ является полной, но не является системой представления.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю Е.И. Бережному за постановку задачи.

Универсальное семейство подсхем компактификации в схеме Гильберта пространства модулей стабильных 2-векторных расслоений на поверхности

Н.В. Тимофеева

Предварительные сведения. В настоящей статье изучается структура универсального семейства поверхностей над новой компактификацией тонкого многообразия модулей стабильных 2-векторных расслоений, с классами Чженя c_1, c_2, на поверхности. Пусть S – гладкая проективная неприводимая поверхность над полем $\mathbb{C}$, $\mathrm{H} \in Pic\ S$ – класс поляризации, M_0 – многообразие модулей стабильных по Гизекеру [1] 2-векторных расслоений с классами Чженя c_1, c_2 на поверхности S, $\bar{M}$ – его компактификация Гизекера-Маруямы. Считаем, что классы c_1, c_2 таковы, что многообразие $\bar{M}$ является тонким и не содержит строго полустабильных пучков [2], [3]. Пусть $\mathbb{E}$ – универсальный пучок на произведении $Y = \bar{M} \times S$. Автором показано, что его гомологическая размерность равна 1. Для дальнейшего необходима локально свободная резольвента пучка $\mathbb{E}$:

$$0 \to E_1 \to E_0 \to \mathbb{E} \to 0. \tag{1}$$

Обозначим за $\hat{Y}$ раздутие схемы Y в пучке нулевых идеалов Фиттинга $\mathcal{I} = \mathcal{F}itt^0 \mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_Y}(\mathbb{E}, \mathcal{O}_Y)$, $\sigma : \hat{Y} \to Y$ – соответствующий морфизм. Многообразие $\hat{Y}$ обладает локально свободным пучком E ранга 2, причем его ограничение на открытое подмножество $Y_0 = M_0 \times S$ равно $\mathbb{E}|_{Y_0}$. Открытое подмножество Y_0 обладает вложением в грассманиан G двумерных подпространств векторного пространства $H^0(E^\vee \otimes \mathcal{L})^\vee$ для некоторого очень обильного пучка $\mathcal{L} \in Pic\ \hat{Y}$, причем образы слоев $\{y\} \times S$ для всех $y \in M_0$ имеют постоянный многочлен Гильберта $P(k)$. Тогда определено индуцированное вложение базы M_0 в схему Гильберта H подсхем в грассманиане G, имеющих многочлен Гильберта, равный $P(k)$. Компактификация $\tilde{M}$ строится как замыкание образа многообразия M_0 при вложении в схему Гильберта H. Пусть $Z \subset H \times G$ – универсальное семейство подсхем, соответствующее схеме Гильберта H, $\tilde{Y} = Z \times_H \tilde{M}$ – его ограничение на подсхему $\tilde{M}$, $p_1 : \tilde{Y} \to \tilde{M}$ – естественная проекция. Имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc}
G & \overset{j}{\hookleftarrow} & \hat{Y} & \xrightarrow{\sigma} & Y \\
p_2^Z \uparrow & & p_2 \uparrow & & \downarrow \pi \\
Z & \overset{\tilde{h}_Y}{\hookleftarrow} & \tilde{Y} & & \bar{M} \\
p_1^Z \downarrow & & p_1 \downarrow & \nearrow \phi & \\
H & \overset{\tilde{h}}{\hookleftarrow} & \tilde{M} & &
\end{array}$$

с нижним расслоенным квадратом, в которой p_2 – проекция, индуцированная проекцией p_2^Z универсальной подсхемы, $\phi : \tilde{M} \to \bar{M}$ – регулярный бирациональный морфизм компактификации $\tilde{M}$ на компактификацию Гизекера-Маруямы. Универсальное семейство подсхем $\tilde{Y}$ снабжено локально свободным пучком $\tilde{\mathbb{E}}$ и содержит открытое подмножество, изоморфное Y_0, причем $p_{2*}\tilde{\mathbb{E}}|_{Y_0} = E|_{Y_0}$. Теперь рассмотрим сквозное отображение

$$(\mathrm{id}_{\tilde{M}}, \sigma \circ p_2) : \tilde{M} \times \tilde{Y} \xrightarrow{(\mathrm{id}_{\tilde{M}}, p_2)} \tilde{M} \times \hat{Y} \xrightarrow{(\mathrm{id}_{\tilde{M}}, \sigma)} \tilde{M} \times Y,$$

и вложение $\tilde{Y} \overset{p_1 \times \mathrm{id}_{\tilde{Y}}}{\hookrightarrow} \tilde{M} \times \tilde{Y}$, определяемое композицией $\tilde{Y} \overset{diag}{\hookrightarrow} \tilde{Y} \times \tilde{Y} \xrightarrow{(p_1, \mathrm{id}_{\tilde{Y}})} \tilde{M} \times \tilde{Y}$ диагонального вложения и проекции первого сомножителя. Введем обозначения $\hat{\Delta} := (\mathrm{id}_{\tilde{M}}, p_2)(\tilde{\Delta})$, $\Delta = (\mathrm{id}_{\tilde{M}}, \sigma)(\hat{\Delta})$, пусть $i_\Delta : \Delta \hookrightarrow \tilde{M} \times Y$ – замкнутое вложение. Здесь $\hat{\Delta}$ и Δ определяются как схемные образы соответствующих морфизмов. Имеют место изоморфизмы $\hat{\Delta} \cong \tilde{Y}$ и $\Delta \cong \tilde{M} \times S$. Автором доказано, что имеет место равенство

$$(\mathrm{id}_{\tilde{M}}, \sigma \circ p_2)_* (\mathcal{O}_{\tilde{M}} \boxtimes \tilde{\mathbb{E}} \otimes (\sigma \circ p_2)^* \mathcal{O}_Y(-D)))^{\vee\vee}|_\Delta = (\mathcal{O}_{\tilde{M}} \boxtimes \mathbb{E})|_\Delta, \qquad (2)$$

где D – класс дивизоров на схеме Y.

Предложение 1. *В диаграмме*

$$\begin{array}{ccc} \tilde{M} \times \hat{Y} & \xrightarrow{(id_{\tilde{M}}, \sigma)} & \tilde{M} \times Y \\ \Updownarrow & & \Updownarrow i_\Delta \\ \hat{\Delta} & \xrightarrow{\hat{\sigma}} & \Delta, \end{array}$$

где вертикальные стрелки – замкнутые вложения, $\hat{\sigma} := (id_{\tilde{M}}, \sigma)|\hat{\Delta}$ – морфизм раздутия пучка идеалов $\mathcal{J} := (i_\Delta^{-1}(\mathcal{O}_{\tilde{M}} \boxtimes \mathcal{I})) \cdot \mathcal{O}_\Delta$.

Доказательство. Образуем расслоенное произведение $\Delta_1 := \Delta \times_Y \hat{Y}$, и пусть $i_1 : \Delta_1 \hookrightarrow \tilde{M} \times \hat{Y}$ – его вложение. Тогда, по универсальности расслоенного произведения, существует единственный морфизм $r : \hat{\Delta} \to \Delta_1$, включающийся в коммутативный треугольник:

$$\begin{array}{ccc} \hat{\Delta} & \xrightarrow{r} & \Delta_1 \\ & \hat{i} \searrow & \Updownarrow i_1 \\ & & \tilde{M} \times \hat{Y}. \end{array}$$

Теперь обозначим за Δ' раздутие схемы Δ в пучке идеалов $\mathcal{J} := (i_\Delta^{-1}(\mathcal{O}_{\tilde{M}} \boxtimes \mathcal{I})) \cdot \mathcal{O}_\Delta$; пусть $\sigma' : \Delta' \to \Delta$ – морфизм раздутия. Согласно универсальному свойству раздутий [4, II, Предложение 7.15], существует единственный морфизм (замкнутое вложение) $i' : \Delta' \hookrightarrow \tilde{M} \times Y$, делающий коммутативной диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \tilde{M} \times \hat{Y} & \xrightarrow{(id_{\tilde{M}}, \sigma)} & \tilde{M} \times Y \\ i' \Updownarrow & & \Updownarrow i_\Delta \\ \Delta' & \xrightarrow{\sigma'} & \Delta. \end{array}$$

Тогда, по универсальности расслоенного произведения, существует единственный морфизм $s : \Delta' \to \Delta_1$, включающийся в коммутативный треугольник

$$\begin{array}{ccc} \Delta' & \xrightarrow{s} & \Delta_1 \\ & i' \searrow & \uparrow i_1 \\ & & \tilde{M} \times \hat{Y}. \end{array}$$

Лемма 2. *Пусть в коммутативной диаграмме*

$$\begin{array}{ccc} X & \xhookrightarrow{h} & Z \\ & f \searrow & \uparrow g \\ & & Y \end{array}$$

морфизм h – замкнутое вложение, морфизм g отделим. Тогда f – замкнутое вложение.

Доказательство. Образуем расслоенное произведение $X \times_Z Y$ и рассмотрим морфизмы $id_X \times f : X \to X \times_Z Y$ и $(f, id_Y) : X \times_Z Y \to Y \times_Z Y$, индуцированные тождественными отображениями на X и на Y и морфизмом f. В расслоенной диаграмме

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{id_X \times f} & X \times_Z Y & \xrightarrow{pr_1} & X \\ f \downarrow & & \downarrow (f, id_Y) & & \downarrow f \\ Y & \xrightarrow{diag} & Y \times_Z Y & \xrightarrow{pr_1} & Y \end{array}$$

$diag$ – замкнутое вложение, согласно отделимости морфизма g. Тогда морфизм $id_X \times f$ – замкнутое вложение. Морфизм $h' : X \times_Z Y \to Y$, полученный из морфизма h заменой базы, также является замкнутым вложением. Композиция $h' \circ (id_X \times f)$ может быть представлена в виде $h' \circ (id_X \times f) = f \circ pr_1 \circ (id_X \times f) = f \circ id_X = f$, что и доказывает лемму.

Согласно лемме 2, морфизмы r и s – замкнутые вложения. Заметим далее, что схемы Δ' и $\hat{\Delta}$ содержат совпадающие открытые подмножества, изоморфные $M_0 \times S$. Схема $\hat{\Delta}$ приведена и не приводима по построению; схема Δ' приведена и не приводима как раздутие целой схемы Δ. Отсюда следует, что $\hat{\Delta} = \Delta'$, и $\hat{\sigma} = \sigma'$, что и доказывает предложение.

Замечание. Схема $\hat{\Delta}$ является неприводимой компонентой схемы Δ_1. В самом деле, схемы $\hat{\Delta}$ и Δ_1 обладают совпадающими открытыми подмножествами, изоморфными $M_0 \times S$, причем схема $\hat{\Delta}$ приведена и не приводима.

Предложение 3. *Справедливо равенство*

$$\mathcal{J} = \mathcal{F}itt^0 \mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_\Delta}((((\mathrm{id}_{\tilde{M}}, \sigma\circ p_2)_*(\mathcal{O}_{\tilde{M}} \boxtimes \tilde{\mathbb{E}} \otimes (\sigma\circ p_2)^*\mathcal{O}_Y(-D)))^{\vee\vee}|_\Delta, \mathcal{O}_\Delta).$$

Доказательство. Согласно (2),

$$\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_\Delta}((((\mathrm{id}_{\tilde{M}}, \sigma\circ p_2)_*(\mathcal{O}_{\tilde{M}} \boxtimes \tilde{\mathbb{E}} \otimes (\sigma\circ p_2)^*\mathcal{O}_Y(-D)))^{\vee\vee}|_\Delta, \mathcal{O}_\Delta) =$$

$$\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_\Delta}(i_\Delta^*(\mathcal{O}_{\tilde{M}} \boxtimes \mathbb{E}), i_\Delta^*\mathcal{O}_{\tilde{M}\times Y}).$$

Здесь использовано соотношение $\mathcal{O}_\Delta = i_\Delta^*\mathcal{O}_{\tilde{M}\times Y}$. Заметим, что, согласно [4, III, Предл. 9.2 b], $i_\Delta^*(\mathcal{O}_{\tilde{M}} \boxtimes \mathbb{E})$ является плоским над $\tilde{M}$ пучком $\mathcal{O}_{\tilde{M}\times S}$-модулей.

Убедимся в справедливости первого из следующих равенств (второе очевидно):

$$\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_\Delta}(\mathcal{O}_{\tilde{M}} \boxtimes \mathbb{E}|_\Delta, \mathcal{O}_\Delta) = i_\Delta^* \mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_{\tilde{M}\times Y}}(\mathcal{O}_{\tilde{M}} \boxtimes \mathbb{E}, \mathcal{O}_{\tilde{M}\times Y}) =$$

$$i_\Delta^*(\mathcal{O}_{\tilde{M}} \boxtimes \mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_Y}(\mathbb{E}, \mathcal{O}_Y)).$$

После тензорного умножения точной последовательности (1) на пучок $\mathcal{O}_{\tilde{M}}$ и ограничения на подсхему Δ имеем точную тройку $\mathcal{O}_\Delta$-пучков:

$$0 \to \mathcal{O}_{\tilde{M}} \boxtimes E_1|_\Delta \to \mathcal{O}_{\tilde{M}} \boxtimes E_0|_\Delta \to \mathcal{O}_{\tilde{M}} \boxtimes \mathbb{E}|_\Delta \to 0.$$

Точность слева следует из того факта, что пучок $\mathcal{O}_{\tilde{M}} \boxtimes E_1|_\Delta$ не имеет кручения. Применяя функтор $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_\Delta}(\cdot, \mathcal{O}_\Delta)$, получим точную последовательность

$$0 \to \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_\Delta}(\mathcal{O}_{\tilde{M}} \boxtimes \mathbb{E}|_\Delta, \mathcal{O}_\Delta) \to \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_\Delta}(\mathcal{O}_{\tilde{M}} \boxtimes E_0|_\Delta, \mathcal{O}_\Delta)$$

$$\to \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_\Delta}(\mathcal{O}_{\tilde{M}} \boxtimes E_1|_\Delta, \mathcal{O}_\Delta) \to \mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_\Delta}(\mathcal{O}_{\tilde{M}} \boxtimes \mathbb{E}|_\Delta, \mathcal{O}_\Delta)$$

$$\to \mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_\Delta}(\mathcal{O}_{\tilde{M}} \boxtimes E_0|_\Delta, \mathcal{O}_\Delta) \to \mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_\Delta}(\mathcal{O}_{\tilde{M}} \boxtimes E_1|_\Delta, \mathcal{O}_\Delta).$$

С другой стороны, применение к точной тройке (1) тензорного умножения и функтора $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\tilde{M}\times Y}}(\cdot, \mathcal{O}_{\tilde{M}\times Y})$ приводит к точной последовательности

$$0 \to \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\tilde{M}\times Y}}(\mathcal{O}_{\tilde{M}} \boxtimes \mathbb{E}, \mathcal{O}_{\tilde{M}\times Y}) \to \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\tilde{M}\times Y}}(\mathcal{O}_{\tilde{M}} \boxtimes E_0, \mathcal{O}_{\tilde{M}\times Y})$$

$$\to \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\tilde{M}\times Y}}(\mathcal{O}_{\tilde{M}} \boxtimes E_1, \mathcal{O}_{\tilde{M}\times Y}) \to \mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_{\tilde{M}\times Y}}(\mathcal{O}_{\tilde{M}} \boxtimes \mathbb{E}, \mathcal{O}_{\tilde{M}\times Y})$$

$$\to \mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_{\tilde{M}\times Y}}(\mathcal{O}_{\tilde{M}} \boxtimes E_0, \mathcal{O}_{\tilde{M}\times Y}).$$

Заметим, что в силу локальной свободы пучка E_0 пучок $\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_{\tilde{M}\times Y}}(\mathcal{O}_{\tilde{M}} \boxtimes E_0, \mathcal{O}_{\tilde{M}\times Y}) = 0$. Теперь применим функтор i^*_Δ и получим комплекс

$$0 \to i^*_\Delta \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\tilde{M}\times Y}}(\mathcal{O}_{\tilde{M}} \boxtimes \mathbb{E}, \mathcal{O}_{\tilde{M}\times Y}) \to i^*_\Delta \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\tilde{M}\times Y}}(\mathcal{O}_{\tilde{M}} \boxtimes E_0, \mathcal{O}_{\tilde{M}\times Y})$$

$$\to i^*_\Delta \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\tilde{M}\times Y}}(\mathcal{O}_{\tilde{M}} \boxtimes E_1, \mathcal{O}_{\tilde{M}\times Y}) \to i^*_\Delta \mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_{\tilde{M}\times Y}}(\mathcal{O}_{\tilde{M}} \boxtimes \mathbb{E}, \mathcal{O}_{\tilde{M}\times Y}) \to 0,$$

точный в последнем члене.

Рассмотрим морфизмы замены базы

$$r_\ell : i^*_\Delta \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\tilde{M}\times Y}}(\mathcal{O}_{\tilde{M}} \boxtimes E_\ell, \mathcal{O}_{\tilde{M}\times Y}) \to \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_\Delta}(\mathcal{O}_{\tilde{M}} \boxtimes E_\ell|_\Delta, \mathcal{O}_\Delta), \quad \ell = 0, 1.$$

Нетрудно проверить, что для любого конечно представимого A- модуля M и любой A-алгебры B отображение

$$r : \mathrm{Hom}_A(M, A) \otimes_A B \to \mathrm{Hom}_B(M \otimes_A B, B)$$

– эпиморфизм.

Слой пучка $i^*_\Delta \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\tilde{M}\times Y}}(\mathcal{O}_{\tilde{M}} \boxtimes E_\ell, \mathcal{O}_{\tilde{M}\times Y})$ в произвольной точке $x \in \Delta$ равен:

$$\begin{aligned}
&(i^*_\Delta \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\tilde{M}\times Y}}(\mathcal{O}_{\tilde{M}} \boxtimes E_\ell, \mathcal{O}_{\tilde{M}\times Y}))_x \\
&= (\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\tilde{M}\times Y}}(\mathcal{O}_{\tilde{M}} \boxtimes E_\ell, \mathcal{O}_{\tilde{M}\times Y}))_x \otimes_{\mathcal{O}_{\tilde{M}\times Y,x}} \mathcal{O}_{\Delta,x} \\
&= \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\tilde{M}\times Y,x}}((\mathcal{O}_{\tilde{M}} \boxtimes E_\ell)_x, \mathcal{O}_{\tilde{M}\times Y,x}) \otimes_{\mathcal{O}_{\tilde{M}\times Y,x}} \mathcal{O}_{\Delta,x}.
\end{aligned}$$

Слой в точке $x \in \Delta$ пучка $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_\Delta}(\mathcal{O}_{\tilde{M}} \boxtimes E_\ell|_\Delta, \mathcal{O}_\Delta)$ равен

$$(\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_\Delta}(\mathcal{O}_{\tilde{M}} \boxtimes E_\ell|_\Delta, \mathcal{O}_\Delta))_x = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\Delta,x}}((\mathcal{O}_{\tilde{M}} \boxtimes E_\ell|\Delta)_x, \mathcal{O}_{\Delta,x}).$$

Сравнивая послойно ранги рассмотренных локально свободных пучков, заключаем, что r_ℓ – изоморфизм. Итак, имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc}
0 & & 0 \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_\Delta}(\mathcal{O}_{\tilde{M}} \boxtimes \mathbb{E}|_\Delta, \mathcal{O}_\Delta) & \longleftarrow & i^*_\Delta \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\tilde{M}\times Y}}(\mathcal{O}_{\tilde{M}} \boxtimes \mathbb{E}, \mathcal{O}_{\tilde{M}\times Y}) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_\Delta}(\mathcal{O}_{\tilde{M}} \boxtimes E_0|_\Delta, \mathcal{O}_\Delta) & = & i^*_\Delta \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\tilde{M}\times Y}}(\mathcal{O}_{\tilde{M}} \boxtimes E_0, \mathcal{O}_{\tilde{M}\times Y}) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_\Delta}(\mathcal{O}_{\tilde{M}} \boxtimes E_1|_\Delta, \mathcal{O}_\Delta) & = & i^*_\Delta \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\tilde{M}\times Y}}(\mathcal{O}_{\tilde{M}} \boxtimes E_1, \mathcal{O}_{\tilde{M}\times Y}) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_\Delta}(\mathcal{O}_{\tilde{M}} \boxtimes \mathbb{E}|_\Delta, \mathcal{O}_\Delta) & \longleftarrow & i^*_\Delta \mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_{\tilde{M}\times Y}}(\mathcal{O}_{\tilde{M}} \boxtimes \mathbb{E}, \mathcal{O}_{\tilde{M}\times Y}) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_\Delta}(\mathcal{O}_{\tilde{M}} \boxtimes E_0|_\Delta, \mathcal{O}_\Delta) & \longleftarrow & 0
\end{array}$$

с точным левым столбцом. Слой пучка $\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_\Delta}(\mathcal{O}_{\tilde{M}} \boxtimes E_0|_\Delta, \mathcal{O}_\Delta)$ равен $\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_\Delta}(\mathcal{O}_{\tilde{M}} \boxtimes E_0|_\Delta, \mathcal{O}_\Delta)_x = \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{\Delta,x}}((\mathcal{O}_{\tilde{M}} \boxtimes E_0|_\Delta)_x, \mathcal{O}_{\Delta,x}) = 0$, поскольку в аргументах стоят свободные модули. Таким образом, имеем изоморфизм коядер

$$\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_\Delta}(\mathcal{O}_{\tilde{M}} \boxtimes \mathbb{E}|_\Delta, \mathcal{O}_\Delta) \cong i^*_\Delta \mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_{\tilde{M}\times Y}}(\mathcal{O}_{\tilde{M}} \boxtimes \mathbb{E}, \mathcal{O}_{\tilde{M}\times Y}).$$

Далее, по доказанному,

$$\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_\Delta}(\mathcal{O}_{\tilde{M}} \boxtimes \mathbb{E}|_\Delta, \mathcal{O}_\Delta) = i^*_\Delta(\mathcal{O}_{\tilde{M}} \boxtimes \mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_Y}(\mathbb{E}, \mathcal{O}_Y)).$$

Отсюда для пучка идеалов Фиттинга получаем:

$$\mathcal{F}itt^0(\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_\Delta}(\mathcal{O}_{\tilde{M}} \boxtimes \mathbb{E}|_\Delta, \mathcal{O}_\Delta)) = \mathcal{F}itt^0(i^*_\Delta(\mathcal{O}_{\tilde{M}} \boxtimes \mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_Y}(\mathbb{E}, \mathcal{O}_Y)))$$
$$= i^{-1}_\Delta(\mathcal{F}itt^0(\mathcal{O}_{\tilde{M}} \boxtimes (\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_Y}(\mathbb{E}, \mathcal{O}_Y)))) \cdot \mathcal{O}_\Delta = i^{-1}_\Delta(\mathcal{O}_{\tilde{M}} \boxtimes \mathcal{I}) \cdot \mathcal{O}_\Delta.$$

Предложение 3 доказано.

Итак, проекция $p_1 : \tilde{Y} \to \tilde{M}$ может быть представлена в виде композиции согласно диаграмме

$$\begin{array}{ccc} \tilde{Y} & \xrightarrow{\cong} & \hat{\Delta} \\ p_1 \downarrow & & \downarrow \hat{\sigma} \\ \tilde{M} & \xleftarrow{\tilde{\pi}} & \Delta. \end{array} \qquad (3)$$

Введем морфизмы вложения слоев $i_{\tilde{y}} : \{\tilde{y}\} \times S \hookrightarrow \Delta$ и $i_{\bar{y}} : \{\bar{y}\} \times S \hookrightarrow Y$ для $\bar{y} = \phi(\tilde{y})$. Тогда по свойству универсальности раздутий [4, II, Предложение 7.15] коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \hat{\Delta} & \hookleftarrow & \hat{S}_{\tilde{y}} \\ \hat{\sigma} \downarrow & & \downarrow \hat{\sigma}_{\tilde{y}} \\ \Delta & \stackrel{i_{\tilde{y}}}{\hookleftarrow} & \{\tilde{y}\} \times S, \end{array}$$

где символом $\hat{S}_{\tilde{y}}$ обозначено раздутие слоя $\{\tilde{y}\} \times S$ в пучке идеалов $i^{-1}_{\tilde{y}} \mathcal{J} \cdot \mathcal{O}_{\{\tilde{y}\}\times S}$, $\hat{\sigma}_{\tilde{y}}$ – соответствующий морфизм раздутия. Теперь образуем расслоенное произведение $\hat{\Delta} \times_\Delta (\{\tilde{y}\} \times S)$; пусть $\hat{\Delta} \times_\Delta (\{\tilde{y}\} \times S) \hookrightarrow \hat{\Delta}$ – соответствующее замкнутое вложение. Тогда по универсальности расслоенного произведения существует единственный морфизм $t : \hat{S}_{\tilde{y}} \to \hat{\Delta} \times_\Delta (\{\tilde{y}\} \times S)$, делающий коммутативным треугольник

$$\begin{array}{ccc} \hat{\Delta} & \hookleftarrow & \hat{S}_{\tilde{y}} \\ \Updownarrow & \swarrow t & \\ \hat{\Delta} \times_\Delta (\{\tilde{y}\} \times S). & & \end{array}$$

По лемме 2, t – замкнутое вложение. Комбинируя диаграмму (3) и формирование расслоенного произведения $\hat{\Delta} \times_{\Delta} (\{\tilde{y}\} \times S)$, заключаем, что $\hat{\Delta} \times_{\Delta} (\{\tilde{y}\} \times S)$ – слой проекции p_1 и, следовательно, является поверхностью. При этом $\hat{S}_{\tilde{y}}$ – компонента в $\hat{\Delta} \times_{\Delta} (\{\tilde{y}\} \times S)$ и, следовательно, в слое проекции p_1.

Преобразуем пучок идеалов $i_{\tilde{y}}^{-1}\mathcal{J} \cdot \mathcal{O}_{\{\tilde{y}\}\times S} = i_{\tilde{y}}^{-1}(i_{\Delta}^{-1}(\mathcal{O}_{\tilde{M}} \boxtimes \mathcal{I}) \cdot \mathcal{O}_{\Delta}) \cdot \mathcal{O}_{\{\tilde{y}\}\times S} = (i_{\tilde{y}} \circ i_{\Delta})^{-1}(\mathcal{O}_{\tilde{M}} \boxtimes \mathcal{I}) \cdot \mathcal{O}_{\{\tilde{y}\}\times S} = k_{\tilde{y}} \boxtimes i_{\tilde{y}}^{-1}\mathcal{I} \cdot \mathcal{O}_{\{\tilde{y}\}\times S} = k_{\tilde{y}} \boxtimes \mathcal{F}itt^0(i_{\tilde{y}}^{*}\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_Y}(\mathbb{E}, \mathcal{O}_Y))$. Применяя к точной тройке (1) функторы $i_{\tilde{y}}^{*}$, $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\cdot, \mathcal{O}_Y)$ и $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_S}(\cdot, \mathcal{O}_S)$ и обозначая символом $\mathcal{E}_{\bar{y}}$ пучок, соответствующий точке $\bar{y} \in \bar{M}$, приходим к равенству

$$i_{\tilde{y}}^{*}\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_Y}(\mathbb{E}, \mathcal{O}_Y) = \mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_{\{\bar{y}\}\times S}}(\mathcal{E}_{\bar{y}}, \mathcal{O}_{\{\bar{y}\}\times S}).$$

Таким образом, поверхность $\hat{S}_{\tilde{y}}$ изоморфна раздутию поверхности S в пучке идеалов Фиттинга $\mathcal{F}itt^0\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_{\{\bar{y}\}\times S}}(\mathcal{E}_{\bar{y}}, \mathcal{O}_{\{\bar{y}\}\times S}) = \mathcal{F}itt^0\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{E}_{\bar{y}}, \mathcal{O}_S)$.

Итак, доказана

Теорема. *Проекция $p_1 : \tilde{Y} \to \tilde{M}$ разлагается в композицию $\tilde{Y} \xrightarrow{\hat{\sigma}} \Delta \xrightarrow{\tilde{\pi}} \tilde{M}$ морфизма $\hat{\sigma}$ раздутия в пучке идеалов*

$$\mathcal{J} = \mathcal{F}itt^0\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_\Delta}((((\mathrm{id}_{\tilde{M}}, \sigma \circ p_2)_*(\mathcal{O}_{\tilde{M}} \boxtimes \tilde{\mathbb{E}} \otimes (\sigma \circ p_2)^*\mathcal{O}_Y(-D)))^{\vee\vee}|_\Delta, \mathcal{O}_\Delta),$$

где $\Delta \cong \tilde{M} \times S$, и проекции на сомножитель $\tilde{\pi} : \tilde{M} \times S \to \tilde{M}$. При этом слой проекции p_1 над специальной точкой $\tilde{y} \in \tilde{M} \backslash M_0$ содержит компоненту, изоморфную раздутию поверхности S в пучке идеалов $\mathcal{F}itt^0\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{E}_{\bar{y}}, \mathcal{O}_S)$. Слой проекции p_1 над точкой $\tilde{y} \in M_0$ изоморфен поверхности S.

Библиографический список

1. *Gieseker D.* On the moduli of vector bundles on an algebraic surface // Ann. of Math, 106(1977), P. 45–60.

2. *Maruyama M.* Moduli of stable sheaves, II // J. Math. Kyoto Univ. (JMKYAZ) 1978. V. 18–3. P. 557–614.

3. *Huybrechts D., Lehn M.* Geometry of Moduli Spaces of Sheaves. Publ. of Max-Planck-Inst. für Mathematik, Bonn. Vieweg, 1997.

4. *Хартсхорн Р.* Алгебраическая геометрия. М.: Мир, 1981.

Об универсальном семействе полустабильных пучков ранга 2 с $c_1 = 0$, $c_2 = 2$ на поверхности $\mathcal{F}_1$

М.Е. Сорокина

Введение

Настоящая статья посвящена доказательству одного геометрического результата, связанного с описанием многообразия модулей $\widetilde{M} = \overline{M_S(0,2)}$ полустабильных пучков ранга 2 без кручения на поверхности Хирцебруха $S = \mathbf{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1))$ с классами Черна $c_1 = 0,\ c_2 = 2$. Для реализации этого многообразия модулей как фактора в смысле геометрической теории инвариантов (GIT-фактора) используется аналогичная реализация многообразия $M = \overline{M_{\mathbb{P}^2}(0,2)}$ полустабильных пучков ранга 2 без кручения на $\mathbb{P}^2$ с классами Черна $c_1 = 0,\ c_2 = 2$ как GIT-фактора $G//PGL(3)$, где G – подходящее открытое множество грассманниана $G(2,6)$. Так как S получается из $\mathbb{P}^2$ бирациональным морфизмом $\sigma : S \to \mathbb{P}^2$ раздутия в точке x_0, то естественно ожидать, что $\overline{M_S(0,2)}$ может быть реализовано как GIT-фактор $\mathbb{G}//SL(3)$, где $\mathbb{G}$ – подходящая бирациональная перестройка многообразия G. Искомое многообразие $\mathbb{G}$ получается из G как композиция двух раздутий, необходимых для построения универсального семейства пучков на $S \times \mathbb{G}$, классы S-эквивалентности которых представлены точками многообразия $\overline{M_S(0,2)}$.

Цель настоящей статьи – доказательство гладкости многообразия $\mathbb{G}$ (см. теорему 1) и другого интересного геометрического факта о том, что центр второго раздутия на неособом многообразии, дающего многообразие $\mathbb{G}$, имеет особенности (см. замечание 1). Всюду в статье мы работаем над алгебраически замкнутым основным полем k характеристики 0 (например, $k = \mathbb{C}$).

Построение многообразия $M = \overline{M_{\mathbb{P}^2}(2)}$ и описание проекции $p: G \to M$

В этом параграфе мы рассмотрим некоторые конструкции, связанные с многообразием $M = \overline{M_{\mathbb{P}^2}(0,2)}$. Напомним (см., например, [4)], что M изоморфно $|\mathcal{O}_{\check{\mathbb{P}}^2}(2)| \simeq \mathbb{P}^5$. При этом граница $\partial M := M \setminus M_{\mathbb{P}^2}(0,2)$ многообразия M как множество состоит из точек, соответствующих классам изоморфизма не локально свободных пучков, и изоморфна $S^2\mathbb{P}^2$. Пусть $[E] \in \partial M$. Тогда $[E] = [\mathcal{I}_{x_1} \oplus \mathcal{I}_{x_2}]$, где $\mathcal{I}_{x_i}$ - пучок идеалов точки $x_i,\ i = 1,2$, и множеству представителей этого класса можно сопоставить два множества расширений: $\{0 \to \mathcal{I}_{x_1} \to E \to \mathcal{I}_{x_2} \to 0\}$, если $\mathrm{Sing}E \ni x_1$, и $\{0 \to \mathcal{I}_{x_2} \to E \to \mathcal{I}_{x_1} \to 0\}$, если $\mathrm{Sing}E \ni x_2$. В $\partial M \simeq S^2\mathbb{P}^2$ рассмотрим подмножество $\mathrm{Sing}(S^2\mathbb{P}^2)$ точек $[\mathcal{I}_{x_1} \oplus \mathcal{I}_{x_2}]$, таких, что $x_1 = x_2$, изоморфное $\mathbb{P}^2$. Тогда образ $v(\mathbb{P}^2)$ вложения Веронезе $v: \ \mathbb{P}^2 \hookrightarrow |\mathcal{O}_{\check{\mathbb{P}}^2}(2)|$ - поверхность Веронезе в $\mathbb{P}^5$, а $S^2\mathbb{P}^2$ реализуется как многообразие хорд поверхности $\mathcal{V}$. Обозначим через $\mathbb{P}^2_{x_0}$ приведенную подсхему в M, изоморфную $\mathbb{P}^2$, точками которой являются классы пучков, имеющих особенность в точке x_0. Нетрудно видеть, что $\mathbb{P}^2_{x_0} \simeq \mathcal{P}T_{v(x_0)}\mathcal{V}$ - проективная плоскость в $\mathbb{P}^5$, касательная в точке $v(x_0)$ к поверхности $\mathcal{V}$. Рассмотрим раздутие $\delta: \ \widetilde{M} \to M$ в подсхеме $\mathbb{P}^2_{x_0}$. $\widetilde{M}$ есть многообразие модулей $\overline{M_S(0,2)}$ полустабильных когерентных пучков без кручения ранга 2 с $c_1 = 0$, $c_2 = 2$ на S. (Мы вернемся к этому раздутию в следующем разделе.)

Далее, пусть $[E] \in M$ – произвольная точка и $E \in [E]$. Как известно (см. [1, 2]), пучок E задается точной тройкой $0 \to K \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1) \xrightarrow{\alpha} H \otimes \Omega_{\mathbb{P}^2}(1) \to E \to 0$, в которой K и H - векторные пространства размерности 2, $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(V)$ и морфизм α таков, что

(i) $a := h^0(\alpha(1)) : K \to H \otimes V$ - вложение и

(ii) для любого ненулевого собственного подпространства H' в H и подпространства $K' := a^{-1}(H' \otimes V) = K \cap (H' \otimes V)$ в K выполняется неравенство

$$dimK'/dimK \leq dimH'/dimH.$$

Для пространств указанной размерности это означает, что $dimK' \leq 1$, т.е. $K \not\subseteq H' \otimes V$. Гомоморфизмы $a \in \mathrm{Hom}(K, H \otimes V)$, удовлетворяющие (i) и (ii), составляют подмножество, которое будем обозначать через $\mathcal{M}$. Пусть $Gr := Gr(1, P(H \otimes V))$ - грассманово многообразие 1-подпространств в $P(H \otimes V)$. Сопоставляя точке $a \in \mathcal{M}$ проективную прямую $L = P(Im(a)) \in P(H \otimes V)$, получим морфизм ϕ: $\mathcal{M} \to Gr$, образ G которого - плотное открытое подмножество в Gr. Нетрудно видеть, что $\varphi: \ \mathcal{M} \to G$ – главное $GL(K)$-расслоение, а $M = G//SL(H)$ – хороший фактор по действию группы $SL(H)$.

Изучим строение морфизма $p : G \to M$. Вложим по Плюккеру грассманово многообразие Gr в $\mathbb{P}^{14} = P(\wedge^2(H \otimes V))$. Для образов многообразий Gr и G в $\mathbb{P}^{14}$ будем использовать те же обозначения Gr и G. Рассмотрим рациональную линейную проекцию $p_0 : \ \mathbb{P}^{14} \dashrightarrow \mathbb{P}^5 = P(\wedge^2 H \otimes S^2 V)$ с центром в $\mathbb{P}^8_0 := P(S^2 H \otimes \wedge^2 V)$, существующую в силу разложения $\wedge^2(H \otimes V) = \wedge^2 H \otimes S^2 V \oplus S^2 H \otimes \wedge^2 V$. Тогда морфизм $p : G \to \mathbb{P}^5$ – это ограничение проекции p_0 на многообразие $G \subset Gr$. Кроме того, $G = Gr \setminus Gr \cap \mathbb{P}^8_0$, что непосредственно получаем из описания G. По определению $\mathcal{M}$, пространство $L = P(a(K))$, где a - вложение $K \to H \otimes V$, рассматриваемое как точка грассманиана Gr, лежит в центре проекции p_0, если оно лежит в плоскости $P(< \xi > \otimes V)$ для некоторого ненулевого вектора $\xi \in H$. Таким образом, если $s_{1,2}: \ P(H) \times P(V) \hookrightarrow P(H \otimes V) = \mathbb{P}^5$ – вложение Сегре, $S_{1,2}$ –

образ этого вложения и $\varphi_{|2,1|}(S_{1,2})$ – вложение $S_{1,2}$ в Gr посредством линейного ряда $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)\boxtimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2)$, то $\varphi_{|2,1|}(S_{1,2}) = Gr \cap \mathbb{P}^8_0$ – центр проекции $p_0|_{Gr}$.

Далее будем использовать обозначения $C_L := p_0(L)$ для образа точки $L \in Gr$ в $\mathbb{P}^5$ и $E = E_L$ для пучка $E = \mathrm{coker}\alpha$, поскольку класс изоморфизма данного пучка зависит лишь от точки $L \in G$.

Пусть $E = E_L$ – локально свободный пучок на $\mathbb{P}^2$, а следовательно, стабилен. Для такого пучка в (ii) выполняется строгое неравенство $dimK'/dimK < dimH'/dimH$, поэтому $dimK \cap (H' \otimes V) = 0$. Таким образом, прямая $L \in \mathbb{P}^5$ не пересекает многообразие Сегре $S_{1,2}$.

Приведем здесь некоторые классические утверждения (см. [3]). Рассмотрим вложение $q_{\mathbb{P}^1}: \mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1 \overset{\mathrm{id}\times i}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 \overset{s_{1,2}}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^5$, индуцируемое вложением $i: \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^2$, и пусть $Q(\mathbb{P}^1) = \mathrm{Im} q_{\mathbb{P}^1}$. Тогда

1) $\bigcup\limits_{\mathbb{P}^1 \in \check{\mathbb{P}}^2} \mathrm{Span} Q(\mathbb{P}^1) = \mathbb{P}^5$.

2) Для любой точки $x \in \mathbb{P}^5 \setminus S_{1,2}$ существует единственная прямая $\mathbb{P}^1(x) \in \check{\mathbb{P}}^2$, такая, что $\mathrm{Span} Q(\mathbb{P}^1)$ содержит x.

3) Если точка $L \in Gr$ такова, что соответствующая прямая $L \in \mathbb{P}^5$ не пересекает $S_{1,2}$, то прямые $\mathbb{P}^1(x)$ для всех $x \in L$ огибают конику в $\mathbb{P}^2$: $C_L = \bigcup\limits_{x \in L} \mathbb{P}^1(x) \in \check{\mathbb{P}}^2$.

Нетрудно проверить, что для $L \in \mathbb{P}^5$ коника C_L совпадает с коникой $C(E_L)$ прямых подскока пучка E_L.

Пусть пучок E_L включается в точную тройку $0 \to \mathcal{I}_{x_1} \to E_L \to \mathcal{I}_{x_2} \to 0$. Тогда прямая L пересекает многообразие $S_{1,2}$ в точке $<\xi\otimes v> \in P(H \otimes V)$, где v – некоторый вектор в V. При этом $x_1 = <v> \in \mathbb{P}^2$. Пучку E_L в этом случае соответствует распавшаяся коника $C(E_L) = \check{x}_1 \cup \check{x}_2$ в $\check{\mathbb{P}}^2$.

Если E_L имеет особенность только в точке x_1, то вторую точку x_2 можно получить следующим образом. Пучок идеалов точки x_1 на $\mathbb{P}^2$ включается в точную тройку $0 \to k \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1) \to \xi \otimes \Omega_{\mathbb{P}^2}(1) \to \mathcal{I}_{x_1} \to 0$, в которой k – одномерное подпространство в K, а вложение задается умножением на $\xi \otimes v$. Тогда для факторпучка $\mathcal{I}_{x_2}$ пучка E_L имеется резольвента $0 \to K/k \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1) \to H/\xi \otimes \Omega_{\mathbb{P}^2}(1) \to \mathcal{I}_{x_2} \to 0$, в которой вложение задается умножением на некоторый вектор $H/\xi \otimes w$. При этом $x_2 = <w>$. Точку x_2 можно получить также с точки зрения геометрии. Рассмотрим в $P(H \otimes V)$ трехмерное пространство $\mathbb{P}^3(L) := \mathrm{Span}(L, <\xi \otimes V>)$. Нетрудно видеть, что существует единственная прямая $\mathbb{P}^1 = P(H \otimes w)$, такая, что $\mathbb{P}^3(L) = \mathrm{Span}(<\xi \otimes V>, <H \otimes w>)$, и тогда $<w>$ – это x_2.

Если пучок E_L имеет особенности $\mathrm{Sing} E_L = x_1 \cup x_2$, где $x_1 = <v>$, $x_2 = <w>$ (в этом случае тройка $0 \to \mathcal{I}_{x_1} \to E_L \to \mathcal{I}_{x_2} \to 0$ распадается), то $L \in Gr$ пересекает $S_{1,2}$ в двух точках: $< \xi_1 \otimes v >$ и $< \xi_2 \otimes w >$. Здесь также $C(E_L) = \check{x}_1 \cup \check{x}_2$ – распавшаяся коника.

Рассмотрим строение слоя проекции $p: \ G \to M$ над точкой $[\mathcal{I}_{x_1} \oplus \mathcal{I}_{x_2}]$. Пусть сначала $x_1 \neq x_2$. Как и раньше, $x_1 =< v >$, $x_2 =< w >$. На прямой $P(H) \times x_1$ возьмем произвольную точку $y =< \xi \otimes v >$ и проведем через нее плоскость $< \xi \otimes V >$. Пусть $\mathbb{P}^3(y) := \mathrm{Span}(< \xi \otimes V >, P(H) \times x_2)$. В пространстве $\mathbb{P}^3(y)$ рассмотрим связку $A(y)$ прямых, проходящих через точку y. Это плоскость в грассманиане Gr. Множество таких плоскостей грассманиана, получающихся при перемещении точки y по прямой $P(H) \times x_1$, при проекции p_0 отображается в точку $[E] = [\mathcal{I}_{x_1} \oplus \mathcal{I}_{x_2}]$. Аналогично строятся связки прямых для $y =< \xi \otimes w > \in P(H) \times x_2$ в $\mathrm{Span}(< \xi \otimes V >, P(H) \times x_1)$. Так как класс $[E]$ содержит расширения двух видов: $0 \to \mathcal{I}_{x_1} \to E \to \mathcal{I}_{x_2} \to 0$ и $0 \to \mathcal{I}_{x_2} \to E \to \mathcal{I}_{x_1} \to 0$, то слой над точкой $[\mathcal{I}_{x_1} \oplus \mathcal{I}_{x_2}]$ состоит из двух компонент $Y_1(x_1, x_2) \cup Y_2(x_1, x_2)$, где $Y_1(x_1, x_2) := \bigsqcup\limits_{y \in P(H) \times x_1} (A(y) \setminus (A(y) \cap \mathbb{P}^8_0))$ и $Y_2(x_1, x_2) := \bigsqcup\limits_{y \in P(H) \times x_2} (A(y) \setminus (A(y) \cap \mathbb{P}^8_0))$. При этом $Y_1(x_1, x_2) \cap Y_2(x_1, x_2)$ есть множество прямых, пересекающих одновременно $P(H) \times x_1$ и $P(H) \times x_2$.

При $x_1 = x_2$ компоненты $Y_1(x_1, x_2)$ и $Y_2(x_1, x_2)$ совпадают, $Y_1(x_1, x_2)$ – конус с вершиной $\mathrm{Sing} Y_1(x_1, x_2) = \{P(H) \times x_1\}$, которая является замкнутой орбитой группы $SL(2, H)$.

В случае $[E] \in \mathbb{P}^2_{x_0}$ введем для удобства новые обозначения. Пусть $< v >= x_0$, $< w >= x_1$. Тогда

$$\begin{gathered} Y_0(x_0, x_1) := \bigcup_{<\xi> \in P(H)} \{L \in G | L \cap S_{1,2} = \\ < \xi \otimes v >, P(H \otimes w) \subset S_{1,2} \cap \mathrm{Span}(L, < \xi \otimes V >)\}, \\ Y_1(x_0, x_1) := \bigcup_{<\xi> \in P(H)} \{L \in G | L \cap S_{1,2} = \\ < \xi \otimes w >, P(H \otimes v) \subset S_{1,2} \cap \mathrm{Span}(L, < \xi \otimes V >)\} \end{gathered}$$

– компоненты слоя проекции p над точкой $[\mathcal{I}_{x_0} \oplus \mathcal{I}_{x_1}] = [E]$. Обозначим $Y_0 := \bigcup\limits_{x_1 \in \mathbb{P}^2} Y_0(x_0, x_1)$ и $Y_1 := \bigcup\limits_{x_1 \in \mathbb{P}^2} Y_1(x_0, x_1)$. Подмногообразия Y_0 и Y_1 имеют коразмерность 3 в G, и $p^{-1}(\mathbb{P}^2_{x_0}) = Y_0 \cup Y_1$.

Многообразие $\mathbb{G}$, его гладкость

Рассмотрим многообразие $\mathbb{G}$, определяемое цепочкой отображений:

$$G \overset{\sigma_0}{\leftarrow} G' \overset{\sigma_1}{\leftarrow} \mathbb{G},$$

где σ_0 - раздутие G с центром Y_0, а σ_1 - раздутие G' с центром $\widetilde{Y_1} = \sigma_0^{-1}(Y_1)$. $\mathbb{G}$ служит базой универсального семейства полустабильных когерентных пучков без кручения ранга 2 с $c_1 = 0$, $c_2 = 2$ на S, получаемого применением перестройки Маруямы к обратному образу пучка

$\mathbb{E}$, описанного в предыдущем параграфе, при морфизме $\sigma_1 \circ \sigma_0 \times \sigma :$ $\mathbb{G} \times S \to G \times \mathbb{P}^2$.

Далее, пусть $\widetilde{Y}_0$ – исключительный дивизор раздутия σ_0, D_1 – исключительный дивизор раздутия σ_1 и $D_0 = \sigma_1^{-1}(\widetilde{Y}_0)$. Рассмотрим раздутие $\delta : \widetilde{M} \to M$ с центром в $\mathbb{P}^2_{x_0}$ (см. начало §1), и пусть $D := \delta^{-1}(\mathbb{P}^2_{x_0})$ - исключительный дивизор раздутия δ. Поскольку $D_0 \cup D_1 = (\sigma_0\sigma_1)^{-1}(Y_0 \cup Y_1)$, то в силу универсальности раздутий [5. Предл. 7.14] существует проекция $\widetilde{p} : \mathbb{G} \to \widetilde{M}$ такая, что $\widetilde{p}^* D = D_0 + D_1$ в Pic$\mathbb{G}$. $\widetilde{p} : \mathbb{G} \to \widetilde{M}$ – хороший GIT-фактор по действию группы $SL(H)$.

В этом параграфе мы доказываем гладкость многообразия $\mathbb{G}$. Для этого на грассмановом многообразии Gr рассмотрим точную последовательность

$$0 \to S_2 \to H \otimes V \otimes \mathcal{O}_{Gr} \to Q_4 \to 0, \tag{1}$$

в которой S_2 – тавтологическое подрасслоение ранга 2, Q_4 – универсальное факторрасслоение ранга 4. Известно, что $TGr = S_2{}^\vee \otimes Q_4 \simeq \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_G}(S_2, Q_4)$. Пусть $l_{x_0} = P(H) \times x_0 \subset P(H) \times P(V)$ – прямая на многообразии Сегре. Ограничивая последовательность (1) на точку $y = \{l_{x_0}\} \in Gr$, получим:

$$0 \to S_2(y) \xrightarrow{i_y} H \otimes V \xrightarrow{\varepsilon_y} Q_4(y) \to 0. \tag{2}$$

Ограничим последовательность Эйлера для проективного пространства $\mathbb{P}^{14}$ на Gr, а затем на точку y и включим ее в коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 & 0 & \\
 & & N_{Gr/\mathbb{P}^{14}}(-1)|_y \arrow[u] \arrow[r, equal] & N_{Gr/\mathbb{P}^{14}}(-1)|_y \arrow[u] & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}_{Gr}(-1)|_y \arrow[r] & \wedge^2(H \otimes V) \otimes \mathcal{O}_{Gr}|_y \arrow[r] \arrow[u] & T_{\mathbb{P}^{14}}(-1)|_{Gr}|_y \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}_{Gr}(-1)|_y \arrow[r] \arrow[u, equal] & \mathbb{T}_y(-1) \arrow[r] \arrow[u] & T_yGr(-1) \arrow[r] \arrow[u] & 0. \\
 & & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd} \tag{3}$$

Здесь $P(\mathbb{T}_y) = \mathcal{P}T_yGr$ - проективное касательное пространство к Gr в точке y в $\mathbb{P}^{14}$.

Рассмотрим теперь вторую внешнюю степень последовательности (2). Получим коммутативную диаграмму

$$
\begin{tikzcd}
 & & 0 & 0 & \\
 & & \wedge^2 Q_4(y) \arrow[u] \arrow[r, equal] & \wedge^2 Q_4(y) \arrow[u] & \\
0 \arrow[r] & \wedge^2 S_2(y) \arrow[r, "\wedge^2 i_y"] & \wedge^2(H \otimes V) \arrow[u, "\wedge^2 \varepsilon_y"'] \arrow[r] & \operatorname{coker}(\wedge^2 i_y) \arrow[u] \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \wedge^2 S_2(y) \arrow[u, equal] \arrow[r] & \ker(\wedge^2 \varepsilon_y) \arrow[u] \arrow[r] & \operatorname{Hom}(S_2(y), Q_4(y)) \arrow[u] \arrow[r] & 0, \\
 & & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd}
\tag{4}
$$

которая точна. Так как $\mathcal{O}_{Gr}(-1) = \wedge^2 S_2$, то диаграммы (3) и (4) совпадают. В частности, $\mathbb{T}_y = \ker \wedge^2 \varepsilon_y$.

Многообразие Y_0 есть множество прямых в G, имеющих с прямой l_{x_0} непустое пересечение. Все такие прямые составляют конус над многообразием Сегре $S_{1,3}$, т.е. Y_0 – это пересечение многообразия G с проективным касательным пространством к грассманиану Gr в точке $y = \{l_{x_0}\}$. Пусть $\psi : \mathbb{P}^{14} \dashrightarrow \mathbb{P}^5 = P(\wedge^2 Q_4(y))$ – линейная проекция из центра $\mathcal{P}_y := \mathcal{P}T_y Gr$, $\sigma_{\mathbb{P}_y} : \widetilde{\mathbb{P}}^{14} \to \mathbb{P}^{14}$ – раздутие $\mathbb{P}^{14}$ с центром в $\mathbb{P}_y$. Тогда определен регулярный морфизм $\widetilde{\psi} : \widetilde{\mathbb{P}}^{14} \to \mathbb{P}^5$, делающий коммутативной диаграмму:

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{P}^{14} \arrow[d, dashed, "\psi"'] & \widetilde{\mathbb{P}}^{14} \arrow[l, "\sigma_{\mathbb{P}_y}"'] \arrow[dl, "\widetilde{\psi}"] \\
\mathbb{P}^5. &
\end{tikzcd}
$$

Слои морфизма $\widetilde{\psi}$ – проективные пространства, изоморфные $\mathbb{P}^9$. Так как $Y_0 = \mathbb{P}_y \cap Gr$, то имеем диаграмму раздутий

$$
\begin{tikzcd}
 & Gr \arrow[dl, hook] & & Gr' \arrow[ll, "\sigma_{Y_0}"'] \arrow[dl, hook] \arrow[ddl, "\widetilde{\psi}_{Gr'}"] \\
\mathbb{P}^{14} \arrow[drr, dashed, "\psi"'] & & \widetilde{\mathbb{P}}^{14} \arrow[ll, "\sigma_{\mathbb{P}_y}"'] \arrow[d, "\widetilde{\psi}"'] & \\
 & & \mathbb{P}^5, &
\end{tikzcd}
$$

в которой $\sigma_{Y_0}: Gr' \to Gr$ – раздутие грассманова многообразия Gr в Y_0 и $\widetilde{\psi}_{Gr'} = \widetilde{\psi}|_{Gr'}$. Пусть z – точка в Gr', $z = \wedge^2 S_2(z)$. Если эта точка имеет ненулевой образ в $\wedge^2 Q_4(y)$, то этот образ представляет собой бивектор. Следовательно, $\widetilde{\psi}(Gr') = \{\mathbb{C}v \in P(\wedge^2 Q_4(y)) | rkv = 2\} = Gr(1, \mathbb{P}^3_y)$ – квадрика Плюккера. При этом для любой точки $v \in Gr(1, \mathbb{P}^3_y)$ ее прообраз при этом отображении есть $\widetilde{\psi}^{-1}_{Gr'}(v) = Gr(1, \mathbb{P}^3_v)$, где $\mathbb{P}^3_v := \mathrm{Span}(v, l_{x_0})$. Таким образом, получено расслоение $\widetilde{\psi}_{Gr'}: \ Gr' \to Gr(1, P(\wedge^2 Q_4(y)))$ со слоем, изоморфным $Gr(1,3)$, т.е. гладкий морфизм с гладкой базой. Поэтому Gr' неособо.

Из описания Y_1 нетрудно видеть, что по многообразию Сегре $S_{1,2}$ и прямой $y = l_{x_0}$ на нем определена коника C_y в $P(\wedge^2 Q_4(y))$, такая, что $\widetilde{Y}_1 = \widetilde{\psi}^{-1}_{Gr'}(C_y)$. Следовательно, $\widetilde{Y}_1$ неособо. Если теперь $\widetilde{Gr}$ - раздутие Gr' вдоль $\widetilde{Y}_1$, то $\widetilde{Gr}$ неособо.

Таким образом, доказана следующая

Теорема 1. *Многообразие $\mathbb{G}$ неособо.*

Замечание 1. В прообразе $\widetilde{\psi}^{-1}_{Gr'}(x)$ каждой точки x коники C_y содержатся и прямые, пересекающие прямую l_{x_0}. Они образуют касательный конус над квадрикой $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Так как все такие прямые составляют $\widetilde{Y}_0 \cap \widetilde{Y}_1$, то $\widetilde{Y}_0 \cap \widetilde{Y}_1$ есть одномерное семейство конусов над квадрикой. Дивизор D_1 расслоен над $\widetilde{Y}_1$ со слоем $\mathbb{P}^2$. Тогда пересечение $D_0 \cap D_1$, имеющее коразмерность 2 в $\mathbb{G}$, – это расслоение над одномерным семейством конусов со слоем $\mathbb{P}^2$, т.е. особо.

Библиографический список

1. *Barth W.* Moduli of vector bundles on the projective plane. Invent. Math. **42** (1977). P. 63–91.
2. *Le Potier J.* Fibres stables de rang 2 sur $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$. Math. Ann. **241** (1979). P. 217–256.
3. *Room T.G.* The geometry of determinantal loci. Cambridge: Univ. Press, 1938.
4. *Оконек К., Шнейдер М., Шпиндлер Х.* Векторные расслоения на комплексных проективных пространствах. М.: Мир, 1984.
5. *Хартсхорн Р.* Алгебраическая геометрия. М.: Мир, 1981.

Полиномиальное квантование на пара-эрмитовых пространствах с псевдоортогональной группой движений

С.В. Цыкина

Мы рассматриваем полиномиальное квантование (это – некоторый вариант квантования в духе Березина) на пара-эрмитовых симметрических пространствах G/H с псевдоортогональной группой движений $G = \mathrm{SO}_0(p,q)$. Конструкция квантования на произвольных пара-эрмитовых пространствах была предложена в [2]. В случае полиномиального квантования ковариантные и контравариантные символы являются многочленами на G/H. Мы вводим умножение ковариантных символов, устанавливаем принцип соответствия, изучаем преобразование Березина. Полиномиальное квантование на пара-эрмитовых симметрических пространствах ранга 1 было построено в [3]. Наши пространства G/H с группой $G = \mathrm{SO}_0(p,q)$ имеют ранг 2.

Псевдоортогональная группа и ее алгебра Ли

Введем в пространстве $\mathbb{R}^n$ следующую билинейную форму:

$$[x,y] = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i y_i, \tag{1}$$

где $\lambda_1 = \ldots = \lambda_p = -1$, $\lambda_{p+1} = \ldots = \lambda_n = 1$, и $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ – векторы из $\mathbb{R}^n$. Пусть G есть группа $\mathrm{SO}_0(p,q)$ – связная компонента единицы в группе линейных преобразований с определителем 1 пространства $\mathbb{R}^n$, сохраняющих билинейную форму $[x,y]$. Мы будем считать, что G действует в $\mathbb{R}^n$ справа: $x \mapsto xg$, так что векторы x из $\mathbb{R}^n$ будем записывать в виде строки. Мы рассмотрим общий случай $p > 1, q > 1$.

Будем записывать матрицы $g \in G$ в блочном виде, отвечающем разбиению $n = 1 + (n-2) + 1$. Подгруппа H в G образована матрицами

$$h = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \beta \\ 0 & v & 0 \\ \beta & 0 & \alpha \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где $\alpha^2 - \beta^2 = 1$, $v \in \mathrm{SO}(p-1, q-1)$. Она состоит из двух связных кусков. Связная компонента единицы H_e, содержащая единичную матрицу, состоит из матриц (2), где $\alpha = \operatorname{ch} t$, $\beta = \operatorname{sh} t$. Таким образом, $H_e = \mathrm{SO}_0(1,1) \times \mathrm{SO}_0(p-1, q-1)$.

Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ группы G состоит из вещественных матриц X порядка n, удовлетворяющих условию $X'I + IX = 0$, где $I = \mathrm{diag}\,\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$. Размерность алгебры $\mathfrak{g}$ равна $n(n-1)/2$. Пусть

$$Z_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Подгруппа H является стационарной подгруппой матрицы Z_0 в присоединенном представлении, так что многообразие G/H есть как раз G-орбита в алгебре $\mathfrak{g}$, содержащая Z_0.

Оператор $\mathrm{ad}\, Z_0$ имеет три собственных значения: $-1, 0, +1$. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ распадается в прямую сумму соответствующих собственных подпространств

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{q}^- + \mathfrak{h} + \mathfrak{q}^+.$$

Алгебра Ли $\mathfrak{h}$ и подпространства $\mathfrak{q}^-$ и $\mathfrak{q}^+$ состоят, соответственно, из матриц

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & t \\ 0 & u & 0 \\ t & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_\xi : \begin{pmatrix} 0 & \xi & 0 \\ \xi^* & 0 & \xi^* \\ 0 & -\xi & 0 \end{pmatrix}, \quad Y_\eta : \begin{pmatrix} 0 & \eta & 0 \\ \eta^* & 0 & -\eta^* \\ 0 & \eta & 0 \end{pmatrix},$$

здесь u – матрица из алгебры Ли группы $\mathrm{SO}_0(p-1, q-1)$, ξ, η – векторы-строки из $\mathbb{R}^{n-2}$. Размерность обоих пространств $\mathfrak{q}^\pm$ равна $n-2$, размерность алгебры $\mathfrak{h}$ равна $1 + (n-2)(n-3)/2$. Подгруппа H сохраняет подпространства $\mathfrak{q}^-$ и $\mathfrak{q}^+$.

Рассмотрим в G подгруппы $Q^- = \exp \mathfrak{q}^-$, $Q^+ = \exp \mathfrak{q}^+$. Подгруппы $P^\pm = HQ^\pm = Q^\pm H$ являются максимальными параболическими подгруппами в G.

Представления группы G, связанные с конусом

Пусть $\mathcal{C}$ – конус $[x,x] = 0$, $x \neq 0$ в $\mathbb{R}^n$. Группа G действует на нем транзитивно. Возьмем в конусе следующие две точки: $s^+ = (1, 0, \ldots, 0, 1)$, $s^- = (1, 0, \ldots, 0, -1)$. Рассмотрим следующие сечения конуса:

$$\Gamma^+ = \{x_1 + x_n = 2\} = \{[x, s^-] = -2\},$$
$$\Gamma^- = \{x_1 - x_n = 2\} = \{[x, s^+] = -2\}.$$

Точки s^+, s^- принадлежат Γ^+, Γ^-, соответственно.

Сечения $\Gamma^{\pm}$ пересекаются один раз почти с каждой образующей конуса $\mathcal{C}$. Поэтому линейное действие группы G на конусе дает следующие действия на Γ^- и Γ^+, соответственно:

$$
\begin{aligned}
x \longmapsto &= -\frac{2}{[xg, s^+]} \cdot xg, \ x \in \Gamma^-, && (4)\\
x \longmapsto &= -\frac{2}{[xg, s^-]} \cdot xg, \ x \in \Gamma^+. && (5)
\end{aligned}
$$

Стационарными подгруппами в группе G точек $s^- \in \Gamma^-$ и $s^+ \in \Gamma^+$ служат подгруппы $P^+ = Q^+H$ и $P^- = Q^-H$, соответственно. Группы Q^- и Q^+ действуют просто транзитивно на Γ^- и Γ^+. Это позволяет ввести координаты на Γ^- и Γ^+ с помощью координат $\xi = (\xi_2, \ldots, \xi_{n-1})$ из $\mathfrak{q}^-$ и $\eta = (\eta_2, \ldots, \eta_{n-1})$ из $\mathfrak{q}^+$. В пространстве $\mathbb{R}^{n-2}$ векторов $\xi = (\xi_2, \ldots, \xi_{n-1})$ введем билинейную форму:

$$
\langle \xi, \eta \rangle = \sum_{i=2}^{n-1} \lambda_i \xi_i \eta_i.
$$

Для точек $u \in \Gamma^-$ и $v \in \Gamma^+$ положим:

$$
\begin{aligned}
u &= u(\xi) = s^- e^{X_\xi} = (1 + \langle \xi, \xi \rangle, 2\xi, -1 + \langle \xi, \xi \rangle), && (6)\\
v &= v(\eta) = s^+ e^{Y_\eta} = (1 + \langle \eta, \eta \rangle, 2\eta, 1 - \langle \eta, \eta \rangle). && (7)
\end{aligned}
$$

Пусть $\sigma \in \mathbb{C}, \ \varepsilon = 0, 1$. Обозначим через $\mathcal{D}_{\sigma,\,\varepsilon}(\mathcal{C})$ пространство функций f класса C^∞ однородных “степени σ, ε”, то есть

$$
f(tx) = t^{\sigma,\,\varepsilon} f(x), \ x \in \mathcal{C}, \ t \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}.
$$

Мы используем обозначение $t^{\sigma,\varepsilon} = |t|^\sigma \mathrm{sgn}^\varepsilon t$. Представление $T_{\sigma,\varepsilon}$ группы G действует в этом пространстве сдвигами: $(T_{\sigma,\,\varepsilon}(g)f) = f(xg)$.

Рассмотрим теперь представление $T_{\sigma,\,\varepsilon}$ в функциях на сечениях $\Gamma^{\pm}$ конуса $\mathcal{C}$. Ограничения функций из $\mathcal{D}_{\sigma,\,\varepsilon}(\mathcal{C})$ на сечение $\Gamma^{\pm}$ образуют некоторое пространство $\mathcal{D}_{\sigma,\,\varepsilon}(\Gamma^{\pm})$ функций f на $\Gamma^{\pm}$. Оно содержится в $C^\infty(\Gamma^{\pm})$ и содержит $\mathcal{D}(\Gamma^{\pm})$. В координатах ξ, η представление $T_{\sigma,\,\varepsilon}$ группы G действует по формулам

$$
\begin{aligned}
(T_{\sigma,\,\varepsilon}(g)f)(\xi) &= f(\xi \cdot g) \left\{ -\frac{1}{2}[ug, s^+] \right\}^{\sigma,\,\varepsilon}, && (8)\\
(T_{\sigma,\,\varepsilon}(g)f)(\eta) &= f(\eta \cdot g) \left\{ -\frac{1}{2}[vg, s^-] \right\}^{\sigma,\,\varepsilon}, && (9)
\end{aligned}
$$

где $u = u(\xi)$, $v = v(\eta)$, см. (6), (7), действия $\xi \mapsto \xi \cdot g$ и $\eta \mapsto \eta \cdot g$ порождаются формулами (4), (5).

Определим в $\mathcal{D}_{\sigma,\,\varepsilon}(\Gamma^{\pm})$ оператор $A_{\sigma,\,\varepsilon}$ следующим образом:

$$(A_{\sigma,\,\varepsilon} f)(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^{n-2}} N(\xi,\eta)^{2-n-\sigma,\,\varepsilon} f(\eta) d\eta, \tag{10}$$

где

$$N(\xi,\eta) = 1 - 2\langle \xi,\eta\rangle + \langle \xi,\xi\rangle\langle \eta,\eta\rangle = -\frac{1}{2}[u(\xi), v(\eta)].$$

Функция $N(\xi,\eta)$ есть многочлен от ξ,η степени 2 отдельно по ξ и по η. Оператор $A_{\sigma,\,\varepsilon}$ сплетает представления $T_{\sigma,\,\varepsilon}$ и $T_{2-n-\sigma,\,\varepsilon}$, действующие в функциях на *разных* сечениях. В (10) можно ξ заменить на η и наоборот. Для оператора $A_{\sigma,\,\varepsilon}$ справедливо соотношение:

$$A_{2-n-\sigma,\,\varepsilon} A_{\sigma,\,\varepsilon} = \omega_0(\sigma,\varepsilon) E,$$

где

$$\omega_0(\sigma,\varepsilon) = 2^3 \pi^{n-3} \frac{\Gamma(\sigma+1)\Gamma(3-n-\sigma)}{(2\sigma+n-2)\sin\left(\sigma+\frac{n}{2}\right)\pi} \cdot \sin\frac{\sigma-\varepsilon}{2}\pi \cdot \sin\frac{\sigma-\varepsilon+p}{2}\pi \cdot$$

$$\sin\frac{\sigma+\varepsilon+q}{2}\pi \cdot \sin\frac{\sigma+\varepsilon+n}{2}\pi.$$

Пространство G/H.

Рассмотрим реализации пространства G/H. Ранее было сказано, что пространство G/H есть орбита группы в присоединенном представлении, содержащая точку Z_0, см. (3). Размерность пространства G/H равна $2n-4$.

Более удобно рассматривать другую реализацию. Пусть Ω множество матриц z ранга 1 и со следом 1, а именно:

$$z = \frac{y^* x}{[x,y]}, \tag{11}$$

где $x, y \in \mathcal{C}$, $y^* = Iy'$. Присоединенное действие $z \mapsto g^{-1} z g$ сохраняет Ω, что позволяет рассматривать многообразие Ω как реализацию пространства G/H.

Возьмем в (11) в качестве векторов $x, y \in \mathcal{C}$ векторы $u = u(\xi)$ и $v = v(\eta)$ из сечений Γ^- и Γ^+ конуса $\mathcal{C}$, соответственно. Получаем вложение

$$\Gamma^- \times \Gamma^+ \hookrightarrow G/H,$$

задаваемое формулой

$$z = z(\xi, \eta) = \frac{v^* u}{[u, v]}, \quad u = u(\xi),\ v = v(\eta). \tag{12}$$

Отображение $(u, v) \longmapsto z$, задаваемое формулой (12), определено для $\xi, \eta \in \mathbb{R}^{n-2}$, для которых $N(\xi, \eta) \neq 0$, поскольку $[u, v] = -2N(\xi, \eta)$.

Векторы $\xi, \eta \in \mathbb{R}^{n-2}$ с условием $N(\xi, \eta) \neq 0$ являются локальными координатами на Ω. Присоединенное действие группы G на Ω порождается ее действием на ξ и η.

Пусть $\mathbb{D}(G/H)$ обозначает алгебру дифференциальных операторов на G/H, инвариантных относительно G. Эта алгебра порождается двумя операторами (операторами Лапласа) Δ_1 и Δ_2 второго и четвертого порядка соответственно. Явные выражения этих операторов достаточно громоздки. Напишем явные выражения лишь для их радиальных частей $\overset{0}{\Delta}_1$ и $\overset{0}{\Delta}_2$ в орисферической системе координат. Эта система координат строится так. Возьмем в $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}^+ + \mathfrak{q}^-$ картановское подпространство $\mathfrak{a}$, которое состоит из матриц

$$A_t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & t_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ t_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad t = (t_1, t_2).$$

Пусть $\mathfrak{n}$ – соответствующая положительная корневая подалгебра. Пусть $A = \exp \mathfrak{a}$, $N = \exp \mathfrak{n}$. Подействуем на $z^0 = z(0, 0)$ сначала группой A, затем N. Получим орисферические координаты в некоторой окрестности точки z^0.

На функциях, зависящих только от $t = (t_1, t_2)$, дифференциальный оператор D из $\mathbb{D}(G/H)$ порождает свою радиальную часть $\overset{0}{D}$:

$$Df = \overset{0}{D} F.$$

Оказывается, что радиальные части операторов Лапласа являются дифференциальными операторами с постоянными коэффициентами. Введем операторы

$$\begin{aligned} D_1 &= \left(\frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\partial}{\partial t_2}\right)^2 + 2(n-3)\left(\frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\partial}{\partial t_2}\right) + (n-4)^2, \\ D_2 &= \left(\frac{\partial}{\partial t_1} - \frac{\partial}{\partial t_2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial}{\partial t_1} - \frac{\partial}{\partial t_2}\right) - 2(n-4). \end{aligned}$$

Теорема. *Имеем*

$$\begin{aligned}\overset{0}{\Delta}_1 &= \frac{1}{2}(D_1 + D_2 + 2(n-4) - (n-4)^2),\\ \overset{0}{\Delta}_2 &= D_1 D_2 + 2(n-4)^3.\end{aligned}$$

Полиномиальное квантование на G/H

Мы следуем схеме из [2]. В качестве переполненной системы мы берем ядро $\Phi(\xi,\eta) = \Phi_{\sigma,\varepsilon}(\xi,\eta) = N(\xi,\eta)^{\sigma,\,\varepsilon}$ сплетающего оператора $A_{2-n-\sigma,\,\varepsilon}$. Аналогом пространства Фока служит пространство функций $\varphi(\xi)$.

В качестве исходной алгебры операторов мы берем алгебру операторов $D = T_{\sigma,\,\varepsilon}(X)$, где X принадлежит универсальной обертывающей алгебре алгебры Ли $\mathfrak{g}$. *Ковариантный символ* $F(\xi,\eta)$ оператора D мы определяем формулой:

$$F(\xi,\eta) = \frac{1}{\Phi(\xi,\eta)}\, D_\xi \Phi(\xi,\eta),$$

где D_ξ означает, что оператор D действует на $\Phi(\xi,\eta)$ как на функцию от ξ. Эти ковариантные символы на самом деле не зависят от ε. Они являются функциями на G/H. Больше того, они являются *многочленами* на G/H (т.е. ограничениями на G/H многочленов на пространстве матриц z, см. (11)).

Для σ общего положения пространство $\mathcal{A}_\sigma$ ковариантных символов есть пространство $S(G/H)$ всех многочленов на G/H.

Дальше теория развивается по схеме Березина. А именно, отображение $D \mapsto F$, сопоставляющее оператору его ковариантный символ, является $\mathfrak{g}$–эквивариантным, для σ общего положения оператор восстанавливается по своему ковариантному символу:

$$(D\varphi)(\xi) = c(\sigma,\varepsilon) \int F(\xi,v)\, \frac{\Phi(\xi,v)}{\Phi(u,v)}\, \varphi(u)\, dx(u,v), \tag{13}$$

где $c = \omega_0(\sigma,\varepsilon)^{-1}$.

Умножение операторов порождает умножение (обозначим его $*$) ковариантных символов. Пусть $F_1,\ F_2$ - ковариантные символы операторов $D_1,\ D_2$ соответственно. Имеем

$$F_1 * F_2 = \frac{1}{\Phi}(D_1)_\xi(\Phi F_2).$$

Умножение задается интегралом

$$(F_1 * F_2)(\xi, \eta) = \int F_1(\xi, v) F_2(u, \eta) \mathcal{B}(\xi, \eta; u, v)\, dx(u, v),$$

где $dx(u, v)$ – инвариантная мера на G/H,

$$\mathcal{B}(\xi, \eta; u, v) = c \frac{\Phi(\xi, v)\Phi(u, \eta)}{\Phi(\xi, \eta)\Phi(u, v)}.$$

Назовем это ядро $\mathcal{B}$ *ядром Березина.*

Таким образом, пространства $\mathcal{A}_\sigma$ оказываются ассоциативными алгебрами с единицей относительно умножения $*$.

С другой стороны, мы можем определить *контравариантные символы* операторов. Функция $F(\xi, \eta)$ есть контравариантный символ для следующего оператора A (действующего на функции $\varphi(\xi)$):

$$(A\varphi)(\xi) = c(\sigma, \varepsilon) \int F(u, v)\, \frac{\Phi(\xi, v)}{\Phi(u, v)} \varphi(u)\, dx(u, v).$$

Заметим, что отличие от (13) имеется только в первом аргументе функции F. Контравариантный символ можно восстановить по соответствующему оператору.

Таким образом, мы получили два отображения $D \mapsto F$ (“ко”) и $F \mapsto A$ (“контра”), связывающие операторы D и A, действующие в функциях от ξ, и многочлены F на G/H.

Переход от контравариантного символа оператора к его ковариантному символу является интегральным оператором с ядром Березина. Назовем $\mathcal{B}$ *преобразованием Березина.* Оно может быть выражено через операторы Лапласа на G/H. А именно:

$$\mathcal{B} = \frac{\Gamma(\sigma + n - 2 + \frac{a+b}{2})\Gamma(\sigma + 1 - \frac{a+b}{2})\Gamma(\sigma + \frac{n}{2} + \frac{a-b}{2})\Gamma(\sigma + \frac{n}{2} - 1 - \frac{a-b}{2})}{\Gamma(\sigma + n - 2)\Gamma(\sigma + 1)\Gamma(\sigma + \frac{n}{2})\Gamma(\sigma + \frac{n}{2} - 1)}$$

где a, b – некоторые переменные, и надо считать

$$D_1 = (a + b)^2 + 2(n - 3)(a + b) + (n - 4)^,$$

$$D_2 = (a - b)^2 + 2(a - b) - 2(n - 4).$$

На конечномерных подпространствах в $S(G/H)$ преобразование Березина есть дифференциальный оператор.

Пусть $\sigma \to -\infty$. Первые два члена асимптотического разложения преобразования Березина $\mathcal{B}$ таковы:

$$\mathcal{B} \sim 1 - \frac{1}{\sigma}\,\Delta_1. \tag{14}$$

Из соотношения (14) вытекает принцип соответствия (в качестве "постоянной Планка" надо взять $h = -1/\sigma$):

$$F_1 * F_2 \longrightarrow F_1 F_2, \tag{15}$$

$$-\sigma\,(F_1 * F_2 - F_2 * F_1) \longrightarrow \{F_1,\, F_2\}, \tag{16}$$

при $\sigma \to -\infty$. В правых частях (15) и (16) стоят, соответственно, обычное поточечное умножение и скобка Пуассона.

Библиографический список

1. *Березин Ф.А.* Квантование в комплексных симметрических пространствах // Изв. Акад. Наук. СССР. Сер. мат., 1975. Т. 39. № 2. С. 363–402.
2. *Molchanov V.F.* Quantization on para-Hermitian symmetric spaces, Amer. Math. Soc. Transl, Ser. 2 (Adv. Math. Sci.–31), 1996. V. 175. P. 81–95.
3. *Molchanov V.F., Volotova N.B.* Polynomial quantization on rank one para-Hermitian symmetric spaces. Acta Appl. Math., 2004. V. 81. Nos. 1–3. P. 215–232.
4. *Molchanov V.F., Volotova N.B.* Finite dimensional analysis and polynomial quantization on a hyperboloid of one sheet // Вестник Тамбовского университета, 1998. Т. 3. Вып. 1. С. 65–78.

Глава 3

Теория и методика обучения математике в школе и вузе

Математическая модель понятия аналогии и некоторые ее следствия

А.Л. Жохов

В статье дается вариант формализации понятия “аналогия” на базе 1), разработанной в [10, 12, 15] математической экспликации отношения сходства и аналогии, и 2) возможности и целесообразности интерпретировать математические конструкции различного уровня абстракции как алгебраические системы [5] и др. На множестве таких объектов далее как раз и определяется отношение аналогии. Их выбор объясняется, прежде всего, широким распространением алгебраических систем в математике в качестве математических моделей соответствующих теорий [4, 6, 11]. Кроме того, подобная математическая модель аналогии позволяет в определенных ситуациях почти формально применять ее, например, подобно методу математической индукции в ситуациях обучения математике и методам ее постижения.

Обучение каждого человека умелому использованию аналогии может рассматриваться как важный шаг на пути развития его творческих способностей. Но до тех пор, пока владение аналогией будет *достоянием лишь интуиции отдельных* личностей, вряд ли обучение ей может быть сколько-нибудь эффективным. Необходимо раздвинуть границы интуиции, сделав аналогию предметом специального исследования и, тем самым, выявить ее внутренние эвристические ресурсы. Формализация понятия аналогии и представляется способом такого “раздвижения границ”.

В науке известны три основные точки зрения: аналогия – это: 1) отношение *особого рода* сходства между объектами [7, 1]; 2) вид умозаключения, перенос информации с вспомогательного объекта (*модели*) на изучаемый объект (*оригинал*) [9, 13]; 3) один из эвристических методов познания (обучения), в основе которого лежит сходство между двумя объектами [3, 14].

Наметим ход дальнейших построений. Будем стремиться к тому, чтобы аналогия оказалась частным случаем сходства и была в обобщенном виде построена на множестве систем, т.е., на первых порах, без обращения к логическому анализу списка аксиом, характеризующих эти системы.

Исходным для нас является понятие *алгебраической системы* (в дальнейшем – просто система) *типа* τ, определяемое известным способом (например, как в [6] или [12]). Будем пользоваться укороченным обозначением системы:

$$\mathbf{A} = \langle A; \Phi_F; \Phi_P \rangle = \langle A; \Phi \rangle. \tag{1}$$

Здесь A – множество-носитель системы, Φ_F и Φ_P – множества всех *главных*, соответственно, операций и отношений, заданных на множестве A, характеризующихся, как обычно, числом аргументных мест (арностью) и упорядоченных в соответствии с нумерацией, выбранной для данной системы. Если два последних множества не требуется отделять друг от друга, то в обозначении системы допускается использовать их объединение $\Phi = \Phi_F \cup \Phi_P$. Для произвольной системы будем считать известными понятия **тип** τ и его **порядок** (α, β). Множество всевозможных систем подобного рода будем обозначать $\mathbf{E}$.

Для дальнейшего вводятся следующие вспомогательные понятия.

Операции и отношения, рассматриваемые на заданном множестве и указанные в обозначении данной системы, будем называть *главными* в отличие от тех, которые еще могут быть рассмотрены на этом же множестве. Систему $\mathbf{A}^* = \langle A^*, \Phi_F^*, \Phi_P^* \rangle$ назовем ***вторичной*** для системы $\mathbf{A} = \langle A; \Phi_F; \Phi_P \rangle$, если 1) $A^* \neq \varnothing$, $A^* \subseteq A$; 2) все операции, рассматриваемые на A^*, *порождены, индуцированы некоторыми* операциями, определенными на A, в том смысле, что они взяты из Φ_F , но *остаются также операциями* и на "новом" множестве A^*; 3) все отношения из Φ_P^* являются своеобразными *сужениями некоторых* отношений из Φ_P на множество A^*; 4) других операций и отношений множества Φ_F^* и Φ_P^* не содержат. Наконец, вторичную систему $\mathbf{A}^*$ назовем ***подсистемой*** $\mathbf{A}$, если $\Phi_F = \Phi_F^*$ и $\Phi_P = \Phi_P^*$. Ясно, что тип вторичных систем и подсистем, вообще говоря, не обязан совпадать с типом исходной (*порождающей*) системы. Приведем очевидные примеры: для системы $\langle \mathbf{R}, +, -, \cdot, :, 0, 1, \leq \rangle$ вторичными будут системы $\langle \mathbf{N}, +, \cdot, \leq \rangle$; $\langle \mathbf{Q}, +, -, \cdot, :, 0, 1, \leq \rangle$, причем первая из них не будет подсистемой, а вторая является таковой.

Определение 1. Системы $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_2$ типов τ_1 и τ_2 называются ***контактирующими***, если для них существуют вторичные системы $\mathbf{A}_1^*$ и $\mathbf{A}_2^*$, имеющие один и тот же тип (т.е. $\tau_1 = \tau_2 = \tau$).

В качестве тривиальных примеров контактирующих систем можно назвать любые однотипные системы, любую систему и ей вторичную.

Другими примерами контактирующих систем будут, например, такие: система $\langle \mathbf{R},+,\cdot,0,1,\leq\rangle$ и любая из систем $\langle F_\pi,\circ\rangle$, $\langle B,+,0,\sim\rangle$, $\langle \mathbf{C},+,\cdot,0,1,i\rangle$, где F_π – множество отображений плоскости π с операцией $\circ$ – композиция отображений; B – множество направленных отрезков плоскости с операцией сложения, выделенным нейтральным элементом и отношением эквивалентности таких отрезков, $\mathbf{C}$ – множество комплексных чисел, i – мнимая единица.

Определение 2. Система $\mathbf{A}$ называется ***коррелирущей*** с системой $\mathbf{B}$ или находящейся с ней в отношении ***корреляции*** κ (греч. – каппа), если существуют однотипные системы $\mathbf{A}^*$ и $\mathbf{B}^*$, вторичные для данных, и такие, что отображение $f : A^* \to B^*$ является в общем случае κ-гомоморфизмом[1].

Отношение корреляции κ определено как специфическое подмножество декартова квадрата $\mathbf{E}\times\mathbf{E}$, где через $\mathbf{E}$ обозначено множество всевозможных систем вида (1). Можно показать, что верна

Теорема 1. *Отношение κ на множестве $\mathbf{E}\times\mathbf{E}$ рефлексивно и симметрично.*

Примером коррелирующих систем является любая пара из приведенных выше контактирующих систем. В частности, для $\langle F_\pi,\circ\rangle$ и $\langle B,+,0,\sim\rangle$ изоморфными вторичными системами будут $\langle T_\pi,\circ\rangle$ и $\langle B^*,+\rangle$, где T_π – множество параллельных переносов плоскости π, B^* – подмножество направленных отрезков, состоящее *из единственных* представителей каждого фактор-множества $B/\sim$ (таким множеством может быть множество B_0 направленных отрезков с общим началом в точке O – начале координат). Напротив, некоррелирующими системами будут, например, $\langle G,\perp\rangle$ и $\langle B^*,+\rangle$; $\langle G,\perp\rangle$ и $\langle B,+,0,\sim\rangle$, где B и B^* – ранее уже встречавшиеся множества, а G – множество *прямых* плоскости π с заданным на нем отношением перпендикулярности $\perp$. При этом вторая пара – пример контактирующих систем.

Из определений 1, 2 следует, что контактируемость является лишь необходимым условием коррелируемости систем. Имеет место следующая

[1]Напомним определение довольно редко встречающегося понятия *κ-гомоморфизма*: гомоморфизм $\varphi : \mathbf{A}\to\mathbf{B}$ называется *κ-гомоморфизмом* из $\mathbf{A}$ в $\mathbf{B}$ ($\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ – однотипные системы), если выполняются условия: для любой операции F_ξ и любого отношения P_η системы $\mathbf{A}$ и соответствующих им операции G_ξ и отношения Q_η из системы $\mathbf{B}$ имеют место соотношения: 1) $F_\xi(x_1,x_2,\ldots,x_\xi)\varphi = G_\xi(x_1\varphi,x_2\varphi,\ldots,x_\xi\varphi)$; 2) $P_\eta(x_1,x_2,\ldots,x_\eta)\Leftrightarrow Q_\eta(x_1\varphi,x_2\varphi,\ldots,x_\eta\varphi)$. В зависимости от вида φ определяются κ-моно-, κ-эпи- и κ-изоморфизмы.

Теорема 2. *Чтобы две системы* **A** и **B** *коррелировали, необходимо и достаточно, чтобы существовали системы* $\mathbf{A}^*$ *и* $\mathbf{B}^*$, *вторичные данным и изоморфные между собой.*

Интуитивные представления об аналогии систем в какой-то мере уже уточняются определением отношения κ и теоремами 1, 2. В то же время корреляция – все еще слишком "размытое" отношение типа сходства: на практике аналогией пользуются более целенаправленно, имея в виду некоторый вполне определенный объект исследования. Такой объект принято называть *оригиналом*, а ему аналогичные вспомогательные объекты – *моделями оригинала*, так что оригинал является как бы "центральной фигурой" процесса познания. Такое положение вещей далее как раз и нашло свое отражение.

Зафиксируем некоторую систему **A** из **E** и рассмотрим множество $\mathbf{E_A}$ всех систем, находящихся с **A** в отношении κ. В общем случае $\mathbf{E_A} \subseteq \mathbf{E}$.

Определение 3. Аналогией α на множестве систем **E** назовем сужение отношения κ на множество $\mathbf{E_A} : \forall\, (A_1, A_2 \in E)\, A_1 \alpha A_2 \Leftrightarrow A_1 \kappa A \wedge A_2 \kappa A \wedge A_1 \kappa A_2$. Иными словами, **две системы аналогичны** тогда и только тогда по определению, когда они коррелируют с фиксированной системой **A** и между собой.

На первый взгляд может показаться, что так определенное отношение аналогии в силу фиксирования **A** не является бинарным отношением на **E**. Однако это не так, поскольку единственное отличие отношения α от κ состоит в ограничении множества всех коррелирующих друг с другом систем посредством фиксации некоторой произвольной системы **A**, которую естественно назвать *оригиналом.* Тогда множество его *моделей обозначим* $\mathbf{E_A}$.

Отношения α и κ обладают свойствами рефлексивности и симметричности, так что это отношения типа толерантности [4, 10]. Отношение толерантности τ на множестве X задает *пространство толерантности* $\langle X, \tau \rangle$. В нем можно выделить так называемые **классы толерантности**, имеющие в общем случае непустое пересечение. Введем соответствующие понятия для пространств $\langle \mathbf{E}, \kappa \rangle$ и $\langle \mathbf{E_A}, \alpha \rangle$. Эти понятия имеют и специфические свойства.

Определение 4. Множество $K_\kappa \subseteq \mathbf{E}$ называется **классом корреляции** (соответственно, **классом аналогии** K_α в $\mathbf{E_A}$), если выполнены условия:

$$
\begin{aligned}
&1)\, \forall\, (A_1, A_2 \in K_\kappa)\, A_1 \kappa A_2;\\
&2)\, \forall\, (B \in E)\, \forall\, (A \in K_\kappa)\, B \kappa A \Rightarrow B \in K_\kappa;\\
&1')\, \forall\, (A_1, A_2 \in K_\alpha)\, A_1 \alpha A_2;\\
&2')\, \forall\, (B \in E_A)\, \forall\, (A \in K_\alpha)\, B \alpha A \Rightarrow B \in K_\alpha.
\end{aligned}
$$

Второе из этих условий является выражением *максимальности* класса, то есть если некоторое множество $L \subset \mathbf{E}$ (или из $\mathbf{E_A}$) содержит какой-нибудь класс ($K \subset L$), то оно уже *не обладает* свойством 1 (соответственно – $1'$).

Как следует из определений 5, 6, для построения *пространства аналогии для оригинала* $\mathbf{A}$ достаточно в системе $\langle \mathbf{E}, \kappa \rangle$ зафиксировать $\mathbf{A}$ и найти все системы, коррелирующие с ней и между собой. Дальнейшее исследование свойств отношения и пространства аналогии можно вести по пути, намеченному в [10].

Среди всевозможных классов аналогии в пространстве $\langle \mathbf{E_A}, \alpha \rangle$ целесообразно выделить такие, все элементы которых "отражают" одну и ту же группу свойств оригинала. Тогда имеет смысл говорить об отношении $\alpha_{\mathbf{C}}$, которое является фактически сужением общего отношения α, а именно:

Определение 5. Для систем $\mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ из $\mathbf{E_A}$ систему $\mathbf{D}$ назовем $\mathbf{C}$-аналогичной $\mathbf{B}$ ($\mathbf{D}\alpha_{\mathbf{C}}\mathbf{B}$), если и только если $\mathbf{D}\alpha\mathbf{B}$ и существуют вторичные системы $\mathbf{D}^*$ и $\mathbf{B}^*$, являющиеся κ-гомоморфными образами системы $\mathbf{C}$.

Нетрудно доказать, что отношение $\alpha_{\mathbf{C}}$ бинарно, рефлексивно и симметрично, но все еще в общем случае не транзитивно, т.е. является отношением толерантности на $\mathbf{E_A}$. Далее можно выделить так называемые *предклассы* и *ядра* аналогии, структурирующие *поле аналогии* и задающие границы аналогии по некоторому набору главных характеристик системы-оригинала.

Возникают вопросы по поводу введенной выше теоретической модели: 1) какова ее целесообразность и польза, хотя бы для приложений; 2) каким может быть дальнейшее развитие намеченной теории?

Ограничимся лишь кратким описанием возможных ответов.

Построенный теоретический аппарат позволяет выделить следующие действия для получения объектов, аналогичных уже известному (эти действия стали основой построения методики систематического применения аналогии – см. [5] и др.): а) запись данного объекта с использованием какого-либо иного набора символов или других средств (*кода записи информации* – подробнее в [15]); б) сужение или расширение набора главных отношений изучаемого объекта-системы, либо сужение или расширение множества-носителя этой системы; в) построение объекта-аналога с использованием одного из видов морфизмов; г) переход к новой интерпретации теории, в рамках которой задан объект-оригинал.

Знание отмеченных способов построения объектов, аналогичных данному, позволяет, как представляется, с большей основательностью не только четко определять и устанавливать интуитивно воспринимаемое сходство объектов, но и наметить границы аналогии. Кроме того, это же позволяет перевести рассуждения по аналогии из ранга правдоподобных в доказательные, а полученным выводам в границах их применимости придать статус аподиктической очевидности и, следовательно, надежности [16]. Наконец, рассмотренные действия и средства в руках знающего человека становятся в достаточной мере простым, гибким и алгоритмизированным способом построения объектов, аналогичных данному. Это оказывается полезным, по меньшей мере, в обучении и в индивидуальном познании математики.

Дальнейшее развитие намеченного в статье теоретического аппарата аналогии может идти в следующих направлениях:

1) развитие самого математического аппарата, в частности, в плане более подробного описания свойств ядер аналогии и т.д.;

2) приложение данного аппарата к анализу различных математических теорий, аналогия которых лишь угадывается;

3) развитие какой-либо известной теории с использованием описанного аппарата аналогии.

На мой взгляд, эти направления заслуживают внимания и могут стать предметом дальнейшей работы, причем как интересное сравнительно элементарное введение в современную математику, так и в приложения аналогии, например, в обучении математике.

Библиографический список

1. *Болтянский В.Г.* Формула наглядности – изоморфизм плюс простота // Советская педагогика. 1970. № 5. С. 43–48.
2. *Болтянский В.Г.* Аналогия – общность аксиоматики // Советская педагогика. 1975. № 1. С. 73–78.
3. *Бурбаки Н.* Архитектура математики // Математическое просвещение. 1960. № 5. С. 58–70.
4. *Зиман Э., Бьюнеман.* Толерантные пространства и мозг. На пути к теоретической биологии. Пролегомены. М.: Мир, 1970. С. 134–144.
5. *Жохов А.Л.* Застосування аналогії при навчанні розв'язуванню задач // Методика викладання математики: Респ. науч.-метод. сб.: Вып. 14 / Под ред. Г.П. Бевза. Київ: Рад. шк., 1983. С. 26–33.
6. *Мальцев А.И.* Алгебраические системы. М.: Наука, 1970.
7. *Пойа Д.* Как решать задачу? М.: Учпедгиз, 1966. 207 с.
8. *Пойа Д.* Математика и правдоподобные рассуждения, 2-е изд. М.: Наука, 1975.
9. *Уемов А.И.* Аналогия в практике научного исследования. М.: Наука, 1970. 264 с.
10. *Шрейдер Ю.А.* Равенство. Сходство. Порядок. М .: Наука, 1971. 256 с.

11. *Шрейдер Ю.А.* Модели в лингвистике и математике // Математическая лингвистика. М.: Наука, 1973. С. 63–83.
12. *Шрейдер Ю.А., Шаров А.А.* Системы и модели. М.: Радио и связь, 1982. 152 с.
13. *Эмпахер А.* Сила аналогии. М., 1965.
14. *Эрдниев П.М., Эрдниев Б.М.* Аналогия в задачах (Укрупнение дидактических единиц во внеклассной работе по математике). Элиста: Калмыц. кн. изд-во, 1989. 187 с.
15. *Жохов А.Л.* 1) В поисках трансцендентальных оснований // Математика. Образование. Культура: Сб. трудов по материалам I Международной конфер. 22–24 октября 2003 г. Тольятти: ТГУ, 2004. Ч. 1. С. 96–101; 2) О некоторых новых методических понятиях. Статья. Там же. С. 104–110.
16. *Перминов В.Я.* Философия и основания математики. М.: Прогресс-Традиция, 2001. 320 с.

Проектирование целей обучения математике в школе и вузе в терминах ключевых компетентностей

О.Б. Епишева, Е.Е. Волкова

Компетентностный подход в профессиональном образовании означает рассмотрение и определение психологических и педагогических путей развития личности в русле ее профессиональной пригодности и рассматривается сегодня как естественный этап его обновления и повышения качества [3]. В самой общей степени он соотносится с проблемой несоответствия целей, содержания и методов российского образования, а также его оценки потребностям современной экономики и цивилизации ("заказчика" образования); но главная его проблема – в неэффективности всей системы образования, проявляющейся в том, что не видно результата, значимого вне самой системы образования.

Поэтому компетентностный подход акцентирует внимание на *результатах образования*, *значимых за его пределами*, т.е. не на сумме усвоенной обучаемыми информации, а на способности выпускника учебного заведения самостоятельно действовать в различных (профессиональных, жизненных, проблемных) ситуациях [3. С. 12–13].

Компетенции как результаты образования рассматриваются, согласно стратегии, как главные целевые установки в разработке и реализации ГОС ВПО 3-го поколения, как интегрирующие начала "модели выпускника", связывающей его будущую квалификацию и междисциплинарные требования к результату образовательного процесса. От проектирования результатов образования, выраженных в форме компетенций, следует идти к проектированию содержания образования и его уровней. В то же время за формирование тех или иных компетенций не могут “отвечать” отдельные учебные дисциплины или даже образовательные программы; компетенции – это также результат образовательных технологий, методов, организационных форм и т.д.

В разрабатываемых в настоящее время *Государственных стандартах высшего профессионального образования* 3-го поколения в разделе 1 (общая характеристика направления подготовки по конкретной специальности) отмечаются необходимые общие и специальные (профессиональные) компетенции выпускников по категориям: 1) общие (инвариантные к области деятельности) – общенаучные, социально-личностные, гуманитарные, коммуникативные; экономические, организационно-управленческие; 2) профессиональные – общепрофессиональные (теоретические, практические, системные); специальные профессионально-профилированные (теоретические, практические, системные) – в соответствии с профилизацией. Их содержание раскрывается в виде компетенций в разделе 3 (требования к результатам обучения) как требования к обязательному минимуму содержания и срокам освоения основных образовательных программ) [1].

Ориентация на компетенции в проектировании ГОС ВПО способствует, по мнению разработчиков, повышению качества учебных программ (при одновременном проектировании академических знаний и компетенций), развертыванию диверсификации профессионального образования, усилению личностной направленности образовательного процесса, расширению возможностей вузов к опережающей адаптации выпускников в будущей профессиональной деятельности, гармонизации со всеобъемлющей структурой квалификаций европейского пространства высшего образования [1]. Таким образом, по нашему мнению, они могут служить и ориентиром в проектировании стандартов (целей-результатов) всех предшествующих ступеней профессионального образования профильных классов общеобразовательной школы, учреждений НПО и СПО с учетом уровня данной ступени профессионального образования.

В педагогических исследованиях выделены *уровни профессиональной компетентности,* которые можно обобщить следующим образом:

1-*й уровень* (операционный) – профессиональная *грамотность* (минимальная), профессиональная ориентация личности на данную область профессиональной деятельности; подготовленность к дальнейшему образованию; на практике – работник-исполнитель (рабочие профессии, инженеры массовых профессий);

2-*й уровень* (тактический): профессиональная *образованность* – владение необходимым максимумом профессиональной грамотности; готовность к дальнейшему профессиональному обучению; на практике – активный работник (рабочие профессии высокой квалификации, инженеры высокой квалификации для наукоемких областей);

3-*й уровень* (стратегический): собственно профессиональная *компетентность* специалиста, опыт и индивидуальные способности человека, его мотивированное стремление к непрерывному самообразованию и самосовершенствованию, творческое и ответственное отношение к делу; на практике – творческий работник (инженер-исследователь для научно-технического обеспечения производства);

4-*й уровень* (творческий): профессиональная *культура*; на практике – научный работник для научного обеспечения научно-технического прогресса (например, в материальном производстве).

Э.Ф. Зеер выделяет соответствующие *уровни* профессиональной компетентности: 1) "ремесленник", нацелен в основном на выполнение действий и операций; 2) "специалист", действия которого осмысленны, профессиональны; 3) "профессионал", способный на вариативность профессиональных действий и операций [2. С. 137–138].

В процессе обучения общеобразовательным дисциплинам в профильной школе и учреждениях профессионального образования возможно проектирование целей обучения, "работающих" на формирование *общих (инвариантных к области деятельности) общенаучных, социально-личностных, гуманитарных, коммуникативных, экономических, организационно-управленческих* и других компетенций, достижение которых возможно средствами данной дисциплины (по выделенным В.Д. Шадриковым блокам – профессиональные знания, профессиональные умения и профессионально важные качества личности [4]). В обучении математике – это знания и умения, связанные с использованием математических методов в профессиональной деятельности, и профессионально важные качества личности, связанные с занятием математикой и методами ее изучения. В таблице показан возможный вариант технологического проектирования целей обучения математике в вузе технического профиля, который может быть адаптирован и конкретизирован на соответствующем уровне и для профильных классов, учреждений НПО и СПО этого же профиля.

Профессиональные компетенции	***Цели обучения математике***
Профессиональные математические знания	
Инженер знает	*Студент знает*
Теоретические инженерные и математические модели основных процессов и систем производственной деятельности	Основные математические модели, принципы, методы и обобщенные способы их построения и исследования
Профессиональные математические умения	
Инженер	*Студент*
Решает инженерные задачи, осуществляет поиск и анализ информации (заданной в различной форме), работает со специальной литературой, определяет и формулирует проблему, строит математические модели объектов производственной деятельности, обрабатывает результаты исследований с помощью математических методов; находит решения в условиях неопределенности, строит схемы конструкций, работает с чертежом, графиком; участвует в проектировании систем или процессов и их компонентов с учетом вопросов здравоохранения, безопасности, культурных, социальных, экологических аспектов и использования соответствующих ресурсов; разрабатывает обобщенные варианты решения проблем, анализирует и перестраивает их, прогнозирует возможные последствия; проводит исследования задач, систематизирует, находит и выбирает необходимые данные из баз данных и специальной литературы; проектирует и проводит исследования и эксперименты для получения обоснованных выводов и оптимального решения	Самостоятельно использует основную и дополнительную математическую литературу, компьютер для решения задач; строит математические модели простейших технических объектов и процессов, производит расчеты в рамках построенной модели и оценивает точность расчета, решает типовые и прикладные математические задачи в нестандартных ситуациях (с профессиональным, социальным, региональным, экологическим, гуманитарным содержанием) с выбором и использованием для их решения необходимых знаний; с неопределенностью поиска решения; строит схематические чертежи к задачам, графики функций, заданных различными способами; перестраивает известные и находит новые способы решения математических задач, выделяет идеи и методы рассуждений, обобщает и систематизирует их; проводит исследование решения задачи и эксперимент для получения оптимального способа решения и его обоснования, строит на этой основе последовательность целесообразных действий по решению задачи.

Профессионально важные качества личности	
Инженер	*Студент*
Использует приемы технического (системного, научного, оперативного, аналитического, логического, пространственного, наглядно-практического, обобщенного, образно-интуитивного) **мышления**, разносторонний анализ технических объектов	Использует разносторонний анализ и различные стратегии решения математических задач, составляет алгоритмы деятельности, быстро перерабатывает информацию и применяет ее в различных условиях, использует рефлексию своей мыслительной деятельности
Обладает техническим **представлением** и **воображением** – воспроизводит объемные формы и размеры объектов и частей технического устройства, их связи и отношения, проявляет конструкторскую фантазию	Создает точные и устойчивые пространственные образы математических объектов и связи между ними, преобразует и использует эту информацию в усвоении математики.
Проявляет особенности **памяти** – не только запоминание, но и исключение из памяти (“сбрасывание”), забывание ненужной (уже использованной) информации.	Использует произвольное словесно-логическое запоминание и воспроизведение, рациональную группировку и другие приемы рационального запоминания.
Проявляет особенности **восприятия** – формирование оперативной модели воспринимаемой информации на основе ее обнаружения, различения и опознания.	Использует приемы организации целостного, осмысленного, избирательного, константного восприятия.
Владеет профессиональной **речью** – владеет технической терминологией, правилами разработки, оформления и использования технической документации, разработки инструкций и презентаций.	Правильно выбирает термины и символы для формулировки алгоритмов математического решения и оформления решения прикладных задач.
Проявляет **мотивы** и **интерес** в профессиональной деятельности, осознает необходимость и вырабатывает умения самостоятельно учиться и **повышать квалификацию** в течение всей жизни	Осознает цели и вырабатывает мотивы изучения математики с точки зрения ее роли в будущей профессиональной деятельности; использует личный план самообразования, путей и средств его реализации, приемы самообучения.

Владеет **коммуникативными умениями** – придерживается норм поведения в производственных ситуациях, в ситуациях общения, в конфликтных и др. ситуациях; толерантен в общении с людьми.	Проявляет коммуникативные умения в коллективной и групповой учебной деятельности; следует этике и нормам поведения в учебной деятельности.
Осознает **мировоззренческие** аспекты профессиональной деятельности – роль производственной деятельности в развитии общества и человека.	Понимает, что возникновение и развитие математики связано с практической деятельностью людей; математические понятия и их свойства – это модели различных объектов и процессов реального мира; математика – метод познания и описания реальной действительности и создания общей картины мира.
Осознает **общекультурную** роль производственной деятельности, ее связи с наукой и искусством, стремится к культуре и эстетике профессиональной деятельности.	Знает примеры применения математики в искусстве, имеет представление о математике как части человеческой культуры, формирует культуру математической деятельности
Проявляет **патриотизм** и **национальное самосознание** – интерес к духовному и историческому наследию России, чувство ответственности за ее будущее.	Знает и понимает роль российских ученых-математиков в развитии российской науки, производства и государства.

Библиографический список

1. *Байденко В.И. и др.* Проектирование государственных образовательных стандартов высшего профессионального образования нового поколения: Метод. рекомендации для руководителей учеб.-метод. объединений (УМО) вузов РФ: Проект. М.: Исследовательский центр проблем качества подготовки специалистов, 2005. 99 с.
2. *Зеер Э.Ф. и др.* Модернизация профессионального образования: компетентностный подход: Учеб. пособие. М.: Моск. псих.-соц. ин-т, 2005. 216 с.
3. Стратегия модернизации содержания общего образования: Материа-

лы для разработки документов для обновления общего образования. М.: ООО “Мир книги”, 2001. 66 с.

4. *Шадриков В.Д.* Психология деятельности и способности человека: Учеб. пособие. М.: Логос, 1996. 320 с.

Пример реализации межпредметных связей при подготовке математика в классическом университете

В.А. Кузнецова, Е.В. Никулина

В классическом университете в отличие от педагогического вуза, где студент одновременно готовится в области педагогики, психологии и по конкретной специальности (математика, история и т.д.), основное время отводится изучению дисциплин соответствующего направления науки, в частности, математических. В этом смысле университетское образование является монообразованием. В соответствии с требованием времени все разделы математики излагаются с большой долей абстракции, при этом каждая дисциплина зачастую изолированно от остальных.

В то же время современное общество заинтересовано в специалистах, обладающих знаниями не только в конкретных разделах науки, но и имеющих целостное представление о ней, о связях между ее различными областями, о связи науки с практикой. Если не адаптировать процесс обучения к требованиям времени, то выпускник, в частности математик, будет неконкурентноспособным на современном рынке труда, поскольку он достаточно хорошо оперирует формальными структурами, но зачастую не видит их физических моделей и геометрических интерпретаций, не видит связи между различными разделами математики; без этого знания нельзя назвать прочными, а математическое образование качественным. Вместе с тем, задача классического университета состоит в подготовке широко образованных математиков.

Одним из путей решения данной проблемы может служить разработка и введение за счет вариативного компонента основной образовательной программы так называемых интеграционных курсов. В качестве примера представим читаемый авторами для студентов математического факультета ЯрГУ им. П.Г. Демидова специальный курс “Теория массового обслуживания”.

Своим возникновением данная дисциплина обязана и развитию самой математики, и потребностям практики. Часто в обычной обстановке приходится считаться не только с возможностью появления случайных влияний, которые налагаются на некоторые закономерности, но возникает такая ситуация, что именно случайные воздействия являются определяющими для всего дальнейшего процесса. Задачи теории массового обслуживания (далее – ТМО) относятся именно к этому типу. К системам массового обслуживания (СМО) приводит множество задач: оптимизация работы скорой медицинской помощи, промышленного предприятия, морских перевозок грузов, счетчика Гейгера (прибора для определения интенсивности ядерного излучения), обслуживания покупателей в магазинах.

Целью курса является первоначальное ознакомление с основными понятиями (требование, обслуживающий прибор, интенсивность входного потока, интенсивность обслуживания и т.п.) и идеями теории массового обслуживания (процесс гибели и размножения, метод этапов, статистическое моделирование и т.п.), с областями применения рассматриваемых теоретических предложений. Данный курс читается в 8-м семестре, после того как студенты закончили изучение следующих дисциплин цикла ОПД: теория вероятностей (5 семестр), дифференциальные уравнения (3, 4 семестры), математический анализ (с 1 по 4 семестр), поэтому предлагаемый к изучению материал является для них доступным и понятным. При изучении обсуждаемого курса они могут проследить взаимосвязь теории вероятностей с дифференциальными уравнениями, математическим анализом, информатикой, ознакомиться с областями применения методов математического моделирования для изучения различных процессов действительности. Подтвердим сформулированный тезис, проанализировав указанные межпредметные связи.

Сначала обратим внимание на связь с теорией вероятностей. Теорию массового обслуживания отчасти можно считать практическим приложением теории вероятностей случайных величин, поскольку основными понятиями, которыми она оперирует, являются:

1) Дискретная случайная величина (в частности, число заявок в системе). Здесь акцент делается на изучение случайной величины, подчиненной пуассоновскому закону распределения, а именно рассматривается так называемый пуассоновский входной поток, обладающий свойствами: стационарности без последействия, ординарности.

2) Непрерывные случайные величины: промежуток времени между соседними заявками и длительность обслуживания одной заявки. Как один из основных, рассматривается показательный закон распределения случайных величин, поскольку если входной поток пуассоновский, то случайная величина – промежуток времени между соседними заявка-

ми – имеет показательное распределение. Что касается времени обслуживания заявки, то оказывается, что пропускная способность системы сравнительно мало зависит от закона распределения времени обслуживания, а зависит, главным образом, от так называемого коэффициента использования системы, т.е. отношения среднего числа заявок, поступающих в систему в единицу времени, к среднему числу обслуживаемых ею в единицу времени. В ТМО часто пользуются допущением, что время обслуживания распределено по показательному закону, поскольку это позволит упростить математический аппарат.

3) Математическое ожидание и дисперсия случайной величины. К показателям эффективности работы СМО относятся, например, математическое ожидание и дисперсия числа заявок в системе, числа занятых приборов, числа заявок в очереди, времени пребывания в системе и т.п. Для каждого изучаемого конкретного вида СМО в общем виде выводятся соответствующие формулы. Зачастую они очень громоздки, и в процессе их вывода студенты знакомятся с методами их получения, которые они будут использовать при решении конкретных задач.

4) Функция распределения и плотность распределения случайной величины. Эти понятия рассматриваются для различных непрерывных случайных величин.

Рассмотрим теперь связь с дифференциальными уравнениями. При решении частных задач теории массового обслуживания и выводе общих положений студенту требуется умение решать дифференциальные уравнения и их системы. Это объясняется тем, что огромный класс систем массового обслуживания можно изучить с помощью так называемого процесса гибели и размножения, который в случае работы СМО не в стационарном режиме описывается системой дифференциальных уравнений: используется умение решать однородные и неоднородные системы относительно вероятностей состояний СМО.

Теория массового обслуживания использует понятия и методы математического анализа. А именно:

– исследование функций и построение их графиков, необходимых для изучения зависимостей между различными характеристиками СМО;

– вычисление интегралов, в частности несобственных, при нахождении математического ожидания и дисперсии случайных величин;

– исследование числовых рядов на сходимость и поиск их суммы при нахождении показателей эффективности СМО с неограниченной очередью.

Далее в конце изучения курса студенты знакомятся со статистическим моделированием СМО, со схемой моделирующего алгоритма, с методами моделирования случайных величин. Здесь открывается обширное поле для составления программ, описывающих работу различных СМО, которые являются результатом курсовых и дипломных работ студентов. При этом следует отметить весьма высокий интерес учащихся к тематике подобных работ, где они могут проявить не только свои программистские умения, но и в состоянии творчески решать предлагаемые задачи, часть которых они составляют сами.

И, наконец, задачи, решаемые студентами на занятиях курса, зачастую носят практический характер и касаются функционирования конкретных СМО, описывающих работу различных процессов, встречаемых в реальной жизни.

В качестве примера рассмотрим следующую задачу.

В мастерской по ремонту часов есть n мастеров, работающих с одинаковой производительностью. В течение семичасового рабочего дня от населения в среднем поступает на ремонт 30 часов, причем каждый мастер за один рабочий день ремонтирует в среднем 10 часов. Рассматриваемый поток клиентов мастерской будем считать пуассоновским. Время ремонта подавляющей части часов невелико, в капитальном ремонте часы нуждаются сравнительно редко, т.е. предполагается, что обслуживание подчиняется показательному закону. Определить минимальное количество мастеров, при котором мастерская будет справляться с обслуживанием, т.е. очередь клиентов не будет расти неограниченно. Найти следующие характеристики СМО: вероятность того, что все мастера свободны (P_0), все мастера заняты (P_Z), среднее время ожидания в очереди (M_1), среднее число клиентов в очереди (M_2), среднее число мастеров, свободных от работы (M_3).

Для того, чтобы СМО справлялась с обслуживанием, необходимо и достаточно, чтобы среднее число поступающих в единицу времени заявок в систему не превышало среднего числа обслуживаемых в единицу времени заявок, т.е. в нашем случае минимальное количество мастеров, при котором очередь не будет расти неограниченно, должно быть равно четырем. Предполагая, что имеем стационарный режим функционирования мастерской, применяя аппарат теории вероятностей и математического анализа, получаем следующие значения основных характеристик для данной задачи:

– $P_0 = 0,038$, т.е. в течение семичасового рабочего дня в среднем 15,96 минут все 4 мастера свободны;

– $P_Z = 0,51$, что означает, что половину рабочего дня все мастера заняты одновременно;

– $M_1 = 0,051$, т.е. в среднем 21 минуту каждый клиент ожидает обслуживания;

– $M_2 = 1,56$;

– $M_3 = 1,007$.

С целью анализа работы мастерской с точки зрения ТМО можно рассмотреть значения искомых характеристик в случае, когда $n = 5$. Получим:

– $P_0 = 0,047$;

– $P_Z = 0,24$;

– $M_1 = 0,012$;

– $M_2 = 0,36$;

– $M_3 = 2$.

Качество обслуживания населения улучшится, поскольку время ожидания ремонта уменьшится с 21 до 5 минут, но вместе с тем, только 24% рабочего времени все мастера будут полностью загружены, причем в среднем 2 из них все время свободны. Далее решение вопроса об оптимальном количестве мастеров выходит за пределы математики и определяется соображениями собственника мастерской.

Остановимся коротко на выражении трудоемкости обсуждаемого курса в зачетных единицах. Это необходимо сделать, так как в предлагаемых проектах Госстандарта третьего поколения объемы всех блоков дисциплин представлены не через академические часы, а лишь через зачетные единицы. Используя, в основном, методику, описанную в информационном письме Минобразования [1], получаем, что данный курс, рассчитанный на 2 часа лекций в неделю и 1 час практических занятий в неделю в течение семестра, будет выражаться в 2 зачетных единицах (без учета степени усвоения дисциплины). Если же несколько отойти от министерской методики и учесть степень усвоения дисциплины, то можно для значений зачетных единиц получить диапазон в пределах от 2 до 2,2 зачетных единиц.

В заключение отметим, что интеграционные курсы, подобные рассмотренному, делают знания более прочными, а усвоение материала осознанным, поскольку раскрывают межпредметные связи, обозначают направления применения полученных в вузе знаний, тем самым способствуют формированию целостного представления о математической науке и повышают математическую культуру выпускников.

Работа поддерживается Российским Гуманитарным Научным Фондом, грант № 06-06-00101а.

Библиографический список

1. Методика расчета трудоемкости основных образовательных программ высшего профессионального образования в зачетных единицах: Информационное письмо Минобразования России от 28 ноября 2002 года №14-52-988 ин/13 // Интернет: Сайт Государственного НИИ информационных технологий и телекоммуникаций http://www.informika.ru

Модернизация и фундаментальность математического образования: противоречия и перспективы

В.А. Тестов

Начавшаяся модернизация школьного и вузовского образования столкнулась с рядом проблем и подвергается незатухающей критике со стороны научно-педагогической общественности. Цели модернизации выглядят довольно привлекательными и не подвергаются сомнению, однако предложенные пути и способы их реализации вызывают горячие споры. Модернизация высшего образования основывается на Болонском процессе, призванном унифицировать большое многообразие образовательных систем различных европейских стран. В основе формирования единого образовательного пространства лежат несколько основных принципов, среди которых основными являются переход к двухступенчатой системе высшего образования, повышение качества образования, приоритет фундаментального характера образования.

Но насколько согласуются эти принципы, в частности, будет ли переход России на двухуровневое высшее образование способствовать повышению качества образования и сохранению его фундаментальности?

У научно-педагогической общественности стран Европы вызывает тревогу то обстоятельство, что предлагаются единые пути для всех стран и народов без учета их традиций, достижений, без учета особенностей их национального образования. В Германии, например, академическое сообщество полагает, что унификация системы образования в соответствии с принятыми требованиями снижает значимость национальной образовательной традиции и вызывает радикальное изменение пропорций между обязательными курсами и курсами по выбору. Во Франции представители высшей школы не считают другие образовательные модели более совершенными и стремятся сохранить своеобразие своей системы образования [1].

Для России, как полагает ряд авторов, предлагаемая стратегия – это даже не миф, а заблуждение, основанное на незнании реалий. А сложившиеся реалии российского образования, по их мнению, таковы, что по сути своей входят в системные противоречия с Болонским процессом.

Следует также отметить, что в Болонской декларации и других документах не учитываются специфические особенности подготовки специалиста в конкретных областях. Невозможно по одной схеме готовить юристов и математиков, инженеров и педагогов. Так, о больших трудностях для математического образования, вызванных переходом на двухступенчатую систему, говорят не только российские математики, но и математики других европейских стран.

Для российского высшего образования традиционной является моноуровневая система, которая ориентирована на подготовку специалиста определенного вида профессиональной деятельности. Для этой системы характерна фундаментальная подготовка специалиста, что сегодня является основой профессиональной гибкости, требуемой постоянно изменяющимися условиями современного рынка труда. У этой системы имеется еще целый ряд несомненных преимуществ. Вместе с тем основным недостатком моноуровневой системы, как отмечает ряд авторов, является ее негибкость, жесткая однозначная связанность “входа” (начала обучения) и “выхода” (завершения обучения), которая не позволяет вносит коррективы без ущерба для образовательного процесса, не дает студенту свободы выбора индивидуального образовательного маршрута.

Этот недостаток должен практически исчезнуть при переходе к двухступенчатой системе, однако при этом теряется и ряд достоинств моноуровневой системы. Документами, сопровождающими Болонский процесс, предлагается первый цикл (ступень) высшего образования сориентировать на приобретение компетенций исполнительского типа, а второй – на развитие творческих способностей. Но насколько этот принцип сочетается с принципом фундаментальности образования? Можно ли, например, при подготовке математика овладеть математикой только на исполнительском уровне (в бакалавриате), оставляя на потом (для магистратуры) развитие творческих способностей?

Чтобы ответить на поставленные вопросы, необходимо, прежде всего, иметь однозначное понимание фигурирующего в них понятия фундаментальности образования. Хотя дискуссия по этой проблеме ведется давно, до сих пор этому понятию даются самые разные, часто весьма субъективные толкования. Среди большого разнообразия мнений можно выделить два основных направления трактовки этого понятия.

В первом понимании фундаментальное образование – это разностороннее гуманитарное и естественно-научное образование на основе овладения фундаментальными знаниями, выделение определенного круга вопросов по основополагающим областям знаний как данного направления науки, так и общеобразовательных дисциплин, без которых немыслим интеллигентный человек, – "образование вширь".

Представители другого направления понимают его как более углубленную подготовку по заданному направлению, изучение сложного круга вопросов по основополагающим областям знаний данного направления науки с полным обоснованием, необходимыми ссылками, без логических пробелов – "образование вглубь". Эта точка зрения фактически совпадает с точкой зрения классической педагогики, согласно которой фундаментальность образования характеризуется такими дидактическими принципами, как научность, систематичность, последовательность и т.д. Принцип научности обучения требует, чтобы его содержание являлось строго научным, объективно отражающим современное состояние соответствующей отрасли научного знания и учитывающим тенденции и перспективы его развития. Принцип систематичности и последовательности требует, чтобы знания, умения и навыки формировались в определенном порядке, системе: каждый элемент учебного материала логически связывался с другими, последующее опиралось на предыдущее и готовило к усвоению нового.

В последних по времени работах прослеживается тенденция положить в основу первого понимания культурологический подход, в основу второго – системный подход. Сторонники культурологического подхода, считая образование частью культуры, берут за основу слова, высказанные В.А. Садовничим, согласно которым эталонным образованием может быть только фундаментальное научное образование; его главная цель – распространение научного знания как неотъемлемой части мировой культуры. По его мнению, фундаментальность высшего образования – это соединение научного знания и процесса образования, дающее понимание образованным человеком того факта, что все мы живем по законам природы и общества, которые никому не дано игнорировать [2].

Как вытекает из культурологического подхода, для фундаментальности образования большое значение имеют национальная культура, национальные традиции. В частности, в России, как пишет В.А. Садовничий, в отличие от других наций, мы сразу стали учиться научно мыслить и учить студенчество мыслить целостными, фундаментальными теориями и действовать на практике сообразно методам получения фундаментальных знаний, на этой основе взросли наша академическая наука, университеты, общеобразовательная школа. Поэтому фундаментальность можно рассматривать как одну из важнейших национальных традиций российского образования, которая сейчас оказалась под угрозой. Для России правильнее говорить не о фундаментализации образования, а о сохранении фундаментальности образования.

С точки зрения системного подхода, фундаментальное образование как система характеризуется целостностью, взаимосвязанностью и взаимодействием элементов, а также наличием системообразующих стержней. Принципы, соответствующие этим трем свойствам, назовем принципами целостности, взаимосвязанности и генерализации знаний.

Принцип целостности содержания обучения является одним из основополагающих принципов формирования содержания обучения как в школе, так и в вузе. Особую актуальность приобретает целостность знания в вузовском преподавании. Вуз должен дать студентам представление как о конкретной науке, так и о всей математике в целом, чему в значительной степени препятствуют “стены” между отдельными вузовскими предметами.

Общие, целостные свойства системы не сводятся к сумме свойств ее элементов, а возникают в результате их взаимодействия. Поэтому принцип целостности обязательно должен дополняться принципом взаимосвязанности знаний. Этот принцип предполагает рассмотрение совокупности устойчивых связей, обеспечивающих целостность изучаемого объекта. То, чему учат, должно иметь много связей - этого требовал еще Я.А. Коменский. Здоровым принципом является изучать не изолированные крохи, а согласованные разделы. То, что взаимосвязано, легче изучается и легче удерживается. Этот принцип лежит в основе внутри- и межпредметных связей.

Еще одной системной характеристикой фундаментальности образования является направленность на постижение глубинных, сущностных, системообразующих оснований и связей между разнообразными процессами окружающего мира (принцип генерализации знаний). Фундаментальные знания – это стержневые, системообразующие, методологически значимые представления, восходящие к истокам, к первичным сущностям. В отличие от конкретных знаний и фактов, эти стержневые представления меняются сравнительно медленно, “живут” сравнительно долго, и это позволяет надеяться, что такие знания изменятся незначительно в течение среднего срока трудового стажа выпускника вуза. Выработанное на их основе умение думать, самостоятельно добывать знания должно существенно помочь выпускнику вуза и при необходимости изменить специальность или даже профессию. Принцип генерализации знаний означает, что начинать построение учебного курса надо с выделения основных структур и понятий и организовывать материал обучения в порядке логического развертывания этих структур и понятий по мере их конкретизации в системе изучаемой науки [3].

Тем самым фундаментальное образование, являясь инструментом достижения научной компетентности, должно быть ориентировано на постижение глубинных, сущностных оснований и связей между разнообразными процессами окружающего мира. Таким образом, с данных позиций фундаментальность образования означает такую систему образования, приоритетом которой являются не прагматические, узкоспециализированные знания, а методологически важные, долгоживущие и инвариантные знания, способствующие целостному восприятию научной картины окружающего мира, интеллектуальному расцвету личности и ее адаптации в быстро изменяющихся социально-экономических и технологических условиях.

Фундаментальные знания создают условия для инициации, развития и реализации творческого потенциала обучаемого, обеспечивают качественно новый уровень интеллектуальной культуры, создают внутреннюю потребность в саморазвитии и самообразовании на протяжении всей жизни человека. Поэтому степень фундаментальности образования должна оцениваться по уровню развития личности обучающихся, сформированности научного мировоззрения, гражданских качеств, по степени развития познавательных способностей, готовности к постоянному повышению своей квалификации.

Исходя из такого понимания фундаментальности образования, считаем необоснованным мнение ряда авторов о том, что оно под силу только ведущим элитарным университетам страны, поскольку среди выпускников провинциальных университетов есть специалисты, владеющие вышеуказанными качествами ничуть не меньше, чем многие выпускники МГУ.

В вышеуказанном понимании дополнением фундаментальных знаний являются узкоспециализированные профессиональные знания, используемые в практической деятельности. В истории высшего образования можно заметить давнее соперничество двух тенденций: фундаментализации и профессионализации. В России преимущество традиционно отдается первой из них. По мнению В.С. Кузнецова и В.А. Кузнецовой [4], на узкую профессиональную подготовку достаточно выделить не более 10% часов от общего объема учебного плана. В западных странах (особенно в США), наоборот, главенствующую роль отводят приобретению именно таких знаний, там это соотношение в ряде случаев может быть обратным. Поэтому для западных стран актуальным является фундаментализация образования, а для российского образования правильнее говорить о сохранении фундаментальности образования.

Появились попытки даже вывести формулу, описывающую соотношение времени, необходимого на фундаментальную и специальную подготовку. Но задача заключается не в нахождении определенного арифметического соотношения между фундаментальными и специальными знаниями, а в том, что подготовка специалистов на базе фундаментальных наук не должна означать понижения внимания к профессиональным видам деятельности. Главное не в том, какие конкретные знания студент приобретает, а в том, какие способы мышления при этом у него формируются. Фундаментальные науки должны ориентировать специалиста в своей области, позволять ему не только самостоятельно анализировать имеющиеся в ней накопления, но и предвидеть ее дальнейшее развитие.

Таким образом, принцип фундаментализации образования тесно связан с принципом профессионализации, практической направленности каждого учебного предмета на профессиональную деятельность специалиста. Практическая направленность, понимаемая в широком смысле, характеризуется, в частности, сформированностью у выпускника учебного заведения профессионального мышления и наличия комплекса актуальных знаний, умений и навыков, позволяющих ему сразу по окончании учебного заведения включиться в практическую производственную или иную деятельность по определенной специальности на определенных должностях. В отличие от этого фундаментальность образования подразумевает ориентацию обучения и воспитания на формирование инвариантных умений, навыков и знаний, необходимых для успешной профессиональной деятельности по широкому спектру специальностей и на различных должностях.

Профессионализация образования практически может выразиться в изменении удельного веса того или иного учебного материала в изучаемых курсах, в более детальной проработке вопросов, связанных с профессиональной деятельностью, во включении дополнительных вопросов, конкретизирующих содержание учебной информации применительно к профессии, по которой готовится специалист, в отборе практических заданий и задач. У моноуровневой системы в отношении профессионализации обучения имеется целый ряд несомненных преимуществ, среди которых следует отметить возможность постепенного включения студентов, начиная уже с младших курсов, в профессиональную деятельность за счет ориентации содержания специальных и общеобразовательных дисциплин на будущую профессиональную деятельность и за счет формирования у студентов мотивации на будущую профессию на протяжении всех лет обучения в вузе.

Обратимся сейчас к особенностям фундаментальной математической подготовки. Весь опыт преподавания математики в России, да и в других странах, говорит о том, что овладеть этой наукой только на исполнительском уровне без развития творческих способностей нельзя, что необходимо развивать творческие способности намного раньше, параллельно приобретению научных знаний, еще в школе и на первых курсах в вузе.

Причины таких особенностей стратегии обучения математике кроются в следующем. Все сколько-нибудь серьезные приложения математики требуют значительной первоначальной фундаментальной математической подготовки. Содержание общего курса математики не может быть определено с чисто прагматической точки зрения, основанной лишь на специфике будущей специальности студента, без учета внутренней логики самой математики.

Как математик-профессионал, так и учитель математики должен, прежде всего, получить широкий математический кругозор, должен представлять себе структуру современной математики в целом. Хотя, разумеется, фундаментальная математическая подготовка математика-профессионала и учителя математики должны существенно отличаться. В процессе освоения фундамента математических знаний у студентов возникают существенные трудности. Это вызвано специфической сложностью предмета математики. Сложность математики состоит в том, что она абсолютизирует свои абстракции и предметом математики являются идеализированные объекты. В абстрактности – сила, общность и универсальность математики, но в то же время и специфическая сложность ее усвоения. Поэтому фундаментальность образования обязательно должна сопровождаться гуманизацией обучения, характеризующейся такими принципами, как доступность, наглядность и т.п.

В России сложившаяся система подготовки учителя фактически очень близка к тому, к чему еще только приходят европейские страны.

При существующем пятилетнем сроке обучения в вузах на первых 3–4 курсах дается фундаментальная подготовка, а последние курсы обучения (1–1,5 года), как правило, используется для получения различных специализаций, для профессиональной подготовки учителя. Именно на этом этапе происходит основная часть методической подготовки учителя, проходит педагогическая практика. Отличие от того, что рекомендуется документами Болонского процесса, с формальной точки зрения небольшое, но по существу весьма важное: на второй ступени математического образования делается то, к чему фактически нас призывают делать на первой ступени – происходит приобретение компетенций исполнительского типа.

Опираясь на отечественный и зарубежный опыт, можно сделать вывод, что бакалавриат не может быть завершающим уровнем образования для учителей математики. После бакалавриата необходимо обязательно проводить дополнительную профессиональную подготовку длительностью не менее одного года. Для учителя математики или физики такая подготовка должна включать в себя психолого-педагогический и методический блоки, а также интенсивное прохождение педагогической практики. Только прохождение такой подготовки должно давать основание на присвоение квалификации учителя и право работать в школе.

Таким образом, хотя процесс модернизации образования внутренне противоречив, но все же при соблюдении указанных выше условий можно будет сохранить высокий потенциал отечественного математического и педагогического образования образования, его фундаментальный характер.

Библиографический список

1. *Ширшов Е.В.* Модернизация высшего технического образования в контексте Болонского процесса: из опыта вузов Архангельска // Высшее образование сегодня. 2005. № 6. С. 34–37.
2. *Садовничий В.А.* Традиции и современность // Высшее образование в России. 2003. № 1. С. 11–18.
3. *Тестов В.А.* Стратегия обучения математике. М.: Технологическая школа бизнеса, 1999. 303 с.
4. *Кузнецов В.С., Кузнецова В.А.* О соотношении фундаментальной и профессиональной составляющих в университетском образовании // Высшее образование в России. 1994. № 4. С. 36–40.

О естественных математических моделях доказательств в курсе математической логики в педвузах

И.Л. Тимофеева

Важнейшим звеном логической подготовки будущих учителей математики является обучение теории доказательств в курсе математической логики. Основными объектами изучения этой теории служат математические доказательства, модели которых строятся и исследуются с помощью метода формализации.

При построении математических моделей содержательных доказательств ключевым является следующее обстоятельство. Какое-либо развернутое рассуждение может быть признано доказательством в некоторой математической теории в том и только в том случае, когда каждое составляющее его предложение, исключая аксиомы, ранее доказанные теоремы и допущения, является следствием предшествующих предложений по каким-либо правилам логики. Таким образом, будет рассуждение правильным или нет, зависит не от его содержания, а исключительно от его *формы*. Это обстоятельство позволяет, абстрагируясь от содержания рассуждения, выявить его форму и сделать ее объектом специального изучения. В этом заключается суть метода формализации – важнейшего метода математической логики. Средствами этого метода построены математические модели доказательств – логические выводы в формальных логических и логико-математических системах. *Понятие* формального вывода в логических и логико-математических исчислениях служит математической *моделью понятия доказательства.* Речь идет о моделях только таких неформальных доказательств, в которых отсутствуют энтимемы, т.е. пропуски некоторых частей дедуктивных умозаключений. В математической логике разработаны *два типа* логических исчислений и соответствующих им моделей.

Исторически первыми были разработаны *линейные модели* доказательств – линейные выводы в аксиоматических логических исчислениях. Такие исчисления принято называть исчислениями гильбертовского типа, хотя на самом деле они восходят к немецкому логику Г. Фреге. Линейные модели математических доказательств не отличаются естественностью и сложны в построении, однако именно такие модели обычно изучаются в курсе математической логики, поскольку сам курс традиционно строится на базе логических исчислений гильбертовского типа.

Используя формальные линейные выводы в программе обоснования математики, Д. Гильберт не ставил перед собой задачу разработки наиболее адекватных и естественных моделей доказательств. Позже ученику Гильберта, немецкому логику Г. Генцену, удалось разработать новый тип моделей, которые гораздо больше соответствуют математическим доказательствам, т.е. более адекватно и более полно раскрывают их сущность. В качестве таких моделей Г. Генцен предложил выводы в виде дерева (деревья вывода) в системах естественного вывода. Построение деревьев вывода происходит по естественным правилам вывода. Эти правила соответствуют элементарным шагам неформальных доказательств и представляют собой модели простейших дедуктивных умозаключений и основных методов доказательств. Понятие дерева вывода в системе естественного вывода служит моделью неформального понятия математического доказательства.

Если в содержательном доказательстве восстановить все пропущенные в нем шаги, т.е. устранить энтимемы, то ему можно сопоставить дерево вывода в соответствующей логико-математической системе (теории первого порядка). Неформальное доказательство в результате формализации освобождается от конкретного содержания, что позволяет выявить в чистом виде его логическую структуру. И наоборот, любому дереву естественного вывода можно сопоставить содержательное рассуждение и не одно. Всякое дерево вывода можно рассматривать как естественную модель некоторого содержательного рассуждения. В этой модели выявлена и фиксирована логическая структура (форма) такого рассуждения в результате абстракции от его содержания. По существу, всякое дерево вывода является моделью содержательных рассуждений из целого класса рассуждений, имеющих одинаковую логическую структуру, фиксированную в этом дереве вывода.

Если при формализации доказательства использовать подходящий логико-математический язык (язык первого порядка), то всякому неформальному доказательству можно реально сопоставить дерево вывода в соответствующей теории первого порядка, которое отражает не только его логическую структуру, но и его содержание.

Построение теории доказательств в курсе математической логики на основе естественного вывода обладает целым рядом *дидактических преимуществ*. Основным из них являются естественность понятия дерева вывода как уточнения понятия доказательства и адекватность деревьев вывода как моделей неформальных доказательств.

В чем заключается естественность и адекватность выводов в виде дерева как моделей обычных доказательств? Отвечая на этот вопрос, сопоставим деревья вывода в системах естественного вывода и линейные выводы в аксиоматических исчислениях (конкретные примеры выводов обоих типов приведены в [1, 3]).

1. Дедуктивные средства в системах естественного вывода выражены исключительно в виде правил вывода, а логические аксиомы в этих системах отсутствуют (см. [1]). Поэтому при построении деревьев вывода используются только правила вывода. Это соответствует тому, что обычные математические рассуждения проводятся в соответствии именно с правилами вывода и никогда в них не используются логические аксиомы. В то же время в исчислениях гильбертовского типа дедуктивные средства выражены, в основном, в виде логических аксиом искусственного характера и всего лишь трех правил вывода (см. [1]).

2. Правила вывода в системах естественного вывода являются формализацией простейших способов рассуждений, они соответствуют элементарным шагам обычных доказательств. Логические аксиомы в гильбертовских исчислениях представляют собой результат искусственной линеаризации правил естественного вывода.

3. В обычных математических рассуждениях очень часто используются косвенные рассуждения, а значит, и промежуточные допущения. В системах естественного вывода способы основных косвенных рассуждений формализованы в виде косвенных (условных) правил естественного вывода. Косвенным рассуждениям можно непосредственно сопоставить соответствующий формальный вывод в виде дерева, формализующий это рассуждение. В исчислениях гильбертовского типа есть только прямые правила, а косвенные рассуждения невозможно непосредственно формализовать в виде линейного вывода.

4. Отношение логического следования, связывающее между собой члены доказательства, определенным образом упорядочивает предложения – члены этого доказательства (вернее, вхождения предложений). Более точно, оно упорядочивает эти члены в виде *дерева*, поскольку ветвление происходит в одну сторону. Действительно, на каждом шаге рассуждения происходит переход от некоторых предложений к одному-единственному предложению, непосредственно следующему из них по какому-либо правилу логики. Кроме того, это дерево имеет так называемый корень – доказываемое предложение, которому все остальные предшествуют. Именно это упорядочение и отражено (смоделировано) в деревьях вывода.

5. В дереве естественного вывода непосредственно и наглядно отражена его логическая структура, т.е. взаимосвязь между его членами (см. примеры в [1, 3]). Поскольку суть математического доказательства заключается в логической взаимосвязи его членов, в его особой логической структуре, то модель доказательства, отражающая эту структуру,

является наиболее адекватной. В отличие от деревьев вывода в линейных выводах совершенно не отражены ни характер взаимосвязи между его членами, ни даже сама взаимосвязь. Выявить эту взаимосвязь можно только с помощью дополнительных комментариев – так называемого анализа линейного вывода.

Отметим еще одно чрезвычайно важное достоинство естественного вывода: процесс построения деревьев вывода представляет собой *модель процесса построения* математических доказательств (см. [1, 3]).

Теперь остановимся на разных уровнях формализации неформальных доказательств в виде деревьев естественного вывода. Поскольку деревья естественного вывода являются моделями неформальных доказательств, а понятие дерева естественного вывода служит математическим уточнением понятия доказательства, то возникают вопросы: насколько полно отражена логическая структура доказательств в деревьях вывода и насколько полно отражена сущность понятия доказательства в его математическом уточнении – в понятии дерева естественного вывода? Здесь можно выделить несколько степеней адекватности моделей (деревьев вывода), моделируемым объектам (доказательствам).

Изучение теории доказательств в курсе математической логики обычно начинается с изучения пропозициональных логических исчислений (см., например, [1]). На этом уровне формализации и моделирования в математических предложениях выявляются только логические связки (союзы), а в рассуждениях фиксируется только соответствие их элементарных шагов правилам введения и удаления этих связок. В этих моделях отражена логическая структура доказательств лишь на простейшем уровне анализа структуры предложений – членов рассуждения и логических взаимосвязей между этими членами. Деревья вывода в пропозициональных системах естественного вывода являются наиболее простыми моделями доказательств. В этих деревьях отражена логическая структура рассуждений лишь на указанном уровне анализа структуры предложений – членов рассуждения, и логических взаимосвязей между этими членами. Таким образом, деревья вывода в пропозициональных системах естественного вывода дают самое упрощённое описание логической структуры доказательств и являются наиболее простыми моделями доказательств. В соответствии с этим *понятие* дерева естественного вывода в пропозициональных системах упрощенным образом отражает сущность *понятия* математического доказательства.

В действительности практически ни одно нетривиальное рассуждение в математике не обходится без кванторов, а значит, анализ структуры таких рассуждений требует более сильных средств. Выразительные средства языков первого порядка позволяют выявлять субъектно-предикатную структуру предложений и элементарных шагов доказательств, соответствующих правилам введения и удаления кванторов. Поэтому деревья вывода в предикатной системе естественного вывода являются математическими моделями доказательств более высокого уровня. Эти модели более глубоко отражают структуру доказательств, отражая также и те логические взаимосвязи между членами рассуждения, которые соответствуют кванторным правилам вывода. *Понятие* дерева вывода в предикатной системе естественного вывода более глубоко отражает сущность *понятия* доказательства.

Моделями доказательств еще более высокого уровня адекватности служат деревья вывода в теориях первого порядка, являющихся формализациями важнейших математических аксиоматических теорий (арифметики, теории множеств и др.). В этих моделях не только достаточно полно отражена логическая структура доказательств, но также выявлена и роль математических аксиом в построении доказательств в рамках неформальных аксиоматических теорий. Понятие дерева вывода в теории первого порядка наиболее полно отражает сущность неформального понятия доказательства, и его можно рассматривать как модель понятия доказательства самого высокого уровня адекватности из тех, которые изучается в курсе математической логики.

Считаем, что в курсе математической логики в педвузе следует изучать модели всех трех указанных уровней, начиная с самых простых и заканчивая наиболее сложными. В этом, во-первых, реализуется один из основных дидактических принципов: от простого к сложному. Пропозициональные системы – наиболее простые объекты изучения по сравнению с логическими системами более высокого порядка. Во-вторых, модели этого уровня и соответствующие им пропозициональные системы естественного вывода сами по себе являются достаточно важными и интересными объектами изучения. На примере пропозициональных систем можно изучить практически все основные свойства формальных выводов и отношения выводимости, а также свойства формальных логических систем: непротиворечивость, семантическую корректность, семантическую полноту, дедуктивную полноту, независимость. Все, что изучается на этом простом уровне, затем распространяется с большими или меньшими изменениями на другие, более сложные формальные системы. Таким образом, экономить учебное время, ограничиваясь изучением только теорий первого порядка, считаем нецелесообразным.

Как уже было отмечено, курс математической логики в педагогических вузах традиционно строится на основе исчислений гильбертовского типа. При этом изучаются линейные модели математических доказательств. Однако, изучая линейные выводы, студенты не чувствуют их связи с реальными доказательствами, поскольку, будучи моделями доказательств, линейные выводы слишком далеки от моделируемых объектов. Кроме того, построение линейных выводов является технически очень непростой задачей. Это снижает у студентов мотивацию изучения логических исчислений и математической логики в целом. Совсем другая ситуация возникает при построении курса математической логики на основе систем естественного вывода. Студенты иначе воспринимают учебный материал, поскольку осознают, что изучают естественные и наглядные модели доказательств. В результате у них повышаются мотивация и интерес к изучению математической логики. Повышению интереса студентов также способствует простота построения деревьев вывода.

Изучение наиболее адекватных, наглядных и простых математической моделей неформальных математических доказательств, на наш взгляд, является одной из основных задач курса математической логики в педагогическом вузе. Такими моделями служат деревья естественного вывода, и изучение именно таких моделей является принципиально важным для студентов педвузов – будущих учителей математики.

Автором статьи разработан инновационный курс математической логики, полностью построенный на основе естественного вывода (см. [1, 2]). Многолетний опыт преподавания математической логики на математическом факультете МПГУ показал, что изложение курса математической логики на основе естественного вывода не только возможно, но и позволяет существенно повысить эффективность и профессионально-педагогическую направленность обучения математической логике по сравнению с традиционным обучением.

Библиографический список

1. *Тимофеева И.Л.* Математическая логика. Курс лекций: Учебное пособие. Части I, II. М.: Прометей, 2003.
2. *Тимофеева И.Л.* Математическая логика в вопросах и задачах: Учебное пособие для студентов математических факультетов педвузов. М.: Прометей, 2002.
3. *Тимофеева И.Л.* Логическая подготовка будущих учителей математики: Монография. М.: МПГУ, 2005.

Компьютерный учебник в среде Mathematica

Т.В. Капустина, Ж.И. Зайцева

Компьютерный (электронный) учебник – компьютерное средство обучения для базовой подготовки по определенному предмету (дисциплине), содержание которого характеризуется относительной полнотой и представлено в форме учебника (книги) на электронном носителе. Таким образом, компьютерный учебник – это учебное пособие для изучения нормативного учебного курса, созданное и использующееся посредством компьютера и хранящееся в его памяти.

Определим место компьютерного учебника в учебном процессе. Компьютерный учебник по математике должен быть ориентирован на расширение методических возможностей преподавания математики; он не претендует на вытеснение традиционных форм учебных пособий и способов их применения при обучении математическим дисциплинам. Компьютерный учебник призван быть дополнительным средством в формировании таких навыков, как культура математических рассуждений, формулировок и определений, уверенное владение стандартными приемами математических доказательств, свобода и легкость в использовании общеизвестных алгоритмов, умение разрабатывать и применять новые алгоритмы; он предоставляет пользователю среду, обеспечивающую условия для естественного процесса работы над математическим материалом, позволяя при этом обучаемому не концентрировать внимание на рутинных вычислениях (так как они проводятся автоматически), а акцентировать лишь принципиальную сторону изучаемого вопроса.

Преподающий математическую дисциплину может использовать компьютерный учебник для организации самостоятельной работы студентов, для тестирования, а также для переориентации аудиторных занятий со студентами на более высокий творческий уровень, поручив компьютеру начальный этап обучения.

На базе компьютерной системы *Mathematica* можно создавать полноценные компьютерные учебники, не просто дополняющие обычные “бумажные” учебники, но, благодаря специфическим средствам компьютерной математической среды, в некоторых аспектах превосходящие их (например, в текст компьютерного учебника можно включать анимационные иллюстрации, которые позволяют получить более полное визуальное представление об изучаемом объекте, нежели статичные чертежи и графики).

Среда компьютерного учебника моделирует естественный процесс обучения. Организовать построение компьютерного учебника в среде

Mathematica можно в виде группы файлов с расширением **.nb**. В процессе работы пользователь может прямо на "страницах" компьютерного учебника делать различные пометки, решать задачи. Структура компьютерного учебника может быть организована по так называемой радиально-концентрической модели. Эта модель – видоизменение модели многоуровневого "обычного" (т.е. печатного) учебника. Многоуровневость в компьютерном воплощении учебника осуществляется значительно проще и естественнее, чем в печатном учебнике, благодаря специфике иерархии файлов и гипертекста.

К числу преимуществ компьютерного учебника перед обычным можно отнести то обстоятельство, что, при наличии необходимого компьютерного оснащения, он может быть без труда и в любое нужное время распространен в любом количестве "экземпляров", поскольку не требует печатания (и затрат на это). Кроме того, компьютерный учебник можно по мере необходимости редактировать (опять без затрат). Немаловажно и то, что любой преподаватель может создать свой компьютерный учебник, адаптированный к его взглядам на методику изложения учебного материала.

Методологической основой компьютерного учебника по высшей математике в его практической части должны являться программы, составленные в функциональном стиле, предназначенные для решения опорных задач (типовых задач, многократно использующихся при решении других задач). Примерами могут служить задачи на вычисление коэффициентов ряда Фурье данной функции действительного переменного и подсчета его частичных сумм для произвольного значения слагаемых членов ряда с последующей визуализацией графиков самой функции и нескольких частичных сумм, аппроксимирующих данную функцию. Эти программы составляются по шагам так, что студент при самостоятельном решении заданных ему (или выбранных им) задач может проверить правильность своих вычислений на любом этапе. Важно, чтобы каждый шаг программы был подробно прокомментирован.

Решающая роль в методологии разработки и применения компьютерных учебников на базе среды *Mathematica* принадлежит объекту ***шаблон*** [1]. Именно его применение позволяет программировать опорные задачи и использовать их для автоматизации решения и для автоматической проверки решения студента по шагам, а не только по ответу. Эта сторона контролирующих программ на базе системы *Mathematica* выгодно отличает их от большинства разрабатываемых в настоящее время контролирующих программ, которые основаны на создании банка заданий с заданным для контроля ответом. Благодаря шаблону опорная задача применяется многократно, в зависимости от конкретных математических объектов, содержащихся в задании обучаемого. Это сообщает обучающим, контролирующим и тренинговым программам в среде *Mathematica* высокую степень вариативности, что очень важно для адаптации этих программ к различным учебным и методическим задачам.

Остановимся на элементах технологии разработки компьютерного учебника по математике в среде *Mathematica*, которая содержит все компоненты *оболочки для создания компьютерного учебника.* Будем рассматривать возможности последней версии 5.0.

Во-первых, имеются средства для создания текстового документа высокого типографского качества, удовлетворяющего эргономическим требованиям. В случае компьютерного учебника текст будет читаться с экрана, поэтому он будет иметь перед печатным текстом те преимущества, которые дает использование цвета в тексте и графических иллюстрациях. Текст можно оформлять, используя предусмотренные специально для этого палитры меню **File** Palettes NotebookLauncher, где содержатся 17 палитр, из которых для оформления учебников более всего подходят **Textbook** и **TutorialBook**.

Во-вторых, легко организовать систему гиперссылок и сделать не только статичные графические иллюстрации, но и динамичные анимационные.

В-третьих, для организации контроля усвоения знаний и тренинга можно организовать специальные тренажеры. В создании тренажера будут использоваться широкие возможности программирования в среде *Mathematica* и специальные средства меню **Cell**. Тренажер организуется в виде программы, составленной в смешанном функционально-процедурном стиле и помещенной в <u>одну</u> ячейку. Эта ячейка должна быть: а) нередактируемой (для этого надо снять опцию Cell Editable меню **Cell**, которая подключена по умолчанию), б) скрытой (снимается опция Cell Open того же меню). Отличать скрытые и нередактируемые ячейки от обычных входных и выходных можно по форме скобки, которой справа помечена ячейка: если высота скобки мала (примерно равна высоте буквы x) и в строке, которая отмечена этой скобкой, нет ни одного знака, то ячейка скрытая; если скобка обычной высоты, но рядом с ней слева стоит крестик, то ячейка нередактируемая (нельзя даже скопировать ее содержимое, не говоря уже об изменении).

Перейдем непосредственно к описанию технологии организации следующих компонентов компьютерного учебника в среде *Mathematica*: 1) иерархии файлов первого уровня и последующих уровней (с системой навигации и гиперссылками), 2) анимации, 3) тренажера с организацией интерактивного диалогового режима пользователя и компьютера.

1. Иерархия файлов и создание гиперссылок

Файл, представляющий собой содержание (оглавление) КУ, состоит из названий параграфов; каждое из этих названий является гиперссылкой. Будем называть этот файл координирующим и считать его файлом нулевого уровня. Название этого файла должно совпадать с названием компьютерного учебника.

Каждый из параграфов – файл первого уровня. Поскольку входные ячейки имеют по умолчанию формат *Input*, то важно отметить, что ячейки, предназначенные для чтения (даже если в них есть формулы), должны иметь формат *Text*. Перед тем, как начинать печатать текстовую ячейку, в меню *Format* и его подменю *Style* выбираем опцию *Text*:

$$\boxed{\text{Format}} \to \boxed{\text{Style}} \to \boxed{\text{Text}}$$

Можно выбирать цвет фона каждой ячейки и цвет текста в ней.

Названия всех параграфов набираются по порядку. Затем создаются все файлы первого уровня, по названиям параграфов. Далее организуются первые гиперссылки, отсылающие читателя от названия параграфа в оглавлении к соответствующему параграфу – файлу первого уровня.

Гиперссылка создается следующим образом. В файле нулевого уровня с помощью мыши выделяется название параграфа (например: “1. Историческая справка”). Затем в строке меню *Input* выбирается:

$$\boxed{\text{Input}} \to \boxed{\text{Create Hyperlink}}$$

Откроется окно **Create Hyperlink** (Создать гиперссылку). Над кнопкой $\boxed{\text{Browse}}$ следует указать (напечатать) имя файла первого уровня (в нашем примере “Историческая справка”) и нажать кнопку $\boxed{\text{Открыть}}$. (Пользователь часто не помнит полное имя файла; тогда он может воспользоваться кнопкой обзора файловой системы $\boxed{\text{Browse}}$, которая выводит стандартное окно поиска файлов. При нажатии левой кнопкой мыши на выбранное название имя файла появится в поле окна Create Hyperlink, теперь для создания гиперссылки достаточно нажать кнопку $\boxed{\text{OK}}$.) Выделенное название параграфа превратится в кнопку, подчеркнутую снизу чертой. Это и есть гиперссылка. Активизация гиперссылки вызовет немедленное появление нужного файла первого уровня.

Таким же образом организуются гиперссылки внутри файла первого уровня. Их целесообразно создавать для всех понятий, определения которых содержатся в других файлах. Можно также отсылать к файлам второго уровня трудные или громоздкие доказательства теорем или свойств (или однотипные доказательства), снабдив их гиперссылками. Тогда содержание файла первого уровня будет компактнее и прозрачнее.

Система навигации предполагает возвращение к координирующему файлу и переходы к предыдущему или последующему файлу. Для этого нужно в начале (или в конце) каждого из параграфов (например, "Историческая справка") в новой ячейке набрать "слова" $\Leftarrow$, Содержание, $\Rightarrow$ и для каждого слова создать гиперссылку. Получатся кнопки $\boxed{\Leftarrow}$ $\boxed{\text{Содержание}}$ $\boxed{\Rightarrow}$. Такая система навигации поможет ориентироваться в компьютерном учебнике, а также с легкостью переходить на нужный его фрагмент.

Файлами второго уровня можно считать те, в которых дается более подробное изложение теоретического материала (с доказательствами, дополнительными теоремами и примерами). Они тоже оснащаются системой навигации и перекрестными гиперссылками.

2. Анимация

Анимация имеет большое значение для визуализации геометрических объектов и построения визуально наблюдаемых моделей процессов в силу присущего ей динамического характера (в противоположность статическим книжным иллюстрациям). Технология создания анимации внутри документа в среде *Mathematica* очень проста.

Для качественной анимации необходимо создать серию изображений, в которых постепенно изменяется тот или иной параметр (например, радиус изображаемой окружности) или сразу несколько параметров (например, и радиус окружности, и координаты ее центра, а также ее цвет и толщина). Для этого лучше всего использовать встроенную функцию **Table**, в которой предусмотрено изменение параметров с заданным шагом. Двойной щелчок мыши на скобке, объединяющей серию изображений, оставляет одно (первое) из изображений серии, все остальные изображениями становятся скрытыми. Выделив эту скобку, применяют опцию **Animate Selection Graphics** меню Cell (комбинация горячих клавиш Ctrl+Y). В тексте компьютерного учебника не остается посторонних данных подготовительного характера (их ячейки делаются скрытыми), а содержится лишь одна "картинка", которую можно оживлять двойным щелчком мыши.

3. Тренажер с интерактивным диалоговым режимом пользователя и компьютера

Для создания тренажера, снабженного системой автоматической проверки действий студента по решению задач и автоматического выставления оценки за решение, необходимо составить программу, состоящую из набора процедур, объединенных в одной ячейке. Критерием правильности будет проводимое компьютером параллельно со студентом решение данной задачи как опорной по основной программе, составленной в функциональном стиле. Конкретные данные для каждого студента подбираются индивидуально (или с помощью датчика случайных чисел, или по заранее составленной таблице). Сообщение этих данных студенту, пошаговые задания для него и его ответы составляют содержание диалога внутри одной ячейки. В текущей версии системы *Mathematica* 5.0 предусмотрена встроенная функция **Input**, которая вызывает малое диалоговое окно с текстом задания и местом для впечатывания требуемого ответа. Эти ответы студента компьютер сравнивает с полученными им самим и отвечает или поощрительным замечанием, или констатацией неверного ответа и последующим наводящим вопросом. Количество неверных попыток можно фиксировать и в зависимости от него выставлять оценку по заранее заданной формуле.

Так как тренажер организован в виде одной ячейки, то, зайдя в нее, студент может выйти лишь с двумя результатами: выполнив задание или не выполнив его. Повторная попытка пройти тренажер будет защитываться как "исправление" оценки, полученной при первой попытке.

Студент действует согласно рекомендациям, имеющимся на экране ("Введите выражение полученной функции" и т. п.). Ввод всех выражений во входных ячейках возможен в нескольких вариантах, в том числе – в обычной математической символике (с помощью палитры BasicInput), но в диалоговом окне это можно делать только с клавиатуры, используя имена встроенных функций (например, **Pi** вместо π, **E** вместо e, **Sqrt[5]** вместо $\sqrt{5}$ и т. п.); кроме того, диалоговое окно принимает только латинский шрифт. Эти неудобства, однако, невелики; в целом тренажер достаточно эффективен. Образец тренажера приведен в [2].

Библиографический список

1. *Капустина Т. В.* Компьютерная система Mathematica 3.0 в вузовском образовании / Т. В. Капустина. М.: МПУ, 2000. 240 с.: ил.
2. *Зайцева Ж. И.* Методика преподавания высшей математики с применением новых информационных технологий (в техническом ву-

зе): дис....канд. пед. наук: 13.00.02, 13.00.08; защищена 27.12.05 / Ж. И. Зайцева; Елабужский гос. пед. ун-т. Елабуга, 2005. 140 с.

Информация о статистически связанных системах

В.Н. Алексеев

Вопрос об измерении информации является довольно сложным, и нельзя сказать, что к настоящему времени он решен полностью. Существует несколько известных подходов к решению данной проблемы. Один из них разработан в русле решения практических задач по передаче информации. Это вероятностный (или энтропийный) подход. Основополагающие работы здесь принадлежат классикам теоретических основ информатики – К.Э. Шеннону и Р. Хартли.

Основным объектом такого энтропийного подхода является физическая система X с конечным набором возможных состояний x_1, x_2,...,x_n. Система X может переходить в каждое из этих состояний с некоторой вероятностью $p_k = P(\mathrm{X} \to x_k)$. Здесь через $X \to x_k$ обозначено событие перехода системы X в состояние x_k. Причем события $X \to x_k$ образуют полную группу несовместных событий. Тогда данную физическую систему можно описать с помощью таблицы, по внешнему виду напоминающей табличное задание закона распределения дискретной случайной величины. Поэтому для краткости будем называть соответствующую таблицу для функции $p_k = P(X \to x_k)$ “законом распределения” физической системы X:

X	x_1	x_2	...	x_n
p	p_1	p_2	...	p_n

Была введена мера неопределенности состояния системы – энтропия $H(X)$ системы X:

$$H(X) = -\sum_{k=1}^{n} p_k \cdot \log_2 p_k. \tag{1}$$

Выбор основания логарифма в (1) равносилен выбору единицы измерения энтропии. В частности, при выборе в качестве основания числа два наиболее простой системой с энтропией, равной единице, является система с двумя равновозможными состояниями.

Пусть происходит некоторое событие A, связанное с системой X. Это может привести к изменению вероятностей перехода системы в отдельные состояния. Практически это связано с пересчетом вероятности реализации отдельных состояний (гипотез) по формуле Байеса:

$$p'_k = P((X \to x_k)/A) = \frac{p_k \cdot P(A/(X \to x_k))}{P(A)}. \tag{2}$$

В результате мы получим новый закон распределения физической системы X/A, т.е. закон распределения системы X, с учетом того, что наступило событие A. Тогда изменится и энтропия системы: $H(X/A) = -\sum\limits_{k=1}^{n} p'_k \cdot \log_2 p'_k$. В качестве количественной меры информации, содержащейся в сообщении о наступлении события A, принята величина уменьшения неопределенности (энтропии) в состоянии системы, т.е. величина:

$$I(A) = H(X) - H(X/A). \tag{3}$$

Отметим, что описанная схема вычисления количества информации относится к ситуации, когда в качестве пространства элементарных исходов для события A выступает множество возможных состояний системы X, точнее $\{(X \to x_k) \,|\, k = 1, 2, \ldots, n\}$, т.е., другими словами:

$$A = \sum_{j \in J} (X \to x_j), \quad J \subseteq \{1, 2, ..., \mathrm{n}\}. \tag{4}$$

Тогда $P(A/(X \to x_k)) = \begin{cases} 0, & k \notin J \\ 1, & k \in J \end{cases}$ и поэтому $P(A) = \sum\limits_{j \in J} p_j$, и формула (2) дает следующий результат $p'_k = \begin{cases} 0, & k \notin J \\ \frac{p_k}{P(A)}, & k \in J \end{cases}$.

Для события A, не удовлетворяющего соотношению (4), величина $I(A)$, вычисленная по формуле (3), может быть и отрицательной. Для этого достаточно выбрать такое событие, которое более вероятно для маловероятных состояний системы X. Это приведет к тому, что закон распределения X/A будет "ближе" к равномерному распределению, чем для X. А поскольку нетрудно проверить, что для систем с n возможными состояниями система с равномерным законом распределения имеет наибольшую энтропию, то это утверждение становится очевидным. Например, пусть даны три урны, выбор которых осуществляется по результатам бросания игральной кости. Считаем, что $X \to x_1$, если выпало одно очко (выбрана первая урна). Аналогично, $X \to x_2$, если выпало два или три очка и, наконец, $X \to x_3$ при выпадении 4, 5 и 6 очков. В урнах находятся белые и черные шары: в первой – 6 белых, 0 черных; во второй – 3 белых и 3 черных; в третьей – 2 белых и 4 черных. Пусть A – событие "из выбранной урны извлечен белый шар". Тогда применение формул (1) – (3), а также формулы полной вероятности дают следующий результат: $I(A) = 2/3 - (\log_2 3)/2 \approx -0,126$.

Такая ситуация складывается потому, что событие A описывает состояние другой системы $-Y$, статистически связанной с X. Поэтому в таких случаях нужно вычислять полную информацию для системы (X, Y), что дает $I(A) = H(X, Y) - H((X, Y)/A) = 2/3$.

При вычислении энтропии используются величины

$$i_k = -\log_2 p_k, \tag{5}$$

которые принято называть собственным или индивидуальным количеством информации о наступлении события $X \to x_k$ [3] или частной информацией об этом событии [2]. Естественно, что в общей ситуации полная информация (3) и частная информация (5) дают различные значения, даже если $A = (X \to x_k)$. Условия совпадения результатов изложены, например, в работе [1]. Реально величины (5) дают оценку длины эффективного префиксного кода, используемого для обозначения состояний системы X (код может быть построен процедурой Шеннона–Фано или, предпочтительнее, методом Хаффмена). При этом основание логарифма должно совпадать с количеством символов алфавита, используемого для записи кодовых комбинаций.

Библиографический список

1. *Алексеев В.Н.* К вопросу об измерении информации // XIV Ершовские чтения. Сборник материалов юбилейной региональной конференции. Ишим: ИГПИ, 2004. С. 274–275.
2. *Вентцель Е.С.* Теория вероятностей. М.: Высшая школа, 2002. 576 с.
3. Информатика: Энциклопедический словарь для начинающих / Сост. Д.А. Поспелов. М.: Педагогика-Пресс, 1994. 352 с.

Размерность и самоподобные фракталы

С.Б. Козырев, В.С. Секованов

Около тридцати лет назад появилось новое, бурно развивающееся направление в математике – фрактальная геометрия. Как показывает практика, приложения фрактальной геометрии начинают проникать в различные области – от психологии до химии. В настоящее время идеи фрактальной геометрии используются и в учебном процессе, стали появляться на русском языке монографии и учебные пособия по данной дисциплине, например [1, 3–5, 7–13]. Основоположником фрактальной геометрии является Бенуа Мандельброт, который ввел в 1975 году понятие фрактала. В самом общем виде фрактал – это геометрическая фигура, моделирующая объекты природы: скалу, дерево, огонь, молнию, облако и др. Мандельброт справедливо утверждает, что скала это не конус, молния не распространяется по прямой, а молекула в жидкости движется не по гладкой кривой [8]. Он предложил использовать для моделирования природных объектов и явлений геометрические фигуры, которые он назвал фракталами. Некоторые из этих фигур были известны задолго до 1975 года, например, множество Кантора, кривая Коха, ковры Серпинского и др. Строились они ради удовлетворения потребностей самой математики, для развития новых (в то время) ее разделов. За свои необычные свойства эти множества удостаивались эпитетов "уродливые", "патологические", "монстры". Новизна предложения Мандельброта состояла в том, чтобы использовать их для практических нужд, причем он отметил характерную черту "монстров": они имели в некотором смысле дробную размерность. Отсюда и появился термин фрактал (fractal) – дробный.

Что такое размерность множества? Со времен Декарта размерность координатного пространства характеризовалась минимальным количеством координат, достаточных для задания любой его точки. Математикам первой половины XIX века суть отличия поверхности от кривой казалась очевидной: поверхность имеет больше точек, чем прямая, поэтому и координат ей требуется больше. После открытия Кантора, построившего взаимно однозначное соответствие между единичным отрезком и единичным квадратом, стало ясно, что суть различия между кривой и поверхностью не в количестве точек, а в их расположении. В чем же тогда суть размерности? К настоящему моменту математики дали несколько подходов к решению этого вопроса. Первый теоретически разработанный ответ дали топологи, создав теорию топологической размерности. Большой вклад в ее разработку внес Урысон, которому принадлежит определение понятия размерности. Дадим определение топологической размерности (в терминологии [2] она называется малой индуктивной размерностью).

Итак, пусть имеется топологическое пространство X. Границу открытого множества $U \subset X$ будем обозначать ∂U, то есть $\partial U = \overline{U} \setminus U$. Отметим, что у открыто-замкнутого множества граница пуста. Определим размерность X (обозначается $\dim_T X$) индуктивно. Сначала положим по определению, что $\dim_T \varnothing = -1$. Далее предположим, что все пространства размерности не выше $n-1$ уже определены. Скажем, что X имеет размерность не выше $n(\dim_T X \leq n)$, если для любой точки $x \in X$ и любой ее окрестности $U(x)$ существует окрестность $V(x)$ такая, что $\overline{V(x)} \subseteq U(x)$ и $\dim_T \partial V(x) \leq n-1$. Если $\dim_T X \leq n$, но не имеет места $\dim_T X \leq n-1$, то полагаем $\dim_T X = n$. Если не имеет места $\dim_T X \leq n$ ни при каком $n \geq 0$, то полагаем $\dim_T X = \infty$.

Топологическая размерность инвариантна относительно гомеоморфных преобразований. Это замечательное свойство послужило обоснованием интуитивного представления о размерности многообразий.

Найдем, исходя из сказанного, топологическую размерность некоторых "монстров". Вначале покажем, что если множество X на числовой оси вполне несвязно, то $\dim_T X = 0$. Действительно, возьмем любую точку $x \in X$, любую ее окрестность $U(x)$ и подберем такой интервал на числовой прямой Ix, чтобы $I \cap X \subset U(x)$. Очевидно, найдутся две точки a и b, принадлежащие $I \setminus X$, такие, что $a < x < b$, иначе бы X содержало в себе целый отрезок прямой и не было бы вполне несвязным. Положим теперь $V(x) = (a,b) \cap X$. По построению видно, что $\partial V(x) = \varnothing$, что и требовалось доказать. Здесь и в последующих примерах настоящей статьи, рассматривая какое-либо множество в евклидовом пространстве, мы подразумеваем, что его топология (следовательно, и метрика) индуцирована метрикой евклидова пространства.

Итак, поскольку канторово множество линейно и вполне несвязно, его топологическая размерность равна нулю. Размерность кривой Коха равна единице (см. рис. 4), детали построения кривой содержатся в [1]). Это следует из гомеоморфности кривой и отрезка. Надеемся, читателю не составит большого труда самому построить этот гомеоморфизм.

С точки зрения топологической размерности отрезок (а, значит, и кривая Коха) является минимальным одномерным множеством в том смысле, что любое одномерное множество содержит в себе гомеоморфный образ отрезка. Известно и самое большое плоское одномерное множество – это второй ковер Серпинского (построение ковров Серпинского см. в [2]). Любой плоский компакт либо двумерен, либо гомеоморфен некоторой части второго ковра Серпинского. Нам, однако, желательно непосредственным образом убедиться, что оба ковра одномерны. Покажем это с помощью теории плоской меры и интеграла Лебега.

Итак, пусть S – второй ковер Серпинского. Введем в рассмотрение следующую функцию на плоскости:

$$I_S(x,y) = \begin{cases} 1, & (x,y) \in S \\ 0, & (x,y) \notin S \end{cases},$$

называемую индикатором S. Так как множество S имеет плоскую меру Жордана, равную нулю (следует из построения S), то существует интеграл Римана

$$\iint\limits_{R^2} I_S(x,y)dxdy = 0. \tag{1}$$

Возьмем произвольным образом точку плоскости $z{\in}S$, ее окрестность $U(z)$ и затем подберем замкнутый ε-шар с центром в точке z, лежащий в $U(z)$. Далее сделаем на плоскости замену переменных, перейдем от декартовых координат (x,y) к полярным (ρ,φ) с полюсом в точке z. Тогда интеграл (1) можно будет записать в виде повторного интеграла

$$\int\limits_0^\infty \int\limits_0^{2\pi} I_S(x(\rho,\varphi), y(\rho,\varphi)d\varphi\rho d\rho. \tag{2}$$

Интеграл (2), понимаемый как одномерный интеграл Лебега, тоже равен нулю, а его подынтегральная функция неотрицательна, поэтому она почти всюду равна нулю. Подберем некоторое положительное $r{<}\varepsilon$, при котором подынтегральная функция равна нулю, то есть

$$\int\limits_0^{2\pi} I_S(x(r,\varphi), y(r,\varphi))d\varphi = 0. \tag{3}$$

Подынтегральная функция интеграла (3) тоже почти всюду равна нулю. Это означает, что S пересекается с окружностью радиуса r с центром в z по множеству, линейная мера Лебега которого равна нулю. Обозначим открытый в плоскости шар радиуса r с центром в z через $V(z)$. Мы получили, что множество $S \cap \partial V(z)$ вполне несвязно и лежит на окружности. Его нулевая размерность может быть доказана так же, как и для линейных вполне несвязных множеств. Мы показали, что множество S имеет размерность не более чем единица. Нульмерным оно, очевидно, не может быть, поскольку является связным. Все приведенные рассуждения без всяких изменений подходят и для первого ковра Серпинского.

По свидетельству Мандельброта [8], практиков-исследователей не устраивало, что отрезок и кривая Коха – это практически одно и то же (в топологии так оно и есть!). Они нуждались в числовых характеристиках, измеряющих некую метрическую плотность природных кривых и поверхностей. Мандельброт предложил использовать для этого определение размерности, принадлежащее Хаусдорфу. Это дало определенный импульс научным трудам, разрабатывающим понятия иных, фрактальных размерностей. Перейдем к их изложению.

Итак, возьмем отрезок определенной длины и уменьшим его в N раз (всюду в данной статье N подразумевается натуральным числом). Полученный отрезок будет уменьшенной копией со своего оригинала. Взяв ровно M таких копий, можно составить из них исходный отрезок, то есть покрыть его копиями полностью, допуская их пересечение лишь в граничных точках (см. рис. 1). Понятно, что в данном случае $M = N$. Множества, которые можно составить из нескольких своих копий, уменьшенных в одинаковое число раз, называются самоподобными множествами. Таким образом, отрезок является самоподобным множеством.

Рис. 1

Рассмотрим теперь квадрат. Возьмем его копии с уменьшением линейных размеров в N раз. Из них тоже можно составить исходный квадрат, но для этого потребуется уже $M = N^2$ копий. Снова копии покрывают весь квадрат и пересекаются лишь в своих граничных точках (см. рис. 2). Следовательно, квадрат тоже самоподобен.

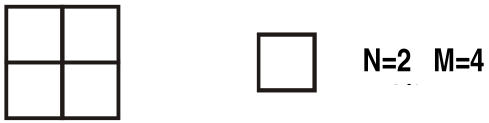


Рис. 2

Аналогично куб можно составить из его уменьшенных в N раз копий, взятых в количестве $M = N^3$ (см. рис. 3).

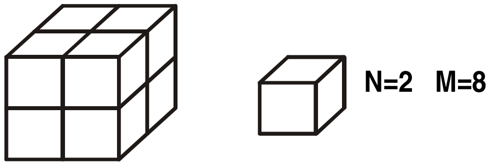


Рис. 3

Обобщим наши наблюдения. Итак, пусть у нас имеется некоторое самоподобное множество. Образуем от него копию, уменьшенную в N раз. Так как множество самоподобно, то его можно восстановить из M

полученных копий. Если M равно N, N^2 или N^3, то логично считать множество одно-, двух- или трехмерным соответственно, то есть принять в качестве размерности множества величину $\log_N M$, равную для отрезка 1, квадрата – 2, куба – 3.

Интересно, однако, что встречаются такие самоподобные множества, для которых M не равно целой степени N. Самым известным таким примером является классическое множество Кантора. Действительно, при сжатии множества Кантора в 3 раза оно уменьшается ровно вполовину. А раз множество Кантора можно составить из двух его копий, уменьшенных втрое, то, рассуждая последовательно, следует приписать ему размерность, равную $\log_3 2$.

Размерность, определенную для самоподобных множеств вышеописанным способом, мы будем называть размерностью самоподобия. Она может быть дробной. Упоминавшиеся выше примеры "монстров" также имеют нецелую размерность самоподобия. Например, первый ковер Серпинского имеет размерность $\log_2 3$, а второй ковер Серпинского – $\log_3 8$.

Интересный случай представляет кривая Коха L. Если ее уменьшить в три раза, то мы получим фрагмент исходной кривой. Нетрудно увидеть, что нужны четыре таких фрагмента для покрытия оригинала (см. рис. 4), причем некоторые из них приходится поворачивать. Копии, покрывающие исходную кривую, будут иметь общие точки только на их границах. Здесь следует уточнить, что под границами понимаются все точки, граничные в L.(Ясно, что на плоскости все точки кривой L и ее копий были бы граничными.)

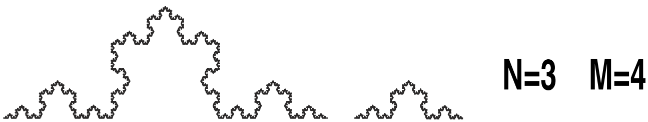


Рис. 4

Таким образом, кривая Коха также является самоподобным множеством и ее фрактальная размерность $d = \log_3 4$. Любопытно отметить, что кривую можно составить иным способом всего из двух копий, уменьшенных в $\sqrt{3}$ раз. Мы получим ту же размерность. Но может возникнуть вопрос: а нельзя ли построить такой удивительный самоподобный фрактал, который можно составить из своих уменьшенных копий двумя разными способами и получить при этом две различные фрактальные размерности? Исследования математиков последних ста с лишним лет дали много парадоксов, поэтому высказанное предположение не кажется совершенно невероятным.

Класс самоподобных множеств довольно узок. Среди фигур на плоскости, например, прямоугольники и треугольники самоподобны, а круги или, например, правильный шестиугольник не самоподобны. Однако понятие размерности самоподобия полезно для развития более общих подходов к понятию размерности. Дело в том, что самоподобные множества в теории фрактальных размерностей являются самыми простыми. Их размерность легко вычисляется, в некотором смысле самоочевидна и должна совпадать с более общими подходами к определению размерности, основанными на сопоставлении множества и его частей.

Таким более общим подходом явилось определение размерности Минковского. Пусть X – некоторое метрическое ограниченное пространство. Замкнутый шар радиуса δ с центром в точке q, то есть множество $\{x \in X|\rho(q,x) \leq \delta\}$, будем называть просто δ-шаром. Набор δ-шаров, объединение которых покрывает некоторое множество $G{\subseteq}X$, назовем шаровым δ-покрытием множества G. Минимальное число δ-шаров, покрывающих G, обозначим $n_\delta(G)$.

Как правило, при уменьшении δ число $n_\delta(G)$ растет. Идея размерности по Минковскому состоит в измерении скорости роста $n_\delta(G)$ в зависимости от убывания δ. Заметим, что для отрезка число $n_\delta(G)$ растет пропорционально величине $1/\delta$. Так же довольно очевидно, что для квадрата или другой обычной ограниченной плоской фигуры $n_\delta(G)$ растет квадратично по отношению к $1/\delta$. Предел скорости роста $n_\delta(G)$ при устремлении δ к нулю, если он существует, и принимается в качестве размерности множества G по Минковскому:

$$\dim{}_M G = \lim_{\delta\to 0} \log_{1/\delta} n_\delta(G) = \lim_{\delta\to 0} \frac{\ln n_\delta(G)}{-\ln \delta}.$$

Некоторая аналогия с размерностью самоподобия просматривается. Число $n_\delta(G)$ аналогично количеству фрагментов M, из которых составляется оригинал, а $1/\delta$ играет роль величины N. Правда, в размерности Минковского в качестве фрагментов берутся пересечения δ-шаров с G. Они не одинаковы и к тому же могут пересекаться не только в граничных точках. На скорость роста $n_\delta(G)$ это не оказывает влияния, зато определение применимо ко всем ограниченным метрическим пространствам. Размерность Минковского не всегда существует, но справедливо следующее очевидное утверждение.

Предложение. Пусть даны некоторые метрические множества A, B и C, причем $A{\subseteq}B{\subseteq}C$ и $\dim{}_M A = \dim{}_M C = d$. Тогда существует $\dim{}_M B = d$.

Поэтому из того, что квадрат двумерен по Минковскому, следует двумерность всех ограниченных плоских фигур, имеющих внутренние точки. Правда, большинство фракталов, представляющих известный интерес, внутренних точек не имеет.

Подсчитаем размерность Минковского у канторова множества K. Хорошо известно, что канторово множество при любом целом $n \geq 0$ полностью покрывается 2^n непересекающимися отрезками длины 3^{-n}, причем концы этих отрезков принадлежат K. Следовательно, при $\delta = \frac{1}{2\cdot 3^n}$ число $n_\delta(K) = 2^n$.Поэтому $\dim_M K = \lim\limits_{\delta\to 0} \frac{\ln 2^n}{\ln 2\cdot 3^n} = \frac{\ln 2}{\ln 3} = \log_3 2$.

Найдем теперь размерность Минковского для кривой Коха L. Множество L строится на плоскости путем образования последовательности ломаных L_n,, причем L_0 =[0,1] Каждая ломаная L_n состоит из 4^n звеньев с длиной, равной 3^{-n}. Концы звеньев также находятся на расстоянии не менее 3^{-n} друг от друга и при этом принадлежат самой кривой L. Значит, если $\delta = \frac{1}{2\cdot 3^n}$, то

$$n_\delta(L) \geq \frac{4^n}{2}, \tag{4}$$

поскольку никакой δ-шар не может покрыть более двух концевых точек звеньев L_n. Подчеркнем, что легко показать $n_\delta(L_n)$ =4^n, но нас интересует покрытие именно кривой. Оценим, насколько далеко могут находиться точки кривой L от ломаной L_0. Ясно, что любая точка ломаной L_1 находится от L_0 на расстоянии, не большем $\sqrt{3}/6$. Точки каждой следующей ломаной L_{n+1} удалены от L_n не более чем на $\sqrt{3}/(6\cdot 3^n)$. Следовательно, расстояние от любой точки кривой L до L_0 не превышает суммы всех этих расстояний, которая находится по формуле геометрической прогрессии и равна

$$\frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{3\cdot 2\sqrt{3}} + \frac{1}{3^2\cdot 2\sqrt{3}} + \ldots = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\frac{1}{1-1/3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4} < \frac{1}{2}.$$

Таким образом, шар единичного радиуса с центром в середине отрезка L_0 заведомо покрывает кривую L. В силу самоподобия кривой ее также покрывают 4^n шаров радиуса 3^{--n} с центрами в серединах звеньев ломаной L_n. Мы получили, что при $\delta = \frac{1}{2\cdot 3^n}$ справедлива оценка

$$n_{2\delta}(L) \leq 4^n. \tag{5}$$

Из (4) и (5) мы получаем оценку числа $\mathrm{n}_\delta(\mathrm{L})$ сверху и снизу:

$$\frac{4^n}{2} \leq n_\delta(L) \leq n_{2\delta/3}(L) \leq 4^{n+1}. \tag{6}$$

Так как $\lim\limits_{\delta\to 0}\frac{\ln(4^n/2)}{\ln(2\cdot 3^n)} = \lim\limits_{\delta\to 0}\frac{\ln 4^{n+1}}{\ln(2\cdot 3^n)} = \frac{\ln 4}{\ln 3}$, то из неравенств (6) следует, что $\dim_M L = \lim\limits_{\delta\to 0}\frac{\ln n_\delta(L)}{-\ln\delta} = \log_3 4$.

Итак, у множества Кантора и кривой Коха размерность Минковского совпадает с размерностью самоподобия. Однако иногда размерность по Минковскому дает результаты, не отвечающие здравому смыслу. Продемонстрируем это на следующем примере.

Рассмотрим на числовой прямой множество $D = \{0, 1, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \frac{1}{\sqrt[3]{3}}, \frac{1}{\sqrt[3]{4}}, \ldots\}$. Множество несамоподобно, поэтому размерности самоподобия у него нет. Оно линейно и вполне несвязно, поэтому $\dim_T D = 0$. Этот результат выглядит закономерным: слишком уж мало D. Посмотрим, чему равно $\dim_M D$.

Возьмем произвольное достаточно малое $\delta>0$. Обозначим через k_δ – наименьшее положительное натуральное число, удовлетворяющее неравенству $\frac{1}{\sqrt[3]{k_\delta-1}} - \frac{1}{\sqrt[3]{k_\delta}} < \delta$. Тогда имеет место неравенство

$$\frac{1}{\sqrt[3]{k_\delta}\cdot\sqrt[3]{k_\delta-1}\cdot(\sqrt[3]{k_\delta^2}+\sqrt[3]{k_\delta\cdot(k_\delta-1)}+\sqrt[3]{(k_\delta-1)^2}} < \delta.$$

Так как δ мало, то $\delta \approx \frac{1}{3\sqrt[3]{k_\delta^4}}$. Следовательно, $k_\delta \approx \frac{1}{\sqrt[4]{27\delta^3}}$. Для покрытия $k_\delta - 1$ точки $1, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \frac{1}{\sqrt[3]{3}}, \frac{1}{\sqrt[3]{4}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt[3]{k_\delta-1}}$ потребуется столько же δ-шаров. Для покрытия оставшихся точек множества D, лежащих на отрезке $\left[0, \frac{1}{\sqrt[3]{k_\delta}}\right]$, достаточно взять примерно $\frac{1}{2\delta\sqrt[3]{k_\delta}} = \frac{\sqrt[4]{3}}{2\sqrt[4]{\delta^3}}$ δ-шаров. Таким образом, число $n_\delta(D)$ находится в пределах

$$\frac{1}{\sqrt[4]{27\delta^3}} - 1 \le n_\delta(D) \le \frac{1}{\sqrt[4]{27\delta^3}} + \frac{\sqrt[4]{3}}{2\sqrt[4]{\delta^3}} + 1.$$

Верхняя и нижняя оценки числа $n_\delta(D)$ имеют одинаковый порядок роста, равный $O\left(\frac{1}{\delta^{3/4}}\right)$, поэтому $\dim_M D = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{\ln(n_\delta(D))}{-\ln\delta} = \frac{3}{4}$.

Итак, множество D – счетное, компактное, с единственной точкой накопления – по Минковскому оказалось “на 75% одномерным”. Это выглядит тем более странным на фоне канторова множества, которое несчетно и у которого все точки являются точками накопления (даже точками конденсации), но размерность по Минковскому равна всего лишь $\log_3 2 \approx 0{,}63$. Причина этого несоответствия видна из доказательства. О размерности множества M мы судим по росту числа $n_\delta(M)$,не учитывая, насколько эффективно δ-шары покрывают M. В покрытии D δ-шары в целом использовались неэффективно, многие из них покрывали всего по одной точке. В покрытиях канторова множества все шары работали эффективно, покрывая целиком маленькую его копию – множество *той же* размерности.

Еще яснее становится ограниченность определения Минковского, если рассмотреть Q – множество рациональных точек на отрезке [0,1]. Совершенно ясно, что $\dim_M Q = 1$. Ситуация оказывается сходна с тем, что получается при попытке измерить Q мерой Жордана. Точки множества Q очень сильно "перемешаны" с точками дополнения $[0,1] \setminus Q$. Поэтому δ-шары, не будучи в состоянии эффективно "отфильтровать" одно от другого, покрывают вместе с Q весь отрезок [0,1]. Его-то размерность мы и получаем в качестве $\dim_M Q$. Действуя по такому методу, мы легко можем построить счетные множества с размерностью Минковского, равной 2, 3, 4 и т.д. Примечательно, что размерность самоподобия для множества Q (а Q, разумеется, самоподобно) тоже равна 1. И это тоже выглядит странным.

В общем, определение размерности Минковского нуждается в усовершенствовании и таковым явилось определение размерности по Хаусдорфу (в некоторых публикациях она именуется размерностью Хаусдорфа-Безиковича). Усовершенствование в основном коснулось двух деталей. Во-первых, в определении Хаусдорфа множество покрывается не шарами, а замкнутыми областями ограниченного диаметра. Во-вторых и главных, множества покрытия могут быть разного диаметра, и поэтому покрытие может быть счетным.

Отметим, что шары не всегда удобны для построения покрытий. У любого шара должен быть центр. Иногда отсутствие в пространстве точки для подходящего центра увеличивает необходимое количество шаров в δ-покрытии. Рассмотрим в качестве примера обычную плоскость и на ней круг R единичного радиуса с центром в начале координат. Ясно, что $n_1(R)= 1$. Удалим теперь из круга R и из плоскости концентрический ему круг радиуса, например, 1/2. Полученное кольцо обозначим $R*$. Получается странная вещь: хотя $R \supset R^*$, но $n_1(R) < n_1(R*)= 3$. Мы удалили из плоскости точку (0,0), которую удобно было взять в качестве центра 1-шара, и вследствие этого необходимое для покрытия число 1-шаров увеличилось.

Итак, пусть дано ограниченное множество X (метрическое пространство) и его счетное δ-покрытие $\{J_n\}$. (Покрытие $\{J_n\}$ тоже будем называть δ-покрытием, если диаметры всех множеств J_n не превышают δ, то есть $|J_n| \leq \delta$.) Как измерить величину покрытия? Если множество X есть некоторое подмножество числовой оси, то вполне естественно в качестве величины покрытия взять сумму $\sum\limits_n |J_n|$, то есть его суммарную длину. По мере уменьшения δ количество элементов покрытия увеличивается, а величина покрытия (сумма диаметров) должна стремиться к некоторому пределу, предположительно, к мере Лебега множества X. Ситуация меняется, если X – плоское множество, например, равное квадрату на плоскости. Тогда величина покрытия более правильно будет характеризоваться суммой $\sum\limits_n |J_n|^2$. В общем случае естественно предположить, что величину покрытия следует оценивать суммами вида $\sum\limits_n |J_n|^d$ при некотором d (в дальнейшем суммы такого вида будем для краткости называть d-суммами). Причем число d зависит только от множества X и должно быть принято в качестве его размерности. Покажем, что такое особенное d всегда существует и единственно.

Для произвольных фиксированных чисел $d \geq 0$ и $\delta > 0$ введем обозначение $m_\delta^d X = \inf\left\{\sum\limits_n |J_n|^d\right\}$, где инфимум берется по всем счетным δ-покрытиям множества X. Обозначим далее $m^d X = \lim\limits_{\delta\to 0} m_\delta^d X$, этот предел существует, поскольку класс δ-покрытий сужается при уменьшении δ, а инфимумы $m_\delta^d X$ не убывают. При целых d число $m^d X$ напоминает d-мерную меру Лебега множества X, а при d=1 даже совпадает с ней. Поэтому назовем его d-мерной мерой Хаусдорфа множества X. Мера $m^d X$ может быть бесконечной.

Предположим, что при некотором d мера $m^d X = \ < \infty$. Это значит, что для любых сколь угодно малых δ,$\varepsilon > 0$ найдется δ-покрытие, для которого $\sum\limits_n |J_n|^d < C + \varepsilon$. Возьмем некоторое число $s > d$. Тогда имеем

$$\sum_n |J_n|^s = \sum_n |J_n|^d \cdot |J_n|^{s-d} \leq \delta^{s-d} \sum_n |J_n|^d \leq \delta^{s-d}(C+\varepsilon) \qquad (7)$$

Устремляя δ к нулю, получаем из (7), что $m^s X = 0$.

Предположим теперь, что при некотором d мера $m^d X > 0$. Тогда для любого $s < d$ будет $m^s X = \infty$, иначе из предыдущего рассуждения следовало бы $m^d X = 0$, что противоречит сделанному предположению.

Таким образом, для любого множества X возможна одна из трех следующих ситуаций:

1). Существует число d >0 такое, что для всех $s > d$ мера $m^s X = 0$, а для всех $s < d$ будет $m^s X = \infty$. В этом случае положим по определению размерность Хаусдорфа множества X равной $\dim_H X = d$.

2). Для всех d мера $m^d X = \infty$. Тогда положим по определению $\dim_H X = \infty$.

3). Для всех чисел d >0 мера $m^d X = 0$. В этом случае положим $\dim_H X = 0$.

Итак, размерность Хаусдорфа равна тому критическому значению d, при котором инфимумы d-сумм по δ-покрытиям с любым наперед заданным $\delta>0$ меняют свое значение с бесконечности на нуль. Данным определением обычно трудно пользоваться напрямую. Например, для круга на плоскости весьма трудно, если вообще возможно, показать, что инфимумы d-сумм меняют свое значение при $d = 2$. В этом нас убеждает рис. 5. Как видим, причина заключается в практически необозримом множестве даже шаровых δ-покрытий и сложности оценки соответствующих им d-сумм. Отчасти преодолеть трудности, связанные с вычислением размерности Хаусдорфа, помогает ряд простых следствий.

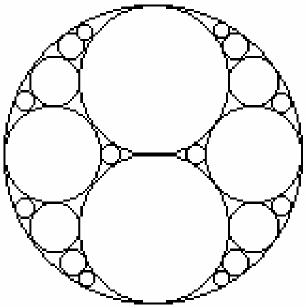


Рис. 5

Следствие 1. *Если для некоторого* d *мера* $m^d X$ *положительна и конечна, то* $\dim_H X = d$.

Таким образом, отрезок [0,1] одномерен по Хаусдорфу. Действительно, из теории меры Лебега вытекает, что $\mathrm{m}^1[0{,}1] = 1$. Аналогично можно заключить, что у любого n-мерного (в обычном декартовом смысле) параллелепипеда хаусдорфова размерность также равна n.

Следствие 2. *Если множество* X *не более чем счетно, то* $\dim_H X = 0$.

Действительно, пусть $X = \{x_j\}$. Тогда для любых фиксированных чисел $d > 0$, $\varepsilon>0$ накроем каждую точку x_j множеством диаметра не больше $\left(\frac{\varepsilon}{2^j}\right)^{1/d}$. Очевидно, d-сумма по полученному ε-покрытию не превосходит ε. В силу произвольности ε мера $m^d X = 0$. В силу произвольности d размерность $\dim_H \mathrm{X} = 0$. Таким образом, множества D и Q, рассмотренные выше, нульмерны по Хаусдорфу.

Следствие 3. *Если* $A \subseteq B$, *то* $\dim_H A \leq \dim_H B$.

Отсюда следует, что для любого ограниченного в $\boldsymbol{R}^n$ множества A имеет $\dim_H A \le n$, а любое множество B, содержащее в себе декартов n-мерный параллелепипед, имеет размерность Хаусдорфа $\dim_H B \ge n$. В частности, круг двумерен по Хаусдорфу.

К этому можно добавить два важных свойства хаусдорфовой размерности, которые хотя и несложно доказываются, все же не столь очевидны.

Свойство 1. *Для любого ограниченного X справедливо неравенство $\dim_H X \le \dim_M X$, если только размерность $\dim_M X$ существует.*

Как уже отмечалось выше, топологическая размерность инвариантна относительно гомеоморфных отображений. Хаусдорфова размерность таким свойством не обладает. Однако она сохраняется при гомеоморфизме с, так сказать, ограниченной деформацией, а именно при билипшицевых отображениях. Это и более сильные свойства можно найти в [8].

Свойство 2. *Пусть имеется отображение f метрического пространства (X,ρ_X) на метрическое пространство (Y,ρ_Y) и существуют два положительных числа C_1, C_2 такие, что для любых точек $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$ справедливо неравенство $C_1 \le \frac{\rho_Y(f(x_1),f(x_2))}{\rho_X(x_1,x_2)} \le C_2$. Тогда $\dim_H X = \dim_H Y$.*

Это свойство позволяет определять размерность Хаусдорфа для n-мерных гладких многообразий.

Может показаться, что сформулированные свойства и следствия позволяют определять $\dim_H$ в основном без непосредственного применения определения размерности. Это не совсем так. Если множество X, так сказать, обычное, какие сплошь и рядом встречаются в аналитических дисциплинах, то $\dim_H X$ устанавливается легко и быстро. Если же X фрактально, то определение $\dim_H X$ довольно трудоемко, поскольку множество X трудно сопоставить с каким-либо другим множеством известной размерности. Счастливое исключение среди фракталов являют самоподобные множества. Самоподобное X можно сравнить с самим собой. Покажем это на примере канторова множества.

Пусть имеется некоторое δ-покрытие $\{J_n\}$ канторова множества K, для которого $\sum\limits_n |J_n|^d = C < \infty$. В качестве такового можно взять отрезок [0,1], являющийся 1-покрытием с $d-$суммой, равной 1, независимо от d. Уменьшим данное покрытие в 3 раза, при этом получится система множеств, покрывающая половину множества K. Покроем вторую половину K получившимся покрытием, перенесенным по числовой оси на $2/3$ вправо. Повторим этот процесс k раз. В результате мы получим $3^{-k}\delta$-покрытие с d-суммой, равной $2^k \sum\limits_n \left|\frac{J_n}{3^k}\right|^d = 2^k \left(\frac{1}{3^k}\right)^d \sum\limits_n |J_n|^d = 2^k \left(\frac{1}{3^k}\right)^d C$.

Следовательно, при $d \geq \log_3 2$ мы можем получить как угодно мелкое покрытие с d-суммой, не превышающей C. Отсюда следует, что при $d \geq \log_3 2$ все d-меры $m^d K \leq C$ и $\dim_H K \leq \log_3 2$. Эту оценку мы получили, воспользовавшись самоподобием K. Вывод точного равенства $\dim_H K = \log_3 2$ более сложен, его можно найти в [9].

Аналогично можно установить, что размерность кривой Коха $\dim_H L = \log_3 4$. То, что размерность L именно такова, нам подсказала размерность Минковского. Последняя вычисляется гораздо проще. Поэтому на практике часто вместо размерности Хаусдорфа находят размерность Минковского в надежде, что их значения совпадут. Однако неясно, как установить равенство $\dim_H X = \dim_M X$ для произвольного X без вычисления $\dim_H X$ непосредственно.

В заключение еще раз сопоставим топологическую и хаусдорфову размерности. Первая инвариантна относительно гомеоморфных отображений и всегда целочисленна. Отрезок прямой и кривая Коха гомеоморфны, следовательно, топологически эквивалентны. Поэтому топологическая размерность у них одинакова. Однако между отрезком и кривой Коха нельзя установить билипшицев гомеоморфизм. Поэтому их хаусдорфова размерность может не совпасть. Для кривой Коха она больше и к тому же дробная. Возможно, это дало повод ряду авторов охарактеризовать хаусдорфову размерность по отношению к топологической как "более тонкую" (например, [8, 9]). Эта характеристика, как нам представляется, не отражает сути дела.

Чтобы это показать, возьмем пятимерное канторово множество $K^5 = K \times K \times K \times K \times K$. Множество K^5 самоподобно, и его размерность самоподобия равна $\log_3 32 > 3$. Рассуждая аналогично [7], можно показать, что $\dim_H K^5 = 5 \cdot \log_3 2$. В то же время K^5 – дисконтинуум, $\dim_T K^5 = 0$ [2,6]. В то же время отрезок одномерен, $\dim_T[0,1] = \dim_H[0,1] = 1$, это отправной пункт всех обобщений размерности. Неравенство $\dim_T K^5 < \dim_T[0,1]$ подкрепляется тем фактом, что множество K^5 можно гомеоморфно погрузить в отрезок [0,1], а наоборот нельзя, поскольку K^5 вполне не связно. Но почему тогда $\dim_H K^5 > \dim_H[0,1]$? Смысл неравенства непосредственно раскрывается в идее самоподобия. Отрезок может быть покрыт 3 своими копиями, уменьшенными в 3 раза. Множество же K^5 состоит из 32 таких же копий. Даже куб $[0,1]^3$ можно покрыть всего лишь 27 аналогичными копиями, поэтому K^5 более чем трехмерно.

Данный пример показывает: дело не в том, что размерность Хаусдорфа "тоньше" топологической, а в том, что в них заложены разные идеи обобщения размерности и они обобщают разные свойства классического пространства $\boldsymbol{R}^n$.

Библиографический список

1. *Азиевич А.И.* Фракталы: геометрия и искусство // Математика в школе, 2005. № 4.
2. *Александров П.С.* Введение в теорию множеств и общую топологию. М.: Наука, 1977. 368 с.
3. *Божокин С.В., Паршин Д.А.* Фракталы и мультифракталы. М.-Ижевск, 2001. 128 с.
4. *Дидков А.*В. Команды на LOGO конструируют фракталы // Математика в школе. 2005. № 4.
5. *Кроновер Р.* Фракталы и хаос в динамических системах. М.: Постмаркет, 2000. 350 с.
6. *Куратовский К.* Топология. Т. 1. М.: Мир, 1966. 595 с.
7. *Шредер Н.* Фракталы, хаос, степенные законы. М.-Ижевск, 2001. 528 с.
8. *Мандельброт Б.* Фрактальная геометрия природы. М.: Институт компьютерных исследований, 2002. 656 с.
9. *Морозов А.Д.* Введение в теорию фракталов. М.-Ижевск, 2002. 159 с.
10. *Пайтген Х.-О., Рихтер П.Х.* Красота фракталов. М.: Мир, 1993. 176 с.
11. *Секованов В.С.* Формирование креативной личности студента вуза при обучении математике на основе новых информационных технологий. Кострома: КГУ, 2004. 231 с.
12. *Секованов В.С.* Элементы теории фрактальных множеств. Кострома: КГУ, 2005. 135 с.
13. *Тимофеев Е.А.* Введение в мультифрактальный анализ. Ярославль, 1999. 40 с.

Комплексы профессионально-ориентированных задач в обучении математике будущего инженера

Н.В. Скоробогатова

Математическая подготовка будущих инженеров, включая в себя традиционные теоретические разделы: линейную и векторную алгебру, основы аналитической геометрии, дифференциальное и интегральное исчисление, теорию поля, дискретную математику, элементы гармонического и функционального анализа, теорию вероятностей и математическую статистику, и опираясь на хорошо отработанную методику преподавания в рамках знаниевой парадигмы, далеко не всегда удовлетворяет требованиям практики и потому остро нуждается в модернизации и переходе к личностно-ориентированной парадигме в рамках деятельностного и компетентностного подходов посредством включения в себя задач прикладной направленности, приводящих к наглядному моделированию.

Несомненным заблуждением является не так уж редко встречающееся мнение, что залог решения проблемы математического образования прикладников заключается только лишь в улучшении качества чтения математических лекций и более продуманной организации практических занятий. На самом деле, крайне важен комплексный подход, направленный на формирование профессиональных компетенций будущего инженера.

Выпускающие кафедры в конечном итоге определяют место и роль математики в общем плане подготовки инженера. Разумеется, с математических кафедр при этом не снимается ответственность и забота о судьбе прочитанных ими общих разделов. Математики должны так строить курсы, чтобы они могли быть применены в общих и специальных дисциплинах, знать, где применение возможно, и требовать этого применения. Таким образом, студент в течение всего периода обучения должен заниматься математикой и быть в поле зрения кафедры математики. Составление планов непрерывной математической подготовки охватывает целый комплекс методических проблем преподавания математики в вузе.

Исследование начинается с определения *квалификационной характеристики*, перечня требований к специалисту соответствующего профиля, к его знаниям, умениям в области математики. При составлении такой характеристики, в частности, необходимо четкое представление о том, какие разделы будут особенно нужны выпускнику в будущей профессиональной деятельности , а какие носят фундаментальный характер, практически не будут использоваться (их роль в нахождении взаимодействий с другими науками, в развитии личностных качеств будущего инженера, в повышении математической культуры) – и все это с учетом перспективы развития опыта и личностных характеристик будущего специалиста.

Составление квалификационной характеристики (или профессиональных компетенций в области математики) – очень трудная задача. Дело в том, что в одной и той же группе инженерного вуза обучаются как будущие конструкторы-разработчики, так и эксплуатационники, управленцы, научные работники. “Много и разнообразной математики”

– так формулируют свои запросы будущие научные работники. Ряд дополнительных математических сведений (по отношению к действующей программе) необходим конструкторам. Что же касается управленцев, то принято считать, что им особо математика не нужна. Однако анализ эмпирических данных исследования показывает, что на самом деле им нужна "другая" математика, часто вообще не излагающаяся в вузах и связанная с теорией исследования операций, с математической статистикой и т.п.

Теоретический анализ содержания обучения математике показывает, что существует определенный состав тем, необходимый для успешной работы всем перечисленным типам инженеров, он не очень велик. Добавив разделы, необходимые для успешного изучения общеобразовательных, общетехнических и профилирующих дисциплин, мы получим информационное ядро математической подготовки инженера, основу для определения того минимума понимания + знаний + умений, который обеспечивает **первый** уровень математической подготовки студента.

Анализ потребностей в математическом аппарате для занятий научно-исследовательской работой на кафедрах позволяет определить полезные для любознательных студентов разделы математики и обеспечить их изучение в курсе математики или вне его, добиваясь **второго** уровня математической подготовки.

Если студент уже на младших курсах четко представляет, каким именно инженером он хочет стать, чем заниматься, создаются условия для его дополнительной математической подготовки, соответствующему типу инженерной деятельности. Этот **третий** уровень математической подготовки обеспечивается дополнительной работой при математической и профилирующих кафедрах, а также через самообразование и стимулирование творческой активности студентов.

Ясно, что для успешной работы математическая кафедра должна знать, какие именно разделы, навыки соответствуют каждому уровню математической подготовки для каждого факультета, для каждой специальности. К сожалению, большинство задач в курсе высшей математики для студентов инженерных специальностей имеет абстрактный характер, в связи с чем характерна:

– слабая мотивация у студентов к изучению математики,

– неумение применять математический аппарат для моделирования реальных природных процессов.

Поэтому в процессе обучения математике необходимо учитывать и формировать следующие профессионально-ориентированных качества:

1. Способность будущего инженера наглядно моделировать, т.е. вскрывать сущность реальных явлений и процессов через конструирование наглядных моделей в условиях мотивации и поисковой активности.

2. Умение будущего инженера проектировать, обосновывать и принимать решения в исследовании профессиональных задач на основе использования математических знаний и аппарата в условиях неопределенности и выбора.

Инженерно ориентированное преподавание математики является одним из важнейших моментов мотивации при изучении высшей математики студентами технического вуза. Эффективное функционирование системы задач в качестве средства обучения математике является необходимым условием повышения качества образования, формирования математического мышления и качеств, присущих творческой личности.

В связи с вышесказанным предлагается комплекс профессионально-ориентированных задач с использованием методики ресурсного урока на занятиях по высшей математике. Это означает, что часть занятий посвящена рассмотрению профессионально-ориентированных задач для инженера с использованием технологий наглядного моделирования и ресурсного взаимодействия в процессе освоения математической деятельности.

Этапы технологии проведения ресурсного занятия:

1. Актуализация математических знаний и ресурсного материала.

2. Постановка профессиональной проблемы.

3. Конструирование концептуальной, физической (естественно-научной) и математической модели, а также проектирование процедуры решения методом наглядного моделирования.

4. Интеграция моделей в единое целое процессуальных, содержательных и результативных составляющих.

5. Организация социального взаимодействия студентов в малых группах. Презентация, рефлексия, анализ и коррекция результатов.

В качестве примера рассмотрим следующую задачу.

Задача. Металлическая болванка, нагретая до 420°C, охлаждается в воздухе, температура которого 20°C. Через 15 минут после начала охлаждения температура детали понизилась до 120°C. Определить температуру болванки через 30 минут охлаждения, считая, что скорость охлаждения пропорциональна разности между температурой тела и температурой воздуха.

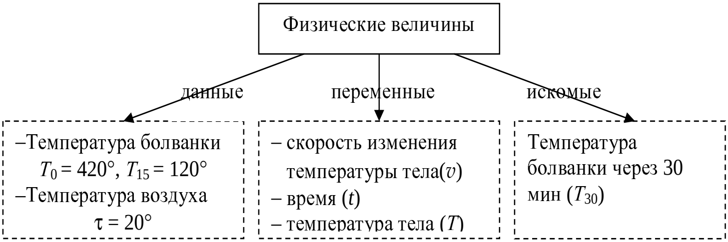
Концептуальная модель

Величины	Входящие	T_0, T_{15}, τ
	Обрабатываемые	t, T, v, k
	Выходящие	T_{30}
Законы	Охлаждение	Теплота – от горячего к холодному
	Скорость охлаждения	$v = -k\Delta T$
Результат	Система единиц	$^\circ$C
	Формат, точность	Десятичное число T_{30}, до 10^{-4}
	Значение	$T_{30} = 45^\circ$C

Математическая модель

Величины	Входящие	T_0, T_{15}, τ
	Обрабатываемые	t, T, v, k
	Выходящие	T_{30}
	ДУ 1 порядка	$dT/dt = -k(T - \tau)$
Уравнения	СЛАУ 2	$\{$, k
	Функция	$T = T(t)$
Результат	Система единиц	$^\circ$C
	Формат, точность ε	Десятичное число T_{30}, $\varepsilon = 10^{-4}$
	Значение	$T_{30} = 45,0000$

Физическая модель



Физический процесс: изменение температуры с течением времени T(t_0)

Физический закон: $v = -k\,(T - \tau)$.

Процедура решения

Составить дифференциальное уравнение 1-го порядка

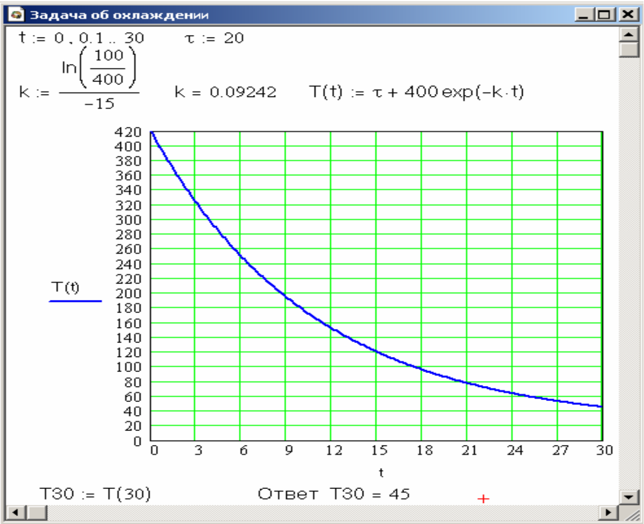
Найти постоянную C

Найти коэффициент пропорциональности k

Составить функцию изменения температуры тела $T(t)$

Найти значение функции при $t = 30$ мин.

Наглядное моделирование результатов



Библиографический список

1. *Смирнов Е.И.* Технология наглядно-модельного обучения математике. Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 1997. 327 с.

Особенности изучения информатики как второй специальности в педагогическом вузе

Е.Ю. Жохова, П.А. Корнилов

В этой работе нам хочется коснуться двух основных, на наш взгляд, проблем. Первая из них касается связи обучения информатике как второй специальности с обучением тех же студентов дисциплинам основной специальности. Вторая проблема связана с тем, что содержание стандарта образования, соответственно и требования к выпускникам на государственных экзаменах одинаковые, а число часов, отводимое на изучение дисциплин предметного блока, отличается более чем вдвое для основной и дополнительной специальностей. Забегая вперед, скажем, что успешное решение первой проблемы в значительной мере обеспечивает и решение второй из них.

В Ярославском государственном педагогическом университете информатика как вторая специальность изучается при подготовке учителей математики, физики и истории. Была попытка ввести вторую специальность "информатика" на филологическом факультете, но она провалилась на этапе создания учебного плана. Сама подготовка по второй специальности до недавнего времени была устроена на физико-математическом факультете следующим образом: будущие учителя одной специальности учились до третьего курса все вместе, а после третьего курса происходило их деление на подгруппы по выбираемой второй специальности. Чтобы в наполняемости подгрупп не было перекосов, сначала совет факультета устанавливал квоты на различные вторые специальности, затем деканат собирал заявления у студентов, где они указывали по две вторых специальности в порядке их приоритета, а затем выпускающие кафедры отбирали себе студентов в порядке убывания конкурса. У историков, а с 2005 года и у физиков, набор на первый курс происходит сразу на двойную специальность "История с информатикой" и "Физика с информатикой".

Суммируя вышесказанное, отметим, что есть две схемы изучения второй специальности – в течение всех пяти лет или на двух последних курсах. Если сравнивать их между собой, то преимуществами первой схемы является то, что, уже будучи абитуриентом, учащийся сориентирован на изучение дисциплин, относящихся к информатике, как "основных". Хотя, конечно, нередки случаи, когда школьник за словом "информатика" представляет совсем не то, что его ждет при обучении. Вторым плюсом первого подхода является систематичность обучения дисциплинам второй специальности по сравнению с погружением в информатику на старших курсах. Заметно меньше проблем при таком подходе и с организацией педагогической практики по информатике. Но главным, на взгляд авторов, плюсом первого подхода является возможность взаимного обогащения получаемых знаний за счет междисциплинарных связей между дисциплинами основной и дополнительной специальности, поскольку при изучении второй специальности на старших курсах обычно обучение дисциплинам предметного блока основной специальности уже практически завершено. Тем самым, специальности воспринимаются студентами отдельно друг от друга. Справедливости ради, следует отметить и плюсы второго подхода. Так, сам выбор второй специальности происходит намного осознаннее, поскольку за три года обучения на одном факультете студенты, общаясь, узнают много о каждой специальности и выбирают наиболее подходящую для себя. Вторым плюсом, если разговор идет об информатике, является возможность отбора наиболее одаренных студентов из числа математиков и физиков, поскольку популярность информатики обеспечивает нам, как правило, право первого выбора студентов. Но все же именно плюсы первого подхода и привели к тому, что у физиков теперь вторая специальность, информатика, изучается с самого начала.

В обучении информатике можно выделить три основных направлении: пользовательское, алгоритмическое и теоретическое. Понятно, что для качественной подготовки все три части должны быть сбалансированы. Между тем, несмотря на стандарт образования, практика обучения информатике в обычных школах явно делает основной акцент на изучение пользовательской части. Возможно, учителя рассуждают примерно так: умение грамотно использовать возможности компьютера пригодится подавляющему большинству учеников в будущем, да и учить этому всех намного проще. А программировать и тем более осознавать теоретическую основу происходящего дано не каждому. Логика здесь, конечно, есть, но при этом информатика из наук, способных в значительной мере определять мировоззрение учеников, развивать структурное мышление, учить их систематизировать и обобщать, переходит в разряд чисто практических дисциплин. При обеднении алгоритмической линии страдает четкость и конкретность мышления, умение спланировать решение задачи и реализовать его полностью, предусмотрев все возможные варианты и мелочи. Разумеется, все перечисленные качества крайне ценны в любой отрасли человеческой деятельности.

В соответствии со сказанным выше нам приходится бороться с перекосом в подготовке выпускников школ, начиная с первого курса. При этом оказывается, что наши информатики, например, испытывают на первом курсе значительные сложности в изучении дисциплин предметного блока и "теряют в весе" за первый год до 35 процентов. И это несмотря на то, что в рамках действующей на первом и втором курсе балльно-рейтинговой системы мы исходим из минимальной базовой подготовки абитуриентов и в значительной мере облегчаем им учебу за счет большого количества учебных и контрольных мероприятий, направленных на организацию их систематической работы. Как ни странно, данный перекос легче всего преодолевается не при подготовке учителей информатики по первой специальности, а при подготовке учителей математики по второй специальности "информатика". Видимо, к концу изучения дисциплин предметного блока по математике они (особенно отобранные нами), имея хорошую математическую базу и развитое абстрактное мышление, легко воспринимают дисциплины теоретического раздела информатики, да и алгоритмическую часть курса им легко воспринимать после решения большого количества различных математических задач. В результате они, конечно, имеют меньший кругозор в пользовательской части курса и заметно меньшие навыки в программировании на различных языках, но за счет сбалансированной подготовки практически все могут успешно работать учителями информатики, и многие так и работают, совмещая преподавание математики и информатики. Хочется отметить, что большинство учителей информатики высшей категории в нашей области имеют как раз математическое основное образование.

У физиков, видимо в силу более конкретного мышления, меньше проблем с пользовательской частью курса и алгоритмической линией. В большинстве своем они хорошо воспринимают дисциплины типа компьютерное моделирование, информационные системы, численные методы, исследование операций. Однако курсы теоретических основ информатики, теории алгоритмов, основ искусственного интеллекта даются им с трудом, и за два последних курса они обычно не успевают достигнуть нужной глубины понимания теоретической части информатики. Отчасти из-за этого мы и перешли к изучению информатики у физиков в течение всех пяти лет. Практика показывает, что те из выпускников специальности "физика", кто после университета работают учителями информатики, делают это также весьма успешно.

Особенно остро проблема перекоса в подготовке стоит, естественно, у историков. Следует признать, что средний уровень их математической подготовки весьма низок, что не позволяет дотянуть теоретическую подготовку до желаемого уровня. В алгоритмической подготовке они тоже сталкиваются с определенными проблемами, но практически все достигают необходимого уровня. При этом спектр языков программирования, с которыми они знакомятся, не уступает другим специальностям (Паскаль, Delphi, Пролог, HTML и подобные ему языки). Пользовательская подготовка дается им, может быть, даже легче, чем математикам и физикам. Они быстро осваивают новые программные среды, видят возможности их применения, в том числе в своем предмете. Здесь нам неоценимую помощь оказывают преподаватели истории. Многие из них хорошо владеют персональным компьютером и при изучении своих предметов передают нужные навыки студентам, а те с удовольствием применяют изученный в рамках второй специальности материал для более качественной подготовки по основной специальности. Пока у нас был только один выпуск по специальности “История с информатикой”, и учителями истории пошли работать меньше студентов, чем в фирмы и банки, то есть по второй специальности. К сожалению, никто из них не работает учителем информатики, поэтому трудно оценить результаты обучения. По всей видимости, работая в качестве учителей информатики, они все же будут способствовать развитию у своих учеников того перекоса в подготовке, о котором речь шла выше, но итоги государственного экзамена по информатике и методике ее преподавания у первого выпуска историков были очень хорошие.

В заключение хочется отметить некоторые детали учебной деятельности, способствующие интеграции предметной подготовки студентов по основной и дополнительной специальности. Так, при изучении программирования мы даем много задач с математическим (физическим и даже немного историческим) содержанием. При изучении и создании собственных баз данных, презентаций, возможностей создания тестов, оформлению HTML-страниц, статистических исследований, моделей явлений или процессов обязательным условием является то, чтобы тематика их была по основной специальности, причем обычно мы просим выбрать что-нибудь из изучаемых в данный момент разделов основной специальности. Преподаватели основной специальности в обязательном порядке требуют оформления курсовых и дипломных работ, итогов педагогической практики и т.п. с использованием различных программных сред, изученных на занятиях по информатике. При этом выбор программных сред или языков программирования обычно не регламентируется. У историков в рамках изучения курса методики преподавания информатики нами разработан небольшой фрагмент изучения темы “структуры данных” (таблицы, списки, деревья, графы) на историческом материале. У математиков уже в течение ряда лет используется “геометрический конструктор” на стыке программирования (для изучения процедур, функций и работы с готовыми библиотеками программ) и аналитической геометрии. В таком же виде разработана и тема “многочлены”.

Суммируя все вышесказанное, видим, что:

• изучение информатики как второй специальности лучше вести непрерывно с первого по пятый курс;

• подготовку по всем трем основным направлениям информатики следует вести как можно более сбалансированно, пусть даже и с некоторым снижением среднего уровня подготовки;

• изучение основной и дополнительной специальности должно проходить совместно, взаимно обогащая друг друга, для чего необходимы тесные контакты в работе преподавателей обеих специальностей;

• проблема недостатка часов теряет остроту, когда часть отработки нужных навыков переходит в подготовку по основной специальности;

• мотивация обучения студентов, особенно внутренняя, при таком подходе к организации учебного процесса заметно усиливается, что положительно сказывается на его результатах.

Обучение школьников решению уравнений и неравенств с параметром графическим методом

Э.С. Беляева, А.С. Потапов, С.А. Титоренко

Графический метод – один из важных методов решения уравнений и неравенств, в том числе и с параметром.

В отличие от других абстрактных понятий понятие “функция” достаточно наглядно, чтобы его формирование осуществлять с опорой на образное мышление. Наглядность графика позволяет уяснить суть свойств функции, решения уравнения или неравенства, установить взаимосвязь между доступной для учащихся графической информацией и ее аналитическим представлением.

Однако использование графического метода предполагает как глубокое знание “азбуки” элементарных функций и овладение умением выполнять различные преобразования графиков функций, так и сформированность навыков решения основных видов уравнений и неравенств школьного курса математики. Поэтому необходима целенаправленная работа по обучению школьников решению уравнений и неравенств с параметром графическим методом. Она должна вестись одновременно по нескольким направлениям.

I. Знакомство с графиками функций, содержащими параметр

В рамках функциональной содержательно-методической линии учащимся при изучении отдельных видов функций предлагаются задания на построение графиков и исследование соответствующих функций с параметром. Приведем примеры.

1. Тема “Линейная функция”

Задания

№ 1. Постройте графики функций:
а) $y = 2x$, $y = ax$, $y = a\,|x|$; б) $y = x + 2$, $y = x + 2a - 1$, $y = |x| + a$;
в) $y = ax + 1$, $y = -2x + a$, $y = 3\,|x| + a$.

Необходимо разъяснять школьникам, что, например, $y = ax$ задает семейство прямых, проходящих через начало координат.

Выясняется влияние параметра на расположение графика функции $y = ax$. Если $a = 0$, то $y = 0$ – ось x. Если $a > 0$, то график расположен в I и III координатных четвертях. Если $a < 0$, то во II и IV.

№ 2. Изобразите графики функций $y = ax$ при $a = 1$, $a = -2$.

№ 3. Определите значение параметра , если известно, что точка $(1; -3)$ принадлежит графику функции $y = ax$.

№ 4. Выясните, при каком значении параметра прямая $y = ax$ параллельна прямой $y = 5x - 1$.

№ 5. При каких значениях параметра графики функции $y = 3\,|x| + a$ и $y = 1$ пересекаются; не пересекаются?

№ 6. При каких значениях графики функций $y = 3\,|x| + a$ и $y = 0$ пересекаются в одной точке, в двух точках?

№ 7. При каких значениях параметра график функции $y = x + 2a - 1$ пересекает ось Ox в точке с положительной абсциссой?

2. Тема “Квадратичная функция”

Задания

№ 1. Постройте графики функций:
а) $y = x^2$, $y = x^2 + 3a$, $y = ax^2$, $(a \neq 0)$;
б) $y = x^2 - 4x$, $y = \left|x^2 - 4x\right|$, $y = x^2 - 4\,|x|$, $y = \left|x^2 - 4\,|x|\right|$;
в) $y = x^2 - ax$, $y = ax^2 - 4$, $(a \neq 0)$; $y = ax^2 - 4x$, $(a \neq 0)$;
г) $y = \left|x^2 - ax\right|$, $y = x^2 - a\,|x|$, $y = \left|x^2 - a\,|x|\right|$.

№ 2. При каких значениях параметра график функции $y = x^2 + 3a$ пересекает ось Ox в двух точках?

№ 3. При каких значениях параметра уравнение $ax^2 = 2$ имеет решения? Найдите их при $a = 2$.

№ 4. Могут ли графики функций $y = x^2+3a$ и $y = ax^2$ не пересекаться? Изобразите разные случаи их взаимного расположения и укажите соответствующие значения параметра .

№ 5. Определите координаты вершины параболы $y = x^2 - ax$. При каких значениях параметра прямая $y = a$ и парабола не пересекаются; пересекаются в одной точке; пересекаются в двух точках?

№ 6. Сколько корней в зависимости от значений параметра имеет уравнение $x^2 - a\,|x| = 0$?

Аналогичные задания и вопросы предполагаются и при изучении других видов элементарных функций.

II. Графическая иллюстрация ответа

Связь между переменной и параметром можно показать в системе координат (aOx).

1. Решите неравенство $(x-1)(x-a) > 0$.

Решение. Данное неравенство легко решается методом интервалов.

Ответ: 1) если $a < 1$, то $x \in (-\infty; a) \cup (1; +\infty)$;

2) если $a = 1$, то $x \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$; 3) если $a > 1$, то $x \in (-\infty; 1) \cup (a; +\infty)$.

Проиллюстрируем ответ в системе координат (aOx).

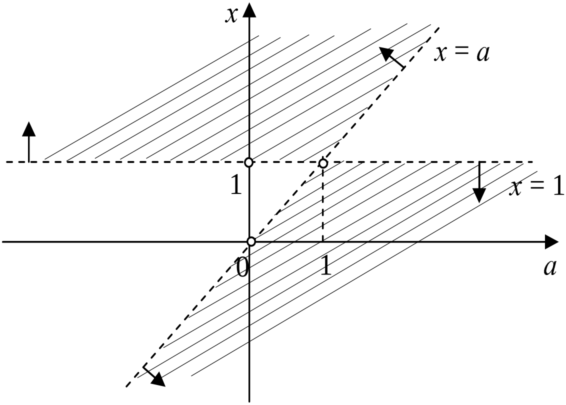


Рис. 1

Примерные вопросы по рис. 1

1. Назовите множество решений неравенства при $a = 3; -1; 0; 0,5$.

2. Укажите только положительные (отрицательные) решения при $a = 2; -2$.

3. При каких значениях a $x = 1; 0$ будут решениями неравенства?

4. При каких значениях a $x = 2; -2$ будут решениями неравенства?

5. При каких значениях a $x \in [2; 5]$ удовлетворяет неравенству? (ответ: $a < 2$).

6. При каких значениях a $x \in [-2; -1]$ удовлетворяет неравенству? (ответ: $a > -1$.)

Приведенный выше ответ решения неравенства удобно показывать на координатной прямой параметра a (оси ответа).

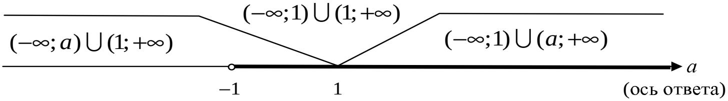
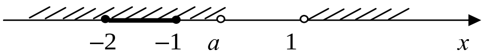


Рис. 2

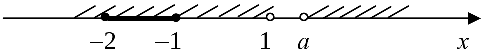
Заполнение оси ответа осуществляется в процессе аналитического решения (поэтапно). На все выше сформулированные вопросы можно ответить и с помощью оси ответа.

Рассмотрим вопрос 6.

1) Легко видеть, что $a = 1$ нас устраивает, т.к. $[-2; -1] \subset (-\infty; 1)$.



2) Пусть $a < 1$:



В этом случае $a > -1$, т.е. $a \in (-1; 1)$.

3) $a > 1 : [-2; -1] \subset (-\infty; 1)$.

Объединив полученные множества значений a, имеем, что $a \in (-1; +\infty)$ (см. рис. 2).

III. Обучение решению уравнений и неравенств с параметром графическим методом

При решении со школьниками линейных уравнений и неравенств с параметром на начальном этапе обучения мы отдаем предпочтение аналитическому методу как более алгоритмизированному и доступному учащимся. Кроме того, мы считаем целесообразным начинать решение задач с параметром уже в курсе алгебры 7–8 классов, а функциональных знаний у школьников к этому времени еще недостаточно для решения сложных заданий.

Однако при решении линейных уравнений с модулем и параметром графический метод зачастую оказывается более простым и рациональным. Поэтому в содержание занятий включаются уравнения, которые сначала решаются аналитически, а затем графически.

№ 1. Решите уравнение $|x| = ax$.

Решение. О.О.У. $\begin{cases} a \in R, \\ x \in R. \end{cases}$

Решаем графически в системе координат (xOy). Строим сначала график функции $y = |x|$. Уравнение $y = ax$ задает пучок прямых с центром в начале координат (рис. 3).

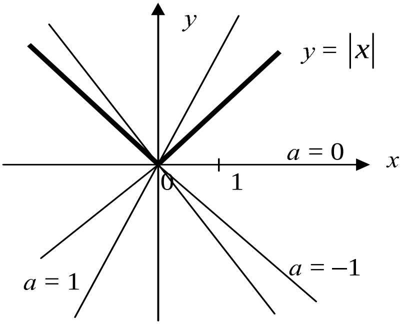


Рис. 3

Легко видеть, что при любом значении a уравнение $|x| = ax$ имеет решением $x = 0$. И это решение будет единственным, если $a \neq 1$ и $a \neq -1$. Если $a = 1$, то $x \geq 0$. А если $a = -1$, то $x \leq 0$.

По мере усложнения материала предлагаются и более сложные уравнения и неравенства с параметром, решаемые графическим методом. При этом особое внимание уделяется использованию различных систем координат. Выделяются наиболее характерные приемы.

1. **На плоскости** $(x; y)$ рассматривается семейство кривых, зависящих от параметра a: $y = f(x; a)$. Затем в этом семействе выделяется множество кривых, обладающих требуемым свойством. При этом часто поступают следующим образом: изучают, как перемещается кривая

семейства при изменении параметра, и находят граничные значения параметра, отделяющие множество значений параметра, которым соответствуют кривые, имеющие нужное свойство.

№ 2. При каких значениях параметра число корней уравнения $\left|\left|x^2-2x\right|-7\right|=a$ в четыре раза больше a?

Решение. Построим график функции

$$y=\begin{cases}\left|x^2-2x-7\right|, & \text{если } x\in(-\infty;0]\cup[2;+\infty);\\ x^2-2x+7, & \text{если } x\in(0;2).\end{cases}$$

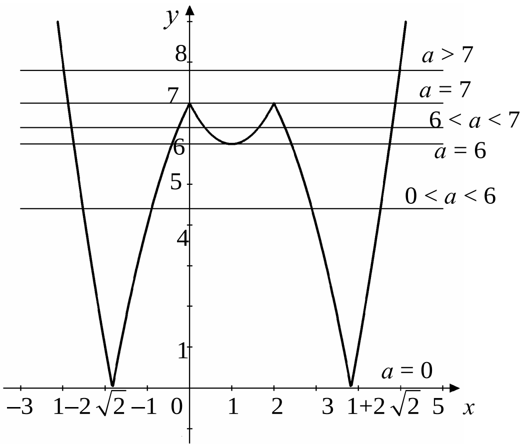


Рис. 4

Проводя горизонтали $y=a$ при различных значениях a, получаем такую информацию о числе пересечений этой горизонтали с графиком функции:

Значения	$(-\infty;0)$	0	$(0;6)$	6	$(6;7)$	7	$(7;+\infty)$
Число корней	нет корней	2	4	5	6	4	2

Нас устраивает лишь случай $a\in(0;6)$, когда $a=1$, а число корней равно четырем.

Ответ: $a=1$.

№ 2. Найдите такие значения m, при которых уравнение $x+\sqrt{4x^2-1}=mx+0,5$ имеет ровно два решения.

Решение. О.О.У.: $\begin{cases} |x| \geq 0,5, \\ m \in R. \end{cases}$

Задача сводится к нахождению таких значений параметра m, при каждом из которых прямая с уравнением $y = mx + 0,5$ пересекает график функции $y = x + \sqrt{4x^2 - 1}$ только в двух точках.

С использованием производной строим сначала график функции $y = x + \sqrt{4x^2 - 1}$, а затем несколько прямых пучка прямых $y = mx + 0,5$. При изменении m любая прямая семейства может быть получена поворотом прямой $y = 0,5$ вокруг точки $(0; 0,5)$. Из рис. 5 видно, что условию задания удовлетворяют $m \in [0,5; 2]$.

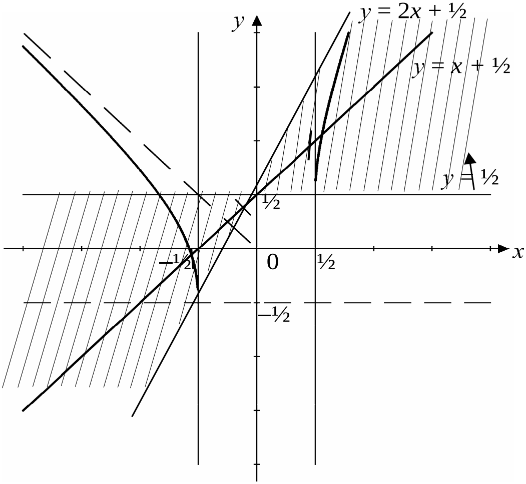


Рис. 5

2. **Рассматривается плоскость** $(x; a)$, на которой изображается множество точек, координаты которых удовлетворяют данному уравнению или неравенству. После этого, проводя прямые, параллельные оси x, находят решение этого уравнения или неравенства при соответствующем значении параметра. Значения параметра, при переходе через которые меняется формула, дающая решение, естественным образом определяются построенным множеством.

№ 1. При каких значениях параметра a уравнение $x^2 + x + a - 2 = 0$ в интервале $|x| \leq 2$ имеет ровно один корень?

Решение.

Выразим a как функцию x: $a = -x^2 - x + 2$. Построим схематично график этой функции. Неравенство $|x| \leq 2$ задает отрезок $[-2; 2]$.

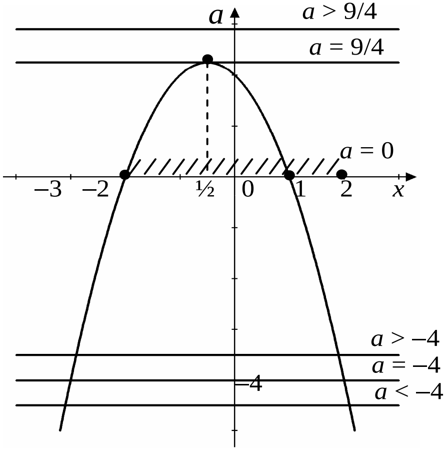


Рис. 6

Условию задачи удовлетворяют $a \in [-4; 0)$ и $a = 9/4$.

3. **Рассматривается плоскость** (aOx). На ней изображается множество точек, координаты которых удовлетворяют данному уравнению или неравенству. Затем проводим, как и в предыдущем случае, прямые, параллельные оси x, но не горизонтальные, а вертикальные. Выделяем те значения параметра, при переходе через которые меняется формула, дающая решение, и отвечаем на вопрос задачи.

№ 1. Решите систему $\begin{cases} x^2 - 2ax + a^2 - 1 = 0, \\ x^2 - 3x \geq 0. \end{cases}$

Решение. О.О.С.: $\begin{cases} a \in R, \\ x \in R. \end{cases}$ Разложим левую часть уравнения на множители, выделив полный квадрат: $(x-a)^2 - 1 = 0$, откуда $(x - a - 1)(x - a + 1) = 0$. Получим $\begin{cases} (x-a-1)(x-a+1) = 0, \\ x(x-3) \geq 0. \end{cases}$

Неравенство $x(x-3) \geq 0$ задает в плоскости два множества точек: 1) расположенных не ниже прямой $x = 3$; 2) не выше прямой $x = 0$.

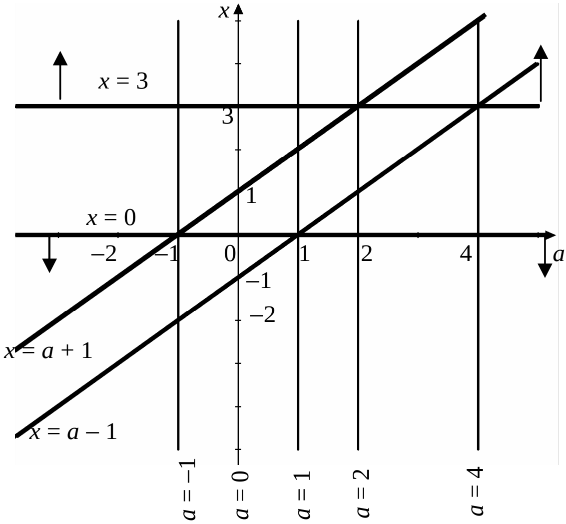


Рис. 7

Ответ:

1) если $a \in (-\infty; -1] \cup [4; +\infty)$, то $x_1 = a = -1$, $x_2 = a + 1$;

2) если $a \in (-1; 1]$, то $x_1 = a - 1$;

3) если $a \in (1; 2)$, то решений нет;

4) если $a \in [2; 4)$, то $x_2 = a + 1$.

При решении неравенств с параметром, сводимых к системе (совокупности систем) линейных неравенств, бывает полезным сначала изобразить в системе координат (aOx) все множество точек, координаты каждой из которых удовлетворяют решаемой системе (совокупности), а затем проанализировать его в соответствии с условием задачи.

№ 2. Найдите все значения, которые может принимать сумма $x + a$, а также соответствующие значения a, при условии $|2x + 4 - 2a| + |x - 2 + a| \le 3$.

Решение.

Пусть $y = x + a$. Тогда получаем неравенство $|y - 2| + 2\,|y - 2a + 2| \le 3$. Раскрыв первый модуль, переходим к равносильной системе $\begin{cases} 2\,|y - 2a + 2| \le y + 1, \\ 2\,|y - 2a + 2| \le 5 - y. \end{cases}$ Заметим, что y должно удовлетворять условиям $-1 \le y \le 5$. Если $y - 1 = 5 - y$, то $y = 2$. Рассматриваем далее совокупность двух систем

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} -1 \le y \le 2, \\ 2\,|y - 2a + 2| \le y + 1, \end{cases} \\ \begin{cases} 2 < y \le 5, \\ 2\,|y - 2a + 2| \le 5 - y : \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -1 \le y \le 2, \\ y - 4a + 3 \le 0, \\ 3y - 4a + 5 \ge 0, \end{cases} \\ \begin{cases} 2 < y \le 5, \\ 3y - 4a - 1 \le 0, \\ y - 4a + 9 \ge y0. \end{cases} \end{array}\right.$$

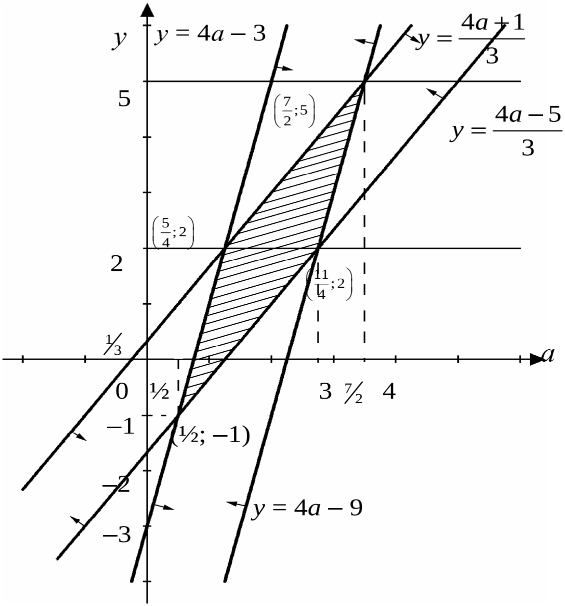


Рис. 8

Из рисунка 8 видно, что $y = a + x$ может принимать все значения отрезка $[-1;\ 5]$; при этом $a \in [0,5; 3,5]$.

№ 3. При каких значениях a неравенство $\log_{2x}(3x + a) < 1$ не имеет решений?

Решение. В своей области определения данное неравенство равносильно совокупности систем неравенств

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x>1,\\ 0<3x+a<2x,\end{cases}\\ \begin{cases}0<2x<1,\\ 3x+a>2x:\end{cases}\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{ll}\begin{cases}x>0,5,\\ x>-a/3,\\ x<-a,\end{cases} & (1)\\ \begin{cases}0<x<0,5,\\ x>-a.\end{cases} & (2)\end{array}\right.$$

Решаем графически в системе координат (aOx), причем воспользуемся тремя системами координат.

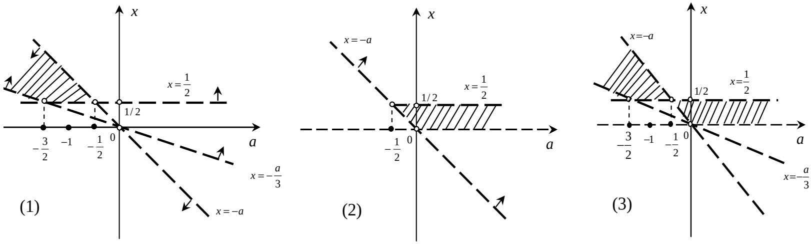


Рис. 9

По рис. 9 видно, что система (1) не имеет решений при $a \geq -0,5$, а система (2) – при $a \leq -0,5$, а потому совокупность этих систем не имеет решений при $a = -0,5$.

Ответ: $a = -0,5$.

Библиографический список

1. *Беляева Э.С. и др.* Уравнения и неравенства второй степени с параметром и к ним сводимые. Воронеж: ВГПУ, 2001. 192 с.

Информационно-стохастическая модель и оптимизация при формировании математического знания

В.Е. Фирстов

1. Введение. Предлагаются две модели формирования математического знания как дедуктивной теории. По одной из них построение дедуктивной теории представляется в виде ориентированной семантической сети, которая разбивается на области доминирования и определенным образом метризуется, после чего на этой сети ставятся задачи оптимизации, например, по минимизации доказательств формируемой дедуктивной теории. В рамках другой модели построение дедуктивной теории представляется в виде ветвящегося марковского процесса, который реализуется в соответствующем информационном пространстве. В рамках данной стохастической модели дается корректное обоснование оптимальной стратегии для проведения исследовательской работы в области математики.

2. Неформальная аксиоматическая теория в виде семантической сети. Пусть $S = (M; \Sigma))$ – некоторая математическая структура, основные отношения которой выражены аксиомами $\Sigma = \{\alpha_1, ..., \alpha_s\}$ в рамках системы базисных множеств $M = \{M_1; \ldots; M_k\}$, представляющих основные объекты данной структуры, а $Th(S)$ – неформальная аксиоматическая теория этой математической структуры.

Информационное пространство дедуктивной теории $Th(S)$ интерпретируется в виде некоторого орграфа $\overrightarrow{\Gamma}(S)$, представляющего модель структуры S, реализующей прохождение определенной математической информации, т.е. речь идет о семантической модели. В этом случае множество $Th(S)$ задает элементы предметной области, являющиеся вершинами орграфа, а его дуги определяются набором функций f_m вида:

$$f_m : T_{i_1}; ...; T_{i_n} \mapsto T, \tag{1}$$

где $m; i_1; ...; i_n \in N$, $T_{i_1}; ...; T_{i_n}; T \in Th(S)$, а символ $\mapsto$ подразумевает неформальное логическое следствие утверждения T из посылок $T_{i_1}; ...;$ T_{i_n}. Фрагмент орграфа $\overrightarrow{\Gamma}(S)$, связанный с функцией (1), представлен на рис. 1.

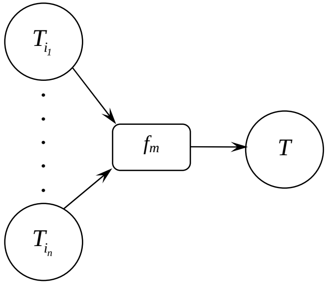


Рис. 1

Как видим, орграф $\overrightarrow{\Gamma}(S)$, наряду с вершинами предметной области $Th(S)$, характеризуется еще одним типом вершин, которые задаются множеством $F = \{f_m | m \in N\}$, содержащим функции вида (1). В определенном смысле элементы множества F – это аналоги дизъюнктов, которые используются при построении формализованных моделей семантических сетей [1]. В итоге орграф $\overrightarrow{\Gamma}(S)$ представляется парой $(V; E)$, где множество вершин V и множество дуг E определяются выражениями:

$$V = Th(S) \cup F; \quad E \subset (Th(S) \times F) \cup (F \times \bar{\Sigma}); \tag{2}$$

$\bar{\Sigma}$ – дополнение системы аксиом Σ до $Th(S)$, т.к. без ограничения общности систему аксиом Σ можно считать независимой. Поскольку аксиомы теории $Th(S)$ не являются логическими следствиями, то для заданного орграфа $\overrightarrow{\Gamma}(S)$ система вершин $\Sigma \subset Th(S)$ выполняет роль источников и, следовательно, $\overrightarrow{\Gamma}(S)$ выступает в виде некоторой семантической сети, определяющей строение информационного пространства дедуктивной теории $Th(S)$.

3. Маршруты, расстояния и связность в сети $\overrightarrow{\Gamma}(S)$. Пусть на орграфе $\overrightarrow{\Gamma}(S)$ вида (2) выделены различные вершины $v_0; v_1; ...; v_n \in V$ такие, что образуется последовательность дуг

$$\overrightarrow{l}(v_0; ...; v_n) : (v_0; v_1); (v_1; v_2); ...; (v_{n-1}; v_n) \in E. \tag{3}$$

Тогда говорят об ориентированном маршруте, соединяющем вершину v_0 с вершиной v_n. В этом случае также говорят, что вершина v_n достижима из вершины v_0. Длина маршрута (3) определяется соотношением:

$$|\overrightarrow{l}(v_0; ...; v_n)| = n. \tag{4}$$

Пусть $\overrightarrow{l}(v_0; v_n)$; $|\overrightarrow{l}(v_0; v_n)|$ – соответственно, множества всех ориентированных маршрутов, соединяющих вершину v_0 с v_n, и их длин. Расстояние $|\overrightarrow{r}(v_0; v_n)|$ от v_0 до v_n определяется выражением

$$|\overrightarrow{r}(v_0; v_n)| = \inf |\overrightarrow{l}(v_0; v_n)|. \tag{5}$$

Расстояние (5), вообще говоря, не является метрикой на орграфе $\overrightarrow{\Gamma}(S)$, т.к., например, не выполняется условие симметричности $|\overrightarrow{r}(v_0; v_n)| \neq |\overrightarrow{r}(v_n; v_0)|$.

При рассмотрении дедуктивной теории $Th(S)$ вопросы связности $\overrightarrow{\Gamma}(S)$ представляются достаточно важными. Для орграфов обычно вводят две связности – слабую и сильную [2], и в этой связи далее установим некоторые структурные свойства орграфа $\overrightarrow{\Gamma}(S)$.

Предложение 1. *Орграф* $\overrightarrow{\Gamma}(S)$ *не является связным в сильном смысле, но является связным в слабом смысле.*

Следствие 1. *Расстояние* (5) *в слабом смысле*

$$|r(v_0; v_n)| = \inf |l(v_0; v_n)| \tag{6}$$

является метрикой на орграфе $\overrightarrow{\Gamma}(S)$.

Доказательство предложения 1 и следствия 1 дается в работе [3].

4. Области доминирования предикатных вершин сети $\overrightarrow{\Gamma}(S)$ **и их метризация.** Пусть произвольно выбрана предикатная вершина $T \in Th(S)$, посредством которой формируется множество

$$U(T) = \{T_i | T_i \prec T \ \vee \ T_i = T, \quad T_i; T \in Th(S), \quad i \in N\} \subset Th(S), \tag{7}$$

где $\prec$ – порядок следования вершин в сети $\overrightarrow{\Gamma}(S)$. Элементы множества $U(T)$ – это вершины, для которых вершина T является достижимой на орграфе $\overrightarrow{\Gamma}(S)$. Поэтому множество $U(T)$ будем называть областью доминирования вершины T в пространстве $Th(S)$.

Укажем некоторые свойства области доминирования $U(T)$, исходя из определения (7):

$$U(T) \cap \Sigma \neq \varnothing, \tag{8}$$

$$T'; T'' \in \Sigma, \quad T' \neq T'' \Rightarrow U(T') \cap U(T'') = \varnothing. \tag{9}$$

Из соотношений (8), (9) очевидным образом следует

Предложение 2. *Если* $T \notin \Sigma$, *то область* $U(T)$ *есть сеть, у которой элементы соответствующего подмножества* $\Sigma' \subseteq \Sigma$ *являются источниками, а вершина* T *– стоком.*

Предложение 3.

$$T' \in U(T) \Leftrightarrow U(T') \subseteq U(T), \tag{10}$$

причем если равенство $U(T') = U(T)$, *выполняется при* $T \neq T'$, *то вершины* $T; T'$ *связаны циклом.*

Предложение 4. *Если* $U(T') \cap U(T'') \neq \varnothing$ *и области* $U(T'), U(T'')$ *не связаны отношением включения, то среди вершин* $T \in U(T') \cap U(T'')$ *хотя бы одна является точкой ветвления в ориентированной сети* $\overrightarrow{\Gamma}(S)$ [3].

Пусть $U(T)$ – область доминирования вершины $T \in Th(S)$, а $\overrightarrow{l}(\Sigma; T)$ – множество маршрутов, ведущих от аксиом Σ к вершине T. Длина каждого такого маршрута определяется соотношением (4), пусть $|\overrightarrow{l}(\Sigma; T)|$

– множество длин маршрутов множества $\overrightarrow{l}(\Sigma;T)$. Согласно (5), введем расстояние от Σ до T:

$$|\overrightarrow{r}(\Sigma;T)| = \inf|\overrightarrow{l}(\Sigma;T)|, \tag{11}$$

и, кроме того, определим диаметр области $U(T)$:

$$d(U(T)) = \sup|\overrightarrow{l}(\Sigma;T)|. \tag{12}$$

5. Емкости предикатных вершин семантической сети. Концепция емкостей Г. Шоке [4] вводится аксиоматически в абстрактном хаусдорфовом пространстве X как некоторая числовая функция $C(K)$, определенная на компактах K пространства X, которая, в первую очередь, должна монотонно возрастать:

$$K_1 \subset K_2 \Rightarrow C(K_1) \leq C(K_2). \tag{13}$$

Распространить в полной мере концепцию емкостей Шоке в информационное пространство $Th(S)$ не удается, однако некий аналог емкости в $Th(S)$ ввести все-таки можно. Для этого на множестве $Fh(S) = \{U(T)|T \in Th(S)\}$ определим числовую функцию $I : Fh(S) \to N$ по правилу:

$$\forall\, U(T) : I(U(T)) = |U(T)|. \tag{14}$$

Из соотношений (7), (10) видно, что функция I вида (14) удовлетворяет условию (13), т.к. $U(T') \subset U(T) \Rightarrow |U(T')| \leq |U(T)|$. Поэтому функцию I назовем емкостью области доминирования $U(T)$, или T-емкостью. Функция I емкостью в смысле Шоке не является, т.к. множество $Fh(S)$, очевидно, не замкнуто по операциям $\cup$ и $\cap$.

В рамках концепции емкости (14) на орграфе $\overrightarrow{\Gamma}(S)$ определим функцию:

$$\forall\, T;T' \in Th(S) : \rho(T;T') = \big||U(T)| - |U(T')|\big|. \tag{15}$$

Функция $\rho(T;T')$ удовлетворяет аксиомам симметричности и треугольника, но не удовлетворяет аксиоме тождества, поскольку $\rho(T;T') = 0$ не влечет $T = T'$ (предложение 3). Поэтому функция $\rho(T;T')$ задает псевдометрику (или отклонение) в пространстве $Th(S)$. Метрика получается при факторизации $Th(S)$ с помощью эквивалентности:

$$T \sqcup T' \Leftrightarrow |U(T)| = |U(T')|. \tag{16}$$

Тогда для любого класса $[T] \in Th(S)/\sqcup$ фиксируется емкость $|[T]| = |U(T)|$, после чего, определив функцию (15) на классах, задается метрика фактор-пространства $Th(S)/\sqcup$.

6. Минимизация длины и емкости доказательства в сети $\overrightarrow{\Gamma}(S)$. Процедура доказательства некоторого утверждения $T \in Th(S)$ в сети $\overrightarrow{\Gamma}(S)$ представляется следующим образом. Среди предикатных вершин $Th(S)$ имеется конечное множество посылок $T_{i_1}; ...; T_{i_k}$, для которого в семантической сети $\overrightarrow{\Gamma}(S)$ существует единственная F-вершина в виде функции $f_m \in F$ с областью определения $Dom f_m = \{T_{i_1}; ...; T_{i_k}\}$, реализующая неформальный логический вывод

$$f_m : T_{i_1}; ...; T_{i_k} \mapsto T. \tag{17}$$

В связи с выводом (17) возникают два случая. Если $Dom f_m \subseteq \Sigma$, то мы имеем неформальный вывод T из аксиом системы Σ и, следовательно, в (17) следует считать $m = 1, 0 < k \leq s$, где $s = |\Sigma|$. Тогда доказательство утверждения T представляет собой множество $B(T) = \{T_{i_1}; ...; T_{i_k}; T\}$, упорядоченное логическим следованием (17), и это доказательство осуществляется за один шаг по схеме, показанной на рис. 1.

Если $Dom f_m \not\subseteq \Sigma$, то $0 < |Dom f_m \backslash \Sigma| = n \leq k; m > 1$ и каждая из вершин $T_{i_1}; ...; T_{i_n} \in Dom f_m \backslash \Sigma$, в свою очередь, оказывается следствием, однозначно вытекающим из соответствующих посылок предикатной области $Th(S)$, так, что имеется единственный набор функций $f_{m-1;1}; \ldots; f_{m-1;n} \in F$, реализующих доказательства:

$$f_{m-1;1} : T^1_{i_1}; ...; T^{j_1}_{i_1} \mapsto T_{i_1}; \ldots; f_{m-1;n} : T^1_{i_n}; ...; T^{j_n}_{i_n} \mapsto T_{i_n}. \tag{18}$$

К посылкам в доказательствах (18) вновь применяются рассуждения, аналогичные (17), и т.д., пока не приходим к доказательствам вида:

$$f_{11} : \Sigma'_1 \mapsto T_1; f_{12} : \Sigma'_2 \mapsto T_2; ...; f_{1r} : \Sigma'_r \mapsto T_r, \tag{19}$$

где $\Sigma'_1; ...; \Sigma'_r \subseteq \Sigma$. Таким образом, процедура доказательства утверждения $T \in Th(S)$ в общем случае представляется частично упорядоченным множеством $B(T)$, которое составлено из предикатных вершин, структурированных посредством функций (17)–(19).

Отметим некоторые очевидные свойства процедуры доказательства $B(T)$:

1. Аксиомы системы $\Sigma' \subseteq \Sigma; \Sigma' \subset B(T)$ образуют систему минимальных элементов частично упорядоченного множества $B(T)$, а вершина T – есть наибольший элемент данного множества.

2. Т.к. $B(T) \subseteq U(T)$, то область $U(T)$ представляется в виде объединения всевозможных доказательств утверждения T.

Имея в виду неформальный логический вывод (17), длину $\left|\overrightarrow{b}(T)\right|$ доказательства $B(T)$ определим следующим образом:

$$\left|\overrightarrow{b}(T)\right| = max(\left|\overrightarrow{b}(T_{i_1})\right|;...;\left|\overrightarrow{b}(T_{i_k})\right|) + 1. \tag{20}$$

Тогда, в случае $Domf_m \subseteq \Sigma$, имеем $\left|\overrightarrow{b}(T_{i_1})\right| = ... = \left|\overrightarrow{b}(T_{i_k})\right| = 0$, что дает $\left|\overrightarrow{b}(T)\right| = 1$, т.е. вывод T из аксиом осуществляется за один шаг. В случае $Domf_m \not\subseteq \Sigma$ определение (20), в соответствии с (17)–(19), предполагает рекурсию:

$$\begin{cases} \left|\overrightarrow{b}(T_{i_1})\right| = max(\left|\overrightarrow{b}(T_{i_1}^1)\right|;...;\left|\overrightarrow{b}(T_{i_1}^{j_1})\right|) + 1; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \left|\overrightarrow{b}(T_{i_n})\right| = max(\left|\overrightarrow{b}(T_{i_n}^1)\right|;...;\left|\overrightarrow{b}(T_{i_n}^{j_n})\right|) + 1; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \left|\overrightarrow{b}(T_1)\right| = \left|\overrightarrow{b}(T_2)\right| = ... = \left|\overrightarrow{b}(T_r)\right| = 1. \end{cases} \tag{21}$$

Помимо длины $\left|\overrightarrow{b}(T)\right|$, доказательство $B(T)$ характеризуется величиной емкости доказательства $|B(T)|$, под которой понимается мощность множества $B(T)$.

Пусть $B_1(T); \ldots; B_l(T)$ - всевозможные доказательства интересующего утверждения $T \in Th(S)$, обладающие длинами $\left|\overrightarrow{b}_1(T)\right|;...;\left|\overrightarrow{b}_l(T)\right|$ и емкостями $|B_1(T)|;...;|B_l(T)|$, соответственно. В силу $U(T) = B_1(T) \cup \ldots \cup B_l(T)$ формулируются следующие задачи оптимизации:

$$B_0(T) = opt(B_1(T);\ldots;B_l(T)) \Leftrightarrow \left|\vec{b}_0(T)\right| = min(\left|\vec{b}_1(T)\right|;...;\left|\vec{b}_l(T)\right|), \tag{22}$$

$$B_0(T) = opt(B_1(T);\ldots;B_l(T)) \Leftrightarrow |B_0(T)| = min(|B_1(T)|;...;|B_l(T)|). \tag{23}$$

Такая постановка оптимальных задач предполагает упрощение доказательства при сокращении объема анализируемой доказательной базы, что, вообще говоря, согласуется с представлениями теории информации [5].

7. Пример оптимизации: доказательства теоремы Пифагора. В современной учебно-методической литературе по геометрии в основном можно встретить следующие варианты доказательств теоремы Пифагора:

1. Классическое доказательство Евклида [6], при котором на сторонах прямоугольного треугольника строятся квадраты и в результате получается известная конфигурация в виде "пифагоровых штанов".

2. Доказательства индийского математика Бхаскары (1150 г.), которые известны в следующих двух вариантах. По первому варианту доказательства (Бхаскара-I), внутрь произвольного квадрата вписывается другой квадрат; во втором варианте (Бхаскара-II) используется свойство высоты прямоугольного треугольника [7].

3. Векторный вариант доказательства с помощью скалярного произведения в аксиоматике Вейля [8].

Для удобства анализа метрические характеристики $\left|\overrightarrow{b}_i(T)\right|$; $|B_i(T)|$ доказательств теоремы Пифагора представлены в табл. 1 в обозначениях п. 6 в аксиоматиках Евклида [6], Гильберта [9] и Вейля [8].

Таблица 1

Метрические характеристики основных вариантов доказательств теоремы Пифагора в различных системах аксиом

Доказательство	Аксиоматика	i	$\left\|\overrightarrow{b}_i(T)\right\|$	$\|B_i(T)\|$
Евклид	Евклид (IV в. до н.э.)	0	10	36
Бхаскара-I		1	9	23
Бхаскара-II	Д. Гильберт (1899)	2	12	35
Векторно-точечное	Г. Вейль (1918)	3	2	12

Характеристики доказательств $\left|\overrightarrow{b}_i(T)\right|$; $|B_i(T)|$ в табл. 1 упорядочим по возрастанию: $\left|\overrightarrow{b}_3(T)\right| < \left|\overrightarrow{b}_1(T)\right| < \left|\overrightarrow{b}_0(T)\right| < \left|\overrightarrow{b}_2(T)\right|$; $|B_3(T)| < |B_1(T)| < |B_2(T)| < |B_0(T)|$, после чего проводим процедуру оптимизации в соответствии с (22); (23), откуда следует:

$$\left|\overrightarrow{b}_3(T)\right| = opt(\left|\overrightarrow{b}_0(T)\right|; \left|\overrightarrow{b}_1(T)\right|; \left|\overrightarrow{b}_2(T)\right|; \left|\overrightarrow{b}_3(T)\right|), \tag{24}$$

$$|B_3(T)| = opt(|B_0(T)|; |B_1(T)|; |B_2(T)|; |B_3(T)|). \tag{25}$$

Результаты оптимизации (24), (25), отдающей предпочтение векторно-точечному варианту построения евклидовой геометрии в духе Вейля [8], вообще говоря, особого удивления не вызывают, т.к. данный подход, среди рассмотренных, обладает минимальной аксиоматической базой. В то же время следует иметь в виду осторожность, с которой векторный аппарат должен внедряться в школьную геометрию.

8. Построение дедуктивной теории как марковский процесс. Построение информационного пространства дедуктивной теории $Th(S)$, вообще говоря, представляет собой некоторый случайный процесс $Th(S;t)$, поскольку моменты времени t, когда происходит доказательство того или иного утверждения данной теории, не детерминированы. Априори об этом процессе можно высказать следующие соображения:

1. Случайный процесс $Th(S;t)$ происходит в пространстве $Th(S)$ и реализуется как случайный орграф $\overrightarrow{\Gamma}(S;t)$ на орграфе $\overrightarrow{\Gamma}(S)$.

2. При $t=0$: $Th(S;0) = \Sigma$; $E(0)=\varnothing$.

3. В каждый момент времени $t>0$ случайная функция $Th(S;t)$ обладает конечным набором реализаций (состояний) $th_1(t);\dots;th_n(t)$.

4. Каждая реализация $th_1(t);\dots;th_n(t)$ представляет собой объединение доказательств некоторых утверждений $Th(S)$ в смысле определения (17)–(19).

5. Для $Th(S)$ и $\overrightarrow{\Gamma}(S)$ имеет место счетность и потенциальная выполнимость:

$$Th(S) = \lim_{t\to\infty} Th(S;t), \quad \overrightarrow{\Gamma}(S) = \lim_{t\to\infty} \overrightarrow{\Gamma}(S;t) \tag{26}$$

Фундаментальное свойство процесса $Th(S;t)$ устанавливает следующее

Предложение 5. *Случайный процесс $Th(S;t)$ – является марковским процессом.*

Доказательство. Пусть $th(t)$ – некоторая реализация случайного процесса $Th(S;t)$ в момент времени t. Тогда $th(t) \subset Th(S)$ и можно выбрать дополнение $\overline{th}(t)$ реализации $th(t)$ до $Th(S)$. С $th(t)$ и $\overline{th}(t)$, соответственно, связаны орграфы $\overrightarrow{g}(t)$ и $\overrightarrow{cg}(t)$ так, что выполняется соотношение:

$$\overrightarrow{\Gamma}(S) = \overrightarrow{g}(t) \cup < \overrightarrow{g}(t) > \cup \overrightarrow{cg}(t), \tag{27}$$

где $< \overrightarrow{g}(t) >$ – это орграф, дуги которого соединяют орграфы $\overrightarrow{g}(t)$ и $\overrightarrow{cg}(t)$. Объединение $<\overrightarrow{g}(t)> \cup \overrightarrow{cg}(t)$ в (27) определяет всевозможные состояния $Th(S;t')$, в которые может перейти реализация $th(t)$ в некоторый момент времени $t'>t$. Отсюда видим, что эволюция рассматриваемого случайного процесса $Th(S;t)$ такова, что при данной реализации $th(t)$ в момент t его дальнейшее поведение совершенно не зависит от состояния данного процесса до момента времени t, т.е. $Th(S;t)$ – марковский процесс. Что и требовалось доказать.

9. Формирование информационного пространства дедуктивной теории как ветвящийся марковский процесс. В рамках представленной модели, информационное пространство теории $Th(S)$ представляется в виде семантической сети $\overrightarrow{\Gamma}(S)$ и ее узлы являются точками ветвления транспортируемой информации, которые определяются пересечением соответствующих областей доминирования, как это следует из предложения 4. Поэтому, в рамках рассматриваемой стохастической модели, при построении информационного пространства $Th(S)$ случайный процесс $Th(S;t)$ является ветвящимся марковским процессом.

Неоднородный во времени ветвящийся процесс $Th(S;t)$ с однородными частицами, которыми в данном случае являются элементы пространства $Th(S)$, определяется как марковский процесс, переходные вероятности $P_{ik}(\tau;t)$ которого отвечают уравнению Колмогорова-Чэпмена вида

$$P_{in}(\tau;t) = \sum_{\nu}^{P_{i\nu}(\tau;s)} P_{\nu n}(s;t), \tag{28}$$

где $\tau < s < t$; $P_{ik}(\tau;t) \geq 0$, $\sum\limits_{k}^{P_{ik}(\tau;t)} = 1$ с дополнительным условием ветвления [10], [11]:

$$P_{ik}(\tau;t) = \sum_{r_1+\ldots+r_i=k+i(l-1)} P_{lr_1}(\tau;t)P_{lr_2}(\tau;t)\ldots P_{lr_i}(\tau;t), \tag{29}$$

где $P_{ik}(\tau;t)$ определяют вероятность того, что состояние, обладающее i частицами в момент τ, к моменту t будет содержать $k \geq i \geq l = |\Sigma|$ частиц. Прямые и обратные системы дифференциальных уравнений для определения переходных вероятностей $P_{ik}(\tau;t)$ для неоднородного ветвящегося марковского процесса имеют вид [12]:

$$\frac{\partial P_{ik}(\tau;t)}{\partial t} = -kc(t)P_{ik}(\tau;t) + c(t)\sum_{j} P_{ij}(\tau;t)jp_{jk}(t), \tag{30}$$

$$\frac{\partial P_{ik}(\tau;t)}{\partial \tau} = ic(\tau)P_{ik}(\tau;t) - ic(\tau)\sum_{j} p_{ij}(\tau)P_{jk}(\tau;t). \tag{31}$$

Существование решений систем (30), (31) установлено в работе [12].

10. Ранжировка значимости элементов информационного пространства дедуктивной теории. Пусть $U(T)$ – область доминирования утверждения $T \in Th(S)$ и пусть $B_1(T);\ldots;B_n(T)$ – всевозможные доказательства данного утверждения, так, что $B_1(T) \cup \ldots \cup$

$B_n(T) = U(T)$ и данные доказательства обладают длинами $\left|\overrightarrow{b}{}^{(}_{1}T)\right|$; ...; $\left|\overrightarrow{b}{}^{(}_{n}T)\right|$. Введем величину:

$$D(\Sigma; T) = \min(\left|\overrightarrow{b}_1(T)\right|; ...; \left|\overrightarrow{b}_n(T)\right|), \tag{32}$$

которую назовем логической дистанцией от системы аксиом $\Sigma \subset Th(S)$ до утверждения .

Характеризуя область $U(T)$ посредством емкости |U(T)| и дистанции $D(\Sigma; T)$, определенным образом оценивается значимость того или иного утверждения $T \in Th(S)$ в смысле востребованности данного утверждения в иерархической структуре сети $\overrightarrow{\Gamma}(S)$. Формально значимость представляется отношением частичного порядка в пространстве $Th(S)$ и задается в виде отношения доминирования по Парето:

$$T'T \Leftrightarrow |U(T)| \geq \left|U(T')\right| \wedge D(\Sigma; T) \leq D(\Sigma; T'), \tag{33}$$

где хотя бы одно из неравенств выполняется строго. В случае определения (34) будем считать утверждение более значимым, чем T'; в случае, когда в (34) имеют место равенства, будем говорить о равнозначности $T' \simeq$. Смысл определений (34) состоит в том, что более значимые элементы пространства $Th(S)$ более влиятельны (первое неравенство в (34)) и расположены ближе к источникам информации системы Σ (второе неравенство в (34)). Значимые элементы можно также трактовать как достаточно крупные узловые пункты сети $\overrightarrow{\Gamma}(S)$, располагающиеся ближе к источникам системы Σ.

11. Обоснование Парето-оптимизации исследовательской работы в области математики в рамках стохастической модели. Предварительно заметим, что построение математического знания в рамках нестационарной семантической сети $\overrightarrow{\Gamma}(S)$ подразумевает прохождение определенной математической информации в пространстве $Th(S)$. В этом смысле всякое исследование информационного пространства $Th(S)$ подразумевает выбор некоторого исходного положения $T_0 \in Th(S)$ в сети $\overrightarrow{\Gamma}(S)$, и от того, насколько рационально сделан этот выбор, зависит эффективность данного исследования. Концептуальная линия при построении эффективной исследовательской работы в математике следует из принципиального положения, предписывающего рациональный выбор исходного положения $T_0 \in Th(S)$ путем процедуры Парето-оптимизации (34), из которого более вероятен вывод оригинальных математических результатов. Следует придать этой линии общее корректное обоснование, для чего используется стохастическая модель формирования информационного пространства дедуктивной теории $Th(S)$.

Такое обоснование сводится к тому, что при формировании сети $\overrightarrow{\Gamma}(S)$ информационного пространства $Th(S)$ посредством случайной сети $\overrightarrow{\Gamma}(S;t)$, заданной соответствующим ветвящимся марковским процессом $Th(S;t)$ вида (28)–(31), рациональный выбор исходного положения $T_0 \in Th(S)$в рамках Парето-оптимизации (34) означает более высокие вероятности переходов между состояниями процесса $Th(S;t)$. Данный результат получается из следующих соображений. Пусть $P_{ik} = P_{ik}(\tau;t)$ – решение уравнений (30); (31), удовлетворяющее условиям (28), (29). Рассмотрим случай $k = i+1$ и обратимся к условию ветвления (29), откуда в данном случае получается:

$$P_{i,i+1}= iP_{l,l+1}P_{ll}^{i-1} = i(1-P_{ll})P_{ll}^{i-1}. \tag{34}$$

Для значений $i \in (0; -\ln P_{ll})$ функция $P_{i,i+1}$ – возрастающая и, поскольку с увеличением длины интервала $(\tau;t)$ следует $P_{ll} \to 0$, то интервал $(0; -\ln P_{ll})$ может быть как угодно большим. Поэтому функция $P_{i,i+1}$ оказывается возрастающей в достаточно широком диапазоне $l \le i < -\ln P_{ll}$. Т.к. значение i в данном случае связывается с количеством элементов пространства $Th(S)$, отвечающих i-му состоянию процесса $Th(S;t)$, то отсюда получается, что, при прочих одинаковых условиях, область доминирования $U(T)$ с большей емкостью $|U(T)|$ имеет больше шансов расшириться, т.к. возрастает вероятность доказательства новых оригинальных утверждений при формировании теории $Th(S)$. Тем самым, дается обоснование первого неравенства в процедуре Парето-оптимизации (34).

Однако возрастание переходных вероятностей $P_{ik}(\tau;t)$ в модели (28)–(31) происходит не только с ростом i, но также в зависимости от расположения интервала $(\tau;t)$ на временной шкале. Действительно, с уменьшением τ растет длина интервала $(\tau;t)$ и, следовательно, растет вероятность $P_{ik}(\tau;t)$, что приводит к обоснованиям второго неравенства в Парето-оптимизации (34) [3].

Таким образом, стратегия оптимизации математических исследований, сформулированная в рамках Парето-оптимизации, находит достаточное обоснование в рамках стохастической модели, представляющей построение математического знания в виде ветвящегося марковского процесса. В частности, это подтверждается прямыми исследованиями в работе [3].

Библиографический список

1. *Вагин В.Н., Кикнадзе В.Г.* Дедуктивный вывод на семантических сетях в системах принятия решения // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1984. № 5. С. 104–120.
2. *Уилсон Р.* Введение в теорию графов. М.: Мир, 1977. 207 с.
3. *Фирстов В.Е.* Информационно-стохастическая модель и оптимизация при построении и распространении математического знания. Саратов: Научная книга, 2006. 53 с.
4. *Деллашери К.* Емкости и случайные процессы. М.: Мир, 1975. 192 с.
5. *Яглом А.М., Яглом И.М.* Вероятность и информация. М.: Наука, 1973. 511 с.
6. Начала Евклида. С комментариями Д.Д. Мордухай-Болтовского. М.-Л.: ГИТТЛ, 1948–1950.
7. *Глейзер Г.И.* История математики в школе. VII–VIII классы. М.: Просвещение, 1982. 240 с.
8. *Егоров И.П.* Геометрия. М.: Просвещение, 1979. 256 с.
9. *Гильберт Д.* Основания геометрии. М.-Л.: ГИТТЛ, 1948. 491 с.
10. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1. М.: Мир, 1984. 528 с.
11. *Севастьянов Б.А.* Теория ветвящихся случайных процессов // УМН. 1951. Т. 6. № 6. С. 47–99.
12. *Харрис Т.* Теория ветвящихся случайных процессов. М.: Мир, 1966. 355 с.

Иерархия компетенций будущих учителей математики

И.В. Косолапова

Образование является неотъемлемой чертой человеческого общества, обеспечивая прогресс и решая многие социальные задачи. Современный образовательный процесс трактуется как освоение опыта в самом широком смысле. Становится приоритетным формирование личности, реализация ее потенциала и становление индивидуальности. Обсуждение педагогической общественностью результатов участия России в Международном исследовании Program for International Students Assessment (PISA) подтвердило актуальность компетентностного подхода в свете личностно-ориентированной образовательной парадигмы, который, на наш взгляд, затрагивает не только школьное образование, но и влияет на подготовку будущих учителей, призванных его реализовывать.

Различают два понятия – компетенция и компетентность. А.В. Хуторской предлагает следующее толкование этих терминов [4]: компетенция – наперед заданное требование (норма) к осуществлению определенного вида деятельности; компетентность – состоявшаяся система личностных качеств и минимальный опыт по отношению к деятельности в заданной сфере. *Образовательная компетенция* – это совокупность взаимосвязанных смысловых ориентаций, знаний, умений, навыков и опыта деятельности ученика (студента), необходимых, чтобы осуществлять личностно и социально-значимую продуктивную деятельность по отношению к объектам реальной действительности.

Под профессиональной компетентностью понимают личностную характеристику конкретного человека, обладающего соответствующей компетенцией – определенной совокупностью знаний, умений и способов действий, проявляющихся в эффективном решении спектра задач, которые возникают в профессиональной деятельности в определенный период [1].

В своей статье “Ключевые компетенции как компонент личностно-ориентированной парадигмы образования” [4] А.В. Хуторской определяет иерархию компетенций выпускников школ:

- ключевые,
- общепредметные,
- предметные.

Кроме того, автором приведена номенклатура ключевых компетенций:

- ценностно-смысловая,
- общекультурная,
- учебно-познавательная,
- информационная,
- коммуникативная,
- социально-трудовая,
- компетенция личностного самосовершенствования.

Нам видится возможным построение системы компетенций выпускника педагогического вуза как аналог соответствующей структуры общеобразовательной ступени.

Уровень компетенций зависит от характера содержания, формирующего ее (эта зависимость приведена ниже в таблице).

уровень компетенций	содержание профессионального образования	
	характер	дисциплины
ключевые	метапредметное	все, входящие в образовательный стандарт
общепредметные	межпредметное	цикл определенных предметных областей
предметные	предметное	отдельные дисциплины

Собственно профессиональные компетенции целесообразно рассматривать как общепредметные. Например, для учителя математики к ним относят математическую, психолого-педагогическую и систему методических компетенций. Первая предполагает знания и овладение способами деятельности в области элементарной и высшей математики, вторая – использование результатов психологии и педагогики для повышения эффективности образовательного процесса.

Математические компетенции, в свою очередь, можно ранжировать от общих (логическое строение теории, методы доказательства и др.) до частных (решение дифференциальных уравнений, систем линейных уравнений, исследование уравнений кривых второго порядка и т.п.).

Методическая компетентность выпускников педагогического вуза (владение методическими компетенциями) позволяет с определенным уровнем профессионализма реализовывать собственно образовательный процесс в предметной области “математика”. Следовательно, прежде всего учитель должен знать все его компоненты и структуру, то есть владеть системой методических компетенций, которая проявляется на каждом этапе и уровне образовательно-профессиональной деятельности (от построения отдельно взятого фрагмента урока до изучения системы содержательных линий в течение нескольких лет).

Образование – это, с одной стороны, целенаправленный **процесс передачи** систематизированного теоретического и практического опыта предшествующих поколений, относящегося к той или иной сфере человеческой культуры, а с другой – **результат усвоения** этого опыта. Тогда в системе “образование” можно выделить следующие элементы: объективная необходимость в передаче опыта, активнодействующее и подрастающее поколения, накопленный опыт жизнедеятельности, собственно образовательный процесс, результат усвоения опыта. Следовательно, образовательная система состоит из следующих подсистем:

• субъектно-личностной (взаимодействие двух общностей – педагогических работников, участвующих в управлении образовательным процессом и его реализации, и подрастающего поколения во всем его разнообразии возрастных, половых, физических, психических и психологических особенностей);

• концептуально-целевой (образовательные парадигма, концепции и цели);

• содержательной (передаваемый систематизированный адаптированный социальный опыт, соответствующий конкретной исторический эпохе);

• инструментальной (комплекс образовательных учреждений);

• процессуальной (форма и методы организации образовательного процесса);

• контрольно-измерительной (обязательный учет и фиксация успехов и достижений обучающихся).

Согласно структуре перечисленных подсистем образования, система методических компетенций включает в себя соответствующие компоненты:

• структурно-организационную,
• целеполагания и мотивации,
• содержательную,
• инструментально-технологическую,
• контрольно-оценочную,
• дифференциации контингента.

Формирование каждого указанного компонента и есть предмет методической подготовки будущего учителя-предметника. Нам видится, что методическая компетентность проявляется в том случае, когда при разработке конкретного образовательного проекта (урока, системы уроков, темы, элективного курса, внеклассного мероприятия, форм дополнительного образования и т.д.) все перечисленные компетенции применяются в системе с учетом особенностей (целевых, содержательных и др.).

Организация образовательного процесса, включающая отбор соответствующих структурных компонентов, является одной из профессиональных компетенций. Первичное знакомство с этой компетенцией происходит в процессе изучения курса по педагогике в разделе "Дидактика", дальнейшее формирование продолжается в курсе "Теория и методика обучения". Первоначальный опыт реализации своих знаний студенты получают при выполнении заданий по методическим дисциплинам и на педагогической практике. Однако основное число элементов образовательной системы студентам задано изначально (образовательные цели школьного предмета, его содержание, контингент обучаемых, образовательное учреждение, урок как основная организационная форма). Творчество ограничивается выбором методов и вида урока. На наш взгляд, этого недостаточно для полноценного овладения структурно-организационной компетенцией. Студенты должны иметь опыт разработки всей системы образовательного процесса. Проблему решают элективные курсы по методике преподавания математики, организация индивидуально-самостоятельной исследовательской деятельности (рефераты, курсовые и выпускные квалификационные работы). Особое место, по нашему мнению, в этой деятельности занимает система подготовки студентов к организации дополнительного математического образования школьников через указанные формы работы [2, 3].

Библиографический список

1. *Зимняя И.А.* Ключевые компетенции – новая парадигма результата образования // Высшее образование. 2003. № 5. С. 34–42.
2. *Косолапова И.В.* О некоторых методических курсах по выбору для студентов бакалавриата // Проблемы математического образования в педагогических вузах на современном этапе: Материалы научно-практической конференции. Екатеринбург: УрГПУ, 2000. С. 37–38.
3. *Косолапова И.В., Андронова И.Г.* Выпускная квалификационная работа как средство подготовки студентов к организации исследовательской деятельности школьников // Математическая и методическая подготовка студентов педвузов и университетов в условиях модернизации системы образования: Материалы XXII Всероссийского семинара преподавателей математики педвузов и университетов. Тверь: ТГУ, 2003. С. 99.
4. *Хуторской А.В.* Ключевые компетенции как компонент личностно-ориентированной парадигмы образования // Народное образование. 2003. № 2. С. 58–64.

Повышение профессионально-предметной компетентности будущего учителя в обучении математическому анализу

Л.П. Латышева

Понятие “компетентность учителя математики” в последнее время подвергается содержательному уточнению и является предметом обсуждения научно-педагогической общественности, в том числе и преподавателей педагогических вузов в рамках научных конференций и семинаров. При этом имеются попытки описать и исследовать различные виды профессиональной компетентности учителя, в том числе социально-личностную, общекультурную, прагматическую, коммуникативную, информационную, научно-методологическую, предметно-мировоззренческую, учебно-познавательную. В частности, В.И. Снегуровой в качестве составляющих профессиональной компетентности учителя математики выделяются такие виды: математическая (в области высшей и элементарной математики); педагогическая; психологическая; методическая; методологическая. Ею высказывается мнение, что в процессе обучения в педагогическом вузе может быть сформирована в достаточной степени только первая из названных, а в отношении остальных четырех можно говорить о формировании начального уровня и создании условий для устойчивого положительного их роста в дальнейшей профессиональной деятельности [7. С. 31]. О.С. Пономарчук и Н.Л. Стефанова, ссылаясь на традиционное рассмотрение профессиональной компетентности как меры соответствия знаний, умений и опыта лиц определенного социально-профессионального статуса реальному уровню сложности выполняемых ими задач, утверждают, что профессиональная компетентность одновременно является профессионально-личностной характеристикой конкретного человека и описанием определенной совокупности знаний и умений; что она включает общую психолого-педагогическую, методическую и предметную компетентность; что предметная компетентность учителя математики обусловлена содержанием предметной компетентности учащихся общеобразовательной школ [7. С. 35–36]. На основе выделенных И.А. Зимней трех основных групп ключевых компетенций (субъект-личностных, относящихся к самому человеку как к личности; субъект-субъектных, относящихся к социальному взаимодействию, общению; деятельности) [2. С. 37] М.Б. Шашкиной обозначены этапы технологии формирования ключевых компетенций в процессе предметной подготовки будущего учителя математики. Это – построение структуры компетенций будущего учителя математики в виде графа; определение возможного вклада конкретного учебного предмета в процесс формирования каждой из ключевых компетенций; проектирование описанных компетенций на предметную подготовку будущего учителя математики; мониторинг качества подготовки будущего учителя математики с позиций ключевых компетенций [7. С. 44]. А.В. Ястребовым установлено, что многие коллекции упражнений и задач, созданные для улучшения чисто математической подготовки студентов объективно и независимо от намерения преподавателя, формируют ключевые компетенции, причем не отдельные из них, а полный список ключевых компетенций по А.В. Хуторскому [8. С. 27–28]. А.В. Багачук и М.В. Литвинцева предлагают профессиональную направленность подготовки будущего учителя математики реализовать через содержание предметной деятельности не только в плане формирования предметной компетентности, но и для целенаправленного формирования надпредметных, ключевых компетентностей. Достижение этого они возлагают на включение в традиционный учебный процесс видов деятельности, адекватных задачам формирования метапредметных умений и навыков благодаря инновационным технологиям (обучение в сотрудничестве, разноуровневое обучение, проектная деятельность), которые служат инструментом для освоения таких ключевых компетентностей, как коммуникативная, информационная, учебно-познавательная [7. С. 45]. В.А. Тестов в профессиональной компетентности учителя математики выделяет три ее вида: содержательную (наличие специальных математических знаний), технологическую (владение методами обучения математике), личностную (обладание определенными чертами личности) [7. С. 65]. Вместе с тем он отмечает, что чаще всего компетентностный подход выдвигается в качестве противовеса утвердившемуся в советской педагогике подходу, представляющему цели и содержание образования в виде понятийной триады: "знания – умения – навыки". "Однако когда мы начинаем говорить о компетенциях не "вообще", а конкретно – в данном случае применительно к математике, то в конечном итоге приходим все к тем же пресловутым зунам" [8. С. 24].

Таким образом, проведенный заведомо неполный анализ трактовок интересующего нас понятия в научно-практической литературе показывает, что категория "профессиональная компетентность" является интегральной характеристикой личности учителя математики, представляющей собой одновременно результат профессионально-педагогической подготовки и предпосылку эффективности практической деятельности. В то же время можно констатировать, что определение понятия профессиональной компетентности учителя математики, построение ее модели и определение методологии формирования компетентной личности остается важной научно-практической задачей.

Принимая во внимание вышеизложенное, мы считаем, что совершенствование в определенных аспектах [3–5] вузовской подготовки будущих учителей математики призвано способствовать развитию у них *профессионально-предметной компетентности*. Последним термином можно обозначить способность личности решать профессиональные задачи на основе владения содержательными и процессуальными компонентами деятельности, связанной с преподаванием учебного предмета. В формировании профессионально-предметной компетентности будущего учителя математики, безусловно, важное внимание следует уделить названным выше трем составляющим: содержательной, технологической, личностной. Причем следует учитывать, что в содержательной составляющей необходимо, в частности, обозначать связь конкретной вузовской математической дисциплины и соответствующего школьного предмета. А в качестве элемента технологической составляющей, по возможности, во все математические курсы полезно включать подготовку студентов к преподаванию (и даже во фрагментах осуществлять его), поскольку в нем в той или иной степени отражены все основные аспекты профессионально-педагогической деятельности.

Каждая из этих составляющих, по нашему мнению, должна способствовать формированию ранней профессионализации в рамках обучения студентов педагогического вуза всем математическим курсам, и, в первую очередь, фундаментальным, базовым, к каким относится математический анализ. Добиться повышения уровня профессионально-предметной компетентности будущего учителя математики в рамках преподавания указанной учебной дисциплины, на наш взгляд, можно при использовании идей предложенной В.Д. Шадриковым концепции фундирования опыта личности, предусматривающей согласование или оптимизацию взаимодействия фундаментальной и профессиональной составляющих в общей структуре вузовской подготовки. “Фундирование – это процесс создания условий (психологических, педагогических, организационно-методических) для актуализации базовых учебных элементов школьной и вузовской математики с последующим теоретическим обобщением структурных единиц, раскрывающим сущность, целостность и трансдисциплинарные связи в направлении профессионализации знаний и формирования личности педагога” [6. С. 183]. Названную концепцию отличает “определение профессионально ориентированной теоретической основы для спиралевидной схемы развертывания и моделирования базовых учебных элементов в направлении их творческого обобщения в системе математической подготовки студентов педвузов” [1. С. 32]. Теоретическое описание и практическое оснащение процесса фундирования учебных элементов (знаний, умений, навыков, математических методов) в рамках изучения математического анализа представлены в подготовленном коллективом авторов под руководством Е.И. Смирнова учебном пособии для студентов педвуза [1].

Речь пойдет о постановке курсов, относящихся к математическому анализу. Вопрос состоит в том, как преподавать такие курсы, максимально способствуя профессионализации педагога в области предстоящей преподавательской деятельности и повышению его профессионально-предметной компетентности. Ответ на него связан с методологическими особенностями постановки этих курсов, предусматривающими решение комплекса важных в математической подготовке студентов педвуза проблем, основу которого составляют задачи, имеющие общеобразовательный характер и профессионально-направленные.

Всякий учебный математический курс можно рассматривать как некое сложное образование, которое может быть осмыслено с разных, взаимодополняющих друг друга позиций. Для наглядности такое осмысление можно представлять происходящим в нескольких "плоскостях" (см. рис. 1). Основополагающим ориентиром в осуществлении технологического подхода, связанного с достижением профессионально-направленного преподавания будущим педагогам математического анализа, на наш взгляд, должны выступать системные свойства курса: интегральность (части и целое), иерархическая структурированность (элементы и уровни), функциональность (изменчивость, открытость, динамичность).

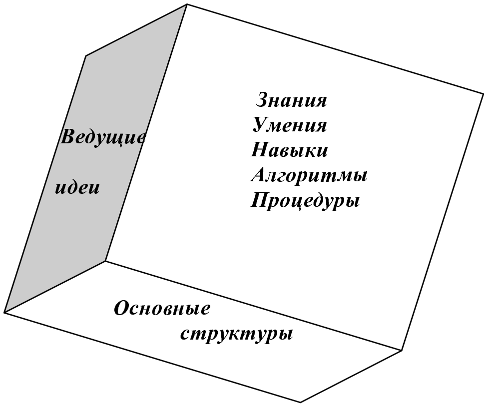


Рис. 1

Кратко проиллюстрируем, какие возможности повышения профессионально-предметной компетентности будущего учителя математики открываются на основе такого ориентира в условиях преподавания курса математического анализа.

1. Формирование *общего, целостного* взгляда на процесс преподавания и обучения математическому анализу:

– в учебной деятельности общий подход к доказательству теорем, решению задач (условие, план, реализация, анализ – оценка результата);

– единая точка зрения на понятия (движение к обобщению); обозначение перспективы выхода на достаточно высокий уровень представления понятия, достигнутый в науке (фундирование: производная Фреше; предел по фильтру; интегралы Лебега, Стилтьеса и т.п.);

– единое, целостное представление о процедурах, аппарате, способах рассуждений (проявление единства достигается в реализации аналогичных подходов; классический пример – применение теоремы Банаха);

– единство в “изоморфных” свойствах (пример: характерные свойства предела, производной, интеграла).

2. Преодоление аморфности процесса преподавания и нацеленность на *структуризацию* разного порядка:

– в ходе учебной деятельности четкая структуризация конспектов лекций;

– содержательная структура учебного материала (понятия: общие, частные; структура теорий и взаимосвязи между ними и т.п.);

– структуризация способов математических рассуждений (схемы: общенаучные; межпредметные; специальные: внутрипредметные);

– “изоморфизм” структур (интерпретации понятий математического анализа; типичный пример: физический и геометрический смысл понятий).

3. *Функциональные* особенности процесса преподавания:

– в учебной деятельности варьирование уровней рассмотрения учебного материала (основные идеи, планирование, “развертывание” и “свертывание”, конструирование и т.п.);

– указание на то, какие функции выполняет то или иное понятие, конструкция, теория (теоретические, прикладные аспекты; перспективы развития);

– функционирование схем рассуждений (линейные структуры, “вложения”, комбинирование);

– представление об аппарате математического анализа (теоретическом, практическом; понятиях, леммах, теоремах и пр.) и динамика его развития.

Считая преподавание курса математического анализа профессионально направленным и имеющим черты определенным образом организованной системы, можно указать также следующие заслуживающие внимания в постановке курса математического анализа умения (гностические и конструктивные), развитие и фундирование которых будут способствовать достижению целей, связанных с повышением уровня профессионально-предметной компетентности будущего учителя математики.

Гностические умения:

– выделять главное в учебном математическом материале;

– кратко и сжато формулировать основную идею доказательства или математической конструкции;

– формулировать гипотезы и намечать пути их проверки;

– производить анализ и синтез математического материала;

– производить сравнение, обобщение и конкретизацию математических объектов и конструкций;

– производить перенос известных методов на новый математический материал;

– делать выводы и рассуждать по аналогии;

– формулировать догадки, интуитивные соображения в виде четких, однозначных положений;

– отвлекаться от второстепенных в данном вопросе деталей ради ясного представления существа дела;

– предвидеть (видеть) в математических построениях вопросы, требующие специального, особенно тщательного и глубокого анализа (так называемые “крайние случаи”);

– критически воспринимать математический материал (замечать и уметь показать, что некое положение или утверждение ложно).

Конструктивные умения:

– составлять план решения математической задачи (доказательства теоремы);

– варьировать уровни представления математического материала, т.е. оформлять его в виде основной идеи; схематического плана; подробного плана; полного изложения со всеми деталями;

– выделять связи между рассматриваемыми математическими объектами и конструкциями и изображать их в схемах, рисунках, графиках, таблицах, диаграммах и т.п.;

– создавать схемы, рисунки, чертежи для выражения в них сути математического содержания;

– изменять условия сложной задачи, чтобы свести ее решение к решению ряда более простых задач;

– варьировать способы достижения цели (отказаться от того пути, который не приводит к желаемым результатам, и найти новый);

– конструировать математические объекты с заданными свойствами (приводить примеры и контрпримеры).

Библиографический список

1. *Буракова Г.Ю., Соловьев А.Ф., Смирнов Е.И.* Дидактический модуль по математическому анализу: теория и практика: Учебное пособие / Под ред. Е.И. Смирнова. Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2002. 181 с.
2. *Зимняя И.А.* Ключевые компетенции – новая парадигма результата образования // Высшее образование сегодня. 2003. № 5. С. 34–42.
3. *Латышева Л.П.* О предметно-методологических знаниях будущего учителя математики // Труды вторых Колмогоровских чтений. Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2004. С. 190–199.
4. *Латышева Л.П.* О профессиональной направленности преподавания курса математического анализа в педагогическом вузе // Проблемы модернизации школьного математического образования: Материалы науч.-практ. конференции учителей математики и преподавателей вузов. Пермь: Изд. Перм. гос. пед. ун-та, 2003. С. 205–210.
5. *Латышева Л.П.* О системной оценке преподавания профильного курса в профессиональной подготовке учителя математики // Методики и технологии математического образования: Сб. трудов II международной научной конференции "Математика. Образование. Культура", 1–3 ноября 2005 г., Россия, г. Тольятти / Под общ. ред. Р.А. Утеевой. В 3-х ч. Ч. 3. Тольятти: ТГУ, 2005. С. 155–160.
6. Подготовка учителя математики: Инновационные подходы: Учебное пособие / Под ред. В.Д. Шадрикова. М.: Гардарики, 2002. 383 с.
7. Проблемы теории и практики обучения математике: Сборник научных работ, представленных на Международную научную конференцию "58 Герценовские чтения" / Под ред. В.В. Орлова. Спб.: Изд-во РГПУ им. А.И. Герцена, 2005. 349 с.
8. Современные проблемы школьного и вузовского математического образования: Тез. докл. XXIV Всерос. семинара преподавателей математики ун-тов и педвузов / Под ред. А.Г. Мордковича, И.К. Кондауровой. М.; Саратов: Ред.-изд. отдел Моск. гор. пед. ун-та. Изд-во Сарат. ун-та, 2005. 236 с.

О концепции, содержании и методике обучения дискретной математике в классах физико-математического профиля

Е.А. Перминов

В статьях [4, 6] обоснована фундаментальная роль дискретной математики (ДМ) в прикладной направленности обучения математике и информатике в школе и вузе, в связи с чем актуальна проблема введения непрерывного профильного обучения ДМ в системе "школа-вуз". Как следует из содержания опубликованных примерных базисных учебных планов профильного обучения [7], представляется целесообразным введение обучения ДМ в рамках физико-математического, информационно-технологического, экономического и, возможно, некоторых других профилей. В статье предлагается программа обучения ДМ учащихся 8–11 классов физико-математического профиля.

1. *Краткая концептуальная характеристика программы.* Физико-математический профиль необходим для подготовки математиков, программистов и инженеров, специализирующихся в области прикладной математики. С учетом специфики этого профиля основной целью программы является ранняя пропедевтика обучения построению полной цепочки использования компьютеров [2]: реальная ситуация, математическая модель, алгоритм, программа, симуляция решения, анализ результатов. Иными словами, основная цель программы – положить начало подготовки будущего "многоборца": постановщика задачи (переводящего ее формулировку на точный математический язык), математика (обеспечивающего разработку модели и алгоритма ее решения), программиста (пишущего, отлаживающего программу и симулирующего результаты ее работы) и в определенной мере заказчика (анализирующего результаты решения задачи). Все это способствует интеграции обучения математике и информатике, поскольку "курс математических основ программирования ... должен базироваться на дискретном анализе (в современной терминологии дискретной математике – Е.А.) и основаниях математики" [1. С. 294]. На этой основе можно будет "довести систему законов обработки информации до той же степени стройности и заразительности, какой сейчас обладает курс математического анализа, читаемый в лучших университетах" (С. 294).

В соответствии с целью обучения по данному профилю в программах предусмотрено изучение элементов ДМ, являющихся фундаментальной основой обучения построению полной цепочки использования компьютеров. Ориентиром при составлении программы послужил перечень доминирующих в ДМ понятий и фактов, играющих важную роль в концепции обучения ДМ математиков, программистов и инженеров, специализирующихся в области прикладной математики [5]. При этом особое внимание уделено ранней пропедевтике понятий графа (бинарного) отношения, алгебры, модели, алгоритма, исполнителя, проблемы разрешимости (на данном языке), классических комбинаторных понятий.

Как следует из содержания программы, она является необходимым дополнением к функционально-ориентированной программе обучения по математике в 8-11 классах и направлена на формирование первоначальных представлений о методах как "непрерывной" математики, так и ДМ.

2. *О методике обучения по программе.* Методика обучения основана на концепции развивающего обучения. Как известно, системы развивающего обучения Л.В. Занкова и Д.Б. Эльконина, В.В. Давыдова имеют в своей основе идеи Л. Выготского о пути обретения знаний посредством объяснительной реконструкции соответствующих обстоятельств жизни. Для такой реконструкции обстоятельств жизни необходимы задачи с занимательным или практическим сюжетным текстом. При правильном подборе таких задач (в частности, на графы) уже с 8 класса можно демонстрировать первые образцы математического моделирования. Образно говоря, необходимы "... такие методы обучения, когда дорога к серьезным проблемам мостится из упрощенных, пусть даже сказочных и шуточных задач" [2]. Только на этом пути можно достичь детской, игровой манеры изложения, доступной восприятию школьников. Перечислим возможные виды задач (имеющиеся в пособии [3]).

1) Нестандартные задачи по программе (на применение в необычных ситуациях понятий и фактов из обычной программы). 2) Занимательные и практические задачи (на обучение переводу задачи на математический язык). 3) Задачи, на основе которых уже в 8 классе начинается пропедевтика понятия модели на основе первого знакомства с пятиэлементным полем ("новой арифметикой"), кольцом остатков, алгеброй высказываний. 4) Задачи по ДМ, объединяющие весь изученный материал по темам: графы; пятиэлементное поле; кольцо остатков; алгебра высказываний; группы и т.д. В процессе решения таких задач углубляются первые представления о понятиях и фактах языка ДМ. 5) Задачи на решение аналогов школьных уравнений в кольце целых чисел, поле рациональных чисел, пятиэлементном поле, кольце остатков от деления на

4 и алгебре высказываний. Решение этих задач завершает пропедевтику понятия модели.

Отметим, что среди задач вида 4 имеются задачи на вычисление значений, тождественные преобразования выражений и решения уравнений в пятиэлементном поле (в “новой” арифметике, в которой нет дробей и отрицательных чисел). Благодаря этому осуществляется уход от “довлеющих рекомендаций с установившимся инструктивным материалом” [2] из арифметики и элементарной алгебры. Очевидно, довлеют свойства действий с дробями, свойства степеней, тождественные преобразования привычных алгебраических выражений. Важно показать, что “мир может быть устроен по-другому” и что, например, в “новой” арифметике $3 + 4 = 2$ или $2 \cdot 3 = 1$.

Естественно, хорошее знание того или иного математического языка подразумевает, в частности, знание и проблемы поиска решения в этом языке. Необходимо научить учащихся выяснять, существует ли ответ на вопрос задачи на данном языке. Предлагаются следующие виды задач: 6) Задачи с неверно составленным условием. 7) Задачи с ненайденным решением. 8) Задачи, которые не имеют решения (на данном языке). 9) Задачи с бесконечным числом действий. 10) Задачи с конечным числом действий. 11) Задачи на составление эффективного алгоритма.

Как видно из перечня задач, возврат к изучаемым понятиям ДМ происходит в каждом следующем классе. Спиралевидное построение содержания, при котором изучение темы не исчерпывается во всех деталях сразу же в течение одного учебного года, позволяет осуществить медленное, тонкое приспособление знания к задаче, облегчаемое и за счет использования внутриматематических и межпредметных связей.

3. *Программа обучения.* С учетом целей обучения и объема содержания на обучение по программе в 8–9 классах предусматривается 1 час в неделю, в 10–11 классах – 2 часа. Отметим, что в соответствии с разделом программы для 8–9 классов написано учебное пособие [3].

8 класс .

Понятие графа. Маршруты, цепи и циклы. Применение графов в решении занимательных и практических задач.

Шифры и остатки. Действия с остатками. Законы действий с остатками. Вращения фигур. Необычные таблицы сложения и умножения. Законы действий алгебры пятиугольника (“новой” арифметики).

Логические умножение, сложение и отрицание. Вычисление значений и тождественные преобразования логических выражений. Физический смысл логических действий.

Уравнения с параметрами. Задачи на свойства натуральных чисел. Нестандартные задачи. Решения Смекалкина, Ленивкина и Кнопкина.

9 класс.

Графы и группы. Связные графы. Деревья. Равные (изоморфные) графы. Понятие группы. Примеры групп. Группа симметрий (автоморфизмов) графа.

Логические умозаключения. Анализ текстов и логические выражения. Вычисление значений логических выражений. Законы алгебры высказываний. Доказательство логических тождеств. Логические тождества и электрические схемы.

Решение уравнений в различных числовых множествах. Свойства операций алгебры пятиугольника. Решение уравнений в алгебре пятиугольника (в том числе и с параметрами). Свойства операций алгебры (кольца) остатков. Решение уравнений в алгебре остатков. Решение уравнений в алгебре высказываний.

Метод перебора в нахождении целых корней уравнений и других задачах. Метод перебора в занимательных задачах. Комбинаторные задачи. Произведение множеств. Различные нестандартные задачи.

К сожалению, рамки статьи не позволяют привести все ссылки на многочисленную литературу, указаную в [3] в соответствующих местах программы для 10–11 классов.

10 класс.

Правила суммы и произведения. Размещения и перестановки (с повторениями). Сочетания (с повторениями). Бином Ньютона. Разложение предметов по ящикам (чисел на слагаемые). Примеры рекурентных соотношений и производящих функций и их применение в решении комбинаторных задач. Практические задачи на целочисленное решение уравнений.

Виды задач: задачи с неправильно составленным условием; нерешенные задачи; задачи, которые не имеют решения; задачи с бесконечным и с конечным числом действий (исполнителя). Вычисления на различных микрокалькуляторах. Возможность вычислить точный ответ задачи. Число действий, выполненных при вычислении точного ответа. Примеры вычислений Кнопкина, Ленивкина и Смекалкина [3]. Алгоритмы решений квадратных уравнений в различных алгебрах.

Устройство и работа машины Поста. Примеры программ. Об арифметических действиях с натуральными числами. Эффективные алгоритмы работы машины Поста.

Примеры бинарных отношений (равенства, сравнения, делимости нацело на множестве целых чисел, параллельности и перпендикулярности на множестве прямых и др.). Свойства бинарных отношений. Декартов квадрат множества и его графическое изображение (на примере трех–четырехэлементного множества). Определение бинарного отношения как подмножества декартова квадрата множества. Примеры бинарных отношений на конечном (3, 4, 5-элементном) множестве. Связь между бинарными отношениями и графами. Ориентированные и неориентированные графы. Изоморфные (равные) графы и бинарные отношения. Машинное представление графов. Сеть. Граф сети.

Отображения и функции. Способы задания отображений.

Примеры частично упорядоченных множеств (ч.у. множеств): множество целых чисел с обычным отношением порядка или с отношением "делиться нацело"; множество всех подмножеств данного множества с отношением включения и др. Сравнимые и несравнимые элементы ч.у. множества. Определение ч.у. множества как множества с рефлексивным, антисимметричным и транзитивным бинарным отношением. Диаграмма ч.у. множества. Изоморфные (равные) ч.у. множества. Описание "малых" ч.у. множеств.

Пересечение двух сравнимых элементов ч.у. множества. Пересечение $a \wedge b$ двух несравнимых элементов a, b ч.у. множества как элемент, наибольший среди всех элементов ч.у. множества, меньших a, b одновременно.

Полурешетка. Полурешетка как алгебра с одной операцией. Таблицы Кэли полурешеток. Полугруппа. Примеры полугрупп .

11 класс .

Понятие высказывательной формы или предиката от одной переменной. Примеры предикатов. Область определения и множество истинности предиката. Логические операции над предикатами. Связь операций над предикатами с их множествами истинности. Кванторы. Двухместные предикаты. Определения уравнения, тождества, неравенства, функции и периодической функции. Отрицание высказываний, содержащих кванторы. Понятие о логике предикатов.

Строение математической теоремы. Виды теорем.

Понятие унарной, бинарной и n-арной алгебраической операции и алгебры. Примеры алгебр. Понятие кольца. Примеры колец. Кольцо вычетов и криптография. Примеры бинарных и тернарных отношений. Понятие n-арного отношения. Понятие математической модели, языка и подъязыка. О языках "непрерывной" математики и ДМ.

О математической лингвистике: основные понятия; типы синтаксических языков; принципы синтаксической простоты. Анализ текстов художественных произведений.

Алгоритмы: построение циркулем и линейкой; нахождение наибольшего общего делителя двух натуральных чисел; решение системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными; поиск эйлеровой цепи в графе.

Понятие алгоритма. Определенность, массовость, результативность алгоритма.

Условные микрокалькуляторы и их программы. Микрокалькуляторы с возможностями вычислений $x + y$, $x - y$, $1 : x$ $(x \neq 0)$; $xy + x + y + 1$ и другие.

Устройство и команды машины Тьюринга. Примеры программ машины Тьюринга. Программа сложения натуральных чисел. Понятие автомата. Примеры автоматов. Понятие исполнителя. Уточнение понятие алгоритма. Эквивалентные и эффективные алгоритмы и их примеры. От машины Поста и Тьюринга к ЭВМ.

Неразрешимость задачи о трисекции угла и квадратуре круга. О разрешимости уравнений в радикалах. О разрешимости уравнений в алгебре пятиугольника и кольце вычетов. О распознавании конечных изоморфных (равных) графов и ч.у. множеств.

О проблеме разрешимости. Разрешающие алгоритмы. Полиномиальное и экспоненциальное время работы алгоритма. Примеры алгоритмически разрешимых задач.

О процессе математизации наук. О классификации видов математического моделирования. Машинный эксперимент и его отличие от “натурного”. ДМ как фундаментальная основа математического моделирования. Понятие полной цепочки использования компьютеров. Этапы решения задачи с использованием компьютера: постановка задачи; выбор математического языка; разработка модели; разработка алгоритма, написание и отладка программы; симуляция и анализ результатов. Примеры.

Отметим, что в [3] приведены учебно-тематический план работы по программе и программа-минимум, отражающая уровень обязательных требований к обучению.

Библиографический список

1. *Ершов А.П.* Избранные труды. Новосибирск: Наука, Сибирская издат. фирма, 1994.

2. *Красовский Н.Н.* Математическое моделирование в школе. Известия УрГУ. 1995. № 4. С. 12–24.
3. *Перминов Е.А.* Дискретная математика. Учеб. пособие для 8–9 классов средней общеобр. школы. Екатеринбург: ИРРО, 2004.
4. *Перминов Е.А.* О проблемах и перспективах обучения ДМ в школе. Сборник трудов международной научной конференции “Проблемы математического образования и культуры”. Тольятти: ТГУ, 2004. С. 77–79.
5. *Перминов Е.А.* О различных концепциях обучения дискретной математике. Сб. трудов II Международной научной конференции “Математика. Образование. Культура”. Тольятти: ТГУ, 2005. С. 129–133.
6. *Перминов Е.А.* О роли дискретной математики в методологии моделирования // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. Вып. 7. Киров: Изд-во ВятГУ, 2005. С. 23–31.
7. Федеральный базисный учебный план и примерные учебные планы для образовательных учреждений Российской Федерации, реализующих программы общего образования // Российское образование. 2005. № 1. С. 37–55.

Педагогический проект “Компьютерная поддержка курса математики в техническом вузе”

О.Р. Воронцова, С.Ф. Катержина

О прикладной направленности курса математики в техническом вузе говорят сейчас много. Особое внимание при преподавании математики в инженерных вузах должно быть обращено на соединение абстрактного с конкретным. Нельзя оставлять у студентов впечатления о математике как о чем-то неземном. Она должна стать прикладной. За каждым математическим приемом необходимо оставить представление о реальных задачах практической деятельности инженера. Именно это непрерывное сопоставление выраженного через математические символы внутреннего и скрытого содержания, полученного в результате идеализации явлений с действительностью, лежит в основе понимания и творчества. Есть разные подходы к решению этой проблемы. Мы хотим предложить вниманию педагогический проект, реализующий один из подходов.

Проект возник при решении двуединой задачи: преподавать математику наглядно и доступно и показать студентам технического вуза широкий спектр прикладных математических задач, органично сочетать визуальный и вербальный языки представления информации в учебном процессе. Это продиктовано следующим: с одной стороны - контингент абитуриентов – средний балл ЕГЭ по математике 50 (его можно получить, не решая задачи блока “С”), а в коммерческие группы принимаем чуть ли не всех, кто пожелает, а порой и тех, кто не “жаждет” (нет заблаговременного комплектования контингента абитуриентов), с другой стороны - требования к математическому образованию будущих инженеров:

• математические понятия и методы решения задач должны иметь достаточную степень обобщения, чтобы обеспечить широкие возможности их применения;

• используемые математические понятия должны содержать точные определения, основные утверждения должны быть доказаны;

• изложение материала должно быть логически строгим, а последовательность его изучения согласована с потребностями смежных и специальных дисциплин;

• курс математики должен заложить основы применения полученных знаний для решения прикладных задач.

Содержательное обоснование проекта.

Актуальность, научно-методическая новизна, практическая значимость.

Математическая грамотность является важной частью профессиональных знаний и умений инженера. Исходя из этого, содержанием проекта является разработка и создание условий для приобретения будущим инженером профессионально-ориентированных знаний и умений. Такие знания и умения позволят студентам технического вуза решать свои профессиональные задачи на качественно более высоком уровне. В данном проекте используется новый методический подход к подаче учебного материала, который позволяет добраться до элемента, не теряя видения целого, соединяя рассказ с показом, что дает полный простор для творческой инициативы преподавателю и студенту. Проект может быть использован или как ориентировочная основа при изучении разделов курса, или как интегративная завершающая фаза после изучения каждого раздела.

Цель проекта

– повышение уровня математической грамотности и математической культуры студентов технического вуза;

– развитие математической грамотности параллельно с приобретением профессионально-ориентированных знаний и умений;

– освобождение времени для изучения “сложных” специальных разделов курса высшей математики – дискретная математика, гармонический анализ и др.

В результате будущий инженер будет способен свободно, уместно и адекватно использовать математические знания в своей профессионально-инженерной деятельности.

Задача проекта

Важнейшей задачей проекта является разработка системы математической подготовки студентов технического вуза с использованием учебно-методического комплекса, который предоставит новые возможности визуализации и индивидуализации обучения математике студентов в техническом вузе.

Перечень ожидаемых позитивных результатов:

– усиление мотивации у студентов к изучению математики;

– осознание того, что математика- инструмент для решения инженерных задач;

– переход на качественно новый современный уровень преподавания с использованием новых информационных технологий;

– осознание своей причастности к развитию новых тенденций в образовании;

– улучшение взаимопонимания между студентом и преподавателем;

– быстрое освоение больших объемов учебной информации;

– развитие способности к усвоению динамических пространственных задач.

Описание проекта

На первом курсе студенты технического вуза изучают следующие разделы высшей математики: векторная алгебра, аналитическая геометрия, теория пределов, интегральное исчисление и дифференциальные уравнения. Мы постарались скомпоновать данные разделы в форму “здания”, где каждой теме отведено свое место, что делает основную идею интегрального исчисления более выпуклой и запоминающейся.

Схематично “здание” состоит из “фундамента” – методологический уровень, “корпуса” – теоретический уровень, “крыши” – прикладной уровень. Проиллюстрируем сконструированное авторами “здание” на примере темы “Интеграл” курса математики в техническом вузе (рис. 1).

Рис. 1

“Фундамент” здания содержит основные опорные понятия, “корпус” – теоретическое содержание темы “Интеграл”, “крыша” – приложение интеграла к решению практических задач. Каждый элемент “здания” наполнен учебным материалом, до которого можно добраться, не теряя видения целого “здания” темы. Электронная составляющая проекта сделана в виде автоматически запускающейся оболочки с интуитивно понятным интерфейсом. Меню обеспечивает быстрый доступ к каждому элементу “здания”.

Предложенный способ подачи учебного материала позволит отойти от традиционно линейной и монотонно усыпляющей манеры изложения. Проект позволит студенту вместе с преподавателем получать удовольствие от увлекательного процесса познания математики, не только силой воображения раздвигая стены студенческой аудитории, а с помощью новейших технологий, погружающих студента в яркий красочный мир видео, трехмерной анимации, который оказывает на него сильное эмоциональное воздействие.

В завершение хотим сказать, что проект осуществляется в Костромском государственном технологическом университете для студентов специальностей “Защита в чрезвычайных ситуациях” и “Безопасность производственных процессов”.

“Родиноведение” на занятиях по методике проведения внеклассной работы (математика)

Н.М. Епифанова

И.Я. Лернер, занимавшийся проблемами формирования мировоззрения, отмечал взаимосвязь усвоенных человеком мировоззренческих связей с фундаментальными личностными образованиями: потребностями и ценностными ориентациями. По его мнению, одним из показателей сформированности мировоззрения является “соотнесенность знаний с адекватной им системой ценностей и жизненных принципов, ставших личной установкой, позицией человека” [2].

Концепция ценностного подхода в изучении математики предполагает реализацию в ее содержании социокультурного направления и обращение к историзму как средству раскрытия культурных ценностей математического характера. Соединение истории и математики способствует расширению математического кругозора, изучению математики во времени; позволяет раскрыть особенности взаимодействия человека и математики; оказывает существенное влияние на формирование мировоззрения.

Осознанная преподавателем потребность приобщения студентов к духовной красоте и нравственным ценностям способствует поиску “пути создания оптимальных условий для свободного развития, активного обогащения интеллектуального и эмоционального опыта” [2] студентов.

Математические экскурсии – это интересная, но редко используемая преподавателями методики математики форма проведения занятий. Методически грамотно подготовленные и проведенные преподавателем экскурсии способствуют повышению культурного кругозора студентов, лучшему пониманию ими отдельных вопросов курса математики, формированию целостной культуры мышления, воспитанию уважения к своей малой Родине и восхищения ею.

На кафедре теории и методики обучения математике в рамках курса “Методика проведения внеклассной работы по математике” со студентами ежегодно проводится четырехчасовая экскурсия по городу. Традиционно тематика её формируется по трем направлениям: “Математика в архитектуре города Ярославля”, “За фасадами школьных зданий”, “Юбилею посвящается”. Некоторые фрагменты экскурсии готовят и проводят по заданию преподавателя сами студенты.

Например, по ходу проведения фрагмента экскурсии около церкви Богоявления (XVII век) содокладчиками преподавателя были три группы студентов.

Первая группа, напомнив суть принципа “золотого сечения”, познакомила остальных слушателей с результатами своих исследований пропорционального строя церкви Богоявления. Композиция архитектурного облика храма характеризуется восьмью членами золотого сечения. Как и другие сооружения, построенные в золотой пропорции, храм поражает своей соразмерностью, законченностью, красотой. Ибо, как писал Лука Пачоли в своем знаменитом трактате “Божественная пропорция” (1509 г.), “именно она придает сооружению гармонию”, и “хотя она невидима непосредственно, но всегда ощутима, подобно красоте духовной”.

Вторая группа студентов рассказывала о роли геометрии в архитектуре. Только следуя законам геометрии, архитекторы древности могли создавать свои шедевры. За многие века роль геометрии не изменилась. Она по-прежнему была и остается “грамматикой архитектуры” [1]. Красота геометрических форм, эстетика линий фасада, арок, крыльца, окон, декоративных закомар, барабанов с небольшими маковичными главами завораживают. Изразчатый декор фасадов, придающий церкви роскошь и пышность; широкие цветные фризы, четко оконтуривающие силуэты приделов и алтарей; вертикальные гирлянды отдельных изразцов, усиливающие впечатление стройности пилястр, определяют художественную идею сооружения. Керамический декор Богоявленской церкви оставляет впечатление бесконечного, почти фантастического разнообразия и предельной насыщенности цветовой гаммы, хотя, согласно результатам мини-исследования, заранее проведенного студентами, данный эффект достигнут всего с помощью сочетания пяти видов изразцов, каждый из которых имеет всего пять вариантов раскраски.

Рассказ студентов третьей группы посвящен способам построения древнерусскими художниками перспективных изображений [3]. При рассматривании фресковой живописи обращалось внимание студентов на использование древними мастерами следующих видов перспективы: обратной перспективы, сдвига “на зрителя”, усиленно-сходящейся перспективы, чередования перспективных форм обратной и усиленно-сходящейся перспективы, параллельной перспективы, деформации волнообразной формы в системе обратной перспективы... Русскими изографами, как и художниками эпохи Возрождения, был привнесен немалый вклад в создание теории перспективы, получившей дальнейшее развитие в трудах Ж. Дезарга (1591–1661), И. Ламберта (1728–1777), Ж. Понселе (1788–1867), Я. Штейнера (1796–1863).

Содержание фрагмента экскурсии "За фасадами школьных зданий" также разрабатывается студентами и традиционно состоит из следующих фрагментов: "Михайло Розин – первый в ярославской школе методист-математик", "Преподаватели учебных заведений Ярославля XIX и начала XX века", "Авторы школьных учебников", "Гимназист Лев Богданович – автор задач, вошедших в школьные учебники геометрии".

Содержание третьего раздела экскурсии каждый год меняется. Например, в 2000 году фрагмент экскурсии был посвящен столетию технического училища, построенного на средства купца Н.П. Пастухова; в 2003 году – юбилею А.Н. Колмогорова; в 2005 году – П.А. Критскому (1865–1922 гг.): краеведу, журналисту, педагогу, организатору и руководителю ярославских библиотек, члену Губернской ученой архивной комиссии, одному из руководителей Ярославского естественно-исторического общества, автору нескольких путеводителей-справочников по городам Ярославского края, а также учебника для учащихся "Наш край. Ярославская губерния. Опыт родиноведения" (одного из лучших по историографии края), инициатору развития экскурсионного дела в Ярославской губернии.

Студенты, которым была поручена подготовка содержания этого фрагмента экскурсии:

- посетили чтения, посвященные памяти П.А. Критского;
- ознакомились

– с архивными материалами библиотек, в организации которых П.А. Критский принимал участие (Пушкинской библиотеки, известной ныне как областная Некрасовская; детской библиотеки им. И.А. Крылова; юношеской библиотеки им. Н.А. Некрасова, открытой на средства жены брата поэта – Н.П. Некрасовой);

– с воспоминаниями Михаила Чехова, брата А.П. Чехова, о П.А. Критском;

– со стихами Софьи Германовны Хренковой, друга и коллеги Петра Андреевича, которая в ярославской тюрьме в знак протеста против жандармского произвола облила себя керосином и сгорела заживо;

– с материалами "Всероссийского союза учителей социалистов-революционеров", активным членом которого был П.А. Критский;

– с литературным наследием П.А. Критского (статьями, напечатанными в ярославских газетах "Северный край" и "Голос" и журнале "Экскурсант", книгами, справочниками, путеводителями);

- прошлись по переулку, носящему имя П.А. Критского.

Из публикаций студенты знали, что П.А. Критский после окончания Московского учительского института преподавал историю и географию в городских училищах Углича и Ярославля. Он участвовал вместе с уездным предводителем дворянства города Углича Я.С. Колмогоровым, дедом А.Н. Колмогорова, в работе Губернской ученой архивной комиссии и в реставрации дворца царевича Дмитрия. Был женат на Анне Николаевне Евреиновой – родственнице Я.С. Колмогорова. Дом на улице Пробойной в Ярославле, где жила семья Колмогоровых, расположен рядом со зданием Ярославского Коммерческого училища и Торговой школы, где с 1909 по 1915 годы работал учителем русского языка и литературы П.А. Критский.

В ходе подготовки материалов о П.А. Критском студентами на обложке книги “Наш край. Ярославская губерния. Опыт родиноведения”, изданной Школьной Комиссией Ярославского Губернского Земства, была обнаружена надпись: “Многоуважаемому сотруднику по Ярославскому гор. училищу Я.С. Колмогорову от автора. 17/1Х, 1907.”, выполненная рукой П.А. Критского.


П. А. Критскій.

12.940.

Изданіе Школьной Коммиссіи Ярославскаго Губернскаго Земства.

Многоуважаемому сотруднику по Ярославскому гор. училищ Я. С. Колмогорову от автора. 17/ix, 1907.

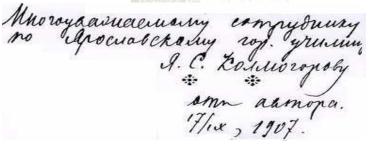
Нашъ Край.

Ярославская губернія

Опытъ родиновѣдѣнія.

Съ приложеніемъ карты губерніи и 65 рисунками въ текстѣ.

Ярославль. Типолитографія Губернской Земской Управы. 1907.



Титульный лист книги П.А. Критского Автограф П.А. Критского

Содержание записи свидетельствует о наличии дружеских отношений между этими двумя неординарными личностями. Вероятно, в детстве А.Н. Колмогоров не только читал книгу П.А. Критского, но и лично был знаком с ее автором. Студенты с удовлетворением отметили, что подвижническая деятельность П.А. Критского на благо процветания Ярославля, сохранения истории и культуры города была по достоинству оценена потомками. Одному из переулков города было присвоено имя П.А. Критского.

В процессе подготовки любого фрагмента экскурсии, выступая в новой социальной роли – солектора, консультанта, эксперта, докладчика, студенты, расширяя свой математический кругозор, одновременно знакомятся с уникальными личностями в истории Ярославского края и получают колоссальный опыт "родиноведения"; имеют возможность "почувствовать связь времен"; прикоснуться к общечеловеческим ценностям.

Библиографический список

1. *Ле Корбюзье.* Архитектура XX века. М.: Прогресс, 1977. Изд. 2.
2. *Лернер И.Я.* Процесс формирования коммунистического мировоззрения как педагогическая проблема // Процесс формирования коммунистического мировоззрения школьников. М., 1974.
3. *Эйдес Л.М.* Занимательные проекции. От пещерного рисунка до кинопанорамы. М.: Просвещение, 1980.

"Минимальный базис" как средство оптимизации процесса обучения решению задач

О.А. Мазуренко

Термин "оптимизация" наиболее приемлем в ряду "улучшение", "повышение эффективности", "совершенствование".

В педагогике концепция "оптимизации" первоначально подробно разрабатывалась Ю.К. Бабанским применительно ко всему учебно-воспитательному комплексу. Позднее появились исследования по отдельным аспектам оптимизации образовательного процесса. Ряд работ имеет ярко выраженный методический характер, но работ по методике преподавания математики, посвященных оптимизации процесса обучения, немного.

Под оптимизацией понимается не любое совершенствование учебного процесса, а его рациональное, научно обоснованное построение, представляющее собой определенную последовательность действий преподавателя и учащихся и отвечающее ряду установленных критериев. Вообще, оптимизация характеризуется как научно обоснованный выбор и осуществление наилучшего для данных условий варианта обучения с точки зрения решения его задач и рациональности затрат времени обучающихся и преподавателей и при этом не является каким-то особым приемом или методом обучения чему-либо. Это подход к построению процесса обучения, комплексный научный подход к его улучшению и совершенствованию, а также общий принцип, определяющий выбор педагогических решений, в том числе и методов обучения.

С момента разработки идей оптимизации в школе прошло более полувека, но должного развития и активного внедрения в практику школы они так и не получили, хотя интуитивно любой учитель стремится обучать наилучшим образом, как он это понимает и как умеет.

Одним из видов оптимизации учебного процесса является его интенсификация. В теории обучения под интенсификацией понимается такое совершенствование и активизация учебного процесса, при которых достигают максимальной эффективности за минимально возможное учебное время при минимальных затратах. Интенсификация способствует оптимизации, но не тождественна ей. Использование приемов интенсивного обучения может содействовать оптимизации, но лишь в определенных конкретных условиях, ибо интенсификация обучения нередко ведет к перегрузкам учеников и учителей, и ее "надо умело сочетать с выбором оптимальных вариантов учебного процесса для данного класса,…выбором наиболее рациональных для данных условий методов, форм и средств обучения активизирующих, но не перегружающих учеников…" [1]. Выход из этого положения некоторые школьники находят в саморазгрузке (они не учат отдельные темы или разделы по своему усмотрению), т.е. фактически происходит стихийная переработка школьниками учебных программ.

Интенсификация обучения, так же как и оптимизация, предполагает применение более эффективных средств, использование передовых методов отбора и организации учебного материала, рационализацию труда учителя и учащегося и определяется двумя параметрами: результативностью и экономией времени. С ее помощью можно решать три задачи:

1) повышение качества обучения (достижение более высоких результатов обучения, получаемых за данное время);

2) экономия учебного времени (сокращение учебного времени, затрачиваемого на получение заданных результатов);

3) повышение качества обучения в условиях экономии времени.

Для образовательного процесса возможны следующие направления интенсификации:

– оптимальный отбор содержания образования;
– совершенствование организации учебной деятельности учащихся;
– использование новых технологий.

В современных условиях реформирования системы образования потребность в оптимизации процесса обучения не уменьшается, а, наоборот, возрастает. Но это не означает ее востребованности практикой. За годы существования школы в педагогике и методике было проведено немало исследований, но приживались лишь те инновации, которые были доступны и понятны рядовому учителю и брались им на вооружение.

Доступными для учителя-практика компонентами оптимизации являются формы, методы и средства обучения. В обучении математике одним из таких средств являются задачи.

Проблема обучения учащихся решению математических задач является одной из актуальных в методике преподавания математики. Известно, что решение задач является основным полем применения теоретических знаний и основным способом организации учебной деятельности обучаемых. Умением решать задачи характеризуется в первую очередь состояние математической подготовки учащихся, глубина усвоения ими учебного материала. Поэтому вполне оправдано то повышенное внимание, которое уделяется решению задач при обучении математике.

Несмотря на внедрение результатов исследований, имеющиеся успехи не снижают актуальности проблемы: обладая определенными знаниями теории, учащиеся испытывают серьезные затруднения при решении математических задач, а умение решать задачи часто оказывается несформированным.

Наибольшие затруднения вызывает решение геометрических задач. Отмечается особенно низкая результативность при их решении, это объясняется и относительной сложностью этого предмета по сравнению с другими дисциплинами математического цикла, и традиционно небольшим количеством времени, отведенного на его изучение. По-прежнему актуальным остается вопрос: как в этих условиях обеспечить высокий уровень знаний учащихся? В связи с этим приоритетной становится проблема оптимизации обучения решению планиметрических задач как основного вида учебной деятельности, в процессе которой школьниками усваиваются базовые геометрические понятия и факты, формируется их логическое мышление, развиваются эвристические и исследовательские умения, творческие способности.

На первый взгляд кажется, что в процессе решения задач учащиеся и так обучаются решению задач – как бы автоматически. В геометрии это не совсем так. Процесс решения задачи, как и любая деятельность, должен быть определенным образом организован и может стать хорошим средством обучения лишь при определенных условиях. Поэтому основное внимание при формировании умений решать задачи следует уделить их отбору и использованию обучающих воздействий каждой задачи.

Более полувека назад И.В. Арнольд [2] писал: “Авторы задач должны были бы, в идеале, в состоянии ответить на вопросы такого типа: - Какую цель преследует данная задача?... Необходимо ли помещение именно этой задачи в сборнике для этих целей?... Интересна ли фабула задачи для учащихся, увлекательна ли, естественна ли постановка вопроса, вызывает ли она у учащихся интерес к ответу или способу решения, чем именно? Нельзя ли этот интерес повысить? Когда именно учащийся может самостоятельно решить данную задачу, что он для этого должен понять, узнать, уметь представить себе? А если он не сможет этого сделать, о чем это свидетельствует? Как эта задача связана с предшествующей и последующей работой учащихся? Почему она помещена именно в этом месте сборника, а не в другом и т.п.”

Эти требования к подбору и расположению задач до сих пор не выполнены ни авторами современных сборников задач и учебников, ни учителями.

Исходя из этого, каждую задачу следует считать объектом тщательного изучения, а ее решение – объектом конструирования и изобретения. Этот аспект проблемы методики обучения решению задач отмечен Н.Х. Розовым [3].

Чтобы сформировать у учащихся навык в решении задач, умение правильно и рационально анализировать условие задачи и культурно вести поиск решения, в каждой теме курса геометрии общеобразовательной школы необходимо выделить “ядро” – основные, “общеобязательные” факты и идеи. Затем следует подобрать минимальное число задач, в каждой из которых наиболее ясно и выпукло проявляется один определенный факт или одна определенная идея из числа вошедших в “ядро”, что за разумное время создаст “массовому” школьнику благоприятные условия для решения любых других задач по данной теме (или по нескольким темам). Конечно, даже отличное освоение учащимся всего комплекса базисных задач не является гарантией успешного решения им любой другой задачи. Ведь умение найти нужную комбинацию даже хорошо знакомых идей и фактов в новой (тем более – в нестандартной) ситуации определяется, прежде всего, творческим потенциалом индивидуума. Однако учебной цели в рамках каждой темы курса на основе использования "базисных задач" удастся достичь быстрее и эффективнее" [3]. Кроме того, "формирование "базисов" имело бы особо важное значение для реального обеспечения дифференцированного обучения в рамках одного класса. Разделив комплекс базисных задач на соответствующие уровни, учитель может предложить одним ученикам получать задания в объеме "минимального базиса", другие будут осваивать материал полностью с последующим переходом к "комплексным" задачам, а наиболее продвинутые - сразу решать более серьезные задачи. При этом учитель имеет возможность определять объем изучения "оболочки" для каждого ученика индивидуально, в зависимости от его уровня подготовленности, реальных возможностей и личного интереса.

Стоит отметить, что в настоящее время в школе уделяется большое внимание количеству решаемых задач, нежели качеству. При этом серьезным недостатком является не только однообразие задач, но и то, что геометрические задачи решаются вне связи друг с другом.

Как показывает анализ научно-методической литературы, идея рассмотрения взаимосвязанных задач в методике преподавания математики не нова - блоки взаимосвязанных задач не раз становились объектом исследования многих авторов. Изучению подвергалась и методика обучения учащихся навыкам работы с такими блоками. Однако недостаточно разработан вопрос отбора таких задач.

Важно учесть, что для подбора блоков таких задач требуются компетентность и профессиональная эрудиция, а также достаточное количество времени, которым не обладают современные учителя с их возрастающей нагрузкой.

Поэтому возникает необходимость проведения специальных исследований, направленных на составление такой системы задач и разработки такой методики их решения, которая позволила бы повысить эффективность обучения, ликвидировать перегрузку учащихся, облегчить работу учителя.

Наиболее естественным для математики является описание обязательных результатов обучения в виде системы задач, которую называют обязательными результатами обучения. Обязательные результаты обучения по каждому предмету математического цикла задаются в виде конкретных учебных задач, которые должен уметь решать каждый учащийся на выходе из ступени обучения. Выбор этих задач отвечает двум важнейшим критериям: умение решать их должно обеспечивать выполнение программных требований и давать возможность дальнейшего изучения курса математики, применения полученных умений в смежных предметах.

Соответствующий список задач (обязательных) должен быть кратким – иначе теряется смысл его выделения, так как в противном случае не будет того организующего влияния на процесс обучения, который он призван оказывать. В то же время список задач должен быть полным с точки зрения обеспечения математической подготовки учащихся. Поэтому можно считать, что обязательные результаты обучения представляют собой систему именно базисных задач. Умение решать соответствующие задачи создает у ученика некоторый фундамент знаний, на который можно опереться при дальнейшем обучении, который позволяет воспринимать, понимать и усваивать последующий материал.

Эти задачи также включают в себя достаточное число стандартных ситуаций, требующих применения наиболее распространенных приемов и методов решения. Если ученик действительно владеет умением решать все эти задачи, то на самом деле он может решать и большое число других.

Понятно, что выбор базисных задач является в определенной мере условным. Не столько важно, какие именно задачи взяты в качестве представителей, сколько то, чтобы в своей совокупности они обеспечивали выполнение всех требований и создавали некоторый фундамент, поддерживающий здание знаний и умений школьника, а также были доступны основной массе учащихся.

Нами разработан такой комплекс задач по теме “Трапеция”. Поскольку трапеция и ее свойства изучаются на протяжении всего курса планиметрии в школе, мы объединили базисные задачи в следующие блоки: “Трапеция и ее свойства”, “Средняя линия трапеции”, “Трапеция и окружность”, “Площадь трапеции”. Каждый из этих блоков содержит от четырех до семи базисных задач. Кроме того, в достаточном количестве подобраны упражнения и задачи, на которых хорошо иллюстрируется применение одной или нескольких базисных задач.

Библиографический список

1. *Бабанский Ю.К.* Интенсификация процесса обучения // Биология в школе. 1987. № 1. С. 3–6.
2. *Арнольд И.В.* Принцип отбора и составления арифметических задач // Известия АПН РСФСР. 1946. № 6.
3. *Розов Н.Х.* “Базисы в пространстве задач” как элемент методики преподавания математики // Ученые записки ИИО РАО. М., 1999. С. 83–85. Вып. 3.

Глава 4

История математики и математического образования

Берестяная грамота № 715 XIII века с числовым заклинанием

Р.А. Симонов

Эта грамота, получившая номер 715, относится к документам чрезвычайно редкого типа. Она найдена в 1990 г. Новгородской археологической экспедицией (руководитель академик В.Л. Янин) в слоях XIII века:

тридевя<т>о анеело тридевя ароханело
избави раба (бо)жея михея трасавиче
молитвами святыя богородичя[1].

На момент обнаружения она оказалась самым древним русским заговором, но спустя некоторое время отыскалась более древняя заговорная грамота [1. С. 104–107]. Берестяная грамота № 715 была плотно свернутой и, по мнению академика А.А. Зализняка, использовалась для излечения больного от лихорадки в качестве амулета-науза путем привязывания к одежде или надевания на шнурке на шею. Заговорный текст имел следующее содержание (в переводе):

Тридевять ангелов, тридевять архангелов,
избавьте раба божия Михея от лихорадки
молитвами святой Богородицы.

Поскольку слово *тридевять* будет находиться в центре внимания в настоящей статье, то воспроизвожу высказывание о нем А.А. Зализняка полностью: “... Слово *тридевять* несомненно связано с культурой и мифопоэтикой дохристианской эпохи (ср. хотя бы фольклорные *за тридевять земель, в тридевятом царстве* и т.п.). Слову *тридевять* в данном тексте явно не следует приписывать точного арифметического значения (скажем, ‘27’): это мифологизированное обозначение некоего большого количества, соединяющее в себе сакральные свойства числа девять и числа три” [1. С. 105]. Для дальнейшего изложения хочу подчеркнуть, что А.А. Зализняк употребляемое в грамоте № 715 слово *тридевять* не

---

[1] “Я” выражено во всех случаях буквой “юс малый”.

считает имеющим точного значения 27, а полагает выражающим некое большое (не любое!) количество.

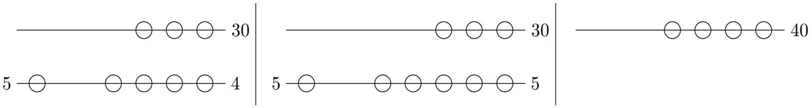
В своем исследовании по древненовгородскому диалекту А.А. Зализняк подтвердил первоначальный анализ грамоты, но оставил в стороне высказанное ранее суждение о слове *тридевять*, дважды употребленном в грамоте № 715 [2. С. 428–429].

Недавно к анализу грамоты № 715 обратился О.Ф. Жолобов [3. С. 32–43]. Его вывод о числительном *тридевять* можно назвать "прямо противоположным" заключению А.А. Зализняка. О.Ф. Жолобов воспроизводит приведенный выше вывод А.А. Зализняка о невозможном понимании в грамоте № 715 слова *тридевять* в числовом значении 27 и его трактовке как "некоего большого количества" и решительно заключает: "Это не так" [3. С. 38]. Резюмируя, О.Ф. Жолобов пишет: "... Данное числительное (*тридевять* – Р.С.) нельзя отождествлять и с обычным совмещением двух сакральных чисел, не обозначающим точного количества" [3. С. 42].

О.Ф. Жолобов считает *тридевять* в грамоте № 715 особым числительным, символизирующим некую полноту, так же как и числительное девять. Разъясняя, в чем заключается смысл полноты числа 9, он опирается на принцип десятичного счисления, где каждый из разрядов имеет девять единиц, а прибавление десятой образует единицу следующего разряда. Этот принцип он иллюстрирует счетом на абаке: "... В древнегреческом счетном инструменте – абаке – счет, находясь в границах десятичного счисления, фактически велся с помощью девяти камешков (бобов, косточек и под.) на разных уровнях этого счисления. Действительно, единиц в этом счете – 9, десятков – 9, сотен – 9 и т.д." [3. С. 36].

Еще более отчетливо смысл полноты числа 9, по О.Ф. Жолобову, отражает греческая система чисел (перешедшая также в славянскую кириллицу), в которой единицы, десятки и сотни обозначаются девятью отдельными буквенными знаками, в количестве 27: "Более чем явственно эта особенность десятичного счисления проявилась в греческой, а затем и в греко-славянской письменной традиции. В греческой и славянской системах цифровых обозначений ровно 27 знаков, которые разбиваются на три группы по 9 знаков в каждой" [3. С. 36–37].

О.Ф. Жолобов, апеллируя к абаку, не учитывает существующую в этой системе счета трактовку числительного *тридевять* как 39 (а не 27). Так, Б.Я. Виленчик [4. С. 59–65] фольклорную фразу *в тридевятом царстве, тридесятом государстве* истолковывает как переход в системе абака от числа 39 (тридевять) к следующему числу 40 по схеме:



Здесь число 39 (тридевять) записано внизу одной точкой-пятеркой слева и четырьмя точками-единицами справа, а вверху тремя точками-десятками, итого: $5 + 4 + 30 = 39$. После прибавления к единицам еще одной точки полученное число 40 (тридесять) выразится в системе абака одной точкой-пятеркой слева и пятью точками-единицами справа, а вверху тремя точками-десятками ($5+5+30=40$). Это эквивалентно записи числа 40 на абаке в виде четырех точек-десятков вверху справа.

(Возможность указанной реконструкции записи чисел 39 и 40 на абаке подтверждается найденным археологами в Белоозере пряслицем, причем датируемым XIII в. [5. С. 19], как и берестяная грамота № 715. На пряслице, очевидно, записано число сто в системе абака следующим образом: внизу точкой-пятеркой слева и пятью точками-единицами справа, а вверху точкой-50 и четырьмя точками-десятками ($5+5+50+40 = 100$)).

Как видим, иное толкование слова *тридевять* (39, а не 27) в историографии существует и основывается на использовании абака, к которому обращался О.Ф. Жолобов. Отстаивая мысль, что в грамоте № 715 слово *тридевять* имеет точное значение 27, он говорит об отражении здесь представления о сидерическом лунном месяце, в котором целое число дней равно 27: “Оно (числительное ‘3х9’ – Р.С.) интерпретируется в статье не как сочетание двух сакральных чисел, где второе число отражает кратный рост первого, а как реальная числовая формула. Ее строение отражало количество дней сидерического лунного месяца...” [3. С. 32. Врезка к статье].

О том же сказано и в тексте статьи: “Значение данного числительного в мифологической традиции состояло в следующем: числительное ‘3х9’ или ‘27’, восходящее к счету дней сидерического (звездного) месяца, **воплощало идею полносчетного множества**[1]**, которое обладало магической силой** (выделено О.Ф.Жолобовым – Р.С.), вобравшей в себя магические возможности каждого из 27 его “ангелов-покровителей” [3. С. 38].

[1] Неясен смысл термина **полносчетное множество**. В науке (математике) существует термин **счетное множество** – это бесконечное множество, элементы которого можно занумеровать путем чисел натурального ряда.

Непонятно, как 27 "ангелов-покровителей" грамоты № 715 соотносились с 7 архангелами. Замечание О.Ф. Жолобова: "автор заговора *отвлекается* (выделение мое – Р.С.) и от христианско-ветхозаветной традиции, согласно которой число архангелов равно семи" [3. С. 39. Прим. 12], разрушает его же утверждение, что слово *тридевять* в грамоте № 715 выражает точно 27. Получается, что *тридевять* автор рассматриваемой грамоты в одном случае понимал как 27, а в другом (отвлекаясь?) как 7.

Отмечу, что основное расхождение в трактовке грамоты № 715 А.А. Зализняком и О.Ф. Жолобовым заключается в том, что первый считает используемое в ней слово *тридевять* выражающим некое большое количество (но не любое число), а второй – обозначающим точное количество 27. На чью сторону встать - А.А. Зализняка или О.Ф. Жолобова? Или существует возможность согласовать указанные, казалось бы, несовместимые точки зрения?

Недавно с подобной проблемой столкнулся член-корреспондент РАН А.Н. Паршин [6. С. 117–153]. Возможно, подход, который он продемонстрировал при этом, откроет путь к пониманию смысла слова *тридевять* в грамоте № 715. А.Н. Паршин заметил, что как бы параллельно с общеизвестным суждением о девяти чинах ангельской иерархии в богословской литературе существует мнение, что неизвестно, сколько их (ангельских чинов) в действительности [6. С. 145–146], причем Дионисий Ареопагит указывал на неисчислимость чинов небесных сущностей [7. С. 131], а о. Павел Флоренский считал, что число ангелов может быть актуально бесконечно [8. С. 496–497].

А.Н. Паршин полагает: есть основание считать, что количество уровней ангельской иерархии бесконечно: "... Можно было бы рискнуть высказать предположение, что и число уровней ангельской иерархии бесконечно. Есть некоторый аргумент в пользу подобного предположения. Я не случайно упомянул тут о позиционной системе счисления. Когда мы считаем числа, то, пройдя от 0 до 9, мы приходим к 10, когда переходим в следующий разряд. И это параллельно тому, что происходит, когда мы имеем систему согласованных часов, с их уже непрерывным движением стрелок. Заметим, что это не просто параллель, аналогия, а система счисления, как мы показали, реально встроена в систему часов. В системах счисления числа могут быть сколь угодно большими, когда мы переходим во все новые и новые разряды, или чины" [6. С. 146].

Смысл сказанного применительно к случаю берестяной грамоты № 715 может быть тот, что в 27-знаковой греко-славянской "буквенной" числовой системе, использовавшейся в кириллице (с учетом системы дополнительных значков для обозначения тысяч, десятков тысяч и т.д.), можно записать сколь угодно большое число. Если учесть решение А.Н. Паршина, то *тридевять* можно трактовать как метафорическое выражение системы из 27 основных греко-славянских "буквенных цифр", на основе которых (и со вспомогательными значками) можно выразить в принципе **любое сколь угодно большое число**. Однако в грамоте № 715 может идти речь о восприятии 27-знаковой "буквенной нумерации" в ее, так сказать, первозданном виде, до появления дополнительных значков. И тогда можно говорить о записи в ней чисел только **в пределах 1-999.**

Возвращаясь к альтернативе: кто прав, А.А. Зализняк или О.Ф. Жолобов, следует считать, что в чем-то оба правы, в а чем-то – нет. А.А. Зализняк прав, считая, что *тридевять* в грамоте № 715 может обозначать некое большое количество, но он не учитывает возможность выражения любого, например, небольшого числа.

О.Ф. Жолобов прав, когда ставит акцент на вычислительной стороне грамоты № 715, но сам исследователь, по-видимому, не считает это основным в ее содержании, а видит в качестве главного в ней другое. По его мнению, *тридевять* "отражало количество дней сидерического лунного месяца, который противопоставлялся синодическому лунному месяцу. Это противопоставление выражало два календарных типа. Если первый был связан с ритуально-магической функцией, то второй – с хозяйственно-бытовой" [3. С. 32. Врезка к статье].

Однако сформулированный вывод О.Ф. Жолобова не вытекает из содержания его статьи. В ней отсутствует анализ конкретных источников, который дал бы основание для приведенного вывода. Вообще у О.Ф. Жолобова нет указаний на славяно-русские памятники об использовании сидерического лунного месяца или соответствующую историографию. Поэтому слова, звучащие как вывод о том, что *тридевять* в грамоте № 715 выражает длительность сидерического лунного месяца, равную 27 суткам, можно признать лишь в качестве намерения найти ответ на поставленный вопрос, а не его решение.

Скорее всего, берестяную грамоту № 715 следует считать наиболее ранним текстом с метафорическим представлением, что 27 *(тридевять)* "буквенных цифр" могут передать любое целое число в пределах 1–999. При этом историко-культурное и научное значение этой грамоты может быть значительнее, чем кажется на первый взгляд. Исследователи древнерусской культуры, в том числе и О.Ф. Жолобов [3. С. 37], предполагают, что математические знания на Руси (запись чисел, счет и пр.) могли получить распространение прежде знаний о записи речи, чтения написанных текстов, то есть независимо от систематизированной грамотности: через торговые и межкультурные контакты с соседними народами.

Недавно в научный оборот вошел памятник 2-й половины X в. – найденная в Новгороде деревянная счетная бирка с княжеской эмблемой Ярополка Святославича и 80 зарубками, продублированными особым числовым знаком типа "бантик". Его образовали две спаренные греческие "дельты", каждая равная четырем десяткам, а вместе 80. Знак типа "бантик" (80) мог уходить в дописьменную историю славян, примерно середины IX в., возможно, относясь к периоду до изобретения славянского письма Кириллом и Мефодием. "Бантик" (80) нес в себе абстракцию, состоящую в обобщении одним знаком ("дельтой") двух разных чисел: четырех и сорока [9. С. 96–105].

На первый взгляд, примерно того же уровня математическое обобщение содержит берестяная грамота № 715. Оно, казалось бы, состоит в том, что одним и тем же числительным *тридевять*, подобно "бантику" счетной бирки X в., выражается разное количество ангелов и архангелов - ангелов высшего чина (которое не должно быть одинаковым по их божественной сущности). Однако, поскольку ни число ангелов, ни число архангелов в богословии и духовной книжности не принималось равным 27, значит, речь может идти о математической абстракции другого рода.

Учтя подход А.Н.Паршина, можно заключить, что в грамоте № 715 словом *тридевять* метафорически обобщается греко-славянская "буквенная" числовая система, в которой можно было записать любое целое число в пределах от 1 до 999, а с учетом системы вспомогательных значков – сколь угодно большое число (следовательно, и некое большое или бесконечное количество ангелов, и 7 архангелов). По-видимому, славяне, столкнувшись с цивилизацией византийско-христианского мира, знание о "буквенной" числовой системе осознанно или подсознательно оценили имеющим важное значение и включили его (обобщенное знание об "источнике" чисел) в сакральную формулу, которая веками сохранялась в виде заговора.

Библиографический список

1. *Зализняк А.А.* Древнейший восточнославянский заговорный текст // Исследования в области балто-славянской духовной культуры. Заговор. М., 1993.

2. *Зализняк А.А.* Древненовгородский диалект. М., 1995.
3. *Жолобов О.Ф.* Тридевято анеело тридевя ароханело (функции и формы числительных в берестяной грамоте № 715) // Вопросы языкознания. 2005. № 3.
4. *Виленчик Б.Я.* Новые доказательства существования русского архаического абака // Советская археология. 1984. № 3.
5. *Голубева Л.А.* Граффити и знаки пряслиц из Белоозера // Культура средневековой Руси. Л., 1974.
6. *Паршин А.Н.* Средневековая космология и проблема времени // Вестник русского христианского движения. 2004. № 188.
7. *Дионисий Ареопагит.* О небесной иерархии. СПб., 1997.
8. *Павел Флоренский.* Столп и утверждение Истины. М., 1914.
9. *Симонов Р.А.* Древнейший памятник математической культуры Древней Руси 2-й половины X века // Труды вторых Колмогоровских чтений. Ярославль, 2004.

Как изучалась биография Н.И. Лобачевского (к 150-летию со дня его смерти)

Г.М. Полотовский

> Нигде так не трудно собирать сведения о действователях во времена прошедшие, как в России...
>
> Современники не заботятся собирать сведения о знаменитых и замечательных личностях своего времени, а потомкам остается только жалеть о равнодушии и беспечности предков. Так гибнут у нас и деяния, и самые имена людей, вполне стоящие того, чтобы не остаться в неизвестности.
>
> *А.В. Висковатов* (1804–1858),
> русский историк (написано в 1856 г.)

Выдающийся русский ученый Николай Иванович Лобачевский родился в Нижнем Новгороде 1 декабря (по новому стилю) 1792 года. Чтобы установить эти исходные и многие другие факты биографии Н.И. Лобачевского, потребовались значительные многолетние усилия. Кроме причины, отмеченной в эпиграфе[1], в данном случае имеется еще ряд обстоятельств: открытие Лобачевского было признано в России лишь почти через пятьдесят лет после его смерти; казанский пожар 1842 года уничтожил, как полагают, многие документы, касающиеся Лобачевского. Но главной причиной являются жизненные обстоятельства, побуждавшие Н.И. Лобачевского не афишировать некоторые сведения из своей биографии. Цель настоящей статьи – напомнить о некоторых[2] замечательных исследователях, трудами которых был раскрыт ряд загадок биографии Н.И. Лобачевского, а также еще раз обратить внимание на ряд мифов, которыми до сих пор изобилуют публикации о Н.И. Лобачевском.

Первым выдающийся вклад в пропаганду научных результатов Н.И. Лобачевского и восстановление памяти о нем внес Александр Васильевич Васильев (1853–1929). После окончания в 1874 г. Петербургского университета он в 1879 г. был направлен за границу, слушал лекции К. Вейерштрасса и Л. Кронекера в Берлине, Ш. Эрмита в Париже, познакомился с многими другими известными европейскими математиками. С 1887 г. А.В. Васильев – профессор Казанского университета, с 1907 г. – профессор различных высших учебных заведений в Петербурге, с 1923 г. он жил в Москве.

А.В. Васильев – инициатор и организатор празднования столетия со дня рождения Н.И. Лобачевского в Казани в 1893(!) году. По этому случаю приветствия Казанскому университету прислали Академия наук, российские институты, С. Ли, А.А. Марков, Д.И. Менделеев, Н.Г. Столетов, П.Л. Чебышев, Ф. Клейн, Ж. Таннери. "Лобачевский оставил в геометрии славный неизгладимый след. Мы все присоединяемся к торжественному празднованию его юбилея. Примите по этому случаю наши самые сердечные пожелания Казанскому университету и русской науке" – говорится в приветствии профессоров Сорбонны, которое подписали

[1] И которая, к сожалению, сохраняется: так, в 1992 г. российское культурное сообщество ограничилось всего одной публикацией в средствах массовой информации, посвященной 200-летию со дня рождения Н.И. Лобачевского – статьей И.Р. Шафаревича в газете Известия". (Российское математическое сообщество отметило этот юбилей представительной международной конференцией в 1992 г. в Казани.)

[2] В рамках этого текста невозможно упомянуть всех, кто внес вклад в изучение биографии и пропаганду идей Н.И. Лобачевского, поэтому не будет сказано о работах Б.Л. Лаптева, П.А. Широкова и других.

П. Аппель, В. Буссинеск, Х. Вольф, Г. Дарбу, Э. Пикар, А. Пуанкаре, Ф. Тиссеран, Ш. Эрмит.

А.В. Васильев предложил создать библиотеку “Лобачевскиана”, издать полное собрание трудов Лобачевского, учредить премию его имени. Для реализации этих целей по инициативе А.В. Васильева был создан капитал “Фонда Лобачевского”. Из процентов с этого капитала и выплачивалась “Премия имени Н.И. Лобачевского Казанского физико-математического общества”, которой были удостоены[1] С. Ли (1897), В. Киллинг[2] (1900), Д. Гильберт (1904), Л. Шлезингер (1909), Ф. Шур[3] (1912), Г. Вейль (1927), Э. Картан и В.В. Вагнер[4] (1937). В 1895 г. была учреждена медаль “Памяти Н.И. Лобачевского”, которая вручалась рецензентам работ, поступивших на соискание премии. После 1945 года премия перешла в ведение АН СССР. Лауреаты этой премии – Н.В. Ефимов (1951), А.Д. Александров (1951), А.В. Погорелов (1959), Л.С. Понтрягин (1966), Х. Хопф (1969), П.С. Александров (1972), Б.Н. Делоне (1977), С.П. Новиков (1980), А.Н. Колмогоров (1986), Ф. Хирцебрух (1989), В.И. Арнольд (1992), Ю.Г. Решетняк (1999).

В год 50-летия со дня смерти Н.И. Лобачевского по инициативе А.В. Васильева перед зданием Казанского университета, ректором которого в течение 19 лет был Н.И. Лобачевский, установлен памятник (скульптор М.Л. Диллон). На памятнике (как и на надгробии Н.И. Лобачевского на Арском кладбище в Казани) указана только дата смерти (12 февраля 1856 г.) Очевидно, даже современники не были осведомлены о начальном этапе биографии Н.И. Лобачевского – например, у А.Ф. Попова в [1] написано: “Н.И. Лобачевский родился в Нижнем Новгороде” (без указания даты), у Е.П. Янишевского в [2]: “Н.И. Лобачевский родился в Макарьевском уезде Нижегородской губернии в 1793 году”; оба утверждения – без ссылок на документы.

Наконец, А.В. Васильев многие годы собирал и публиковал материалы по биографии Н.И. Лобачевского, а в 1927 г. он завершил фундаментальный труд “Жизнь и научное дело Н.И. Лобачевского”. Однако эту замечательную книгу читатель смог увидеть только в 1992 году: отпечатанный тираж лежал на складе Госиздата, в продажу не поступал

[1] К сожалению, точность данных, касающихся премий, здесь и ниже не гарантируется – например, в разных источниках указаны разные даты присуждения премий.

[2] По жребию с А. Уайтхедом: по положению о премии, если рецензенты признавали достойными несколько работ, то лауреат определялся жеребьевкой.

[3] По жребию с Дж. Кулиджем.

[4] В этот раз были вручены две равнозначные премии.

и после смерти А.В. Васильева был полностью уничтожен. Эта книга [3] была восстановлена и подготовлена к печати по случайно сохранившемуся оттиску верстки казанскими профессорами В.А. Бажановым и А.П. Широковым.

А.В. Васильев тоже не знал дату рождения Н.И. Лобачевского: столетие со дня рождения Лобачевского отмечалось 22 октября 1893 г., а книга [3] начинается словами "Николай Иванович Лобачевский родился 22 октября 1792 г. в Нижнем Новгороде". По инициативе А.В. Васильева академик В.И. Вернадский, председатель комиссии по истории знаний, в 1929 г. послал запрос в Нижегородское краевое архивное бюро: нет ли в архиве документов, "касающихся знаменитого математика Н.И. Лобачевского?"

Летом 1929 г. старший архивариус Иван Иванович Вишневский обнаружил в книге исповедных росписей Алексеевской церкви Нижнего Новгорода за 1782–1803 гг. следующую запись[1] *"В 1972 году родилось. В ноябре. 5. Рож[дение] 20, кре[щение] 25. Нижегородскаго наместнического правления у регистратора Ивана Максимова сын Николай..."* Хотя в этом документе фамилия не указана, И.И. Вишневский сразу идентифицировал его как запись о рождении Н.И. Лобачевского. Впервые сведения о находке И.И. Вишневского были опубликованы в газетной заметке [4].

Деятельность А.В. Васильева по изучению биографии и трудов Н.И. Лобачевского продолжил профессор Московского университета Вениамин Федорович Каган (1869–1953). В сороковые годы он публикует несколько книг о Лобачевском. В книге [5] 1943 г. он указывает общепринятую тогда дату рождения Н.И. Лобачевского, а местом рождения называет Макарьев. Но уже в книге [6] 1944 г. В.Ф. Каган пишет, что Н.И. Лобачевский родился 20 ноября (по старому стилю) 1792 года в Нижнем Новгороде, ссылаясь на приведенную выше запись в книге исповедных росписей как на метрическую и отмечая при этом, что фамилии "Лобачевский" в этой записи нет. Дело в том, что В.Ф. Каган еще в 1943 г. был знаком с копиями материалов, обнаруженных И.И. Вишневским, но по условиям военного времени не мог проверить их подлинность. Позже В.Ф. Каган получил из Горьковского краевого архива копии всех документов, найденных И.И. Вишневским, а также нескольких новых документов, косвенно подтверждавших данные, опубликованные в [6].

[1] Документ цитируется по [16].

Научное сообщество восприняло "новую" дату неоднозначно. П.С. Александров, в то время член-корреспондент АН СССР, в своей рецензии [8] на книгу [6] писал: "Из того, что 20 ноября 1792 г. у регистратора Ивана Максимова в Нижнем Новгороде родился сын Николай, еще не следует, что у землемера Ивана Максимовича Лобачевского 22 октября 1793 г. сын Николай не родился где-то в Макарьевском уезде Нижегородской губернии". С другой стороны, в [9] книга [6] названа "наиболее полной и достоверной биографией Лобачевского".

Автор книги [9], ленинградский литературовед и архивист Л.Б. Модзалевский, начал собирать документы для биографии Лобачевского по инициативе Комиссии по истории АН СССР (КИАН) в 1942 г. в Казани, куда в годы войны была эвакуирована значительная часть АН СССР. Его фундаментальный труд [9] (827 страниц большого формата) содержит 622 документа, различные воспоминания, богатый справочный материал. Однако к нижегородскому периоду жизни Н.И. Лобачевского в [9] относятся только два документа, открывающие книгу, причем первый из них – та запись в книге исповедных росписей, фрагмент которой приведен выше. Тем самым автор показал, что он признает эту запись как метрическую запись о рождении Н.И. Лобачевского.

Итак, мнения разделились. Нужны были новые аргументы и доказательства. По просьбе В.Ф. Кагана президент АН СССР С.И. Вавилов 12 февраля 1948 г. обращается в Горьковский краевой архив. Однако поиск новых документов, касающихся биографии Н.И. Лобачевского, начался в Горьком еще до упомянутого обращения С.И. Вавилова – эту работу в конце 1947 года начала группа академика А.А. Андронова.

Александр Александрович Андронов (1901–1952), физик по образованию, имел чрезвычайно широкий круг интересов, в который входила и история науки[1]. Биографией Н.И. Лобачевского он заинтересовался еще в 1943 году и хорошо знал о наличии спорных и неясных мест. В созданную А.А. Андроновым группу вошли[2] архивист-палеограф Н.И. Привалова, сотрудники архива М.П. Третьякова, Г.М. Вострякова, А.Н. Коновалова, Я.М. Каган, архитектор Н.В. Ушаков, историк И. Кирьянов. А.А. Андронов не был только формальным руководителем – он с большим энтузиазмом лично участвовал в поисках и исследованиях докумен-

[1] Многочисленные воспоминания об А.А. Андронове свидетельствуют об его исключительных человеческих качествах – см., например, [10] (где имеется список публикаций об А.А. Андронове), [11].

[2] Возможно, список ниже неполон – так, в [10] сказано о "нескольких группах историков и архивистов".

тов, вел большую переписку. В частности, 18 мая 1948 г. А.А. Андронов писал И.Л. Андроникову, надеясь привлечь последнего к поискам: "Биографии великих русских ученых не изучаются или, по крайней мере, пока не изучались с той тщательностью, которая была внесена в последние десятилетия в биографии большинства русских великих писателей... Я думаю, что некоторые из этих биографий столь же поучительны".

Первая публикация выводов андроновской группы – заметка А.А. Андронова [12] в газете "Горьковская коммуна". Подробная работа [13], подготовленная к печати Н.И. Приваловой уже после смерти А.А. Андронова, завершается словами: *"... на основании всей совокупности как ранее известных документов, так и документов, найденных И.И. Вишневским в 1929 г., и, наконец, новых документов, найденных работниками Горьковского областного архива в 1947–1948 гг., на основании их изучения и сопоставления необходимо придти к выводу, что величайший русский математик Николай Иванович Лобачевский родился в Нижнем Новгороде 20 ноября 1792 г. (по старому стилю)".*

Уже после смерти А.А. Андронова была завершена работа по определению точного местонахождения дома, где Н.И. Лобачевский родился и провел детские годы: в статье [14] Надежды Ивановны Приваловой (1900–1987) доказано, что этот дом находился на углу улиц Алексеевской и Вознесенской (сейчас – Октябрьская).

Позже ленинградский историк Борис Варфоломеевич Федоренко придерживался в [15] другой версии. Эта версия и убедительные контраргументы к ней подробно изложены в книге [16]. Книга [15] содержит публикации 477 документов, из которых уже 49 относятся к нижегородскому периоду, и массу интересных находок и открытий в комментариях. Отметим здесь только два результата Б.В. Федоренко. Первый [15. С. 350–355] – это доказательство того, что на известном "портрете Лобачевского" кисти В.А. Щеголькова изображен вовсе не Лобачевский! Второй [15. С. 340–349] – убедительная расшифровка псевдонима "С.С.", за которым спрятался автор печально известного невежественного и злобного отзыва на работу Н.И. Лобачевского "О началах геометрии", опубликованного в № 41 (1834 г.) журнала "Сын Отечества и Северный архив".

Результаты исследований группы Андронова постепенно получают признание. Так, в издании 1948 г. [7] В.Ф. Каган, ссылаясь на статью А.А. Андронова [11], пишет, что дату рождения 20 ноября (по старому стилю) 1792 года в Нижнем Новгороде "нужно... считать точно установленной". После публикаций [13, 14] 1956 г. эти данные становятся общепризнанными. Но загадки в биографии Н.И. Лобачевского остаются. Прежде всего, эти загадки связаны с его родословной: какова девичья фамилия его матери Прасковьи Александровны и, как это ни странно звучит, кто был его отцом. Эти вопросы затрагиваются в книгах [16, 17], опубликованных в 1992 г. к 200-летию со дня рождения Н.И. Лобачевского издательством Нижегородского университета.

Нижегородские историки Тамара Ивановна Ковалева[1] и профессор Николай Филиппович Филатов (1938–2004) в [17] обсуждают гипотезу, согласно которой мать Н.И. Лобачевского была дочерью петербургского офицера А.И. Вышеславцева. Эта гипотеза не имеет достаточного документального подтверждения, но вполне объясняет, почему П.А. Лобачевская тщательно скрывала свое происхождение: 7 ноября 1786 года в Петербурге "Вышеславцев, ехавши в карете с женой и с какой-то благородною девицей, вынул нож и стал их и себя самого резать. Слава Богу, их легко поранил, а себя смертельно", – рассказывал сын екатерининского вельможи А.В. Орлов[2].

Книга Дмитрия Андреевича Гудкова[3] [16] посвящена еще более интригующему вопросу о родословной Н.И. Лобачевского по отцовской линии. Еще И.И. Вишневский в письме к В.Д. Бонч-Бруевичу от 12 декабря 1929 г. писал по этому поводу[4]: "... нахожу запись[5] 1799 г. матери Лобачевского и всех ее сыновей как "воспитанников" землемера Шебаршина. По закону 1744 года слово "воспитанник" равнялось незаконнорожденному, что и было мной твердо установлено дальнейшими записями в исповедных росписях и метриках...". Таким образом, И.И. Вишневский первым высказал предположение, что отцом Н.И. Лобачевского и его братьев Александра и Алексея был землемер Сергей Степанович Шебаршин, а не губернский регистратор Иван Максимович Лобачевский.[6]

[1]Т.И. Ковалева – директор музея Нижегородского университета.

[2]Цитируется по [17. С. 31].

[3]Профессор Д.А. Гудков (1918–1992) – известный математик, решивший в 1969 г. задачу о расположении овалов неособых кривых степени 6, поставленную Д. Гильбертом в первой части его знаменитой 16-й проблемы.

[4]Цитируется по [16. С. 17].

[5]В исповедных росписях.

[6]Это предположение впервые было опубликовано в заметке [4] без ссылки на И.И. Вишневского, однако А.А. Андронов отстаивал авторство И.И. Вишневского (см. [16. С. 19]) и, по словам Д.А. Гудкова, разделял его точку зрения, хотя нигде об этом не писал.

Ясно, что такая экстраординарная версия требует скрупулезного обоснования. Для этого Д.А. Гудков привлекает в [16] 13 выписок из законов Российской империи XVIII века и 81 архивный документ, из которых более 20 выявлены Д.А. Гудковым, и еще около 30 документов, выявленных группой Андронова, публикуются впервые. Кроме этого, в [16] впервые опубликованы написанные в 1898–1899 гг. обширные воспоминания о Н.И. Лобачевском его сына Николая Николаевича[1]. Свои выводы Д.А. Гудков формулирует в предисловии к [16]: "... *на основе анализа большого архивного материала и литературных источников, по моему мнению, убедительно устанавливаются следующие факты биографии Н.И. Лобачевского:* <...>

3. Доказано, что Николай Иванович Лобачевский и два его брата – Александр и Алексей – были сыновьями макарьевского землемера и капитана С.С. Шебаршина и П.А. Лобачевской. Это обстоятельство определило многие, казалось бы, загадочные поступки П.А. Лобачевской, а также самого Н.И. Лобачевского в течение всей его жизни".

Нет особых сомнений, что эта тщательно обоснованная Д.А. Гудковым версия постепенно станет общепринятой, как это случилось ранее с выводами А.А. Андронова и Н.И. Приваловой о дате и месте рождения Н.И. Лобачевского. Однако, по-видимому, следует воздержаться от чрезмерного оптимизма: вплоть до настоящего времени почти все публикации о Н.И. Лобачевском повторяют старые мифы и ошибки. Так, портрет работы В.А. Щеголькова на некоторых сайтах в Интернете до сих пор выдается за портрет Н.И. Лобачевского, хотя после опубликования книги Б.В. Федоренко [15] прошло почти 20 лет. Приведем еще два примера.

Почти в любой публикации о Н.И. Лобачевском повторяется, что К.Ф. Гаусс специально выучил русский язык, чтобы читать сочинения Лобачевского по-русски. Например, это написано и в книге [19. С. 155] В.К. Бюлера, американского биографа Гаусса немецкого происхождения. Однако это утверждение, по меньшей мере, спорно. В [3. С. 156–157] А.В. Васильев написал: "Учился ли Гаусс русскому языку для того, чтобы читать в подлиннике русские сочинения Н.И. Лобачевского, – вопрос, на который, к сожалению, приходится дать отрицательный ответ" и дал подробное обоснование этого, цитируя переписку Гаусса с астрономом Г. Шумахером[2]. В частности, приведены слова Гаусса из его письма от

[1] Более подробно о содержании книги Д.А. Гудкова можно прочитать в [18].

[2] Отметим, что на это место из книги А.В. Васильева обращается внимание в примечании редактора на с. 9 книги [16].

18 августа 1839 г.: “В начале прошлой зимы я начал заниматься русским языком, так как думаю, что приобретение какой-нибудь новой способности есть нечто вроде омоложения”; далее А.В. Васильев отмечает, что Гаусс не имел русской работы Лобачевского до августа 1840 г.

Также практически в любой публикации о геометрии Лобачевского написано[1]: “Днем рождения новой геометрии следует считать 11 февраля 1826 года” и дальше объясняется (с разной степенью неточности в названиях), что в этот день на заседании физико-математического отделения философского факультета Казанского университета Н.И. Лобачевский прочитал доклад “Краткое изложение принципов геометрии со строгим доказательством теоремы о параллельных”.

Этот безоговорочный выбор 11 февраля 1826 г. как даты открытия неевклидовой геометрии представляется, по меньшей мере, странным. Еще в 1992 г. казанский геометр Геннадий Евгеньевич Изотов (1917–2006) в своей статье [20] на основе анализа казанских архивных документов пришел к выводу: “широко распространенное утверждение, что 11 февраля 1826 года Лобачевский сделал доклад или прочитал сочинение, по крайней мере, сомнительно”[2].

В статье [12] А.А. Андронов указывал на ”позорное для историков русской и мировой науки незнание основных фактов биографии Н.И. Лобачевского” как на обстоятельство “в частности, до сих пор не позволившее поставить памятник или мемориальную доску вблизи его места рождения”. А.А. Андронов настойчиво добивался увековечения памяти Н.И. Лобачевского в Нижнем Новгороде. По инициативе А.А. Андронова уже после его смерти Указом Президиума Верховного Совета СССР от 20 марта 1956 г. Нижегородскому университету было присвоено имя Н.И. Лобачевского. Однако памятника Н.И. Лобачевскому в Нижнем Новгороде нет до сих пор. В 2005 году Нижегородский университет выступил с инициативой об установке такого памятника на углу улиц Алексеевской и Вознесенской, где стоял дом[3], в котором

[1]Свежий пример: 22 февраля 2006 г. в Казанском университете проводился день памяти Н.И. Лобачевского в связи со 150-летием со дня его смерти и *180-летием открытия неевклидовой геометрии.*

[2]На этот вывод Г.Е. Изотова также обращается внимание в примечании редактора на с. 9 книги [16].

[3]До 2005 года на этом месте был вещевой рынок, территория была архитектурно неблагоустроена. В настоящее время рынок ликвидирован, развернуто строительство делового центра. Площадка перед будущим зданием – в точности то место, где располагалось домовладение Лобачевской-Шебаршина – зарезервирована для памятного знака.

родился Н.И. Лобачевский. В настоящее время имеется архитектурно-планировочное задание и разрешение на установку памятника, так что будем надеяться, что памятник выдающемуся ученому на его родине будет установлен.

Библиографический список

1. *Попов А.Ф.* Воспоминания о службе и трудах профессора Казанского университета Н.И.Лобачевского // Ученые записки Казанского университета, 1857. Т. IV.
2. *Янишевский Е.П.* Историческая записка о жизни и деятельности Н.И. Лобачевского. Казань, 1868.
3. *Васильев А.В.* Николай Иванович Лобачевский. 1792–1856. М.: Наука, 1992. 229 с.
4. *Богодин С.И.* Где и когда родился математик Лобачевский (по материалам Нижегородского краевого архивного бюро) // Газета “Нижегородская коммуна”, 26 сентября 1929 г.
5. *Каган В.Ф.* Великий ученый Н.И. Лобачевский и его место в мировой науке. М-Л.: Изд-во АН СССР, 1943. 56 с.
6. *Каган В.Ф.* Лобачевский. М-Л.: Изд-во АН СССР, 1944. 348 с.
7. *Каган В.Ф.* Лобачевский. М-Л.: Изд-во АН СССР, 1948. Изд. 2. 508 с.
8. *Александров П.С.* Профессор В.Ф. Каган, “Лобачевский”, 1944. Изд. АН СССР // Вестник АН СССР, 1945. № 4. С. 148–152.
9. *Модзалевский Л.Б.* Материалы для биографии Н.И. Лобачевского. М-Л.: Изд-во АН СССР, 1948. 827 с.
10. *Бойко Е.С.* Александр Александрович Андронов. М.: Наука, 1991. 254 с.
11. А.А. Андронов. Документы жизни. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2001. 287 с.
12. *Андронов А.А.* Где и когда родился Н.И. Лобачевский // Горьковская коммуна. 1948. № 109. С. 2.
13. *Андронов А.А.* Где и когда родился Н.И. Лобачевский (Записка о месте и дате рождения Н.И. Лобачевского) // Историко-математические исследования. М., 1956. Вып. IX. С. 9–48.
14. *Привалова Н.И.* Дом, в котором родился Н.И. Лобачевский // Историко-математические исследования. М., 1956. Вып. IX. С. 9–64.
15. *Федоренко Б.В.* Новые материалы к биографии Н.И. Лобачевского. Л.: Наука, 1988. 384 с.

16. *Гудков Д.А.* Н.И. Лобачевский. Загадки биографии. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 1992. 241 с.
17. *Ковалева Т.И., Филатов Н.Ф.* Н.И. Лобачевский и Нижегородский край на рубеже XVII–XIX столетий. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 1992. 139 с.
18. *Полотовский Г.М.* Кто был отцом Николая Ивановича Лобачевского? (По книге Д.А. Гудкова "Н.И. Лобачевский. Загадки биографии") // Вопросы истории естествознания и техники. 1992. № 4. С. 30–36.
19. *Бюлер В.К.* Гаусс. Биографическое исследование. М.: Наука, 1989. 207 с.
20. *Изотов Г.Е.* К истории опубликований Н.И. Лобачевским сочинений по "воображаемой" геометрии // Вопросы истории естествознания и техники. 1992. № 4. С. 36–43.

Из истории закона больших чисел (к 150-летию Андрея Андреевича Маркова)

З.А. Кузичева

Андрей Андреевич Марков – видный представитель Петербургской математической школы, расцвет которой связан с именем выдающегося отечественного математика, П.Л. Чебышева. Отличительной чертой трудов математиков этой школы является направленность на практические приложения математических теорий, стремление доводить решения задач до алгоритма, до получения числового результата. Эти же черты в полной мере присущи творчеству А.А. Маркова.

Андрей Андреевич Марков родился в Рязани 14 июня (н. ст.) 1856 г. Он был пятым ребенком из шести в семье Андрея Григорьевича и Надежды Петровны Марковых. Отец Андрея Андреевича служил тогда в Лесном департаменте в чине коллежского советника.[1] После выхода в отставку из этого департамента А.Г. Марков работал частным поверенным, а после ухода с этой должности – управляющим имением Е.А. Вальватьевой.

[1] А. А. *Марков*-младший (1903–1979) указывает [4. С. 599], что в биографии его отца, помещенной в посмертном издании "Исчисления вероятностей" [2. С. III], ошибочно указывается, что А.Г. Марков был сельским дьяконом. Сельским дьяконом был *отец* Андрея Григорьевича. Эта ошибка позднее стала нередко повторяться в биографиях А.А. Маркова.

В начале 60-х годов семья Марковых переехала в Петербург. В 1866 г. Андрея определили в 5-ю Петербургскую классическую гимназию, которую он окончил в 1874 г. и поступил в Петербургский университет на физико-математический факультет. Его учителями были П.Л Чебышев (1821–1894), А.Н. Коркин (1837–1908) и Е.И. Золотарев (1847–1878). В университете А.А. Марков учился увлеченно, принимал живое участие в семинаре, который вели Коркин и Золотарев, рано включился в самостоятельные исследования. За конкурсную работу “Об интегрировании дифференциальных уравнений при помощи непрерывных дробей с приложением к уравнению $(1 + x^2)dy/dx = n(1 + y^2)$” А. Марков был удостоен золотой медали (в работе содержался и новый признак сходимости непрерывных дробей, она опубликована в 1879 г.). По окончании университетского курса, в 1878 г., он был оставлен при университете “для приготовления к профессорскому званию” [4. С. 602].

Два года спустя после окончания университета, в апреле 1880 г., Андрей Андреевич защитил магистерскую диссертацию: “О бинарных квадратичных формах положительного определителя”. Теория непрерывных дробей, аппарат которой он с успехом использовал в своей магистерской диссертации, получила дальнейшее развитие в его докторской диссертации “О некоторых приложениях алгебраических непрерывных дробей”, успешно защищенной в 1884 г.

С 1880/81 учебного года А.А. Марков начал преподавание в Петербургском университете в должности приват-доцента. Сначала он вел курсы высшей алгебры и дифференциального и интегрального исчисления, затем аналитическую геометрию и теорию чисел, а с 1882 г. и почти до самой своей кончины – курс теории вероятностей.

В 1886 г. А.А. Марков был назначен экстраординарным, а в 1893 г. – ординарным профессором университета. По предложению П.Л. Чебышева, в 1886 г. Андрей Андреевич был избран адъюнктом, в 1890 г. – экстраординарным, а в 1896 г. – ординарным академиком Академии наук. Андрей Андреевич состоял членом-корреспондентом Харьковского математического общества (с 1888 г.), членом Московского математического общества (с 1892 г.), с 1902 г. – почетным членом Абелевского университета Швеции. В 1905 году ему было присвоено звание заслуженного профессора. В том же году он вышел в отставку из Петербургского университета, но остался в Академии. Он, однако, не порвал с университетом связи и вел здесь курс теории вероятностей на правах академика до 1920/21 учебного года, когда прекратил их в связи с ухудшением состояния здоровья. Скончался Андрей Андреевич 20 июля 1922 года.

Как педагога А.А. Маркова отличало умение точно и ясно излагать свои мысли. Слушатели отмечали, что его лекции всегда имели деловой характер; он не использовал никаких вводных фраз, не делал отступлений, не имеющих отношения к предмету. Об отношении студентов к курсам лекций А. Маркова свидетельствует, например, и такой факт: некоторые старшекурсники добровольно повторно слушали его лекции, хотя по этому курсу они уже сдали ему экзамен. Четкостью и ясностью отличались и учебные руководства А.А. Маркова. Особенным успехом пользовались "Исчисление вероятностей" [2] и "Исчисление конечных разностей". Безупречные с методической точки зрения, эти руководства содержали первоклассные научные результаты самого автора. Некоторые его лекции студенты записывали и затем литографировали. Таким способом были изданы "Введение в анализ", "Сферическая тригонометрия", "Лекции о непрерывных дробях", "Лекции о функциях, наименее уклоняющихся от нуля". Два последние курса лекций по литографированным запискам были переизданы в 1906 г. типографским способом.

Андрей Андреевич с детства увлекся математикой, отдавал ей предпочтение в гимназические годы, рано стал получать самостоятельные научные результаты, остался верен ей на всю жизнь. Другое его увлечение - шахматы, им он тоже не изменял никогда. Его связывали теплые дружеские отношения с основателем отечественной шахматной школы – М.И. Чигориным (1850–1908), который так высоко ценил Маркова-шахматиста, что при подготовке к знаменитому заочному матчу с В. Стейницем в 1890 году пригласил А.А. Маркова в качестве своего "спарринг-партнера". Но интересы А. Маркова не ограничивались математикой и шахматами, достаточно упомянуть, что он был, например, знатоком культуры Древнего Ирана.

Что касается личности А.А. Маркова, то для него были характерны настойчивость, решительность в достижении целей, отстаивание своей точки зрения, не зависимо от того, какие последствия это может иметь для него самого. Целеустремленность и бескомпромиссность Андрея Андреевича отмечаются всеми его биографами. Он буквально бросался в бой против любых нарушений законности и справедливости, причем бывал зачастую довольно резким. Исключительной настойчивостью он отличался уже в детские годы. Показательно в этом плане следующее обстоятельство. Вследствие заболевания коленного сустава одна его нога не разгибалась в колене, и он ходил на костылях. Тем не менее, он принимал самое живое участие в играх своих сверстников, научился быстро прыгать на одной ноге и даже играл в горелки. В возрасте 10 лет Андрею была сделана операция, вернувшая подвижность коленного сустава. Правда, легкая хромота сохранилась на всю жизнь, что не мешало ему быть любителем пеших прогулок. Необходимо хотя бы вкратце упомянуть обстоятельства семейной жизни Андрея Андреевича. Женился он в 1883 г., его женой стала Мария Ивановна – дочь Е.А. Вальватьевой, управляющим имением которой был в свое время отец А. Маркова. В семье очень долго не было детей: единственный сын, Андрей Андреевич Марков-младший, родился в 1903 году, 22 сентября. Он также – известный математик, член-корреспондент Академии наук СССР, глава школы конструктивной математической логики, долгие годы заведовал кафедрой математической логики механико-математического факультета МГУ.

Обратимся теперь к математическому творчеству А.А. Маркова – отца. Математические труды его относятся, в основном, к теории чисел, математическому анализу и теории вероятностей.

Теории чисел посвящены 15 работ А.А. Маркова. Первые из них, в том числе его магистерская диссертация, примыкают к исследованиям Коркина и Золотарева и относятся к теории неопределенных бинарных квадратичных форм. Магистерская диссертация Маркова посвящена проблеме отыскания минимумов для неопределенных бинарных квадратичных форм. Более поздние его исследования в этой области касаются проблемы отыскания минимумов неопределенных квадратичных форм с тремя и четырьмя переменными. Имеются у него работы, и относящиеся к алгебраической теории чисел.

Работы по математическому анализу составляют более трети всех научных трудов А.А. Маркова. В своих исследованиях он охотно использовал аппарат непрерывных дробей, в связи с чем доказал теорему о сходимости непрерывных дробей, ставшую классической. Кроме теории непрерывных дробей и дифференциальных уравнений, у А. Маркова имеются работы, касающиеся теории интерполирования функций, исчисления конечных разностей, теории функций, наименее уклоняющихся от нуля, и др. Многие работы А.А. Маркова в области математического анализа и теории чисел до сих пор не утратили своей актуальности. Однако наиболее значителен его вклад в развитие теории вероятностей.

Первые работы А.А. Маркова по теории вероятностей примыкали к исследованиям П.Л. Чебышева. Они касались установления наиболее общих условий, при которых имеет место закон больших чисел, а также доказательства центральной предельной теоремы. Остановимся кратко на истории этих теорем. Первая точно доказанная, хотя и частная формулировка закона больших чисел принадлежит Я. Бернулли (1654–1705). Эта теорема содержится в его сочинении “Искусство предположения”, опубликованном лишь в 1713 г. В дальнейшем эта теорема привлекала внимание многих математиков, таких, как Н. и Д. Бернулли, Муавр, Лаплас. Однако обобщения этой теоремы были получены лишь в XIX веке. Первое из них принадлежит П. Пуассону (1837). Наиболее значительный сдвиг в этом направлении был сделан П.Л. Чебышевым (1821–1894) в его работе “О средних величинах” (1867). Существенно, что в этой работе Чебышев перешел от рассмотрения случайных событий к (независимым) случайным величинам. Заметим, что теоремы Бернулли и Пуассона оказываются частными случаями теоремы Чебышева. Впоследствии результат Чебышева обобщался в различных направлениях. В XX в. он был включен в общую теорию предельных теорем, берущих свое начало в теореме А. Муавра (1667–1754), обобщавшихся далее П. Лапласом (1749–1827), Пуассоном и др. Современная же трактовка этих теорем, подчеркнем, восходит к работам Чебышева. Для доказательства центральной предельной теоремы он использовал свой метод моментов, который до сих пор находит применения в математическом анализе. Доказательству центральной предельной теоремы методом моментов посвящена статья П.Л. Чебышева “О двух теоремах относительно вероятностей” (1887). Однако А. Марков отметил, что рассуждения Чебышева здесь недостаточно строгие, поставил перед собой задачу уточнить формулировку и доказательство теоремы Чебышева (методом моментов). Эту же проблему без использования метода моментов решил в 1900–1901 гг. А.М. Ляпунов (1857–1918). Впрочем, на истории этого вопроса мы не можем останавливаться (см., например, [7. С. 318–320]).

Закон больших чисел и центральная предельная теорема в трактовке П.Л. Чебышева касаются независимых случайных величин. А.А. Марков пошел дальше: он стал изучать теоретико-вероятностными методами зависимые случайные величины. В статье “Распространение закона больших чисел на величины, зависящие друг от друга”, опубликованной в 1907 г., он показал, что независимость величин не является необходимым условием выполнимости закона больших чисел. В опубликованной в том же году статье “Исследование замечательного случая зависимых испытаний” он распространил центральную предельную теорему на случай цепи случайных величин с двумя возможными состояниями. Год спустя в статье “Распространение предельных теорем исчисления вероятностей на сумму величин, связанных в цепь” он указал, что полученные в этой статье результаты можно перенести на сложные цепи. Исследованию сложных цепей посвящена статья “Об одном случае испытаний, связанных в сложную цепь” (1911). В перечисленных статьях А.А. Марков заложил основы теории, развитие которой он продолжил в последующих своих работах. Этот цикл его работ положил начало важнейшему разделу современной теории вероятностей – марковским процессам (термин “марковские процессы” был предложен А.Я. Хинчиным).

Андрей Андреевич как истинный представитель Петербургской математической школы стремился найти практическое применение результатов своих исследований. Не были исключением и его достижения в теории вероятностей и математической статистике. В статье “Пример статистического исследования над текстом “Евгения Онегина”, иллюстрирующий связь испытаний в цепь” (1913) он рассмотрел чередование гласных и согласных звуков в первой главе и 16 строфах второй главы романа А.С. Пушкина. Аналогичный анализ он произвел и в повести “Детские годы Багрова-внука” С.Т. Аксакова. Впоследствии, как известно, теория цепей Маркова получила разнообразное применение в физике, технике, биологии, а также в теории кодирования. С целью найти практическое применение своих изысканий в теории вероятностей и математической статистике он принял участие в деятельности эмеритальных касс.

Эмеритальные кассы – своего рода пенсионные учреждения, члены которых, по выходе в отставку, получали пожизненные пенсии. Такие кассы появились в России во второй половине XIX века. Средства этих касс формировались путем обязательных вычетов из жалованья служащих соответствующего ведомства. Размер пенсии зависел от продолжительности службы или участия в кассе и от оклада служащего. Эмеритальные кассы были организованы, например, в Министерстве юстиции, Военном и Морском министерствах, а также в Ведомстве инженеров путей сообщения и др. А.А. Марков участвовал в организации эмеритальной кассы Министерства юстиции и в ее деятельности. Например, он составлял и публиковал необходимые расчеты, касающиеся работы кассы, а в 1890 г. вошел в состав ее комиссии. За работу в эмеритальной кассе А.А. Марков имел благодарности министра финансов.

Даже столь краткий обзор творчества А.А. Маркова показывает, что он – типичный представитель Петербургской математической школы. Талантливый ученик и последователь П.Л. Чебышева, А.Н. Коркина, Е.И. Золотарева, он широко известен как создатель нового научного направления – теории марковских процессов, – получившего дальнейшее развитие в трудах отечественных математиков в XX столетии, направления, которое находит все более широкое применение в различных отраслях науки.

Библиографический список

1. *Марков А.А.* Избранные труды (Теория чисел, теория вероятностей). М., 1951.
2. *Марков А.А.* Исчисление вероятностей. 1-е изд. СПб, 1900; 2-е изд. СПб 1908; 3-е изд. СПб, 1913; 4-е изд., М., 1924.
3. *Марков А.А.* Избранные труды по теории непрерывных дробей и теории функций, наименее уклоняющихся от нуля. М.-Л., 1948.
4. *Марков А.А.* (младший). Биография А.А.Маркова [1. С. 599–613].
5. *Гродзенский С.Я.* Андрей Андреевич Марков. М.: Наука, 1987.
6. *Шейнин О.Б.* А.А.Марков и страхование жизни // ИМИ, 1997. Вторая серия. Вып. 2 (37). С. 22–33.
7. *Гнеденко Б.В.* Развитие теории вероятностей // Очерки по истории математики. М.: Изд-во Московского ун-та, 1997. С. 247–338.

Михаил Федорович Субботин: начало пути (1910–1918)

М.Б. Налбандян, *Ю.С. Налбандян*

Член-корреспондент АН СССР, известный математик и астроном, профессор ЛГУ Михаил Федорович Субботин (1893–1966) – выпускник Варшавского университета. Здесь находились истоки его научных интересов. Здесь он приобрел фундаментальную математическую подготовку, позволившую ему получить существенные результаты не только в специальных вопросах теории функций, но и в исследованиях по небесной механике. Эти последние, хотя и носят прикладной характер, но по своим методам в большей части остаются математическими.

К сожалению, именно этот период становления будущего ученого и педагога мало освещен в историко-математической литературе. Ниже предпринята попытка восполнить пробел, опираясь, в основном, на архивные документы [1, 2].

Михаил Федорович Субботин был старшим сыном в многодетной семье кадрового офицера.[1] Кажется вполне естественным, что и ему была уготована судьба военного: десятилетним мальчиком он был определен в Нижегородский, а позже переведен в Суворовский кадетский корпус в Варшаве (по месту службы отца). В 1910 г. М.Ф. Субботин получил аттестат, свидетельствующий, что "при отличном поведении и нравственности" он "успешно окончил полный курс кадетского корпуса и, на основании окончательных испытаний, получил нижеследующую оценку познаний": из девятнадцати перечисленных предметов по тринадцати, включая все дисциплины физико–математического цикла, высший балл – 12; средний балл аттестата – 11,61. Следует отметить, что в числе предметов были французский и немецкий языки, которые чрезвычайно пригодились ему в будущей студенческой жизни.

Успешное окончание кадетского корпуса предоставляло выпускнику определенные льготы и преимущества при поступлении в военную службу. Но именно это и не входило в жизненные планы М.Ф. Субботина. Он выбрал другой путь, потребовавший от него дополнительных усилий (поступлению в гражданское высшее учебное заведение препятствовало отсутствие в аттестате оценки по латинскому языку). Пробел был ликвидирован уже в августе, после испытания в комитете при управлении Варшавского Учебного округа (оценка – "хорошо"). И осенью 1910 г. М.Ф. Субботин становится студентом математического отделения физико-математического факультета Варшавского университета, который в 1909 г. возобновил учебные занятия после четырехлетнего перерыва, вызванного "политическими волнениями в Привисленском крае".

К этому времени факультет пополнился новыми кадрами. Руководящая роль на кафедре чистой математики перешла к Д.Д. Мордухай-Болтовскому, которого в феврале 1908 г. единогласно избрали канди-

[1]Как следует из архивных документов (Государственный Архив Ростовской области (ГАРО), ф. 527, оп. 3, д. 842, л. 8–16), Федор Яковлевич Субботин – "сын крестьянина-собственника Уфимской губернии Стерлитамакского уезда" – получил домашнее воспитание; юношей 16–17 лет был отдан в службу вольноопределяющимся, окончил курс Оренбургского юнкерского училища, офицерскую стрелковую школу, служил в Туркестанских и Ферганских войсках. В дальнейшем прошел все ступени воинских званий, вплоть до подполковника. Как отмечено в послужном списке Ф.Я. Субботина, "в службе сего штабофицера не было обстоятельств, лишающих его превосходительство права на получение знака отличия беспорочной службы или отдаляющих срок выслуги к сему знаку".

датом “на замещение означенной кафедры в звании экстраординарного профессора” (утверждение состоялось 25 августа того же года, а в 1914-м, вопреки существующему закону – у него отсутствовала степень доктора – Д.Д. Мордухай-Болтовской Высочайшим соизволением был назначен ординарным профессором).

Исполняющим обязанности доцента этой же кафедры с 1июля 1909 г. был утвержден В.П.Вельмин, ученик Д.А. Граве и Б.Я. Букреева по Киевскому университету, выдержавший весной испытания на степень магистра. После защиты в 1913 г. магистерской диссертации В.П. Вельмин станет экстраординарным профессором Варшавского университета.

В 1911 г., после учреждения второй должности доцента по кафедре чистой математики (в связи с увеличением числа студентов), по рекомендации И.Л. Пташицкого, поддержанной В.А. Стекловым и Д.Ф. Селивановым, на факультет был принят воспитанник Петербургского университета В.И. Романовский, который в том же году представил, а в следующем защитил магистерскую диссертацию.

Кроме того, по совместительству в Варшавском университете работал И.Р. Брайцев, выпускник Московского университета. Именно лекции перечисленных математиков студент Субботин слушал в 1910–1914 гг., именно их имена он упомянул в своем Curriculum vitae в 1915 г. Среди других преподавателей М.Ф. Субботин выделил экстраординарного профессора по астрономии и геодезии С.Д. Черного, ученика М.Ф. Хандрикова по Киевскому университету, защитившего магистерскую диссертацию в 1908 г.

Под руководством С.Д. Черного на втором курсе проходили практические занятия по геодезии и астрономии. Любознательность и трудолюбие студента Субботина обратили на себя внимание профессора, который и привлек его к работе в университетской обсерватории в качестве помощника при астрономических и метеорологических наблюдениях. За последующие два с половиной года М.Ф. Субботин ознакомился с необходимым инструментарием, “изучил теорию меридианного круга и обучался определению времени и прямых восхождений светил при помощи большого меридианного круга Эртеля, а также принимал участие в определении погрешностей устройств и установке кометоискателя”. Это, безусловно, помогало и в учебных делах, и в улучшении материального положения. Как следует из Curriculum vitae, М.Ф. Субботин дважды успешно участвовал в конкурсах на соискание стипендий имени Коперника, написав работы “Способ Ольберга для определения параболических орбит комет и вычисления по этому способу параболической орбиты кометы 1911д (Белявский)" и "Определение широты места измерением зенитных расстояний светил; определение широты северного павильона Варшавской обсерватории". Кроме того, результаты астрономических наблюдений талантливого студента неоднократно публиковались в Astronomishe Nachrichten (Bd 191, 192, 194), Bulletin astronomique (t. XXXI, fevrier 1914, maj 1914, nov.-dec. 1914), Monthly Notices (Vol. LXXV. № 1).

Все сказанное выше позволяло надеяться на оставление при университете для подготовки к профессорскому званию по астрономии. Но на 2–3 курсах к Михаилу Субботину пришло еще одно научное увлечение – чистая математика. Он активно включился в работу математического семинария, организованного в 1911 г. Д.Д. Мордухай-Болтовским. В качестве докладчиков выступали студенты, профессорские стипендиаты, профессора В.П. Вельмин и В.И. Романовский, а нередко и сам руководитель. Роль этих занятий в формировании и воспитании педагогических кадров и для школы, и для вузов была чрезвычайно велика. Здесь разбирались не только разделы, вскользь затрагиваемые на лекциях, но и проблемы, возникающие у студентов в процессе самостоятельной работы. Здесь студенты получали исчерпывающие библиографические указания, а это было чрезвычайно важно, особенно в связи с тем, что Д.Д. Мордухай-Болтовской настоятельно рекомендовал для изучения не только русскую, но – главным образом – иностранную литературу. Кроме того, устные доклады студентов служили им "начальной школой изложения своих мыслей", а публикация в Трудах Математического семинария требовала "серьезного, вдумчивого отношения к излагаемой теме". Так оценивал значение семинария Н.М. Несторович, однокурсник Субботина, впоследствии профессор Ростовского университета.

Прошел эту школу и М.Ф. Субботин. Сначала был доклад "О функциях Бесселя" (1913), затем – выпускная работа (на степень кандидата математических наук) "О форме коэффициентов степенных разложений функций алгебраических и трансцендентных первого класса" (1914), выполненная под руководством Д.Д. Мордухай-Болтовского и тоже заслужившая награду от факультета. Последний раз он выступал на заседании семинария уже в качестве ассистента Донского Политехнического института в феврале 1916 г. с докладом "Основные вопросы аналитической теории дифференциальных уравнений".

Но это – в будущем. А пока... 5 июня 1914 г. М.Ф. Субботин получает диплом об окончании Варшавского университета с ученой степенью кандидата, что предоставляет ему "все права и преимущества, законами российской империи со степенью кандидата соединяемые". Среди подписавших документ С.Д. Черный, который еще в мае подал в совет факультета прошение о назначении своего ученика с 1 июня исполняющим обязанности младшего астронома-наблюдателя университетской обсерватории, в обязанности которого вменялись проведение и обработка метеорологических и астрономических наблюдений. Естественно, что ходатайство было удовлетворено, а М.Ф. Субботин приступил к подготовке к магистерским экзаменам по астрономии.

Однако через полтора месяца началась война с Германией, все планы были нарушены. О том, как складывалась университетская жизнь в следующем учебном году, достаточно подробно и документально рассказал профессор П.В. Верховский в [3]. В частности, уже в июле, а затем и в сентябре часть имущества вывезли из Варшавы, учащихся в университете почти не было, занятия проводились в урезанном виде. Все это "вместе с налетами и бомбометанием аэропланов, вместе с недостатком угля, света, продуктов, вместе с тяжелыми смутными слухами с ближайших фронтов... поддерживало в коллективе очень нервное настроение", а университетские руководители "ничего не предпринимали, чтобы предусмотреть ближайшую судьбу университета" и "приготовиться к возможной катастрофе" [3].

У М.Ф. Субботина учебных занятий не было, и он, переменив первоначальное намерение, переключился на подготовку к магистерским экзаменам по чистой математике. В начале мая 1915 г. он подал в деканат прошение об оставлении его со стипендией при кафедре чистой математики для приготовления к профессорскому званию. Одновременно в совет поступило соответствующее ходатайство профессора Д.Д. Мордухай-Болтовского с приложением отзыва о работе М.Ф. Субботина и подробного плана занятий будущего аспиранта, в составлении которого принимали участие практически все наличествующие математики и механик Д.Н. Горячев. К каждому разделу (алгебра и теория чисел, теория функций как вещественного, так и комплексного переменного, дифференциальные уравнения, эллиптические функции и алгебраические функции с теорией абелевых интегралов, теория поверхностей, синтетическая геометрия и геометрическая аксиоматика и, наконец, механика) прилагался обширный список обязательной литературы, в основном иностранной (в общей сложности более 20 наименований). 28 мая физико-математический факультет передал свое положительное решение (приложив к упомянутым документам свидетельства о знании М.Ф. Субботиным французского и немецкого языков, о военной повинности и о его здоровье) для утверждения в Совет университета [1. Л. 25, 27, 35].

Однако и этому плану в ближайшее время не суждено было осуществиться. Несколько ранее профессор И.Р. Брайцев, судя по некоторым неподтвержденным данным, получил приглашение на работу от руководства Донского политехнического института (открытого в 1907 г. в Новочеркасске и связанного тесными узами с профессурой Варшавского университета и Варшавского Политехнического института, в частности, с Д.Д. Мордухай-Болтовским, который работал там в 1907-1909 гг.) и отказался от него, порекомендовав на предлагаемое место М.Ф. Субботина как "одного из талантливейших учеников своих, который может вести преподавание математики в высших учебных заведениях". 21 мая 1915 г. исполняющий обязанности ректора ДПИ обратился к И.Р. Брайцеву с просьбой: "не откажите сообщить г. Субботину, чтобы он приехал в Новочеркасск незамедлительно для переговоров, и пришлите Вашу рекомендацию" (ГАРО, ф. 42, оп. 2, № 549, л. 7). Молодой ученый отправился на переговоры (ему предоставлен 8-дневный отпуск), которые, судя по всему, оказались успешными. В течение двух месяцев шла переписка на уровне руководителей вузов о служебных качествах кандидата, и, наконец, в августе из учебного отдела Министерства Торговли и промышленности (в ведомстве которого находились политехнические институты) в Варшавский университет поступило извещение о назначении "М.Ф. Субботина штатным преподавателем математики в Донском Политехническом институте с 1 сентября 1915 г." [1. Л. 38].

Между тем, летом 1915 г. Варшавский университет находился в состоянии эвакуации. Перед своим отъездом из Варшавы Д.Д. Мордухай-Болтовской именно Субботину поручил заботу о математическом кабинете. Тот "обещал в случае эвакуации предпринять что-либо для спасения имущества", однако получил ("в очень категорической форме") от секретаря Правления университета отказ в помощи даже для вывоза семинарской библиотеки. Правда, потом, уже в Ростове, весной 1916 г., и учителю, и ученику пришлось давать объяснения Правлению по поводу гибели и моделей, и библиотеки, и даже инвентарных книг (докладные и объяснительные можно найти в ГАРО, ф. 527, оп. 1, № 52, л. 9, 16, 16об).

Тем не менее, в назначенный срок М.Ф. Субботин начал работать в Новочеркасске, а вскоре Варшавский университет обосновался в Ростове-на-Дону. Были восстановлены научные и личные контакты, между Субботиным и Мордухай-Болтовским завязалась интересная переписка. Послания Михаила Федоровича, к сожалению, не сохранились (архив Мордухай-Болтовского погиб в годы Великой Отечественной войны), однако ученик очень ценил письма своего научного руководителя, не расставался с ними при всех переездах, а позднее его сын передал эти письма в Санкт-Петербургское отделение Государственного Архива Академии Наук России (фонд 967, оп. 3, № 116).

Учебная нагрузка М.Ф. Субботина в институте была достаточно разнообразна: руководство практическими занятиями по аналитической и начертательной геометрии, по дифференциальному и интегральному исчислению. Кроме того, с января 1916 г. по приглашению руководства Высших женских курсов он начал там чтение описательной астрономии. Однако Д.Д. Мордухай-Болтовской в письме от 22 сентября 1916 г. высказывал Субботину неудовольствие его учебной нагрузкой и напоминал своему ученику о том, что для него скорейшая сдача магистерских экзаменов “имеет большое значение, так как ввиду проектируемого открытия многих высших учебных заведений” он сможет получить должность профессора еще до защиты. По-видимому, внушение наставника подействовало: уже в декабре того же года М.Ф. Субботин прислал ему предшествующий сдаче экзамена реферат на тему “Основные учения проективной и метрической геометрии”. Д.Д. Мордухай-Болтовской оценил его как “очень хорошо и умно составленный” (письмо от 20.10.1917) и дал конкретные рекомендации по подготовке к геометрическому экзамену. В другом письме (от 08.08.1917) он очень подробно рассматривает программу экзамена, обращает внимание на большое значение теории множеств, указывает наиболее существенные вопросы и теоремы из теории функций комплексного переменного и теории функций вещественного переменного, из теории алгебраических функций и теории абелевых интегралов и функций; попутно отмечает те пункты программы, которые на экзамене можно излагать без доказательств.

В сентябре-октябре 1917 г. сданы последние магистерские экзамены по математике и механике, ответы оценены как удовлетворительные. М.Ф. Субботин признан “выдержавшим испытания на степень магистра чистой математики”; теперь ему предстоит прочитать две пробные лекции в Донском университете. Одну из них, “Аналитическое продолжение функций комплексного переменного”, он готовит по собственному выбору, вторую – “Эволюция понятия об интеграле” - по назначению физико-математического факультета. При этом Д.Д. Мордухай-Болтовской предупреждает своего ученика (в письме от 18.10.1917), что последняя обязательно должна включать краткий очерк работ Коши, Вейерштрасса и Лебега. Через 4 дня, вернувшись к этому вопросу, он напоминает, что пробная лекция носит экзаменационный характер, а потому ее конструкция должна содержать "и исторический очерк с намеками на доказательства, и кое-какие маленькие доказательства для выявления способности объяснять".

Лекции прошли успешно, М.Ф. Субботин был удостоен звания приват-доцента Донского университета, и ему поручили чтение обязательного курса "Определенные интегралы" (2 часа в неделю в весеннем семестре 1918 г.). Однако вскоре выяснилось, что у Субботина нет возможности приезжать в это время в Ростов, поэтому и курс, и обязательная вступительная лекция ("Из истории учения об определенных интегралах") были отложены на осень.

Лекция состоялась 21 сентября 1918 г.; к этому времени М.Ф. Субботин уже получил звание доцента и по месту работы, в Донском политехническом институте. Избрание состоялось 8 июня, в Собрании сельскохозяйственного факультета, по представлению отзыва профессора И.И. Панфилова и доцента М.Ф. Зимина о последних научных работах претендента ([4, 5, 6], причем последняя еще находилась в печати). Дав краткий анализ результатов, составители отзыва в заключение отметили, что "все три работы М.Ф. Субботина показывают в нем большую эрудицию в интересующих его вопросах, полное умение разбираться в сложных и трудных подчас условиях работы и обнаруживают в авторе критическое отношение к чужим методам и способность к самостоятельному творчеству в избранной им интересной области математического анализа" (ГАРО, фонд 42, оп. 1, № 395, лл. 315, 315об, 316).

Авторы отзыва еще не могли предполагать, как сложится судьба этих работ (написанных и опубликованных в первые годы после окончания их автором университета!). Так, в статье [4] решалась задача об отыскании всех изолированных особых точек функции, заданной рядом Тейлора. Исследования в этом направлении были начаты Ж. Адамаром (1892), а среди продолжателей следует назвать И.Р. Брайцева, который опубликовал ряд работ, посвященных данной проблеме. Субботин хорошо знал результаты одного из своих учителей, а в упомянутой статье ему удалось доказать, что для определения аргумента особых точек нет необходимости проводить специальные, весьма громоздкие выкладки, опирающиеся на теорему Фабри, как делал Брайцев. На самом деле достаточно построить некоторую функцию, особые точки которой находятся в определенной связи с особыми точками данной функции, и определить радиус сходимости степенного разложения этой вспомогательной функции. Существенно и то, что Субботин не только указал путь получения функции, обладающей требуемыми свойствами, но и сам же отметил слабые места метода, ограничивающие его применение (см. подробнее в [7]).

Не менее важно и то, что в 1930 г. М.Ф. Субботин вернулся к идеям статьи [4] после знакомства с работой Полиа (1929) и, опираясь на свои ранние результаты, в [8] обобщил теорему Полиа. По-видимому, эта публикация Субботина своевременно не попала в поле зрения российских математиков, как и работа самого Полиа. Интерес к последней в России возродился в 60-е годы XX века, в связи с чем появились ссылки и на результаты Субботина (например, в работах М.Ф. Лохина в Ученых записках Горьковского университета за 1955 и 1963 годы, в монографии М.М. Джрбашяна [9])и др.).

Библиографический список

1. Государственный архив Ростовской области (ГАРО), фонд 527, опись 3, дело 842 (Личное дело М.Ф. Субботина).
2. Государственный архив Ростовской области (ГАРО), фонд 42, опись 2, дело 549 (О службе М.Ф. Субботина).
3. *Верховский П.В.* Предстоящие выборы университетской администрации // Ростовская речь, 1917. 22 октября.
4. *Субботин М.Ф.* Об определении особых точек аналитических функций // Матем. сборник, 1916. Т. XXX. Вып. 3. С. 402–433.
5. *Субботин М.Ф.* Sur les points singuliers de certaines équations differentielles // Bulletin des sciences mathématiques, 1916. 2e série. T. XL. V. 11.
6. *Субботин М.Ф.* О форме коэффициентов степенных разложений алгебраических функций // Известия Донского политехнического ин-та, 1919. Т. 7. С. 226–251.
7. *Мерман Г.А.* Очерк математических работ М.Ф. Субботина // Бюллетень института теоретической астрономии АН СССР, 1959. Т. 7. № 3. С. 233–255.
8. *Субботин М.Ф.* Sur les proprietés-limites du module des functions d'ordre fini // Math. Ann., 1930. V. 104. P. 377–386.
9. *Джрбашян М.М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М.: Наука, 1966. 672 с.

Основоположник нового метода расчета рельса на прочность – Степан Прокофьевич Тимошенко (1878–1972)

Л.В. Пугина

Известный историк науки, академик АН Украины А.Н. Боголюбов, говорил, что история науки – это не только история идей, но и история людей, которым принадлежат эти идеи. Ученого, в какой бы области он ни работал, невозможно отделить от жизни, от времени, от тех социальных условий, в которых он живет и творит, поэтому социальный аспект является составной частью для исследователя, который берется изучать историю какого бы то ни было вопроса.

Первая половина XX столетия в России дает ярчайшие примеры того, как сильно влияет на судьбу человека, в частности ученого, социальная атмосфера. В последнее время появилось много работ исследователей – историков, посвященных жизни и деятельности ученых этого периода. Тема репрессий стала возможной с некоторого момента и очень актуальной. Жизнь человека скоротечна, и именно историкам-исследователям надлежит расставить правильные акценты на те обстоятельства, которые стали судьбоносными в жизни каждого отдельно взятого ученого, особенно если он внес большой вклад в дело развития цивилизации.

Имя Степана Прокофьевича Тимошенко (1878–1972) широко известно многим поколениям инженеров и специалистам в различных областях механики. Выпускник (1901) лучшего высшего учебного заведения России XIX столетия, Петербургского института инженеров путей сообщения, С.П. Тимошенко получил серьезную теоретическую подготовку и по математике (в институте ее преподавал Д.А. Граве), и по механике (курс читал Д.К. Бобылев), и по проектированию мостов (педагогами были Н.А. Белялюбский и Л.Ф. Николаи), и статике сооружений (курс читал Ф.С. Ясинский).

После окончания института С.П. Тимошенко продолжал учиться, совершенствуя свои знания в области дифференциальных уравнений у Д.К. Бобылева. Он также посещал заседания Физического общества, где слушал доклады А.Н. Крылова. В 1903 году С.П. Тимошенко был принят лаборантом в новую механическую лабораторию в Политехническом институте (по рекомендации профессора С.И. Дружинина). Здесь он слушал лекции по теории упругости И.Г. Бубнова, посещал механический кружок В.Л. Кирпичева (основан в 1903 г.). В это же время

Тимошенко активно знакомился с различными исследованиями по теории упругости и сопротивлению материалов французских и немецких ученых .

В 1904 году С.П. Тимошенко выехал в заграничную командировку для знакомства с немецкими высшими учебными заведениями – Берлинским и Мюнхенскими политехникумами. К этому времени он уже имел твердое намерение работать "в направлении использования математики в решении инженерных вопросов".

Его первая печатная работа ("К вопросу о явлениях резонанса в валах") появилась в "Известиях Политехнического института" в 1905 году. В ней С.П. Тимошенко применил метод Рэлея (которым заинтересовался после знакомства с книгой Рэлея "Теория звука") к вопросу о влиянии массы судового вала на частоту колебаний.

В связи с революционными событиями 1905 года, закрытием ряда институтов, в числе которых был и Политехнический, С.П. Тимошенко отправился в Германию, в Геттингенский университет. Здесь он стал заниматься исследованиями по устойчивости двутавровой балки, а продолжил их уже в Петербурге в Политехническом институте, а затем и в Киевском политехническом институте, куда перебрался в 1906 году в связи с избранием на кафедру сопротивления материалов.

До 1911 года С.П. Тимошенко жил и работал в Киеве, читал лекции, занимался научными исследованиями (это был первый киевский период в жизни ученого).

Именно здесь, в Киеве, он подготовил и издал свой лекционный курс по сопротивлению материалов (литографированное издание вышло в 1908, 1909 гг., в 1911 г. – печатное издание), а также курс по теории упругости (1909).

В 1908 году С.П. Тимошенко был назначен секретарем, а в 1909 – деканом инженерно-строительного отделения Политехнического института.

В 1909 году он выезжал в научную командировку в Геттинген, где посещал лекции по теории упругости Ф. Клейна, по гидродинамике В. Фойгта, по аэродинамике Л. Прандтля.

В январе 1911 года вместе с рядом профессоров Киевского политехнического института С.П. Тимошенко подписал протест против усиления произвола и полицейских порядков, проводимых министром просвещения Л. Кассо. В феврале он был отстранен от занимаемой должности и уволен из института. В августе С.П. Тимошенко вернулся в Петербург, здесь он устроился (на почасовую работу) преподавателем в Электротехнический и одновременно в Политехнический институты. Несмотря на жизненные невзгоды (моральные и материальные потери по причине увольнения, переезд в Петербург, при том что семья осталась в Киеве), С.П. Тимошенко продолжал свою научную работу. В это время он подготовил статью “О действии поперечного удара на балку” (1912), опубликованную только через 10 лет, статью “К вопросу о деформациях и устойчивости цилиндрической оболочки”, напечатанную в 1914 году в “Известиях Электротехнического института”.

В 1912 году С.П. Тимошенко по рекомендации А.Н. Крылова стал консультантом военно-морского флота по прочности на судостроительных заводах. В 1913 году А.Н. Крылов отказался в пользу С.П. Тимошенко от профессорской должности в Институте инженеров путей сообщения, таким образом, Тимошенко получил должность профессора по теоретической механике, а впоследствии возглавил кафедру.

Первая мировая война внесла свои коррективы в жизнь С.П. Тимошенко. Еще до ее начала он был назначен членом мостовой Комиссии инженерного совета Министерства путей сообщения. В связи с военными действиями остро стоял вопрос об увеличении пропускной способности железных дорог и всех связанных с этим технических реконструкций. С.П. Тимошенко занялся теоретическими расчетами, относящимися к прочности рельсов, к напряжениям, возникающим в рельсе, к вибрациям в них и условиям их изгиба. Результатом явились новые статьи (1915–1916 гг.), в которых Тимошенко предложил собственный метод расчета упругих балок. Если ранее в расчетах предполагалось представлять рельс как балку на упругих опорах (Циммерман, Винклер, Петров и др.), то Тимошенко показал, что если рассматривать рельс как балку, лежащую на сплошном упругом основании, то расчетные формулы упрощаются и при этом результаты согласуются с экспериментальными данными.

Одновременно с работой в комиссии при Министерстве путей сообщения военно-инженерный совет пригласил С.П. Тимошенко экспертом по строительной механике, а ведомство воздушного флота – экспертом по прочности аэропланов. Революция 1917 года и события, последовавшие за ней, коренным образом изменили жизнь ученого. В конце декабря 1917 года С.П. Тимошенко выехал в Киев, чтобы повидаться с семьей, однако вернуться назад ему не пришлось. Совет Киевского политехнического института известил Тимошенко о восстановлении его в должности профессора. Занятия в институте продолжались недолго – с осени до зимы 1919 года. Из-за холодов и гражданской войны Политехнический институт закрылся.

В 1918 году академик В.И. Вернадский пригласил Тимошенко участвовать в комиссии по организации Академии наук Украины. Ученый включился в работу. В записке, представленной в Академию, Тимошенко объяснял необходимость включения технических наук в состав академических, а также создания внутри Академии отдела механики. Вновь созданная Академия наук осенью 1919 года, когда в Киев вошла армия Деникина, прекратила свою деятельность. Таким образом, С.П. Тимошенко остался без работы и средств к существованию. Тогда возникла мысль перебраться за границу. Продолжительные поиски работы не увенчались успехом, в середине 1920 года С.П. Тимошенко получил приглашение приехать в Югославию и занять должность профессора кафедры сопротивления материалов в Загребском политехническом институте. Вместе с семьей он уехал из России (благо "железный занавес" еще не опустился).

О первых годах жизни С.П. Тимошенко вне родины, о его впечатлениях и заботах можно судить по переписке, которую вел ученый со своим другом и соратником академиком В.И. Вернадским. В июле 1922 года он писал: "Что касается меня, то я благословляю судьбу мою и удачу.... Жизнь в Югославии мне очень нравилась. Загреб – прекрасный город с хорошей библиотекой и чудными окрестностями". Из другого письма следовало, что в Загребе Тимошенко все-таки испытывал лишения (семья не имела собственного жилья, приходилось жить в институтских лабораторных помещениях). Летом 1922 года его пригласили переехать в Америку, в Филадельфию, где группа русских инженеров-эмигрантов создала фирму "Vibration Specialty C".

В 1923 году в одном из писем С.П. Тимошенко сообщал: "Я покинул Филадельфию и уже три месяца как работаю у Westinhous'а. В связи с постройкой электрических локомотивов и крупных электрических машин возникает целый ряд совершенно новых вопросов прочности. Я теперь увлекся этими работами и на время забыл, что живу в дикой стране". Далее Тимошенко пояснял: "... никаких научных интересов здесь нет,...и в библиотеке ничего нет...Нет ни одного европейского журнала по математике! ... Лаборатории по моей специальности производят самое жалкое впечатление." И, несмотря на это, в конце письма: "У меня от последних лет пребывания в России остались такие тяжелые воспоминания, что не думаю, что мне в ближайшем будущем захотелось на родину".

25 января 1925 года Тимошенко сообщал: "Я уже около двух лет служу в Research Dept. Как далеки все эти учреждения от тех фантазий,

которые я когда-то имел в России относительно американских научных учреждений! Никакой науки... здесь нет! По крайней мере в моей области это настоящая пустыня... Все время заполнено работой на заводе. Некогда думать, некогда научно работать, и я чувствую, что еще год-два такой жизни – и я потеряю всякую связь с научной жизнью Европы". 14 марта 1925 года : "Положение ученого или университетского профессора очень незавидное, и я не удивлюсь, что здесь наука не процветает. Я начинаю думать, что демократический строй совершенно не благоприятствует развитию наук и искусств – для этого деспотический режим, пожалуй, лучше... Видел летом академика Стеклова на съезде в Торонто. Крупный ученый, который, казалось бы, мог держаться независимо, а вот "услужает" большевикам. Послушать его, так большевизм не хуже царского режима: и тогда бывали обыски, бывали притеснения студентов и шпионство, и теперь делается то же. Я привык считать, что вовсе не то же, а в 1000 раз хуже. О Дзержинском говорит Стеклов как о твердом правителе, а не как о палаче. Вот эта готовность русского человека "услужать" и есть вероятная причина прочности большевиков".

Несмотря на обстоятельства, не позволившие С.П. Тимошенко заниматься преподавательской и научно-исследовательской деятельностью в первые годы его пребывания в Америке, он тем не менее пытался делать все возможное, чтобы не растерять свой научный потенциал. Работая инженером в компании "Вестингауз", он провел опыты над рельсами для американских железных дорог. Результаты этих опытов Тимошенко доложил в 1926 году на международном конгрессе по прикладной механике в Цюрихе. В то же самое время он организовал вечерние курсы для молодых инженеров, на которых знакомил своих слушателей с вопросами теории упругости и сопротивления материалов. Одновременно Тимошенко работал над книгой по вибрациям "Теория колебаний в инженерном деле" (1928), написанной как обобщение исследований, проведенных им в России.

Через пять лет после приезда С.П. Тимошенко в Америку ему удалось заняться желанной для него научно-педагогической деятельностью В 1927 году его пригласили возглавить кафедру в Инженерной школе Мичиганского университета, и он переехал в Анн-Арбор. Здесь Тимошенко организовал курсы для будущих докторов наук – летнюю школу механики. В Мичиганском университете им читались лекции по сопротивлению материалов (переработан курс "Сопротивления материалов" (1930)), теории упругости, теории тонких стержней и пластин. В 30-е годы С.П. Тимошенко – активный участник международных конференций и конгрессов по прикладной механике: 1930 год – Стокгольм, 1932 год – Париж, 1933 год – Чикаго.

Летом 1929 года С.П. Тимошенко выезжал в Европу, где планировал встретиться с отцом. В письме В.И. Вернадскому из Праги он писал:"Условия моей работы в Америке значительно улучшились. Я имею кафедру Research Professor и потому свободен от общеобязательных занятий со студентами. Все время можно тратить на собственную научную работу и на занятия с докторантами... Ближайший год предполагаю заниматься организацией института прикладной механики при Мичиганском университете". Далее Тимошенко сетовал на то, что не смог встретиться с отцом: "Волокита Вашей власти все портит. Отцу все обещали дать паспорт и тянули так долго с этим, что срок давно прошел, и вот мы, собравшись в Праге со всех концов света, опять разъезжаемся, не повидавшись с отцом. Ему сейчас 82 года, и я совершенно не понимаю, зачем нужно было его задерживать. Ясно, что никакой опасности для советского строя он не представляет".

В сентябре 1936 года С.П. Тимошенко переехал в Пало Альто для работы профессором в Стендфордском университете. Вплоть до 1955 года, когда Тимошенко решил оставить преподавательскую деятельность, ученый активно работал со студентами и докторантами, читал различные курсы по прикладной механике.

В то время, когда С.П. Тимошенко занимался обустройством своей жизни в Америке, в России произошли события, которые в определенной мере связаны с его именем, с его исследованиями, в частности, его курсом "Сопротивление материалов".

Профессор Московского химико-технологического института мясной промышленности Н.В. Погоржельский в 1923 году представил в Научно-технический комитет НКПС работу "Продольный изгиб и расчет сжатых стержней", позже, в 1926 году , работу "Теория расчета свободного стержня на изгиб в плоскости". Данные работы, а также публичные выступления автора послужили поводом к растянувшейся более чем на 20 лет дискуссии о методах расчета сжатых и сжато-изогнутых стержней.

Н.В. Погоржельский выступил против действующих с 1923 года норм расчета длинных сжатых стержней (автором этих норм была группа ученых во главе с профессором Велиховым; за основу брались расчетные формулы, выведенные С.П. Тимошенко в его курсе "Сопротивление материалов"). Н.В.Погоржельский утверждал: "...следование теории, изложенной в курсе "Сопротивление материалов" проф. Тимошенко, ведет к расстройству транспорта также и по паровозам и мостам".

В своих статьях профессор Погоржельский предложил свой метод расчета стержня на изгиб “по сумме трех коэффициентов опасности”, который, по его словам, помог подвести теоретическую базу в направлении снижения коэффициента запаса прочности. Результаты исследований, предложенных Н.В. Погоржельским, несколько раз обсуждались в МИИТе (в 1927 г., в 1931 г. и в 1934 г.). Профессор В.П. Ветчинкин по поручению комиссии МИИТа проанализировал статьи проф. Погоржельского и дал положительную оценку нового метода расчета. Одновременно профессор М.М. Филоненко-Бородич дал резко отрицательный отзыв, о чем сообщил в своей статье “Исследования Н.В. Погоржельского и особенности задачи о продольном изгибе”, напечатанной в журнале “Вестник инженеров” № 4 и № 5 за 1927 год. Он отмечал: “Автор (Погоржельский – Л.П.) ведет свое исследование в “духе борьбы с официальными представителями технической науки”. Следует признать, что он вышел на эту борьбу неподготовленным и плохо вооруженным, а между тем деликатность самой задачи и отличие ее от массы других задач сопротивления материалов требуют и того и другого”. Далее в статье с особой тщательностью анализируются те неверные гипотезы, а также расчетные формулы, которые привели профессора Погоржельского к ошибочным заключениям. Кроме того, в статье проводится анализ решения данной задачи в общепринятой тогда форме, т.е. методом Ритца, видоизмененным С.П. Тимошенко. В заключение автор отметил: “В настоящее время имеются достаточно простые и точные приемы решения значительно более сложных задач (см. С.П. Тимошенко – Курс сопротивления материалов и теория упругости. Ч. II), и метод Н.В. Погоржельского является не прогрессом, а регрессом в этом вопросе”.

Вопрос об учебнике “Сопротивление материалов” С.П. Тимошенко поднимали в 1933 году на конференции по “созданию технической литературы”, которая проходила в связи с выдвинутым С. Орджоникидзе лозунгом “Все учебники пересмотреть и по-новому составить”. На конференции приняли решение о написании рецензии на учебник Тимошенко и поручили написать рецензию Н.В. Погоржельскому. В апреле 1934 года в МИИТе состоялся диспут на тему теоретических ошибок в курсе “Сопротивление материалов” Тимошенко.

Особая комиссия ВКВТО во главе с академиком А.Н. Динником постановила (29 апреля 1935 года) признать замечания профессора Погоржельского правильными.

Как следует из статьи “Необходимо “преодолеть” традиции раболепия”, опубликованной в журнале “Вестник инженеров и техников” в 1937 году, рецензию с отрицательным заключением, по "традициям раболепия" перед мировым именем автора, не осмелился напечатать ни один журнал, редакции которых "смотрели глазами последователей профессора С.П. Тимошенко".

В 1936 году в журнале "Вестник инженеров и техников" Н.В. Погоржельский поместил свою статью "Детально переработать всю главу о "продольном изгибе" курса профессора Тимошенко".

В 1945 году вышло новое издание курса "Сопротивление материалов" С.П. Тимошенко. В журнале "Вестник инженеров и техников" в 1947 году была опубликована статья профессора И.С. Подольского "К дискуссии по вопросу нового издания курса профессора С.П. Тимошенко "Сопротивление материалов" по поводу предыдущей рецензии". Вслед за Н.В. Погоржельским автор статьи утверждал, что новое издание нуждается в исправлении или что нужно "вовсе не исправлять, а объявить всесоюзный открытый конкурс на новый учебник". Однако с мнением автора статьи не согласились многие преподаватели учебных заведений. В частности, в защиту курса Тимошенко выступили доценты Б.В. Лопатин (Иваново) и А.Х. Шармаданошвили (Тбилиси), которые посчитали "полезным показать в учебнике Тимошенко использование формул деформаций изгиба к расчету простейших рам".

Отметим еще раз, что время, когда происходила описанная научная дискуссия, – 20-30-е годы XX столетия – известно как время тяжелых испытаний в судьбах наших соотечественников. Заметим также, что предметом дискуссии стал учебный курс, автором которого являлся ученый, покинувший родину и занимавшийся научными разработками, способствовавшими развитию технического прогресса иностранной державы. Позволим себе предположить, что отчасти именно этим объясняется затяжной характер дискуссии и невозможность принятия однозначного решения по вопросу, который был поднят профессором Н.В. Погоржельским, несмотря на то, что профессор М.М. Филоненко-Бородич уже в 1927 году после детального изучения вопроса писал: "Метод Н.В. Погоржельского во всех таких (более общих – Л.П.) случаях непригоден и опасен".

Приходится сожалеть о том, что научный потенциал С.П. Тимошенко был реализован не на родине, а за ее пределами. Заслуги ученого перед инженерным делом, перед техническим образованием были неоднократно отмечены различными премиями и медалями многих мировых научных сообществ. С.П. Тимошенко являлся членом различных Академий наук (Украинской, Российской, Польской), членом-корреспондентом и почетным членом Американской, Французской, Итальянской академий наук , а также почетным членом Лондонского королевского общества. Многие институты присудили С.П. Тимошенко почетное звание доктора наук (honoris causa). В 1957 году в США обществом инженеров-механиков была учреждена медаль имени С.П. Тимошенко. Отметим также, что традиционное изложение курса сопротивления, которое принято в настоящее время в российских технических учебных заведениях, ведется в соответствии с курсом С.П. Тимошенко.

Библиографический список

1. *Тимошенко С.П.* Устойчивость стержней, пластин и оболочек // Избранные работы под ред. Э.И. Григолюка. М.: Наука. 1971. 807 с.
2. *Писаренко Г.С.* Степан Прокофьевич Тимошенко. М., 1991.
3. *Сорокина М.Ю.* Разбросанные по всей Америке... Из писем С.П. Тимошенко В.И. Вернадскому // Природа. 2000. № 4. С. 55–57, 67–70.
4. *Погоржельский Н.В.* Детально переработать всю главу о “продольном изгибе” курса профессора С.П. Тимошенко // Вести инженеров и техников. 1936. № 7. С. 445–446.
5. *Погоржельский Н.В.* Необходимо “преодолеть” традиции раболепия // Вести инженеров и техников. 1937. № 2. С. 127.
6. *Филоненко-Бородич М.М.* Исследования Н.В. Погоржельского и особенности задачи о продольном изгибе // Вестник инженеров. 1927. № 4, 5.
7. К вопросу о расчете сжатых стержней. Метод проф. Н.В. Погоржельского // Труды Московского института инженеров транспорта им. И.В. Сталина. М., 1935.
8. К дискуссии по вопросу нового издания курса проф. С.П. Тимошенко “Сопротивление материалов” по поводу предыдущей рецензии // Вести инженеров и техников. 1947. № 5. С. 199–200.

Об “Очерках по теории статистики” А.А. Чупрова

Л.В. Кудряшова

Александр Александрович Чупров родился 18 февраля 1874 года в г. Мосальске. Его отец, А.И. Чупров, был профессором Московского университета. Александр Александрович рос и воспитывался в Москве, получив начальное образование дома.

В 1892 г. он окончил гимназию и поступил в Московский университет на физико-математический факультет, успешно окончив его в 1896 году.

Его дипломная работа называлась “Теория вероятностей как основа теоретической статистики”.

После окончания университета А.А. Чупров направляется в Берлинский университет, затем переезжает в Страсбургский университет, окончив который, начинает готовиться к магистерским экзаменам на юридическом факультете Московского университета.

Весной 1902 года он сдает экзамены и становится преподавателем экономического отделения Петербургского политехнического института.

2 декабря в Московском университете состоялась защита магистерской диссертации А.А. Чупрова. В качестве диссертации им была представлена книга “Очерки по теории статистики”, вышедшая в мае 1909 года. После защиты автору была сразу же присуждена докторская степень.

Книга А.А. Чупрова дала стройно разработанное введение в теорию статистики. В 1914 году был создан специальный журнал “Статистический вестник”.

В дальнейших исследованиях А.А. Чупрова на первый план все больше стали выдвигаться математические проблемы. В 1910–1917 гг. А.А. Марков и А.А. Чупров вели оживленную переписку по вопросам теории вероятностей и математической статистики. В этих письмах содержится огромный материал по разработке некоторых проблем и истории развития теории вероятностей и математической статистики. (Письма были обнаружены и опубликованы в 1977 году, составитель и ответственный редактор Х.О. Ондар, ученик К.А. Рыбникова) [2].

В течение всего времени преподавания в Петербургском политехническом институте А.А. Чупров на время каникул уезжал за границу для работы в крупных научных библиотеках Европы. В июне 1917 года он уехал в Швецию для изучения материалов Главного статистического бюро в Стокгольме. В Петроград он предполагал вернуться к сентябрю 1917 года, но этому помешала болезнь, а затем – отсутствие средств. Не получая из Петрограда денег, он был в Стокгольме в весьма трудном положении, о чем писал в своих письмах. В сентябре 1918 года он писал, что намерен приступить к занятиям в Петрограде, но с тех пор писем получено не было, причина его отсутствия в Петрограде осталась неизвестной. Из писем А.А. Чупрова видно, что он, живя в Стокгольме, упорно работал над теоретическими вопросами статистики.

Политехническому институту, ставящему специальной целью готовить статистиков, особенно важно было иметь в своей среде такого крупного представителя русской статистической науки, как профессор Чупров. Судя по материалам Государственного архива Великой Октябрьской социалистической революции и социалистического строительства Ленинградской области, заслуги профессора А.А. Чупрова перед статистической наукой определили выдвижение его кандидатуры на пост главы утверждавшегося в то время Центрального Статистического Управления Советской Республики, о чем в апреле 1918 года комиссар по делам страхования сделал ему официальное предложение [2. С. 7].

В январе 1919 года А.А. Чупров, испытывая материальные трудности, принял должность заведующего статистическим бюро дореволюционного Центросоюза в Стокгольме и возглавил издание "Бюллетеней мирового хозяйства", однако через полтора года оставил работу в Центросоюзе и переехал в Дрезден, где занимался исключительно научными исследованиями. В период 1918–1925 гг. А.А. Чупров опубликовал огромное количество работ (объемом около 70 печатных листов).

Признанием высоких заслуг А.А. Чупрова в развитии науки было избрание его членом-корреспондентом Российской Академии наук, корреспондентом Королевского экономического общества в Лондоне, членом Международного статистического института, почетным членом Королевского статистического общества в Лондоне.

В сентябре 1925 года А.А. Чупров поехал в Рим на сессию Международного статистического института с работой о выборочном исследовании. В это время его здоровье сильно ухудшилось, он тяжело заболел и умер в Риме 19 апреля 1926 года в возрасте 52 лет.

А.А. Чупров, последователь школы русских математиков П.Л. Чебышева, А.А. Маркова, при построении стохастической теории статистики считал необходимым опираться на фундамент строгих математических понятий и методов.

Книга "Очерки по теории статистики" – итог пятнадцатилетнего труда А.А. Чупрова. Он назвал эту книгу "введением в теорию массовых явлений", новой теоретической школой, работа которой далека от завершений: "...пусть мы еще не в силах приступить к окончательному возведению того здания, над сооружением которого трудится новая школа. Но ведь имеют свое значение и леса, которыми пользуются при стройке, хотя их и снимают, когда работа придет к концу" [1. С. 31]. А.А. Чупров ставил перед собой задачу подготовить почву для построения связной системы статистической методологии на основе теории вероятностей.

В книге дан критический разбор существующих теорий, проведен тщательный анализ неясных вопросов с учетом сложности восприятия статистиками математической стороны: "...я стараюсь с возможной отчетливостью осветить те исходные точки, от которых отправляется математический анализ, и подвергаю детальному разбору содержание и способы практического применения тех окончательных формул, к которым он приводит” [1. С. 34].

Книга состоит из четырех очерков. Первые три посвящены пограничным проблемам теории статистики, теории вероятностей и логики и являются необходимой подготовкой для построения в четвертом теории устойчивости статистических рядов.

В Очерке первом обсуждаются два типа систем схематизации действительности при научных исследованиях: 1) науки “номографические”, расчленяющие сложное на простейшие элементы, 2) науки “идиографические”, науки об индивидуальном, единичном. Долгое время преобладали науки первого типа. Но одного знания вечных и общих законов, как бы полно оно ни было, недостаточно для объяснения того, что совершается в мире. Необходимо к ним присоединить сведения конкретного содержания, связанные со временем и местом. Складывается наука об “индивидуальном”, ее развитие наиболее отчетливо прослеживается на примере статистики. Прежде чем статистика выделяется в самостоятельную ветвь научных знаний, она проходит длинный исторический путь.

Статистический учет носит первое время самый примитивный характер. Постепенно вырабатываются приемы учета, результаты облекаются в более выдержанные формы – назревает наука. С развитием международных отношений просыпается нужда в систематизации сведений, в торговых республиках уже с XIII века организуется систематическое собирание знаний о соседних государствах, появляются сводки статистических материалов. Из потребностей внутреннего распорядка усложняющейся общественной жизни вырастает движение идиографического знания в науке.

Статистика вносит в науку нечто новое, что не подвергалось ранее научному исследованию: исследование не единичного объекта, а “совокупностей” (“это не отдельная лошадь – на скачках, например, а “лошади” уезда, губернии, государства; не корабль, а флот. . . ” [1. С. 70]). Требовалась работа по изучению “признаков совокупностей”, стало необходимым привлечение своеобразных логических знаний.

Новое понятие входило в науку очень тяжело, “ускользало” различие между отношениями группового понятия к индивидуумам в “совокупности” и отношением родового понятия к входящим в его объем единичным представителям рода, то есть характер разницы между знанием статистическим и нестатистическим.

В результате статистику принимали не за достоверное, а лишь вероятное знание. А ее особенность и заключалась в вероятностном характере знания! И встать на этот путь пришлось при изучении человеческого общества, где единичные явления слишком сложны.

В Очерке втором речь идет о “категорическом исчислении” в статистике, собственно о методе индукции в логике и статистическом методе исследования связи между явлениями.

Между явлениями существуют такого рода связи, что если А – причина А’, то всегда и везде, где имеет место А, за ним следует А’, и всегда и везде , где А’ – там А. Подставить конкретные понятия на место символов – задача методологии науки. “Должны быть конструированы приемы переработки сырого материала непосредственных восприятий в те “законы природы”, которые рисуются нам в идеале номографического знания” [1. С. 44].

Приемы логики для улавливания причинных связей опираются на целый ряд предпосылок, не всегда выполнимых при исследовании конкретной деятельности. Это заставляет исследователей искать, помимо индуктивных методов логики, другие приемы анализа. На этом пути возник постулат

1) о повторяемости вселенной и два других:

2) если А – причина А’, а В – причина В’, то следствием действия А или В будет А’+ В’;

3) отрицание взаимной обусловленности явлений, так как теряется обычное представление о причинной связи.

Принцип “механического сложения причин” позволяет ввести требование повторяемости вселенной в более тесные рамки: “достаточно, чтобы неповторимые комбинации слагались из повторяющихся элементов (...подобно шахматным партиям)” [1. С. 100].

Обычное представление причинной связи дополняется цепочкой связей: то, что в данный момент является действием, может стать причиной нового действия и так далее до бесконечности. Наблюдаемое явление – лишь одно звено в линейном ряду. Бесконечное число подобных рядов может существовать одновременно, скрещиваться между собой или вообще не пересекаться, как, например, человеческие поколения.

Методы индукции перестают быть приложимыми.

Такое же заключение вытекает из анализа следствия применения методов индукции в случае “множественности причин”.

Практикой научной работы созданы приемы исследования, приспособленные к улавливанию разнообразных форм. Например, “если при анализе можем открыть в нескольких следствиях одного и того же типа какой-либо общий элемент, то получим возможность дойти до одной причины” [1. С. 113].

Если допускается множественность причин, то должна быть допущена и множественность действий. С множественностью действий тесно связана теория вероятностей.

Итак, там, где индуктивные методы не могут служить, вступают статистические методы, а они, в свою очередь, ищут точку опоры в теории вероятностей.

Очерк третий – “Математическая вероятность и статистическая частость. (Закон больших чисел)”. Как известно, индуктивные методы исследования приложимы к явлениям с неразрывной причинной связью. Однако наличие таких связей при исследовании общественных явлений гарантировать невозможно. Приходится обратиться к иным способам установления причинных зависимостей – к статистическим методам. Следовательно, должна быть найдена определенная характеристика связи причины со следствием, на которую можно опереться в практической работе (аналогично признаку неразрывности в методе индукции).

“Для каждых двух явлений, связанных причинно, она должна иметь неизменное значение, независимое от способа вычисления” [1. С. 134].

Такая характеристика находится в математической теории вероятностей: понятие “равновозможных исходов”.

Понятие математической вероятности определяется как отношение числа равновозможных благоприятных исходов ко всему числу несовместных исходов.

Таким образом, математическая вероятность – это правильная дробь, и если все исходы благоприятны событию, то дробь равна единице, значит, в таком случае за данной причиной всегда идет интересующее нас следствие.

Отсюда ясно, что математическая вероятность – не мера нашего незнания, а сжатая формулировка того, что мы знаем, она является характеристикой, подобной центру тяжести в механике. Однако она не дает ничего нового, а лишь позволяет ощутить явление, возможно, уловить фальшь.

Как измерить вероятность? Чтобы получить численное значение вероятности, необходимо выяснить несовместность и определить равновозможность исходов, сосчитать общее число и из них количество благоприятных исходов. Трудоемкая работа, если вообще практически выполнимая. Здесь эмпирическим мерилом вероятностей служат статистически улавливаемые *частости* событий.

Вероятности сложных явлений могут быть найдены через вероятности составляющих их более простых. Этому служат теоремы сложения и теоремы умножения вероятностей, для чего требуется введение понятий независимости явлений и условной вероятности.

“Свое методологическое оправдание понятие вероятности находит в той тесной связи между математическими вероятностями явлений и их эмпирическими частостями, которая устанавливается знаменитым Законом больших чисел” [1. С. 163] – законом первостепенной важности для обоснования теории статистики.

Приведем “упрощенные” формулировки: “по мере увеличения числа испытаний меняющиеся причины все более теряют способность влиять на результат”; “благодаря большому числу наблюдений действия случайных причин почти парализованы и почти во всей силе выражается связь наблюдаемого явления с его постоянными неслучайными причинами” [1. С. 165].

Логический характер Закона больших чисел: это не математическая теорема, не логический принцип – принцип лежит в ее основе – закон причинности.

Закон больших чисел приложим к “единичным явлениям” особого рода – к “совокупностям”. “Лишь открытое признание вопроса о роли “совокупности” как методологической категории за самостоятельную логическую проблему может. . . помочь обосновать правила статистических методов”.

Отдел четвертый посвящен вопросу о приложении концепций теории вероятностей к проблеме устойчивости статистических рядов. Рассматривая статистические сборники, обнаружим, что многие из чисел повторяются из года в год с незначительными изменениями. Устойчивость становится осью, около которой вращается работа статистической мысли.

“Устойчивость статистических чисел, их свойство колебаться от года к году лишь в известных, ограниченных пределах представляет *эмпирически* устанавливаемый факт, который сам по себе, независимо от тех или иных теоретических истолкований, имеет громадную научную и жизненную важность. Это один из коренных, хотя и мало заметных, устоев современной культуры. Вера в ограниченную колеблемость статистических чисел лежит в основе всякого расчета в области общественной жизни” [1. С. 208].

Раскрытие устойчивого порядка, вносимого в хаос случайных единичных явлений путем объединения их в “совокупности”, признается чуть ли не главной задачей статистики. Вопрос в том, чтобы найти рациональную меру степени устойчивости.

“Необходимо найти такой прием измерения устойчивости, который бы элиминировал различия, связанные лишь с *числом* наблюдений, и выявлял бы ту общую амплитуду колебаний, которая остается при их исключении... после этого можно... выяснять, о чем свидетельствует факт устойчивости массовых явлений общественной жизни” [1. С. 235].

Мерой, характеристикой устойчивости стала *дисперсия*. А.А. Чупров показал, что данный Лексисом критерий устойчивости не всегда применим, и вывел ограничения, которые необходимо учитывать при использовании этого критерия.

А.А. Чупров вывел, *как* колеблемость статистических чисел зависит от степени постоянства вероятностей, лежащих в их основе, а также от присутствия и характера связей между наблюдениями.

Внимательно присматриваясь к происходящему вокруг, поймем, что вероятностные схемы – “не пустая игра воображения”, что они находят полное соответствие с условиями действительной жизни. “Мы в состоянии определенно указать в условиях существования человеческого общежития такие обстоятельства, которые имеют тенденцию поднимать устойчивость массовых явлений против нормы, равно как и такие, которые повышают их колебания” [1. С. 295]. Но эти противоположные влияния не действуют раздельно, каждое массовое явление носит печать всей их совокупности.

“Устойчивость статистических чисел не закон, определяющий ход событий, а результат стечения многообразнейших обстоятельств” [1. С. 297].

Библиографический список

1. *Чупров А.А.* Очерки по теории статистики. М.: Госстатиздат, 1959. 320 с.
2. О теории вероятностей и математической статистике (переписка А.А. Маркова и А.А. Чупрова). М.: Наука, 1977. 200 с.

Развитие теории интегрируемости в конечном виде в трудах русских математиков конца XIX столетия

Н.В. Локоть

Проблема интегрируемости в конечном виде являлась существенной частью математических исследований, начиная с XVII века. Интерес к ней сохраняется до сих пор, так как она оказалась тесно связана с проблемами дифференциальной алгебры и теории алгебраических функций. История возникновения и развития рассматриваемой проблемы достойна пристального внимания тех, кому, по словам Ж. Лагранжа, *"желательно знать не только истину, но и путь, которым человеческий разум вырабатывал эту истину".*

Прежде остановимся на самом понятии "*интегрируемость в конечном виде*" и краткой истории его эволюции. **В узком смысле** ее понимают так: *определить, является ли интеграл* $\int f(x)dx$, *где функция* $f(x)$ *– элементарная функция, элементарной функцией, и если да, то указать способ, как ее найти.*

При этом если $F(x) = \int f(x)dx$, где функция $f(x)$ – элементарная функция, является элементарной функцией, то говорят, что данный интеграл *выражается в конечном виде.*

Еще на заре возникновения интегрального исчисления математики встречались с интегралами, которые никак не удавалось найти, и назвали их *неберущимися.* Сначала интегрировали алгебраические функции и стремились выяснить, является ли результат интегрирования алгебраической функцией. Широкое распространение трансцендентных функций привело к тому, что понятие интегрируемости в конечном виде изменилось: *интегрируемой в конечном виде называлась такая элементарная функция, интеграл от которой выражался с помощью алгебраических, круговых функций и логарифмов.* Пути решения проблемы также изменялись: от непосредственного нахождения интегралов функций частного вида с помощью преобразований, подстановок, разложения подынтегральной функции в ряд (которые не могли дать общих методов) исследователи пришли к планомерному поиску методов, расчленяя множество функций на отдельные виды и интегрируя их. Этот путь был более плодотворным, появились некоторые результаты общего характера, например, удалось доказать, что интеграл от рациональной функции всегда берется в конечном виде, а результат интегрирования – элементарная функция. Интегралы же от трансцендентных функций пытались сводить какими-то специальными способами к интегралам от рациональных функций. Такой подход к решению проблемы характерен для XVII–начала XVIII веков. Другой путь появился уже к середине XVIII столетия – математики стремились узнать, *при каких условиях интеграл от определенного вида функций берется или не берется в конечном виде.* Так, в работах Д. Бернулли, Х. Гольдбаха, Л. Эйлера были доказаны некоторые достаточные условия интегрируемости в конечном виде дифференциального бинома $\int x^m(a + bx^n)dx$ при $\frac{m+1}{n}$, $\frac{m+1}{n} + p$, p – целом. Необходимые условия были несоизмеримо важнее, для дифференциального бинома они были получены П.Л. Чебышевым;

Н.Х. Абель нашел (без доказательства) необходимый и достаточный признак интегрируемости в конечном виде дифференциала $\frac{\rho}{\sqrt{R}}dx$, состоящий в том, что *если интеграл вида* $\int \frac{\rho}{\sqrt{R}}dx$, где ρ и R – *полиномы, выражается через логарифмы, то его можно представить в виде* $\int \frac{\rho}{\sqrt{R}}dx = A\ln\frac{p+q\sqrt{R}}{p-q\sqrt{R}}, A - const, pq$ – *полиномы от* x. Эту теорему в 1853 году обобщил П.Л. Чебышев [3]. Ж. Лиувиллю удалось доказать неинтегрируемость в конечном виде эллиптических и некоторых трансцендентных функций. Кроме того, при рассмотрении проблемы в другом ракурсе, а именно: *если интеграл от трансцендентной функции некоторого вида берется в конечном виде, то какова будет схема результата интегрирования,* были получены замечательные теоремы о таких схемах:

Теорема Абеля (1828). *Если* $\int ydx$, *где* $y = y(x)$ – *алгебраическая функция, явно или неявно выражается в конечном виде, то*

$$\int ydx = u + A_1\log v_1 + A_2\log v_2 + ... + A_n\log v_n,$$

где $A_i - const_(i = 1, 2, 3, ..., n)$, $u, v_1, v_2, ..., v_n$ – *рациональные функции от* x *и от* y.

Теорема Лиувилля (1835). *Если функция* $f(x)$ *алгебраическая и* $\int f(x)dx$ *выражается в конечном виде (через элементарные функции), то*

$$\int f(x)dx = t + A\ln u + B\ln v + ... + C\ln w,$$

где $A, B, ..., C - const$, $t, v, ..., w$ – *алгебраические функции от* x.

Отметим, что аналогичные схемы впоследствии были найдены Д.Д. Мордухай-Болтовским для степенно-показательных, логарифмических, тригонометрических и другого вида функций. Такие выдающиеся результаты не могли не привлечь внимания русских математиков к проблеме интегрируемости функций в конечном виде. Значительные успехи в решении проблемы были достигнуты М.В. Остроградским и П.Л. Чебышевым, Е.И. Золотаревым, работы которых проанализированы Б.В. Гнеденко, И.Б. Погребысским, А.П. Юшкевичем, В.В. Голубевым, Е.П. Ожиговой. Исследования Чебышева и Золотарева по проблеме интегрируемости в конечном виде функций продолжили Н.Н. Алексеев (1864, 1866 (2 статьи)), В.Я. Буняковский (1863), И.Л. Пташицкий (1881), В.П. Ермаков (1897), Н.Я. Сонин (1900), И.П. Долбня (1888, 1890 (2 работы), 1896), А.А. Марков (1894).

Параллельно с проблемой, указанной выше, развивалась и ***проблема интегрируемости дифференциальных уравнений в квадратурах***, которая понималась как *представление его решения формулой, состоящей из элементарных функций и функций, входящих в уравнение, и содержащей только конечное число алгебраических операций и квадратур от этих функций* [4. С. 94]. Доказательство Лиувиллем *невозможности интегрирования в квадратурах* некоторых дифференциальных уравнений заставило искать другие пути решения проблемы, один из которых был прозорливо указан Л. Эйлером. Он первым обратил внимание на то, что возможно интегрирование дифференциальных уравнений с помощью частных решений или частных интегралов. В середине XIX столетия появились публикации Ф. Миндинга (1862 г.) о нахождении интегрирующего множителя для уравнения $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$, где M и N – многочлены от x и y, по частным решениям этого уравнения. В зарубежной историко-математической литературе бытует мнение, что эти изыскания Миндинга не привлекли достойного внимания ученых и только спустя некоторое время "независимо от Миндинга, Г. Дарбу в 1878 году и другие авторы (Эллиот, Гейман, Сонин и Коркин) опубликовали исследования, родственные исследованиям Миндинга" [1. С. 111]. То, что такое мнение не совсем справедливо, первой заметила Е.П. Ожигова. Одну из глав книги о А.Н. Коркине она посвятила описанию развития идей Миндинга, упомянув работы Урусова (1863), Ковальского (1866), Летникова (1866), Андреевского (1869), Кояловича (1892,1898), Сонина (1895), Коркина (1903,1904), Анисимова (1904), более подробно остановившись лишь на работах Летникова и Кояловича [2]. Но это лишь одно из направлений решения части проблемы. Общий анализ развития теории обыкновенных дифференциальных уравнений от эпохи Коши до начала XX века дан в работах С.С. Демидова [4, 5]. Попробуем конкретизировать развитие одной из важных ее составляющих и восстановить картину поиска решения проблемы интегрируемости в конечном виде (функций и дифференциальных уравнений) примерно с 60-х годов XIX века, то есть после публикации основополагающих результатов Абеля, Лиувилля, Чебышева, Миндинга (не затрагивая исследования с теоретико-групповым подходом). Рассматриваемый нами период был бурным для российской математики. Теорией интегрируемости дифференциальных уравнений в квадратурах занимались многие ученые разных математических школ. Достаточно просмотреть библиографии работ с 1865 по 1900 годы в основных русских математических изданиях "Записки Императорской АН", "Математический сборник", "Сообщения Харьковского математического общества", "Варшавские университетские известия", "Ученые записки" и "Протоколы заседаний советов" университетов в Казани, Новороссийске, Киеве, Одессе, Харькове и других городах. Немного статистики: в "Математическом сборнике" с 1966 по 1900 годы опубликовано свыше 50 статей по названной теме, в академических и университетских изданиях Санкт-Петербурга – 25 статей, в харьковских изданиях – 37 публикаций, в Казани – 17 работ, в киевских университетских изданиях – 9 публикаций. Их авторами были *А.В. Летников* (1866, 1877, 1879, 1889); *С.А. Юрьев* (1866, 1869); *Н.Н. Алексеев* (1868, 1870, 1878); *А.Н. Коркин* (1867, 1878); *Э.П. Янишевский* (1867); *М.А. Андреевский* (1868, 1869, 1869, 1870); *Н.В. Бугаев* (1868, 1869, 1891, 1894, 1896); *Д.М. Деларю* (1868); *В.Г. Имшенецкий* (1868, 1874, 1876, 1880 (3 статьи), 1882, 1887, 1888 (2 статьи), 1891 (3 статьи), 1893 (2 статьи), 1896 (2 статьи), 1896); *Н.Н. Зернов* (1868); *М.Ф. Ковальский* (1868 (2 статьи), 1896), *Ф.Е. Орлов* (1868, 1869, 1884); *В.И. Зайончковский* (1870 (2 статьи), 1871, 1872); *О.И. Сомов* (1871); *В.П. Ермаков* (1873, 1877, 1880 (2 статьи), 1882, 1884, 1886/7, 1888 (2 статьи), 1889, 1894 (2 статьи)); *В.В. Преображенский* (1873, 1874); *Н.Я. Сонин* (1873, 1875 (3 статьи)); *К.М. Петерсон* (1877, 1878, 1882); *А.В. Васильев* (1878, 1886); *В.П. Старков* (1878 (2 статьи), 1879 (2 статьи), 1884, 1885 (4 статьи)); *Д. Деларю* (1879); *Н.Я. Шапошников* (1881); *В.П. Алексеевский* (1884 (3 статьи), 1885); *В.П. Максимович* (1884, 1885 (2 статьи)); *В. Перевощиков* (1884); *П.С. Флоров* (1884 (4 статьи), 1886, 1887, 1888); *К.А. Торопов* (1885); *А.А. Марков* (1887 (2 статьи), 1894, 1897); *В.Е. Сердобинский* (1887); *Д.А. Граве* (1889); *П.А. Некрасов* (1889, 1893, 1894, 1896 (6 статей)); *В.А. Стеклов* (1891 (3 статьи), 1892, 1896 (2 статьи)); *С.Е. Савич* (1892); *Л.К. Лахтин* (1893); *А.М. Ляпунов (*1893); *К.А. Поссе* (1893); *К.А. Андреев* (1894 (2 статьи), 1894/95); *Н.М. Гюнтер* (1894); *Б.М. Коялович* (1894, 1898, 1899 (4 статьи)); *Д.М. Синцов* (1894, 1895, 1897, 1898, 1899); *А.И. Круковский* (1895); *В.А. Анисимов* (1896 (6 статей), 1897 (2 статьи), 1898 (3 статьи), 1900); *И.В. Мещерский* (1896); *Д.Н. Зейлингер* (1897 (2 статьи)); *И.В. Станкевич* (1897); *С.Н. Антаев* (1898); *С.А. Чаплыгин* (1897/8); *Д.А. Граве* (1899 (2 статьи)); *Н.Н. Салтыков* (1899 (2 статьи)); *И.Р. Брайцев* (1900); *Д.Н. Горячев* (1900). Кроме того, вопросы интегрируемости в конечном виде постоянно были в центре внимания участников съездов русских естествоиспытателей, проходивших в рассматриваемый период (12 докладов), и в заседаниях Санкт-Петербургского математического общества [3]. Нужно отметить, что исследования многих вышеуказанных математиков до сих пор не проанализированы с точки зрения современной математики. В условиях одной статьи это невозможно, но обратим внимание на некоторые интересные мемуары и их авторов. Укажем, что методу нахождения дробно-линейных интегралов линейных дифференциальных уравнений В.Г. Имшенецкого, изложенному им в ряде публикаций, и острой полемике, разгоревшейся по поводу его работ, посвящена отдельная статья [14], поэтому мемуары, относящиеся к этим вопросам, рассматривать не будем. Среди математиков *“варшавской ветви”* исследований по проблеме интегрируемости в конечном виде функций и дифференциальных уравнений можно выделить, как наиболее весомые, работы Н.Н. Алексеева, М.А. Андреевского, Н.Я. Сонина.

Николай Николаевич Алексеев (1828–1881), воспитанник Московского университета, преподаватель Александровского военного училища, впоследствии профессор чистой математики Варшавского университета (1871–1877), адъюнкт СПб. АН. Проблема интегрируемости в конечном виде занимала видное место в его исследованиях. Еще в 1864 году он опубликовал в Comptes rendus статью, посвященную поиску нового способа приведения интеграла $\int f(x, \sqrt{R(x)})dx$, где $R(x)$ – полином не выше 4-й степени к канонической форме эллиптических интегралов, и выражения их, где это возможно, через эллиптические функции [8]. Для этих целей еще Лежандром было предложено преобразование $x = \frac{A+Bx}{1+Cx}$, коэффициенты которого определялись так, чтобы полином под знаком корня содержал бы только члены четной степени [6. С. 102]. Н.Н. Алексеев предложил новый метод нахождения коэффициентов A, B, C, суть которого состояла в определении корней соответственно выбранной резольвенте специального вида

$$\theta^3 - (3p^2 - 8q)\theta^2 + (3p^4 - 16p^2q + 16pr - 64s)\theta - (p^3 - 4pq + 8r)^2 = 0,$$

где $\theta = (x_1 + x_2 - x_3 - x_4)^2$, где x_1, x_2, x_3, x_4 – корни полинома $R(x)$, причем с помощью корней этой резольвенты возможно выражать модуль k эллиптического интеграла и коэффициент M в равенстве

$$\int \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = M \int \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}.$$

В I выпуске “Математического сборника” (1866) опубликованы еще 2 статьи Алексеева по рассматриваемой тематике. В первой из них автор, ссылаясь на исследования Карла Марии Пьюма, помещенные в “Annali Matematica Tortolini”, доказал теорему общего вида.

Теорема Алексеева. *Если интеграл* $\int \frac{f(x)dx}{\sqrt[m]{\theta(x)}}$, *где* $f(x)$ *и* $\theta(x)$ – *многочлены,* $m \in \mathrm{Z}_+$, *можно выразить одними логарифмами, то существуют многочлены* $P_0, P_1, ..., P_{m-1}$, *удовлетворяющие равенству*

$$\prod_{n=0}^{n=m-1} \{P_0 + \alpha^n P_1[(x-x_1)^{h_1}...(x-x_p)^{l_1}]^{\frac{1}{m}} + ...+$$
$$\alpha^{n(m-1)} P_{m-1}[(x-x_1)^{h_{m-1}}...(x-x_p)^{l}_{m-1}]^{\frac{1}{m}}\} = const$$

(α определяется из уравнения $\alpha^n - 1 = 0$).

Заметим, что при $m = 2$ из нее следует теорема Абеля: “Если $\int \frac{f(x)dx}{\sqrt{R(x)}}$, где $f(x)$ и $R(x)$ – *многочлены, можно выразить через логарифмы, то существуют многочлены* P_0 и P_1 *такие, что выполняется условие* $(P_0 + P_1\sqrt{R})(P_0 - P_1\sqrt{R}) = const$, $M - const$, и $\int \frac{f(x)dx}{\sqrt{R}} = M \log\{[P_0 + P_1\sqrt{R}] \cdot [P_0 - P_1\sqrt{R}]^{-1}\}''$ [9].

Обращая внимание на то, что решение Абеля хотя и *“является образцом ясности и общности анализа”*, но в частных случаях довольно сложно, а метод, предложенный Чебышевым, *“остается пока без доказательства”,* Алексеев во второй статье предложил применять в некоторых частных случаях свой простой способ интегрирования [10].

Пусть $R = r^2 + s$, где степень s меньше степени r^2. Полагая $P = \frac{2r^2}{s} + 1, ^{Q} = \frac{2r}{s}$, получим, что $P^2 - Q^2R = \left(\frac{2r^2}{s} + 1\right)^2 - \frac{4r^2}{s^2}(r^2 + s) = 1$,

так как P и Q – целые функции, то $r \vdots s$. Нахождение $\int \frac{f(x)}{\sqrt{R}}dx$ в конечном виде приводится к определению P и Q этим способом, если $R = x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta = r^2 + s$, где $s - const$; тогда для α, β, δ выполняются условия $\frac{\alpha^2}{4} = \beta$, $\delta = \frac{\alpha}{2}\left(\beta - \frac{\alpha^2}{4}\right) = 0$ и $R = z^4 + \alpha z^3 + \beta z^2 + \gamma z$.

Автор указал еще один частный случай для многочлена R, при котором эффективен его способ: если $R = (x^2 + ax + b)(x^2 + ax + b_1) = x^4 + 2ax^3 + (b + a^2 + b_1)x^2 + (ab + ab_1)x + bb_1$, то $\alpha = 2a$, $\beta = b + a^2 = b_1$, $\gamma = ab + ab_1$, $\delta = bb_1$ и $R(x)$ представим в виде $R(x) = r^2 + s$.

Во второй части статьи Алексеев исследовал интеграл $\int \frac{f(x)dx}{\sqrt[3]{\theta}} = \int \frac{f(x)dx}{\sqrt[3]{X_1 \cdot X_2^2}}$, где f и θ – многочлены, X_1 – произведение одиночных множителей θ, а X_2 – двукратных множителей θ. Для случая $m = 3$ из своей общей теоремы он получил следующую:

“Если $\int \frac{f(x)dx}{\sqrt[3]{X_1 \cdot X_2^2}}$ *можно выразить в конечном виде посредством логарифмов, то существуют целые многочлены* P_0, P_1, P_2, *удовлетворя-*

ющие условию $\prod\limits_{n=0}^{n=2}\{P_0+\alpha^n P_1\left(X_1X_2^2\right)^{\frac{1}{3}}+\alpha^{2n}P_2\left(X_1X_2^2\right)^{\frac{1}{3}}\}=const$. *Интеграл в этом случае будет* $\int\frac{f(x)dx}{\sqrt[3]{\theta}}=A\log\prod\limits_{n=0}^{n=2}\left\{P_0+\alpha^n P_1(X_1X_2^2)^{\frac{1}{3}}+\alpha^{2n}P_2(X_1X_2^2)^{\frac{1}{3}}\right\}^{\alpha n}$" [9].

В конце статьи был изложен способ приведения интеграла $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x^3+px^2+q}}$ к эллиптическим, причем было выяснено, что интеграл приводится к логарифмам при $q=0$ или при условии, что x^3+px^2+q имеет 2 или 3 равных корня. Таким образом, Н.Н. Алексеев предвосхитил исследования П.Л. Чебышева для интегралов такого вида.

Проблема интегрируемости дифференциальных уравнений в конечном виде также получила развитие в трудах Н.Н. Алексеева. На Втором съезде естествоиспытателей и врачей, состоявшемся в Москве 20–30 августа 1869 г., в секции математики и астрономии под председательством П.Л. Чебышева Николай Николаевич сделал доклад, цель которого "*…указать на один общий вид интегрирующего фактора для некоторых групп дифференциальных уравнений, допускающих такой фактор*". "*Таких дифференциальных уравнений, за исключением однородных,* – замечал Алексеев, – *конечно, немного, и интегрирование их известно: но я думаю, что для общей теории дифференциальных уравнений не бесполезно подвести различные приемы под один общий прием, тем более, что этот прием дает возможность находить интегрирующий фактор для такого уравнения, как уравнение Якоби*" [11. С. 6]. Он рассматривал дифференциальные уравнения I порядка вида $Xdx+Ydy=0$ и, приводя его к виду $\mu_0u_1du_0+\mu_1u_0du_1=0$, где μ_0 и μ_1 – постоянные коэффициенты, а u_0 и u_1 – функции $(x-a)$ и $(y-a)$, находил интегрирующий множитель $\frac{1}{u_0u_1}$, получая в результате, что X и Y – линейные функции $(x-a)$, $(y-a)$ и имеют вид

$$X=bxy+cy^2+ex+fy+g;\quad Y=-bx^2-cxy+e_1x+f_1y+g.$$

Замечая, что такой вид имеют коэффициенты при dx и dy в уравнении Якоби, автор заключил, что полученный им "*вид интегрирующего множителя* $\frac{1}{\lambda}$ *принадлежит уравнениям, в которых X и Y линейные функции, и уравнению Якоби*" [11. С. 7]. Далее для случая, когда левая часть дифференциального уравнения приводится к виду $\mu_0u_1^2du_0+\mu_1u_0^2du_1$, он нашел еще один вид интегрирующего множителя и сделал вывод о том, что, кроме уравнения Якоби, получен еще случай, в котором X и Y – функции второй степени. Из протоколов заседания известно, что "сообщение Алексеева вызвало оживленные прения, относящиеся вообще до методов интегрирования", но, к сожалению, подробности возникшей дискуссии не отражены ни в "Трудах 2-го съезда", ни у В.В. Бобынина [12].

На Шестом съезде (СПб., 20–30 декабря 1879 г.) Н.Н. Алексеев докладывал новые результаты по интегрированию дифференциальных уравнений II порядка [13. С. 202]. Он рассматривал уравнение $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ в предположении, что его первый интеграл имеет вид $A(y')^2 + By \cdot y' + Cy^2 = K$, где $K - const$, A, B, C – функции переменной x, которые находятся из системы уравнений $\begin{cases} A' + B - 2AP = 0; \\ B' + 2C - BP - 2AQ = 0; \\ C' - BQ = 0. \end{cases}$

Путем несложных преобразований автор получил интеграл вида $B^2 - 4AC = e^{2\int P(x)dx}$, замечая, что кроме него можно найти A, B, C только в частных случаях. Если же A, B, C известны, а корни уравнения $Az^2 + Bx + C = 0$ обозначить за z_1 и z_2, то второй интеграл данного уравнения будет $Y = K_1 e^{\int z_1 dx} + K_2 e^{\int z_2 dx}$, где K_1 и K_2 – произвольные постоянные.

Мы проанализировали лишь работы Н.Н. Алексеева по интересующему нас направлению. Кроме них, как утверждается в "Протоколах заседаний Совета" Московского университета от 15 сентября 1869 года, имеется *"...перечень трудов, из которых многие доставили бы ему бесспорно ученые степени, если бы он следовал путем их официального приобретения. Усиленные педагогические занятия отвлекали его от этого пути, но не помешали ему заниматься наукою и оказать ей существенные услуги. Николай Николаевич представляет пример бескорыстного и доброго ученого, руководствующегося в своей научной деятельности только нравственными интересами"*. В результате Совет постановил *"утвердить кандидата Н.Н. Алексеева в степени Доктора Математики, на каковую ему изготовить надлежащий диплом, препроводив оный по назначению"* [20. С. 103].

Михаил Аркадьевич Андреевский (1847–1879) – воспитанник Харьковского университета, после получения звания кандидата в 1866 году был приват-доцентом в Новороссийске. В 1869 году защитил в Московском университете магистерскую диссертацию на тему *"Об интегрирующем множителе дифференциального уравнения 2 порядка вида $A + By' + C(y')^m + D(y')^{m+1} + E(y')^{m-1}y - 0$"*, в 1971 году – там же докторскую *"Об интегрировании однородных дифференциальных выражений с некоторыми приложениями"* [19]. С 1870 года работал в Варшавском университете. Основные результаты обеих диссертаций входят в статьи [16–18]. Андреевский в 32 года ушел из жизни, есть несоответствия в датах, о нем известно очень мало, анализ его научных достижений по рассматриваемой нами теме отсутствует (С.Е. Белозеров рассмотрел только его исследования по приложениям дифференциальных уравнений в частных производных) [15]. В Трудах Первого съезда русских естествоиспытателей и врачей (28 декабря–4 января 1868 г.) упоминается, что *"приват-доцент математики в Новороссийском университете М.А. Андреевский сообщил главнейшие результаты своего труда "Об интегральности однородных дифференциальных выражений высших порядков", который он намерен напечатать особо, как магистерскую диссертацию. Результаты эти состоят в нахождении условий интегральности и в двоякого рода формулах для непосредственного интегрирования однородных дифференциальных выражений высших порядков, а также в выражении числа* N *условий интегральности... выражений* m*-ого порядка между* n *переменными следующею формулою* $N = \frac{(n-1)n(n+1(n+2)\ldots(n+m-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(m-1)\cdot(m+1)}$" [16. С. 7]. Но магистерская диссертация была защищена по другой теме, а текст выступления скорее близок к теме докторской.

Нужно отметить, что успехи на научном поприще и деловые качества М.А. Андреевского были замечены в Варшавском университете, недаром в 24 года он уже возглавлял кафедру чистой математики Варшавского университета (1871 г.), в состав которой входил доцент Н.Я. Сонин и ординарный профессор Н.Н. Алексеев[15. С. 257]. Судьбе было угодно свести их всех сначала в Московском университете в 1869 году, когда Н.Н. Алексееву присвоили степень доктора, М.А. Андреевского утвердили в степени магистра, а кандидата Сонина оставили при университете для усовершенствования в науках, а затем в 1871 – в Варшавском на кафедре чистой математики. Научные интересы у них совпадали, тематика исследований была очень близка. Как складывались отношения на кафедре, можно только догадываться, но, видимо, простыми они не были. Имеется одно любопытное замечание Н.Я. Сонина в одной из его статей (сентябрь 1870 г.) по поводу диссертации Андреевского: " Оканчивая, я считаю нужным оговориться относительно цели настоящего сообщения. В 3-м выпуске IV тома "Математического сборника" помещена магистерская диссертация экстраординарного профессора г. Андреевского... В сущности все содержание этой диссертации заключается в промежутке моей настоящей статьи между формулами (20) и (23). Г. Андреевский, занимаясь одним частным случаем, не заметил общего источника полученного результата" [22. С. 293].

Руководство университета и Министерство просвещения высоко ценило свою молодую профессуру; в февральском протоколе (1874 год) заседания Совета Варшавского университета имеется запись: *"знаком ордена св. Анны II степени с Императорскою короною пожалован ординарный профессор университета, статский советник Н. Алексеев; орденом св. Станислава II степени без короны экстраординарный профессор, не имеющий чинов, М. Андреевский"* [21. № 4. С. 18]. В 1876 году Н.Н. Алексеев был утвержден в должности декана физико-математического факультета, а в 1877 *"произведен за отличие в Действительные Статские Советники"*; а *"доцент, не имеющий чина – Николай Сонин ... – в Коллежские Советники"* [21. № 3. С. 23–24]. В октябре 1877 Н.Н. Алексеев подал прошение об отставке и в 1879 году уехал в Санкт-Петербург, куда был приглашен на должность адъюнкта по разделу чистой математики Петербургской Академии наук. Н.Я. Сонин занял освободившуюся должность профессора на кафедре чистой математики, так как "*...высочайшим приказом по Министерству Народного Просвещения... ординарный профессор Варшавского университета Андреевский командирован за границу с ученой целью на 10 месяцев...*" [21. № 3. С. 5] и осенью 1979 года внезапно скончался.

Николай Яковлевич Сонин (1849–1915) – воспитанник Московского университета, впоследствии доктор математических наук (1874), академик Петербургской АН (1893).

Во время учебы в университете показал себя способным и целеустремленным студентом, еще на 4 курсе был награжден серебряной медалью за сочинение на заданную факультетом тему *"Теория линий мнимого переменного"* (1868) и после окончания (1869) оставлен стипендиатом физико-математического факультета для усовершенствования в науках [21. № 3. С. 118]. В извлечениях из протоколов заседаний Московского математического общества (март 1870 г.) содержится запись о том, что заведование библиотекой Общества поручено Н.Я. Сонину, а уже в сентябре 1870 года Сонин *"...избран действительным членом Общества и читал...*

3) Интегрирование полного уравнения $(A+Cz)dx+(B+Dz)dy+Fdz=0(1)$;

4) Интегрирование уравнений I порядка с двумя переменными, указав новые виды уравнений, принадлежащих к этой группе" [21. Т. XIII. В. 3. С. 278].

Первое сообщение сделано по тексту статьи, уже упомянутой выше; в ней автором были исследованы условия интегрируемости указанного дифференциального уравнения в частных производных и обобщены результаты магистерской диссертации Андреевского. По этому поводу Сонин писал: *"Не придавая научного значения настоящей статье, я полагаю, она принесет некоторую пользу лицам, которые могут заинтересоваться уравнением (1) в каком-нибудь частном предположении относительно природы функций φ, указав этим лицам прямой путь для такого рода исследований"* [22. С. 294]. В конце статьи он указал на одну историческую неточность, допущенную Андреевским в тексте диссертации (тот приписал Булю один из результатов Якоби), что свидетельствует о доскональном знании литературы по теме исследований. Результаты второго сообщения были усилены им в работах [23] (имеется отдельное издание 1874 года), [24, 25]. В 1894 году на заседании физико-математического отделения АН от 14 декабря академик Н.Я. Сонин доложил свои изыскания (2 статьи под общим названием) "О дифференциальном уравнении $\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{R(x)}{y}$" [26]. Результаты дискуссии, возникшей между автором статей и Б.М. Кояловичем по данному вопросу, частично освещены в [6] и [14]. Что же сделано непосредственно Сониным для развития метода Миндинга-Дарбу?

Отметим, что Сонин высоко оценил попытку Миндинга обобщить результаты Эйлера, особо выделяя факт, что Миндингу *"...принадлежит замечание, что те соотношения между переменными, при которых интегрирующий множитель обращается в нуль или бесконечность, удовлетворяют данному уравнению. В силу этого из бесконечного разнообразия частных решений, которые допускает данное уравнение, выделяются группы таких решений, которые могут служить для построения интегрирующих множителей уравнения. Имея одну такую группу и составив соответствующего ей интегрирующего множителя, найдем и общее решение дифференциального уравнения"* [26. С. 94]. Сонин применил метод нахождения общего решения с помощью частных решений сначала к уравнению

$$\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{R(x)}{y}, \tag{1}$$

рассмотрел n частных решений $y_i = \alpha_i(x)$, то есть таких, что

$$\frac{d\alpha_i}{dx} - 1 - \frac{R}{\alpha_i} = 0, \quad (1 \le i \le n), \tag{2}$$

преобразовал его к виду

$$\sum \frac{m_i}{y-\alpha_i} \cdot \frac{d(y-y_i)}{dx} + m\frac{dy}{dx} - m + \frac{R}{y}\left(\sum \frac{m_i}{\alpha_i} - m\right) = 0, \tag{3}$$

откуда получил, что “*если возможно так подобрать решения данного уравнения* $\alpha_i(x)$ *и постоянные* m_i, что $\sum \frac{m_i}{\alpha_i} = m$, *то уравнение* (3) *будет непосредственно интегрироваться и иметь общее решение в конечном виде*

$$\int \sum \frac{m_i}{y-\alpha_i} \cdot \frac{d(y-\alpha_i)}{dx} + m(y-x) = const, \tag{4}$$

причем интегрирующий множитель уравнения (1) *будет*

$$\sum \frac{m_i}{y-\alpha_i} + m, \tag{*}$$

если α_i *удовлетворяет условиям* (2) и (4) *и наоборот, если интегрирующий множитель будет (*), то частные решения* $y_i = \alpha_i(x)$ *удовлетворяют условиям* (2) и (4). *В силу этого, применение частных решений уравнения* (1) *для нахождения общего решения представляется как частный случай отыскания для уравнения* (1) *интегрирующего множителя вида* $\frac{my^n+S_1y^{n-1}+\ldots+S_{n-1}y+S_n}{y^n+T_1y^{n-1}+\ldots+T_{n-1}y+T_n}$, *в котором* S *и* T *– суть функции от* x'' [26. С. 96]. Затем Сонин рассмотрел более общую форму уравнения (1)

$$\begin{gathered}\sum \tfrac{m_i}{y-\alpha_i} e^{h(y-\alpha_i)} \tfrac{d(y-\alpha_i)}{dx} + me^{h(y-x)} \tfrac{d(y-x)}{dx} - \\ \tfrac{R}{y} e^{hy} \cdot \left(\sum \tfrac{m_i}{\alpha_i} e^{-h\alpha_i} - me^{-hx}\right) = 0,\end{gathered} \tag{1'}$$

из которой видно, что если частные решения $\alpha_i(x)$ и постоянные m_i $(1 \le i \le n)$, h могут быть определены так, чтобы выполнялось равенство $\sum \frac{m_i}{\alpha_i} e^{-h\alpha_i} = me^{-hx}$, то уравнение $(1')$ будет непосредственно интегрироваться, а (1) приводиться к $(1')$ с помощью интегрирующего множителя $e^{hy} \cdot \left(\sum \frac{m_i}{y-\alpha_i} e^{-h\alpha_i} + me^{-hx}\right)$. Представляя частные решения $y = \alpha_i$ рядами вида

$$y = x(n + q_1x^{-\lambda} + q_2x^{-2\lambda} + \ldots + q_kx^{-k\lambda} + \ldots), \tag{5}$$

где $\lambda = const$, $\lambda > 0$, он получил необходимые и достаточные условия существования общего решения уравнения в виде (4). Эта статья I вызвала замечания Б.М. Кояловича:

1) случай, когда уравнение (1) имеет 3 канонических решения x_1, x_2, x_3 и общий интеграл в виде $(y-\alpha_1)^{m_1}(y-\alpha_2)^{m_2}(y-\alpha_3)^{m_3}=C$, где m_1, m_2, m_3 – определенные постоянные такие, что $m_1+m_2+m_3=0$, разрешен Эйлером, Летниковым, Elliot'ом и Кояловичем; решение Сонина – пятое и не самое лучшее;

2) случай $R=\frac{3}{4}(x-x^{-\frac{5}{3}})$ тоже известен Эйлеру и разобран у Кояловича;

3) вопрос об общем случае, когда m_1 и m_2 – произвольные, оставленный Сониным без рассмотрения из-за сложных вычислений, в самом общем виде решен Кояловичем и доложен на заседании от 21 апреля 1894 года;

4) не рассмотрен случай при $x=\infty$, когда $\frac{R}{y}=\infty$;

5) у Сонина есть ошибка, и 10 страниц статьи подлежат исправлению; утверждение Сонина, что если все канонические постоянные рациональны, то сумму их всегда можно считать равной нулю, у Кояловича получено впервые в диссертации на стр. 157; (*читано на заседании СпбМО 21 апреля 1895 года*) [27. С. 106-108].

Видим, что все замечания были **приоритетного** характера, кроме указания на ошибку.

Отвечая на замечания Кояловича, Сонин в статье II продолжил свои изыскания и сформулировал окончательные выводы более четко и аккуратно: *“Для того, чтобы могло существовать равенство* $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{m_i}{\alpha_i}=0$, $m_i\neq 0$, *необходимо, чтобы дифференциальное уравнение имело вид* $y\frac{dy}{dx}-y=x\left[-\frac{1-\lambda}{(2-\lambda)^2}+a_2x^{-2\lambda}+a_3x^{-3\lambda}+...\right]$, *($\lambda$ – положительная правильная несократимая дробь $\frac{\tau}{\sigma}$); частные решения α_i получаются из разложения* $y=x\left(-\frac{1}{2-\lambda}+q_1x^{-\lambda}+q_2x^{-2\lambda}+...\right)$, *в котором коэффициенты вычисляются из формул* $q_k=\frac{2-\lambda}{\lambda}\cdot\frac{1-\frac{1}{2}k\lambda}{k-1}(q_1q_{k-1}+q_2q_{k-2}+...+q_{k-1}q_1)-\frac{2-\lambda}{\lambda}\cdot\frac{a_k}{k-1}$, $(k>1),\ldots q_k=b_kq_1^k+b_k^2q_1^{k-2}+...+b_k^k$, где $b_k=\left(\frac{2-\lambda}{\lambda}\right)^{k-1}\left(1-\frac{k\lambda}{2}\right)\left(1-\frac{k\lambda}{3}\right)...\left(1-\frac{k\lambda}{k}\right)$.

Числа m_i и значения $q_1=q_1^i$, доставляющие α_i, определяются системой уравнений

$$\begin{cases}\sum m_i(q_1^i)^\pi=0, & \pi=0;1;2;...;\sigma-1;\sigma+1;\\ \sum m_i(q_1^i)^\sigma=M_0, & \\ \sum m_i(q_1^i)^{\sigma+\pi}=M_\pi, & \pi=2;...;\infty,\end{cases}$$

в которой $b_{\sigma+\pi}M_\pi+b_{\sigma+\pi}^2M_{\pi-2}+b_{\sigma+\pi}^3M_{\pi-3}+...+b_{\sigma+\pi}^{\pi-2}M_2+b_{\sigma+\pi}^{\pi}M_0=0$, *и по крайней мере одно из чисел* $M_0, M_\sigma, M_{2\sigma},...$ *отлично от 0”* [26.

С. 354–355]. Приоритетные споры не украшают личности, но в данном случае это не только способствовало появлению новых результатов у авторов, но и привлекло угасшее было, в связи с трудами С. Ли, внимание математиков к проблеме исследования (А.Н. Коркин, В.П. Ермаков, В.А. Анисимов, М.Н. Лагутинский и др.).

Библиографический список

1. *Галченкова Р.И., Лумисте Ю.Г., Ожигова Е.П., Погребысский И.Б.* Фердинанд Миндинг. 1806–1885. Л.: Наука, 1970. 224 с.
2. *Ожигова Е.П.* Александр Николаевич Коркин. Л.: Наука, 1968. 211 с.
3. *Чебышев П.Л.* Sur l'integration des differentielles irrationnelles // Journal de M. Liouville. T. XVIII. 1853.
4. *Демидов С.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения // Математика XIX. Чебышевское направление в теории функций. М.: Наука, 1987. С. 60–183.
5. *Демидов С.С.* Развитие теории обыкновенных дифференциальных уравнений от эпохи Коши до начала XX века: Автореф. дис... д-ра физ.-мат. наук. Киев, 1989.
6. *Налбандян М.Б.* О некоторых проблемах интегрирования иррациональных дифференциалов в работах русских математиков второй половины XIX века // История и методология естественных наук. Вып. 5. Математика. 1966. С. 96–103.
7. *Локоть Н.В.* Вопросы интегрируемости в конечном виде дифференциальных уравнений и Санкт-Петербургское математическое общество // Математический анализ. Вопросы теории, истории и методики преподавания математики. СПб: Образование, 1993. С. 102–111.
8. *Алексеев Н.Н.* Sur la reduction d'une integrale, contenant un radical de second degree d'un polinome de quartieme, a la forme canonique d'une integrale elliptique et sur le calcul du module // Comptes rendus. Paris. 1864. T. 59. P. 244–248.
9. *Алексеев Н.Н.* Свойство интегралов от алгебраических функций // Математический сборник. 1866. Вып. I. С. 173–186.
10. *Алексеев Н.Н.* Интегрирование дифференциалов, содержащих корень квадратный из многочлена 4-ой степени, и дифференциалов, содержащих корень кубичный из многочлена 3-ей степени // Там же. С. 187–212.
11. Труды второго съезда русских естествоиспытателей. СПб, 1868.

12. *Бобынин В.В.* Математико-астрономическая и физическая секция первых девяти съездов русских естествоиспытателей и врачей. Их цели и деятельность. М., 1896. Ч. I.
13. Речи и протоколы VI съезда русских естествоиспытателей и врачей. СПб, 1880.
14. *Локоть Н.В.* Вопросы интегрируемости в конечном виде обыкновенных дифференциальных уравнений в заседаниях Спб. МО // Методология и история математики. СПб: ЛГОУ, 2000. С. 67–78.
15. *Белозеров С.Е.* Математика в российских университетах // ИМИ. 1953. Вып. VI. С. 247–352.
16. *Андреевский М.А.* Условия интегральности однородных дифференцальных выражений второго, третьего и высших порядков и интегралы этих выражений в случае удовлетворения всем условиям // Труды I съезда русских естествоиспытателей. СПб. 1868. С. 9–10.
17. *Андреевский М.А.* Об интегрируемости однородных дифференциальных выражений высших порядков между несколькими переменными независимыми // Математический сборник. 1869. Т. 4. С. 105–138.
18. *Андреевский М.А.* Об интегрирующем множителе дифференциальных уравнений второго порядка // Там же. С. 143–224; (отдельное издание: М., 1869).
19. *Андреевский М.А.* Об интегрировании однородных дифференциальных выражений с некоторыми приложениями. Варшава, 1870. 43 с.
20. Московские университетские известия. 1870. Т. 1. № 3;4.
21. Варшавские университетские известия. 1874; 1877; 1879.
22. *Сонин Н.Я.* Об интегрировании полного уравнения $(A+Cz)dx+(B+Dz)dy+Kdz=0$ // Математический сборник. 1873. Т. VI. С. 278–294.
23. *Сонин Н.Я.* Об интегрировании уравнений с частными производными второго порядка // Математический сборник. 1875. Т. VII. Вып. 3. С. 285–318.
24. *Сонин Н.Я.* Об интегрируемости выражений, содержащих неопределенные функции // Варшавские Университетские Известия. 1875. № 1. С. 1–20.
25. *Сонин Н.Я.* Обобщение принципа последнего множителя // Варшавские Университетские Известия. 1875. № 6. С. 1–28; (отд. изд. Варшава, 1875. 23 с.)
26. *Сонин Н.Я.* О дифференциальном уравнении $\frac{dy}{dx}=1+\frac{R(x)}{y}$ // Известия Императорской Академии наук. 1895. Т. 2. № 2. С. 93–128; № 4. С. 339–370.
27. Протоколы Санкт-Петербургского математического общества. 1890–1899. СПб, 1899. 131 с.

О закономерностях развития математики[1]

Г.А. Зверкина

Говоря о развитии математики, практически всегда мы говорим о том, где и когда, какими учеными были сделаны те или иные открытия в математике. Мы отмечаем направление развития математики в том или ином направлении в ту или иную эпоху, подчеркиваем различие различных математических культур и обращаем внимание на периоды особенно интенсивного развития математики и естественных наук в различных исторических декорациях. Однако крайне редко ставится вопрос о том, почему развитие математики происходило именно так. Были ли какие-то причины, определяющие именно такое течение событий в истории этой науки? Или вся история математики – это лишь нагромождение разнородных событий, таинственным образом давших в результате строгую, красивую и чрезвычайно эффективную научную дисциплину?

Действительно, есть ли какие-нибудь причины того, что, например, в Китае активно развивались арифметико-алгебраические методы, а в Греции, напротив, основой построения математических теорий была геометрия? И почему лишь в Греции сложилась принятая сейчас повсеместно аксиоматико-дедуктивная модель создания научной теории, а в математике других древних цивилизаций вроде бы и не было научной теоретической основы? (Естественно, невозможно объяснять особый путь развития греческой математики таинственными особыми свойствами “греческой нации”, как это делал И. Гейберг в [2], или, более того, преимуществами “арийской расы”, о которых говорил М.Е. Ващенко-Захарченко [1].)

Есть ли какие-либо закономерности в развитии математики, которые позволили бы объяснить ряд явлений в истории этой науки и прогнозировать ее развитие в будущем?

Для того, чтобы установить некие закономерности в развитии определенного процесса, необходимо иметь несколько экземпляров этого процесса, развивающегося в сходных условиях, если в одних и тех же условиях процесс развивается одинаковым образом. К сожалению, начиная с эпохи Возрождения, центр развития математики практически полностью переместился в европейские страны и практически вся математика

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 03-06-80226а) и CNRS (проект “Les instruments du calcul savant”).

развивалась в одном русле (хотя отдельные интересные моменты в истории математики происходили позднее и в странах Азии).

Тем не менее, мы можем провести аналогию в развитии математики в странах Востока в Средние века, в Европе в XV–XVII веках и в СССР в 30-е годы XX века. Математика в указанных регионах в указанное время развивалась чрезвычайно интенсивно, возникали новые математические методы и понятия, прежние достижения математики становились основой новых, более общих теорий. Но было ли что-то общее в тех ситуациях, в которых это происходило? Для ответа на этот вопрос сопоставим сложившиеся тогда условия.

Страны Персидского региона. В IX–X веках ислам распространяется на Восток; поскольку мусульманин не может быть рабом другого мусульманина, начинается массовое освобождение принявших ислам рабов. Начинают бурно развиваться ремесла и торговля; это приводит к необходимости упорядочивания известных фактов, знание которых необходимо в производстве, строительстве, ориентации на местности. Создаются справочные и учебные пособия для широких кругов населения; такими, например, были сочинения уроженца Хорасана Мохаммада Абу-л-Вафы аль-Бузджани (10.06.940–15.07.998) “Книга о том, что необходимо писцам и дельцам из науки арифметики” и “Книга о том, что необходимо ремесленнику из геометрических представлений”. При этом научные исследования поддерживаются правителями и, кроме того, не связаны строгими религиозными ограничениями: в начале своего развития ислам мирно относился к представителям других религий – среди арабоязычных ученых мы видим и христиан, и иудеев, и солнцепоклонников. Основными источниками для развития науки являются переводы текстов (в основном геометрических) античных авторов, а также научные сведения, поступающие из Юго-Восточной Азии: индийская и китайская математика, базировавшиеся на десятичной позиционной нумерации, строили свои конструкции чаще всего исходя из правил арифметических и алгебраических преобразований и высоко развитой техники приближенных вычислений.

Слияние двух методов построения математики – аксиоматико-дедуктивного геометрического греческого и арифметико-алгебраического конструктивного “индийского” – дало мощный импульс к развитию этой науки.

Европа. В XV веке были совершены великие географические открытия Васко да Гамы и Христофора Колумба, начинает бурно развиваться международная и межконтинентальная торговля, происходит ряд технических заимствований из культуры других регионов (в первую очередь, из Китая). Закончились крестовые походы, война Алой и Белой розы, начался процесс укрепления феодальных монархий, уменьшалась феодальная раздробленность, формировалась новая государственность крупнейших государств (Франции, Англии, Германии). Появляются первые ростки буржуазных отношений. Формируются новые сословия, развиваются традиционные ремесла и новые производства. Осваиваются завезенные из колоний технологии (порох, бумага и т.д.). Формируются новые армии, изобретается новое оружие, работают первые европейские университеты. К этому времени католическая церковь перестает играть главную роль в политической и социальной структуре Европы, появляются новые религиозные организации и течения, конфессиональная принадлежность уже не является определяющим фактором. Начинают изучаться ранее запрещенные сочинения "язычников" – греческих ученых. В Европе становятся известными и сочинения арабоязычных ученых. Бурное развитие математики как синтеза геометрии и алгебры привело к созданию основ современной математики.

СССР. После 1917 г. страна претерпела серьезные изменения, социальные и политические. Несмотря на послевоенную разруху, активно развивается система всеобщего образования, развивается система высшего образования и привлечения к учебе широких масс молодежи. В идеологии главенствует атеизм, церковь лишается своего влияния. Находясь во враждебном окружении, СССР наращивает производство оружия, развивает металлургию и тяжелое машиностроение. Государство поддерживает научные исследования в области физико-математических наук. После объединения в 1921 году Физической лаборатории и Математического кабинета Российской академии наук создается Физико-математический институт Российской академии наук, с 1926 носящий имя В.А. Стеклова. 25 апреля 1934 г. Совнарком СССР принимает постановление "О переводе Академии наук СССР в Москву", и к концу 1934 г. туда уже переехало большинство академических учреждений. В том же году, 28 апреля, Общее собрание АН СССР постановляет разделить Физико-математический институт на два учреждения: Институт математики и Институт физики. В состав Института математики входит расформированный Демографический институт АН СССР, который был создан в 1930 г. в Ленинграде. В Институте математики начинают работать переехавшие из Ленинграда ученые, сливаются две долго конкурировавшие между собой математические школы – Московская и Петербургская (Ленинградская).

Взаимодействие традиций Петербургской школы математической физики, чебышевской линии развития теории вероятностей и теории аппроксимации, теории чисел и конструктивной теории функций; алгебраической Киевской школы; Московской школы дифференциальной геометрии и теории функций действительного переменного приводит к бурному развитию математики в СССР – см., например, [3].

Итак, мы видим, что *на фоне серьезных социальных и политических преобразований, изменения идеологии и слияния различных направлений в развитии математики в трех исторических ситуациях происходит бурное развитие науки, т.е. в случае повторения подобных условий можно ожидать новых кардинальных преобразований математики.*

Но приведенный пример может показаться неубедительным: в указанных ситуациях невозможно не учитывать исторические различия и взаимное влияние описанных направлений в развитии математики.

Поэтому обратимся к математике древности, т.е. к тому времени, когда математика развивалась практически изолированно, и обнаруженные в этих условиях аналогии могут говорить о действительно имеющихся закономерностях в развитии этой науки.

Как известно, в древности математика развивалась в двух направлениях – геометрическом (древняя Месопотамия, древний Египет, древняя Греция, древняя Индия) и арифметико-алгебраическом (Китай, средневековая Индия).

Геометрическое направление развития математики характеризуется заменой алгебраических и арифметических вычислений геометрическими построениями, чаще всего с помощью циркуля и линейки или заменяющих их инструментов ("Правила веревки" в древней Индии). Если сравнить ситуации, в которых развивалось геометрическое направление в математике древности, то общим для них будет неудобная для вычислений система нумерации (иероглифическая в Египте и подобная ей нумерация "брахми" в Индии, алфавитная в Греции и подобная ей нумерация в Индии начала нашей эры, шестидесятеричная в Месопотамии – см. [5]). В этой ситуации при решении практических задач было удобнее и быстрее произвести стандартные геометрические процедуры и определить искомые величины измерением. Надо заметить, что развитие метрологии в древности было гораздо богаче, чем принято считать – см. [6].

Арифметико-алгебраическое направление в развитии математики, напротив, для решения геометрических задач ориентировалось на арифметические операции и их свойства, т.е. на то, что мы сейчас называем правилами преобразований алгебраических выражений – см., например, китайское и индийское доказательства теоремы Пифагора, сводящееся к правилу раскрытия квадратного бинома (см. [4]).

И здесь мы подходим к вопросу об обосновании математических фактов в различных математических культурах древности.

Первоначально геометрическое направление в развитии математики опиралось на наглядные геометрические факты, которые можно легко усмотреть из чертежа. Однако попытки решить геометрическими методами ряд важных в практическом отношении задач, таких, как определение кубического корня, площади круга и деление угла на произвольное число равных частей (сформулированных в древности как удвоение куба, квадратура круга и трисекция угла), привели к необходимости рассматривать все более и более сложные геометрические конструкции. Попытки квадрировать луночки привели Гиппократа Хиосского (2-я половина 5 в. до н.э.) к достаточно сложным рассуждениям на геометрическом чертеже. Это потребовало в дальнейшем упорядочивания правил логических выводов, что, в конечном итоге, и привело к созданию аксиоматико-дедуктивной системы в математике, на которой основана и современная математика.

В арифметико-алгебраическом направлении в развитии математики логические рассуждения были заменены правилами алгебраических преобразований, которые были определены, скорее всего, эмпирически, благодаря широкой практике использования арифметических вычислений в практических задачах. Правила алгебраических преобразований в математике Китая и Индии играли ту же роль, что и исчисление предикатов в современной математической логике (в исчислении предикатов новые высказывания можно получать из уже известных с помощью формальных операций по фиксированным правилам над формулами, выражающими высказывания).

Итак, мы видим, что *качество арифметической техники определяет направление развития математики: удобство арифметики приводит к развитию алгебраических методов, а ее неудобство – к развитию геометрических методов.*

Зададимся теперь вопросом: а есть ли фактор, определяющий развитие удобной или неудобной нумерации? Первые нумерации всех древних обществ были подобны египетской иероглифической нумерации: всем употребляемым числам соответствовали специальные знаки, которые объединялись в группы, и для чтения числа надо было сосчитать эти знаки. При этом устная нумерация практически везде в древности была позиционной: в названии числа указывалось число единиц, десяток (или пятерок, двадцаток), сотен (или двадцаток в квадрате) и т.д. Однако только в Китае и в Центральной Америке возникла позиционная письменная нумерация, а в цивилизациях древнего Средиземноморья нумерации, бывшие, по существу, десятичными, в течение длительного времени сохраняли неизменные знаки и не модифицировались в сторону упрощения. Историки математики предполагают, что развитию позиционных нумераций способствовали абаки (счетные доски) – [4]. Однако и в Египте, и в Греции использовались такие счетные доски, но десятичной нумерации не было создано (образец египетской счетной доски хранится в Государственном Эрмитаже). Поэтому причины разных путей в развитии нумераций следует искать в социальном устройстве древнего общества и положении науки и ученых в нем.

Нам практически ничего не известно об этом в отношении культур инков и майя, где имелись позиционные нумерации. А в истории Китая мы можем отметить огромное влияние на развитие общества конфуцианства ("религии ученых") – учения, связанного с именем философа Конфуция (Кун-Цзы, реже Кун Фу-Цзы, латинизировано как Confucius; около 551 до н.э. – 479 до н.э.). Распространение в Китае конфуцианства привело к созданию в III–II веках до н.э. уникальной системы назначения чиновников крайне бюрократизированного государственного аппарата. Каждый претендент на должность чиновника должен быть сдать в чрезвычайно жестких условиях экзамен, в первую очередь на знание китайской классической литературы. В общей сложности чиновник должен был помнить наизусть примерно 20 томов стихов и знать несколько тысяч иероглифов. Позднее в программу экзаменов были включены и другие дисциплины, в т.ч. и математика. Государство за каждым признавало потенциальную возможность стать чиновником. Однако в соответствии с принципом заслуг должность получить могли лишь самые достойные, т.е. наиболее образованные и начитанные, для их подготовки по всей стране была развёрнута сеть школ и училищ. Несмотря на высокую стоимость обучения, образование там получали представители всех слоев населения. Количество чиновников было велико, но еще больше было неудачников, учившихся, но не сдавших экзамены. Таким образом, образованность распространялась в Китае шире, чем в любой другой древней цивилизации. Везде имелись люди, умевшие читать, писать и считать. Искусство счета распространялось и, будучи все более и более востребованным в связи с развитием технологий и ремесел, оно упрощалось. Сначала это было сокращение числа необходимых для записи чисел знаков (иероглифов) до 13 штук (1, 2, 3,..., 10, 100, 1000, 10000); для обозначения чисел высших разрядов употреблялось два иероглифа: разряд и сколько единиц он содержит. Со временем был (возможно, благодаря счетным доскам, сформировавшим более простую "научную" нумерацию) изобретен знак для нуля, и наименования разрядов стали опускаться. Возникла десятичная позиционная нумерация.

В противоположность ситуации в Китае, в Месопотамии и Египте знание было привилегией малой части населения – жрецов или чиновников (писцов). Это позволяло им не только сохранять власть, но и иметь доходы от выполнения действий, требующих знания письма и счета. В древней Греции знание было возведено в ранг искусства, и никакие изменения в традициях такого искусства не приветствовались. И, несмотря на то, что уровень развития технологий и ремесел в Греции и Китае был примерно одинаков, в Греции традиционная алфавитная нумерация была законсервирована на несколько веков. Однако в быту нумерация претерпевала определенные изменения. Ремесленники и коммерсанты, постоянно сталкивающиеся с необходимостью вычислений, упрощали нумерацию, и такое упрощение можно связать не только с развитием ремесел, но и с ослаблением государственных традиций. Так, во времена Нового Царства (XVI–XI вв. до н.э.) и позднего периода существования Египта в демотических (написанных используемым в быту шрифтом) текстах встречается нумерация, сходная с китайской: одним знаком указывается разряд, а другим – число таких разрядов – см. [5]. Если бы Египет продолжал развиваться самостоятельно, то такая нумерация естественным образом превратилась бы в позиционную. Кроме того, в Византии, наследнице Греции, также встречается позиционная запись чисел с использованием первых знаков традиционной алфавитной нумерации. Возможно, здесь сказывается использовавшаяся Клавдием Птолемеем (II век н.э.) шестидесятеричная нумерация, но нельзя не учитывать и распространение математических знаний в Греции в этот период.

Таким образом, во всех рассмотренных случаях *с развитием экономики древней цивилизации и, вследствие этого, с появлением большого количества нуждающихся в использовании счета людей непозиционные нумерации тяготели к позиционности.*

Итак, рассмотрев три примера совпадения характера развития математики в разных исторических декорациях, можно сделать следующие выводы.

1. *Становление десятичной позиционной нумерации происходит в результате распространения знаний среди широких слоев населения. Многочисленные вычисления приводят к унификации обозначений и превращению устной позиционности, свойственной человеку по причине наличия десяти пальцев на руках, в письменную.*

2. *Направление развития математики существенно зависит от эффективности арифметических методов, что, в свою очередь, в древности было связано с типом используемой нумерации.*

3. *Слияние различных направлений в развитии математики приводит к бурному росту математических исследований и созданию новых математических теорий и методов.* (Здесь играют большую роль и социальные изменения в обществе, освобождающие человека от некоторых ограничений в интеллектуальной деятельности, что обычно сопровождается и ускорением экономического и технического прогресса.)

4. *Возникновением аксиоматико-дедуктивной математики мы обязаны стечению обстоятельств, когда отношение к науке как к искусству законсервировало нумерацию на несколько веков и развитие общества в древней Греции не привело к ее упрощению. Поэтому вычислительные задачи сводились к более простым в исполнении геометрическим построениям, а потребности практики приводили к необходимости создавать все более и более изощренные геометрические методы, что и привело в результате к феномену греческой аксиоматико-дедуктивной математики.*

Таким образом, оглядываясь на современное состояние математики и общества, мы видим, что, с одной стороны, в мире быстро меняются социальные и экономические условия, отношение к образованию, необходимость которого все больше и больше ощущают представители всех профессий. А с другой стороны, благодаря развитию вычислительной техники развиваются новые методы вычислительной математики и появляются новые математические теории, которые без наличия мощных компьютеров просто не могли бы существовать. Так, используемые сейчас методы дискретной оптимизации без быстродействующей вычислительной техники просто не выполнимы физически. Многие теоретические проблемы исследуются сейчас на компьютере: зачастую машинный перебор нескольких миллионов или миллиардов ситуаций позволяет подтвердить или опровергнуть теоретическое предположение. Не за горами то время, когда доказательством теоремы будет служить текст программы и распечатка ее результатов.

Итак, с одной стороны, математика поворачивается к тому пути развития, который естественным образом возник в Китае: решение значительной части математических задач сводится к выполнению вычислительных процедур по определенным алгоритмам. С другой стороны, нельзя сбрасывать со счетов и результаты многовекового труда ученых в развитии аксиоматико-дедуктивных методов и их успехи в логическом и философском обосновании математики.

Значит, *математика стоит сейчас на пороге серьезных изменений в направлении и методах своего развития.*

Библиографический список

1. *Ващенко-Захарченко М.Е.* История математики. Исторический очерк развития геометрии. Т. 1. Киев: Императорский университет Св. Владимира, 1883.
2. *Гейберг И.Л.* Естествознание и математика в классической древности. М.-Л., 1936.
3. *Демидов С.С.* Математика в России и создание "советской математической школы" // ИИЕТ РАН. Годичная научная конференция 1998. М.: ИИЕТ РАН, 1999. С. 287–289.
4. История математики с древнейших времен до начала XIX столетия / Под ред. А.П. Юшкевича. М., 1970. Т. 1.
5. *Ifran Georges.* Histoire universelle des chiffres. Robert Lafont Paris, 1994.
6. *Stecchini Livio C.* Historical Metrology: The Forgotten Science (http://www.metrum.org/).

Математиковедение: от дифференциации к интеграции математических исследований

А.А. Артемов, Н.Б. Волотова, С.В. Кольцова, Л.М. Молчанова

Тезис "математика – единая наука" никем никогда не оспаривался, но в то же время современное ее состояние, порожденное бурным расцветом в XX веке, характеризуется сильной дифференциацией различных областей. Один из известных специалистов-математиков Д.П. Желобенко сравнил современную математику с детским рисунком солнышка – кругом, от которого во все стороны идут лучи: каждый луч – область исследований, где активно работают не более 10–20 человек. Большинству математиков с различных "лучей" неизвестны даже крупные достижения друг друга.

Препятствием для взаимопонимания служит то же самое, что послужило развитию математики, а именно, ее символический язык и высокий уровень абстракции.

С этой ситуацией математики мирятся десятки лет. Некоторых это, возможно, даже устраивает. Наши оппоненты скажут: “Что здесь плохого? Друг другу не мешаем, не лезем в чужие огороды, каждый возделывает свой участок”. Почти натуральное хозяйство! А на дворе XXI век, эра компьютеров, Интернета, информационная революция, быстрыми темпами идет глобализация экономики, интеграция науки и образования.

Самое тревожное, что для молодежи математика теряет ту привлекательность, которая была ей присуща раньше, вплоть до XX века включительно.

Поэтому стратегия некоторых математиков работать автономно, независимо друг от друга выглядит, по меньшей мере, архаично, перестает соответствовать объективным требованиям современного образовательного процесса. Мы не побоимся произнести прописные истины: интеграция представителей различных школ необходима для истинного служения науке. Не следует быть рабами своих групповых амбиций, нужно преодолевать клановую ограниченность, а это возможно только на пути конструктивно-критического сотрудничества со всеми коллегами по “цеху”. Такое сотрудничество создает духовное единение творческих потенциалов всех ученых, что, в конечном счете, приводит к новому качеству постижения математических истин, к качественно новой постановке математических проблем.

Заметим, что лучшие из лучших математических умов все это прекрасно осознают, вели и ведут в этом направлении конкретную работу. Вспомним знаменитый семинар Гельфанда на мехмате МГУ, не одно десятилетие плодотворно работавший и объединявший математиков с самыми разнообразными интересами. В настоящее время в Независимом Московском университете работает общематематический семинар “Глобус”, провозгласивший своей целью “по возможности восстановить единство математики” и рассчитанный на математиков всех специальностей, аспирантов и студентов. У математиков имеются крупнейшие форумы: с регулярностью один раз в четыре года собираются Международный конгресс математиков и Европейский математический конгресс.

“Мир сегодняшней математики превосходит самые смелые мечты ученых прошлых эпох, и нам, безусловно, есть чем гордиться. Но . . . проблема человеческой разделенности и утраты единства вызывает все большую тревогу. Всего пару столетий назад жили люди, понимавшие всю существовавшую в то время математику, да пожалуй и физику. Сто лет назад – почти всю. Сейчас, как бы лучшие ученые мира ни стремились уподобиться в этом величайшим из своих предшественников, это стало совершенно невозможно. Более того, даже математики, специализирующиеся в той или иной области, зачастую совсем не отдают себе отчета в том, чем занимаются их коллеги. Как ни печально, разобщение и специализация – одна из тенденций развития всей современной науки . . . ” – пишет М.А. Цфасман в предисловии к первому выпуску трудов семинара “Глобус” [1]. Создатели общематематического семинара “Глобус” предприняли попытку побороться с этой тенденцией, хотя сами же считают ее “безнадежным предприятием”.

В работах [2, 3] мы формулируем и пытаемся осмыслить в качестве значимой научной проблемы поиск путей интеграции различных областей математики. Эти статьи – первый опыт такого рода, поэтому в них наверняка встретятся спорные места, какие-то положения окажутся не до конца раскрытыми, возможно, нас обвинят в изобретении велосипеда.

Свое направление исследований по аналогии с науковедением, искусствоведением, литературоведением, музыковедением и т.д. мы назвали математиковедением. Возможно, более удачным было бы название “математикознание” или какое-то другое.

Мы формулируем объект, цели и методы исследования новой научной дисциплины – математиковедения.

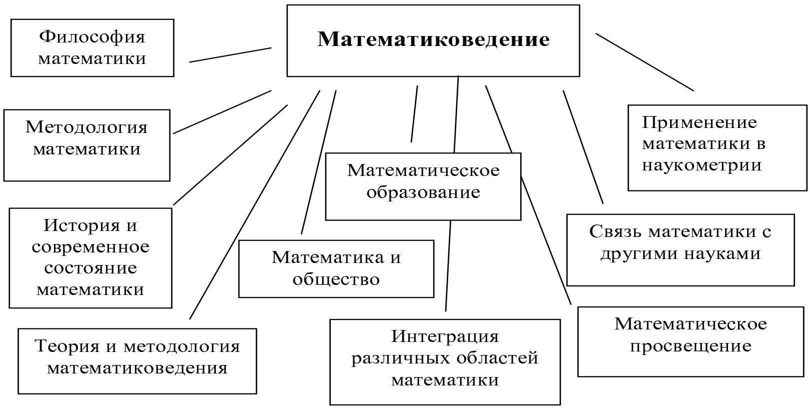
Объектом исследования является математика как особая наука и специфическая, целостная социальная система, играющая фундаментальную роль во всей совокупности научного знания.

Целями исследования являются установление закономерностей и обоснование оценок опыта функционирования математики для получения конкретных данных, новых знаний, построения новых теорий и моделей, необходимых для эффективного управления научно-технической деятельностью и подготовки решений в политике государств в отношении науки в целом, и математики в частности, а также необходимых для выявления перспектив и тенденций развития самой математики.

Методами исследования математиковедения должны служить комплексный, качественно и количественно определенный анализ, системные и междисциплинарные исследования, изучение и анализ литературы, архивных документов и других материальных носителей, научное наблюдение, беседы с учеными-исследователями и их оппонентами.

Нами предложена структура математиковедения как научного направления (см. схему)

Схема 1



Таким образом, мы определяем математиковедение как науку о специфической научной деятельности, о взаимодействии всех ее элементов, в своей совокупности определяющих развитие математики как особой сложной системы и самостоятельной отрасли науки, вскрывающей "роль и влияние этих элементов на поведение всей системы как определенной целостности" [4. С. 19].

Оформление математиковедения в самостоятельную дисциплину, рассматривающую с единых позиций вопросы, ранее относившиеся к истории математики, философии математики, методологии математики и т.д., позволит, на наш взгляд, систематизировать богатейший и ценнейший пласт человеческого знания, которым является математика, сформировать концепции ее дальнейшего развития, совершенствовать систему передачи математических знаний и процесс внедрения их в другие науки, образование, социально-экономическую жизнь общества.

Вдохновителями формирования математиковедения для нас являются такие выдающиеся ученые, как

– академик А.Н. Колмогоров, внесший огромный вклад в развитие функционального анализа, теорию вероятностей и ряд других областей математики, создатель мощной научной школы и, в то же время, проявивший себя в области дидактики школьной математики и как автор известных вузовских и школьных учебников;

– профессор Н.Я. Виленкин, известный ученый-математик, работавший в области функционального анализа, теории специальных функций, теории представлений групп и других, одновременно уделял много внимания вопросам математического просвещения и образования на разных уровнях, являлся автором вузовских и школьных учебников и других научно-популярных изданий;

– профессор К.А. Рыбников, известный историк математики, в зрелом возрасте проявивший себя популяризатором современных разделов математики, написав книгу "Введение в комбинаторный анализ", выдержавшую не менее двух изданий;

– и многие другие известные ученые.

По нашему мнению, математиковедом может считать себя любой профессор-математик, простым и понятным языком излагающий сложные математические теории, каждый математик-исследователь, делающий доступными и ясными широкому кругу последователей и коллег результаты своих научных изысканий.

Математика играет особую роль в системе наук. Процесс математизации научного знания происходит практически во всех науках, в том числе в общественных и гуманитарных. В связи с этим математики не должны замыкаться в своем кругу, разрабатывая только им понятные и необходимые теории (хотя и это очень полезно), а готовить широкую базу для дальнейшего развития всей системы научного знания.

Целесообразно не только активизировать математические исследования в фундаментальных областях, но и планомерно повышать качество общего и высшего математического образования путем инноваций в учебные курсы и программы новейших математических теорий. Формирование нового научного направления – математиковедения и должно послужить фактором активизации математических и науковедческих исследований и повышения качества математического образования.

Главным в математиковедении мы считаем работу по отысканию путей интеграции современных математических исследований. Добавлением этого раздела приведенная здесь схема отличается от нашего видения в [2, 3].

Если попытаться рассмотреть проблему в свете разработанной лауреатом Нобелевской премии Г. Биннингом "фрактально-дарвинистической" теории системного видения мира [5], согласно которой полярные феномены (например, рождение-умирание, обособление-объединение и т.д.) находятся в отношении взаимосвязи и взаимодополнения, то дифференциация и интеграция в области математических исследований осмысливается как необходимый фактор эволюции. Описанные Биннингом универсальные механизмы функционирования живых систем можно найти в исследовательской работе математиков. При развитии математики:

а) сохраняются оправдавшие себя, проверенные временем научные теории и методы, они обогащаются новым содержанием, а все устаревшее вытесняется;

б) возможны изменения, инновации в сфере теорий и методов, истинность которых должна быть подтверждена или опровергнута;

в) ученые, с одной стороны, вступают в контакт друг с другом, обогащаясь своеобразием каждого, а с другой стороны, дистанцируются друг от друга, чтобы не утратить своей специфики, качественной определенности.

Размышляя над проблемой интеграции, мы сделали следующее. Разработали стратегию работы:

1) ознакомление с ситуацией, отслеживание происходящих изменений, постановка проблемы;

2) изучение существующих подходов к решению рассматриваемой проблемы;

3) формирование банка новых идей (синергетический подход, гуманизация математики, концептуализация, коллективная деятельность,. . .);

4) всесторонний анализ имеющегося материала;

5) конкретизация структуры практических действий.

В связи с этим нами организованы:

– научно-исследовательская лаборатория историко-методологических проблем математики при кафедре математического анализа Тамбовского госуниверситета им. Г.Р. Державина;

– постоянно действующий городской общематематический межвузовский семинар, имеющий целью сближение различных математических направлений исследований;

– “круглый стол” “Математика и математическое образование в XXI веке” в рамках Международной научной конференции “Гармонический анализ на однородных пространствах, представления групп Ли и квантование” (Тамбов, апрель 2005);

– Международная научная конференции “Современное математическое образование и проблемы истории и методологии математики” (Тамбов, сентябрь 2006);

– контакты с коллегами-единомышленниками в России и за рубежом.

Проблема интеграции различных математических разделов и придание на этой основе нового импульса развитию всей математики находится в стадии постановки и ждет своего решения. Для реализации наших идей нужна команда энтузиастов, разделяющих нашу озабоченность современным состоянием математики, математического образования, ее влияния на другие науки и социально-экономическую ситуацию в обществе и работающих в различных областях математики. Исследователям требуются системное мышление, широкая компетенция, позволяющие быстро ориентироваться и эффективно работать в различных математических областях. Цель – формирование, развитие и повышение уровня компетентности каждого участника совместной работы, активизация собственных математических исследований внутри коллектива. Роль совместного творчества в процессе развития профессионального мировоззрения трудно переоценить. Непрерывное творческое взаимодействие личностей приводит к формированию новых проблем, рождению продуктивных идей.

Объединение отдельных наук, представленных на схеме, в одну единую науку – математиковедение – отвечает системному подходу к проблеме исследования состояния и тенденций развития математики и выявления взаимосвязей между отдельными ее разделами, а также дает возможность для всестороннего анализа. Каждая из этих отдельных областей вносит свой вклад в создание общей математиковедческой идеологии.

Г.Г. Харди в 40-х годах прошлого века писал: “Математику в настоящее время нет необходимости защищать свою профессию” [6. С. 53]. В наше время есть необходимость вновь сделать математику привлекательной для молодых ученых, понятной для большинства ее изучающих, доступной для пытливого ума исследователей. Возвращаясь к представлению математики в виде солнышка, следует наполнить рисунок взаимопроникающим светом от различных лучей. И эту благородную цель мы ставим, формируя математиковедение как новое научное направление.

Библиографический список

1. Глобус. Общематематический семинар / Под ред. М.А. Цфасмана и В.В. Прасолова. М.: МЦНМО. Вып. 1. 2004. 264 с.
2. *Артемов А.А., Волотова Н.Б., Кольцова С.В.* Математиковедение как новое научное направление // Проблемы теории и методики

обучения. Научно-теоретический и методический журнал. № 9. М.: РУДН, 2005. С. 190–195.

3. *Артемов А.А., Волотова Н.Б., Кольцова С.В.* Математиковедение как область науковедения // Проблемы истории физико-математических наук: Материалы IV-й Международн. конфер.Тамбов: Изд-во Тамб. гос.ун-та, 2004. С. 184–190.
4. Основы науковедения. М.: Наука, 1985. 431 с.
5. *Сэрвэ Г.Й.* Многообразие и разнообразие теории и методов – показатель слабости педагогической науки или мощный катализатор ее развития? // Проблемы теории и методики обучения. Научно-теоретический и методический журнал. № 9. М.: РУДН, 2005. С. 163–165.
6. *Харди Г.Г.* Апология математика. М.: Едиториал УРСС, 2005. 128 с.

О комплексе историко-математических и историко-методических материалов

Ю.А. Дробышев

В настоящее время, когда школа идет по пути инноваций, особое значение приобретают знания, связанные с историей развития отечественной школы методики преподавания математики. Это обусловлено тем, что такие знания помогут избежать повторов и ошибок и, самое главное, дадут возможность найти новые пути в методике преподавания математики. Но где и как учитель может получить такие знания? Система переподготовки кадров, как правило, этот аспект оставляет без внимания, следовательно, у учителя остается один путь – работа с огромным количеством источников и поиск необходимых материалов. У преподавателя, как правило, нет времени на такую работу. Кроме того, чтобы понять, в каких направлениях могут происходить инновации в области математического образования, необходимо хорошо знать историю математики. С ее помощью можно:

а) увидеть трудности, с которыми придется столкнуться в процессе изучения того или иного материала,

б) определить пути решения этих проблем,

в) смоделировать различные варианты изложения того или иного вопроса, г) установить пути реализации основных направлений воспитания учеников: формирования научного мировоззрения, нравственного, эстетического и патриотического воспитания.

Поэтому для того, чтобы лучше вести процесс подготовки будущих учителей и облегчить работу творчески работающих учителей, необходимо создание серии книг по истории математики и методике ее преподавания, раскрывающих методическое наследие русской математической школы. По нашему мнению, эта серия должна содержать:

1. Монографии по истории развития математики и математического образования в России.

2. Библиографические указатели по истории русских учебников математики (алгебры, геометрии, математического анализа, теории вероятностей и математической статистики).

3. Хрестоматии трудов знаменитых русских методистов по наиболее актуальным вопросам методики преподавания математики.

4. Аналитические обзоры реформ математического образования в России, содержащие детальные выводы о положительных и отрицательных результатах их проведения.

5. Хрестоматии материалов школьных учебников, освещающих различные методические подходы к изложению основных содержательных линий курса математики.

6. Хрестоматии по истории математики. Терминологический словарь-справочник, показывающий становление и развитие математической терминологии и символики.

7. Биографические материалы, раскрывающие жизнь и творчество наиболее выдающихся представителей российской школы математики и методики обучения математике (Д.С. Аничков, В.В. Бобынин, В.М. Брадис, Н.Я. Виленкин, Б.В. Гнеденко, П.С. Гурьев, А.Ю. Давидов, А.Н. Колмогоров, А.П. Киселев и многие другие).

8. Сборники старинных, исторических, именных задач.

9. Пособия, раскрывающие различные формы использования историко-математического материала на уроках и во внеклассной работе.

10. Книги по этноматематике.

11. Справочные пособия по сети Internet и CD-диски, носящие историко-математическую и историко-методическую направленность, создание серверов, посвященных наиболее знаменитым русским математикам и методистам.

Анализ имеющейся историко-математической и историко-методической литературы позволяет сделать вывод о перспективах реализации каждого из направлений.

В настоящее время первое направление представлено работами Ю.М. Колягина, Т.С. Поляковой и О.А. Саввиной. Работа Ю.М. Колягина посвященна математическому образованию в русской школе. В книгах Т.С. Поляковой раскрыта история отечественного школьного математического образования в XVIII–XIX веках, в монографии О.А. Саввиной – история преподавания высшей математики в средних учебных заведениях России.

Однако в настоящее время есть потребность в написании книг, посвященных истории преподавания геометрии, алгебры, теории вероятностей и математической статистики в русской школе и раскрывающих историю развития математического образования в советский период. Первая работа в этом направлении сделана в Орловском университете О.В. Тарасовой, проанализировавшей основные этапы развития элементарного курса геометрии. Кроме этого, следует выделить словарь-справочник по истории математического образования в России, составленный О.Н. Куприковой и Р.З. Гушель.

Второе направление в настоящее время представлено работами Р.З. Гушель "Из истории математики и математического образования" и Ю.А. Дробышева "Из истории русского учебника геометрии" и "Школьное геометрическое образование". К сожалению, подробных библиографических указателей, посвященных другим школьным учебникам, статьям из журналов "Математика в школе", "Квант", "Математика", а также диссертациям по теории и методике обучения математике, в последнее время не выходило, за исключением тематического указателя статей журнала "Математика в школе" за 15 лет (1990–2004 гг.), подготовленного В.М. Бусевым.

Третье направление в современной литературе представлено работой Г.Д. Глейзера "Математика: Хрестоматия по истории, методологии, дидактике". В этой книге приведены фрагменты статей выдающихся ученых-математиков, раскрывающих роль математики в современном мире, показывающих пути воспитания математической культуры и стиля мышления, формирования интереса к изучению математики. Это пособие открывает возможность знакомства студентов и учителей с классическими произведениями в области математики и математического образования. Читателям книги кроме текстов статей предлагаются вопросы и упражнения для индивидуального осмысления и коллективного обсуждения.

Создание пособий такого типа, без сомнения, будет полезно как студентам, учителям, так и научным работникам, потому что благодаря хрестоматиям появляется возможность более подробно познакомиться с идеями, высказанными дореволюционными педагогами-математиками. На наш взгляд, необходимо создание серии хрестоматий по таким вопросам преподавания математики, как использование исторических элементов в обучении математике, формирование мировоззрения учащихся, психологические основы обучения математике и т.д.

Четвертое направление представлено только в отдельных научных статьях, которые недоступны большинству студентов и учителей. Поэтому необходимо выпустить серию брошюр, посвященных тем или иным реформам математического образования, в которых был бы представлен критический анализ мероприятий, проводимых в это время в области образования. Кроме того, полезным было бы включение в эти обзоры материала, раскрывающего наиболее ценные и значимые идеи реформ.

Пятое направление в настоящее время практически не реализуется. В связи с этим следует приветствовать начинание Орловского университета по выпуску "Систематического курса арифметики" А.П. Киселева, издание учебника С.А. Рачинского. На наш взгляд, следует принять государственную программу по выпуску учебников, наиболее обогативших российское математическое образование. Знакомство с ними студентов и учителей даст возможность проводить более целенаправленную работу по дальнейшему совершенствованию математического образования в нашей стране. Кроме выпуска таких учебников следует создать хрестоматии, посвященные отдельным вопросам изучения математики в школе и вузе. В них должны найти отражение статьи наиболее видных ученых, внесших значительный вклад в развитие тех или иных вопросов методики обучения математике.

Первую попытку работы в этом направлении предприняли Р.З. Гушель, В.П. Кузовлев и О.А. Савина, которые впервые составили хрестоматию "Методика обучения высшей математике в средней школе России: история становления". Статьи видных отечественных математиков и методистов А.Н. Острогорского, М.Г. Попруженко, Ф.В. Филипповича, Д.М. Синцова и других дают возможность познакомиться с весьма значительными результатами в области методики обучения математическому анализу и аналитической геометрии в начале XX века. Составители предпослали каждому отрывку первоисточника биографическую справку об авторах.

При проведении уроков математики учитель постоянно сталкивается с тем, что у него нет под рукой материалов, позволяющих раскрыть историю происхождения основных математических терминов и знаков.

Такой материал очень скупо представлен в учебниках, и учителю приходится тратить массу времени, чтобы перечитать книги по истории математики и найти ту или иную справку. Замечательная книга Н.В. Александровой "Математические термины" и "Хрестоматия по истории математики" под редакцией А.П. Юшкевича практически недоступны для учителей нового поколения. Поэтому необходимо создание хрестоматии, терминологического словаря или хронологии по истории происхождения основных математических терминов и знаков. В ней необходимо отразить сведения о времени возникновения тех или иных математических символов, употребляемых в школе, авторах, которые их создали, и привести этимологию того или иного термина.

В содержание процесса обучения исторические сведения о знаменитых математиках можно включать с различной степенью полноты, в зависимости от наличия времени. Как правило, приходится ограничиваться наиболее яркими и значительными деталями из жизни великих математиков. Однако школьному и вузовскому преподавателю это сделать нелегко в силу того, что материал о жизни ученых разбросан по различным источникам, многие из которых для школьных учителей просто недоступны. Поэтому необходимо создать пособия, в которых были бы представлены наиболее яркие эпизоды из жизни математиков, позволяющие реализовать различные аспекты воспитания. Работа в этом направлении в настоящее время активно ведется в Калужском педуниверситете.

Кроме этого, необходимо активизировать работу по выпуску книг, посвященных наиболее знаменитым российским методистам. Первый шаг в этом направлении сделан в 2002 году в Орловском университете Ф.С. Авдеевым и Т.Е. Авдеевой, создавшими книгу о научной и педагогической деятельности А.П. Киселева. Кроме этого, Т.Е. Авдеевой написана монография "Классики педагогического образования в системе профессиональной подготовки учителя математики". Эта инициатива была поддержана Елецким, Орловским и Калужским университетами, которые объединились для выпуска серии книг под названием "Забытые имена". Ю.М. Колягин и О.А. Саввина написали в этом году первую книгу этой серии, посвященную Ф.В. Филипповичу.

Девятое направление представлено в настоящее время книгами В.Д. Чистякова, И.И. Баврина и Е.А. Фрибуса, в которых приведена богатая коллекция старинных задач, позволяющая проследить развитие математической мысли с древнейших времен. Для учителя, на наш взгляд, были бы полезны пособия, в которых раскрывалась бы история развития того или понятия, изучаемого в школьном курсе математики. Этот процесс полезно иллюстрировать задачами, решаемыми в различные исторические эпохи. Нами предпринята попытка создания учебного пособия “История математики: пути формирования историко-математических знаний о методах решения алгебраических уравнений” нового поколения для студентов физико-математических факультетов и учителей математики по истории квадратных уравнений. Так как понятие уравнения является одним из наиболее важных понятий школьного курса математики, то нами рассмотрены наиболее значимые вехи истории его развития. На примере этого процесса мы стремились показать, как осуществлялось становление основных методов решения алгебраических уравнений, и сформировать у будущих учителей умения, связанные с поиском, изучением, отбором, адаптацией историко-математического материала, моделированием на этой основе учебного процесса. При этом мы стремились к тому, чтобы раскрыть взаимосвязь истории математики и истории культуры, тем самым предоставляя возможность будущим учителям взглянуть на математику как на феномен культуры.

В плане оказания помощи учителям по работе с историко-математическим материалом полезно создание пособий, раскрывающих различные формы работы с ним. Кроме того, формы работы с историческим материалом периодически освещаются на страницах журнала “Математика в школе” и газеты “Математика”, поэтому необходимо систематизировать имеющийся опыт и представить его в виде методических рекомендаций для учителей.

Многие школьные реформы, по мнению Чошанова, в области математики часто не достигают поставленных целей в силу двух причин. Во-первых, в силу того, что в них мало внимания уделяется ученикам и преподавателям как отдельным личностям. Во-вторых, в связи с отсутствием понимания того, что математика является гносеологической системой с социально-культурной и исторической перспективой. Многочисленные зарубежные педагоги предлагают с помощью этноматематики ликвидировать низкую уверенность в себе учеников, принадлежащих к национальным меньшинствам, на уроках математики. Для этого необходимо сводить к минимуму социальный аспект и находить такие знания из истории математики, которые показывают достижения той или иной культуры.

Включение в содержание обучения математике элементов историзма, с точки зрения феномена множественности культур, в такой много-национальной стране, как Россия, способствует пониманию учащимися того факта, что математика – наука, в развитие которой внесли свой вклад представители разных культур и народов и, кроме того, позволяет повысить их мотивацию и интерес к изучению математики, устранить неуверенность в себе у учеников, принадлежащих к национальным меньшинствам.

Первая книга, связанная с развитием этого направления в методике обучения математике, написана Н.И. Мерлиной и М.В. Яковлевой и посвящена истории чувашской нумерации, чувашских математических терминов, чувашских "крестьянских задач". Очевидно, что эта работа должна иметь место и в других регионах России.

В связи с появлением новых информационных технологий следует дать возможность учителям получать информацию из сети Internet. Для этого необходимо составить списки электронных адресов ведущих научных музеев и библиотек, а также сайтов, носящих историко-математическую или историко-методическую направленность.

К этой работе, на наш взгляд, могут быть привлечены как студенты, так и школьники. В ходе изучения поисковых систем они могут решать задачи поиска необходимых адресов. Новые информационные технологии дают возможность организовать изучение истории науки, сделав упор на самостоятельную работу студентов, связанную с поиском, отбором информации из Internet и ее переработкой. Это способствует их интеллектуальному росту, самоутверждению и профессиональному становлению.

Виртуальные путешествия по научным музеям позволяют увидеть различные стороны истории математики. Это и возможность рассказа о математике как части культуры, и о наиболее ярких ее представителях, а также обращение к математике как прикладной дисциплине. Знакомство с этими сторонами математики позволит сформировать должный имидж математики.

Internet-ресурсы музеев истории могут помочь в определении тем научно-исследовательской работы школьников и студентов, проявляющих повышенный интерес к истории науки. Ресурсы научных музеев открывают возможность ознакомиться с трудами наиболее знаменитых математиков, с различными математическими инструментами и историей их происхождения. Такой подход дает возможность показать историю науки не как вереницу формул, определений и теорем, а как увлекательное путешествие по великим книгам вместе со знаменитыми математиками и их идеями в контексте социальной истории человечества.

Новые информационные технологии применяются в настоящее время для создания серверов, посвященных наиболее знаменитым российским математикам и методистам. В этом плане следует признать удачным сайт В.Е. Пыркова, посвященный замечательному русскому математику Д.Д. Мордухай-Болтовскому, на котором представлены наиболее значимые работы ученого, материалы о его жизнедеятельности. Необходимо продолжить работу в этом направлении, создать сайты о других знаменитых отечественных математиках.

Кроме получения информации из сети Internet следует предусмотреть создание мультимедийных энциклопедий, имеющих различную историко-математическую и историко-методическую направленность (биографии наиболее знаменитых математиков, тексты трудов математиков различных эпох, подборки статей по определенной тематике и т.д.). В Калужском педуниверситете такая работа уже активно ведется. Подготовлен к тиражированию CD-диск, посвященный знаменитому русскому математику П.Л. Чебышеву, в котором раскрыты различные стороны его научной деятельности, собрана обширная библиография, представлены наиболее значительные его труды. В настоящее время ведется работа по созданию CD-дисков, посвященных А.Я. Хинчину, П.П. Коровкину.

О принципах построения учебного курса “История математики в контексте истории культуры”

А.С. Штерн

На протяжении нескольких последних лет автор занимается разработкой специального курса “История математики в контексте истории культуры”. Его внедрение в учебный процесс происходило как в рамках предусмотренных учебным планом лекций по истории и методологии математики для студентов математического факультета, так и в качестве отдельного курса, предназначенного для студентов различных специальностей. Такие циклы лекций, традиционно именуемые “общеуниверситетские курсы по выбору”, много лет читаются в Омском государственном университете им. Ф.М. Достоевского.

Содержанием всего цикла лекций является демонстрация основных тенденций в историческом развитии математической науки и математического образования во взаимосвязи с общими тенденциями истории культуры. Курс делится на две части. Первая посвящена изучению древнегреческой математики на фоне античной культуры, во второй рассматривается более чем тысячелетний период становления и развития европейской математики от перевода “Начал” Евклида Боэцием и математических сюжетов в трудах Беды Достопочтенного до формирования идей классического анализа в работах Лейбница и Ньютона. В качестве основных целей курса можно указать следующие.

1. Формирование у студентов взгляда на историю математики как на неотъемлемую часть истории мировой культуры.

Это означает, в первую очередь, рассмотрение и анализ культурно-исторических ситуаций, в которых новые математические концепции и понятия возникали в значительной степени под воздействием идей, идущих извне (в том числе из религиозно-философской сферы). Не менее интересны с рассматриваемой точки зрения и противоположные ситуации, когда математика влияла на развитие других областей культуры, тем более что выяснить, какое именно влияние преобладало, бывает очень сложно. В качестве примера можно указать неоднократно обсуждавшееся в литературе влияние появления дедуктивной математики на формирование теории идей Платона или же воздействие декартовского принципа интеллектуальной ясности как критерия истины на становление аналитической геометрии.

2. Приобщение студентов-математиков к размышлению о некоторых актуальных проблемах культурно-философского характера через осмысление историко-математических ситуаций.

Так, например, разговор о преемственности и в то же время противоположности между аристотелизмом и платонической традиций вполне естественно возникает на фоне обсуждения “метода исчерпания”, выдвинутого Евдоксом Книдским. При этом, не являясь специалистом-философом, автор не претендует на решение рассматриваемой проблемы, хотя какой-то точки зрения автор курса с некоторой степенью убежденности придерживаться может и даже обязан. Нам близка точка зрения известного специалиста по истории культуры Г.С. Кнабе, который пишет: “Во-первых, спецкурс по своей теме и содержанию располагается в проблемном поле культуры. В этом состоит некоторое его отличие от курсов нормативных, от общих курсов... Соответственно второе требование состоит в том, чтобы положения спецкурсов излагались лектором как не до конца решенные”.

3. Сохранение и активизация математических знаний и навыков, полученных студентами-гуманитариями на предыдущих (в основном, довузовских) стадиях обучения. Демонстрация гуманитариям специфики творческого мышления в области математики.

Как уже говорилось, одна из версий курса рассчитана, в том числе, и на студентов гуманитарных специальностей. Сейчас очень много сил научно-педагогической общественности уходит на разработку математических курсов для гуманитариев. При этом движение происходит, в основном, в двух направлениях. Во-первых, активно разрабатываются математические курсы прикладного характера, направленные на обучение конкретным алгоритмам и методикам, без которых невозможна успешная профессиональная деятельность в будущем. Во-вторых, делаются попытки говорить о математике "на гуманитарном языке", в которых решение задач (а не просто стандартных упражнений) как основной элемент обучения математике исчезает. Учат, таким образом, не "математике для гуманитариев", а "гуманитарной математике", что не одно и то же. Не отрицая правомерность, а в первом случае и явную необходимость таких подходов, автор полагает, что ни один из них не демонстрирует гуманитарию специфику творческого процесса в сфере математики и, тем более, не делает его субъектом такого процесса. А между тем, для этого совершенно не обязательно выводить слушателя на передний курс современной математической науки. В России существует давняя и весьма эффективная традиция дополнительного математического образования, построенная на выработке у школьников серьезной математической культуры в рамках того материала, до понимания которого удается довести школьника со способностями, несколько превышающими средние. У нас в стране такая работа тесно связано с функционированием системы математических олимпиад, хотя это, возможно, является исторической случайностью. Существенную часть многих лекций составляет обсуждение задач арифметического или комбинаторно-геометрического характера, сформулированных еще пифагорейцами или, к примеру, Леонардо Пизанским. Творческий характер такой работы и является причиной ее популярности среди студентов различных специальностей. Между тем, по мнению автора, решение таких задач в гораздо большей степени демонстрирует специфику математического мышления, чем, к примеру, механическое применение каких-либо алгоритмов обработки данных в статистике.

4. Стимулирование интереса к проблемам творческого обучения.

У курса "История математики в контексте истории культуры" есть аспекты, существенно выходящие за рамки математики и математического образования. Внимание слушателей обращается на специфику творческого обучения, сочетающего обучающий и развивающий подход. Параллель здесь очевидна. Процесс возникновения и развития математических идей по своей природе органичен, и приобщение слушателей к активному пониманию этого процесса неизбежно наводит на мысль, что и процесс обучения должен строиться органично. Не нужно и говорить, насколько это актуально в ситуации массового и часто бездумного внедрения в отечественное образование тестовых методов контроля знаний. На наш взгляд, основную опасность представляют не сами эти методы, а связанная с ними иллюзия эффективности "натаскивающего" обучения, в рамках которого учатся не понимать что-либо, а как раз выполнять правильно задания при отсутствии всякого понимания. Здесь уместно вспомнить выдвинутую еще в 20-е годы Л.С. Выготским классическую концепцию "зон ближнего развития", казалось бы, раз и навсегда аргументировавшую необходимость значительного развивающего элемента во всяком учебном процессе, претендующем на эффективность.

Таким образом, изложенный курс непосредственно соприкасается с целым рядом современных гуманитарных дисциплин: историей философии, культурологией, философией образования и т.д. Студент-математик приобщается к ним, отталкиваясь от своего образовательного опыта. Гуманитарий, используя их как опорные пункты, органично приходит к пониманию некоторых элементов математического мышления. В целом же такой курс оказывается в некотором смысле одной из тех самых точек "диалога культур", необходимость которых осознается сейчас как условие сохранения культуры как таковой.

Приложение

Мы приводим подробную программу двух первых разделов курса, посвященных, соответственно, античной математике и математике средних веков и эпохи Возрождения. Семнадцатый век, являясь едва ли не самой "математикоцентричной" эпохой европейской истории, может и должен стать темой отдельного курса, сопоставимого по объему с курсом, предлагаемым к рассмотрению. Разработка этого курса завершается автором в настоящий момент.

Темы и содержание лекций

Вводная часть

1. Задачи курса. Постановка вопроса о месте математики в культуре: "что произойдет, если математика перестанет развиваться?" Математика и специальности "массового спроса". Споры о месте математики в

классическом образовании. Несводимость математики к прикладной математике. Роль математики в культуре 20-го века: взгляд гуманитария и математика. Работа А. Уайтхеда "Математика и добро" и эссе Р. Музиля "Математический человек" (2 часа).

2. Методология математического образования. Решение задач как формообразующий элемент математического образования. Дискуссия об обучающем и развивающем элементах учебного процесса. Теория зон ближайшего развития Л.С. Выготского. Отечественные традиции развивающего обучения в математическом образовании. Традиции математического образования в России и на Западе (2 часа).

Античная математика в античной и мировой культуре (18 часов).

3. Пифагор и пифагорейцы. Формирование математического мышления в пифагорейской школе. Становление математического метода как становление научного мышления (по Б. Расселу) (2 часа).

4. Геометрическая алгебра и ее методическое значение для современных математических программ развивающего обучения (2 часа).

5. Платон: биография и творчество. Взаимосвязь между теорией идей и становлением системы геометрических понятий. Уровень осмысления современной математики у Платона. Постановка проблемы "математика и добро". Теория припоминания и математические знания (диалог "Менон") (2 часа).

6. Место математических понятий в платоновской иерархии идей. Евдокс Книдский. Метод исчерпания как преодоление платонизма (2 часа).

7. Личность и биография Аристотеля. Противопоставление "Аристотель – Платон" в контексте истории культуры. Сравнительный анализ структуры и педагогических принципов Академии и Ликея. Либеральное мировоззрение и математическое мышление. Математика и власть (2 часа).

8. Роль аристотелевской силлогистики в развитии античной и мировой математики (2 часа).

9. Александрия и александрийская культура. Подход к традиции: "благоговейная игра". Парадигма мудрости у александрийцев. "Начала" Евклида как кульминация александрийской культуры. Структура и содержание "Начал". Математическое творчество и написание учебников. Аксиоматический метод (2 часа).

10. Архимед – величайший математик античности. Появление первых идей математического анализа в прикладных задачах. Архимед и

становление прикладной математики как раздела математической науки. Преданность науке как культурная ценность. Архимед и образ ученого чудака. Способность к погруженности как основа математического успеха. Образ Архимеда в “Жизнеописании Марцелла” Плутарха (2 часа).

11. Сравнительный анализ античной и новоевропейской математики в работе О. Шпенглера “Закат Европы”. “Арифметика” Диофанта и ее место в истории античной математики. Решение уравнений у Диофанта. Формулировка Шпенглера “Диофант – великий арабский математик” (2 часа).

Средние века: монастырская, университетская и торговая математика (12 часов).

12. Итоги античного периода. Геометричность античного математического мышления. Логическая культура античных математиков и современные представления о математической строгости. Боэций. Биография и творчество. Античность и варварство: отношение Теодориха к античной культуре; кодекс Юстиниана о математиках. Перевод Боэцием “Начал” Евклида. Оценка перевода специалистами по истории математики (2 часа).

13. Беда Достопочтенный. Биография и литературное творчество. Ирландские монастыри – цитадели античной культуры. “Хронологический трактат” Беды. Концепция пальца как счетного инструмента. Пасхалия и смежные математические проблемы (решение линейных диофантовых уравнений, периодичность). Герберт Аврилакский и трактат “Правила счета на абаке”. Проблема быстрого счета как центральная математическая проблема раннего средневековья (2 часа).

14. Античные и монастырские средневековые школы. Свободный выбор профиля обучения с учетом жизненных перспектив как основополагающая черта высшего образования. Происхождение средневековых университетов из юридических и медицинских школ. Корпоративная структура средневекового общества и университетские вольности. Указ Фридриха Барбароссы (2 часа).

15. Структура средневекового университета. Роль и место факультета искусств. Trivium и quadrivium. Лекции и диспуты. П. Щедровицкий о схоластической педагогике. Образ жизни средневекового студента. Обучение математике на факультете искусств. Изучение античных и раннесредневековых образцов как содержание учебного процесса (2 часа).

16. Достижения индийских математиков в арифметике и алгебре. Противоположность греческой и индийской математики. Арабы как посредники между Европой и Индией. Трактаты аль Хорезми и Омара Хайяма. Роль европейского купечества в развитии математики. Математика при дворе императора Фридриха II. Жизнь Леонардо Фибоначчи (2 часа).

17. "Книга абака" – энциклопедия арифметических и алгебраических знаний. Подтверждение использования арабских (индийских) цифр. Теория делимости. Торговые задачи (задачи о справедливом дележе, суммирование прогрессий, задачи о сплавах, задачи об оптимальном взвешивании и т.д.). Абстрагирование и математическая идеализация в постановке задач Леонардо Пизанским. Трактат Николаса Орема "О конфигурации качеств". Развитие математической теории движения и формулировка простейших идей математического анализа. Доказательство расходимости гармонического ряда (2 часа).

Математика эпохи Возрождения (16 часов).

18. Различие в образе жизни и личности ученого в средние века и эпоху возрождения. Свобода от корпоративных обязательств и нравственная свобода. Жизнь и научное творчество Д. Кардано. Кардано как "титан Возрождения". Проблема "обратной стороны титанизма" по А.Ф. Лосеву. Книга "О моей жизни", ее анализ и оценка в работе Я. Буркхардта "Культура Возрождения в Италии" (2 часа).

19. История решения уравнений третьей степени. Математические турниры, их генезис, формы проведения и социальные функции в научном мире. Турниры Тарталья-Фиорре и Феррари-Тарталья. Возможные причины поражения Фиорре. Возникновение комплексных чисел (2 часа).

20. Овладение принципом прямой перспективы как основа "жизнеподобия" живописи раннего Возрождения. Формулировка принципа. Личность и творчество Леона Батисты Альберти. Теория зрительной пирамиды как "научно-мифологическая" основа принципа прямой перспективы. Геометрия в трактатах Альберти (2 часа).

21. Принцип "самостоянья" личности – мировоззренческая основа теории зрительной пирамиды. Перспектива как символическая форма (по работам П.А. Флоренского и Э. Панофского). Пьеро дела Франческа, его живопись и математические трактаты. Изображение предмета в проекциях на различные плоскости как основа для получения его перспективного изображения (2 часа).

22. Лука Пачоли – создатель теории бухгалтерских вычислений (2 часа).

23. Возникновение математической науки в Германии. Региомонтан. Значение немецко-итальянских культурных связей для развития науки и искусства в Германии. Биография А. Дюрера (2 часа).

24. Геометрические построения в книге “Руководство к измерению с помощью циркуля и линейки”. Построение букв латинского алфавита как задача на построение с помощью циркуля и линейки. Метод вспомогательного квадрата. Перспективные построения. Предмет и его тень. Машины Дюрера для построения перспективных изображений. Описание конических сечений (2 часа).

25. Трактат “Четыре книги о пропорциях”. Классификация человеческих фигур. Применение метода вспомогательного квадрата к построению изображения человека. Деформация сетки – инструмент изменения психологических характеристик лица. Проблема идеальных пропорций. Картина и гравюра “Адам и Ева”. Дюрер о границах и возможностях математических методов в искусстве. Гравюра “Меланхолия” как аллегорическое изображение геометрии. Иконографический анализ гравюры. Построение магических квадратов (2 часа).

Реформы математического образования в начале XX века

В.Д. Павлидис

Новая социально-экономическая и политическая ситуация, сложившаяся в российском обществе, позволила на деле перейти к глубоким содержательным переменам, к радикальному процессу количественных и качественных изменений в области народного образования.

Правительство и Министерство образования РФ подготовили и приняли ряд законодательных актов, регулирующих деятельность учебных заведений, направляющих усилия учительских коллективов на решение конкретных нововведений, призванных как теоретически, так и практически обновить школу. Правительственные постановления требуют создания условий для полноценного формирования личности и обновления педагогических, социально-экономических, управленческих принципов развития народного образования.

Управление школой в современных условиях – сложный процесс, слагаемыми которого являются правильный выбор целей и задач, изучение и глубокий анализ достигнутого уровня учебно-воспитательной работы, система рационального планирования, организация деятельности ученического и педагогического коллективов, выбор оптимальных путей для повышения уровня обучения и воспитания, эффективный контроль.

Глубинные изменения в материальной и духовной жизни современного российского общества, одновременно развивающиеся процессы гуманизации и дегуманизации, культурного возрождения и нравственной деградации, инноваций и псевдоинноваций актуализируют необходимость обращения к анализу системы народного образования в нашем государстве до революции 1917 г. Они дают возможность использовать опыт работы общеобразовательных учреждений Российской империи в процессе совершенствования современных учебных заведений.

В развитии средней школы в России складывались свои тенденции и закономерности, определявшиеся ходом исторического развития, потребностями общества, которые необходимо учитывать при разработке и проведении реформ в настоящее время.

Поэтому становится актуальным изучение исторического опыта процесса реформирования средней школы, особенно в период конца XIX – начала XX века, так как общеисторические условия развития страны и образования напоминают нынешние.

На рубеже двух веков в России происходили важные политические и социально-экономические изменения, которые касались всех сторон жизни, включая культурологические, национальные, нравственные и другие компоненты. Именно в этих условиях стал остро ощущаться кризис традиционной школы, не удовлетворявший потребности общества в подготовке нового типа личности. Цели среднего образования, структура, содержание и методика обучения вызывали критику различных слоев общества.

Во второй половине 1899 г. Министерство народного просвещения под руководством Н.П. Боголепова решило вынести проблемы среднего образования на широкое обсуждение педагогической общественности. Для этого были созваны при учебных округах особые совещания, посвященные вопросам реформы средней школы и математического образования в частности [5, 8, 12, 13].

В комиссии Н.П. Боголепова разработаны были следующие типы средней общеобразовательной школы:

– гимназия с двумя древними языками;

– гимназия с одним латинским языком;

– школа нового типа с двумя языками;

– гимназия, допускающая применение принципа индивидуализации в обучении;

– реальное восьмиклассное училище;

– средняя школа с бифуркацией, начинающейся с IV класса [8, 10, 11].

Смерть Н.П. Боголепова положила конец разработке его проекта реформирования средней школы.

Назначенный на место Н.П. Боголепова в 1901 г. П.С. Ванновский создал новую комиссию по реформе средней школы. Она разработала проект, в котором отразилась еще одна попытка устранить недостатки среднего образования России конца XIX века и ближе подойти к созданию единого типа общеобразовательной средней школы [5, 12].

Основная задача проекта состояла в том, чтобы установить единый тип общеобразовательной средней школы, обеспечить некоторый минимум общеобразовательных знаний по всем предметам для всех учащихся и, вместе с тем, некоторую специализацию в старших классах, которая служила целям подготовки учащихся либо к поступлению в университет, где требовалось знание латинского языка, либо в высшие специальные учебные заведения.

Следует заметить, что проект П.С. Ванновского встретил резкий отпор со стороны тех ведомств и учреждений, на рассмотрение которых он был передан, и был отвергнут правительством [2. С. 421].

В апреле 1906 года новым министром народного просвещения был назначен П.М. фон Кауфман. При его поддержке 15 мая 1906 года был принят новый учебный план реальных училищ.

Необходимо отметить, что в этот период внимание уделялось в основном реальному образованию. Деятельность по реформе математического образования выразилась в изменении учебных планов и программ по этому предмету для реальных училищ. В определенной мере это было обусловлено общим настроем в обществе, в частности, неприспособленностью школы к потребностям общества [5, 13].

Результатом длительных споров по вопросам математического образования в средней школе стали I и II Всероссийские съезды преподавателей математики, которые выработали платформу для дальнейшего развития и организации школьного математического образования в России [3, 4, 15].

Средняя школа к началу Первой мировой войны прошла длительный и сложный путь развития. В это время происходили изменения в общественном сознании, шло переосмысление пройденного страной пути. Развитие педагогической науки и школьной практики привело к более четкому, чем на рубеже веков, пониманию цели и задач школы, путей ее реформирования.

Основной причиной новых требований реформы средней школы явилось ее несоответствие уровню социально-экономического развития и потребностям общества. Политика же министерства ограничивалась попытками устранить явные ее недостатки.

Несколько иное, более радикальное, изменение в задачи и структуру общеобразовательной средней школы вносил проект реформы министра П.Н. Игнатьева в 1915 г. По существу, он отвечал интересам крупной буржуазии, которая в перспективе прихода к власти имела в виду подготовку в системе своих школ образованных и энергичных людей, необходимых российскому государству [5. С. 218].

Новое в разрешении вопроса о специализации в проекте П.Н. Игнатьева заключается в том, что специализация не связывалась ни с предоставлением привилегий в отношении поступления в высшее учебное заведение, ни с подготовкой к государственной службе. В основу специализации был положен принцип расширения общего образования в избранном цикле наук (древний язык в гуманитарно-классическом; русский язык, история, новый язык в новогуманитарном; математика и рисование в математическом; естествознание в естественном отделении). Это расширение знаний (а в реальном отделении и практических навыков), естественно, должно было привести и к практическим результатам, то есть либо к поступлению в соответствующее высшее учебное заведение, либо к использованию знаний и умений по избранной специальности в соответствующей практической деятельности.

К 1917 г. вопрос о создании единой средней школы так и не был разрешен не только на деле, но и в проектах, хотя попытки в этом направлении делались, и некоторые из них представляют интерес не только с исторической точки зрения, но могут быть использованы при разрешении тех или иных вопросов построения учебных планов современной школы.

Не только система среднего образования в целом, но и отдельные ее компоненты, в частности, школьное математическое образование подверглись глубокому реформированию в начале XX века.

Историко-педагогический анализ показал, что проблема структуры школьного курса является самостоятельной, постоянной и относится к числу главных проблем обучения математике [6. С. 13].

Процесс совершенствования структуры математического образования в средней школе России конца XIX–начала XX века наиболее полно нашел свое отражение в постановке математического образования в реальных училищах того времени.

Его основными направлениями были:

– реформирование макроструктуры - последовательности изучения разделов и тем, определяемой программой;

– модернизация микроструктуры - методики подачи материала в учебнике, характерной для большинства его пунктов;

– изменения в функциональной структуре - организации процесса познания и усвоения на уроке [7. С. 58].

Совершенствование макроструктуры математического образования в реальных училищах России происходило за счет более раннего введения и улучшения пропедевтики важнейших математических понятий, идей, методов, что позволяло добиваться их лучшего осознания всеми учащимися, более глубокого и прочного усвоения, продолжительного и разнообразного применения, выработки более прочных навыков, более эффективного развития творческого мышления. Эта перманентная пропедевтика осуществлялась в органической связи с изучением других вопросов и не требовала дополнительного времени.

Последовательное улучшение микроструктуры материала математических курсов реальных училищ посредством его дидактической обработки, позволяющей сложное сделать простым, расширяло возможности для совершенствования его макроструктуры.

Учет целей обучения в этих учебных заведениях позволил правильно решить вопрос о выделении важнейших элементов содержания математического образования и выдвижении их на первый план при совершенствовании микроструктуры учебника и функциональной структуры урока.

Важным направлением совершенствования структуры математических курсов в реальных училищах являлось выделение научно-математических идей (линий) и группировка вокруг них фактического содержания [7].

Как показало изучение историко-педагогических материалов [16–18], касающихся постановки преподавания математики в реальных училищах, проведение научных идей в курсе средней школы не только не отнимает много времени и не препятствует выработке прочных арифметических и алгебраических навыков, но и помогает глубже осознать эти навыки, уменьшить количество допускаемых ошибок, легче и надежнее восстанавливать умения после неизбежных перерывов в их использовании. Сокращение же научно- идейного содержания, как показал опыт классических гимназий, снижает научный уровень курса математики и качество его структуры.

Макроструктура математического образования в реальных училищах стремилась к оптимальной на то время, причем были попытки включения идеи, обеспечивающей развитие комбинаторно-вероятностно-статистического мышления - важнейшего наряду с функциональным мышлением.

Предложение о слиянии систематических курсов алгебры и геометрии, выдвинутое в начале XX века, было признано нецелесообразным на I Всероссийском съезде преподавателей математики (1911–1912 гг.) [15. С. 138], поскольку искусственно усложняло структуру курса, затрудняло усвоение, воспроизведение и применение знаний, умений и навыков, нарушало непрерывность в использовании и овладении как алгебраическими, так и геометрическими методами. Здесь было указано на достаточность научно-идейной общности самостоятельных курсов и сделано заключение о том, что фузионизм оправдан лишь для пропедевтики алгебры и геометрии в курсе арифметики, а также в пропедевтическом курсе планиметрии и стереометрии (о чем свидетельствовала практика преподавания математики в реальных училищах).

Дифференцированное обучение (фуркация), получившее признание на всероссийских съездах преподавателей математики, позволило расширить возможности для совершенствования структуры и содержания школьного математического образования, способствовало раннему выявлению и эффективному развитию юных талантов, повышению уровня подготовки учащихся [15. С. 215).

Изучение психолого-дидактических основ вопросов реформирования математического образования в начале XX века позволило выявить диалектическую взаимозависимость рассматриваемых структурно-содержательных и процессуально-функциональных проблем, взаимообусловленность их решений.

Соответствующее требованиям времени решение структурно-содержательных проблем математического образования в практике реальных училищ России создало основу для предметно-содержательного решения процессуальных проблем обучения, оптимизации его функциональных структур, повышения эффективности учебного процесса.

Библиографический список

1. *Веселов М.О.* Учебные планы начальной и средней школы. М., 1939.
2. *Витте С.Ю.* Избранные воспоминания М.: Мысль, 1991.
3. Дневник II Всероссийского съезда преподавателей математики. М., 1913–1914.
4. Доклады, читанные на II Всероссийского съезда преподавателей математики в Москве. М., 1915.
5. *Медведков А.П.* Краткий исторический обзор хода работ по реформе

средней школы Министерства народного просвещения с 1871 г. Пг., 1915.
6. *Метельский Н.В.* Дидактика математики. Минск: Изд-во БГУ, 1982.
7. *Метельский Н.В.* Пути совершенствования обучения математике. Минск, 1989.
8. Обзор деятельности, учрежденной с Высочайшего соизволения при Министерстве народного просвещения комиссии по преобразованию средней школы // Журнал Министерства народного просвещения. 1901. № 7.
9. Рескрипт от 10 июня 1902 года. РГИА. Ф. 733, оп. 168, д. 1207, л. 119.
10. Реформа средней школы. Общие основания и вопросы. РГИА. Ф. 733, оп. 168, д. 1182, л. 73об., 74.
11. Реформа средней школы. Общие основания и вопросы. РГИА. Ф. 733, оп. 168, д. 1182, л. 9 об., 25–26 об., 81, 165, 166.
12. *Рождественский С.В.* Исторический обзор деятельности Министерства народного просвещения (1802–1902). СПб.: Мин-во нар. просвещения, 1902.
13. *Степанов С.Л.* Обозрение проектов реформы средней школы в России, преимущественно в последнее шестилетие (1899–1905) // Журнал Министерства народного просвещения. 1907. № 2.
14. Труды I Всероссийского съезда преподавателей математики. Т. 1. СПб., 1913.
15. Труды I Всероссийского съезда преподавателей математики. Т. 2. Секции. СПб., 1913.
16. *Черепанов М.С.* Учебные планы общеобразовательной школы в дореволюционной России // Изв. АПН РСФСР. 1951. Вып. 33. С. 153–215.
17. *Чувашев Е.П.* История реальных училищ в России. М., 1938.
18. *Щербина К.М.* Математика в русской средней школе. Киев, 1908.

Аспекты проектирования словаря по истории понятий методики обучения математике

О.Н. Куприкова

Изучение наследия минувших эпох в области преподавания математики, знание основных этапов развития методики обучения математике позволяет не только систематизировать ее основные понятия и положения, обогащая тем самым методические исследования сегодняшнего дня, но и прогнозировать будущее, намечать перспективные направления совершенствования математического образования на основе учета как позитивных, так и негативных сторон прошлого опыта.

О степени развития теории и практики научной сферы в определенный исторический период позволяет судить состояние ее понятийно-терминологического аппарата. Это делает актуальным исследование не только сложившихся терминосистем, но процессов формирования языка науки и терминологических изменений, соответствующих запросам научного знания и педагогической практики.

В качестве одной из форм систематизации, упорядочения и обобщения терминологии методики обучения математике в динамике ее функционирования нами был избран исторический словарь.

Процедура создания словаря включает в себя несколько этапов:

1. Теоретическое обоснование структуры словаря, принципов отбора терминов и их толкования.

2. Отбор терминов, выбор “стержневого” термина в случае обнаружения полисемичных, омонимичных, синонимичных вариантов.

3. Написание словарных статей.

4. Апробация материала путем практического его использования в процессе преподавания.

При проектировании словаря по истории понятий методики обучения математике первоначальным этапом является установление его типологии, которая определяет объем, тематический охват, функции и назначение, содержание и форму словаря.

В основе классификации словарей, разработанной Л.В. Щербой, лежат теоретические противоречия, одним из которых является противоречие между историческим и неисторическим словарем. “Историческим в полном смысле этого термина был бы такой словарь, – пишет автор, – который давал бы историю всех слов на протяжении определенного отрезка времени, начиная с той или иной определенной даты или эпохи, причем указывалось бы не только возникновение новых слов и новых значений, но и их отмирание, а также их видоизменение” [11. С. 304]. Далее Щерба делит исторический словарь на три вида: словарь, отражающий историю фонетических слов и их значений; словарь, отражающий историю слов-понятий, и словарь, являющийся комбинацией двух предыдущих. В рамках классификации, предложенной Щербой, проектируемый словарь должен отражать историю слов-понятий.

Основываясь на изоморфизме между системой понятий и системой терминов и считая определением понятия методики обучения математике определение соответствующего этому понятию методического термина, проектируемый словарь считаем терминологическим.

По принципу семантизации, раскрывающей значения лексической единицы, проектируемый словарь является энциклопедическим в соответствии с классификацией, представленной Л.В. Щербой, З.И. Комаровой и др. Энциклопедичность проектируемого словаря обусловлена особенностью педагогической терминологии: высокая степень абстрактности понятий, неоднозначность трактовки и постепенное раскрытие смысла термина по мере изложения какой-либо концепции [6. С. 172]. Следовательно, при составлении словаря необходимо прибегнуть к описательному толкованию и подробному объяснению каждого термина, что и характерно для энциклопедического словаря.

Составлением исторических терминологических словарей занимается историческая терминография – довольно молодая наука, возникшая на стыке терминологической и исторической лексикографии при разделении терминографии на синхронную и историческую. Для современных терминологических словарей характерна ориентация на наиболее употребительные в настоящий момент термины. Этим, например, характеризуется словарь по общей методике обучения математике Н.М. Тимофеевой, ставящий своей задачей дать читателю максимум сведений по современной терминологии. “Для исторического терминологического словаря важен принцип историзма, который диктует рассматривать все лексические единицы изучаемого подъязыка в их возникновении и историческом развитии” [2. С. 65]. Поэтому в историческом словаре по методике обучения математике планируется дать каждой заготовочной единице систематическое описание изменений, которые претерпевали ее форма и содержание за весь период своего функционирования.

В основе классификации словарей исторического жанра, представленной Г.А. Богатовой, лежит конкретно-исторический подход, на основании которого она делит исторические словари на словари “горизонтального среза” и словари “эволюции” [1. С. 80]. Словарь “горизонтального среза” фиксирует все варианты написания, регистрирует формы словоизменения, особенности словоупотребления и сочетаемости в языке какой-либо отдельной эпохи. К словарям такого вида относится, например, Словарь русского языка XVIII в.

Словари “эволюции” имеют более широкие хронологические рамки или достаточно большой период, разделяющий сопоставляемый материал. К словарям “эволюции” относятся диахронические словари. В историческом терминоведении принято выделять “диахронические исследования терминологии современного русского языка – исследовательский подход, который предусматривает изучение развития каждого из элементов специального подъязыка, изменений профессиональной системы в целом" [3. С. 8]. В то время, как понятие "историческое" означает обращенное к прошлому, имеющее объектом исследования языковые факты, ставшие историей, задачей большинства диахронических исследований является отслеживание развития терминологий от момента их возникновения до настоящего времени.

В связи с тем, что основной задачей проектируемого словаря является описание изменений, которые претерпевала каждая заготовочная единица за весь период своего функционирования, проектируемый словарь относится к словарям "эволюции", основанном на диахроническом подходе к исследованию его терминологии.

Хронологическими рамками исторического словаря, создаваемого на основе диахронического подхода, является время от примерного или точного (если оно известно) зарождения конкретной изучаемой терминологии до настоящего времени. Если исходить из предположения, что понятия впервые появились с появлением науки, то и появление терминов – наименований понятий – также следует связывать с появлением науки. Таким образом, хронологические рамки словаря по истории методических понятий должны начинаться с периода зарождения методики математики как науки, т.е. с появления основных признаков науки: 1) перехода от практического уровня к теоретическому, который подтверждается появлением соответствующий публикаций; 2) возникновения институтов исследования и обучения данной дисциплине; 3) создания сообществ в национальных и межнациональных масштабах.

Процесс создания методических трудов в России начинается с 30-х гг. XIX в., когда вслед за первым методическим трудом С.Е. Гурьева "Опыт усовершенствования элементов геометрии" появились законченные методические сочинения Ф.И. Буссе, П.С. Гурьева, В.Я. Буняковского. Создание научных сообществ пришлось на начало XX в., когда в 1908 г. была организована Международная комиссия по математическому образованию, в которую вошла и Россия. Организация же научно-исследовательских институтов, в частности кабинета методики математики в НИИ методов обучения, состоялась в 1944 году. Таким образом, руководствоваться таким подходом при определении хронологических рамок довольно неудобно.

Но существует и другой подход, который говорит о том, что "начало истории специальной лексики может быть соотнесено с периодом появления протонаучных знаний и, следовательно, оно предшествует началу истории науки” [5. С. 189]. Основываясь на этом подходе, хронологические рамки проектируемого словаря нужно расширить. Так, в течение всего XVIII в. в России активно функционировали методические идеи при отсутствии как минимум первого из условий превращения методики математики в науку. Естественно, специальная методическая литература в этот период отсутствовала. Сферой функционирования методических идей являлись учебники математики. Первым из таких учебников была “Арифметика” Л.Ф. Магницкого, методические идеи в ней не формируются, но могут быть выделены при анализе ее содержания. В дальнейшем на протяжении XVIII в. для изложения своих методических идей авторы учебников использовали обширные предисловия к ним, например, “Обращение к читателю” учебника арифметики Л. Эйлера, “Предуведомление” к “Сокращению математики” С.Я. Румовского.

“Верхней” границей исторического словаря предполагается взять начало 80-х гг. XX в. Это обусловлено рядом причин. Во-первых, на это время приходится контрреформа школьного математического образования, явившаяся ответом на реформу А.Н. Колмогорова, повлекшая за собой значительные изменения в преподавании математики, которые необходимо отразить в словаре. Во-вторых, в конце 80-х гг. начался новый этап в развитии обучения и воспитания подрастающего поколения, связанный с демократизацией и гуманизацией образования. Процесс этот пока не завершен, и рано подводить итоги.

Необходимо добавить, что по отношению к адресату (классификация по этому признаку представлена, например, в обобщающей типологии словарей В.В. Дубичинского) проектируемый словарь является словарем для студентов педагогических вузов, а также может быть полезен всем тем, кто интересуется вопросами истории педагогики и образования.

Во многом качество разрабатываемого словаря зависит от полноты словника. Поэтому стадия разработки словника является сложной и трудоемкой.

Отбор терминов осуществляется в несколько этапов. Первый этап направлен на определение способов и приемов упорядочивания современной понятийно-терминологической системы педагогики, поскольку большинство современных терминов является, по сути, обобщением исторически сложившихся понятий, генезис которых мы рассматриваем как один из методологических путей оценки их современного состояния. Согласно существующим правилам упорядочение системы надо начинать с изучения ее структуры, отбора педагогических и смежных понятий, наиболее важных для построения понятийно-терминологической системы [8. С. 19]. В качестве основания для классификации современных терминов общей методики обучения математике примем классификацию Н.М. Тимофеевой, в основе которой лежит соответствие терминов основным компонентам процесса обучения: цель, принципы, содержание, методы, средства и формы обучения; субъект и объект обучения [10].

Второй этап отбора терминов для проектируемого словаря, отражающего генезис понятий методики обучения математике, основан на специфике словаря исторического жанра. Руководствуясь определением исторического словаря, данным Л.В. Щербой, проектируемый нами словарь должен содержать термины педагогики трех видов.

К первой группе относятся термины, обозначающие употребляемые в настоящее время понятия, содержание и объем которых изменялся с развитием науки. Отличительной чертой терминов этой группы является то, что они имеют устоявшийся синонимический ряд. К этой группе понятий относятся, например, *словесные методы обучения*, *наглядные методы обучения*, *практические методы обучения*.

Ко второй группе относятся термины, находящиеся в стадии разворачивания семантики, сопровождающейся потоком производных от базового слова.

В связи с тем, что педагогическим терминам присуще явление синонимии и полисемии, которое наиболее характерно для этой группы, среди различных терминов, обозначающих одно и то же понятие, необходимо выбрать "стержневой" термин, или терминологическую доминанту, которая отражала бы общую сущность синонимичных терминов. Например, в 1920-х гг. в работах разных авторов исследовательский метод получил различные определения: *исследовательский* (А.П. Пинкевич); *метод исканий* (Б.В. Всесвятский), *опытно-исследовательский* (Б.Е. Райков), *активно-исследовательский* (М.Н. Николаевский), *активно-трудовой* (П.О. Афанасьев, Б.В. Игнатьев), *исследовательски-трудовой* (С. Каменев), *лабораторно-исследовательский* (Н.И. Попова), *лабораторный* (И.А. Челюскин). Вряд ли будет целесообразным в историческом словаре давать описание каждого из этих терминов, несмотря на то, что такое разнообразие отражало известные различия в трактовке исследовательского метода в то время. Наиболее рациональным представляется выделить смысловую доминанту этой группы терминов, которой будет *исследовательский метод*, включить ее в словник разрабатываемого словаря.

Третья группа – устаревшие термины, употребляемые в историческом контексте. Термины этой группы можно разделить на две подгруппы. К первой принадлежит лексика, устаревшая для последующего периода развития языка. Определяющим признаком для выделения такой лексики служит факт замены старого слова новым без изменения его содержания, при условии, что понятие, заключенное в слове, остается неизменным (насколько это вообще возможно) как для языкового состояния настоящего времени, так и для языкового состояния предшествующей эпохи [2. С. 228]. К этого рода терминам относятся, например, такие педагогические архаизмы, как *автопраксия* – самодеятельность, *автолексия* – самостоятельная речь, *автопсия* – наглядность, *экзерциция* – упражнение. В педагогической литературе XIX века описывались как две главнейшие формы учения *акроаматическая* и *эротематическая* [9. С. 127]. Первая подразумевала сообщение учащимся готовых знаний, а вторая – руководство учителем процессом отыскания знаний. В настоящее время эти термины не употребляются, однако словесные методы обучения продолжают существовать.

В начале XX века в методике обучения математике были распространены такие понятия, как *фуркация обучения* и *фузионизм.* Фуркация обучения подразумевала разделение учебных планов в средней школе с целью специализации учащихся, была вызвана потребностями жизни и должна была соответствовать индивидуальным способностям учащихся. В настоящее время это понятие практически не употребляется, вместо него распространено понятие *дифференциация обучения.* Фузионизм в узком смысле слова понимался как максимальное сближение или даже слияние математических предметов, в широком – тесная связь между математикой и другими предметами, в частности, математизация физики. Синонимичными ему понятиями, наиболее распространенными в настоящее время, являются понятия внутрипредметных и межпредметных связей.

В зависимости от важности такого рода архаизмов их необходимо либо включать в словарь в качестве заготовочной единицы, которая в дальнейшем подвергнется толкованию, либо только упоминать о них в словарных статьях, посвященных другим понятиям, в качестве иллюстрации синонимичного термина, употребляющегося в определенный исторический период.

Ко второй подгруппе терминов относится лексика, не имеющая равнозначных эквивалентов в современном русском языке, так как описываемые ею реалии перестали существовать [3. С. 229]. Обучение арифметике в начальной школе в 60-х–70-х гг. XIX в. велось по *методу Грубе,* после критики этого метода и борьбы против него Л.Н. Толстого и П.С. Гурьева использование этого метода в школе прекратилось, а термин вышел из употребления. К этой группе терминов можно отнести педагогические неологизмы советского периода: *марксистская педагогика*, *школа рабочей молодежи*, *культармеец*, *фабрично-заводская семилетка*. Вообще революционные события в России определили в 1920-х гг. значительные изменения в понятийно-терминологическом аппарате педагогики, даже в ее основополагающих категориях. Например, дидактическая категория *методы обучения* получила в педагогической литературе тех лет название *методы школьной работы*.

Историческое (диахроническое) терминоведение – относительно новый раздел терминоведения, занимающийся вопросами формирования и развития терминов и их совокупностей в зависимости от формирования и развития специальных областей знаний или деятельности, развития и смены теорий (концепций), описывающих эти области [7. С. 96]. Из этого определения следует, что важной задачей является исследование терминологии определенной науки в зависимости от развития самой науки.

Эта особенность словаря обуславливает один из этапов его проектирования, который состоит в анализе развития соответствующей области знания с целью отбора наиболее значимых терминов (ключевых) и написания словарных статей, отражающих основные этапы в развитии науки. А.С. Герд указывает, что "в основу отбора лексики для терминологического словаря целесообразно положить периодизацию истории языка науки в тесной связи с историей самой науки" [4. С. 25].

К сожалению, в настоящий момент нет периодизации истории методики обучения математике. Существуют только различные подходы к определению периодизации развития математического образования в России. Это, например, периодизации Р.С. Черкасова, Ю.М. Колягина, Т.С. Поляковой. На основе рассмотрения основных этапов развития математического образования в России и анализа доступных нам исторических источников был произведен отбор терминов, относящихся к терминологической группе "методы обучения", которые будут включены в словник исторического словаря по методике обучения математике: абстрактно-дедуктивный метод, акроаматическая форма, аналитический метод, бригадно-лабораторный метод, генетический метод, дедуктивный метод, деиктическая форма, догматический метод, индуктивный метод, исследовательский метод, катехизический метод, комплексная система обучения, конкретно-индуктивный метод, лабораторный метод, метод Грубе, метод изучения действий, метод проектов, метод целесообразных задач, методы проблемного обучения, наглядные методы, практические методы, программированное обучение, синтетический метод, словесные методы, трудовой метод, эвристический метод, экскурсионный метод, эротематическая форма.

Дальнейшая деятельность по проектированию словаря по истории понятий методики обучения математике состоит в написании словарных статей, удовлетворяющих дидактическим требованиям научности, доступности, последовательности. При этом перед составителями словаря стоит задача выявить взаимосвязи между процессом обновления педагогической терминологии и изменениями в педагогической теории, вызванными научными, культурными, социально-политическими и экономическими предпосылками.

Библиографический список

1. *Богатова Г.А.* История слова как объект русской исторической лексикографии. М., 1984.
2. *Борхвальдт О.В.* Русская терминография в историческом аспекте. Красноярск, 1998.
3. *Борхвальдт О.В.* Историческое терминоведение в теории и практике. Красноярск, 2001.
4. *Герд А.С.* Основы научно-технической лексикографии. Л., 1986. 73 с.
5. *Гринев С.В.* Введение в терминоведение. М., 1993.
6. *Кантор И.М.* Педагогическая лексикография и лексикология. М., 1968.
7. *Лейчик В.М.* Историческое терминоведение, его проблемы, методы, направления исследований, приложения // Терминологические чтения (Цикл 2): "Проблемы языков для специальных целей, научной и профессиональной коммуникации". Киев, 1991. Ч. 1.
8. *Полонский В.М.* Понятийно-терминологический аппарат педагогики // Педагогика. 1999. № 8. С. 16–23.
9. Руководство к преподаванию общеобразовательных предметов / Под ред. Н.Х. Веселя. СПб, 1874.
10. *Тимофеева Н.М., Сенькина Г.Е.* Краткий карманный словарь-справочник по общей методике обучения математике. Смоленск: СГПУ, 2004. 72 с.
11. *Щерба Л.В.* Языковая система и речевая деятельность. Л., 1974.

Сведения об авторах

1. Аверинцев Михаил Борисович – кандидат физико-математических наук, доцент Московского государственного университета путей сообщения, Москва.
2. Алексеев Виктор Николаевич – кандидат физико-математических наук, доцент Ишимского государственного педагогического института, Ишим.
3. Ануфриенко Сергей Евгеньевич – кандидат физико-математических наук, старший преподаватель ЯрГУ, Ярославль.
4. Артемов Анатолий Анатольевич – кандидат физико-математических наук, доцент Тамбовского государственного университета, Тамбов.
5. Афанасьев Владимир Васильевич – доктор педагогических наук, профессор, ректор ЯГПУ, Ярославль.
6. Беляева Эмма Степановна – кандидат педагогических наук, доцент Воронежского государственного педагогического университета, Воронеж.
7. Большаков Юрий Иванович – кандидат физико-математических наук, доцент ЯрГУ, Ярославль.
8. Бондаренко Юрий Владимирович – соискатель ЯГПУ, Ярославль.
9. Вавилов Валерий Васильевич – кандидат физико-математических наук, доцент Специализированного учебно-научного центра МГУ, Москва.
10. Виноградов Владимир Леонидович – кандидат физико-математических наук, профессор Шуйского педагогического университета, Шуя.
11. Волкова Елена Евгеньевна – кандидат педагогических наук, доцент Тюменского института нефти и газа, Тюмень.
12. Волотова Надежда Борисовна – кандидат физико-математических наук, доцент Тамбовского государственного университета, Тамбов.
13. Воронцова Ольга Романовна – кандидат технических наук, доцент Костромского государственного технологического университета, Кострома.
14. Гриненко Михаил Михайлович – доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Математического института им. В.А. Стеклова РАН, Москва.
15. Гушель Николай Петрович – кандидат физико-математических наук, доцент Российского государственного открытого технического университета путей сообщения, Ярославль.

16. Гушель Ревекка Залмановна – старший преподаватель ЯГПУ, Ярославль.
17. Демидов Сергей Сергеевич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий сектором Института истории естествознания и техники РАН, Москва.
18. Дробышев Юрий Александрович – кандидат педагогических наук, профессор Калужского государственного педагогического университета, Калуга.
19. Дьячкова Мария Васильевна – аспирантка Казанского государственного университета, Казань.
20. Епифанова Нина Михайловна – кандидат педагогических наук, доцент ЯГПУ, Ярославль.
21. Епишева Ольга Борисовна – доктор педагогических наук, профессор Тюменского института нефти и газа, Тюмень.
22. Жохов Аркадий Львович – доктор педагогических наук, профессор ЯГПУ, Ярославль.
23. Жохова Елена Юрьевна – кандидат педагогических наук, доцент ЯГПУ, Ярославль.
24. Зайцева Жанна Ильинична – кандидат педагогических наук, ст. преподаватель инженерно-экономической академии, Набережные Челны.
25. Зверкина Галина Александровна – кандидат физико-математических наук, доцент Московского государственного университета путей сообщения, Москва.
26. Зотиков Сергей Васильевич – кандидат физико-математических наук, доцент Мурманского государственного педагогического университета, Мурманск.
27. Зыкова Екатерина Александровна – аспирантка ЯрГУ, Ярославль.
28. Исковских Василий Алексеевич – доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Математического института им. В.А. Стеклова РАН, Москва.
29. Каминский Тадеуш Эдуардович – кандидат физико-математических наук, доцент Вологодского государственного педагогического университета, Вологда.
30. Капустина Татьяна Васильевна – доктор педагогических наук, профессор Елабужского государственного педагогического университета, Елабуга.
31. Карпов Борис Викторович – кандидат физико-математических наук, доцент Московского института электроники и математики, Москва.

32. Катержина Светлана Федоровна – ассистент Костромского государственного технологического университета, Кострома.
33. Козырев Сергей Борисович – кандидат физико-математических наук, доцент Костромского государственного университета, Кострома.
34. Кольцова Светлана Васильевна – кандидат физико-математических наук, доцент Тамбовского государственного университета, Тамбов.
35. Корнилов Петр Анатольевич – кандидат физико-математических наук, доцент ЯГПУ, Ярославль.
36. Косолапова Ирина Витальевна – ст. преподаватель Пермского государственного педагогического университета, Пермь.
37. Крюкова Анастасия Леонидовна – аспирантка Вологодского государственного педагогического университета, Вологда.
38. Кудряшова Лия Васильевна – кандидат физико-математических наук, ст. преподаватель МГУ, Москва.
39. Кузичева Зинаида Андреевна – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник МГУ, Москва.
40. Кузнецова Валентина Анатольевна – доктор педагогических наук, профессор ЯрГУ, Ярославль.
41. Кулешов Сергей Алексеевич – доктор физико-математических наук, профессор Военно-Воздушной Академии, Москва.
42. Куприкова Ольга Николаевна – аспирантка Смоленского государственного педагогического университета, Смоленск.
43. Курбатова Надежда Михайловна – кандидат физико-математических наук, доцент Забайкальского института железнодорожного транспорта, Чита.
44. Латышева Любовь Павловна – кандидат педагогических наук, доцент Пермского государственного педагогического университета, Пермь.
45. Локоть Наталья Васильевна – кандидат физико-математических наук, доцент Мурманского государственного педагогического университета, Мурманск.
46. Локоть Вадим Владимирович – кандидат физико-математических наук, доцент Мурманского государственного педагогического университета, Мурманск.
47. Луканкин Александр Геннадьевич – кандидат физико-математических наук, доцент МГОУ, Москва.
48. Луканкин Геннадий Лаврович – доктор педагогических наук, член-корреспондент РАО, профессор МГОУ, Москва.

49. Майоров Вячеслав Владимирович – доктор физико-математических наук, профессор ЯрГУ, Ярославль.
50. Мазуренко Ольга Александровна – инспектор МГУ, Москва.
51. Молчанова Лилия Михайловна – доцент Тамбовского государственного университета, Тамбов.
52. Мухометзянова Ирина Анваровна – ассистент Тверского государственного университета, Тверь.
53. Налбандян Маргарита Бабкеновна – кандидат физико-математических наук, доцент Ростовского государственного университета, Ростов-на-Дону.
54. Налбандян Юлия Сергеевна – кандидат физико-математических наук, доцент Ростовского государственного университета, Ростов-на-Дону.
55. Никулина Елена Вячеславовна – кандидат педагогических наук, старший преподаватель ЯрГУ, Ярославль.
56. Павлидис Виктория Дмитриевна – кандидат физико-математических наук, доцент Оренбургского государственного аграрного университета, Оренбург.
57. Перминов Евгений Александрович – кандидат физико-математических наук, доцент Российского государственного профессионально-педагогического университета, Екатеринбург.
58. Полотовский Григорий Михайлович – кандидат физико-математических наук, доцент Нижегородского государственного университета, Нижний Новогрод.
59. Потапов Александр Сергеевич – кандидат физико-математических наук, профессор Воронежского государственного педагогического университета, Воронеж.
60. Пугина Лидия Вячеславовна – кандидат физико-математических наук, доцент Московского государственного университета путей сообщения, Москва.
61. Секованов Валерий Сергеевич – кандидат физико-математических наук, профессор Костромского государственного университета, Кострома.
62. Симонов Рэм Александрович – доктор исторических наук, профессор Российской государственной Академии печати, Москва.
63. Скоробогатова Наталья Владимировна – ассистент Тюменского института нефти и газа, Тюмень.
64. Сорокина Мария Евгеньевна – ассистент ЯГПУ, Ярославль.

65. Тестов Владимир Афанасьевич – доктор педагогических наук, профессор Вологодского государственного педагогического университета, Вологда.
66. Тимофеева Ирина Леонидовна – кандидат педагогических наук, доцент МПГУ, Москва.
67. Тимофеева Надежда Владимировна – кандидат физико-математических наук, доцент ЯГПУ, Ярославль.
68. Титоренко Светлана Александровна – кандидат педагогических наук, доцент Воронежского государственного педагогического университета, Воронеж.
69. Цыкина Светлана Викторовна – ассистент Тамбовского государственного университета, Тамбов.
70. Чельцов Иван Анатольевич – кандидат физико-математических наук, Математический институт им. В.А.Стеклова РАН, Москва.
71. Фирстов Виктор Егорович – кандидат физико-математических наук, доцент Саратовского государственного университета, Саратов.
72. Штерн Александр Савельевич – доцент Омского государственного университета, Омск.

Труды четвертых Колмогоровских чтений

Редактор *Л.К.Шереметьева*
Компьютерная подготовка оригинал-макета *Т.Л.Трошиной*

Подписано в печать 15.10.2006. Формат 60×90 1/16. Печать офсетная.
Уч.-изд. л. 24 Усл. печ. л. 24,6. Заказ 1010. Тираж 100.

Редакционно-издательский отдел Ярославского государственного
педагогического университета имени К.Д.Ушинского
150000, Ярославль, Республиканская ул., 108

Типография ЯГПУ
150000, Ярославль, Которосльная наб., 44