Труды III Колмогоровских чтений

Ярославль 2005

Оглавление

Глава 1

Пленарные доклады: А.Н. Колмогоров и математика XX столетия

Некоторые проблемы школьного и университетского математического образования

В.М. Тихомиров

Введение

Математическое образование должно, по идее, состоять из трех компонент: начальной, общей и современной. Но пока оно состоит из двух – начальной (это школа) и общей (это университет). Педагогическое образование занимает некоторую промежуточную ступень.

Программы университетов давно не изменялись, и наука постепенно удаляется от высших точек университетского образования. Студент, поступивший в Московский университет в 1950 году, начиная с третьего курса, изучал современную математику: функциональный анализ был оформлен, как научное направление в начале 30-х годов, и по третьему этажу старого здания МГУ расхаживали классики этой науки – Колмогоров, Люстерник, Гельфанд и другие. То же можно сказать про уравнения с частными производными. Рождалось программирование, и оно сразу входило в образование. С тех пор прошло больше полувека, наука очень стремительно движется вперед, а университетское образование эволюционирует гораздо медленнее. Вместе с ним притормаживает и педагогическое математическое образование.

В этой статье мы обсудим положение дел с математическим образованием – университетским и педагогическим и поговорим о перспективах их развития.

Математика на протяжении всей истории человечества являлась составной частью человеческой культуры, ключом к познанию окружающего мира, базой научно-технического прогресса, существенным элементом формирования личности. Математическое образование является неотъемлемой частью гуманитарного образования в широком понимании этого термина.

Математическое образование есть благо, на которое имеет право любой человек, и обязанность общества предоставить каждой личности возможность воспользоваться этим правом. В государстенном устройстве должен осуществляться принцип свободы.

Эти общие положения, которые были выдвинуты давно, постепенно должны, с моей точки зрения, стать общепринятыми в любом цивилизованном обществе. Ими следует руководствоваться при обсуждении проблем математического образования.

О школьном математическом образовании

Математика есть часть общего образования. Математическое образование должно содействовать тому, чтобы каждый школьник получил важнейшие навыки и знания, необходимые ему в дальнейшей жизни и работе. Оно должно включать в себя содержательный, эстетический, психологический, мировоззренческий и прагматический аспекты. Конкретнее это предполагает:

– необходимость для каждого человека с одной стороны ***освоить навыки логического и алгоритмического мышления*** (научиться анализировать, отличать гипотезу от факта, критиковать, понимать смысл поставленной задачи, схематизировать, отчетливо выражать свои мысли и т.п.), с другой – ***развить воображение и интуицию*** (пространственное представление, способность предвидеть результат и предугадать путь решения и т.д.);

– овладение конкретными математическими знаниями, необходимыми для ориентации в окружающем мире, для подготовки к будущей профессиональной деятельности (ныне ни одна область человеческой деятельности не может обходиться без математики), для поступления в вуз;

– освоение ***этических принципов человеческого общежития*** (интеллектуальной честности, объективности, стремления к постижению истины; эти принципы закладываются и другими предметами, но роль математики в осознании их очень велика и не может быть заменена ничем другим);

– развитие (и это должно происходить во взаимодействии с другими образовательными дисциплинами) ***эстетического восприятия мира*** (постижение красоты интеллектуальных достижений, идей и концепций, познание радости творческого труда);

– необходимость ***тренировок интеллекта***, столь же важных для развития мозга, как физическая культура для физического здоровья; эти тренировки призваны способствовать выделению интеллектуально высокоразвитого слоя молодежи, столь существенного для плодотворного развития общества;

– способствование ***формированию мировоззрения.***

– необходимость ориентации человека в информационной и компьютерной технологиях, что осуществляется во взаимодействии с курсом информатики.

Гармоническое развитие личности, контуры которого были описаны выше, в достижении которого математическое образование играет выдающуюся роль, позволит нашей стране решить те труднейшие задачи, которые стоят перед ней и всем человечеством в нынешнем столетии.

Цели школьного математического образования

Математическое образование, как и всякое иное, складывается из трех основных компонент: обучения, воспитания и развития.

Цель школьного математического образования – способствование формированию гармонически развитой личности (развитие логических и алгоритмических навыков, воображения и интуиции), обучения конкретным математическими знаниям, умениям и навыкам, необходимым для ориентации в окружающем мире и в будущей профессиональной деятельности на благо общества, освоения смежных дисциплин, продолжения образования), воспитание этических и эстетических принципов, способствованию формированию мировоззрения (представлений об идеях и методах математики и вообще современной науки, о математике, как форме описания и методе познания действительности).

Принципы школьного математического образования

Одним из важных принципов построения математического образования является разумный консерватизм, предполагающий взвешенный учет положительного опыта, накопленного отечественным математическим образованием и реалий современного мира.

Руководящей идеей математического образования должна стать ***индивидуализация образования,*** реализующаяся индивидуальный в двух формах: индивидуальный подход к личности на всем протяжении образования и предоставление возможности выбора типа математического математического образования на заключительном его этапе.

Последнее предполагает выделение профилирующего цикла.

Общеобразовательная функция математики призвана способствовать гармоническому развитию личности. Социальная значимость собственно математического образования обусловлена необходимостью (для плодотворного развития общества) формирования будущего научно-технического, инженерного, медицинского и гуманитарного потенциала российского общества.

На протяжении всего образовательного процесса необходимо сочетание обучения с воспитанием личности и его интеллектуальным развитием. (которое невозможно без решения задач и продумывания доказательств).

Содержание школьного математического образования

В основу содержания математического образования положен ***принцип премственности***, базирующийся на богатейшем отечественном опыте математического образования и просвещения. Принцип преемственности должен сочетаться при этом с современными тенденциями отечественной и зарубежной школы.

Согласно тысячелетней традиции математика в школе делилась на три части: Арифметика (наука о числах), Алгебра (учение о преобразованиях и алгоритмах) и Геометрия (наука о фигурах). Сорок лет назад в школьную математику начал внедряться Анализ (наука об эволюции детерминированных процессов). Представляется важным постепенно внедрять в школьную математику Комбинаторику (как существенный фрагмент информатики) и Теорию вероятностей (как науку о законах хаоса). ("Я склонен думать, что случайность более фундаментальная концепция, чем причинность" (М. Борн).)

Таким образом, школьное математическое образование должно складываться из следующих основных частей: ***арифметика, алгебра, геометрия, элементы математического анализа и элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей.*** Первые три компоненты заполняют общеобразовательный цикл, в специализированном цикле алгебра и геометрия сочетаются с элементами математического анализа, статистики и теории вероятностей, комбинаторика является опорой информатики.

АРИФМЕТИКА призвана способствовать освоению логики и алгоритмических навыков, ориентации в окружающем мире, получению конкретных знаний, необходимых в будущей деятельности и интеллектуальному развитию.

Программа по арифметике должна содержать понятие о натуральном ряде, об основных арифметических операциях, дробях и действиях с ними, процентах. Обучение должно предполагать решение большого числа текстовых задач арифметическими способами, без форсирования перехода к алгебраическим подходам, и обучение вычислительным навыкам.

Изучение арифметики должно начинаться с самых первых лет обучения.

АЛГЕБРА необходима для развития логики и (особенно) алгоритмических навыков, получения конкретных знаний, необходимых в будущей деятельности и интеллектуального развития.

Программа по алгебре должна содержать овладение алгебраическим подходом, буквенными выражениями и работой с ними, понятиями многочлена и рационального выражения, умения действовать с ними и вычислять их значения, должно быть освоено понятие алгоритма. Программа должна подготовить ко введению показательной и логарифмической функции. Обучение должно предполагать решение текстовых задач алгебраическим методом, решение уравнений и неравенств первой и второй степени.

ГЕОМЕТРИЯ – одна из важнейших компонент математического образования, необходимая для развития воображения и интуиции, логического мышления, воспитания этических и эстетических принципов, интеллектуального развития и получения конкретных знаний. Соотношение наглядного и логического в изучении геометрии должно соответствовать возрастным возможностям учеников.

Изучение геометрии должно начинаться с самых первых лет обучения.

Программа по геометрии должна содержать ознакомление с линиями и фигурами на плоскости и в пространстве, школьники должны узнавать геометрические фигуры в окружающем мире, изображать их и овладеть понятиями измерения (длин, углов, площадей, объемов).

В основной школе должны изучаться геометрические преобразования и алгебраические описания геометрических объектов (координаты и векторы). Должно происходить ознакомление с понятием доказательства и началами дедуктивного метода. Программа должна подготовить ко введению тригонометрических функций. Обучение должно предполагать решения задач на вычисление, построение и доказательство.

Арифметика и алгебра с одной стороны и геометрия с другой – две важнейших структуры, два ствола единого дерева математического образования, каждый из которых ориентирован на свой тип мышления.

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА необходимы для получения конкретных знаний, формирования мировоззрения и интеллектуального развития.

Программа по анализу должна привить функциональный подход и дать представление об описании процессов (линейного, степенного и экспоненциального роста, периодических процессов и т.п.).

Должны быть достаточно подробно изучены элементарные функции и действия с ними и освоены начала дифференциального исчисления. В специализированных школах должны быть освоены начала интегрального исчисления и дано представление о ньютоновской системе мира.

ЭЛЕМЕНТЫ СТАТИСТИКИ И ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ необходимы для получения конкретных знаний и формирования мировоззрения.

Программа должна содержать начала комбинаторики, элементы теории вероятностей и анализа данных.

Детальная разработка содержания и структуры требует отдельного детального рассмотрения и обсуждения.

Вот самая предварительная схема. (Курсивом набраны дополнительные, необязательные, но желательные вопросы.)

1. Арифметика. Натуральные числа и нуль. Сложение и умножение, делимость. Обыкновенные дроби. Целые и рациональные числа. Десятичные дроби и действия с ними. Представление о действительной прямой.

Величины (меры длины, веса, площадей и объемов, времени, скоростей).

Арифметические задачи. Простейшие алгоритмы.

Элементы теории целых чисел. Элементы теории действительного числа.

2. Алгебра. Буквенное исчисление. Уравнения и неравенства.

Прямая и обратная пропорциональность. Арифметическая и геометрическая прогрессии. Линейные уравнения, квадратные уравнения и решения арифметических задач. Многочлены.

Степени с рациональными показателями.

Понятие об алгебраических структурах (группах, кольцах, полях).

3. Геометрия. Планиметрия и ее основные фигуры (прямые, треугольники, четырехугольники и окружность). Понятие доказательства. Геометрические алгоритмы (построения циркулем и линейкой). Преобразования плоскости (повороты, подобия).

Доказательства древнейших теорем геометрии (Фалеса, Пифагора и

Евклида): свойств равнобедренного треугольника, суммы углов треугольника, теоремы Пифагора, свойства углов, опирающихся на хорду).

Длина и площадь. Арифметическая модель плоскости и векторы.

Фигуры в пространстве (плоскости, сферы, многогранники, цилиндры и конусы). Объем.

Арифметическая модель геометрии. Концепция геометрии и неевклидовы геометрии.

4. Анализ. Элементарные функции: аффинные, квадратичные, полиномы, тригонометрические функции, показательные функции и логарифмы. Теоремы синусов и косинусов. Алгебраические решения геометрических задач. Понятия производной и интеграла.

Математические модели в естествознании. Математический анализ и законы природы.

5. Комбинаторика и теория вероятностей.

Число сочетаний. Бином Ньютона. Схема Бернулли. Закон больших чисел.

Математика и реальный мир: детерминизм и хаос в природе и обществе.

Разумеется, в процессе обучения учащийся должен быть ознакомлен с элементами языка математики и математических технических средств: математическими терминами и символами, математической графикой (изображением функций и фигур), буквами латинского и греческого алфавита, начальными сведениями из теории множеств (объединение, пересечение); он должен понимать, что такое алгоритм, что есть математическая истина (логическое следствие из основополагающих истин, принимаемых без доказательства), понимать, что такое контрпример; учащийся должен овладеть элементами техники вычислений (устным счетом, умением пользоваться калькулятором и компьютером).

Учащегося следует ознакомить с элементами творческого процесса, с пониманием того, что достижение цели состоит из точного ее формулирования, осознавания всех средств, которые даны для выполнения задачи и употребления интеллектуальных усилий, ведущих к достижению этой цели. (Хороший пример – построение циркулем и линейкой, когда, скажем, даются линейка, циркуль и карандаш (это средства), рисуются три отрезка a, b и h и ставится цель построить треугольник со сторонами a и b и высотой h, опущенной на сторону a.)

И, конечно, следует знакомить учащихся в творцами науки и историей математики, сопровождая уроки рассказами о том, как развивались греческая математика, математика и естествознание Возрождения, как происходило состязание французской и немецкой школ в XIX веке, как развивалась математика в нашей стране, какими путями шла математика в XX веке (а может быть и пофантазировать о том, что нас ждет).

Об университетском математическом образовании

Обсуждим две основных идеи, касающиеся университетского математического образования: идея ***многоступенчатости и трапециальности.***

Это означает, что образование, по мнению докладчика, должно слагаться из нескольких стадий, и окончание каждой из них должно завершаться присуждением соответствкющей степени.

Стадии таковы: ***бакалавриат, магистратура, университетство*** (пока нет хорошего термина), ***аспирантура*** и (в порядке исключения) ***докторантура***; степени: ***бакалавр, магистр, универсант*** (снова нет слова для человека, получившего диплом об окончании университета), ***кандидат, доктор***.

Число обучающихся на каждой стадии должно быть подобно трапеции (трапециальность): широкий прием (с очень облегченными приемными экзаменами), затем существенный конкурсный отбор (по специальному государственному экзамену) при переходе на новую стадию. (Для мех-мата возможны переходы 1000–500–250–125).

Должна допускаться возможность, имея некую степень, участвовать в конкурсе на продолжение образования.

О содержании образования

Бакалавриат – двухлетнее обучение тому, чему учат на мех-мате на первых двух курсах (и учат, в общем, неплохо).

Это анализ 1 и 2, алгебра, геометрия и широко понимаемая информатика (логика, дискретная математика, программирование).

По завершении – государственный экзамен (письменный и устный).

Магистратура – функциональный анализ (анализ 3), комплексный анализ, уравнения с частными производными, прикладной анализ, теория вероятностей и математическая статистика. Срок обучения полтора года. Для перехода на новую ступень – государственный экзамен и предоставление на конкурс творческой работы.

Последняя стадия обучения проходит по отделениям типа: современная математика (в сотрудничестве с МИАН), математика и естествознание (в сотрудничестве с естественно-научными институтами РАН), прикладная математика (в сотрудничестве с прикладными институтами РАН), математическое образование.

Рождение Советской математической школы

С.С. Демидов

1. Вместо методологического введения

Говоря о математической школе, я не буду здесь вдаваться в методологические тонкости, отсылая интересующегося этими вопросами читателя к специальной литературе, например, к материалам специального выпуска "Историко-математических исследований" [1], составленного из материалов симпозиума о математических школах XIX–XX веков, проходившего в августе 1993 года рамках XIX Международного конгресса по истории науки в Сарагосе (Испания), в частности, к опубликованному в нем моему докладу [2]. Под математической школой я буду понимать "исторически сложившееся сообщество математиков, отмеченное признаками живого организма, ориентированное на открытие нового математического знания и, одновременно, осуществляющее профессиональную подготовку молодых ученых, приобщая их к разработке вопросов, исследуемых в сообществе" [2. С. 9]. В истории математики можно выделить научные школы различных типов и уровней, составляющих определенную иерархию (см. [2]). Советская математическая школа (равно как, скажем, французская или американская математические школы XX столетия) – одна из ведущих математических школ XX века. Это достаточно сложное образование, в свою очередь состоящее из различных школ и направлений, выросших из единого корня и объединенных общей историей. Возникшая в ходе единого процесса развития общность проявляется в ряде специфических черт, позволяющих говорить о ней как о специальном феномене. Советская математическая школа появилась на свет в 30-е годы и громко заявила о себе во второй половине XX века [3, 4]. Как возникла эта школа? Какую роль в этом процессе сыграли внутриматематические факторы, в частности, сама логика развития предмета? В какой мере и каким образом воздействовали на этот процесс (или даже может быть определяли?) факторы социальной истории? Попробуем, если и не ответить на эти вопросы, так по крайней мере наметить пути, на которых такие ответы могут быть получены.

2. Математика в России к началу 20-ых годов

К началу Первой мировой войны математическая жизнь в стране была на большом подъеме. В Петрограде (так, с началом военных действий стал именоваться Санкт-Петербург) действовала одна из лучших математических школ того времени – школа, основанная П.Л. Чебышевым (1821–1894). Ее результаты по теории вероятностей (А.А. Марков, А.М. Ляпунов), теории устойчивости (А.М. Ляпунов), конструктивной теории функций (А.А. Марков), теории чисел (И.И. Иванов, Я.В. Успенский), математической физике (В.А. Стеклов, Н.М. Гюнтер), теории специальных функций и функций комплексного переменного (Н.Я. Сонин, Ю.В. Сохоцкий) относятся к числу наиболее важных достижений эпохи. Подрастало молодое поколение математиков (Н.М. Крылов, В.И. Смирнов, Я.Д. Тамаркин, А.А. Фридман, А.С. Безикович, И.М. Виноградов), которым предстояло блестящее будущее. Москва уже громко заявила о себе первоклассными результатами по модной тогда теории функций действительного переменного (Д.Ф. Егоров, Н.Н. Лузин и первое поколение их учеников – Д.Е. Меньшов, М.Я. Суслин, А.Я. Хинчин, П.С. Александров). Одновременно продолжали успешно развиваться направления традиционные для первопрестольной – прикладная математика (Н.Е. Жуковский, С.А. Чаплыгин) и дифференциальная геометрия (Б.К. Млодзеевский, Д.Ф. Егоров).

Чрезвычайно оживленной была математическая жизнь в провинции. В Харькове работала основанная В.А. Стекловым школа математической физики, расцветал талант С.Н. Бернштейна. В Киеве делала первые шаги школа Д.А. Граве (Б.Н. Делоне, О.Ю. Шмидт, А.М. Островский, Н.Г. Чеботарев). Успешно развивались заложенные еще Н.И. Лобачевским геометрические традиции в Казани (А.П. Котельников, Д.Н. Зейлигер). Заметные в Европе математические центры действовали в Варшаве (Д.Д. Мордухай-Болтовской, В.И. Романовский) (1) и Дерпте (Г.В. Колосов, В.Г. Алексеев, Л.С. Лейбензон). Активно разрабатывались новые математические направления в Одессе (С.О. Шатуновский, В.Ф. Каган). Началось завоевание математиками Сибири: математический центр возник в далеком Томске (Ф.Э. Молин, В.Л. Некрасов).

Разумеется, такое оживление научной жизни требовало и новых форм ее организации. К основанному еще в 1864 году Московскому математическому обществу, добавились Харьковское (1879), Казанское (1880) (2), Петербургское (1890) (3). Общества эти регулярно проводили заседания, вели издательскую деятельность (например, Московское математическое общество выпускало старейший русский математический журнал "Математический сборник", широкую известность в мире приобрели "Сообщения Харьковского математического общества").

Большую роль в становлении российского математического сообщества сыграли Всероссийские съезды естествоиспытателей и врачей, первый из которых прошел в 1868 году в Петербурге. Всего их состоялось 13: в обеих столицах, в Киеве, Казани, Варшаве, Одессе. Последний 13-й прошел в 1913 г. в Тифлисе. На каждом из этих съездов работала математическая секция [5] , собиравшая большое количество участников, среди которых и ведущие ученые, академики и профессора университетов (активное участие в них принимали П.Л. Чебышев, Н.В. Бугаев, С.В. Ковалевская), и учителя гимназий. Они-то и составляли большинство участников секции. Наряду с научными докладами и сообщениями на секции звучали доклады и велись жаркие дискуссии о преподавании математики в средней школе. Вопросы средней школы всегда живо интересовали российское математическое сообщество, включая его элиту. Особенно остро эти вопросы встали на пороге XX века. Стала ощущаться потребность в организации специальных съездов преподавателей математики. Первый такой съезд состоялся в Петербурге на стыке 1911 и 1912 годов, второй в Москве на стыке 1913 и 1914 годов. Съезды эти были многочисленны: в первом участвовало 1217, во втором 1200 человек. Среди них и ведущие ученые (К.А. Поссе, В.В. Бобынин, А.В. Васильев, Б.К. Млодзеевский, П.А. Некрасов, С.О. Шатуновский, Д.М. Синцов, В.Ф. Каган, Н.Н. Салтыков, Д.Д. Мордухай-Болтовской, С.Н. Бернштейн), и известные педагоги (А.П. Киселев, С.И. Шохор-Троцкий). Одним из основных вопросов этих съездов стала реформа среднего математического образования, живо обсуждавшаяся тогда в математическом мире. Для разработки ее принципов в 1908 году на Международном математическом конгрессе в Риме была создана Международная комиссия по преподаванию математики. Российские математики приняли деятельное участие в ее работе.

Вообще российские математики активно включились в развернувшееся на рубеже двух веков строительство международного математического сообщества. На международных математических конгрессах мы видим представительные российские делегации (среди вице-президентов Первого международного конгресса математиков, собравшегося в 1897 г. в Цюрихе – Н.В. Бугаев), русские ученые принимали участие во всех крупных международных проектах того времени.

В самой России основные направления деятельности математического сообщества определялась двумя ведущими математическими центрами страны, двумя столицами – Санкт-Петербургом с его Императорской Академией наук и Москвой с ее Математическим обществом. Другие математические центры исторически возникли как их ответвления (исключение составляла разве только Казань(4)) и находились под их большим влиянием. Петербургское же и Московское математические сообщества находились в состоянии устойчивой конфронтации, особенно обострившейся после смерти П.Л. Чебышева. Разница в идеологических настроениях, царивших в обеих сообществах (приверженность православию и монархии, склонность к идеалистической философии и к философствованию вообще, приведшие в итоге к образованию Московской философско-математической школы, с одной стороны, и антирелигиозность, позитивизм, антимонархизм и прозападная ориентация, с другой), связанные с ней различия во взглядах на математику и на приоритеты в ней привели к значительному отчуждению представителей обеих школ, зачастую перераставшему в открытые столкновения (по поводу результатов В.Г. Имшенецкого о дробно-рациональных интегралах линейных дифференциальных уравнений в 80-ых–начале 90-ых годах, в связи с результатами С.В. Ковалевской по задаче о движении тела вокруг одной неподвижной точки, между П.А. Некрасовым и А.А. Марковым по вопросам теории вероятностей). Конфронтация между математиками двух столиц породила напряжение, которое во многом определяло климат в российском математическом сообществе.

К 1917 году российская математика была готова к решительному рывку вперед.

Рывок этот обеспечивался значительными достижениями в области теории вероятностей (А.А. Марков, А.М. Ляпунов, С.Н. Бернштейн), математической физики (В.А. Стеклов, Н.М. Гюнтер), теории дифференциальных уравнений обыкновенных (А.М. Ляпунов) и с частными производными (Н.М. Гюнтер, С.Н. Бернштейн), конструктивной теории функций (А.А. Марков, С.Н. Бернштейн), теории чисел (А.А. Марков, Я.В. Успенский), наконец, теории функций действительного переменного (Д.Ф. Егоров, Н.Н. Лузин, Д.Е. Меньшов, М.Я. Суслин, А.Я. Хинчин, П.С. Александров). Для его осуществления в стране были замечательные научные школы и талантливая молодежь. Особенная творческая атмосфера сложилась в Москве, где вокруг Д.Ф. Егорова и Н.Н. Лузина образовалась быстро развивавшаяся школа – легендарная Лузитания (об этом см., например, [6]). Однако, в процесс этот грубо вмешалась история – в стране началась революция, переросшая в гражданскую войну. Эти события перевернули жизнь общества и нарушили нормальный ход научных исследований.

3. Математика и революция

Прекращение нормального функционирования институтов власти, бедственная ситуация с продовольствием и топливом поставили университетскую профессуру на грань выживания. Старые и больные быстро сошли в могилу. В 1918 году покончил жизнь самоубийством А.М. Ляпунов. В 1921 не стало Н.Е. Жуковского. Для более молодых и энергичных наступило время поиска хлеба насущного. Особенно тяжелая ситуация сложилась в обеих столицах. Н.Н. Лузин с учениками (Д.Е. Меньшовым, М.Я. Суслиным, А.Я. Хинчиным) перебрались в Иваново-Вознесенск, где в 1918 г. был организован Политехнический институт, петроградцы (Я.Д. Тамаркин, А.А. Фридман, А.С. Безикович, И.М. Виноградов) спасались в Перми, где в 1916 году был открыт филиал Петербургского университета, ставший в 1917 независимым университетом. Сложная ситуация сложилась на Украине. Однако, несмотря на все трудности, математическая жизнь в стране продолжалась – столь силен был импульс, данный математическим исследованиям в стране предшествующим ходом их развития. А.Я. Хинчин впоследствии писал [7]: "Может быть, в эти первые тяжелые годы революции математика, по чисто внешним причинам, оказалась поставленной в несколько особые условия, позволившие ей развиваться интенсивнее других точных наук: математику не нужно ни лабораторий, ни реактивов; бумага, карандаш и творческие силы – вот предпосылки его научной работы; а если к этому присоединить возможность пользоваться более или менее солидной библиотекой и некоторую долю научного энтузиазма (а это есть почти у каждого математика), то никакая разруха не может остановить его творческой работы. Недостаток текущей литературы в известной степени возмещался неустанным научным общением, которое в эти годы удалось организовать и поддерживать".

4. Восстановление нормального хода научной жизни в Москве

В 1921 году гражданская война закончилась и начала постепенно налаживаться мирная жизнь. Д.Ф. Егоров все время оставался в Москве, не давая угаснуть проявлениям математической жизни. В

1920 году в город вернулся Н.Н. Лузин и возобновились заседания его семинара, на которых вместе с преподавателями В.В. Степановым, П.С. Александровым и П.С. Урысоном принимали участие студенты Н.К. Бари, В.И. Гливенко, Л.Г. Шнирельман, затем к ним присоединился А.Н. Колмогоров, в конце 1921 года – М.А. Лаврентьев, в 1922 – Л.В. Келдыш, Е.А. Леонтович, П.С. Новиков и Г.А. Селиверстов. Вернулись в Москву и включились в работу "старики" – И.И. Привалов, Д.Е. Меньшов и А.Я. Хинчин.

Уже в начале 20-х годов в школе Егорова-Лузина отчетливо проявилась тенденция к расширению тематики исследований. Отправной точкой для работы в новых направлениях стали собственные разработки школы в области метрической теории функций, которая оказывала определяющее влияние и на используемые в новых областях методы.

Еще в годы революции сам Н.Н. Лузин и его ученики (И.И. Привалов, В.В. Голубев, Д.Е. Меньшов, А.Я. Хинчин) начали исследования в области теории функций комплексного переменного; в 1925 году к ним присоединился М.А. Лаврентьев, в свою очередь воспитавший такого ученика как М.В. Келдыш.

П.С. Урысон и П.С. Александров приступили к исследованиям, заложившим основы советской топологической школы. В 1925 году под руководством П.С. Александрова начал работать топологический семинар, из которого вышли такие знаменитые впоследствии математики как А.Н. Тихонов и Л.С. Понтрягин.

В 1923 году А.Я. Хинчин получил первые важные результаты по теории вероятностей. В конце 20-ых–начале 30-ых годов этими вопросами начал заниматься крупнейший русский математик XX века А.Н. Колмогоров, в 1933 году предложивший свою знаменитую аксиоматику теории – так начиналась знаменитая Московская школа теории вероятностей.

В те же годы А.Я. Хинчин приступил к исследованиям в области теории чисел. В 1925/26 учебном году он организовал семинар по теории чисел, в котором участвовали молодые тогда А.О. Гельфонд и Л.Г. Шнирельман.

В конце 20-ых–начале 30-ых годов Л.А. Люстерник, Л.Г. Шнирельман, эмигрировавший из Германии А.И. Плеснер и А.Н. Колмогоров заложили основы советской школы функционального анализа, из которой вышел один из крупнейших современных математиков И.М. Гельфанд.

В.В. Степанов вел работу в области теории дифференциальных уравнений. В конце 20-ых к нему присоединились молодые И.Г. Петровский и В.В. Немыцкий.

Д.Ф. Егоров и В.А. Костицын вели работу в области теории интегральных уравнений. Позднее к ним присоединился И.Г. Петровский.

И.И. Жегалкин, А.Н. Колмогоров и впоследствии П.С. Новиков занимались проблемами математической логики.

Если к этому добавить и такие традиционные для Москвы области исследований, как дифференциальная геометрия (Д.Ф. Егоров, С.П. Фиников), обогащенная трудами приехавшего из Одессы В.Ф. Кагана, прикладная математика (С.А. Чаплыгин), и завезенная из Киева учеником Д.А. Граве О.Ю. Шмидтом новая алгебра, к занятиям которой позднее присоединились А.Г. Курош и А.И. Мальцев, а также исследования приехавшего из Киева известного специалиста в области теории вероятностей и математической статистики Е.Е. Слуцкого, а также учесть значимость полученных москвичами в этих направлениях результатов, то можно сказать, что Москва к началу 30-ых годов превратилась в один из ведущих в мире математических центров.

На математиков Москвы, которая с 1918 года стала столицей Советского государства, легла ответственность за возрождение полнокровного математического сообщества во всей стране. Центрами математической деятельности в Москве выступали тогда Московский университет с образованным при нем в 1922 году Научно-исследовательским институтом математики и механики и Московское математическое общество. Для москвичей это не было чем-то абсолютно новым: роль организатора российского математического сообщества Москва взяла отчасти на себя еще в дореволюционное время, став своего рода противовесом сановному Санкт-Петербургу со снобистской Императорской академией наук. Москвичи, возглавляемые Д.Ф. Егоровым (он был тогда директором указанного Института и президентом Московского математического общества), приступили к исполнению этой роли. В 1924 году они возобновили издание "Математического сборника" теперь уже как общесоюзного математического журнала (5), начали работу по подготовке издания Полного собрания сочинений Н.И. Лобачевского, наконец, подготовили и в 1927 году провели Всероссийский математический съезд, который прошел чрезвычайно успешно и ознаменовал возрождение регулярной деятельности математического сообщества в масштабах всей страны – на нем было принято решение о проведении в 1930 году Первого всесоюзного съезда математиков в Харькове и создан оргкомитет для его подготовки.

5. Восстановление нормального хода научной жизни в Ленинграде и в других научных центрах СССР

Понемногу стабилизировалась ситуация и в Ленинграде, хотя поначалу она оказалась значительно более сложной чем в Москве. Перенос столицы в Москву резко изменил статус местного математического сообщества. Положение же Академии наук в государстве некоторое время было неопределенным (высказывались даже предложения о ее закрытии, как учреждения, связанного со свергнутой монархией). Ряд математиков (Я.В. Успенский, Я.Д. Тамаркин, Я.А. Шохат, А.С. Безикович) эмигрировал на Запад. Однако к середине 20-ых годов положение Академии и ситуация в ленинградском математическом сообществе начали меняться к лучшему. Существенную роль начал играть созданный в рамках Академии в 1921 году под руководством В.А. Стеклова Физико-математический институт, из которого позднее выделился Математический институт им. В.А. Стеклова. Этот институт и университет стали учреждениями, вокруг которых формировалось ленинградское математическое сообщество. Наиболее важными направлениями исследований ленинградских математиков стали: математическая физика (В.А. Стеклов, Н.М. Гюнтер, В.И. Смирнов), теория дифференциальных уравнений обыкновенных (А.Н. Крылов, В.И. Смирнов, И.А. Лаппо-Данилевский) и с частными производными (В.А. Стеклов, Н.М. Гюнтер), теория чисел (И.И. Иванов, Б.Н. Делоне, И.М. Виноградов, Р.О. Кузьмин, Б.А. Венков).

Подъем математических исследований в 20-е годы мы наблюдаем и на Украине – в Киеве, Харькове и Одессе. Существенную роль здесь играла созданная в 1918 году Всеукраинская академия наук в Киеве. Выдающиеся работы по теории дифференциальных уравнений, конструктивной теории функций и теории вероятностей продолжал публиковать С.Н. Бернштейн. Успешно работали ученики Д.А. Граве (М.Ф. Кравчук, Н.И. Ахиезер, М.Г. Крейн). Делала свои первые шаги школа по нелинейным колебаниям Н.М. Крылова-Н.Н. Боголюбова. Продолжал свои геометрические исследования Д.М. Синцов.

Из других математических центров страны назовем Казань, где успешно развивались исследования по геометрии и куда в 1928 году переехал из Одессы выдающийся алгебраист Н.Г. Чеботарев. Новым пунктом на математической карте страны стал Тифлис (Г.Н. Николадзе, А.М. Размадзе, Н.И. Мусхелишвили), где в 1918 году был открыт университет.

Этот общий подъем математических исследований в СССР стал следствием целого ряда факторов как внутринаучных (важнейший из которых – высокий уровень развития математики, достигнутый в стране в начале XX века), так и социальных. Новая власть, идеологией которой стал марксизм, высоко ставила науку и образование, понимаемых, правда, в специфическом марксистском духе. При этом и наука, и образование должны были быть перестроены на марксистском фундаменте. К тому же новое государство, оказавшееся во враждебном окружении (мировая революция, которую вначале ожидали в ближайшее время, отодвигалась в неопределенное будущее), должно было заботиться о своей обороне. Следовательно, большое значение приобретали научные разработки, обеспечивавшие технический прогресс. В их числе разработки математические. Поэтому после первых лет, потраченных на ведение гражданской войны и борьбу с интервенцией, советская власть начала выстраивать свою политику в области науки и образования. Снятие сословных и национальных барьеров привело к притоку в высшую школу и затем в науку молодежи, прежде всего молодежи еврейской, которой при старом режиме доступ туда был максимально затруднен.

Однако, это было одной стороной медали. Другой стала новая советская практика, основывающаяся на классовом подходе как в оценке текущих событий, так и выстраивании политики в области народного образования и науки. В высшую школу не должны были допускаться выходцы из эксплуататорских классов. От ученых и преподавателей вузов требовалась перестройка всей деятельности на базе марксистского учения. Отсюда практика чисток в вузах и оголтелые кампании против ученых и педагогов, объявленных буржуазными или монархическими. Примерами таких кампаний в математике могут служить борьба на "Ленинградском математическом фронте" [9], преследование "егоровщины" [10], "дело академика Н.Н. Лузина" [11].

6. Рождение Советской математической школы

Процесс дальнейшего развития математических исследований в стране мог пойти далее разными путями. Тот путь, которым ему суждено было последовать, был определен внешними обстоятельствами – планами И.В. Сталина строительства Советской науки. Согласно этим планам, головной ее организацией ("штабом Советской науки") должна была стать Академия наук СССР. Это положение закреплялось новым уставом Академии, принятым в 1927 году. Основной задачей Академии провозглашалась задача социалистического строительства. В состав реформируемой Академии включался ряд членов партии. Один из них, избранный в 1929 году "старый большевик" Г.М. Кржижановский, стал ее вице-президентом. Ему и было вменено в обязанность надзирать за Академией. Разумеется, "штаб Советской науки" должен был находиться у вождя "под рукой". Поэтому в 1934 году президиум Академии был переведен в Москву. Следом были переведены и ряд ведущих институтов. Среди них – Математический институт им. В.А. Стеклова. В Москву переехали С.Н. Бернштейн, Б.Н. Делоне, И.М. Виноградов, Н.Е. Кочин, С.Л. Соболев.

В результате две ведущие национальные школы – Московская и Петербургская-Ленинградская – оказались в одном городе. Волею вождя находившиеся в конфронтации школы были вынуждены жить вместе. Итог такого "общежития" оказался чрезвычайно плодотворным. Произошел синтез двух, хотя и имевших общие источники, но в то же время идеологически различных школ. Произошел синтез традиции петербургской школы математической физики (С.Л. Соболев) и московской, восходящей к К.М. Петерсону традиции исследований в области теории дифференциальных уравнений с частными производными (И.Г. Петровский), московского (А.Н. Колмогоров, А.И. Плеснер) и ленинградского (С.Л. Соболев) направлений в функциональном анализе, чебышевской линии развития теории вероятностей, наследником которой выступал С.Н. Бернштейн, с московской, выросшей в недрах метрической теории функций (А.Я. Хинчин, А.Н. Колмогоров), встретились две линии развития теории чисел – чебышевская (И.М. Виноградов) и новая московская (А.Я. Хинчин, А.О. Гельфонд, Л.Г. Шнирельман), две линии развития алгебраических исследований, восходящих к киевской школе Д.А. Граве – московская (О.Ю. Шмидт, А.Г. Курош) и ленинградская (Б.Н. Делоне). Возник мощнейший исследовательский потенциал, объединенный вокруг Математического института им. В.А. Стеклова, механико-математического факультета МГУ и Московского математического общества.

Так в середине 30-ых годов родилась Советская математическая школа – одна из наиболее влиятельных в XX веке.

7. Заключение

Советской математической школе предстояла еще долгая и непростая жизнь. В конце 30-ых годов начал опускаться железный занавес, и на протяжении многих лет ее развитие проходило в относительной изоляции. Но ее внутренний потенциал оказался настолько велик, что она и в этой ситуации продолжала успешно развиваться. Из тяжелых лет войны, принесших стране, а, следовательно, и ее науке неисчислимые потери, она вышла чрезвычайно расширив географию – новые математические центры появились на востоке Европейской части страны, в Сибири, Средней Азии и в Закавказье. Подлинным ее триумфом стал Международный математический конгресс 1966 году, прошедший в Москве и ставший самым представительным за весь XX век. На этом конгрессе Советская математическая школа продемонстрировала как широту тематического охвата поля математических исследований, так и силу и глубину своих результатов.

Примечания

1. Варшавский университет был основан в 1869 году. С приближением к Варшаве театра военных действий Первой мировой войны он был эвакуирован в Ростов-на-Дону и так там и остался.
2. Оно было организовано вначале как физико-математическая секция Казанского общества естествоиспытателей. В 1890 году секция была преобразована в самостоятельное физико-математическое общество.
3. Работало до 1905 года. В 20-е годы в Ленинграде А.В. Васильевым была сделана попытка организации физико-математического общества, которое просуществовало несколько лет. Полноценное математическое общество возродилось в Ленинграде лишь в 1959 году.
4. Дерпт или, как он тогда стал именоваться, Юрьев после известных правительственных действий по русификации края потерял свою пронемецкую ориентацию и в математическом отношении стал продолжением Москвы и Петербурга.
5. И даже международного – в возобновленном "Математическом сборнике" можно было печатать статьи не только по-русски, но также на французском, немецком, итальянском и английском языках. В журнале стали активно печататься зарубежные авторы. Среди них мы видим Э. Картана, М. Фреше, Б. Гамбье, Ж. Адамара, Х. Хопфа, С. Лефшеца, Р. Мизеса, Э. Нетер, В. Серпинского, Л. Тонелли [8].
6. Вот как об этом вспоминал один из наиболее видных участников событий Б.Н. Делоне [12. С. 129]: "И вот между школой Эйлера-Чебышева петербургской и школой Лузина московской – собственно, французской, парижской все время был такой антагонизм, что те этих не понимали, эти – тех ". Здесь я прерву цитату и замечу, что называть школу Лузина французской – это

большая передержка. Во-первых, у ее истоков кроме Н.Н. Лузина стоял Д.Ф. Егоров, которого к французской школе уж никак не отнесешь. Во-вторых, при всем громадном влиянии французской школы теории функций А. Лебега-Э. Бореля-Р. Бэра на москвичей она имела собственные московские корни в Московской философско-математической школе, что не раз ставили ей в укоры математики-марксисты. И антагонизм двух школ имеет давнее происхождение (об этом см. [13]). Продолжу цитату: "... эти – тех, пока Академию не перевели в Москву. Когда в тридцать четвертом или тридцать пятом, в начале, перевели Академию в Москву, мы начали сближаться, и вот из этого сближения обеих школ и получилось, ну, вот то, что мы сейчас называем советская математика".

Библиографический список

1. *Демидов С.С., Ормигон М.* (Ред.) Историко-математические исследования. 2-я серия. Специальный выпуск. Москва. 1997.
2. *Demidov S.S.* L'histoire des mathématiques en Russie et en U.R.S.S. en tant qu'histoire des écoles. В кн. [1. P. 9–21].
3. *Боголюбов Н.Н.* Успехи советской математической школы // Вестник Академии наук СССР. 1966. № 7. С. 37–42.
4. *Боголюбов Н.Н., Мергелян С.Н.* Советская математическая школа. Москва: Знание, 1967.
5. *Киро С.Н.* Математика на съездах русских естествоиспытателей и врачей // Историко-математические исследования. 1958. Вып. 11. С. 133–158.
6. *Zdravkovska S., Duren P.* (Eds.) Golden Years of Moscow Mathematics. Providence, Rhode Island: Ed. AMS. 1993.
7. *Хинчин А.Я.* Математика // Десять лет Советской науке. Под ред. Ф.Н. Петрова. М.-Л., 1927.
8. *Demidov S.S.* La revue "Matematicheskii Sbornik" dans les annees 1866–1935. In: E. Ausejo, M. Hormigon (Eds.) Messengers of Mathematics: European Mathematical Journals (1800–1946). Zaragoza, 1993. P. 235–256.

9. *Ермолаева Н.С.* О так называемом “Ленинградском математическом фронте” // Труды Санкт-Петербургского математического общества. 1998. Т. 5. С. 380–394.
10. *Демидов С.С.* Профессор Московского университета Д.Ф. Егоров и имеславие в России в первой трети XX века // Историко-математические исследования. 1999. 2-я серия. Вып. 4 (39). С. 123–155.
11. *Демидов С.С., Левшин Б.В.* (Ред.) Дело академика Николая Николаевича Лузина. СПб.: РХГИ, 1999.
12. Математики рассказывают. М.: Минувшее, 2005.
13. *Demidov S.S.* N.V. Bougaiev et la création de l’Ecole de Moscou de la théorie des fonctions d‘une variable réele. In: M. Folkerts, U. Lindgren. (Eds.) Mathemata. Festschrift für Helmut Gericke, 1985. S. 651–673.

Возможности использования различных видов мышления в школьном математическом образовании

В.А. Гусев, В.М. Шевченко

Говоря о мышлении, следует рассмотреть наиболее важные *виды мышления*, которые выделены в психологии, и с которыми мы постоянно имеем дело при обучении математике.

В книге С.Л. Рубинштейна “Основы общей психологии” мы читаем: “Мышление человека включает в себя мыслительные операции различных *видов* и уровней... Специфические особенности различных видов мышления обусловлены у разных людей, прежде всего специфичностью задач, которые им приходится разрешать; они связаны также с индивидуальными особенностями, которые у них складываются в зависимости от характера их деятельности. В психологии распространена следующая простейшая и несколько условная классификация видов мышления: *наглядно-действенное, наглядно-образное* и *словесно-логическое (теоретическое)* мышление” [12. С. 334].

Охарактеризуем отдельно каждый из данных видов мышления. В.П. Зинченко и Н.Ю. Вергилес о ***наглядно-действенном*** мышлении пишут следующее: “При наглядно-действенном мышлении формируются такие мыслительные операции, как постановка цели, анализ данных условий, соотнесение результатов преобразований с поставленными целями и т.п. Его основная особенность заключается в том, что объектом непосредственных мысленных преобразований служит реальная ситуация. Эта форма мышления является основной и первой ступенью для развития других форм мыслительной деятельности” [4. С. 470].

Наглядно-действенное мышление рассматривается чаще всего как наиболее характерный тип мыслительной деятельности у детей дошкольного и младшего школьного возраста. Отметим при этом, что на ряду с наглядно-действенным, в этот период развиваются и другие виды мышления.

Вот что по этому поводу пишет Б.А. Сосновский: “...наглядно-действенное мышление может иметь место только в том случае, если ребенок непосредственно воспринимает предмет и совершает с ним практические действия. Решение задачи происходит на основе реального преобразования ситуации или предмета”.

Можно выделить следующие основные характеристики наглядно-действенного мышления:

1) основой для процесса формирования наглядно-действенного мышления служит реальная ситуация; этот вид мышления формируется в процессе реального преобразования ситуаций или предметов,

2) в процессе наглядно-действенного мышления учащиеся непосредственно воспринимает предмет и совершает с ним практические действия,

3) при формировании наглядно-действенного мышления основные приемы мыслительной деятельности (анализ, синтез, сравнение, обобщение) осуществляются как практические действия.

За последние годы накоплен существенный опыт развития наглядно-действенного мышления при изучении геометрического материала в начальной школе. В книге “Методика обучения геометрии” [6] описан такой опыт, накопленный Н.С. Подходовой в

Санкт-Петербурге, а так же В.А. Панчищиной в Томске. Вместе с тем, предстоит сделать очень много, чтобы понять суть наглядно-действенного мышления и организовать его формирование и использование на уроках математики. В этом процессе, например, при изучении геометрии чрезвычайно важно сформировать у учащихся зрительные образы основных геометрических фигур и дать им первые представления об их изображении.

Перейдем к рассмотрению ***наглядно-образного*** вида мышления. А.Б. Сосновский разграничивает первый и второй вид мышления следующим образом: "В отличие от наглядно-действенного мышления человек оперирует не самим предметом, а элементами его образа, которые могут быть представлены в виде рисунка, схемы, модели или внутреннего психического образа объекта. Поиск неизвестного осуществляется через выявление скрытых свойств, связей и возможных преобразований элементов образа объекта. Теперь, чтобы сложить самолет из отдельных частей, ребенку не обязательно манипулировать с ними. Он может сделать это, рассматривая рисунок конечной фазы или опираясь на динамическую картину последовательных преобразований своих представлений о желаемой цели" [9. С. 212].

О.К. Тихомиров отмечает: "...наглядно-образное мышление играет важную роль в формировании у детей понимания процессов изменения и развития предметов и явлений" [13. С. 9].

Имеется также большое количество исследований, посвященных наглядно-образному мышлению у И.С. Якиманской: "Поскольку образное мышление рассматривалось в педагогической психологии в основном лишь в генетическом плане – как определенная стадия развития мышления, – это привело к недооценке самостоятельной роли этой формы мышления в умственном развитии учащихся. Не учитывалось, что образное мышление само развивается, что оно является равноценной формой интеллектуальной деятельности, имеет довольно сложные формы проявления и разнообразные функции" [16. С. 14].

А. Пуанкаре, анализируя особенности образного мышления, подчеркивал, что оно является наиболее существенным свойством человеческого мышления вообще. В частности, "...способность действовать в соответствии с представлением, умение свободно оперировать образами рассматривается как одно из профессионально важных качеств, необходимых для овладения и успешного осуществления самых разнообразных видов деятельности" [10. С. 112].

Не зря в течение последних лет именно наглядно-образное мышление закалывается в основу изучения школьного курса геометрии, в то время как в течение предыдущих десятилетий были попытки вывести на первое место элементы логического мышления в отрыве от образного.

Все сказанное необходимо осмыслить для применения, например, в преподавании геометрии, черчения, рисования. Ясно одно, что чертежу (рисунку) необходимо уделить больше внимания, чертежи должны быть большие и красивые, выполненные по специальным правилам. Так, в учебниках геометрии В.А. Гусева [1, 2] чертежи даются исключительно в динамике, все проводимые построения никогда не выполняются на одном чертеже. Уже этот простой подход дает большой положительный эффект в восприятии и усвоении учебного материала.

И.С. Якиманская пишет: "Систематизация исследований в данной области позволяет выделить *четыре этапа* функционирования образного мышления: 1) *создание первичного образа* (на основе некоторого наглядного материала), 2) *создание вторичного образа* по памяти, 3) *оперирование образами* и 4) *творческое создание новых образов*" [15. С. 12].

В соответствии с исследованиями И.С. Якиманской, опишем четыре этапа наглядно-образного мышления.

"*Создание первичного образа* на уровне чувственного восприятия не является просто "мысленным фотографированием" реального объекта, "абсолютным" отражением его свойств. В образе закрепляются те признаки объекта, которые воспринимающий субъект считает (сознательно или неосознанно) самыми важными...

...На следующем этапе образного мышления происходит *создание вторичного образа.* Как правило, оно осуществляется по памяти (при отсутствии реального объекта восприятия или при сознательном отказе от его использования в качестве наглядной опоры)... В результате вторичный образ отражает признаки уже целого класса объектов, т.е., по существу, приближается к понятию...

...На третьем этапе *оперирования образами* происходит активное преобразование созданных или воспроизведенных по памяти образов. Направление и способы этих преобразований задаются проблемной ситуацией (требованиями задачи) и личными установками воспринимающего субъекта... Это означает, что на этом этапе речь не идет о создании новых образов – они все те же, только меняются комбинации составляющих их элементов...

...На этапе *создания новых образов* мысленное оперирование образами может стать как бы "самоцелью". Образы преобразуются под влиянием некоторых ассоциаций, аналогий и т.п. В результате рождаются новые образы, обладающие часто совершенно неожиданными качествами. В этом случае можно говорить об образном воображении" [15. С. 12–14].

Итак, мы рассмотрели обширный материал о двух видах мышления – наглядно-действенном и наглядно образном для того, чтобы понять сущность и важность этих видов мыслительной деятельности в процессе математического образования. Приведем некоторые примеры, связанные с использованием этих видов мышления при обучении геометрии в школе.

Прежде всего, отметим, что во-первых, очень трудно провести четкие границы между наглядно-действенным и наглядно-образным мышлением, а во-вторых, нелегко разграничить этапы функционирования самого наглядно-образного мышления, указанные выше. Совершенно ясно, что при наглядно-действенном мышлении и на первых этапах формирования наглядно-образного мышления, у учащихся должны сложиться наглядные представления о различных геометрических фигурах, а так же умения выполнять простейшие чертежи, на которых эти фигуры будут изображаться.

Не так давно, анализируя систему обычных учебных задач при изучении курса геометрии в основной школе, пришлось констатировать тот факт, что в подавляющем большинстве существующих учебников по геометрии основные понятия формируются плохо. Так, например, иногда система задач по этой теме начинается с задач о свойствах средней линии трапеции, что конечно, довольно странно. Безусловно, у ученика прежде всего должен быть сформирован *образ трапеции*. Причем, практика показывает, что ученик должен представлять, по крайней мере, два вида трапеции: "высокую" (рис. 1 а) и "длинную" (рис. 1 б).

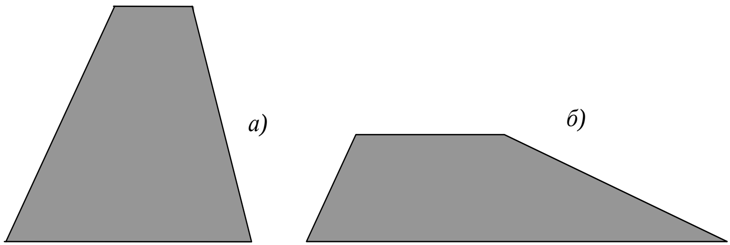


Рис. 1

Если образы этих видов трапеции у ученика не сформированы, то возникают трудности при решении, например задач такого вида: "В трапеции проведена биссектриса одного из ее углов..." Причем, в условии задачи не обсуждается вопрос о том, какую из сторон трапеции пересекает эта биссектриса. А ведь в случае, изображенном на рис. 1 а), она пересечет боковую сторону трапеции (рис. 2 а), а в случае, изображенном на рис. 1 б), биссектриса пересечет верхнее основание трапеции (рис. 2 б).

Кроме этого, уже применяя анализ, мы приходим к третьему случаю – когда биссектриса совпадает с диагональю трапеции (рис. 2 в). В геометрии имеется большое число задач на этот случай.

Представляется, что это убедительный пример удачного использования наглядного образа при изучении свойств основных геометрических фигур.

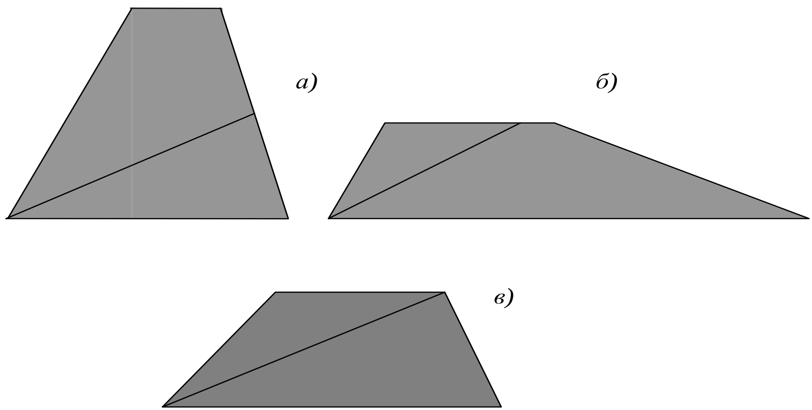


Рис. 2

Приведем примеры, когда в школьном курсе геометрии довольно рано необходимо формировать “*новые образы*”, например, скрещивающихся прямых или трехгранного угла.

Существует метод, позволяющий в ряде случаев преодолеть трудности, связанные с недостаточно развитым геометрическим воображением учащихся. Он состоит в следующем: если пространственная конфигурация трудно воспринимается и не связана с конкретным геометрическим телом, то следует ее связать с каким-нибудь вспомогательным телом, например с кубом.

На рис. 3 а хорошо видно, что прямые l и mявляются скрещивающимися. Убрали куб (рис. 3 б), и пространственная наглядность исчезла – мы видим пересекающиеся прямые l и m на плоскости.

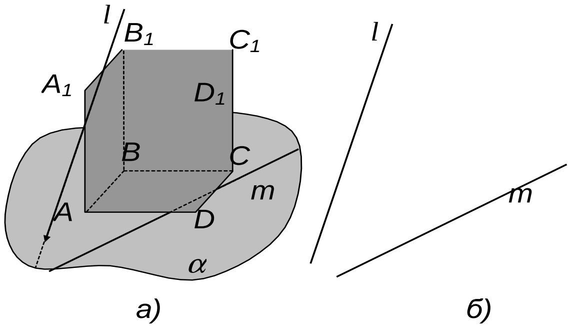


Рис. 3

Другой пример. Три луча l, mи n, выходят из одной вершины A_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 4 а). Ясно, что они представляют собой ребра трехгранного угла. На рис. 4 б куба нет, поэтому картина стала плоской. Чтобы увидеть на ней тот же трехгранный угол, мы должны заставить свое воображение трудиться.

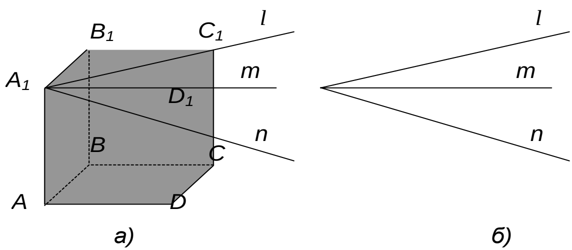


Рис. 4

Приведенные примеры полезно рассматривать в обратном порядке. Можно нарисовать рис. 3 б и 4 б и спросить: какие фигуры изображены на этих рисунках и какими свойствами они обладают? Можно себе представить радость ученика, если он сам или с помощью учителя догадается рассмотреть “*вспомогательный куб*” и получить рис. 3 а и 4 а.

Необходимо продолжать исследования проблем, связанных с развитием у учащихся наглядно-действеннного и наглядно-образного видов мышления при обучении геометрии, так как от этого во многом зависит успех геометрического образования в целом.

Перейдем к рассмотрению третьего вида мышления – ***словесно-логического*** *(теоретического).* Б.А. Сосновский по этому поводу пишет следующее: "Данный вид мышления характеризуется еще более глубоким отрывом мышления от реального объекта. Человек начинает оперировать понятиями и логическими конструкциями, функционирующими на базе языка. Он овладевает основными логическими операциями мышления, которые становятся его внутренними мыслительными операциями. К ним относятся анализ, синтез, сравнение, обобщение, абстрагирование, конкретизация" [9. С. 212].

Парадокс заключается в том, что если по наглядно-действенному и наглядно-образному видам мышления все же имеются довольно убедительные исследования, то по поводу словесно-логического мышления, которое пронизывает все обучение математике в школе и вузе, чрезвычайно мало исследований, которые бы могли дать практические рекомендации при обучении математике.

Необходимо тщательно исследовать возможности формирования словесно-логического мышления при изучении математики на разных этапах изучения курса, в разных аспектах его дифференцированного изучения.

Можно привести еще одну классификацию видов мышления, которая довольно близка к приведенной выше. Это классификация Ж. Пиаже, в основании которой лежат возрастные рамки и возрастные особенности учащихся.

Ж. Пиаже выделяет следующие стадии развития мышления:

"1) *сенсомоторное мышление* (до 2-х лет);

2) *дооперационное* (до 7 лет);

3) *конкретные операции* или *операционные группировки* (до 12 лет);

4) *формальные операции* или *формальное мышление* (до 16 лет)" [7. С. 205].

Мы видим, что предложенная классификация Пиаже, с одной стороны, довольно похожа на предложенную выше, а с другой стороны, напрямую связана с возрастными особенностями. Кроме того, Ж. Пиаже и его сторонники накопили интересный материал о развитии мышления (интеллекта) на первых годах жизни ребенка: 20% интеллекта ребенок приобретает к концу первого года жизни, 50% к четырем годам, 80% к восьми годам, 92% закладывается до 13 лет. Это доказывает, что уже в этом возрасте возможна высокая предсказуемость будущих достижений человека, его индивидуальных особенностей.

Психолог Я.А. Пономарев [8. С. 42] считал, что пик интеллектуального развития достигается уже в 12 лет, но его нельзя смешивать с пиком творческой продуктивности, который наступает много позже, так как высокая продуктивность невозможна без большого багажа знаний, жизненного опыта, целеустремленности и ряда других качеств, которыми еще не обладает подросток.

Из всего сказанного ясно одно: мышление формируется и развивается очень рано. Нам представляется, что мы полностью не оценили этой ситуации, в частности, обучение математике в начальной школе должно включать в себя не какой-либо дополнительный материал, не соответствующий возрастным особенностям учащихся, а должно обязательно содержать материал, который формирует и развивает мыслительную деятельность учащихся. Мы не призываем к увеличению объема изучаемого материала, а считаем необходимым создание соответствующей системы задач и технологии обучения.

Помимо видов мышления, рассмотренных выше, в психологии выделяют: интуитивное, теоретическое, практическое, критическое, творческое, дивергентное, конвергентное и другие виды мышления. Материал по этим видам мышления часто очень противоречив и иногда плохо согласуется с процессом математического образования.

Рассмотрим более подробно ***творческое мышление***, т.к. именно оно самым непосредственным образом связано с процессом математической деятельности.

Характеризуя творческое мышление, Б.А. Сосновский отмечает: “Существует подход, при котором критерием творческого мышления считается создание человеком новых продуктов, обладающих общественной значимостью (объективная новизна). Если с этим согласиться, то подавляющая часть людей окажется в группе “нетворческих”. Более правомерно рассматривать новизну результата по отношению к самому мыслящему человеку (субъективная новизна). Но и этот критерий не отражает всех аспектов творческого мышления, так как не касается особенностей процесса мышления” [9. С. 215].

Безусловно, творческая деятельность, творческое мышление играют огромную роль в различных аспектах математического образования. В этом направлении большой интерес представляют исследования польского математика и педагога М. Клякля: “С одной стороны на математику можно смотреть как на некие “готовые знания”, которые проявляются как набор теорий, понятий, теорем и их доказательств, примеров, алгоритмов и т.п... Читая такие исследования, мы часто увлекаемся красотой, сжатостью, простотой логической конструкции этого “готового здания математических знаний”.

Иногда, к сожалению, именно только такие знания, такая “готовая математика” преподается в школе для заучивания наизусть...

Но у математики есть и другое воплощение, другой облик когда эта наука понимается как некая тонкая, специфическая интеллектуальная деятельность, результатом которой и является “готовая математика”.

По крайней мере, эти два воплощения математики надо уметь различать, если мы хотим охарактеризовать творческое мышление в области математики” [5. С. 34].

В заключение приведем выделенные М. Клякля виды творческой математической деятельности, т.к. на наш взгляд, они создают наиболее полную и ясную картину творческого вида мышления, о котором, как это ни странно, математики говорят очень мало.

1) К первому виду творческой математической деятельности М. Клякля относит *выдвижение гипотез* и *их проверку*: “Самой важной характеристикой творческой математической деятельности, связанной с выдвижением гипотез, является понимание учениками того, что разнообразные эмпирические действия такие, как, например, вычисления или использование рисунков, конкретных моделей или рассуждений по аналогии, могут давать право лишь на выдвижение гипотез. Развитие такого понимания требует созда-

ния таких ситуаций, чтобы в момент, когда учащиеся убеждены в том, что все происходит "несомненно так, как видно", оказалось бы, что это не так. Именно такие ситуации порождают некую осторожность и ведут к образованию подхода, свойственного математикам: пока у меня нет доказательства, я могу выдвинуть только гипотезу" [5. С. 53].

2) Существенную роль в творческой математической деятельности играет *творческое восприятие, переработка и использование информации.* "Творческое восприятие информации заключается в отборе среди многих, одновременно воспринимаемых факторов, такого их множества, которое дает возможность их преобразования в новую информацию, которая становится элементом знаний нового качества. В свою очередь нестандартное использование приобретенных знаний, например в других, новых задачах, является также характерным свойством для каждого творчества, в особенности математического" [5. С. 55].

3) К третьему виду творческой математической деятельности М. Клякля относит *перенос (трансферт) метода:* "Исходной точкой третьего вида творческой математической деятельности является некоторая проблемная задача. Учащиеся сами или с помощью учителя находят ее решение, которое опирается на какую-то новую идею. Анализ этой идеи позволяет выделить из нее основу, отбрасывая несущественные обстоятельства. Это ведет к осознанию учащимися целого класса задач, для решения которых можно применить полученную идею решения. Для этого класса задач исходный замысел (идея) является надежным методом их решения. Полученный таким образом метод действия можно попытаться применить в других ситуациях, вводя необходимые существенные модификации в предложенный метод. Эти задачи могут быть более общими или только похожими на исходную проблему. Это могут быть также частные или предельные случаи.

В геометрических задачах применение этого вида творческой математической деятельности часто сводится к повышению (или понижению) размерности (например, переход из плоскости в пространство)" [5. С. 56].

4) Последним, но очень важным видом творческой математиче-

ской деятельности учащихся является *дисциплина и критичность мышления.* "...она направлена на преодоление конфликта между требованиями формального мышления и другими его аспектами, например, интуицией, внушением, моделью или частным случаем, которые мы используем в рассуждениях. Особенно этот вид творческой математической деятельности проявляется в ситуации, когда в рассуждениях (например, в доказательствах) надо пользоваться новыми для учащихся определениями, активно реагировать на появляющиеся противоречия, контролировать свои либо чужие рассуждения, как с логической, так и с математической точек зрения" [5. С. 56].

О.К. Тихомиров показал, что спецификой творческого мышления является "...самостоятельное формирование личностью по ходу мыслительной деятельности новых целей, гипотез, планов, оценок и других *новообразований.* Под их влиянием исходная цель, сформулированная в вопросе, многократно преобразуется в соответствии с результатами анализа условий задачи. Поиск идет в различных направлениях. Такое мышление именуется дивергентным, в противоположность конвергентному, когда человек ограничивается одним вариантом решения" [13. С 23].

В своем высказывании О.К. Тихомиров говорит о двух, очень важных видах мышления: дивергентном и конвергентном. Следует отметить, что исследованию этих типов мышления посвящено большое количество работ зарубежных психологов. Вот, что по этому поводу написано в "Большом толковом психологическом словаре" А. Ребера: "*...дивергентное мышление ...* характеризуется процессом "движения в разных направлениях", расхождением идей с тем, чтобы охватить различные аспекты, имеющие отношение к данной проблеме. Такое мышление часто связано с творчеством, так как оно нередко дает новые идеи и решения...

...Конвергентное мышление ... характеризуется сведением вместе или синтезом информации и знаний, сосредоточением на решении проблемы. Такое мышление часто связано с решением задач, особенно с проблемами, которые имеют только одно правильное решение" [11. С. 469].

Сформулируем для полноты картины еще одну точку зрения

Дж. Гилфорда: "Дивергентное мышление – процесс создания оригинальных и необычных идей с помощью многовариативного поиска решения проблемы" [17. С. 34].

Представленное краткое описание самой сущности творческого мышления и его разновидностей – дивергентного и конвергентного мышления показывают, что эти виды мышления, а особенно их применение чрезвычайно характерны практически для всех видов математической деятельности.

В книге "Психолого-педагогические основы обучения математике" написано, что "...формирование дивергентного мышления не идет само собой, тем более что "командный стиль обучения", который преобладал (да и преобладает еще) в системе математического образования, вовсе не способствует развитию такого мышления. Этим вопросом следует специально заниматься" [3. С. 50].

Библиографический список

1. *Гусев В.А.* Геометрия. 5–6 классы: Учебное пособие. М.: Русское слово, 2002. 256 с.
2. *Гусев В.А.* Геометрия. 7 класс. М.: Русское слово, 2003. 240 с.
3. *Гусев В.А.* Психолого-педагогические основы обучения математике. М.: Вербум-М, 2003. 432 с.
4. *Зинченко В.П., Вергилес Н.Ю.* Формирование зрительного образа. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1969. 106 с.
5. *Клякля М.* Формирование творческой математической деятельности учащихся в классах с углубленным изучением математики в школах Польши. Плоцк: Риттер, 2003. 223 с.
6. Методика обучения геометрии: Учеб. Пособие для студ. высш. пед. учеб. заведений / В.А. Гусев, В.В. Орлов, В.А. Панчищина и др. / Под ред. В.А. Гусева. М.: Академия, 2004. 368 с.
7. *Пиаже Ж.* Избранные психологические труды. М.: Просвещение, 1969. 659 с.
8. *Пономарев А.Я.* Психология творчества и педагогика. М.: Педагогика, 1976.

9. Психология: Учебник для педагогических вузов / Под ред. Б.А. Сосновского. М.: Юрайт-Издат, 2005. 660 с.
10. *Пуанкаре А.* О науке. М.: Наука, 1990. 735 с.
11. *Ребер А.* Большой толковый психологический словарь: В 2 т. М.: АСТ, 2003. Т.1. 591 с.
12. *Рубинштейн С.Л.* Основы общей психологии. СПб.: Питер Ком, 1999. 720 с.
13. *Тихомиров О.К.* Психология мышления. М.: Академия, 2002. 288 с.
14. *Хинчин А.Я.* Педагогические статьи. М.: Изд-во АПН РСФСР, 1963. 204 с.
15. *Якиманская И.С.* Возрастные и индивидуальные особенности образного мышления. М.: Педагогика, 1989. 221 с.
16. *Якиманская И.С.* Образное мышление и его место в обучении // Советская педагогика, 1968. № 12. С. 62–71.
17. *Guilford J.* The Nature of Human Intelligence. New York: Gray Hill, 1968. 284 p.

Глава 2

Математика в ее многообразии

Однородные супермногообразия над грассманианом $\mathrm{Gr}_{4,2}$ [1]

А.Л. Онищик

Введение

В работе рассматривается следующая задача: для заданного комплексного флагового многообразия $M = G/P$, где G – полупростая комплексная группа Ли и P – ее параболическая подгруппа, описать с точностью до изоморфизма все однородные комплексные супермногообразия $(M, \mathcal{O})$, имеющие M в качестве своей редукции. Эта задача была поставлена Ю.И. Маниным в книге [4] в случае, когда $M = \mathrm{Gr}_{4,2}$ – грассманиан 2-плоскостей в $\mathbb{C}^4$. Мы также изучаем здесь только этот частный случай.

Мы решаем задачу при существенных ограничениях на представление φ подгруппы P, определяющее ретракт супермногообразия $(M, \mathcal{O})$. В расщепимом случае (т.е. в случае, когда $(M, \mathcal{O})$ изоморфно своему ретракту) решение дается для всех вполне приводимых представлений φ (см. теорему 4), а в нерасщепимом случае предполагается, что φ неприводимо. Мы доказываем (см. теорему 6), что при этом предположении существует лишь одно нерасщепимое однородное комплексное супермногообразие с редукцией $\mathrm{Gr}_{4,2}$ – это так называемый П-симметрический суперграссманиан $\Pi\,\mathrm{Gr}_{4|4,2|2}$, построенный в [4]. Наши методы применимы также в случае, когда φ вполне приводимо, но нуждаются в существенной модификации, если это условие не выполняется. Примеры, приведенные в [4], показывают, что задача обладает решениями такого типа. Мы надеемся позже вернуться к изучению этого вопроса.

---

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 04-01-00647), а также гранта НШ-1910.2003.1.

Для других флаговых многообразий задача изучалась при более сильных ограничениях, например, когда фиксируется не только M, но и ретракт искомых супермногообразий $(M, \mathcal{O})$, или когда нечетная часть m размерности $n|m = \dim(M, \mathcal{O})$ не превышает заданного числа (обзор некоторых результатов и публикаций см. в [9]). Упомянем здесь только классификацию всех супермногообразий с ретрактом (M, Ω), где M – произвольное неприводимое компактное эрмитово симметрическое пространство и Ω – пучок голоморфных дифференциальных форм на M, и выделение однородных супермногообразий этого вида (см. [6]). По-видимому, методы, использованные в настоящей работе, позволят классифицировать все однородные супермногообразия $(M, \mathcal{O})$ в случае, когда M – неприводимое компактное эрмитово симметрическое пространство, а представление φ, определяющее ретракт, неприводимо.

1. Предварительные сведения о супермногообразиях

Мы рассматриваем здесь комплексно аналитические супермногообразия, т.е. $\mathbb{Z}_2$-градуированные окольцованные пространства $(M, \mathcal{O})$, локально изоморфные парам вида $(D, \bigwedge_{\mathcal{F}_n}(\xi_1, \ldots, \xi_m))$, где D – область в $\mathbb{C}^n$ и $\mathcal{F}_n$ – пучок голоморфных функций в D (подробности см. в [4]). Такой локальный изоморфизм отождествляет стандартные координаты $x_i,\ i = 1, \ldots, n$, в D и элементы $\xi_j,\ j = 1, \ldots, m$, с некоторыми, соответственно четными и нечетными, локальными сечениями пучка $\mathcal{O}$, которые называются четными и нечетными локальными координатами на $(M, \mathcal{O})$. Пучок $\mathcal{O}$ называется *структурным пучком* супермногообразия $(M, \mathcal{O})$. Пространство M обладает естественной структурой комплексного многообразия размерности n (см. ниже); оно называется *редукцией* супермногообразия $(M, \mathcal{O})$. Пара $n|m$ называется *размерностью* супермногообразия $(M, \mathcal{O})$. Простейший способ получить супермногообразие состоит в следующем. Пусть $(M, \mathcal{F})$ – комплексное многообразие размерности n и $\mathbf{E} \to M$ – голоморфное векторное расслоение ранга m. Тогда пучок $\mathcal{E}$ голоморфных сечений расслоения $\mathbf{E}$ есть локально свободный аналитический пучок на M. Полагая $\mathcal{O} = \bigwedge_{\mathcal{F}} \mathcal{E}$, мы получим супермногообразие $(M, \mathcal{O})$ размерности $n|m$. В качестве локальных координат на $(M, \mathcal{O})$ можно взять обычные локальные координаты $x_i, \dots, x_n$ в координатной окрестности на M вместе с некоторым базисом сечений $\xi_1, \dots, \xi_m$ пучка $\mathcal{E}$ над той же окрестностью. Супермногообразие называется *расщепимым*, если оно изоморфно супермногообразию такого вида. Структурный пучок $\mathcal{O}$ расщепимого супермногообразия обладает $\mathbb{Z}$-градуировкой $\mathcal{O} = \bigoplus_{p \geq 0} \mathcal{O}_p$, где $\mathcal{O}_p = \bigwedge_{\mathcal{F}}^p \mathcal{E}$. В дальнейшем мы часто будем опускать нижний индекс $\mathcal{F}$ в обозначении внешних степеней, тензорных произведений и т.д. пучков $\mathcal{F}$-модулей.

Имеется важная конструкция, связывающая с произвольным супермногообразием $(M, \mathcal{O})$ некоторое расщепимое супермногообразие. Пусть $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}$ – подпучок идеалов, порожденный нечетными элементами. Рассмотрим фильтрацию

$$\mathcal{O} = \mathcal{J}^0 \supset \mathcal{J}^1 \supset \mathcal{J}^2 \supset \dots \tag{1}$$

пучка $\mathcal{O}$. Присоединенный градуированный пучок

$$\mathrm{gr}\, \mathcal{O} = \bigoplus_{p \geq 0} \mathrm{gr}_p \mathcal{O},$$

где $\mathrm{gr}_p \mathcal{O} = \mathcal{J}^p / \mathcal{J}^{p+1}$, определяет расщепимое супермногообразие $(M, \mathrm{gr}\, \mathcal{O})$. Действительно, $\mathrm{gr}\, \mathcal{O} \simeq \bigwedge_{\mathcal{F}} \mathcal{E}$, где $\mathcal{F} = \mathrm{gr}_0 \mathcal{O}$ – структурный пучок редукции $M = (M, \mathcal{F})$, и $\mathcal{E} = \mathrm{gr}_1 \mathcal{O}$. Очевидно, $(M, \mathcal{O})$ и $(M, \mathrm{gr}\, \mathcal{O})$ имеют одну и ту же размерность. Супермногообразие $(M, \mathrm{gr}\, \mathcal{O})$ называется *ретрактом* супермногообразия $(M, \mathcal{O})$.

Пусть $(M, \mathcal{O})$ – произвольное супермногообразие. Обозначим через $\mathcal{T} = \mathcal{D}er\, \mathcal{O}$ пучок дифференцирований структурного пучка $\mathcal{O}$; он называется *касательным пучком* супермногообразия $(M, \mathcal{O})$. Касательный пучок обладает естественной структурой $\mathbb{Z}_2$-градуированного левого $\mathcal{O}$-модуля. С другой стороны, его можно рассматривать как пучок комплексных супералгебр Ли относительно градуированной скобки Ли

$$[u, v] = uv + (-1)^{p(u)p(v)+1} vu. \tag{2}$$

Сечения пучка $\mathcal{T}$ (*голоморфные векторные поля* на $(M, \mathcal{O})$) составляют супералгебру Ли $\mathfrak{v}(M, \mathcal{O}) = \Gamma(M, \mathcal{T})$; она конечномерно, если M компактно.

Сделаем теперь несколько замечаний, касающихся векторных полей на расщепимых супермногообразиях. Если $(M, \mathcal{O})$ расщепимо, то $\mathbb{Z}$-градуировка пучка $\mathcal{O}$ определяет естественную $\mathbb{Z}$-градуировку в пучке $\mathcal{T}$, превращающую его в $\mathbb{Z}$-градуированный пучок супералгебр Ли. Кроме того, $\mathcal{T}$ можно рассматривать как локально свободный аналитический пучок на комплексном многообразии M. Действительно, $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}$, и поэтому $\mathcal{T}$ – пучок $\mathcal{F}$-модулей, т.е. аналитический пучок на M. Мы имеем следующую точную последовательность локально свободных аналитических пучков на M (см. [5]):

$$0 \to \mathcal{E}^* \otimes \bigwedge \mathcal{E} \xrightarrow{i} \mathcal{T} \xrightarrow{\alpha} \Theta \otimes \bigwedge \mathcal{E} \to 0, \tag{3}$$

где $\Theta = \mathcal{D}er\, \mathcal{F}$ – касательный пучок многообразия M. Отображение α – это ограничение дифференцирования пучка $\mathcal{O}$ на $\mathcal{F}$, а i отождествляет каждый гомоморфизм пучков $\mathcal{E} \to \bigwedge \mathcal{E}$ с его продолжением до дифференцирования, равного нулю на $\mathcal{F}$. Отсюда выводится, что аналитический пучок $\mathcal{T}$ локально свободен. Значит, $\mathcal{T}$ является пучком голоморфных сечений некоторого ($\mathbb{Z}$-градуированного) голоморфного векторного расслоения над M; мы называем его *суперкасательным расслоением* и обозначаем через $\mathbf{ST}$.

Для определения понятия однородного супермногообразия мы используем классический инфинитезимальный подход, принадлежащий С. Ли. Пусть заданы супермногообразие $(M, \mathcal{O})$ и точка $x \in M$. Обозначим через m_x максимальный идеал локальной супералгебры $\mathcal{O}_x$. Векторное суперпространство $T_x(M, \mathcal{O}) = (m_x/m_x^2)^*$ называется *касательным пространством* к $(M, \mathcal{O})$ в точке x. Его четная часть $T_x(M, \mathcal{O})_{\bar{0}}$ отождествляется с голоморфным касательным пространством $T_x(M) = T_x^{1,0}(M)$, а нечетная часть $T_x(M, \mathcal{O})_{\bar{1}}$ – с векторным пространством E_x^*, двойственным к слою E_x векторного расслоения $\mathbf{E}$ над M, связанного с ретрактом. Мы имеем естественное линейное отображение $\mathrm{ev}_x : \mathfrak{v}(M, \mathcal{O}) \to T_x(M, \mathcal{O})$. В случае, когда M компактно, мы будем говорить, что супермногообразие $(M, \mathcal{O})$ *однородно*, если отображение ev_x сюръективно для любой $x \in M$. Легко доказать (см. [11]), что ретракт однородного супермногообразия также является однородным супермногообразием. Пусть $(M, \mathcal{O})$ – расщепимое супермногообразие, связанное с векторным расслоением $\mathbf{E} \to M$, и пусть H – односвязная комплексная группа Ли, алгеброй Ли которой является $\mathfrak{v}(M, \mathcal{O})_{\bar{0}}$. Если $(M, \mathcal{O})$ однородно, то $\mathbf{E}$ – H-однородное векторное расслоение, т.е. на $\mathbf{E}$ существует голоморфное действие группы H автоморфизмами векторного расслоения, индуцирующее транзитивное действие на M. Кроме того, двойственное однородное векторное расслоение $\mathbf{E}^*$ порождается своими глобальными голоморфными сечениями. Обратно, любое однородное голоморфное векторное расслоение $\mathbf{E} \to M$, такое, что M компактно и что $\mathbf{E}^*$ порождается глобальными голоморфными сечениями, определяет расщепимое однородное супермногообразие $(M, \bigwedge \mathcal{O})$ (см. [11]). Например, пусть $\mathbf{E} = \mathbf{T}(M)^*$ – кокасательное расслоение компактного комплексного однородного многообразия M. Тогда касательное расслоение $\mathbf{E}^* = \mathbf{T}(M)$ порождается глобальными голоморфными векторными полями. Таким образом, расщепимое супермногообразие (M, Ω), где Ω – пучок голоморфных форм на M, является однородным.

Предположим, что задано голоморфное векторное расслоение $\mathbf{E} \to M$ над некоторым комплексным многообразием M. Рассмотрим соответствующее расщепимое супермногообразие $(M, \mathcal{O}_{\mathrm{gr}})$, где $\mathcal{O}_{\mathrm{gr}} = \bigwedge \mathcal{E}$. Возникает следующая естественная задача: классифицировать с точностью до изоморфизма все супермногообразия $(M, \mathcal{O})$ с ретрактом $(M, \mathrm{gr}\,\mathcal{O}) \simeq (M, \mathcal{O}_{\mathrm{gr}})$ (все изоморфизмы супермногообразий считаются тождественными на M). Простейший ответ на этот вопрос дается в терминах множества 1-когомологий $H^1(M, \mathcal{A}ut_{(2)}\mathcal{O}_{\mathrm{gr}})$ со значениями в следующем подпучке пучка автоморфизмов пучка $\mathcal{O}_{\mathrm{gr}}$:

$$\mathcal{A}ut_{(2)}\mathcal{O}_{\mathrm{gr}} = \{a \in \mathcal{A}ut\,\mathcal{O}_{\mathrm{gr}} \mid a(f) - f \in \mathcal{J}^2\}.$$

А именно, теорема Грина [3] утверждает, что классы изоморфных супермногообразий с ретрактом $(M, \mathcal{O}_{\mathrm{gr}})$ находятся в биективном соответствии с орбитами естественного действия группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}\,\mathbf{E}$ нашего расслоения на $H^1(M, \mathcal{A}ut_{(2)}\mathcal{O}_{\mathrm{gr}})$. В наших работах [7, 8] была предложена интерпретация этого множества неабелевых когомологий в виде множества $H^1(K)$ 1-когомологий некоторого нелинейного комплекса K, аналогичного классическому комплексу Дольбо. Множество $Z^1(K)$ 1-коциклов этого комплекса состоит из гладких дифференциальных форм z типа $(0,1)$ на M со значениями в векторном расслоении $\bigoplus_{p\geq 1}\mathbf{ST}^{2p}$, удовлетворяющих условию $\bar\partial z - \frac{1}{2}[z,z]=0$, где $[\ ,\ ]$ – специальным образом определенная операция на формах, связанная с (2).

Укажем одно применение этого комплекса. Пусть $(M,\mathcal{O})$ – супермногообразие. *Действие* группы G на $(M,\mathcal{O})$ – это по определению гомоморфизм $\Phi : G\to \mathrm{Aut}(M,\mathcal{O})$, где $\mathrm{Aut}(M,\mathcal{O})$ – группа биголоморфных автоморфизмов супермногообразия $(M,\mathcal{O})$ (рассматриваемого как окольцованное пространство). Если G – вещественная или комплексная группа Ли, то действие предполагается вещественно (соответственно комплексно) аналитическим в естественном смысле. Любое действие $\Phi : G\to \mathrm{Aut}(M,\mathcal{O})$ сохраняет фильтрацию (1) и индуцирует некоторое действие $\bar\Phi : G\to \mathrm{Aut}(M,\mathcal{O}_{\mathrm{gr}})$, сохраняющее $\mathbb{Z}$-градуировку структурного пучка. В этой ситуации мы говорим, что действие $\bar\Phi$ *поднимается до действия* Φ (или *поднимается на* $(M,\mathcal{O})$). Важной задачей является описание тех действий на $(M,\mathcal{O}_{\mathrm{gr}})$, которые сохраняют $\mathbb{Z}$-градуировку и поднимаются на $(M,\mathcal{O})$. Заметим, что действие на $(M,\mathcal{O}_{\mathrm{gr}})$, сохраняющее $\mathbb{Z}$-градуировку, определяет действие на соответствующем расслоении $\mathbf{E}$, а также на соответствующем комплексе K. Имеет место следующая

Теорема 1. *Пусть задано аналитическое действие Ψ компактной группы Ли G на расщепимом супермногообразии $(M,\mathcal{O}_{\mathrm{gr}})$, сохраняющее $\mathbb{Z}$-градуировку. Обозначим через $\mathcal{T}_{\mathrm{gr}}$ касательный пучок супермногообразия $(M,\mathcal{O}_{\mathrm{gr}})$. Пусть $(M,\mathcal{O})$ – супермногообразие с ретрактом $(M,\mathcal{O}_{\mathrm{gr}})$, соответствующее заданному классу $\zeta\in H^1(K)$. Тогда*

1) Ψ *поднимается на $(M,\mathcal{O})$ тогда и только тогда, когда класс ζ содержит некоторый G-инвариантный коцикл $z\in Z^1(K)$.*

2) *Если в этой ситуации $(M,\mathcal{O})$ нерасщепимо, то G-инвариантный коцикл в классе ζ можно выбрать так, чтобы*

$$z=\sum_{k\geq p} z_{2k},$$

где $p \geq 1$, z_{2k} *– форма со значениями в* $\mathbf{ST}^{2k}$, *причем форма* z_{2p} *удовлетворяет условию* $\bar\partial z_{2p} = 0$ *и определяет ненулевой элемент пространства* $H^1(M, (\mathcal{T}_{\mathrm{gr}})_{2p})^G$.

Утверждение 1) этой теоремы доказано в [10], а 2) доказывается при помощи техники из [7, 8] и инвариантного интегрирования по группе G.

2. Многообразие Грассмана и линейные представления

Мы используем стандартную технику корней полупростых комплексных групп Ли и весов их линейных представлений (см., например, [13]). Подробности о флаговых многообразиях и параболических подгруппах и подалгебрах см. в [1].

Пусть $M = \mathrm{Gr}_{4,2}$ – многообразие Грассмана двумерных подпространств в $\mathbb{C}^4$. Хорошо известно, что связная компонента единицы $(\mathrm{Bih}\, M)^\circ$ в группе $\mathrm{Bih}\, M$ биголоморфных автоморфизмов многообразия M совпадает с образом стандартного действия группы $G = \mathrm{SL}_4(\mathbb{C})$ на нем. Это действие транзитивно, и соответствующая групповая модель однородного пространства $\mathrm{Gr}_{4,2}$ имеет вид G/P; здесь P – подгруппа матриц вида $\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix}$, где A, B, C – матрицы размера 2×2 и $(\det A)(\det B) = 1$. Группа G не содержит собственных комплексных подгрупп Ли, действующих на M транзитивно. Однородные векторные расслоения над M определяются голоморфными линейными представлениями подгруппы P; обозначим через $\mathbf{E}_\varphi$ векторное расслоение, соответствующее представлению $\varphi : P \to \mathrm{GL}(E)$.

Компактная вещественная форма $K = \mathrm{SU}_4$ группы G действует на M транзитивно, и ее стационарная подгруппа $L = K \cap P$ есть подгруппа матриц вида $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$, где A, $B \in \mathrm{U}_2$ и $(\det A)(\det B) = 1$. Таким образом, $\mathrm{Gr}_{4,2} \simeq_K K/L$.

При изучении однородных супермногообразий с редукцией $\mathrm{Gr}_{4,2}$ нам потребуется описание конечномерных линейных представлений групп P и G. Введем для этого следующие стандартные обозначения:

$\mathfrak{t} = \{\mathrm{diag}(x_1, x_2, x_3, x_4)\}$ (где $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$) – подалгебра Картана алгебры Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_4(\mathbb{C})$ группы G, состоящая из диагональных матриц.

Δ – соответствующая система корней группы G.

$B_- \subset G$ и $\mathfrak{b}_- \subset \mathfrak{g}$ – борелевская подгруппа и борелевская подалгебра группы G и алгебры $\mathfrak{g}$ соответственно, состоящие из нижних треугольных матриц.

$\Delta_+ \supset \Pi$ – подсистемы положительных и простых корней из Δ, отвечающие борелевской подгруппе B_+ группы G, которая состоит из верхних треугольных матриц. Имеем $\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$, где $\alpha_i = x_i - x_{i+1},\ i = 1, 2, 3$.

$\varpi_1, \varpi_2, \varpi_3$ – фундаментальные веса группы G; это базис решетки весов группы G, определенный формулами

$$\varpi_1 = x_1,\ \varpi_2 = x_1 + x_2,\ \varpi_3 = x_1 + x_2 + x_3.$$

Любой вес λ группы G однозначно представляется в виде

$$\lambda = a_1\varpi_1 + a_2\varpi_2 + a_3\varpi_3,$$

где $a_i \in \mathbb{Z}$; вес λ называется *доминантным*, если $a_i \geq 0,\ i = 1, 2, 3$.

Подгруппу P можно охарактеризовать как максимальную параболическую подгруппу группы G, содержащую B_- и отвечающую простому корню α_2. Соответствующая максимальная параболическая подалгебра $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{g}$ допускает разложение Леви

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{r} + \mathfrak{n}_-,$$

где

$$\mathfrak{r} = \left\{ \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix} \mid \operatorname{tr} X + \operatorname{tr} Y = 0 \right\}, \quad \mathfrak{n}_- = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ Z & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Соответствующее разложение Леви подгруппы P имеет вид $P = RN_-$, где

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \mid (\det A)(\det B) = 1 \right\}, \quad N_- = \left\{ \begin{pmatrix} E_2 & 0 \\ C & E_2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Введенная выше подгруппа L – это компактная вещественная форма редуктивной комплексной группы R.

Мы будем использовать следующий изоморфизм алгебр Ли $\gamma : \tilde{\mathfrak{r}} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C} \to \mathfrak{r}$:

$$\gamma(X, Y, w) = \begin{pmatrix} X + wE_2 & 0 \\ 0 & Y - wE_2 \end{pmatrix}.$$

Он соответствует гомоморфизму алгебраических групп $g : \tilde{R} = \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^\times \to R$, заданному формулой

$$g(A, B, c) = \begin{pmatrix} cA & 0 \\ 0 & c^{-1}B \end{pmatrix};$$

это накрытие с ядром $\mathrm{Ker}\, g = \{(E_2, E_2, 1), (-E_2, -E_2, -1)\}$.

Пусть $\mathfrak{t}_1 = \{\mathrm{diag}(u_1, u_2)\}$ и $\mathfrak{t}_2 = \{\mathrm{diag}(v_1, v_2)\}$ – подалгебры Картана двух слагаемых $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ алгебры Ли $\tilde{\mathfrak{r}}$ (здесь $u_2 = -u_1$ и $v_2 = -v_1$). В этих обозначениях изоморфизм подалгебр Картана $\gamma : \tilde{\mathfrak{t}} = \mathfrak{t}_1 \oplus \mathfrak{t}_2 \oplus \mathbb{C} \to \mathfrak{t}$ записывается формулой

$$\gamma(\mathrm{diag}(u_1, u_2), \mathrm{diag}(v_1, v_2), w) = \mathrm{diag}(u_1 + w, u_2 + w, v_1 - w, v_2 - w).$$

Любой вес λ группы $\tilde{R}$ имеет вид

$$\lambda = au_1 + bv_1 + cw, \quad a, b, c \in \mathbb{Z}. \tag{4}$$

Он является доминатным как вес группы $\tilde{R}$ или R тогда и только тогда, когда $a \geq 0,\ b \geq 0$. В координатах x_i имеем

$$\lambda = \frac{1}{2}(a + c)x_1 + \frac{1}{2}(-a + c)x_2 + \frac{1}{2}bx_3 - \frac{1}{2}bx_4,$$

а выражение веса λ через фундаментальные веса имеет вид

$$\lambda = a\varpi_1 + \frac{1}{2}(c - a - b)\varpi_2 + b\varpi_3. \tag{5}$$

Лемма 1. 1) *Вес λ группы $\tilde{R}$, заданный формулой* (4), *является весом группы R тогда и только тогда, когда $a + b - c \in 2\mathbb{Z}$.*

В этом случае λ доминантен как вес группы G тогда и только тогда, когда $a \geq 0,\ b \geq 0,\ c \geq a+b$.

2) *Предположим, что вес λ, заданный формулой* (4), *является старшим весом неприводимого представления φ группы $\tilde{R}$. Тогда старший вес сопряженного представления φ^* имеет вид*

$$\lambda^* = au_1 + bv_1 - cw = \frac{1}{2}(a-c)x_1 + \frac{1}{2}(-a-c)x_2 + \frac{1}{2}bx_3 - \frac{1}{2}bx_4.$$

Он доминантен как вес группы G тогда и только тогда, когда $a \geq 0,\ b \geq 0,\ c \leq -(a+b)$.

Доказательство. Утверждение 1) следует из (5). Для доказательства утверждения 2) заметим, что все линейные представления группы $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ самосопряжены, и затем используем 1).

Пусть φ – неприводимое представление группы $\tilde{R} = \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^\times$ со старшим весом λ, заданным формулой (4). Очевидно,

$$\varphi = \rho_1^{(a)} \otimes \rho_2^{(b)} \otimes \zeta^c, \tag{6}$$

где $\rho_1^{(a)}$ и $\rho_2^{(b)}$ – неприводимые представления первого и второго сомножителей $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ размерностей $a+1$ и $b+1$ соответственно и ζ – тождественный характер группы $\mathbb{C}^\times$. В частности, $\dim\varphi = (a+1)(b+1)$. В дальнейшем мы будем записывать представление φ группы R в виде (6), отождествляя его с представлением $\tilde{\varphi} = \varphi \circ g$ группы $\tilde{R}$.

Важным для нас примером является представление изотропии $\tau : P \to \mathrm{GL}(T(M)_o)$ подгруппы P в точке $o \in M$. Это представление неприводимо, так как любое многообразие Грассмана – это неприводимое эрмитово симметрическое пространство. Поэтому ограничение $\tau|N_-$ тривиально, и мы будем отождествлять τ с его ограничением на R. То же относится к сопряженному представлению τ^*. Из теории эрмитовых симметрических пространств известно, что старший вес представления τ совпадает со старшим корнем $\delta = x_1 - x_4$ группы G, а его младший вес – с корнем α_2. Значит, старший вес представления τ^* есть $\Lambda = -\alpha_2 = -x_2 + x_3$, а его младший вес есть $-\delta$. Выражение (4) весов δ и Λ имеет вид

$$\delta = u_1 + v_1 + 2w, \quad \Lambda = u_1 + v_1 - 2w.$$

Используя запись (6), получаем отсюда

$$\tau = \rho_1^{(1)} \otimes \rho_2^{(1)} \otimes \zeta^2, \quad \tau^* = \rho_1^{(1)} \otimes \rho_2^{(1)} \otimes \zeta^{-2}.$$

3. Теоремы классификации

Перейдем теперь к нашей основной задаче. Пусть $(M, \mathcal{O})$ – однородное супермногообразие с редукцией $M = \mathrm{Gr}_{4,2}$. Рассмотрим сначала случай, когда $(M, \mathcal{O})$ расщепимо, т.е. когда $\mathcal{O} = \bigwedge \mathcal{E}$ для некоторого голоморфного векторного расслоения $\mathbf{E}$ над M. Как мы видели в разделе 1, $(M, \mathcal{O})$ однородно тогда и только тогда, когда выполнены следующие два условия: векторное расслоение $\mathbf{E}$ однородно, т.е. $\mathbf{E} = \mathbf{E}_\varphi$ для некоторого голоморфного представления $\varphi : P \to \mathrm{GL}(E)$; двойственное расслоение $\mathbf{E}^* = \mathbf{E}_{\varphi^*}$ порождается глобальными голоморфными сечениями.

Второе условие изучалось в работе [12] для однородных векторных расслоений $\mathbf{E}_\varphi$ над произвольными флаговыми многообразиями, и там был дан критерий его выполнимости в терминах представления φ. В простейшем случае, когда φ неприводимо, этот критерий утверждает (см. также [5]), что $\mathbf{E}_\varphi$ порождается глобальными голоморфными сечениями тогда и только тогда, когда старший вес представления φ доминантен как вес группы G. Если φ вполне приводимо, то этот критерий следует применить ко всем неприводимым компонентам представления φ. Используя лемму 1, получаем отсюда следующую теорему, которая дает описание всех расщепимых однородных супермногообразий $(M, \mathcal{O})$ для $M = \mathrm{Gr}_{4,2}$, определяемых вполне приводимыми представлениями подгруппы P.

Теорема 2. *Пусть $\varphi : P \to \mathrm{GL}(E)$ – неприводимое представление со старшим весом*

$$\Lambda = au_1 + bv_1 + cw, \quad a, b, c \in \mathbb{Z},$$

(см. (4)), где $a \geq 0$, $b \geq 0$ и $a+b-c \in 2\mathbb{Z}$. Соответствующее расщепимое супермногообразие $(M, \mathcal{O})$, где $\mathcal{O} = \bigwedge \mathcal{E}_\varphi$, однородно тогда и только тогда, когда $c \leq -(a+b)$. Если φ вполне приводимо, то соответствующее расщепимое супермногообразие однородно тогда

и только тогда, когда все старшие веса представления φ удовлетворяют этому условию.

Пусть теперь дано нерасщепимое однородное супермногообразие $(M, \mathcal{O})$ с редукцией $M = \mathrm{Gr}_{4,2}$, и пусть $\mathbf{E}$ – голоморфное векторное расслоение над M, определяющее его ретракт $(M, \mathcal{O}_{\mathrm{gr}})$. Тогда расщепимое супермногообразие $(M, \mathcal{O}_{\mathrm{gr}})$ также однородно. Значит, $\mathbf{E} = \mathbf{E}_\varphi$ для некоторого представления φ подгруппы P, и если предположить, что φ вполне приводимо, то его старшие веса удовлетворяют условиям теоремы 2. Далее, теорема 1 подсказывает следующее дополнительное условие: $H^1(M, \mathcal{T}_{2p})^G \neq \{0\}$ для некоторого $p \geq 1$, где $\mathcal{T}$ – касательный пучок супермногообразия $(M, \mathcal{O}_{\mathrm{gr}})$. Изучение этих групп инвариантных когомологий приводит к следующему результату.

Теорема 3. *Пусть $\varphi : P \to \mathrm{GL}(E)$ – такое неприводимое представление, что расслоение $\mathbf{E}_{\varphi^*}$ порождается глобальными сечениями. Тогда $H^1(M, \mathcal{T}_{2p})^G = \{0\}$ для всех $p \geq 2$, а также для $p = 1$ и $\varphi \not\simeq \tau^*$. Далее,* $\dim H^1(M, \mathcal{T}_2)^G = 2$ *для $\varphi \simeq \tau^*$.*

Из-за ограничения на объем статьи мы не даем здесь полного доказательства этой ключевой теоремы. Наметим лишь его основные этапы.

Пусть $\varphi : P \to \mathrm{GL}(E)$ – некоторое голоморфное представление. Мы используем данную в [2] интерпретацию комплекса $(A^{0,*}(\mathbf{E}_\varphi)^K, \bar{\partial})$ K-инвариантных форм типа $(0,*)$ на M со значениями в $\mathbf{E}_\varphi$ в качестве комплекса $(C^*(\mathfrak{n}_-, E), \delta)$ коцепей алгебры Ли $\mathfrak{n}_-$ со значениями в пространстве E. Из нее следует изоморфизм градуированных пространств когомологий

$$H^*(M, \mathcal{E}_\varphi)^G = H^*(M, \mathcal{E}_\varphi)^K \simeq H^*(\mathfrak{n}_-, E)^L = H^*(\mathfrak{n}_-, E)^R. \qquad (7)$$

Если φ вполне приводимо, то $d\varphi(\mathfrak{n}_-) = 0$. Поскольку алгебра Ли $\mathfrak{n}_-$ коммутативна, отсюда следует, что $\delta = 0$. В результате получаем изоморфизмы

$$H^*(M, \mathcal{E}_\varphi)^G = H^*(M, \mathcal{E}_\varphi)^K \simeq A^{0,*}(\mathbf{E}_\varphi)^K. \qquad (8)$$

Из существования K-инвариантной эрмитовой метрики на M следует, что представление изотропии группы L (или R) в пространстве $T^{0,1}(M)_o$ изоморфно τ^*. Поэтому из (8) следует, в частности, что $\dim H^1(M, \mathcal{E}_\varphi)^G$ равна кратности неприводимого представления τ^* в φ, если φ вполне приводимо.

Для доказательства теоремы 3 используется $(2p)$-компонента точной последовательности (3) аналитических пучков на M. В нашем случае все члены этой точной последовательности связаны с однородными расслоениями, причем пучки, стоящие слева и справа, имеют вид $\mathcal{E}_\psi$, где $\psi = \varphi^* \bigwedge^{2p+1} \varphi$ и $\tau \bigwedge^{2p} \varphi$ соответственно. Если φ неприводимо, то все представления ψ вполне приводимы, что позволяет найти неприводимые представления φ, для которых инвариантные 1-когомологии этих пучков нетривиальны. Для вычисления соответствующих пространств $H^1(M, \mathcal{T}_{2p})^G$ используются точная последовательность когомологий и G-эквивариантность гомоморфизмов i и α из (3). В случаях $\varphi = \rho_1^{(2)} \otimes \zeta^{-2}$, $\rho_2^{(2)} \otimes \zeta^{-2}$ доказать тривиальность пространства $H^1(M, \mathcal{T}_2)^G$ этим способом не удается, и вычисления проводятся в коцепном комплексе алгебры Ли $\mathfrak{n}_-$ (см. изоморфизм (7)). Это самая трудная часть доказательства.

Выведем теперь из сказанного выше наш основной результат.

Теорема 4. *Пусть* $\varphi : P \to \mathrm{GL}(E)$ – *неприводимое голоморфное представление. Нерасщепимое однородное комплексное супермногообразие* $(M, \mathcal{O})$ *с ретрактом* $(M, \bigwedge \mathcal{E}_\varphi)$ *существует тогда и только тогда, когда* $\varphi \simeq \tau^*$. *Любое однородное комплексное супермногообразие с ретрактом* $(M, \bigwedge \mathcal{E}_{\tau^*}) = (M, \Omega)$ *изоморфно* Π-*симметрическому суперграссманиану* $\Pi\,\mathrm{Gr}_{4|4,2|2}$.

Доказательство. Пусть $(M, \mathcal{O})$ – однородное комплексное супермногообразие с ретрактом $(M, \bigwedge \mathcal{E}_\varphi)$. Тогда супермногообразие $(M, \bigwedge \mathcal{E}_\varphi)$ также однородно. В частности, $(M, \bigwedge \mathcal{E}_\varphi)$ допускает градуированное аналитическое действие компактной группы Ли $\mathrm{SU}(4)$, которое индуцирует ее стандартное действие на M и поднимается до аналитического действия на $(M, \mathcal{O})$. Если $(M, \mathcal{O})$ нерасщепимо, то по теореме 1 имеем $H^1(M, \mathcal{T}_{2p})^G \neq \{0\}$ для некоторого $p \geq 1$. Кроме того, расслоение $\mathbf{E}_{\varphi^*}$ порождается глобальными голоморфными сечениями. Поэтому из теоремы 3 следует, что $\varphi \simeq \tau^*$. Таким образом, ретракт изоморфен супермногообразию (M, Ω). Все супермногообразия с этим ретрактом описаны в [6] для произвольного неприводимого эрмитова симметрического пространства M. В частности, там доказано, что для многообразий Грассмана $M = \mathrm{Gr}_{n,k}$ с условием $1 < k < n-1$ любое нерасщепимое однородное комплексное супермногообразие с ретрактом (M, Ω) изоморфно П-симметрическому суперграссманиану $\Pi\,\mathrm{Gr}_{n|n,k|k}$, построенному в [4].

Библиографический список

1. *Akhiezer D.N.* Lie group Actions in Complex Analysis. Braunschweig-Wiesbaden: Vieweg & Sohn, 1995.
2. *Bott R.* Homogeneous vector bundles // Ann. Math. 1957. V. 66. P. 203–248.
3. *Green P.* On holomorphic graded manifolds //Proc. Amer. Math. Soc. 1982. V. 85. P. 587–590.
4. *Манин Ю.И.* Калибровочные поля и комплексная геометрия. М., Наука. 1984.
5. *Онищик А.Л.* Транзитивные супералгебры Ли векторных полей / Яросл. ун-т. Ярославль, 1986. 24 с. Деп. в ВИНИТИ 12.06.86, № 4329-В86.
6. *Onishchik A.L.* Non-split supermanifolds associated with the cotangent bundle. Université de Poitiers, Département de Math., № 109. Poitiers, 1997.
7. *Onishchik A.L.* Non-abelian cohomology and supermanifolds. SFB 288, Preprint № 360. Berlin, 1998.
8. *Onishchik A.L.* On the classification of complex analytic supermanifolds //Lobachevskii J. Math. 1999. V. 4. P. 47–70 (electronic).
9. *Онищик А.Л.* Проблемы классификации комплексных супермногообразиях // Математика в Ярославском университете. Ярославль: ЯрГУ, 2001. С. 7–33.
10. *Onishchik A.L.* Lifting of holomorphic actions on complex supermanifolds // Lie Groups, Geometric Structures and Differential Equations. Adv. Studies in Pure Math. 37. Tokyo: Math. Soc. Japan, 2002. P. 317–335

11. *Онищик А.Л., Платонова О.В.* Однородные супермногообразия, связанные с комплексным проективным пространством: I, II // Мат. сб. 1998. Т. 189, № 2. С. 111–136; Т. 189, № 3. С. 421–441.
12. *Snow D.M.* Spanning homogeneous vector bundles // Comment. Math. Helv. 1989. V. 64. P. 395–400.
13. *Винберг Э.Б., Онищик А.Л.* Семинар по группам Ли и алгебраическим группам.

Т-стабильность на категории, порожденной исключительной парой[1]

С.А. Кулешов

1. Мотивация понятия стабильности

Пусть $\mathcal{A}$ – абелева категория когерентных пучков на гладкой алгебраической кривой. Для построения многообразия модулей свободных от кручения пучков с фиксированными топологическими инвариантами на основании геометрической теории инвариантов вводится понятие (полу)стабильного пучка, а именно, *наклон* пучка положительного ранга определяется как

$$\mu(E) = \frac{\deg E}{\operatorname{rk} E},$$

где rk – ранг, а deg – степень пучка на кривой.

Пучок без кручения E называется *(полу)стабильным*, если для любого его собственного подпучка $F \subset E$ выполнено условие

$$\mu(F) < \mu(E), \qquad (\mu(F) \leq \mu(E)).$$

Наклон пучка на кривой – отношение двух аддитивных функций, т.е. для любой точной тройки пучков $0 \to E \to F \to G \to 0$

[1] Совместная работа с А.Л. Городенцевым и А.Н. Рудаковым.

выполнено равенство $\deg E + \deg G = \deg F$, $\operatorname{rk} E + \operatorname{rk} G = \operatorname{rk} F$. Поэтому простое наблюдение

$$\frac{\deg}{\operatorname{rk}} < \frac{\deg'}{\operatorname{rk}'} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \deg & \deg' \\ \operatorname{rk} & \operatorname{rk}' \end{vmatrix} < 0$$

влечет

Свойство качелей. Для любой точной тройки пучков $0 \to E \to F \to G \to 0$, выполнены следующие эквивалентности

$$\begin{array}{lcl} \mu(E) < \mu(F) & \Leftrightarrow & \mu(F) < \mu(G), \\ \mu(E) = \mu(F) & \Leftrightarrow & \mu(F) = \mu(G), \\ \mu(E) > \mu(F) & \Leftrightarrow & \mu(F) > \mu(G). \end{array}$$

Свойство качелей позволяет вывести важные следствия:

(i) $\operatorname{Hom}(E, F) = 0$, если E и F μ-полустабильны, и $\mu(E) > \mu(F)$;

(ii) любой свободный от кручения пучок X допускает каноническую фильтрацию Гардера-Нарасимхана:

$$\begin{tikzcd} X = F^0X \arrow[d] & F^1X \arrow[l, hook'] \arrow[d] & \cdots \arrow[l, hook'] & F^nX \arrow[l, hook'] \arrow[d] & F^{n+1}X \arrow[l, hook'] \;= 0, \\ G_0 & G_1 & & G_n & \end{tikzcd}$$

(вертикальные отображения здесь – это правые стрелки точных последовательностей: $0 \to F^{i+1}X \to F^iX \to G_i \to 0$), где все факторы $G_i = F^iX/F^{i+1}X$ – μ-полустабильны и $\mu(G_i) < \mu(G_j)\ \forall\, i < j$.

2. Абстрактное определение стабильности на абелевой категории

А. Рудаков [1] предложил следующее определение стабильности для произвольной абелевой категории.

Определение (А. Рудаков). Структурой стабильности на абелевой категории $\mathcal{A}$ называется предпорядок $\preceq$ на множестве $\operatorname{Ob}\mathcal{A}$, со свойством качелей: $\forall\ 0 \to A \to B \to C \to 0$ выполнено

1) $A \prec B \Leftrightarrow A \prec C \Leftrightarrow B \prec C$;
2) $A \succ B \Leftrightarrow A \succ C \Leftrightarrow B \succ C$;

3) $A \asymp B \Leftrightarrow A \asymp C \Leftrightarrow B \asymp C$

Ненулевой объект $A \in \mathcal{A}$ называется полустабильным, если для всякого собственного подобъекта $B \subset A$ выполнено неравенство: $B \preceq A$.

Теорема (Рудаков). *Если на абелевой категории $\mathcal{A}$ задана структура стабильности, то*

1) $\mathrm{Hom}(B, A) = 0$ *для всех полустабильных A, B с $A \prec B$;*

2) *если цепочки объектов из $\mathcal{A}$:*

$$\begin{array}{l} A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots, \ \text{с}\ A_1 \prec A_2 \prec A_3 \prec \dots \\ A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots, \ \text{с}\ A_1 \prec A_2 \prec A_3 \prec \dots \\ A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots, \ \text{с}\ A_1 \succ A_2 \succ A_3 \succ \dots \end{array}$$

стабилизируются, то $\forall X \in \mathcal{A}$ существует каноническая фильтрация Гардера-Нарасимхана объекта X с полустабильными факторами G_i и неравенствами $G_i \prec G_{i+1}$ $\forall i$.

Итак, предпорядок на объектах абелевой категории, обладающий свойством качелей, с некоторыми естественными условиями конечности позволяет определить класс полустабильных объектов и построить для каждого ненулевого объекта каноническую фильтрацию Гардера-Нарасимхана. В частности, классическое понятие стабильности, имеющее смысл лишь для пучков без кручения, продолжается на все пучки. Единственно, что для этого нужно, – это упорядочить все объекты категории. Традиционным инструментом такого упорядочивания является векторный наклон.

Определение. Пусть $\mathcal{A}$ – абелева категория и $K_0(\mathcal{A})$ – ее группа Гротендика. Линейно независимая система аддитивных функций $(x_0, \dots, x_r)$ $K_0(\mathcal{A}) \to \mathbb{Z}$ называется *положительной*, если $\forall A \in \mathcal{A}$ выполнены условия:

$$\begin{array}{l} x_0(A) \geq 0, \\ x_0(A) = 0 \Rightarrow x_1(A) \geq 0, \\ x_0(A) = x_1(A) = 0 \Rightarrow x_2(A) \geq 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_0(A) = \dots = x_{r-1}(A) = 0 \Rightarrow x_r(A) > 0. \end{array}$$

Положительная система *полна*, если $x_0(A) = \dots = x_r(A) = 0 \Rightarrow A = 0$.

Имея положительную систему аддитивных функций $\{x_i\}$ на $\mathcal{A}$ (не обязательно полную), определим *наклон* ненулевого объекта $A \in \mathcal{A}$ относительно этой системы как вектор

$$\gamma(A) = \Bigg(\underbrace{+\infty, \ldots, +\infty}_{s}, \frac{x_{s+1}(A)}{x_s(A)}, \ldots, \frac{x_r(A)}{x_s(A)}\Bigg),$$

где $s = \min_i\{x_i(A) \neq 0\}$, и введем на множестве таких векторов лексикографический порядок. Предпорядок на $\operatorname{Ob}\mathcal{A}$ вводится по правилу:

$$A \prec B \Leftrightarrow \gamma(A) < \gamma(B).$$

На $\mathcal{A}$ возникает структура стабильности, *индуцированная наклоном*.

Например, $(\operatorname{rk}, \deg)$ – полная положительная система на категории когерентных пучков на гладкой алгебраической кривой; $(\operatorname{rk}, \deg, \chi(\mathcal{O}_S, \cdot\,))$ полная положительная система на категории когерентных пучков на гладкой алгебраической поверхности S с числом Пикара 1.

Хотелось бы обобщить понятие стабильности на триангулированные категории. Важный пример таких категорий – производные категории.

3. Ограниченная производная категория

Основная идея производной категории – замена объектов абелевой категории $\mathcal{A}$ подходящими классами эквивалентности их резольвент. Более точно, объекты в ограниченной производной категории $D^b(\mathcal{A})$ – это конечные комплексы

$$0 \longrightarrow C^n \longrightarrow C^{n+1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow C^m \longrightarrow 0,$$

с $C^i \in \mathcal{A}$. Такие комплексы изоморфны в $D^b(\mathcal{A})$, если существует морфизм $f : C^\bullet \to C'^\bullet$, индуцирующий изоморфизм когомологий $f^* : H^\bullet(C^\bullet) \simeq H^\bullet(C'^\bullet)$. В частности, гомотопическая эквивалентность комплексов – изоморфизм. При этом невозможно корректно определить понятия ядра, коядра, подобъекта и факторобъекта в

$D^b(\mathcal{A})$. Однако там есть хороший аналог точных последовательностей, а именно, отмеченные треугольники.

На $D^b(\mathcal{A})$ определен функтор сдвига

$$T : D^b(\mathcal{A}) \longrightarrow D^b(\mathcal{A}) \quad X \mapsto X[1].$$

Если $C^\bullet$ – комплекс, представляющий объект из $D^b(\mathcal{A})$, то $B^\bullet = C^\bullet[1]$ определяется как $B^i = C^{i+1}$.

Для каждого морфизма $f : A \to B$ в $D^b(\mathcal{A})$ существует конус $C(f)$ и отмеченный треугольник отображений

$$\cdots \longrightarrow A[i] \xrightarrow{f[i]} B[i] \xrightarrow{g[i]} C(f)[i] \xrightarrow{\delta_i} A[i+1] \cdots$$

где $A[0] = A$, $B[0] = B$, $C(f)[0] = C(f)$, $A[i] = T^i A$, и $g[i] \circ f[i] = \delta_i g[i] = f[i+1]\delta_i = 0$. Обычно этот треугольник (последовательность отображений) обозначается как

$$\begin{tikzcd}
& C(f) & \\
B \arrow[ur, "g"] & & A \arrow[ll, "f"] \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

В некотором смысле класс отмеченных треугольников в производной категории заменяет класс точных троек в абелевой. В частности, для любого объекта $D \in D^b(\mathcal{A})$ возникает две точных последовательности

$$\begin{aligned} \cdots \quad &\to \mathrm{Hom}^i(D, A) \to \mathrm{Hom}^i(D, B) \to \mathrm{Hom}^i(D, C) \to \\ &\to \mathrm{Hom}^{i+1}(D, A) \to \cdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdots \quad &\to \mathrm{Hom}^i(C, D) \to \mathrm{Hom}^i(B, D) \to \mathrm{Hom}^i(A, D) \to \\ &\to \mathrm{Hom}^{i+1}(D, A) \to \cdots \end{aligned}$$

где $\mathrm{Hom}^i(D, A) = \mathrm{Hom}(D, A[i])$.

Поскольку объекты $D = D^b(\mathcal{A})$ реализуются комплексами, существуют когомологические функторы $H^i : D \to \mathcal{A}$, сопоставляющие объекту его когомологии.

3.1. t-структура

В любой производной категории можно выделить две подкатегории:

$$D^{\geq n} = \{C \in D^b(\mathcal{A}) |\ H^i(C) = 0 \text{ для } i < n\},$$
$$D^{\leq n} = \{C \in D^b(\mathcal{A}) |\ H^i(C) = 0 \text{ для } i > n\}.$$

При этом

(1) $D^{\leq 0} \subset D^{\leq -1} = D^{\leq 0}[1]$, $D^{\geq 0} \supset D^{\geq 1} = D^{\geq 0}[-1]$;

(2) $\mathrm{Hom}^0(D^{\leq 0}, D^{\geq 1}) = 0$;

(3) $\forall\, X \in D$ включается в отмеченный треугольник

$$\begin{tikzcd}
 & X_{\geq 1} & \\
X \arrow[ur, "q"] & & X_{\leq 0} \arrow[ll, "p"] \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

с $X_{\geq 1} \in D^{\geq 1}$ и $X_{\leq 0} \in D^{\leq 0}$.

(4) $\forall\, X \in D$ найдутся такие $m, n \in \mathbb{Z}$, что

$$X \in D^{\geq m} \cap D^{\leq n}.$$

Более того, пересечение $D^{\leq 0} \cap D^{\geq 0}$ совпадает с абелевой категорией $\mathcal{A}$. Эта пара подкатегорий $D^{\leq 0}$, $D^{\geq 0}$ называется стандартной ограниченной t-структурой на D.

Можно определять и другие t-структуры на D, выбирая пару подкатегорий $T^{\leq 0}$, $T^{\geq 0}$, со свойствами (1)–(4).

К одной из классических задач теории производных и триангулированных категорий относится классификация ограниченных t-структур. Мы предлагаем метод ее решения, который оказывается эффективным по крайней мере для $D^b(\mathcal{A})$, когда гомологическая размерность $\mathcal{A}$ равна 1.

Определение t-стабильности сформулировано для триангулированных категорий, обобщающих класс производных категорий. Но для наглядности я ограничусь производными категориями.

4. Т-стабильность

Наше определение стабильности на $D = D^b(\mathcal{A})$ обобщает определение Бриджленда [2, 3]. Однако, экономя время, я не буду напоминать первоначальную версию, а перейду сразу к нашему варианту.

Определение. t-стабильность на $D = D^b(\mathcal{A})$ состоит из линейно упорядоченного множества Φ и полных подкатегорий Π_φ $\forall\,\varphi \in \Phi$, таких что
(1) $\exists$ биекция $\tau : \Phi \to \Phi$ с $\tau(\varphi) \geq \varphi\ \forall\,\varphi \in \Phi$ и $\Pi_{\tau(\varphi)} = \Pi_\varphi[1]$;
(2) $\forall\,\varphi > \psi$ $\mathrm{Hom}(\Pi_\varphi, \Pi_\psi) = 0$;
(3) $\forall\, X \in D$, $X \neq 0$ $\exists\ \varphi_0 < \dots < \varphi_n \in \Phi$ и система Постникова

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& X_{\varphi_0} \arrow[dr] & & X_{\varphi_1} \arrow[dr] & & & & X_{\varphi_n} \arrow[dr] & \\
X \arrow[ur] & & F^1X \arrow[ll] \arrow[ur] & & F^2X \arrow[ll] & \cdots \arrow[l] & F^nX \arrow[l] \arrow[ur] & & 0 \arrow[ll]
\end{tikzcd}$$

где $X_{\varphi_i} \in \Pi_{\varphi_i}$. Φ – *множество наклонов*. $X_{\varphi_i} \in \Pi_\varphi$ – *полустабильный объект* наклона φ, последовательность отмеченных треугольников называют фильтрацией Гардера–Нарасимхана объекта X (ГН-фильтрация).

Введем короткое обозначение для этой фильтрации: $X \rightsquigarrow (X_{\varphi_0}, \dots, X_{\varphi_n})$.

Предложение. *Фильтрация Гардера-Нарасимхана объекта X определена однозначно с точностью до единственного изоморфизма систем Постникова.*

4.1. Функториальность ГН-фильтрации

Фиксируем t-стабильность $(\Phi, \{\Pi_\varphi\}_\varphi \in \Phi)$ на производной категории D и будем рассматривать множество наклонов Φ как категорию с одной стрелкой $\varphi \longleftarrow \psi$ для каждого неравенства $\varphi < \psi$. Тогда ГН-фильтрацию

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& X_{\varphi_0} \arrow[dr] & & X_{\varphi_1} \arrow[dr] & & & & X_{\varphi_n} \arrow[dr] & \\
X = F^0 \arrow[ur, "g_0"] & & F^1X \arrow[ll, "f_1"] \arrow[ur, "g_1"] & & F^2X \arrow[ll, "f_2"] & \cdots \arrow[l] & F^nX \arrow[l] \arrow[ur, "g_n"] & & 0 \arrow[ll, "f_{n+1}"]
\end{tikzcd}$$

можно считать локально постоянным непрерывным слева ковариантным функтором $\Phi \xrightarrow{F_X} D$:

$$\begin{aligned}
F_X(\gamma) &= 0, && \text{при} \quad \varphi_n < \gamma,\\
F_X(\gamma) = F_X(\varphi_0) &= X, && \text{при} \quad \gamma \leq \varphi_0,\\
F_X(\gamma) &= F_X(\varphi_i), && \text{при} \quad \varphi_{i-1} < \gamma \leq \varphi_i,\\
F_X(\alpha \leftarrow \beta) &= f_k \circ \dots \circ f_m, && \text{при} \quad \varphi_{k-1} < \alpha \leq \varphi_k,\\
& && \qquad\quad\ \varphi_m < \beta \leq \varphi_{m+1}.
\end{aligned}$$

С этой точки зрения множество всех ГН-фильтраций – полная подкатегория $\mathcal{F}(\Phi, D) \subset \mathcal{F}un(\Phi, D)$ в категории фукторов $\Phi \to D$. Морфизм $\eta : F_X \to F_Y$ в $\mathcal{F}(\Phi, D)$ – естественное преобразование функторов, т.е. семейство отображений $F_X(\varphi) \xleftarrow{\eta(\varphi)} F_Y(\varphi)$ с очевидным коммутативным квадратом для каждого неравенства $\varphi < \psi$.

Предложение. *Сопоставляя функтору F_X, представляющему* ГН-*фильтрацию объекта X, сам объект X, мы получаем функтор $\mathcal{F}(\Phi, D) \xrightarrow{ev} D$. В частности,* ГН-*фильтрация объекта X функториальна по X.*

5. Примеры t-стабильности

1. Любая ограниченная t-структура $(D^{\leq 0}, D^{\geq 0})$ индуцирует t-стабильность с $\Phi = \mathbb{Z}$, и $\Pi_n = D^{\geq -n} \cap D^{\leq -n}$.

2. **t-стабильность, индуцированная с абелевой категории.** Пусть на абелевой категории $\mathcal{A}$ фиксирована структура стабильности, индуцированная наклоном γ с множеством значений Γ. Определим $\Phi = \mathbb{Z} \times \Gamma$ с лексикографическим порядком и введем набор подкатегорий

$$\Pi_{(n,\gamma)} = \{A[n] |\ A \in \mathcal{A} \text{ – полустабилен, } \gamma(A) = \gamma\}.$$

Тогда Φ и $\{\Pi_\varphi\}$ задают t-стабильность на $D^b(\mathcal{A})$. Действительно, $\mathrm{Hom}(\Pi_{(k,\mu)}, \Pi_{(n,\mu')}) = 0$ при $(k, \gamma) > (n, \gamma')$, $0 \neq X \in D$ канонически фильтруется своими когомологиями

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & X_{i_0} \arrow[dl] & & X_{i_1} \arrow[dl] & & & & X_{i_n} \arrow[dr] & \\
X & & F^1X \arrow[ll] \arrow[ul] & & F^2X \arrow[ll] \arrow[ul] & \cdots \arrow[l] & F^nX \arrow[l] \arrow[ur] & & 0 \arrow[ll]
\end{tikzcd}$$

с $X_{i_j} \in \mathcal{A}[i_j]$, и $\forall\, X_{i_j} \rightsquigarrow (X^0_{i_j}, \dots X^{n_j}_{i_j})$ имеет ГН-фильтрацию как сдвинутый объект из $\mathcal{A}$. Комбинируя эти фильтрации, получаем искомую ГН-фильтрацию для X.

3. **Исключительная t-стабильность.** $\mathcal{A}$ – категория когерентных пучков на $\mathbb{P}^n$ и $D = D^b(\mathcal{A})$. По теореме Бейлинсона любой

ненулевой $X \in D$ функториально представляется в виде

$$\begin{tikzcd}
& G^0 \arrow[dr] & & G^1 & & G^n & \\
X \arrow[ur] & & F^1X \arrow[ll] \arrow[ur] & \cdots \arrow[l] & F^nX \arrow[l] \arrow[ur] & & 0 \arrow[ll]
\end{tikzcd}$$

где

$$G^i = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} V_i^k \otimes \mathcal{O}(i)[-k]$$

с подходящими векторными пространствами V_i^k. Положим $\Pi_i = \{U^\bullet \otimes \mathcal{O}(i)\}$, $(i = 0, 1, \ldots, n)$, где $U^\bullet$ – градуированное векторное пространство. Так как для любых k и m

$$\operatorname{Hom}(\mathcal{O}(i)[k], \mathcal{O}(j)[m]) = \operatorname{Ext}^{m-k}_{\mathbb{P}^n}(\mathcal{O}(i), \mathcal{O}(j)) = 0$$

при $0 \le j < i \le n$, мы получаем t-стабильность с $n+1$ полустабильными подкатегориями. Будем называть такую t-стабильность *исключительной*.

6. Связь t-стабильности с t-структурами

Мы видели, что ограниченная t-структура индуцирует t-стабильность. Покажем, что t-стабильность $(\Phi, \{\Pi_\varphi\}_{\varphi \in \Phi})$ определяет семейство t-структур.

Фиксируем $\psi \in \Phi$ и рассмотрим

$$\begin{aligned} D^{\le 0} &= \{X \rightsquigarrow (X_{\varphi_0}, \ldots, X_{\varphi_n}) |\ \varphi_0 \ge \psi\}, \\ D^{\ge 1} &= \{X \rightsquigarrow (X_{\varphi_0}, \ldots, X_{\varphi_n}) |\ \varphi_n < \psi\}. \end{aligned}$$

Тогда $\operatorname{Hom}(D^{\le 0}, D^{\ge 1}) = 0$. Для построения отмеченного треугольника

$$X_{\le 0} \to X \to X_{\ge 1}$$

с $X_{\ge 1} \in D^{\ge 1}$ и $X_{\le 0} \in D^{\le 0}$ из определения t-структуры рассмотрим ГН-фильтрацию $X \rightsquigarrow (Y_{\psi_0}, \ldots, Y_{\psi_n})$.

$$\begin{aligned} &\psi_n < \psi \Rightarrow X = X_{\ge 1}, X_{\le 0} = 0, \\ &\psi_0 \ge \psi \Rightarrow 0 = X_{\ge 1}, X_{\le 0} = X, \\ &\psi_i \ge \psi > \psi_{i-1} \Rightarrow \\ &X_{\le 0} \rightsquigarrow (X_{\psi_i}, \ldots, X_{\psi_n}),\ X_{\ge 1} \rightsquigarrow (X_{\psi_0}, \ldots, X_{\psi_{i-1}}). \end{aligned}$$

Таким образом, зная все t-стабильности, мы знаем все t-структуры, и наоборот.

7. Частичное упорядочение t-стабильностей

$(\Phi, \{\Pi_\varphi\}_{\varphi\in\Phi})$ t-стабильность на D. Предположим, мы нашли в некоторой Π_φ две подкатегории $\Pi_{\pm\varphi} \subset \Pi_\varphi$ с условием: $\mathrm{Hom}(\Pi_{+\varphi}, \Pi_{-\varphi}) = 0$ и

$$\forall\, X \in \Pi_\varphi\ \exists\,\text{отм. тр. } X_+ \to X \to X_- \text{ с } X_\pm \in \Pi_{\pm\varphi}.$$

Тогда можно построить новую t-стабильность с $\Phi' = \{-\varphi, +\varphi\} \cup (\Phi \backslash \{\varphi\})$ с очевидным порядком. Это наблюдение можно обобщить.

Определение. Пусть (Φ, Π_φ), (Ψ, P_ψ) – t-стабильности на D, а функтор сдвига действует на Φ и Ψ автоморфизмами τ_Φ и τ_Ψ. Скажем, что t-стабильность Φ *тоньше* чем Ψ (а Ψ *грубее* Φ), обозначив $\Phi \preceq \Psi$, если существует такое наложение $r\ \Phi \to \Psi$, что

1) $r\tau_\Phi = \tau_\Psi r$;
2) $\varphi' > \varphi'' \Leftrightarrow r(\varphi') \geq r(\varphi'')$;
3) $\forall$ Ψ-полустабильного X_ψ ГН-фильтрация отн. Φ имеет вид

$$X_\psi \rightsquigarrow (X_{\varphi_0}, \ldots, X_{\varphi_n}), \quad \varphi_i \in r^{-1}(\psi).$$

7.1. Тончайшая t-стабильность.

Можно сказать, что грубая t-стабильность получается из более тонкой «склеиванием» рядом стоящих полустабильных категорий в одну. Отношение тоньше–грубее задает частичный порядок на множестве всех t-стабильностей данной категории. Минимальный элемент относительно этого порядка называется *тончайшей* t-стабильностью. Очевидно, что тончайшие t-стабильности несут в себе наиболее полную информацию о t-структурах.

Предложение. Т-*стабильность* $(\Phi, \{\Pi_\varphi\}_{\varphi\in\Phi})$ *на* $D^b(\mathcal{A})$, *индуцированная структурой стабильности (в смысле А. Рудакова) на абелевой категории* $\mathcal{A}$ *измельчается до тончайшей стабильности.*

Следствие. *Модулярная* t-*стабильность на производной категории когерентных пучков на гладкой алгебраической кривой,* *т.е.* t*-стабильность, обобщающая стабильность Мамфорда-Такемото когерентных пучков, измельчается до тончайшей* t*-стабильности.*

8. Категория, порожденная исключительной парой

Фиксируем векторное пространство H, $\dim H = h$ и рассмотрим абелеву категорию модулей Кронекера с объектами $V_1 \xrightarrow{\psi} H \otimes V_2$, где V_i – конечномерные векторные пространства. Морфизмы в ней – это коммутативные квадраты:

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r] & H \otimes V_2 \\ V_1' \arrow[u, "f_1"] \arrow[r] & H \otimes V_2' \arrow[u, "id_H \otimes f_2"'] \end{tikzcd}$$

Обозначим через $\mathcal{P}_h$ производную категорию от категории модулей Кронекера. Пусть $E_0 = (\mathbb{C} \to H \otimes 0)$ и $E_1[-1] = (0 \to H \otimes \mathbb{C})$. Объекты E_0 и E_1 образуют исключительную hom-пару, т.е.

$$\overset{\bullet}{\mathrm{Hom}}(E_i, E_j) = \begin{cases} \mathrm{Hom}^0(E_i, E_i) = \mathbb{C}, & i = j, \\ \mathrm{Hom}^0(E_0, E_1) = H = \mathbb{C}^h, & i = 0, \ j = 1, \\ 0, & i = 1, \ j = 0. \end{cases}$$

Известно, что $\mathcal{P}_h$ порождена парой (E_0, E_1) как триангулированная категория. При $h = 2$ $\mathcal{P}_2$ эквивалентна $D^b(Coh\mathbb{P}^1)$.

Как следствие, любой объект $X \in \mathcal{P}_h$ получается как конус морфизма

$$X \longrightarrow V_0^\bullet \otimes E_0 \longrightarrow V_1^\bullet \otimes E_1, \qquad (1)$$

где $V_i^\bullet$ – градуированные векторные пространства, а $V^\bullet \otimes E = \bigoplus_i V^i \otimes E[-i]$. Таким образом, на $\mathcal{P}_h$ возникает исключительная t-стабильность с множеством наклонов $\{0, 1\}$ и полустабильными категориями $\Pi_i = \{E_i[n] | \ n \in \mathbb{Z}\}$.

Мы можем размножать исключительные пары (и исключительные t-стабильности) рекуррентным образом:

$$\begin{gathered} E_{n-1} \longrightarrow \mathrm{Hom}(E_n, E_{n+1}) \otimes E_n \longrightarrow E_{n+1}, \\ E_{n-1} \longrightarrow \mathrm{Hom}(E_{n-1}, E_n)^* \otimes E_n \longrightarrow E_{n+1}. \end{gathered}$$

При этом $\forall\, n,k \in \mathbb{Z}$ $(E_n[k], E_{n+1}[k])$ – исключительная hom-пара и может быть подставлена в (1) вместо (E_0, E_1). Других исключительных hom-пар в $\mathcal{P}_h$ нет. Все исключительные t-стабильности (с точностью до измельчения и переупорядочивания наклонов) параметризуются целым числом n.

8.1. Тончайшая исключительная t-стабильность

Факторы ГН-фильтрации в (1) можно переставить так, что согласно нумерации факторов будут выполняться неравенства:

$$\cdots < V_0^0 \otimes E_0 < V_1^1 \otimes E_1[-1] < V_0^{-1} \otimes E_0[1] < V_1^1 \otimes E_1 \cdots$$

И мы получаем t-стабильность с множеством наклонов $\mathbb{Z}$ и полустабильными категориями

$$\Pi_k = \begin{cases} \{V \otimes E_0[n]\}, & k = 2n, \\ \{V \otimes E_1[n-1]\}, & k = 2n+1, \end{cases}$$

где V – конечномерные векторные пространства. Сдвиг действует на $\mathbb{Z}$ автоморфизмом $\tau : n \mapsto n+2$. Очевидно, это тончайшая t-стабильность.

Посмотрим на t-структуру и ее ядро, индуцированную такой t-стабильностью.

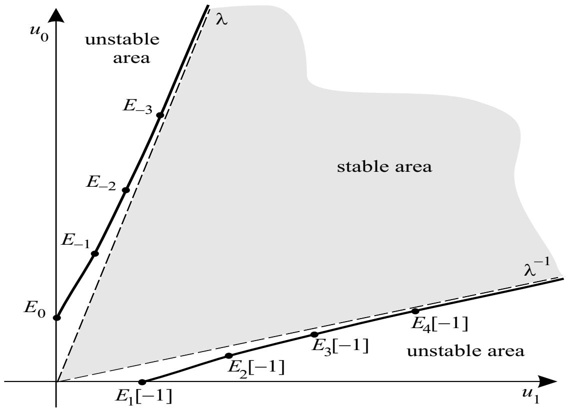
$$\begin{array}{l} D^{\le 0} = \{X \rightsquigarrow (X_{k_0}, \ldots, X_{k_n}) |\ k_0 \ge 0\},\ X_{k_i} \in \Pi_{k_i}; \\ D^{\ge 0} = \{X \rightsquigarrow (X_{k_0}, \ldots, X_{k_n}) |\ k_n < 2\}. \end{array}$$

$$\mathcal{A} = D^{\le 0} \cap D^{\ge 0} = \{X \rightsquigarrow (X_0, X_1)\}.$$

$$X \in \mathcal{A} \ \Leftrightarrow\ V_1 \otimes E_1[-1] \to X \to V_0 \otimes E_0,$$

То есть $\mathcal{A}$ – категория модулей Кронекера с $H = \mathrm{Hom}(E_0, E_1)$. На $\mathcal{A}$ есть две аддитивные функции $u_0 = \dim V_0$, $u_1 = \dim V_1$. И возникают два наклона: $\varepsilon = \frac{u_1}{u_0}$ и $\mu = \frac{u_0}{u_1}$. Любопытно, что любой наклон γ эквивалентен одному из этих, т.е. γ-полустабильный модуль Кронекера либо ν-, либо μ-полустабилен.

Существует только 2 ν-стабильных модуля Кронекера: E_0 и $E_1[-1]$, т.е. ν-стабильность – исключительна. А μ-стабильность совпадает со стабильностью модулей Кронекера, приходящей из геометрической теории инвариантов и мы можем строить модули μ-полустабильных объектов. Причем можно указать все классы в $K_0(\mathcal{A})$, реализующиеся μ-полустабильными объектами.



Можно доказать, что любая другая t-стабильность на $\mathcal{P}_h$ получается огрублением (измельчением) или переупорядочиванием полустабильных категорий этих двух.

Библиографический список

1. *Rudakov A.* Stability for an abelian category. J. Algebra 197 (1997). № 1. P. 231–245.
2. *Bridgeland T.* Stability conditions on triangulated categories. arXiv:math.AG / 0212237.
3. *Bridgeland T.* Stability conditions on K3 surfaces. arXiv:math.AG /0307164. V. 1.

Перестройки стабильных систем на поверхностях

Б.В. Карпов

Введение

Пусть S – гладкая проективная поверхность над $\mathbb{C}$, H – обильный дивизор на S такой, что $H \cdot K_S < 0$. Конечно, существование такого обильного дивизора накладывает сильные ограничения на поверхность; этим ограничениям удовлетворяют, в частности, поверхности дель Пеццо, рациональные линейчатые поверхности, а также некоторые другие классы поверхностей (например, разрешения особенностей особых поверхностей дель Пеццо).

В данной статье мы описываем конструкцию перестроек систем стабильных пучков на поверхности S, являющуюся в известном смысле обобщением перестроек исключительных пучков ([1, 2, 4, 8]), и некоторые применения этой конструкции. Используемое понятие стабильности – стабильность по Гизекеру относительно H.

В отличие от исключительных пучков, перестройки стабильных систем определены не всегда, и условия, которые естественно наложить, являются арифметическими, а не когомологическими. Самый ранний известный автору источник, где используются аналогичные арифметические условия при работе с расслоениями на кривых и где доказываются простейшие аналоги предложений 1 и 2 (см. ниже), – статья [10].

Пусть $\mathcal{E}$ – когерентный пучок на S. *Степенью* и *наклоном* пучка $\mathcal{E}$ назовем соответственно величины

$$\deg(\mathcal{E}) = \deg_H(\mathcal{E}) := c_1(\mathcal{E}) \cdot H \quad \text{и} \quad \mu(\mathcal{E}) := \frac{\deg(\mathcal{E})}{\mathrm{rk}(\mathcal{E})}\,,$$

а образ $\mathcal{E}$ в $K_0(S)$ мы будем задавать вектором

$$vEv(\mathcal{E}) = (\mathrm{rk}(\mathcal{E}), c_1(\mathcal{E}), -\chi(\mathcal{E})) \in \mathbb{Z} \oplus \mathrm{Pic}\, S \oplus \mathbb{Z}\,.$$

Для произвольного элемента $v \in \mathbb{Z} \oplus \mathrm{Pic}\, S \oplus \mathbb{Z}$ обозначим через $\mathcal{M}(v)$ многообразие модулей (возможно, пустое) полустабильных пучков $\mathcal{E}$ с $v(\mathcal{E}) = v$.

Если $\mathcal{E}$ – пучок без кручения (каковыми по определению являются полустабильные пучки), то имеет место каноническое вложение пучка $\mathcal{E}$ в его рефлексивную оболочку $\mathcal{E}^{\vee\vee}$. Положим $Q_{\mathcal{E}} = \mathcal{E}^{\vee\vee}/\mathcal{E}$, это пучок с носителем на нульмерной подсхеме поверхности S.

Описание перестроек

Определение 1. Назовем *блоком* упорядоченный набор $\widehat{\mathcal{E}} = (\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_m)$ стабильных пучков, имеющих одинаковые ранги, одинаковые степени и попарно неизоморфные рефлексивные оболочки. Числа m, $\operatorname{rk}(\widehat{\mathcal{E}}) := \operatorname{rk}(\mathcal{E}_i)$ и $\deg(\widehat{\mathcal{E}}) := \deg(\mathcal{E}_i)$ назовем соответственно *длиной*, *рангом* и *степенью* блока $\widehat{\mathcal{E}}$.

Этому определению удовлетворяет, в частности, блок исключительных расслоений на поверхности дель Пеццо в смысле [4].

Определение 2. *Блочной системой (стабильных пучков)* назовем триаду вида $\widehat{\sigma} = (\widehat{\mathcal{E}}, \widehat{\mathcal{F}}, (V_{ij}))$, в которой $\widehat{\mathcal{E}}$ – блок длины m, $\widehat{\mathcal{F}} = (\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n)$ – блок длины n и (V_{ij}), $i \in \{1, \dots, m\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$, – набор векторных пространств, если выполнено одно из следующих условий.

a) $\deg(\widehat{\mathcal{F}}) \operatorname{rk}(\widehat{\mathcal{E}}) - \deg(\widehat{\mathcal{E}}) \operatorname{rk}(\widehat{\mathcal{F}}) = 1$, и зафиксированы вложения $V_{ij} \hookrightarrow \operatorname{Hom}(\mathcal{E}_i, \mathcal{F}_j)$. В этом случае $\widehat{\sigma}$ называется *системой типа* hom.

b) $\deg(\widehat{\mathcal{F}}) \operatorname{rk}(\widehat{\mathcal{E}}) - \deg(\widehat{\mathcal{E}}) \operatorname{rk}(\widehat{\mathcal{F}}) = -1$, и зафиксированы вложения $V_{ij} \hookrightarrow \operatorname{Ext}^1(\mathcal{E}_i, \mathcal{F}_j)$. В этом случае $\widehat{\sigma}$ называется *системой типа* ext.

Левую перестройку такой системы можно представлять себе как “перенос налево” пучков $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n$ через блок $\widehat{\mathcal{E}}$; при этом возникают новые пучки $\mathcal{C}_j$, которые могут в свою очередь образовывать блок $\widehat{\mathcal{C}}$.[1]

Таким образом, ключевым моментом является “перенос пучка через блок”, и для левой перестройки достаточно рассмотреть систему $\widehat{\sigma}$ при $n = 1$; при этом мы будем писать $\mathcal{F}$ вместо $\mathcal{F}_1$ и V_i вместо V_{i1}.

Итак, пусть имеется блочная система стабильных пучков

$$\widehat{\sigma} = (\widehat{\mathcal{E}}, \mathcal{F}, (V_i)); \tag{1}$$

положим $r = \operatorname{rk}(\widehat{\mathcal{E}})$ и $r' = \operatorname{rk} \mathcal{F}$.

[1] Однако, возможны ситуации, когда пучки $\mathcal{C}_j$ оказываются попарно изоморфными.

Предложение 1. *Пусть $\widehat{\sigma}$ – система типа hom. Рассмотрим соответствующие морфизмы $\varphi_k : V_k \otimes \mathcal{E}_k \to \mathcal{F}$ и их сумму $\varphi : \bigoplus_{k=1}^m (V_k \otimes \mathcal{E}_k) \longrightarrow \mathcal{F}$. Имеют место следующие утверждения.*

1) При $\sum_{k=1}^m \dim V_k < r'/r$ морфизм φ инъективен, подпучок кручения $T(\operatorname{coker}\varphi) \subset \operatorname{coker}\varphi$ является подпучком $\bigoplus_{k=1}^m (V_k \otimes Q_{\mathcal{E}_k})$ и фактор-пучок $(\operatorname{coker}\varphi)/T(\operatorname{coker}\varphi)$ стабилен.

2) При $\sum_{k=1}^m \dim V_k > r'/r$ морфизм φ сюръективен в коразмерности 1 и пучок $\ker\varphi$ стабилен.

При $m = 1$ в случае, когда $\mathcal{E}_1$ локально свободен, доказательство с очевидными изменениями повторяет доказательство п. (2) леммы 2.1 статьи [9]. При не локально свободном $\mathcal{E}_1$ используется каноническое вложение в рефлексивную оболочку и далее применяется индукция по m. Отметим, что в условиях п. 1), если все $\mathcal{E}_i$ локально свободны, то все $Q_{\mathcal{E}_i} = 0$, откуда $T(\operatorname{coker}\varphi) = 0$ и пучок $\operatorname{coker}\varphi$ стабилен.

Предложение 2. *Пусть $\widehat{\sigma}$ – система типа ext. Рассмотрим соответствующее набору подпространств $(V_1, \ldots, V_m)$ расширение*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{C} \longrightarrow \bigoplus_{k=1}^{m} (V_k \otimes \mathcal{E}_k) \longrightarrow 0 \tag{2}$$

Тогда для стабильности пучка $\mathcal{C}$ необходимо и достаточно, чтобы

$$V_k \cap \operatorname{Hom}(\mathcal{E}_k, Q_{\mathcal{F}}) = \{0\}, \qquad k = 1, \ldots, m, \tag{3}$$

где пересечения рассматриваются внутри пространств $\operatorname{Ext}^1(\mathcal{E}_k, \mathcal{F})$. В частности, если $\mathcal{F}$ локально свободен, то $\mathcal{C}$ стабилен.

Случай $m = 1$ разобран в [5, 6]. Доказательство проводится индукцией по m.

Сформулированные выше два предложения позволяют определить левую перестройку системы (1).

Определение 3. Левой перестройкой системы $\widehat{\sigma}$ называется система $L\widehat{\sigma} = (\mathcal{C}, \widehat{\mathcal{E}}, (V_i^\vee))$, задаваемая следующим образом.

1. Если система $\widehat{\sigma}$ – типа hom и $\sum_{i=1}^m \dim V_i > r'/r$, то $\mathcal{C}$ задается как ядро канонического отображения φ, а $V_i^\vee$ естественно

отождествляются с подпространствами в $\mathrm{Hom}(\mathcal{C},\mathcal{E}_i)$, так что $L\widehat{\sigma}$ имеет тип hom.

2. Если $\widehat{\sigma}$ – система типа hom и $\sum_{i=1}^m \dim V_i > r'/r$, то левая перестройка определена только при отсутствии кручения у пучка $\mathcal{C} := \operatorname{coker}\varphi$. При этом $V_i^\vee$ естественно отождествляются с подпространствами в $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{C},\mathcal{E}_i)$ и система $L\widehat{\sigma}$ имеет тип ext.

3. Если $\widehat{\sigma}$ – система типа ext, то левая перестройка определена при условии (3), и $\mathcal{C}$ получается в результате расширения (2). Пространства $V_i^\vee$ естественно отождествляются при этом с подпространствами в $\mathrm{Hom}(\mathcal{C},\mathcal{E}_i)$, так что $L\widehat{\sigma}$ имеет тип hom.

По аналогии с перестройками исключительных пучков, в случаях 1, 2 и 3 перестройку называют соответственно *делением*, *отскоком* и *расширением*.

Достаточным условием существования левой перестройки системы $\widehat{\sigma}$ в случае 2 является локальная свобода пучков $\mathcal{E}_i$, $i = 1,\ldots,m$, а в случае 3 – локальная свобода пучка $\mathcal{F}$.

Правые перестройки систем вида $(\mathcal{C},\widehat{\mathcal{E}},(V_i^\vee))$ (т. е. “перенос пучка направо через блок”) определяются аналогично.

Примеры и применения

Внимательное рассмотрение самого простого случая $m = 1$, т.е. когда имеется не “блочная”, а “простая” система стабильных пучков $\sigma = (\mathcal{E},\mathcal{F},V)$, приводит к следующей теореме об оценке числа глобальных гомоморфизмов $h^0(\mathcal{E},\mathcal{F}) = \dim \mathrm{Hom}(\mathcal{E},\mathcal{F})$.

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$ – стабильные пучки, имеющие $v(\mathcal{E}) = (r,c_1,\delta)$ и $v(\mathcal{F}) = (r',c_1',\delta')$, причем $\deg(\mathcal{E}^\vee\otimes\mathcal{F}) = 1$ и $H\cdot K_S < \mu(\mathcal{E}) < \mu(\mathcal{F}) < 0$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1) *Если $\mathcal{E}$ локально свободен, $1 < r < r'$ и $\delta'/\delta < \lfloor r'/r\rfloor$, то во всех случаях, кроме*

$$c_1\cdot H = -1 \quad и \quad v(\mathcal{F}) = v(\mathcal{O}_S) + \lceil\delta'/\delta\rceil\, v(\mathcal{E}),$$

имеет место оценка

$$h^0(\mathcal{E},\mathcal{F}) \leqslant \lfloor\delta'/\delta\rfloor\,.$$

2) *Если* $\delta'/\delta > \lceil r'/r \rceil$ *или* $\delta' > 0$, $\delta = 0$, *то во всех случаях, кроме*

$$c_1 \cdot H = 1 + rH \cdot K_S \quad \text{и} \quad v(\mathcal{F}) = \lceil r'/r \rceil \, v(\mathcal{E}) - v(K_S),$$

имеет место оценка

$$h^0(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \leqslant \lfloor r'/r \rfloor .$$

3) *Если* $r > r' > 1$ *и* $\delta/\delta' < \lfloor r/r' \rfloor$, *то во всех случаях, кроме*

$$c_1' \cdot H = 1 + r'H \cdot K_S \quad \text{и} \quad v(\mathcal{E}) = v(K_S) + \lceil \delta/\delta' \rceil \, v(\mathcal{F}),$$

имеет место оценка

$$h^0(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \leqslant \lfloor \delta/\delta' \rfloor .$$

4) *Если* $\mathcal{E}$ *локально свободен и* $\delta/\delta' > \lceil r/r' \rceil$ *или* $\delta' = 0$, $\delta > 0$, *то во всех случаях, кроме*

$$c_1' \cdot H = -1 \quad \text{и} \quad v(\mathcal{E}) = \lceil \delta'/\delta \rceil \, v(\mathcal{F}) - v(\mathcal{O}_S).$$

имеет место оценка

$$h^0(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \leqslant \lfloor r/r' \rfloor .$$

Доказательство опирается на следующий простой факт, вытекающий из свойств стабильности.

Лемма 1 (о неотрицательности). *Пусть* $\mathcal{C}$ *– стабильный пучок, удовлетворяющий одному из трех условий:*

a) $H \cdot K_S < \mu(\mathcal{C}) < 0$,

b) $\mathrm{rk}(\mathcal{C}) = 1$, $\deg(\mathcal{C}) = 0$ *и* $\mathcal{C} \neq \mathcal{O}_S$,

c) $\mathrm{rk}(\mathcal{C}) = 1$, $\deg(\mathcal{C}) = H \cdot K_S$ *и* $\mathcal{C} \neq K_S$.

Тогда $-\chi(\mathcal{C}) \geqslant 0$.

При $1 < r < r'$, если отношение δ'/δ заключено (нестрого) между нижней и верхней целыми частями r'/r, то общие методы доказательства теоремы 1 не применимы, и оценка $h^0(\mathcal{E},\mathcal{F})$ становится нетривиальной задачей. Однако, в некоторых случаях эта задача решается посредством применения перестроек систем стабильных пучков.

Пусть $S = \mathbb{P}^2$, $H = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$. Рассмотрим последовательность $\{r_n\}$, заданную рекуррентным соотношением и начальными условиями

$$r_{n+1} + r_{n-1} = 3\,r_n\,, \qquad r_{-1} = r_0 = 1\,. \tag{4}$$

Элементам этой последовательности соответствуют исключительные расслоения E_n, задаваемые аналогичным образом в категории пучков. А именно, начальные условия имеют вид

$$E_{-1} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-2), \qquad E_0 = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1), \tag{5}$$

а роль рекуррентного соотношения играет каноническая точная последовательность

$$0 \longrightarrow E_{n-1} \xrightarrow{ev^*} E_n \otimes \operatorname{Hom}(E_n, E_{n+1}) \xrightarrow{ev} E_{n+1} \longrightarrow 0\,, \tag{6}$$

задающая как левые $\Big((E_n, E_{n+1}) \xmapsto{L} (E_{n-1}, E_n)\Big)$, так и правые $\Big((E_{n-1}, E_n) \xmapsto{R} (E_n, E_{n+1})\Big)$ перестройки в силу канонического изоморфизма

$$\operatorname{Hom}(E_n, E_{n+1}) = \operatorname{Hom}(E_{n-1}, E_n)^{\vee}.$$

Имеем:

$$h^0(E_n, E_{n+1}) = h^0\big(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-2), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1)\big) = h^0\big(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)\big) = 3,$$

и при $n = 0$ тройка (6) является точной последовательностью Эйлера, подкрученной на (-2). В частности, $E_1 = T\mathbb{P}^2(-2) = \Omega\mathbb{P}^2(1)$.

Пользуясь начальными данными (5) и последовательностью (6), легко показать, что

$$\operatorname{rk}(E_n) = r_n, \qquad c_1(E_n) = -r_{n-1} \qquad \text{и} \qquad -\chi(E_n) = 0. \tag{7}$$

Кроме того, имеет место соотношение

$$\begin{vmatrix} r_n & r_{n+1} \\ r_{n-1} & r_n \end{vmatrix} = -1\,,$$

из которого следует, что последовательность наклонов $\mu(E_n) = -r_{n-1}/r_n$ возрастает. Разрешая рекуррентное соотношение из (4), нетрудно видеть, что $\lim\limits_{n\to-\infty}\mu(E_n) = \frac{-3-\sqrt{5}}{2}$, откуда

$$-3 < \mu(E_n) < 0, \quad \forall n.$$

Таким образом, наклоны всех исключительных расслоений E_n зажаты между наклоном канонического класса $\mathbb{P}^2$ и нулем, и в силу стабильности исключительных расслоений мы имеем:

$$H^0(E_n) = H^2(E_n) = 0, \qquad H^1(E_n) = 0,$$

последнее равенство – следствие обращения в нуль эйлеровой характеристики (см. (7)).

Каждое из расслоений E_n в свою очередь является начальным членом последовательности многообразий модулей

$$\mathcal{M}_n(\delta) := \mathcal{M}(r_n, -r_{n-1}, \delta), \quad \delta = 0, 1, 2, \dots\ ,$$

где

$$\dim \mathcal{M}_n(\delta) = 2r_n\delta.$$

При этом $\mathcal{M}_n(0)$ состоит из одной точки E_n. По последовательностям многообразий модулей определяются степенные ряды, участвующие в математическом тестировании гипотезы S-двойственности (см. [3]).

Основным случаем будет $n \geqslant 0$, тогда $2 \leqslant \frac{r_{n+1}}{r_n} < \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{r_{n+1}}{r_n} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} < 3$. Случай $n \leqslant -1$ является в некотором смысле двойственным.

Предложение 3. *Пусть $\mathcal{E} \in \mathcal{M}_n(\delta)$, $F \in \mathcal{M}_{n+1}(\delta')$, причем $\mathcal{E}$ локально свободен. Тогда имеют место следующие оценки:*

1) $h^0(\mathcal{E}, \mathcal{F}) = 0$ *при* $\delta'/\delta < 1$;

2) $h^0(\mathcal{E},\mathcal{F}) \leqslant 1$ *при* $1 \leqslant \delta'/\delta < 2$;
3) $h^0(\mathcal{E},\mathcal{F}) \leqslant 2$ *при* $\delta'/\delta \geqslant 2$ *и при* $\delta = 0$, $\delta' > 0$;
4) $h^0(\mathcal{E},\mathcal{F}) = 3$ *при* $\delta = \delta' = 0$.

Доказательство. Утверждения 1) и 2) следуют из п. 1) теоремы 1. Оценка утверждения 3) при $\delta'/\delta > 3$ и при $\delta' > 0$, $\delta = 0$ следует из п. 2) той же теоремы. Пусть $2 \leqslant \delta'/\delta \leqslant 3$, и V – трехмерное подпространство в $\mathrm{Hom}(\mathcal{E},\mathcal{F})$. Тогда левые перестройки системы $\sigma = (\mathcal{E},\mathcal{F},V)$ в силу рекуррентного соотношения из (4) приводят к пучкам, ранги которых принимают последовательно значения $r_{n-1}, r_{n-2}, \ldots$. Точнее, если $L^k\sigma = (\mathcal{E}_k,\mathcal{E}_{k-1},W_k)$, то $\dim W_k = 3$, $\mathrm{rk}(\mathcal{E}_k) = r_{n-k}$ и $c_1(\mathcal{E}_k) = -r_{n-k-1}$. Поскольку $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0$ локально свободен, то таковыми являются и все $\mathcal{E}_k$, $k \geqslant 0$, в частности, $\mathcal{E}_n$, имеющий $\mathrm{rk}(\mathcal{E}_n) = r_0 = 1$ и $c_1(\mathcal{E}_n) = -r_{-1} = -1$.

Таким образом, $\mathcal{E}_n = \mathcal{O}(-1)$ и $-\chi(\mathcal{E}_n) = 0$. Это обстоятельство поможет привести к противоречию, т.к. по условию $0 < -\chi(\mathcal{E}) < -\chi(\mathcal{F})$. Действительно, рассмотрим наименьшее k такое, что $-\chi(\mathcal{E}_k) = 0$, тогда $-\chi(\mathcal{E}_{k-1}) > 0$ и из точной тройки, задающей левую перестройку системы $L^k\sigma$, следует, что $-\chi(\mathcal{E}_{k+1}) < 0$. Это невозможно из соображений стабильности.

Утверждение 3) доказывается аналогично 2) при $\delta'/\delta > 3$: предположение о наличии трехмерного подпространства $V \subset \mathrm{Hom}(\mathcal{E},\mathcal{F})$ левой перестройкой системы $(\mathcal{E},\mathcal{F},V)$ приводится к противоречию. Утверждение 4) – известный факт из теории исключительных расслоений, оно приведено для полноты картины.

Опишем теперь некоторые применения перестроек стабильных систем к изучению геометрии многообразий модулей. Пусть $\mathrm{Jump}_k(v,v')$ – локус на произведении многообразий модулей $\mathcal{M}(v) \times \mathcal{M}(v')$, состоящий из пар пучков $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ таких, что $h^0(\mathcal{E},\mathcal{F}) \geqslant k$. Рассмотрим естественные морфизмы

$$\Phi_k : \mathrm{Jump}_k(v,v') \longrightarrow \mathcal{M}(v), \qquad (\mathcal{E},\mathcal{F}) \xmapsto{\Phi_k} \mathcal{E},$$

$$\Psi_k : \mathrm{Jump}_k(v,v') \longrightarrow \mathcal{M}(v'), \qquad (\mathcal{E},\mathcal{F}) \xmapsto{\Psi_k} \mathcal{F}.$$

Пусть $\Psi_k^{(0)}$ – ограничение Ψ_k на прообраз $\Phi_k^{-1}(\mathcal{M}^{(0)}(v))$ открытого подмножества, состоящего из локально свободных пучков.

Всюду далее мы будем предполагать, что

$$v = (r_n, -r_{n-1}, \delta) \qquad \text{и} \qquad v' = (r_{n+1}, -r_n, \delta'),$$

считая по-прежнему $n \geqslant 0$.

Предложение 4. 1) *при* $1 \leqslant \delta'/\delta < 2$ *отображение* $\Psi_1^{(0)}$ *является вложением;*

2) *при* $\delta' > 3\delta$ *отображение* Ψ_2 *является вложением, а относительно* Ψ_1 *каждая точка из* $\mathcal{M}(v')$ *может иметь не более двух прообразов.*

Доказательство. Докажем от противного первое утверждение. Предположим, что найдутся такие $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2 \in \mathcal{M}^{(0)}(v)$ и $\mathcal{F} \in \mathcal{M}(v')$, что $h^0(\mathcal{E}_i, \mathcal{F}) \neq 0$. Зафиксируем одномерные подпространства $V_i \subset \operatorname{Hom}(\mathcal{E}_i, \mathcal{F})$ и рассмотрим блочную систему

$$\sigma = \bigl(\{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2\}, \mathcal{F}, \{V_1, V_2\}\bigr) \tag{8}$$

типа hom. Поскольку $\mathcal{E}_i$ локально свободны и $\operatorname{rk}(\mathcal{E}_1) + \operatorname{rk}(\mathcal{E}_2) = 2r_n < r_{n+1} = \operatorname{rk}(\mathcal{F})$, левая перестройка системы σ определена и имеет тип отскок. Это означает, что канонический морфизм

$$\varphi : (\mathcal{E}_1 \otimes V_1) \oplus (\mathcal{E}_2 \otimes V_2) \longrightarrow \mathcal{F} \tag{9}$$

инъективен и в системе

$$L\sigma = \bigl(\mathcal{C}, \{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2\}, \{V_1^\vee, V_2^\vee\}\bigr)$$

пучок $\mathcal{C} = \operatorname{coker}\varphi$ стабилен. Но тогда $-\chi(\mathcal{C}) = \delta' - 2\delta < 0$. Противоречие.

Чтобы во втором утверждении доказать, что Ψ_2 является вложением, достаточно показать, что не существует систем (8) типа hom, где уже $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ не обязательно локально свободны, $\dim V_1 = 2$ и $\dim V_2 = 1$. Пусть существует такая система. Поскольку

$$\operatorname{rk}\Bigl((V_1 \otimes \mathcal{E}_1) \oplus (V_2 \otimes \mathcal{E}_2)\Bigr) = 3r_n > r_{n+1},$$

левая перестройка системы σ – деление, морфизм (9) сюръективен в коразмерности 1 и пучок $\mathcal{C} = \ker\varphi$ стабилен. Но тогда $-\chi(\operatorname{im}\varphi) \geqslant \delta'$ и $-\chi(\mathcal{C}) \leqslant 3\delta - \delta' < 0$, т.е. мы опять получаем противоречие.

Остается показать, что в п. 2) каждая точка из $\mathcal{M}(v')$ может иметь не более двух прообразов относительно Ψ_1, т.е. исключить существование систем

$$\tau = \big(\{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3\}, \mathcal{F}, \{V_1, V_2, V_3\}\big)$$

типа hom, где $\dim V_i = 1$. Если такая система существует, то в силу неравенства

$$\mathrm{rk}\left(\bigoplus_{k=1}^{3}(V_k \otimes \mathcal{E}_k)\right) = 3r_n > r_{n+1},$$

левая перестройка τ является делением, это приводит к противоречию так же, как и в предыдущем рассуждении. □

Библиографический список

1. *Городенцев А.Л.* Исключительные расслоения на поверхностях с подвижным антиканоническим классом // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1988. Т. 52. № 4. С. 740–757.
2. *Gorodentsev A.L., Rudakov A.N.* Exceptional Vector Bundles on Projective Spaces // Duke Math. J., 54 (1987) 115–130.
3. *Карпов Б.В.* Тестирование S-двойственности и исключительные расслоения // Изв. РАН. Сер. матем. 1999. Т. 63. № 1. С. 107–122.
4. *Карпов Б.В., Ногин Д.Ю.* Трехблочные исключительные наборы на поверхностях дель Пеццо // Изв. РАН. Сер. матем. 1998. Т. 62. № 3. С. 3–38.
5. *Кулешов С.А.* Стабильные расслоения на K3-поверхности // Изв. АН СССР, Сер. матем. 1994. Т. 54, № 1. С. 213–220.
6. *Kuleshov S.A.* Moduli Spaces of sheaves necessary for testing S-duality conjecture. Preprint MPI 97–32.
7. *Кулешов С.А., Орлов Д.О.* Исключительные пучки на поверхностях дель Пеццо // Изв. РАН, Сер. матем., Т. 58 (3) 1994. С. 53–87.
8. *Рудаков А.Н.* Исключительные расслоения на квадрике // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1988. Т. 52. № 4. С. 782–812.

9. *Yoshioka K.* Some examples of Mukai's reflections on K3 surfaces // J. reine angew. Math. **515** (1999). P. 97–123.

10. *Тюрин А.Н.* Аналог теоремы Торелли для многомерных векторных расслоений на произвольной алгебраической кривой // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1970. Т. 34, № 2. С. 343–370.

О некоторых вопросах аксонометрии в $\mathbb{P}^n$

Л.Б. Медведева

Тема данного исследования может быть относена к теоретическим основам многомерной начертательной геометрии. Более точно, в работе получены некоторые обобщения теорем центральной аксонометрии.

Проблемы центральной аксонометрии аналогичны задачам параллельной аксонометрии, решение которых дается теоремой Польке-Шварца и в ее многочисленными обобщениями [2–8].

Основная задача состоит в следующем [1].

Пусть в $\mathbb{P}^n$ с введенной в нем метрикой заданы два проективных репера: невырожденный n-мерный репер – *оригинал*, и вырожденный, расположенный в k-мерной плоскости, – *образец*. Их задание определяет отображение пространства $\mathbb{P}^n$ на k-плоскость $\mathbb{P}^k \subset \mathbb{P}^n$. Требуется ответить, например, на следующие вопросы:

1. Можно ли найти такую k-плоскость проекций и $(n-k-1)$-мерный центр, чтобы при центральном проектировании оригинала из этого центра на плоскость проекций получить изображение, связанное с образцом преобразованием наперед заданного типа (проективным, аффинным,...)?

2. Какого максимального "сходства"между образцом и изображением можно достичь, если не налагать никаких условий на соответствие, связывающее изображение и образец?

3. Каким условиям должно удовлетворять соответствие, определяемое заданными реперами, чтобы при центральном про-

ектировании получить изображение, конгруэнтное (метрически подобное) образцу?

Как известно, за систему координат (репер) в $\mathbb{P}^n$ можно принять упорядоченную систему $n+2$ точек общего положения или дезаргову конфигурацию – фигуру, состоящую из точки O, n прямых, проходящих через точку O, и двух точек A_i и B_i (отличных от O) на каждой из них.

Исторически первой теоремой центральной аксонометрии была теорема Круппа. В работе [6] она сформулирована следующим образом.

Если в $\mathbb{P}^3$ даны произвольная дезаргова конфигурация D, то всегда можно выбрать центр и плоскость проекций так, чтобы проекцией конфигурации D служила плоская конфигурация, проективно эквивалентная плоской конфигурации D^0, при этом центр проекций определяется однозначно, а за плоскость проекций может быть взята любая плоскость, не проходящая через центр.

Большинство обобщений этой теоремы на $\mathbb{P}^n$ касаются случая, когда системы координат заданы в виде дезарговых конфигураций.

Задачу о возможности проектирования репера, состоящего из $n+2$ точек пространства $\mathbb{P}^n$, на гиперплоскость в изображение, проективное образцу (системе $n+2$ точек общего пложения в $\mathbb{P}^{n-1}$) впервые поставил и решил Н.М. Бескин [3]. Полученный им результат не совпадает с тем утверждением теоремы Круппа, которое касается центрального проектирования дезарговой конфигурации на гиперплоскость. Если при центральном проектировании дезарговой конфигурации пространства $\mathbb{P}^n$ требование проективности изображения и образца однозначно определяет $(n-k-1)$-мерный центр проектирования, то при проектировании репера из $n+2$ точек на гиперплоскость $\mathbb{P}^{n-1} \subset \mathbb{P}^n$ в систему точек, проективную образцу, множество точек-центров проектирования составляет в $\mathbb{P}^n$ нормальную рациональную кривую степени n, проходящую через все точки оригинала. Гиперплоскость проекций при этом, как и в случае утверждения Круппа, может быть выбрана произвольно, лишь бы она не проходила через центр проекций.

Случай проектирования репера из $n+2$ точек на $\mathbb{P}^k$ $(k < n-1)$ в изображение, проективное образцу, нигде не обсуждался.

В этом направлении нами получены следующие результаты.

Теорема 1. *Для любого натурального числа k $(k < n)$ существует $(n-k)$-параметрическое множество $(n-k-1)$-мерных плоскостей, каждая плоскость которого, за некоторым исключением, может служить центром проектирования $\mathbb{P}^n$ на $\mathbb{P}^k \subset \mathbb{P}^n$, при котором проективный репер A_i $(i = \overline{1, n+2})$ пространства $\mathbb{P}^n$ отображается в систему точек A'_i $(i = \overline{1, n+2})$, проективно эквивалентную образцу (системе $n+2$ точек A_i^0 общего положения в $\mathbb{P}^k$). Плоскостью проекций может служить любая k-мерная плоскость, не имеющая с центром проектирования общих точек, в том числе и любая из C_{n+2}^{k+1} k-плоскостей оригинала* [9, 10].

Следует отметить, что, если в случае $k \leqslant \left[\frac{n}{2}\right]$ доказательство удалось получить конструктивно с использованием координатного метода, то в случае $k > \left[\frac{n}{2}\right]$ при доказательстве использовались теоремы о пересечении циклов Шуберта на грассманиане $G(n-k, n+1)$.

Доказанный результат ставил вопрос о структуре многообразия центров проектирований, при которых репер, состоящий в $\mathbb{P}^n$ из $n+2$ точек общего положения, переходит в изображение, проективное образцу. При ответе на этот вопрос искомое многообразие изучено при $k = n-1, n-2, n-3$ [11, 12, 13].

Общий результат дает следующая теорема.

Теорема 2. *Множество $(m-1)$-мерных плоскостей, служащих центрами центральных проектирований пространства $\mathbb{P}^n$ на $\mathbb{P}^{n-m}$ $(m < n)$, которые отображают проективный репер A_i $(i = \overline{1, n+2})$ в систему $n+2$ точек $A'_i \in \mathbb{P}^{n-m}$, проективно эквивалентную образцу $T_i \in \mathbb{P}^{n-m}$, является:*

1) *многообразием, параметризуемым точками m-плоскости, при $n = 2m$;*

2) *семейством подмногообразий σ_{n-m}^{m+1} на грассманиане $G(m, n+1)$, параметризуемым точками $(n-m)$-мерной плоскости,*

если $0 < n - m \leqslant m - 1$ $(n \leqslant 2m - 1)$*;*

3) *многообразием, параметризуемым точками рационального многообразия* $F_m^{m+1} \subset \mathbb{P}^{m+1}$ *степени* $m + 1$ *при* $n = 2m + 1$*;*

4) *при* $n > 2m + 1$ *многообразием, параметризуемым точками многообразия, которое является пересечением* $n - 2m$ *гиперконусов* $K_i \subset \mathbb{P}^{n-m}$ *размерности* $n - m - 1$*: направляющими этих конусов служат поверхности* $F_{im}^{m+1} \subset \mathbb{P}_i^{m+1}$*, а вершинами являются специальным образом расположенные в* $\mathbb{P}^{n-m}$ $(n - 2m - 2)$*-мерные плоскости.*

Доказательство. Пусть в $\mathbb{P}^n$ заданы проективный репер A_i $(i = \overline{1, n+2})$, а в некоторой $(n - m)$-мерной плоскости – образец, система из $n+2$ точек T_i $(i = \overline{1, n+2})$, никакие $n-m+1$ из которых не лежат в одной $(n-m-1)$-мерной плоскости. В качестве $(n-m)$-плоскости проекций возьмем $\mathbb{P}^{n-m} = \langle A_1, A_2, \ldots, A_{n-m}, A_{n-m+1} \rangle$. Тогда при центральном проектировании $f : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^{n-m}$ $f(A_j) = A_j$ для $j = \overline{1, n-m+1}$. Если теперь за проекцию точки A_{n-m+2} взять какую-нибудь точку $A'_{n-m+2} \in \mathbb{P}^{n-m}$ $(A'_{n-m+2} \neq A_j)$, то проекции $A'_j \in \mathbb{P}^{n-m}$ точек A_j $(j = \overline{n-m+3, n+2})$ однозначно определяются в силу проективной эквивалентности изображения A'_i и образца T_i $(i = \overline{1, n+2})$.

Центр проектирования f должен пересекать прямые $\langle A_j A'_j \rangle$ $(j = \overline{n-m+2, n+2})$ и не иметь с $\mathbb{P}^{n-m}$ общих точек. Множество $(m-1)$-мерных плоскостей, пересекающих в $\mathbb{P}^n$ $m+1$ прямые, представляется на грассманиане $G(m, n+1)$ $(m+1)$-кратным пересечением циклов Шуберта σ_{n-m}, то есть многообразием σ_{n-m}^{m+1}. Последнее непусто, если $(n-m)(m+1) \leqslant m(n-m+1)$, то есть, если $n \leqslant 2m$.

Заметим, что при $n = 2m$ $\sigma_{n-m}^{m+1} = \sigma_m^{m+1} = \sigma_{m+1,\ldots m+1}$ (индекс $m+1$ повторяется m раз). Это говорит о том, что выбор точки $A'_{n-m+2} = A'_{m+2} \in \mathbb{P}^m$ – проекции точки A_{n-m+2} при отображении $f : \mathbb{P}^{2m} \to \mathbb{P}^m$, однозначно определяет центр проектирования f, и следовательно, в этом случае многообразие искомых центров проектирования параметризуется точками m-мерной плоскости.

Если $n < 2m$, то точка A'_{n-m+2}, взятая в $\mathbb{P}^{n-m}$ определяет уже не единственный $(m-1)$-мерный центр проектирования, а многообразие центров проектирования, и таких многообразий будет $(n-m)$-параметрическое множество.

Если $n \geqslant 2m+1$,то многообразие σ_{n-m}^{m+1} пусто, то есть не существует $(m-1)$-плоскостей, пересекающих прямые $A_jA'_j$ $(j = \overline{n-m+2, n+2})$. Отсюда следует, что точку A'_{n-m+2} в $\mathbb{P}^{n-m}$ выбрать произвольно нельзя. Ее необходимо взять так, чтобы линии связи $A_jA'_j$ $(j = \overline{n-m+2, n+2})$ имели хотя бы одну общую $(m-1)$-мерную секущую плоскость.

В [10] доказано, что, если точка $A'_{n-m+2} \in \mathbb{P}^{n-m}$ выбрана так, что m-плоскость

$$\tilde{\mathbb{P}}^m = \langle A'_{n-m+2}, A'_{n-m+3}, \ldots, A'_{n+1} \rangle$$

содержит точку $L = \mathbb{P}^{n-m} \cap \mathbb{P}^m$, $\mathbb{P}^m = \langle A_{n-m+2}, \ldots, A_{n+2} \rangle$, то линии связи $A_jA'_j$ $(j = \overline{n-m+2, n+2})$ имеют конечное число общих секущих плоскостей.

Для ответа на вопрос, какое множество описывает в этом случае точка A'_{n-m+2}, а значит и многообразие m-плоскостей $\tilde{\mathbb{P}}^m$, найдем условия, которым удовлетворяют координаты точки A'_{n-m+2}.

Рассмотрим сначала решение задачи при $n = 2m+1$. За плоскость проекций возьмем плоскость $\mathbb{P}^{m+1} = \langle A_1, A_2, \ldots, A_{m+2} \rangle$:

$$x_{m+3} = x_{m+4} = \ldots = x_{2m+2} = 0.$$

Будем считать, что в репере пространства ${}^0\mathbb{P}^{m+1}$, состоящем из точек T_i $(i = \overline{1, m+3})$, координаты точек T_j $(j = \overline{m+4, 2m+3})$ равны соответственно $(\alpha_{j\,1} : \alpha_{j\,2} : \ldots : \alpha_{j\,m+2})$. Теперь можно найти формулы проектирования $f : \mathbb{P}^{2m+1} \to \mathbb{P}^{m+1}$, при котором

$$\begin{array}{ll} f(A_i) = A_i, & \text{если } i = \overline{1, m+2}; \\ f(A_{m+3}) = A'_{m+3}, & \text{где } A'_{m+3}(a_1 : a_2 : \ldots : a_{m+2} : 0 : \ldots 0); \\ f(A_j) = A'_j, & \text{если } j = \overline{m+4, 2m+3}. \end{array}$$

Заметим, что здесь координаты точек A'_j однозначно определяются требованием проективной эквивалентности изображения A'_i и образца T_i $(i = \overline{1, 2m+3})$:

$$A'_j(a_1\alpha_{j\,1} : a_2\alpha_{j\,2} : \ldots : a_{m+2}\alpha_{j\,m+2}).$$

Матрица проектирования f имеет вид

$$A_j = \begin{pmatrix} \rho & 0 & \ldots & 0 & \rho_{m+3}a_1 & \rho_{m+4}a_1\alpha_{m+4\,1} & \ldots & \rho_{2m+2}a_1\alpha_{2m+2\,1} \\ 0 & \rho & \ldots & 0 & \rho_{m+3}a_2 & \rho_{m+4}a_2\alpha_{m+4\,2} & \ldots & \rho_{2m+2}a_2\alpha_{2m+2\,2} \\ \vdots & & & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \rho & \rho_{m+3}a_{m+2} & \rho_{m+4}a_{m+2}\alpha_{m+4\,m+2} & \ldots & \rho_{2m+2}a_{m+2}\alpha_{2m+2\,m+2} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Условие $f(A_{2m+3}) = A'_{2m+3}$ приводит к системе

$$\begin{gathered} \rho_{2m+3}a_i\alpha_{2m+3\,i} = \rho + \rho_{m+3}a_i + \rho_{m+4}a_i\alpha_{m+4\,i} + \ldots + \\ +\rho_{2m+2}a_i\alpha_{2m+2\,i}, \ \ i = \overline{1, m+2}. \end{gathered} \quad (2)$$

При заданных a_i эта система содержит $m+2$ уравнения с $m+2$ переменными $\rho, \rho_{m+3}, \ldots, \rho_{2m+3}$, которые не могут принимать нулевые значения. Это значит, что определитель системы (2) равен нулю:

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1\alpha_{m+4\,1} & \ldots & a_1\alpha_{2m+2\,1} & -a_1\alpha_{2m+3\,1} \\ 1 & a_2 & a_2\alpha_{m+4\,2} & \ldots & a_2\alpha_{2m+2\,2} & -a_2\alpha_{2m+3\,2} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{m+2} & a_{m+2}\alpha_{m+4\,m+2} & \ldots & a_{m+2}\alpha_{2m+2\,m+2} & -a_{m+2}\alpha_{2m+3\,m+2} \end{vmatrix} = 0. \quad (3)$$

Разложение определителя по первому столбцу и введение соответствующих обозначений приводит к уравнению

$$\begin{gathered} A_1a_2a_3\ldots a_{m+2} + A_2a_1a_3\ldots a_{m+2} + \ldots + \\ +A_{m+1}a_1a_2\ldots a_{m+2} + A_{m+2}a_1a_2\ldots a_{m+1} = 0, \end{gathered} \quad (4)$$

которое определяет в $\mathbb{P}^{m+1}$ гиперповерхность степени $m+1$; обозначим ее через F_m^{m+1}.

Условие (3) является необходимым и достаточным условием принадлежности точек

$$(1, 1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0), A'_{m+3}, A'_{m+4}, \ldots, A'_{2m+3}$$

одной m-плоскости, принадлежащей плоскости проекций $\mathbb{P}^{m+1}$. Оно также означает, что точка $A'_{m+3} \in \mathbb{P}^{m+1}$ не может быть выбрана произвольно: она должна быть взята на гиперповерхности F_m^{m+1}.

Нетрудно увидеть, что выбор точки $A'_{m+3} \in F_m^{m+1}$ однозначно определяет центр проектирования $f : \mathbb{P}^{2m+1} \to \mathbb{P}^{m+1}$. Это означает, что множество $(m-1)$-мерных центров, из которых репер A_i проектируется в систему из $2m+3$ точек, проективную образцу T_i $(i = \overline{1, 2m+3})$, параметризуется точками многообразия F_m^{m+1}.

Рассмотрим некоторые свойства этого многообразия.

1. Многообразие F_m^{m+1} однозначно определяется точками образца A_i $(i = \overline{1, 2m+3})$; точки A_i $(i = \overline{1, m+2})$ лежат на F_m^{m+1} и являются на нем особыми кратности m.

2. Многообразие F_m^{m+1} проходит через точку $I = (\underbrace{1 : 1 : \ldots : 1}_{m+2} : 0 \ldots : 0)$ и касается в ней m-мерной плоскости $\langle K_{m+4}, K_{m+5}, \ldots, K_{2m+5}, I\rangle$, где K_j имеют в репере пространства $\mathbb{P}^{m+1}$, состоящем из точек $A_1, A_2, \ldots, A_{m+2}, I$, те же координаты, что и точки T_j $(j = \overline{m+4, 2m+3})$: $K_j(\alpha_{j\,1} : \alpha_{j\,2} : \ldots : \alpha_{j\,m+2})$.

3. Многообразие F_m^{m+1} является рациональным.

Для доказательства свойства 1 достаточно убедиться, что все частные производные до порядка m включительно от левой части уравнения (4) обращаются в ноль в точках A_i.

Для доказательства свойства 2 необходимо написать уравнение касательной гиперплоскости к F_m^{m+1} в точке I.

Для доказательства свойства 3 запишем уравнение (4) в виде:

$$\begin{vmatrix} A_1 a_2 & -A_3 a_4 & A_4 a_2 & -A_5 a_2 & \ldots & (-1)^{m-1} A_{m+1} a_2 & (-1)^m A_2 a_1 \\ 0 & a_3 & a_2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 & a_5 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{m+1} & a_1 \\ (-1)^{m+1} a_{m+2} & 0 & 0 & 0 & \ldots & -\frac{A_{m+2}}{A_1} a_{m+1} & a_{m+2} \end{vmatrix} = 0. \quad (5)$$

Уравнение (5) можно рассматривать как необходимое и достаточное условие существования ненулевого решения однородной системы линейных уравнений относительно переменных $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m+1}$ с матрицей, определитель которой выписан в (5).

Приняв переменные $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m+1}$ за координаты точки в пространстве $\mathbb{P}^m$ и решив относительно них систему, получим рациональное отображение многообразия F_m^{m+1} в $\mathbb{P}^m$. Формулы обратного к нему отображения получим, решив систему относительно a_i $(i = \overline{1, m+2})$. Обратное отображение будет также рациональным, поэтому многообразие F_m^{m+1} бирационально изоморфно $\mathbb{P}^m$, и, следовательно, является рациональным.

Докажем теперь теорему 2 при $n = 2m+k$, $k > 1$. В этом случае $n - m = m + k$, и мы имеем проектирование $f : \mathbb{P}^{2m+k} \to \mathbb{P}^{m+k}$. Пусть

$$\mathbb{P}^{m+k} = \langle A_1, A_2, \ldots, A_{m+k+1} \rangle : x_{m+k+2} = x_{m+k+3} = \ldots = \\ = x_{2m+k+1} = 0.$$

По условию теоремы $f(A_i) = A_i$ для $i = \overline{1, m+k+1}$, $f(A_{m+k+2}) = A'_{m+k+2}(a_1 : a_2 : \ldots : a_{m+k+1} : 0 : \ldots : 0)$ и $f(A_j) = A'_j$ для $j = \overline{m+k+3, 2m+k+2}$, при этом координаты точек A'_j определяются, как и ранее, требованием проективной эквивалентности изображения образца:

$$A'_j(a_1\alpha_{j\,1} : a_2\alpha_{j\,2} : \ldots : a_{m+k+1}\alpha_{j\,m+k+1} : 0 \ldots : 0).$$

В силу сказанного, матрица проектирования f в этом случае имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \rho & 0 & \ldots & 0 & \rho_{m+k+2}a_1 & \rho_{m+k+3}a_1\alpha_{m+k+3\,1} & \cdots & \rho_{2m+k+1}a_1\alpha_{2m+k+1\,1} \\ 0 & \rho & \ldots & 0 & \rho_{m+k+2}a_2 & \rho_{m+k+3}a_2\alpha_{m+k+3\,2} & \cdots & \rho_{2m+k+1}a_2\alpha_{2m+k+1\,2} \\ \vdots & & & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \rho & \rho_{m+k+2}a_{m+k+1} & \rho_{m+k+3}a_{m+k+1}\alpha_{m+k+3\,m+k+1} & \cdots & \rho_{2m+k+1}a_{m+k+1}\alpha_{2m+k+1\,m+k+1} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Так как $f(A_{2m+k+2}) = A'_{2m+k+2}$, то имеет место следующая система уравнений:

$$\begin{aligned} \rho + \rho_{m+k+2}a_i + \rho_{m+k+3}a_i\alpha_{m+k+3\,i} + \ldots + \\ +\rho_{2m+k+1}a_i\alpha_{2m+k+1\,i} - \rho_{2m+k+2}a_i\alpha_{2m+k+2\,i} = 0, \end{aligned} \tag{7}$$

где $i = \overline{1, m+k+1}$. Эта система зависит от $m+2$ переменных $\rho, \rho_{m+k+2}, \ldots, \rho_{2m+k+2}$, которые не могут принимать нулевые значения, следовательно, ранг системы $r \leqslant m+1$. Это значит, что все миноры порядка $m+2$ основной матрицы этой системы:

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1\alpha_{m+k+3\,1} & \ldots & a_1\alpha_{2m+k+1\,1} & -a_1\alpha_{2m+k+2\,1} \\ 1 & a_2 & a_2\alpha_{m+k+3\,2} & \ldots & a_2\alpha_{2m+k+1\,2} & -a_2\alpha_{2m+k+2\,2} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{m+1} & a_{m+1}\alpha_{m+k+3\,m+1} & \ldots & a_{m+1}\alpha_{2m+k+1\,m+1} & -a_{m+1}\alpha_{2m+k+2\,m+1} \\ 1 & a_{m+l} & a_{m+l}\alpha_{m+k+3\,m+l} & \ldots & a_{m+l}\alpha_{2m+k+1\,m+l} & -a_{m+l}\alpha_{2m+k+2\,m+l} \end{vmatrix} = 0, \tag{8}$$

обращаются в ноль, где $l = \overline{2, k+1}$. Каждое из k уравнений системы (8) определяет гиперконус $K_l^{m+1} \subset \mathbb{P}^{m+k}$ степени $m+1$. Направляющей этого конуса служит многообразие F_{ml}^{m+1}, расположенное в $(m+1)$-мерной плоскости, определяемой уравнениями:

$$a_{m+2} = \ldots = \hat{a}_{m+l} = \ldots = a_{2m+k+1} = 0$$

(символ $\hat{a}_{m+l}$ здесь означает, что уравнение $a_{m+l} = 0$ в системе отсутствует).

Вершиной конуса K_l^{m+1} является $(k-2)$-мерная плоскость, лежащая в $\mathbb{P}^{m+k}$ и определяемая системой уравнений

$$a_1 = \ldots = a_{m+1} = a_{m+l} = a_{m+k+2} = \ldots = a_{2m+k+1} = 0.$$

Таким образом, доказано, что центр искомого проектирования однозначно определяется выбором точки

$$A'_{m+k+2} \in \bigcap_{l=2}^{k+1} K_l^{m+1}.$$

Это значит, что множество центров проектирования в случае $n = 2m+k$ $(k \geqslant 2)$ параметризуется точками многообразия $\bigcap\limits_{l=2}^{k+1} K_l^{m+1}$.

Библиографический список

1. *Большаков Ю.И., Кузнецова В.А., Медведева Л.Б.* Обзор научных исследований кафедры общей математики // Актуальные проблемы естественных и гуманитарных наук: Математика. Информатика. Ярославль, 1995. С. 189–199.

2. *Бескин Н.М.* Теорема Круппа // Конструктивная алгебраичекая геометрия. Сборник научн. тр. Ярославль: Изд-во ЯГПИ. 1982. Вып. 200. С. 20–29.

3. *Бескин Н.М.* Теорема Круппа для проективного репера из $n+2$ точек // Бирациональная геометрия алгебраических многообразий. Сборник научн. тр. Ярославль: Изд-во ЯГПИ. 1985. Вып. 215. С. 12–15.

4. *Бескин Н.М.* Аналог теоремы Польке-Шварца в центральной аксонометрии // Матем. сборник. 1946. Т. 19(61). С. 57–72.

5. *Бескин Н.М.* Основные теоремы центральной аксонометрии // Уч. зап. ЯГПИ. Ярославль: Изд-во ЯГПИ. 1971. Вып. 83. С. 7–21.

6. *Бескин Н.М.* Основные предложения аксонометрии // Вопросы современной начертательной геометрии. 1947. С. 55–125.

7. *Лопшиц А.М.* Аффинные отображения многомерного проективного пространства, метрически подобные кратноперспективным, и обобщения теоремы Польке-Шварца // Ученые зап. ЯГПИ. Ярославль, 1967. Вып. 57. Геометрия. С. 93–123.

8. *Большаков Ю.И.* Решение задачи Польке-Шварца-Лопшица в многомерном псевдоевклидовом пространстве. Деп. в ВИНИТИ. N 1880-78.

9. *Кузнецова В.А., Медведева Л.Б.* Обобщение теоремы Круппа // Вопр. теории групп и гомологической алгебры. Ярославль: ЯрГУ, 1989. С. 95–99.

10. *Кузнецова В.А., Медведева Л.Б.* Обобщение теоремы Круппа на пространства произвольной размерности // Вопр. теории групп и гомологической алгебры. Ярославль: ЯрГУ, 1992. С. 70–73.

11. *Кузнецова В.А., Медведева Л.Б.* О некотором обобщении основной теоремы центральной аксонометрии // Тр. Международного конгресса ассоциации "Женщины-математики". Нижний Новгород, 1994. Вып. 3. С. 20–22.

12. *Медведева Л.Б.* О проецировании $\mathbb{P}^n$ на $\mathbb{P}^{n-2}$ // Математические заметки ЯГУ. Якутск, 1998. Т. 5. Вып. 1. С. 47–51.

13. *Медведева Л.Б., Пушкова Ю.А.* О многообразии центров проецирования $\mathbb{P}^n$ на $\mathbb{P}^{n-3}$ // Вопр. теории групп и гомологической алгебры. Ярославль: ЯрГУ, 1998. С. 143–149.

Вопрос полноты и неполноты проекционных изображений фигур расширенного евклидова n-пространства S^n

Е.В. Никулина

Статья посвящена проблеме полноты и неполноты проекционных чертежей, играющей важную роль в теории изображений.

Рассмотрим вопрос о полных и неполных изображениях фигур расширенного евклидова пространства S^3 на 2-плоскости.

Под изображением (чертежем) фигуры пространства S^3 на 2-плоскости S^2 будем понимать ее параллельную проекцию на плоскость S^2.

Изображение назовем полным, если на нем однозначно определены все общие элементы линий и поверхностей оригинала. Это естественное определение порождает ряд вопросов:

- Вопрос о системе задания точек в плоскости проекций, приводящей изображение к полному виду. Для случая, когда рассматриваются изображения фигур пространства S^3 на плоскости S^2, он рассмотрен в учебной литературе по геометрии, содержащей раздел “Теория изображений”. Решением данного вопроса является, в частности, метод основной плоскости, предложенный Н.Ф. Четверухиным. Суть его заключается в следующем.

Выберем три точки фигуры-оригинала и будем считать, что они задают так называемую основную плоскость. Тогда всякую точку оригинала на чертеже назовем определенной (заданной), если на нем дано ее изображение и однозначно определено изображение ее проекции (центральной или параллельной)на основную плоскость. Если плоскость (ACD) выбрать в качестве основной (см. рис. 1), а точку B – в качестве центра проецирования, то, очевидно, что все точки изображения будут определенными. Такое изображение является полным. На нашем чертеже, например, можно построить точки пересечения прямой KL со всеми гранями тетраэдра.

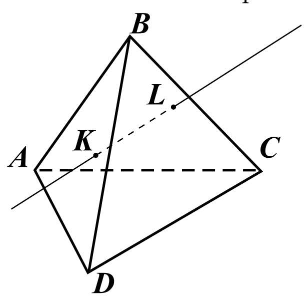


Рис. 1

- Вопрос о том, как неполное изображение сделать полным.

  Решением данного вопроса является так называемый процесс расширения полного изображения [1].

- Вопрос о том, можно ли рассматривать неполное изображение фигуры пространства S^3 как полное изображение фигуры пространства бо́льшего числа измерений. В качестве примера рассмотрим изображение гексаэдра на рис. 2. Данное изображение на 2-плоскости является неполным, если его рассматривать как изображение фигуры пространства S^3, но полным, если рассматривать как изображение фигуры пространства S^4. Теоремы, позволяющие обосновать данный факт, также известны для случая, когда рассматриваются неполные изображения фигур пространства S^3.

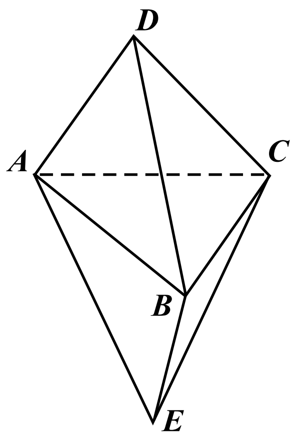


Рис. 2

В общем случае, когда рассматриваются изображения фигур расширенного евклидова n-пространства на плоскости произвольной размерности, меньшей n, первые два вопроса полностью решены ([1, 2]). Наша задача состоит в том, чтобы доказать теоремы, позволяющие неполный чертеж фигуры пространства S^n на плоскости S^m рассматривать как изображение соответствующей фигуры, помещенной в пространстве другого числа измерений. При проведении доказательств мы опирались на понятия и результаты, содержащиеся в [1] и [2].

Под изображением (чертежем) фигуры расширенного евклидова пространства S^n (далее – пространства S^n) на плоскости S^m ($m < n$) как и в случае изображения фигур пространства S^3 будем понимать параллельную проекцию фигуры на m-плоскость.

При параллельном проецировании фигуры пространства S^n на плоскость S^m $(m < n)$ через проецируемые точки проводятся параллельные между собой $(n - m)$-плоскости. Все проецирующие $(n - m)$-плоскости параллельны между собой. С проективной точки зрения параллельное проецирование – это центральное проецирование с $(n - m - 1)$-мерным несобственным центром.

Будем рассматривать изображение фигуры через изображение некоторого связанного с ней симплекса $T(n + 1)$ пространства S^n. Как известно, симплекс $T(n + 1)$ пространства S^n определяется $n + 1$ вершиной общего положения и ограничен $n + 1$ симплексами $T(n)$. Рассмотрим изображение фигуры пространства S^n на m-плоскости S^m $(m < n)$, полученное в результате параллельного проецирования фигуры на m-плоскость проекций. Выберем какие-либо $n+1$ точки чертежа, которые являются изображениями точек общего положения фигуры-оригинала в пространстве S^n, в качестве вершин основного симплекса. Всякую новую точку оригинала на чертеже будем задавать ее изображением и изображением цепи ее оснований относительно основного симплекса. Цепь оснований строится следующим образом. Пусть $A_1A_2...A_nA_{n+1}$ – симплекс пространства S^n, построим цепь оснований точки M, лежащей в пространстве S^n (рис. 3, $n = 4$, $m = 2$).

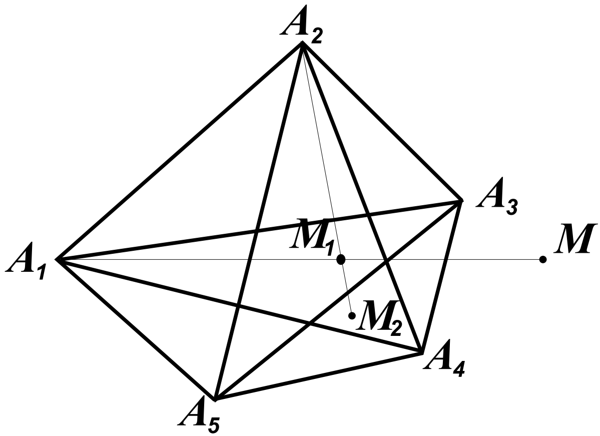


Рис. 3

Назовем нулевым основанием точки M саму точку M: $M_0 \equiv M$. Назовем i-ым ($1 \leqslant i \leqslant n-1$) основанием точки M точку M_i пересечения прямой $(A_i M_{i-1})$ с $(n-i)$-плоскостью $(A_{i+1}...A_{n+1})$: плоскость $(A_{i+1}...A_{n+1})$ и прямая $(A_i M_{i-1})$ лежат в $(n-i+1)$-плоскости, но не лежат в $(n-i)$-плоскости. Заметим, что на чертеже достаточно указать изображения оснований $M_0, M_1, ..., M_{n-m}$, поскольку после их задания точки $M_{n-m+1}, ..., M_{n-1}$ определяются однозначно. Точки $M_1, ..., M_{n-m}$ образуют цепь оснований. Таким образом, точку M оригинала будем считать определенной или заданной на чертеже, если на нем задано ее изображение и может быть однозначно указано изображение ее оснований (далее – цепь оснований) относительно основного симплекса. Чертеж, содержащий только определенные элементы, является полным.

Предположим далее, что чертеж содержит как определенные, так и неопределенные точки относительно основного симплекса $A_1...A_{n+1}$. Неопределенной будем считать точку, если вся цепь ее оснований или некоторые из оснований не могут быть однозначно указаны на чертеже. Все определенные точки вместе с n-симплексом представляют полное изображение, которое обозначим $(A_1 ... A_{n+1})$. Рассмотрим какую-либо неопределенную точку X изображения, которая, очевидно, не входит в полное изображение $(A_1 ... A_{n+1})$. Для того, чтобы включить точку X в полное изображение, следует задать те ее основания, которые однозначно не определяются на чертеже, учитывая при этом, что одни, неопределенные на исходном изображении основания, могут однозначно определяться после задания других. Арифметически, чтобы определить положение основания на чертеже, нужно задать определенное число параметров, не являющихся следствием уже данных. После этого цепь оснований точки X однозначно определится на чертеже, и точка X станет определенной на нем, а полное изображение $(A_1 ... A_{n+1})$ расширится. Может случиться, что при этом, кроме точки X, окажутся определенными и другие элементы чертежа, которые не входили в $(A_1 ... A_{n+1})$. Присоединяя их и точку X к $(A_1 ... A_{n+1})$, получим полное изображение $(A_1 ... A_{n+1}, X)$:

$$(A_1 ... A_{n+1}) \subset (A_1 ... A_{n+1}, X).$$

Если после этого изображение полным не стало, продолжим начатый процесс до тех пор, пока чертеж не станет полным, т.е. будем задавать основания неопределенных точек, подсчитывая при этом число требуемых параметров. Указанный процесс называется процессом расширения полного изображения. Если процесс конечен, то, задав в результате произвольно k независимых параметров, сделаем чертеж полным. Число k называется коэффициентом неполноты чертежа. Данное число не зависит ни от выбора основного симплекса, ни от выбора оснований неопределенных точек в процессе расширения полного изображения.

Далее будем рассматривать чертежи, для каждой точки которых или можно построить все ее основания относительно основного симплекса или нельзя построить ни одного. Очевидно, что все чертежи, изображающие объекты пространства S^3, относятся к рассматриваемому типу, так как для точки пространства S^3 достаточно, кроме изображения самой точки, задать изображение одного ее основания, чтобы точка стала определенной. Определенные точки вместе с точками основного симплекса образуют полную часть изображения. Задав для неопределенной точки P все ее основания, можем включить эту точку в полную часть изображения. Возможно, что при этом станут определенными и другие, ранее неопределенные точки. Если не было задано условий, связывающих основания неопределенных точек, то при включении точки P в полную часть исходного изображения не может получиться точки, для которой можно построить лишь часть ее оснований. Возможно, что после задания точки P еще останутся неопределенные точки. Тогда зададим основания еще для одной неопределенной точки Q. Если этот процесс расширения полного изображения конечен, то после включения K точек приведем изображение к полному виду. Число K называется точечной неполнотой изображения. Это число не зависит ни от выбора основного симплекса, ни от выбора точек, включаемых в полное изображение, и связано с коэффициентом неполноты изображения следующим образом:

$$k = (n - m) \cdot K.$$

Вместе с $n + 1$ вершиной основного симплекса включенные точки образуют систему из $n + K + 1$ точек, которая называется точечным базисом изображения. Точечный базис обладает следующими свойствами:

1. Точки базиса являются независимыми, т.е.: если любые $n+1$ точки базиса выбраны в качестве вершин основного симплекса, а $K - 1$ из остальных K точек будут определены своими основаниями относительно основного симплекса, то последняя точка базиса останется неопределенной.

2. Если $n+1$ любые точки базиса выбрать в качестве вершин основного симплекса и определить основаниями относительно него остальные K точек, то чертеж станет полным.

Далее перейдем непосредственно к доказательству теорем, позволяющих неполный чертеж фигуры пространства S^n на плоскости S^m рассматривать как изображение фигуры, помещенной в пространстве другого числа измерений.

Теорема 1. *Точечный базис изображения фигуры Φ^n пространства S^n с точечной неполнотой K можно рассматривать как изображение вершин симплекса пространства S^{K+n}.*

Доказательство. Предположим, что мы имеем точечный базис $A_1, A_2, ..., A_{n+K+1}$ некоторого изображения фигуры Φ^n пространства S^n, точечная неполнота которого равна K. Докажем, что любую точку базиса можно рассматривать как изображение вершины симплекса пространства S^{K+n}. Для этого надо показать, что каждая точка, изображаемая на чертеже точкой базиса, не лежит в пространстве, определяемом остальными точками, изображаемыми на чертеже точками базиса.

Допустим противное. Пусть, например, точка A_s лежит в пространстве, определяемом остальными точками $A_1, ..., A_{s-1}, A_{s+1}, ..., A_{n+K+1}$, изображаемыми точками базиса. На чертеже это означает, что для точки A_s может быть построена ее цепь оснований относительно симплекса $T(n+K)$: $A_1 ... A_{s-1} A_{s+1} ... A_{n+K+1}$.

Далее выберем в качестве основного симплекса $T(n+1)$ на чертеже фигуру $A_1 ... A_{n+1}$ и определим относительно него остальные точки базиса, кроме точки A_s. Таким образом, мы получим полное изображение $(A_1 ... A_{n+1}, A_{n+2}, ..., A_{s-1}, A_{s+1}, ..., A_{n+K+1})$. Нетрудно видеть, что точки, образующие цепь оснований точки A_s относительно симплекса $T(n+K)$, окажутся включенными в полученное полное изображение, поскольку принадлежат определенным элементам, значит, включенной в него окажется и сама точка A_s. Между тем, точка A_s как точка базиса изображения фигуры Φ^n пространства S^n, является независимой от остальных точек базиса указанного изображения и, следовательно, неопределенной относительно основного симплекса $T(n+1)$.

Полученное противоречие показывает, что точка A_s не может лежать в пространстве, определяемом остальными точками, изображаемыми на чертеже точками базиса. Это верно и для любой другой точки, изображаемой на чертеже точкой базиса.

Итак, совокупность $n+K+1$ точек базиса можно рассматривать как изображение вершин симплекса пространства S^{n+K}.
Теорема доказана.

В [2] сформулировано без доказательства следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть точечная неполнота данного изображения* *фигуры Φ^{n_1} пространства $S^{n_1}(n_1 > m)$ равна K, тогда это изображение можно рассматривать как изображение фигуры Φ^{n_2} пространства S^{n_2} с точечной неполнотой $K + (n_1 - n_2)$ при условии, что $n_2 > m$.*

Автор предлагает следующее доказательство этого утверждения.
Точечный базис изображения Φ^{n_1} состоит из $n_1 + 1 + K$ точек, он может рассматриваться как изображение вершин симплекса $T(n_1{+}1{+}K)$ пространства S^{n_1+K} (теорема 1). Покажем, что любая точка-оригинал изображения Φ^{n_1} лежит в этом пространстве.

Допустим, что это не так, и какая-нибудь точка N не лежит в указанном пространстве S^{n+K}. Это значит, что на чертеже точка N допускает включение в пространство S^{n+K} при помощи произвольно выбранной цепи оснований относительно симплекса $T(n_1 + 1 + K)$. Допустим, что мы выбрали некоторую цепь оснований точки N, тогда после приведения точечного базиса к полному виду относительно основного симплекса $T(n_1{+}1)$, мы сможем определить цепь оснований точки N относительно симплекса $T(n_1 + 1)$. Но если мы выберем другую цепь оснований точки N относительно симплекса $T(n_1 + 1 + K)$, то после приведения точечного базиса к полному виду относительно $T(n_1 + 1)$ получим уже другую цепь оснований точки N относительно симплекса $T(n_1 + 1)$, т.е. точка N останется неопределенной относительно основного симплекса $T(n_1 + 1)$. Но это противоречит свойству точечного базиса изображения Φ^{n_1}, после приведения которого к полному виду, все изображение становится полным. Таким образом, сделанное допущение неверно. Точка N должна принадлежать пространству S^{n_1+K}. Это означает, что все точки изображения Φ^{n_1} являются определенными относительно симплекса $T(n_1 + 1 + K)$.

Рассмотрим изображение Φ^{n_1} как изображение фигуры Φ^{n_2} пространства $S^{n_2}(n_2 > m)$. Поскольку точечный базис изображения Φ^{n_1} может рассматриваться как изображение вершин симплекса $T(n_1 + 1 + K)$ пространства S^{n_1+K}, то любые $n_2 + 1$ точки базиса могут рассматриваться как изображение вершин симплекса $T(n_2 + 1)$ пространства S^{n_2}. Выберем $n_2 + 1$ точки базиса в качестве вершин основного симплекса $T(n_2 + 1)$. Найдем точечную неполноту исходного изображения, рассматриваемого как изображение фигуры пространства S^{n_2}, используя процесс расширения полного изображения.

Рассмотрим любую из оставшихся $n_1 + K - n_2$ точек базиса изображения Φ^{n_1}. Она является неопределенной на чертеже относительно основного симплекса $T(n_2+1)$, поскольку в оригинале не принадлежит пространству, определяемому симплексом $T(n_2+1)$. Определим ее, задав произвольно цепь оснований относительно $T(n_2 + 1)$. На каждом следующем этапе в процессе расширения, рассматривая очередную из оставшихся точек базиса изображения Φ^{n_1}, убеждаемся, что в оригинале она не принадлежит пространству, определяемому основным симплексом $T(n_2 + 1)$ и точками базиса, определенными нами ранее, а потому не является определенной относительно $T(n_2+1)$. Таким образом, в процессе расширения мы должны будем произвольно задать цепи оснований всех указанных $n_1 + K - n_2$ точек. После этого все остальные точки изображения Φ^{n_1} станут определенными, так как выше было доказано, что любая точка изображения Φ^{n_1} является определенной относительно симплекса $T(n_1 + 1 + k)$. Таким образом, точечная неполнота изображения фигуры Φ^{n_1}, рассматриваемого как изображение фигуры пространства S^{n_2}, равна $K + (n_1 - n_2)$.
Теорема доказана.

Библиографический список

1. *Глазунов Е.А., Четверухин Н.Ф.* Аксонометрия. М.: Госуд. изд-во технико-теоретич. лит-ры, 1953.
2. *Ламбин Л.Н.* Теория полноты и метрической определенности изображения многомерных объектов. Минск, 1960.

Взаимодействующие марковские процессы и гиббсовские случайные поля

М.Б. Аверинцев

Весьма актуальной является задача моделирования случайных полей. Известно, что многие случайные поля являются гиббсовскими, т.е. описываются системой потенциалов [1, 2]. Таким образом, задача моделирования случайных полей сводится к задаче моделирования гиббсовских случайных полей. Для этого были предложены различные методы [4, 5]. В настоящей работе предложен метод моделирования с помощью двухкомпонентного случайного процесса, который является дискретным аналогом процессов с непрерывным временем, рассмотренных в работе [3]. Следует отметить, что предложенный метод является более простым с точки зрения компьютерного моделирования, чем методы рассмотренные в работах [4, 5].

Взаимодействующий марковский случайный процесс описывает эволюцию во времени системы взаимодействующих элементов. Рассмотрим конечный граф $\Gamma = (V, U)$, где V – множество вершин, U – множество ребер, занумеруем вершины номерами от 1 до N, $V = \{v_1, v_2, ..., v_N\}$, при этом для любого $v \in V$ ребро $(v, v) \in U$. Каждая вершина графа отождествляется с некоторым элементом, который может находиться в состояниях, описываемых конечным множеством X. В каждый момент времени рассмотрим конфигурацию, т.е. для каждого элемента $v \in V$ укажем его состояние $x \in X$. Задание конфигурации удобно записывать в виде функции $x(v)$, множество всех таких функций обозначается X^V. Предположим, что элементы меняют свои состояния в дискретные моменты времени $t \in \{0, 1, 2, ...\}$. Изменения состояний элементов являются случайными, при этом о характере этих изменений будут сделаны следующие предположения.

Будем считать, что в каждый момент времени может изменить свое состояние только один элемент, случайно выбираемый из множества V. Взаимодействие элементов является локальным в том смысле, что состояние элемента в следующий момент времени зависит только от состояний соседних элементов, при этом соседними для данного элемента $v \in V$ считаются элементы, соединенные с v ребром, множество всех таких элементов обозначим S_v. Взаимодействие характеризуется потенциалом $U(x(S_v))$, где $x(S_v)$ – конфигурация в точках множества S_v.

Для описания эволюции системы рассмотрим двухкомпонентный марковский случайный процесс (ξ_t, ν_t), где $\xi_t \in X^V$, $\nu_t \in V$. Переходные вероятности этого процесса

$$P(\{(\xi_{t+1}, \nu_{t+1}) = (y(\cdot), v_j) | (\xi_t, \nu_t) = (x(\cdot), v_i)\} = \frac{1}{N} P_i(y(\cdot)|x(\cdot))$$

не зависят от времени, т.е. процесс однороден по времени. Первый множитель соответствует тому что на каждом шаге с вероятностью $\frac{1}{N}$ выбирается произвольный элемент множества V, второй множитель соответствует вероятности изменения конфигурации. Предполагается, что изменяется состояние только элемента v_i, т.е. $y(v) = x(v)$ при $v \neq v_i$. Вероятности $P_i(y(\cdot)|x(\cdot))$ имеют специфический гиббсовский вид, т.е.

$$P_i(y(\cdot)|x(\cdot)) = \frac{1}{\Xi_i(x(\cdot))} \exp\{H(y(\cdot))\}$$

где $H(y(\cdot))$ – функция, называемая гамильтонианом конфигурации, $\Xi_i(x(\cdot))$ – нормирующий множитель. Гамильтониан равен суммарному взаимодействию всех элементов системы, т.е. $H(x(\cdot)) = \sum\limits_{v \in V} U(x(S_v))$. Этот процесс является дискретным аналогом процессов с непрерывным временем, рассмотренных в [3]. Основным результатом работы является следующая

Теорема. *Описанный выше марковский процесс является эргодическим, а его предельные вероятности являются гиббсовскими, т.е. имеют вид* $P(x(\cdot)) = \frac{1}{\Xi} \exp\{H(y(\cdot))\}$.

Так как рассмотренный марковский процесс легко моделируется па компьютере, то полученный результат позволяет моделировать гиббсовские случайные поля с произвольным потенциалом. Полученный результат дает простой способ моделирования конфигураций, имеющих гиббсовское распределение.

Библиографический список

1. *Georgii H.O.* Gibbs measures and phase transitions. Walter de Gruyter. Berlin New York, 1988.

2. *Averintsev M.B.* Gibbs description of random fields whose conditional probabilities may vanish. Probl. Inform. Transmiss. 11. 1975. P. 326–334
3. *Liggett T.M.* Interacting Particle Systems. Springer-Verlag New York Berlin Heidelberg Tokio. 1989.
4. *Maruani A., Pechersky E., Sigelle M.* On Gibbs fields in image processing. Markov Processes Relat. Fields. 1. 1995. P. 419–442.
5. *Younes L.* Representation of Gibbs fields with synchronous random fields. Markov Processes Relat. Fields. 2. 1996. P. 285–316.

p-группы с пятью нелинейными неприводимыми характерами

Е.И. Чанков

Нелинейным неприводимым характером группы, называется ее неприводимый характер степени больше 1. Пусть $n(G)$ – число нелинейных неприводимых характеров группы G. Конечные группы с заданным числом $n(G)$ начал изучать Г. Зейц. Конечные группы с $n(G) \leqslant 4$ и ненильпотентные группы с $n(G) = 5$ были классифицированы Я.Г. Берковичем [1, 2]. В докладе будет изложен результат, касающийся нильпотентных групп G с $n(G) = 5$. Вопрос о нильпотентных группах с заданным числом неприводимых характеров сводится к случаю p-групп. Пусть $z_i = |\{x \in G|\ |G : C_G(x)| = p^i\}|$, $(i = 0, 1, ...)$; $Irr\,(G)$ – множество неприводимых характеров группы G, а $Lin\,(G) \subset Irr\,(G)$ – линейные характеры группы G (т.е. характеры степени 1). $cd\,G = \{1, p^{c_1}, ..., p^{c_n}\}$ – множество степеней неприводимых характеров, a_i – количество характеров степени p^{c_i}. (Обозначения взяты из статьи [1]). e – нейтральный элемент группы.

Основной результат работы следующая

Теорема. *Пусть* $n(G) = 5$, *тогда* $|G| = 2^6$, $|G'| = 2^3$, $cd\,G = \{1, 2, 4\}$, $a_1 = 2$, $a_2 = 3$ *и* $(z_0, z_1, z_2) = (2, 2, 20)$.

Примером группы G с $n(G) = 5$ служит группа вида

$$G = \langle a, b, c \rangle$$

с соотношениями

$$a^4 = b^4 = c^4 = e,\ [a, b] = e$$
$$c^{-1}ac = ab$$
$$c^{-1}bc = a^2b$$

Докажем предварительно некоторые вспомогательные леммы.

Утверждение. *Пусть G – p-группа с $n(G) = 5$, тогда $p = 2$, $|G| = 2^6$, $|G'| = 2^3$ и*

$$(z_0, z_1, z_2) \in \{(4, 4, 0);\ (4, 0, 12);\ (2, 6, 8);\ (2, 2, 20)\}.$$

Доказательство. Так как $n(G)$ нечетно, то $p = 2$ и $|G'| \neq 2$. Показатель степени коммутанта не может быть четным числом, потому что $5 \neq 0(\mod 3)$. Из [1] известно, что если H – 2-группа и $n(H) \leqslant 4$, то $|H'| \leqslant 2^3$, значит $|G'| = 2^3$. Пусть $|G| = 2^{2k+1}$, тогда

$$2^{2(k-1)} + \sum_{\chi \in Irr(G) \setminus Lin(G)} \chi^2(e) = 2^{2k+1},$$

возьмем равенство по модулю 3: $1 + n(G) \equiv 2(\mod 3)$, т.е. $0 \equiv 2(\mod 3)$, приходим к противоречию.

Пусть $L \leqslant Z(G) \cap G'$ такая, что $|L| = 2$. $\overline{G} = G/L$, $|\overline{G}'| = 2^2$, следовательно, $n(\overline{G}) = 0 \ (\mathrm{mod}\ 3)$, т.е. $n(\overline{G}) = 3$. Из [1] получаем, что $|\overline{G}| = 2^5$. Имеем $|G| = 2^6$ и $|G'| = 2^3$. Для нахождения $z_i \quad (i = 0, 1, 2, 3)$ составляем систему:

$$\begin{cases} z_0 + z_1 + z_2 + z_3 = 2^6; \\ z_0 + \frac{z_1}{2} + \frac{z_2}{4} + \frac{z_3}{8} = 2^3 + 5. \end{cases}$$

Получаем $7z_0 + 3z_1 + z_2 = 40$. Пусть $z_0 = 4 \Rightarrow 3z_1 + z_2 = 12$, тогда $(z_1, z_2) \in \{(4, 0);\ (0, 12)\}$. Пусть $z_0 = 2 \Rightarrow 3z_1 + z_2 = 26$, тогда $(z_1, z_2) \in \{(6, 8);\ (2, 20)\}$.

Разберем теперь каждый из четырех случаев в отдельности.

Лемма 1. *Группы G с $(z_0, z_1, z_2) = (4, 4, 0)$ не существует.*

Доказательство. Возьмем $g \in G : |C_G(g)| = 2^5$. Обозначим $H = C_G(g)$. $|Z(H)| = 8$, но с другой стороны для любого $x \in G \setminus Z(H)$ $|C_G(x)| = 8$ и, следовательно, для любого $x \in H \backslash Z(H)$ $|C_H(x)| \leqslant 8$. Приходим к противоречию.

Лемма 2. *Пусть* P *–* 2*-группа порядка* 32 *и* $|Z(P)| = 4$*, тогда:*
1. $n(P) = 6$ $|P'| = 2^2$ и $(z_0, z_1, z_2) = (4, 12, 16)$;
2. $\Phi(P) \subset P'Z(P)$ и $exp\, P \leqslant 8$.

Кроме того, группа P *обладает абелевой подгрупой порядка* 16.

Доказательство. Так как $|P : Z(P)| = 2^3$, то для любого $\chi \in Irr(P)$ $\chi^2(e) \leqslant 2$. Поэтому $n(P) \in \{4, 6, 7\}$, но при $n(P) = 4$ $|Z(P)| = 8$, а при $n(P) = 7$ $|P'| = 2^3$, т.е. P – группа максимального класса. Значит, $|P'| = 2^2$. Из системы двух уравнений $z_0 + z_1 + z_2 = 2^5$ и $z_0 + z_1/2 + z_2/4 = 2^3 + 6$, (в которой по условию $z_0 = 4$) находим z_1 и z_2. Рассмотрим следующие два возможных случая:

i) $Z(P) = P'$, тогда $P/Z(P) \simeq E_8 \Rightarrow \Phi(P) = Z(P)$ и $exp\, P \leqslant 8$.

ii) $Z(P) \neq P'$, тогда $\overline{P} = P/Z(P) \simeq D_8$, следовательно $\Phi(\overline{P}) = \overline{P}'$. Поэтому $\Phi(P) \subset P'Z(P)$, и если $\Phi(P) = P'$, то $exp\, P = 8$, в случаи $\Phi(P) = P'Z(P)$ $\Phi(P) \neq Z_8$, т.к. $P' \neq Z(P)$ и значит $exp\, P \leqslant 8$.

Пусть элемент $g \in P$ такой, что $|C_P(g)| = 2^4$, тогда $C_P(g)$ – абелева группа, поскольку порядок ее центра больше четырех.

Лемма 3. *Группы* G *с* $(z_0, z_1, z_2) = (4, 0, 12)$ *не существует.*

Доказательство Рассмотрим произвольную максимальную подгруппу $H \leqslant G$. $|H| = 32$ и $|Z(H)| = 4$. По лемме 2 в H есть абелева подгруппа порядка 16, а такая подгруппа в G единственна: $R = \{s \in G | \ |C_G(s)| \geqslant 16\}$, что видно из строения группы G. Поэтому $\Phi(G) = R$. Далее $Z(H) = Z(G) \leqslant G'$ и $H' \leqslant G'$, а так как $\Phi(H) \subset H'Z(H)$, тогда $\mho_1(H) = \Phi(H) \leqslant G'$.

В силу того, что H – произвольная максимальная подгруппа, то $\mho_1(G) \leqslant G'$, т.е. $|\mho_1(G)| = 8$. Но $\Phi(G) = \mho_1(G)$ пришли к противоречию.

Лемма 4. *Группы* G *с* $(z_0, z_1, z_2) = (2, 6, 8)$ *не существует.*

Доказательство. Предположим, что G' содержит класс сопряженных элементов длины 4. Пусть элемент $s \in G \setminus G'$ такой, что $|C_G(s)| = 2^5$, тогда $|Z(C_G(s))| = 4$, поэтому $< s, x\rangle \trianglelefteq G$, где $x \in Z(G)$ и $| < s, x\rangle| = 4$. Так как $s \notin G'$, то $|Lin(G/ < s, x\rangle)| \leqslant 4$. Поэтому $G/ < s, x\rangle$ – группа максимального класса, но тогда $G/ < s, x\rangle$ имеет три неприводимых характера степени 2, тогда как в G их только два, приходим к противоречию.

Значит, G состоит из центра и трех классов длины 2, пусть h_1, h_2, h_3 – представители этих классов. Обозначим $H_i = C_G(h_i) \quad (i = 1, 2, 3)$ $|H_i| = 2^5$ и $|Z(H_i)| = 4$. По лемме 2 группы H_i содержат абелеву подгруппу порядка 16, а в G такая группа единственна, поэтому $|\bigcap_{i=1}^3 H_i| = 16$ следовательно $G = \bigcup_{i=1}^3 H_i$, и так как $exp\, H_i \leqslant 8 \Rightarrow exp\, G \leqslant 8$.

Если $|\Phi(G)| = 16$ значит существуют только три указанные максимальные подгруппы, но опять $Z(H_i) \leqslant G'$ и $H_i \leqslant G'$, тогда $\mho_1(H_i) \leqslant G'$, следовательно $\mho_1(G) \leqslant G'$ и приходим к противоречию.

Поэтому $|\Phi(G)| = 8$, т.е. $\Phi(G) = G' \Rightarrow d(G) = 3$. Рассмотрим группу $\overline{G} = G/Z(G)$, $|\overline{G}| = 2^5 \quad n(\overline{G}) = 3$ и т.к. $Z(G) < G'$, то $d(\overline{G}) = 3$, значит $\Phi(\overline{G}) = \overline{G}'$. Ввиду того, что $|Z(\overline{G})| = 2 \Rightarrow \overline{G}' \simeq Z_4$, поэтому $exp\, \overline{G} = 8$. Отсюда следует, что в G существуют такие элементы s, что $s^4 \notin Z(G)$, т.е. иными словами, $\mho_2(G) \neq Z(G)$. Известно, что $exp\, G \leqslant 8$, поэтому $G' \simeq Z_4 \times Z_2$. $\mho_1(G) = G'$ и $\mho_2(G) \subset \mho_1(G')$, а так как $d(G') = 2$, то $|\mho_1(G')| = 2$ и следовательно $\mho_2(G) = \mho_1(G')$. $\mho_2(G)$ – нормальная подгруппа в G, но G содержит только одну нормальную подгруппу порядка 2 – это $Z(G)$, приходим к противоречию.

Наконец, последний случай группы G с $(z_0, z_1, z_2) = (2, 2, 20)$.

Возьмем элемент $g \in G : \quad |C_G(g)| = 2^5$. Обозначим $H_1 = C_G(g)$, тогда $|Z(H_1)| = 4$. Из леммы 2 $(z_0, z_1, z_2)_{H_1} = (4, 12, 16)$ и существует абелева группа $R = \{s \in H_1 \mid \quad |C_{H_1}(s) \geqslant 16\}$. Поскольку $H_1 \setminus R$ состоит из классов сопряженных элементов в G длины 4 или 8, то $R \triangleleft G$.

Предположим, что $\Phi(G) \leqslant R$; пусть $v \in G \setminus H_1$ и рассмотрим группу $V = \langle R, v\rangle$, т.к. $v^2 \in \Phi(G) \leqslant R$, то $|V| = 32$, а также $|Z(V)| = 2$. Так как $z_0 + z_1 + z_2 = 24 < 32$, то $|V'| > 2$, поэтому для группы V имеем две возможности $n(V) = 7$ или $n(V) = 3$. Если

$n(V) = 7 \Rightarrow V$ – группа максимального класса. R – максимальная абелева подгруппа в V, следовательно $R \simeq Z_{16}$, тогда приходим к противоречию с тем, что $exp\, H_1 \leqslant 8$. Если $n(V) = 3$, тогда существует $\chi \in Irr(V)$ такой, что $\chi(e) = 4$, в то время как $|V : R| = 2$, приходим к противоречию.

Значит, $\Phi(G) \nleqslant R$, поэтому $|\Phi(G)| = 16$ и $\Phi(G) \cap R = G'$. $\Phi(H_1) \leqslant G'$, следовательно существует такой элемент $c \in G$, что $c^2 \notin R$. R нормальна в G, поэтому действие сопряжением c на R задается некоторым автоморфизмом, причем должно быть, что $G = \langle R, c \rangle$. Пусть $R = \langle a, b \,|\, [a, b] = a^4 = b^4 = e \rangle$, т.к. $d(G) = 2$, то, например $c^{-1}ac = ab$, или же $c^{-1}ac = ab^3$; Зададим действие c следующим образом:

$$c^{-1}ac = ab \qquad c^{-1}bc = a^2b$$

Пусть R записана аддитивно: $R = \langle a, b \,|\, 4a = 4b = 0 \rangle$, тогда упомянутое действие c на R задается матрицей

$$[c] = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем центр группы G (т.е.множество элементов группы R остающихся неподвижными под действием c)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix}$$

Находим, что $l = 0$ и $m \in \{0, 2\}$, следовательно $Z(G) = \{e, b^2\}$. $[c]^4$ – единичная матрица, тогда $|G| = 2^6$. Найдем неподвижные элементы относительно c^2.

$$[c]^2 \cdot \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix}.$$

Получаем $l \in \{0, 2\}$ и $m \in \{0, 2\}$, поэтому в G только один класс сопряженных элементов длины 2 – $(a^2)^G$ и $S = \langle a^2, b^2 \rangle \lhd G$. Рассмотрим фактор-группы $\overline{\overline{G}} = G/S$:

$$\overline{\overline{G}} = \langle \overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \rangle,$$
$$\overline{a}^2 = \overline{b}^2 = \overline{c}^4 = e,$$
$$\overline{c}^{-1}\overline{ac} = \overline{a}\overline{b} \quad \overline{c}^{-1}\overline{b}\overline{c} = \overline{b}.$$

($\overline{\overline{G}}$ – группа Миллера-Морено с двумя нелинейными неприводимыми характерами степени 2) и $\overline{G} = G/Z(G)$:

$$\overline{G} = \langle \overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \rangle$$
$$\overline{a}^4 = \overline{b}^2 = \overline{c}^4 = e,$$
$$\overline{c}^{-1}\overline{ac} = \overline{a}\overline{b} \quad \overline{c}^{-1}\overline{bc} = \overline{a}^2\overline{b}.$$

(на эту группу мне указал Л.С. Казарин, как пример группы порядка 32 с двумя порождающими и с тремя нелинейными неприводимыми характерами). $|Z(\overline{G})| = 2$ и $\overline{G}/Z(\overline{G}) \simeq \overline{\overline{G}}$; пусть χ – точный характер группы $\overline{G}$, покажем, что $\chi(e) = 4$, тем самым установим, что $n(\overline{G}) = 3$. Группа $\langle \overline{a}^2, \overline{b}, \overline{c}^2 \rangle \simeq E_8 \triangleleft \overline{G}$.($E_8$ – абелева группа экспоненты 2 порядка 8). Предположим, что точное представление ρ, отвечающее характеру χ, имеет степень 2, но тогда для любого $x \in E_8$

$$\rho(x) = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix},$$

т.е. $\rho(x)$ может принимать только четыре различных значения, тогда как в E_8 восемь элементов, приходим к противоречию с тем, что ρ – точное. Получаем $n(\overline{G}) = 3$ и $\mathrm{cd}\, G = \{1, 2, 4\}$.

Вернемся к группе G, и в ней есть подгруппа $\langle a^2, b^2, c^2 \mid [a^2, b^2] = [a^2, c^2] = [b^2, c^2] = a^4 = b^4 = c^4 = e \rangle$ изоморфная E_8, поэтому любой точный характер имеет степень 4. Пусть Φ – множество неприводимых характеров G, не содержащих в своем ядре $Z(G)$, тогда из равенства

$$\sum_{\chi \in \Phi} |\chi(e)|^2 = |G| - |\overline{G}| = 32$$

получаем $|\Phi| = 2$. Таким образом $n(G) = 5$ и теорема доказана.

Библиографический список

1. *Беркович Я.Г.* Конечные группы с небольшим числом нелинейных неприводимых характеров // Вопросы теории групп и гомологической алгебры. Ярославль. 1990. С. 97–107.
2. *Беркович Я.Г.* Конечные группы с небольшим числом нелинейных неприводимых характеров. II // Вопросы теории групп и гомологической алгебры. Ярославль. 1991. С. 145–156.

О нелокальных бифуркациях векторных полей на бутылке Клейна

В.Ш. Ройтенберг

В работе описаны бифуркации в типичных однопараметрических семействах векторных полей без особых точек на бутылке Клейна.

1. Определения и обозначения. Мы предполагаем известными основные понятия теории гладких динамических систем на многообразиях [1]. Будем обозначать $\mathrm{X}^r(\mathrm{K}^2)$ – банахово пространство векторных полей класса ^{r} с ^{r}-нормой на бутылке Клейна K^2, $\mathrm{X}^r_+ = \{X \in \mathrm{X}^r(\mathrm{K}^2) : \forall x \in \mathrm{K}^2 \ \ |X(x)| > 0\}$ – его открытое подмножество, состоящее из *невырожденных векторных полей* (векторных полей без особых точек). В дальнейшем $r \geqslant 11$.

Пусть E – числовой отрезок. *Однопараметрическим семейством векторных полей на* K^2 (с базой E) назовем ^{k}-отображение E$\varepsilon \to X_\varepsilon \in \mathrm{X}^r_+$. Будем обозначать его $\{X_\varepsilon\}_{\varepsilon \in \mathrm{E}}$ или $\{X_\varepsilon\}$ и рассматривать как элемент топологического пространства $\Phi^{k,r}(\mathrm{E},\mathbf{K}^2) = C^k(\mathrm{E},\mathrm{X}^r_+)$. В дальнейшем $k \geqslant 7$.

Семейство $\{X_\varepsilon\}$ $\in \Phi^{k,r}(\mathrm{E},\mathbf{K}^2)$ называется *слабо структурно устойчивым*, если существует такая его окрестность U, что для любого семейства $\{\tilde{X}_\varepsilon\} \in U$ существует гомеоморфизм τ:E $\to$ E такой, что для любого $\varepsilon \in$ E векторные поля X_ε и $\tilde{X}_{\tau(\varepsilon)}$ топологически эквивалентны.

Обозначим Σ^0_+ – подмножество в X^r_+, состоящее из грубых векторных полей, Σ^1_+ – подмножество в $\mathrm{X}^r_+ \backslash \Sigma^0_+$, состоящее из векторных полей, все замкнутые траектории которых гиперболические, за исключением одной, являющейся односторонним или двухсторонним двойным циклом (квазигиперболической замкнутой траекторией). Пусть $\Sigma_+^{1,1}$ – часть Σ_+^1, состоящая из векторных полей с односторонним двойным циклом, $\Sigma_+^{1,2}$ – часть Σ_+^1, состоящая из векторных полей с двухсторонним двойным циклом и хотя бы с еще одной замкнутой траекторией, а $\Sigma_+^{1,*} = \Sigma_+^1 \backslash (\Sigma_+^{1,1} \cup \Sigma_+^{1,2})$. Согласно [2] множества $\Sigma_+^{1,1}$, $\Sigma_+^{1,2}$ и $\Sigma_+^{1,*}$ являются погруженными $^{r-1}$-подмногообразиями коразмерности один в X_+^r.

Везде в дальнейшем окружность $\mathbf{S}^1 = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$.

2. Определяющий диффеоморфизм. Пусть $X \in \Sigma_+^{1,*}$ и Γ - двойной цикл векторного поля X. Из [3, 4] следует существование такого $^{r-3}$-диффеоморфизма h кольца (-1,1)$\times \mathbf{S}^1$ на окрестность $U(\Gamma)$ цикла Γ, что $h(\{0\} \times \mathbf{S}^1) = \Gamma$, а векторное поле $X|_{U()}$ имеет те же траектории, что и векторное полеX^*, имеющее в циклических координатах (u,s), задаваемых h в $U(\Gamma)$, вид $X^* = P_0(u)\partial/\partial u + 1\partial/\partial s$, где $P_0 \in {}^{r-3}$, $P_0(u) = u^2 + (u^2)$, $P_0(u) > 0$ при $u \neq 0$. Выберем число $d \in (0,1)$. Поскольку $P_0(\pm d) > 0$, то замкнутые кривые $\Gamma^{\pm} = h(\{\pm d\} \times \mathbf{S}^1)$ являются трансверсалями для векторного поля X. Так как Γ – единственное предельное множество для траекторий поля X, то определено отображение Γ^+на Γ^- по траекториям поля X: $h(d,\ s) \to h(-d,\ f(s))$, где f: $\mathbf{S}^1 \to \mathbf{S}^1$ – $^{r-3}$-диффеоморфизм, меняющий ориентацию. Назовем f *определяющим диффеоморфизмом* векторного поля X. Он зависит от выбора диффеоморфизма h и числа d.

Лемма. *Пусть f и f^* – определяющие диффеоморфизмы векторного поля X. Тогда найдутся точки $a \in \mathbf{S}^1$, $b \in \mathbf{S}^1$, такие, что для любого $s \in \mathbf{S}^1$ $\quad f^*(s) = f(s+a) + b$.*

3. **Бифуркационное многообразие** $\Sigma_+^{1,3}$. Пусть f – определяющий диффеоморфизм векторного поля $X_0 \in \Sigma_+^{1,*}$. Так как f меняет ориентацию, то для накрывающего диффеоморфизма $\bar{f}$:$\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ имеем $\bar{f}(s+1) = \bar{f}(s)$ - 1 при всех $s \in \mathbf{R}$.

Введем однопараметрическое семейство диффеоморфизмов f_μ :$\mathbf{S}^1 \to \mathbf{S}^1$, $\mu \in \mathbf{S}^1$, $f_\mu(s) = f\ (s) + \mu$, и отображение M: $\mathbf{S}^1 \to \mathbf{S}^1$, $M(s) = s - f(s)$, являющееся двукратным накрытием. Отметим, что $\forall \mu \in \mathbf{S}^1 M^{-1}(\mu)$ состоит из двух точек, являющихся неподвижными для f_μ, остальные периодические точки f_μ имеют период 2.

Введем также кривую $\mathbf{B}$ на трехмерном торе $\mathbf{T}^3 = \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$, точки $(x,\ y,\ \mu)$ которой удовлетворяют уравнениям $f_\mu(x) = y$, $f_\mu(y) = x$. Множество $\mathbf{B}_\Delta = \{(x,\ y,\ \mu) \in \mathbf{B}\colon x = y\}$ состоит из точек $(x,\ x,\ M(x))$, $x \in \mathbf{S}^1$, и является одномерным замкнутым подмногообразием в $\mathbf{T}^3$. Обозначим $\mathbf{B}_0 = \mathbf{B} \setminus \mathbf{B}_\Delta$. Если точка $(x,\ y,\ \mu)$ принадлежит $\mathbf{B}_0$, то *симметричная ей точка* $(y,\ x,\ \mu)$ также принадлежит $\mathbf{B}_0$.

Перечислим *условия* 1^0–4^0, *определяющие векторные поля из* $\Sigma_+^{1,3}$. Фактически их смысл состоит в том, что семейство диффеоморфизмов f_μ находится "в общем положении".

1^0. *Существует конечное число точек* $s_i \in \mathbf{S}^1$ $(i=1,..,n^*)$, *в которых* $f'(s_i) = -1$; *в каждой из них* $f''(s_i) \neq 0$, $\tau_i := -2 f'''(s_i) - 3[f''(s_i)]^2 \neq 0$.

Очевидно, что $n^* = 2n > 0$, Обозначим $\mu_{1i} := M(s_i)$ $(i=1,..,2n)$. Из условия 1^0 следует, что у диффеоморфизма f_μ негиперболическая неподвижная точка есть только при $\mu = \mu_{1i}$ $(i=1,..,2n)$, и в этой точке s_i $(f_\mu^2)'(s_i) - 1 = (f_\mu^2)''(s_i) = 0$, $(f_\mu^2)'''(s_i) = \tau_i \neq 0$.

Особыми точками кривой $\mathbf{B}$ являются точки, в которых $rank \begin{pmatrix} f'(x) & -1 & 1 \\ -1 & f'(y) & 1 \end{pmatrix} < 2$, то есть $f'(x) + 1 = f'(y) + 1 = 0$. В силу условия 1^0 особые точки $\mathbf{B}$, принадлежащие $\mathbf{B}_\Delta$, это точки $(s_i,\ s_i,\ \mu_{1i}\ )$, $i=1,..,2n$. Потребуем, чтобы других особых точек у $\mathbf{B}$ не было:

2^0. $(x,\ y,\ \mu) \in \mathbf{B}_0 \quad (f'(x)+1)^2 + (f'(y)+1)^2 \neq 0$.

Пусть Π: $\mathbf{B} \to \mathbf{S}^1$ – проекция: $\Pi(x,\ y,\ \mu) = \mu$.

3^0. *Отображение* $\Pi|$ *имеет конечное число (причем невырожденных) критических точек* $p_j = (x_j,\ y_j,\ \mu_{2j})$, $j = 1,2,\ldots,m_*$: $d\Pi(p_j) = 0$, $d^2\Pi(p_j) \neq 0$.

В силу симметрии $\mathbf{B}_0$ $m_* = 2m$ $(m = 0,1,\ldots)$. Кроме того мы можем считать, что точки пронумерованы так, что $x_{j+m} = y_j$, $y_{j+m} = x_j$, $\mu_{2j+m} = \mu_{2j}$, $f'(y_j) + 1 \neq 0$ при $j = 1,\ldots,m$. Нетрудно убедиться, что $d\Pi(p_j) = 0 \Leftrightarrow f'(x_j)\ f'(y_j) = 1$, $d^2\Pi(p_j) \neq 0 \Leftrightarrow \rho_j \neq 0$, где обозначено $\rho_j = f''(y_j)[f'(x_j)]^2 + f''(x_j) f'(y_j)$. С другой стороны $(f_\mu^2)'(x_j) = f'(f_\mu(x_j)) f'(x_j)$, $(f_\mu^2)''(x_j) = \rho_j$ и, следовательно, условия 3^0 означают, что диффеоморфизм f_μ имеет негиперболические периодические точки только при $\mu = \mu_{2j}$ (j=1,2,...,$2m$), это точки x_j и y_j , и они двукратны.

Точки (s_i, s_i, μ_{1i}), i=1,..,$2n$, и p_j=(x_j, y_j, μ_{2j}), $j = 1, 2, \ldots, 2m$, назовем *специальными точками.*

4^0. *Если* $p' = (x', y', \mu')$ *и* $p'' = (x'', y'', \mu'')$ – *различные несимметричные специальные точки, то* $\mu' \neq \mu''$.

В силу леммы условия 1^0–4^0 не зависят от выбора определяющего диффеоморфизма и потому являются условиями, наложенными на векторное поле X_0.

Теорема 1. *Множество* $\Sigma_+^{1,3}$ *открыто и всюду плотно в* $\Sigma_+^{1,\bullet}$.

4. Бифуркации векторных полей из $\Sigma_+^{1,3}$. Пусть семейство векторных полей $\{X_\varepsilon\}_{|\varepsilon|\leqslant\delta}$ трансверсально пересекает $\Sigma_+^{1,3}$ при ε=0. Тогда двойной цикл Γ поля X_0 исчезает либо при возрастании, либо при убывании ε : существует число $\delta_0 \in (0,\delta)$ и окрестность Γ, не содержащая замкнутых траекторий поля X_ε, соответственно, либо при $\varepsilon \in (0,\delta_0)$, либо при $\varepsilon \in (-\delta_0, 0)$.

Пусть f – определяющий диффеоморфизм векторного поля X_0. Будем рассматривать бутылку Клейна как $(\mathbf{R}\times\mathbf{S}^1)/\sim$, где ($x$, s) $\sim$ (x+1, -s). С помощью конструкции надстройки (см., например, [1. С. 152]) мы можем построить векторные поля $V_\mu \in \mathrm{X}_+^{r-4}$, непрерывно зависящие от $\mu \in \mathbf{S}^1$, так, чтобы кривая, задаваемая уравнением x=0, была для них трансверсалью, а функции $f_\mu(s) = f(s) + \mu$ – функциями последования на этой трансверсали. Векторные поля V_μ будут "моделями" векторных полей X_ε при исчезновении двойного цикла.

Опишем бифуркации в семействе векторных полей V_μ , $\mu \in \mathbf{S}^1$, используя свойства диффеоморфизмов f_μ. Бифуркационными значениями параметра μ (то есть значениями, при которых $V_\mu \in \mathrm{X}_+^r \backslash \Sigma_+^0$) являются либо точки μ_{1i}(i=1,..,$2n$), либо точки μ_{2j} ($j = 1, 2, \ldots, m$). Их число $2n + m \geqslant 2$.

Векторное поле V_μ при $\mu = \mu_{1i}$(i=1,..,$2n$) имеет единственную негиперболическую замкнутую траекторию – односторонний двойной цикл $\Gamma(\mu_{1i})$, проходящий через точку s_i трансверсали x=0 и устойчивый (неустойчивый) при $\tau_i < 0$ ($\tau_i > 0$). Кроме того оно имеет одностороннюю замкнутую траекторию, проходящую через точку s_{i*} трансверсали $x=0$ $(\{s_i,s_{i*}\}=M^{-1}(\mu_{1i}))$ устойчивую (неустойчивую) при $f'(s_{i*})+1 > 0(< 0)$, и может иметь двухсторонние замкнутые траектории, пересекающие трансверсаль $x=0$ в точках s' и s'' , для которых точка $(s', s'', \mu_{2j}) \in \mathbf{B}_0$. При μ достаточно близких к μ_{1i} из $\Gamma(\mu_{1i})$ рождаются 1) в случае $\tau_i f?(s_i)(\mu - \mu_{1j}) < 0$ односторонняя гиперболическая замкнутая траектория устойчивая (неустойчивая) при при $\tau_i<0$ $(\tau_i > 0)$; 2) в случае $\tau_i f''(s_i)(\mu - \mu_{1j}) > 0$ односторонняя неустойчивая (устойчивая) гиперболическая замкнутая траектория и двухсторонняя устойчивая (неустойчивая) гиперболическая замкнутая траектория при $\tau_i < 0$ $(\tau_i > 0)$.

Векторное поле V_μ при $\mu = \mu_{2j}$ $(j = 1, 2, \dots, m)$ имеет единственную негиперболическую замкнутую траекторию – двухсторонний двойной цикл $\Gamma(\mu_{2j})$, пересекающий трансверсаль $x=0$ в точках x_j и y_j . Кроме того оно имеет две односторонние замкнутые траектории, пересекающие трансверсаль $x=0$ в точках множества $\{\xi_j^1, \xi_j^2\} = M^{-1}(\mu_{2j})$ устойчивые (неустойчивые) при $f'(\xi_j^l) + 1 > 0(< 0)$, и может иметь двухсторонние замкнутые траектории, пересекающие трансверсаль $x=0$ в точках s' и s'', для которых точка $(s', s'', \mu_{2j}) \in \mathbf{B}_0$. Если μ достаточно близко к μ_{2j}, то при $\rho_j(f'(\xi_j)+1))(\mu - \mu_{2j}) > 0$ двойной цикл $\Gamma(\mu_{2j})$ исчезает, а при $\rho_j(f'(\xi_j)+1))(\mu - \mu_{2j}) < 0$ распадается на две гиперболические замкнутые траектории - устойчивую и неустойчивую.

Теорема 2. *Пусть семейство векторных полей* $\{X_\varepsilon\}_{|\varepsilon|\leqslant\delta}$ *трансверсально пересекает* $\Sigma_+^{1,3}$ при $\varepsilon=0$, *и двойной цикл* Γ поля X_0 *исчезает при возрастании* ε. *Тогда существуют числа* $\delta_0 > 0$, $N_0 > 0$ *и отображение* $g : (0, \delta_0) \to \mathbf{S}^1$, *являющееся композицией меняющего ориентацию диффеоморфизма* $\bar{g} : (0, \delta_0) \to (N_0, +\infty)$ *и стандартной проекции* $\mathbf{R} \to \mathbf{S}^1$, *со следующими свойствами*:

1) *Для любого* $\varepsilon \in (0, \delta_0)$ *векторные поля* X_ε *и* $X_{g(\varepsilon)}$ *топологически эквивалентны.*

2) *Значение параметра* $\varepsilon \in (0, \delta_0)$ *является бифуркационным для семейства* $\{X_\varepsilon\}$ *тогда и только тогда, когда значение параметра* $\mu = g\ (\varepsilon)$ *является бифуркационным для семейства* $\{V_\mu\}$.

3) *Если* $\varepsilon_0 \in (0, \delta_0)$ *является бифуркационным значением параметра для семейства* $\{X_\varepsilon\}$, *то* $X_{\varepsilon_0} \in \Sigma_+^{1,1} \cup \Sigma_+^{1,2}$ *и семейство трансверсально* $\Sigma_+^{1,1} \cup \Sigma_+^{1,2}$ *при* $\varepsilon = \varepsilon_0$.

4) *У векторного поля* X_ε, $\varepsilon \in (0, \delta_0)$, *не существует двухсторонней замкнутой траектории, непрерывно зависящей от* ε *при всех* $\varepsilon \in (0,\ \delta_0)$.

5) *Для любого* $\varepsilon \in (-\delta_0, 0)$ *векторное поле* $X_\varepsilon \in \Sigma_+^0$. *Оно имеет две двухсторонних замкнутые траектории. Все остальные траектории предельны к ним.*

Приведем набросок доказательства утверждений 1)–3). Сначала делается замена параметра $\bar\varepsilon = a_0(\varepsilon)$ и выбираются циклические координаты $(x, s \bmod 1)$ в окрестности Γ так, что векторное поле X_ε имеет в этой окрестности те же траектории, что и векторное поле

$$X_{\bar\varepsilon}^* = P(x,s,\bar\varepsilon)\partial/\partial x + 1\partial/\partial s, \quad P(x,s,\bar\varepsilon) = \bar\varepsilon + P_0(x) + \bar\varepsilon a(x,\bar\varepsilon) + \bar\varepsilon x^2 b(x,s,\varepsilon),$$

где a и b – ^{3}-функции. Далее черту над $\bar\varepsilon$ будем опускать.

При достаточно малых $d>0$ и $\varepsilon_*>0$ замкнутые кривые $l_\varepsilon^\pm : x = \pm d$ являются трансверсалями для векторного поля X_ε, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_*)$, и, следовательно, определен диффеоморфизм l_ε^+ на l_ε^- по траекториям X_ε, имеющий в координатах вид $(d, s) \mapsto (-d, f^*(s,\varepsilon))$, где $f^* \in C^3$, а $f = f^*(\cdot\,, 0)$ – определяющий диффеоморфизм поля X_0. Если d и ε_* достаточно малы, то в окрестности U_ε , $\varepsilon \in [0,\ \varepsilon_*)$, цикла Γ, задаваемой неравенством $|x| < 2d$, определено векторное поле $X_\varepsilon^{**} = \partial/\partial x + (1/P(x,s,\varepsilon))\partial/\partial s$, имеющее те же траектории, что и векторное поле $X_\varepsilon|_{U_\varepsilon}$. В координатах траектория поля X_ε^{**}, проходящая через точку $(-d, s_0)$, имеет уравнение $s = S(x, s_0, \varepsilon)$, $x \in (-2d, 2d)$, где $S \in {}^3$, $S(-d, s_0,\ \varepsilon) = s_0$. Отображение $\bar\varphi(\cdot\,,\varepsilon) = S(d,\ \cdot\,, \varepsilon)$:$\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ является диффеоморфизмом, накрывающим диффеоморфизм $\varphi(\,\cdot\,, \varepsilon) : \mathbf{S}^1 \to \mathbf{S}^1$ – функцию соответствия по траекториям поля X_ε между замкнутыми трансверсалями l_ε^- и l_ε^+. Функция $\mathrm{M}(\varepsilon) = \int_{-d}^{d} (\varepsilon + P_0(x))^{-1} dx$ является ^{3}-диффеоморфизмом на $(0, \infty)$, меняющим ориентацию. Пусть E – обратный диффеоморфизм. Обозначим $R(s,\varepsilon) = \bar\varphi(s,\varepsilon) - s - \mathrm{M}(\varepsilon)$, $F_\mu(s) = \varphi(f^*(s, \mathrm{E}(\mu)), \mathrm{E}(\mu))$, $\mu \in (\mathrm{M}(\varepsilon_*), \infty)$. Диффеоморфизм

F_μ: $\mathbf{S}^1 \to \mathbf{S}^1$ является функцией последования на трансверсали l_ε^+ по траекториям поля X_ε, $\varepsilon{=}\mathrm{E}(\mu)$. Представим накрывающий его диффеоморфизм $\bar{F}_\mu$ в виде $\bar{F}_\mu(s) = \bar{f}(s) + \mu + G(s,\mu)$, где $G(s,\mu) = \bar{f}^*(s, \mathrm{E}(\mu)) - \bar{f}(s) + R(\bar{f}^*(s, \mathrm{E}(\mu)), \mathrm{E}(\mu))$.

Далее будем использовать универсальную постоянную $D{>}0$, конкретное значение которой не существенно. Из очевидной оценки $D^{-1}(\varepsilon + x^2) \leqslant \varepsilon + P_0(x) \leqslant D(\varepsilon + x^2)$ следует, что

$$D^{-1}\mu^{-2} \leqslant \mathrm{E}(\mu) \leqslant D\mu^{-2}, \quad \left|\mathrm{E}^{(q)}(\mu)\right| \leqslant D\mu^{-2-q} \ \ (q = 1, 2). \tag{1}$$

Для функции R имеем следующие оценки

$$|\partial^p R(s,\varepsilon)/\partial s^p| \leqslant D\varepsilon^{0.5}, \ \ p \in \{0,\ 1,\ 2,\ 3\}, \tag{2}$$

$$|\partial R(s,\varepsilon)/\partial\varepsilon| + \left|\partial^2 R(s,\varepsilon)/\partial s\partial\varepsilon\right| \leqslant D\varepsilon^{-1}, \left|\partial^2 R(s,\varepsilon)/\partial\varepsilon^2\right| \leqslant D\varepsilon^{-2.5}. \tag{3}$$

Докажем, например, (2) при $p{=}1$. Производная S'_s удовлетворяет уравнению в вариациях $\frac{d}{dx}S'_s = A(x,s,\varepsilon)S'_s$, где $A(x,s,\varepsilon) = -P^{-2}(x,\theta)(\varepsilon a'_s(\theta) + \varepsilon x^2 b'_s(x,\theta))$, $\theta = (S(x,s,\varepsilon),\varepsilon)$, и начальному условию $S'_s(-d,s,\varepsilon) = 1$. Поэтому $\bar{\varphi}'_s(s,\varepsilon) = S'_s(d,s,\varepsilon) = \exp\int_{-d}^{d} A(x,s,\varepsilon)dx$. Нетрудно проверить, что $|A(x,s,\varepsilon)| \leqslant D\varepsilon(\varepsilon + x^2)^{-1}$. Учитывая, что $|\exp t - 1| < 3t$при $|t| < 1$, получаем, что $|R'_s(s,\varepsilon)| = |\bar{\varphi}'_s(s,\varepsilon) - 1| \leqslant D\varepsilon^{0.5}$, то есть имеем искомую оценку.

Из (1)–(5) вытекает, что при $p \geqslant 0$, $q \geqslant 0$, $p + q \leqslant 2$ и $p = 3$, $q = 0$

$$\left|\partial^{p+q}G(s,\mu)/\partial s^p\partial\mu^q\right| \leqslant D\mu^{-1}. \tag{4}$$

Мы можем рассматривать $\{f_\mu\}$ как семейство диффеоморфизмов, зависящих от параметра $\mu{\in}[N,\ N{+}1]$. Условия 1^0–4^0 влекут слабую структурную устойчивость этого семейства и трансверсальность бифуркационным многообразиям. Тогда в силу оценки (6) при достаточно большом N семейство диффеоморфизмов $\{F_\mu\}$, $\mu{\in}[N,\ N{+}1]$, слабо топологически эквивалентно семейству $\{f_\mu\}$, $\mu{\in}[N,\ N{+}1]$, и трансверсально бифуркационным многообразиям. Это равносильно утверждениям 1)–3) теоремы.

Замечание. В работе [5] построен пример семейства $\{X_\varepsilon\}$ векторных полей из X_+^r, для которого $X_0 \in \Sigma_+^{1,*}$, а при $\varepsilon{>}0$ двойной цикл исчезает и $X_\varepsilon \in \Sigma_+^0$. В этом примере $X_0 \notin \Sigma_+^{1,3}$, а X_ε разрывно зависит от ε при $\varepsilon{=}0$.

5. Слабо структурно устойчивые семейства векторных полей. Пусть $\Phi^{k,r}{=}\ \Phi^{k,r}([\alpha,\ \beta],\ \mathrm{K}^2)$. Обозначим $\mathrm{S}\Phi^{k,r}$ множество таких семейств $\{X_\varepsilon\}{\in}\mathrm{S}\Phi^{k,r}$, что

1) $X_\alpha \in \Sigma_+^0,\ X_\beta \in \Sigma_+^0$;

2) если ε_0 – бифуркационное значение параметра ε, то есть $X_{\varepsilon_0} \in \mathrm{X}_+^r\backslash\Sigma_+^0$, то $X_{\varepsilon_0} \in \Sigma_+^{1,k}$ принекотором $k\ {\in}\{1,2,3\}$, и семейство трансверсально $\Sigma_+^{1,k}$ при $\varepsilon = \varepsilon_0$.

Теорема 3. *Множество* $\mathrm{S}\Phi^{k,r}$ *а) открыто и всюду плотно в* $\Phi^{k,r}$; *б) состоит из слабо структурно устойчивых семейств векторных полей.*

Полные доказательства теорем 1–3 приведены в [6].

Библиографический список

1. *Палис Ж., ди Мелу В.* Геометрическая теория динамических систем: Введение. М.: Мир, 1986.
2. *Sotomayor J.* Generic one-parameter families of vector fields on two-dimensional manifolds // Publ. Math. IHES. 1974. V. 43. P. 5–46.
3. *Newhaus S., Palis J., Takens F.* Bifurcations and stability of families of diffeomorfisms // Publ. Math. IHES. 1983. V. 57. P. 5–71.
4. *Бородин А.В.* О вложении диффеоморфизма класса C^3 в векторное поле // Математика и математическое образование. Теория и практика / Межвуз. сб. науч. тр. Ярославль, 2001, С. 14–37.
5. *Медведев В.С* О новом типе бифуркаций на многообразиях // Матем. сб. 1980. Т. 113. С. 485–492.
6. *Ройтенберг В.Ш.* Бифуркации невырожденных векторных полей на бутылке Клейна // Деп. в ВИНИТИ, 1995. № 2608-В95. 59 с.

Дистрибутивность решетки интервальных округлений

Т.Э. Каминский, А.Л. Крюкова

Истоки алгебраической теории округлений содержатся в работе Кулиша [1], который рассматривает их как отображения $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, удовлетворяющие некоторым естественным требованиям. Более удобной и наглядной базой для построения теории округлений является интервальная арифметика [2].

Определение [3]. *Интервальным округлением* (I-округлением) называется отображение $\varphi : \mathrm{I}\mathbf{R} \to \mathrm{I}\mathbf{R}$, удовлетворяющее следующим аксиомам:

1. $(\forall A \in \mathrm{I}\mathbf{R})\,(A \subseteq \varphi(A))$,
2. $(\forall A,\ B \in \mathrm{I}\mathbf{R})\,(A \subseteq B \Rightarrow \varphi(A) \subseteq \varphi(B))$,
3. $\varphi^2 = \varphi$.

Примерами интервальных округлений служат следующие отображения:

1. $\varphi^{(k,l)}([a;b]) = \left[a_k^-; b_l^+\right]$, где a_k^- – (соответственно b_l^+) – результат обычного (числового) округления $a(b)$ до k-го (l-го) десятичного разряда по недостатку (по избытку) (k, l – любые целые числа). Такие I-округления называются *регулярными*. Множество всех регулярных округлений, дополненное тождественным отображением ε и отображениями $\varphi^{(k,\infty)}([a;b]) = \left[a_k^-; b\right]$ и $\varphi^{(\infty,l)}([a;b]) = \left[a; b_l^+\right]$, обозначим $\Phi^{(\mathbf{Z})}$.

2. $\varphi_M(A) = [-\max(|a|, |b|);\ \max(|a|, |b|)]$.

3. Пусть $U = [u; v]$ фиксированный отрезок, содержащий нуль: $u < 0 < v$. Положим

$$\varphi_U([a;b]) = \begin{cases} [a;b], & \text{если } [a;b] \cap U = \emptyset, \\ [\min(a,u); \max(b,v)], & \text{если } [a;b] \cap U \neq \emptyset. \end{cases}$$

4. Выберем и зафиксируем действительное число $\delta > 0$, тогда результат округления определяется формулой:

$$\varphi([a,b]) = \begin{cases} [\delta, b], & \text{если } a \geqslant \delta, \\ [a, -\delta], & \text{если } b \leqslant -\delta, \\ [a,b], & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Примеры 2, 3, 4 показывают, что множество Φ всех I-округлений весьма обширно: кроме естественно понимаемых округлений в ней содержатся отображения мало похожие на округления, понимаемые в естественном смысле. Возникает поэтому задача отсекания из множества Φ подобных патологических отображений. Подходы к решению этой задачи связаны с заданием на множестве Φ некоторых алгебраических и порядковых структур и содержатся в работах [3] и ряде сообщений авторов [4, 5, 6].

Легко убедится в том, что произведения $\varphi\psi$ и $\psi\varphi$ двух регулярных округлений φ и ψ совпадают и являются регулярными округлениями, иными словами алгебра $\langle \Phi^{(\mathbf{Z})}, \cdot \rangle$ является коммутативной полугруппой. В тоже время округления φ_M и φ_U с регулярными округлениями не коммутируют и, следовательно, не попадут ни в какую коммутативную полугруппу I-округлений, содержащую множество $\Phi^{(\mathbf{Z})}$. Это обстоятельство показывает, что при изучении множеств I-округлений целесообразно рассматривать на них алгебраическую структуру, связанную, в частности, с операцией умножения (композиции) отображений. Разумеется, при этом нужно потребовать замкнутости такого множества относительно рассматриваемых операций. В работе [3] показано, что

1^0. Если I-округления φ_1, φ_2 коммутируют: $\varphi_1\varphi_2 = \varphi_2\varphi_1$, то их произведение является I-округлением.

2^0. Если оба произведения $\varphi_1\varphi_2$ и $\varphi_2\varphi_1$ двух I-округлений являются I-округлениями, то φ_1, φ_2 коммутируют.

3^0. Отображение $\varphi : \mathbf{IR} \to \mathbf{IR}$, действующее по правилу $\varphi(A) = \varphi_1(A) \cap \varphi_2(A)$, где φ_1, φ_2 – I-округления, является I-округлением.

В этой же работе показано, что, задавая на множестве Φ всех I-округлений отношение порядка $\leqslant$ условием

$$\varphi_1 \leqslant \varphi_2 \iff (\forall A)(\varphi_2(A) \subseteq \varphi_1(A)),$$

мы получим верхнюю полурешетку, в которой $(\varphi_1 \vee \varphi_2)(A) = \varphi_1(A) \cap \varphi_2(A)$.

Пусть Ψ – подмножество в множестве Φ всех I-округлений, удовлетворяющее условиям:

– любые два округления, содержащиеся в Ψ, коммутируют,

– $\Phi^{(\mathbf{Z})} \subseteq \Psi$,

– Ψ замкнуто относительно операций

$$(\varphi_1 \cdot \varphi_2)(A) = \varphi_2(\varphi_1(A)), \quad (\varphi_1 + \varphi_2)(A) = \varphi_1(A) \cap \varphi_2(A).$$

Назовем такое множество Ψ R-множеством. R-множества в множестве Φ существуют: примером может служить $\Phi^{(\mathbf{Z})}$. Разумеется, само Φ R-множеством не является. Опираясь на лемму Куратовского-Цорна, легко показать, что существуют максимальные R-множества. Обозначим через $\overline{\Phi}$ одно из них.

Теорема 1. *Максимальное* R-*множество* $\overline{\Phi}$ *является решеткой.*

В самом деле, алгебра $\langle\overline{\Phi}, \cdot\rangle$ является коммутативной полугруппой идемпотентов. В такой полугруппе, как хорошо известно, можно ввести так называемое отношение естественного порядка $\leqslant_1$ условием

$$\varphi_1 \leqslant_1 \varphi_2 \Longleftrightarrow \varphi_1\varphi_2 = \varphi_1,$$

относительно которого $\overline{\Phi}$ является нижней полурешеткой, в которой операция $\wedge$ определяется условием $\varphi_1 \wedge \varphi_2 = \varphi_1\varphi_2$. В работе [3] показано, что в полугруппе $\langle\overline{\Phi}, \cdot\rangle$ отношение естественного порядка $\leqslant_1$ и отношение $\leqslant$ (см. 3^0) совпадают. Так как $\overline{\Phi}$ замкнуто относительно сложения, и так как $(\varphi_1 + \varphi_2)(A) = \varphi_1(A) \cap \varphi_2(A) = (\varphi_1 \vee \varphi_2)(A)$, то $\varphi_1 \vee \varphi_2 \in \overline{\Phi}$.

Теорема 2. *Решетка* $\left\langle\overline{\Phi}, \vee, \wedge\right\rangle$ *дистрибутивна.*

Действительно,

$$(\varphi \wedge (\psi \vee \chi))(A) = (\varphi(\psi \vee \chi))(A) = (\psi \vee \chi)(\varphi(A)) =$$
$$= \psi(\varphi(A)) \cap \chi(\varphi(A)) = (\varphi\psi)(A) \cap (\varphi\chi)(A) = (\varphi\psi \vee \varphi\chi)(A) =$$
$$= ((\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi))(A),$$

следовательно, $\varphi \wedge (\psi \vee \chi) = (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)$.

Библиографический список

1. *Kulisch U.* An axiomatic Approach to Rounded Computations / U. Kulisch // Numer. Math. 1971. № 18. P. 1–17.

2. *Алефельд Г.* Введение в интервальные вычисления / Г. Алефельд, Ю. Херцбергер. М.: Мир, 1987. 356 с.
3. *Каминский Т.Э.* К теории интервальных округлений / Т.Э. Каминский // Исследования по математическому анализу и методике преподавания математики. 2000. С. 23–36.
4. *Kaminsky T.E.* Interval rounding off lattice / T.E. Kaminsky // Intern. Congress on Computer Systems and Applied Math. Abstracts. St. Petersburg, 1993.
5. *Крюкова А.Л.* О полугруппе интервальных округлений /А.Л. Крюкова // Труды 35-й Региональной молодежной конференции. Екатеринбург, 2004. С. 34–37.
6. *Крюкова А.Л.* Идемпотентное полукольцо интервальных округлений / А.Л. Крюкова // V Всероссийская конференция молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям. Новосибирск, 2004. С. 23.

Об одном классе геодезических преобразований сасакиевых структур

Н.Н. Дондукова

Теория геодезических отображении псевдоримановых пространств составляет одно из старейших направлении римановой геометрии, истоки которой восходят к трудам Т. Леви-Чивита, Г. Вейля и других знаменитых математиков. Одним из наиболее популярных результатов в этом направлении является результат Уэстлейка и Яно, утверждающий, что келерово многообразие не допускает нетривиальных геодезических преобразовании, сохраняющих комплексную структуру.

В настоящей работе введено понятие контактно-геодезического преобразования почти контактной метрической структуры, как геодезического преобразования, сохраняющего почти контактную структуру.

Получен один из контактных аналогов результата Уэстлейка и Яно. А именно, доказано, что многообразие Сасаки не допускает нетривиальных контактно-геодезических преобразовании.

Пусть M – гладкое многообразие размерности $2n+1$; $X(M)$ – модуль гладких векторных полей на многообразии M; ∇–риманова связность метрики g.

Определение 1 ([1]). *Почти контактной метрической* (короче AC-) *структурой* на гладком многообразии M называется совокупность $\{\eta, \xi, \Phi, g =< \cdot, \cdot >\}$ тензорных полей на этом многообразии, где η – дифференциальная 1-форма, называемая *контактной формой* структуры, ξ – векторное поле, называемое *характеристическим вектором*, Φ – поле тензора типа $(1,1)$, называемое *структурным эндоморфизмом*, g – риманова метрика на M. При этом

$$\begin{array}{l} 1)\ \eta(\xi)=1;\ 2)\ \Phi(\xi)=0;\ 3)\ \eta\circ\Phi=0;\ 4)\ \Phi^2=-id+\eta\otimes\xi; \\ 5) < \Phi X, \Phi Y >=< X, Y > -\eta(X)\eta(Y);\ \ X, Y \in X(M). \end{array} \tag{1}$$

Многообразие с фиксированной AC-структурой называется *почти контактным метрическим* (короче AC-) *многообразием* . На таком многообразии внутренним образом определены распределения $L = Im\,\Phi = ker\,\eta$ и $M = ker\,\Phi = ker\,d\eta$ размерностей $2n$ и 1, соответственно, причем $X(M) = L \oplus M$.

Определение 2 ([2]). Почти контактная метрическая структура называется *сасакиевой структурой,* если она характеризуется тождеством

$$\nabla_X(\Phi)Y =< X, Y > \xi - \eta(Y)X;\ \ X, Y \in X(M).$$

Определение 3 ([3]). Диффеоморфизм φ псевдориманова многообразия (M, g) на себя называется *геодезическим преобразованием*, если он любую геодезическую переводит в геодезическую. В этом случае на M возникает новая псевдориманова метрика $\tilde{g} = \varphi^*(g)$, которая называется геодезическим преобразованием исходной метрики. В силу симметричности тензора $\tilde{g}$ существует самосопряженный эндоморфизм h, такой что $\tilde{g}(X, Y) = g(X, hY)$; $X, Y \in X(M)$. Называется этот эндоморфизм *оператором геодезической деформации.*

Введем понятие *контактно-геодезического преобразования*:

Определение 4. Геодезическое преобразование $g \to \tilde{g}$ метрики g $AC-$структуры назовем *контактно-геодезическим* (короче *с-геодезическим*) *преобразованием*, если четверка $\{\eta, \xi, \Phi, \tilde{g}\}$ также $AC-$структура.

Лемма. *Характеристический вектор* ξ $AC-$*структуры является собственным вектором оператора* h $-$*геодезической деформации с собственным значением* 1.

Доказательство. В самом деле, из $(1_{1,2,5})$ имеем $\eta(X) =< \xi, X >$. С другой стороны,

$$\eta(X) = \tilde{g}(\xi, X) =< \xi, h(X) >=< h(\xi, X > .$$

Сравнивая с предыдущим тождеством, в силу невырожденности метрики получаем, что $h(\xi) = \xi$. $\square$

Как известно [3], если $\tilde{\nabla}$ – риманова связность метрики $\tilde{g}$, то тензор аффинной деформации от связности ∇ к связности $\tilde{\nabla}$ имеет вид

$$T(X,Y) = \tilde{\nabla}_X Y - \nabla_X Y = \psi(X)Y + \psi(Y)X;\ X,Y \in X(M),$$

где ψ – дифференциальная 1-форма, называемая *формой геодезического искажения.* Если $\psi = 0$, то преобразование φ является тривиальным, то есть $\varphi_* \nabla = \nabla$.

Вычислив ковариантную производную структурного эндоморфизма Φ относительно связности $\tilde{\nabla}$, получим

$$\begin{gathered}\tilde{\nabla}_X(\Phi)Y = \tilde{\nabla}_X(\Phi Y) - \Phi\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X(\Phi)Y + \Phi\nabla_X Y + T(X,\Phi Y)- \\ -\Phi\nabla_X Y - \Phi T(X,Y) = \nabla_X(\Phi)Y + T(X,\Phi Y) - \Phi T(X,Y) = \\ = \nabla_X(\Phi)Y + \psi(\Phi Y)X - \psi(Y)\Phi X.\end{gathered}$$

Таким образом

$$\tilde{\nabla}_X(\Phi)Y = \nabla_X(\Phi)Y + \psi(\Phi Y)X - \psi(Y)\Phi X. \tag{2}$$

Напомним, что в работе [1] был введен в рассмотрение *первый структурный тензор,* который имеет следующий вид

$$\begin{gathered}B(X,Y) = -\tfrac{1}{8}\{\Phi \circ \nabla_{\Phi^2 Y}(\Phi)(\Phi^2 X) + \Phi \circ \nabla_{\Phi Y}(\Phi)(\Phi X)+ \\ +\Phi^2 \circ \nabla_{\Phi Y}(\Phi)(\Phi^2 X) - \Phi^2 \circ \nabla_{\Phi^2 Y}(\Phi)(\Phi X)\};\ X,Y \in X(M).\end{gathered} \tag{3}$$

С учетом (2) и (3) получим

$$\tilde{B}(X,Y) = B(X,Y) - \frac{1}{2}\psi(\Phi Y)\Phi X - \frac{1}{2}\psi(\Phi^2 Y)\Phi^2 X;\ X,Y \in X(M),$$

где $\tilde{B}$ – первый структурный тензор относительно $\{\eta, \xi, \Phi, \tilde{g}\}$.

Так как первый структурный тензор сасакиевой структуры равен нулю (см.[1]), имеем

$$\tilde{B}(X,Y) = -\frac{1}{2}\psi(\Phi Y)\Phi X - \frac{1}{2}\psi(\Phi^2 Y)\Phi^2 X;\ X,Y \in X(M). \qquad (4)$$

В [1] доказано, что первый структурный тензор обладает следующим свойством

$$< B(X,Y), Z > + < X, B(Y,Z) >= 0;\ X,Y \in X(M). \qquad (5)$$

Применив его к тензору $\tilde{B}$ с учетом (4), после упрощений получим:

$$\psi(\Phi^2 X)\Phi^2 Y = 0.$$

Следовательно

$$\psi(\Phi^2 X) = 0.$$

Используя (1_4), имеем отсюда, что

$$\psi(X) = \psi(\xi)\eta(X);\ X,Y \in X(M). \qquad (6)$$

В частности, с учетом (1_3)

$$\psi \circ \Phi = 0,$$

В силу чего, тождество (2) принимает вид

$$\tilde{\nabla}_X(\Phi)Y = \nabla_X(\Phi)Y - \psi(Y)\Phi X;\ X,Y \in X(M). \qquad (7)$$

Далее, применив оператор ∇_X к тождеству $\tilde{g}(\Phi Y, Z) + \tilde{g}(Y, \Phi Z) = 0$, мы получим следующее тождество

$$\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X(\Phi)Y, Z) + \tilde{g}(Y, \tilde{\nabla}_X(\Phi)Z) = 0. \qquad (8)$$

С учетом характеристического тождества сасакиевых многообразии и (8), соотношение (8) примет следующий вид

$$\tilde{g}(X,hY)\eta(Z)-\eta(Y)\tilde{g}(X,Z)-\psi(Y)\tilde{g}(\Phi X,Z)+$$
$$+\tilde{g}(X,hZ)\eta(Y)-\eta(Z)\tilde{g}(X,Y)-\psi(Z)\tilde{g}(\Phi X,Y)=0,$$

где h – оператор геодезической деформации от метрики $\tilde{g}$ к метрике g, или

$$\tilde{g}(hY,X)\eta(Z)-\eta(Y)\tilde{g}(Z,X)+\psi(Y)\tilde{g}(\Phi Z,X)+$$
$$+\tilde{g}(hZ,X)\eta(Y)-\eta(Z)\tilde{g}(Y,X)+\psi(Z)\tilde{g}(\Phi Y,X)=0.$$

Отсюда, в силу невырожденности метрики $\tilde{g}$,

$$h(Y)\eta(Z)-\eta(Y)Z+\psi(Y)\Phi Z+h(Z)\eta(Y)-\eta(Z)Y+\psi(Z)\Phi Y=0;\ X,Y\in X(M)$$

Положив здесь $Z=\xi$, с учетом леммы и (1_2) получим

$$h(Y)=Y-\psi(\xi)\Phi Y. \qquad (9)$$

Заметим, что h – самосопряженный эндоморфизм, то есть

$$\tilde{g}(h(X),Y)=\tilde{g}(X,h(Y));$$

Используя тождество (9), получим отсюда, с учетом невырожденности метрики, что

$$\psi(\xi)\Phi Y=0.$$

В частности, если $Y\in L$ – ненулевой вектор, то

$$\psi(\xi)=0,$$

Следовательно, в силу (6), $\psi=0$.

Доказана

Теорема. *Многообразие Сасаки не допускает нетривиальных c-геодезических преобразований метрики.*

Библиографический список

1. *Кириченко В.Ф.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. М.: Изд-во МПГУ. 2003.
2. *Кириченко В.Ф.* Аксиома Ф-голоморфных плоскостей в контактной метрической геометрии // Изв. АН СССР 48, № 4 (1984). С. 711–739.
3. *Синюков Н.С.* Геодезические отображения римановых пространств. М.: Наука, 1979.

Однородные супермногообразия с ретрактом $\mathbb{CP}^{1|4}_{2222}$ [1]

М.А. Башкин

Проведена классификация однородных нерасщепимых супермногообразий, связанных с комплексной проективной прямой в случае, когда ретракт определяется векторным расслоением с сигнатурой $(2, 2, 2, 2)$. Показано, что с точностью до изоморфизма существует два однородных нерасщепимых супермногообразия с требуемым ретрактом.

Предполагается, что читатель знаком с основами теории комплексных супермногообразий (см., например, [1]).

Как известно, любое голоморфное векторное расслоение $\mathbf{E}$ ранга n над $\mathbb{CP}^1$ единственным образом разлагается в прямую сумму расслоений на прямые, т.е. имеет вид $\mathbf{E} = \bigoplus_{j=1}^{n} \mathbf{L}_{-k_j}$, где $\mathbf{L}_{-k_j}$ — расслоение на прямые степени $-k_j$. Соответствующее расщепимое супермногообразие однородно тогда и только тогда, когда все $k_j \geqslant 0$.

Обозначим через $\mathbb{CP}^{1|4}_{2222}$ расщепимое супермногообразие, определяемое расслоением $\mathbf{E} = 4\mathbf{L}_{-2}$. Покроем $\mathbb{CP}^1$ двумя аффинными картами U_0 и U_1 с локальными координатами x и $y = \frac{1}{x}$ соответственно. Тогда функции перехода супермногообразия $\mathbb{CP}^{1|4}_{2222}$ в

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Росийского фонда фундаментальных исследований (грант 04-01-00647).

$U_0 \cap U_1$ имеют вид

$$\begin{cases} y = x^{-1}, \\ \eta_i = x^{-2}\xi_i, \qquad i = 1, \ldots, 4, \end{cases}$$

где ξ_i и η_i — базисные сечения расслоения $\mathbf{E}$ над U_0 и U_1 соответственно.

Обозначим через $\mathcal{T}_{\mathrm{gr}}$ градуированный касательный пучок супермногообразия $\mathbb{CP}^{1|4}_{2222}$ и через $\mathfrak{v}(\mathbb{CP}^1, \mathcal{O}_{\mathrm{gr}})$ супералгебру Ли векторных полей на нем.

Рассмотрим точную последовательность (см. [2])

$$0 \to \operatorname{End}\mathbf{E} \to \mathfrak{v}(\mathbb{CP}^1, \mathcal{O}_{\mathrm{gr}})_0 \xrightarrow{\beta} \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \to 0. \qquad (1)$$

Подалгебра $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{v}(\mathbb{CP}^1, \mathcal{O}_{\mathrm{gr}})_0$ расщепляет последовательность (1), если β изоморфно отображает ее на $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ или, что равносильно, имеем разложение в полупрямую сумму $\mathfrak{v}(\mathbb{CP}^1, \mathcal{O}_{\mathrm{gr}})_0 = \operatorname{End}\mathbf{E} \oplus \mathfrak{a}$. В работе [2] показано, что супермногообразие с ретрактом $(\mathbb{CP}^1, \mathcal{O}_{\mathrm{gr}})$ четно-однородно (или $\bar{0}$-однородно) тогда и только тогда, когда на него поднимается некоторая подалгебра $\mathfrak{a}$, расщепляющая (1). В этой ситуации мы будем говорить, что *супермногообразие* $(\mathbb{CP}^1, \mathcal{O})$ *является* $\bar{0}$*-однородным относительно* $\mathfrak{a}$. Подалгебру $\mathfrak{a} \simeq \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ можно задать с точностью до автоморфизма из $\operatorname{Aut}\mathbf{E}$ одним из следующих пяти базисов (см. [2]):

1) $\mathbf{e} = \frac{\partial}{\partial x}$, $\mathbf{h} = -2x\frac{\partial}{\partial x} - \nabla$,
$\mathbf{f} = -x^2\frac{\partial}{\partial x} - x\nabla$;

2) $\mathbf{e} = \xi_2\frac{\partial}{\partial \xi_1} + \frac{\partial}{\partial x}$, $\mathbf{h} = -2x\frac{\partial}{\partial x} - 3\xi_1\frac{\partial}{\partial \xi_1} - \xi_2\frac{\partial}{\partial \xi_2} - 2\xi_3\frac{\partial}{\partial \xi_3} - 2\xi_4\frac{\partial}{\partial \xi_4}$,
$\mathbf{f} = \xi_1\frac{\partial}{\partial \xi_2} - x^2\frac{\partial}{\partial x} - x\nabla$;

3) $\mathbf{e} = \xi_2\frac{\partial}{\partial \xi_1} + \xi_4\frac{\partial}{\partial \xi_3} + \frac{\partial}{\partial x}$, $\mathbf{h} = -2x\frac{\partial}{\partial x} - 3\xi_1\frac{\partial}{\partial \xi_1} - \xi_2\frac{\partial}{\partial \xi_2} - 3\xi_3\frac{\partial}{\partial \xi_3} - \xi_4\frac{\partial}{\partial \xi_4}$,
$\mathbf{f} = \xi_1\frac{\partial}{\partial \xi_2} + \xi_3\frac{\partial}{\partial \xi_4} - x^2\frac{\partial}{\partial x} - x\nabla$;

4) $\mathbf{e} = \xi_2 \dfrac{\partial}{\partial \xi_1} + \xi_3 \dfrac{\partial}{\partial \xi_2} + \dfrac{\partial}{\partial x}$, $\mathbf{h} = -2x \dfrac{\partial}{\partial x} - 4\xi_1 \dfrac{\partial}{\partial \xi_1} - 2\xi_2 \dfrac{\partial}{\partial \xi_2} - 2\xi_4 \dfrac{\partial}{\partial \xi_4}$,
$\mathbf{f} = 2\xi_1 \dfrac{\partial}{\partial \xi_2} + 2\xi_2 \dfrac{\partial}{\partial \xi_3} - x^2 \dfrac{\partial}{\partial x} - x\nabla$;

5) $\mathbf{e} = \xi_2 \dfrac{\partial}{\partial \xi_1} + \xi_3 \dfrac{\partial}{\partial \xi_2} + \xi_4 \dfrac{\partial}{\partial \xi_3} + \dfrac{\partial}{\partial x}$, $\mathbf{h} = -2x \dfrac{\partial}{\partial x} - 5\xi_1 \dfrac{\partial}{\partial \xi_1} - 3\xi_2 \dfrac{\partial}{\partial \xi_2} - \xi_3 \dfrac{\partial}{\partial \xi_3} + \xi_4 \dfrac{\partial}{\partial \xi_4}$,
$\mathbf{f} = 3\xi_1 \dfrac{\partial}{\partial \xi_2} + 4\xi_2 \dfrac{\partial}{\partial \xi_3} + 3\xi_3 \dfrac{\partial}{\partial \xi_4} - x^2 \dfrac{\partial}{\partial x} - x\nabla$;

где $\nabla = 2 \sum\limits_{i=1}^{4} \xi_i \dfrac{\partial}{\partial \xi_i}$.

Рассмотрим подпучок $\mathcal{A}ut_{(2)}\mathcal{O}_{\mathrm{gr}} = \exp((\mathcal{T}_{\mathrm{gr}})_2 \oplus (\mathcal{T}_{\mathrm{gr}})_4)$ пучка $\mathcal{A}ut\,\mathcal{O}_{\mathrm{gr}}$. Согласно теореме Грина, множество супермногообразий с заданным ретрактом $(M, \mathcal{O}_{\mathrm{gr}})$ изоморфно множеству орбит группы $\mathrm{Aut}\,\mathbf{E}$ на множестве $H^1(M, \mathcal{A}ut_{(2)}\mathcal{O}_{\mathrm{gr}})$. Будем описывать когомологии с помощью коциклов Чеха в покрытии $\mathfrak{U} = \{U_0, U_1\}$. Можно доказать следующее

Предложение 1. *Предположим, что* $n \leqslant 5$ *и* $H^0(M, (\mathcal{T}_{\mathrm{gr}})_2) = 0$. *Пусть заданы такие подпространства* $Q_{2p} \subset Z^1(\mathfrak{U}, (\mathcal{T}_{\mathrm{gr}})_{2p})$ $(p = 1, 2)$, *что каждый класс когомологий из* $H^1(M, (\mathcal{T}_{\mathrm{gr}})_{2p})$ *содержит ровно по одному коциклу из* Q_{2p} $(p = 1, 2)$. *Тогда любой класс когомологий из* $H^1(M, \mathcal{A}ut_{(2)}\mathcal{O}_{\mathrm{gr}})$ *представляется единственным коциклом вида* $z = \exp(u^2 + u^4)$, *где* $u^2 \in Q_2$, $u^4 \in Q_4$.

Мы будем говорить далее о задании супермногообразия $(M, \mathcal{O})$ коциклом $u^2 + u^4$, подразумевая, что $(M, \mathcal{O})$ соответствует коциклу $z = \exp(u^2 + u^4)$.

Используя метод, изложенный в разделе 2 работы [3], можно доказать следующие леммы.

Лемма 1. *Справедливо* $H^0(\mathbb{CP}^1, (\mathcal{T}_{\mathrm{gr}})_2) = \{0\}$.

Лемма 2. *Базис пространства* $H^1(\mathbb{CP}^1, (\mathcal{T}_{\mathrm{gr}})_q)$, $q = 2, 4$, *может быть представлен следующими коциклами:*

1) $q = 2$

$$
\begin{array}{lll}
\multicolumn{3}{l}{x^{-1}\xi_1\xi_2\frac{\partial}{\partial x}, x^{-1}\xi_1\xi_3\frac{\partial}{\partial x}, x^{-1}\xi_1\xi_4\frac{\partial}{\partial x}, x^{-1}\xi_2\xi_3\frac{\partial}{\partial x}, x^{-1}\xi_2\xi_4\frac{\partial}{\partial x}, x^{-1}\xi_3\xi_4\frac{\partial}{\partial x},} \\
x^{-1}\xi_1\xi_2\xi_3\frac{\partial}{\partial \xi_3}, & x^{-2}\xi_1\xi_2\xi_3\frac{\partial}{\partial \xi_3}, & x^{-3}\xi_1\xi_2\xi_3\frac{\partial}{\partial \xi_3}, \\
x^{-1}\xi_1\xi_2\xi_4\frac{\partial}{\partial \xi_4}, & x^{-2}\xi_1\xi_2\xi_4\frac{\partial}{\partial \xi_4}, & x^{-3}\xi_1\xi_2\xi_4\frac{\partial}{\partial \xi_4}, \\
x^{-1}\xi_1\xi_3\xi_2\frac{\partial}{\partial \xi_2}, & x^{-2}\xi_1\xi_3\xi_2\frac{\partial}{\partial \xi_2}, & x^{-3}\xi_1\xi_3\xi_2\frac{\partial}{\partial \xi_2}, \\
x^{-1}\xi_1\xi_3\xi_4\frac{\partial}{\partial \xi_4}, & x^{-2}\xi_1\xi_3\xi_4\frac{\partial}{\partial \xi_4}, & x^{-3}\xi_1\xi_3\xi_4\frac{\partial}{\partial \xi_4}, \\
x^{-1}\xi_1\xi_4\xi_2\frac{\partial}{\partial \xi_2}, & x^{-2}\xi_1\xi_4\xi_2\frac{\partial}{\partial \xi_2}, & x^{-3}\xi_1\xi_4\xi_2\frac{\partial}{\partial \xi_2}, \\
x^{-1}\xi_1\xi_4\xi_3\frac{\partial}{\partial \xi_3}, & x^{-2}\xi_1\xi_4\xi_3\frac{\partial}{\partial \xi_3}, & x^{-3}\xi_1\xi_4\xi_3\frac{\partial}{\partial \xi_3}, \\
x^{-1}\xi_2\xi_3\xi_1\frac{\partial}{\partial \xi_1}, & x^{-2}\xi_2\xi_3\xi_1\frac{\partial}{\partial \xi_1}, & x^{-3}\xi_2\xi_3\xi_1\frac{\partial}{\partial \xi_1}, \\
x^{-1}\xi_2\xi_3\xi_4\frac{\partial}{\partial \xi_4}, & x^{-2}\xi_2\xi_3\xi_4\frac{\partial}{\partial \xi_4}, & x^{-3}\xi_2\xi_3\xi_4\frac{\partial}{\partial \xi_4}, \\
x^{-1}\xi_2\xi_4\xi_1\frac{\partial}{\partial \xi_1}, & x^{-2}\xi_2\xi_4\xi_1\frac{\partial}{\partial \xi_1}, & x^{-3}\xi_2\xi_4\xi_1\frac{\partial}{\partial \xi_1}, \\
x^{-1}\xi_2\xi_4\xi_3\frac{\partial}{\partial \xi_3}, & x^{-2}\xi_2\xi_4\xi_3\frac{\partial}{\partial \xi_3}, & x^{-3}\xi_2\xi_4\xi_3\frac{\partial}{\partial \xi_3}, \\
x^{-1}\xi_3\xi_4\xi_1\frac{\partial}{\partial \xi_1}, & x^{-2}\xi_3\xi_4\xi_1\frac{\partial}{\partial \xi_1}, & x^{-3}\xi_3\xi_4\xi_1\frac{\partial}{\partial \xi_1}, \\
x^{-1}\xi_3\xi_4\xi_2\frac{\partial}{\partial \xi_2}, & x^{-2}\xi_3\xi_4\xi_2\frac{\partial}{\partial \xi_2}, & x^{-3}\xi_3\xi_4\xi_2\frac{\partial}{\partial \xi_2}, \\
x^{-1}\xi_1\xi_2\xi_3\frac{\partial}{\partial \xi_4}, & x^{-2}\xi_1\xi_2\xi_3\frac{\partial}{\partial \xi_4}, & x^{-3}\xi_1\xi_2\xi_3\frac{\partial}{\partial \xi_4}, \\
x^{-1}\xi_1\xi_2\xi_4\frac{\partial}{\partial \xi_3}, & x^{-2}\xi_1\xi_2\xi_4\frac{\partial}{\partial \xi_3}, & x^{-3}\xi_1\xi_2\xi_4\frac{\partial}{\partial \xi_3}, \\
x^{-1}\xi_1\xi_3\xi_4\frac{\partial}{\partial \xi_2}, & x^{-2}\xi_1\xi_3\xi_4\frac{\partial}{\partial \xi_2}, & x^{-3}\xi_1\xi_3\xi_4\frac{\partial}{\partial \xi_2}, \\
x^{-1}\xi_2\xi_3\xi_4\frac{\partial}{\partial \xi_1}, & x^{-2}\xi_2\xi_3\xi_4\frac{\partial}{\partial \xi_1}, & x^{-3}\xi_2\xi_3\xi_4\frac{\partial}{\partial \xi_1}.
\end{array}
$$

2) $q = 4$

$$
x^{-1}\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4\frac{\partial}{\partial x}, \quad x^{-2}\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4\frac{\partial}{\partial x}, \quad x^{-3}\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4\frac{\partial}{\partial x}, \quad x^{-4}\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4\frac{\partial}{\partial x}, \\
x^{-5}\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4\frac{\partial}{\partial x}.
$$

Лемма 3. *Базис пространства* $H^1(\mathbb{CP}^1, (\mathcal{T}_{\mathrm{gr}})_q)$, $q = 1, 3$, *может быть представлен следующими коциклами:*

1) $q=1$

$$x^{-1}\xi_i\xi_j\frac{\partial}{\partial\xi_j},\quad i\neq j,\qquad\qquad x^{-1}\xi_i\xi_j\frac{\partial}{\partial\xi_k},\quad i<j,\ k\neq i,j.$$

2) $q=3$

$$x^{-r}\xi_i\xi_j\xi_k\frac{\partial}{\partial x},\quad i<j<k,\ r=1,2,3,$$
$$x^{-r}\xi_i\xi_j\xi_k\xi_l\frac{\partial}{\partial\xi_l},\quad i<j<k,\ l\neq i,j,k,\ r=1,\ldots,5.$$

Проведем исследование на $\overline{0}$-однородность супермногообразий с ретрактом $\mathbb{CP}^{1|4}_{2222}$. Обозначим через $H^1(\mathbb{CP}^1,(\mathcal{T}_{\mathrm{gr}}))^{\mathfrak{a}}$ множество $\mathfrak{a}$-инвариантных классов когомологий.

Предложение 2. *Базис $H^1(\mathbb{CP}^1,(\mathcal{T}_{\mathrm{gr}})_2)^{\mathfrak{a}}$ в каждом из пяти случаев подалгебры $\mathfrak{a}$ может быть представлен следующими коциклами:*

1) $x^{-1}\xi_1\xi_2\frac{\partial}{\partial x}+x^{-2}\xi_1\xi_2\xi_3\frac{\partial}{\partial\xi_3}+x^{-2}\xi_1\xi_2\xi_4\frac{\partial}{\partial\xi_4}$,

$x^{-1}\xi_1\xi_3\frac{\partial}{\partial x}+x^{-2}\xi_1\xi_3\xi_2\frac{\partial}{\partial\xi_2}+x^{-2}\xi_1\xi_3\xi_4\frac{\partial}{\partial\xi_4}$,

$x^{-1}\xi_1\xi_4\frac{\partial}{\partial x}+x^{-2}\xi_1\xi_4\xi_2\frac{\partial}{\partial\xi_2}+x^{-2}\xi_1\xi_4\xi_3\frac{\partial}{\partial\xi_3}$,

$x^{-1}\xi_2\xi_3\frac{\partial}{\partial x}+x^{-2}\xi_2\xi_3\xi_1\frac{\partial}{\partial\xi_1}+x^{-2}\xi_2\xi_3\xi_4\frac{\partial}{\partial\xi_4}$,

$x^{-1}\xi_2\xi_4\frac{\partial}{\partial x}+x^{-2}\xi_2\xi_4\xi_1\frac{\partial}{\partial\xi_1}+x^{-2}\xi_2\xi_4\xi_3\frac{\partial}{\partial\xi_3}$,

$x^{-1}\xi_3\xi_4\frac{\partial}{\partial x}+x^{-2}\xi_3\xi_4\xi_1\frac{\partial}{\partial\xi_1}+x^{-2}\xi_3\xi_4\xi_2\frac{\partial}{\partial\xi_2}$;

2) $x^{-1}\xi_1\xi_2\frac{\partial}{\partial x}+x^{-2}\xi_1\xi_2\xi_3\frac{\partial}{\partial\xi_3}+x^{-2}\xi_1\xi_2\xi_4\frac{\partial}{\partial\xi_4}$,

$x^{-1}\xi_3\xi_4\frac{\partial}{\partial x}+x^{-2}\xi_3\xi_4\xi_1\frac{\partial}{\partial\xi_1}+x^{-2}\xi_3\xi_4\xi_2\frac{\partial}{\partial\xi_2}$;

3) $x^{-1}\xi_1\xi_2\frac{\partial}{\partial x}+x^{-2}\xi_1\xi_2\xi_3\frac{\partial}{\partial\xi_3}+x^{-2}\xi_1\xi_2\xi_4\frac{\partial}{\partial\xi_4}$,

$x^{-1}\xi_3\xi_4\frac{\partial}{\partial x}+x^{-2}\xi_3\xi_4\xi_1\frac{\partial}{\partial\xi_1}+x^{-2}\xi_3\xi_4\xi_2\frac{\partial}{\partial\xi_2}$,

$2(x^{-1}\xi_2\xi_4\xi_3\frac{\partial}{\partial\xi_3}+x^{-3}\xi_1\xi_3\xi_4\frac{\partial}{\partial\xi_4})+x^{-2}\xi_1\xi_4\xi_3\frac{\partial}{\partial\xi_3}+x^{-2}\xi_2\xi_3\xi_4\frac{\partial}{\partial\xi_4}$,

$2(x^{-1}\xi_2\xi_4\xi_1\frac{\partial}{\partial\xi_1}+x^{-3}\xi_1\xi_3\xi_2\frac{\partial}{\partial\xi_2})+x^{-2}\xi_2\xi_3\xi_1\frac{\partial}{\partial\xi_1}+x^{-2}\xi_1\xi_4\xi_2\frac{\partial}{\partial\xi_2}$,

$2(x^{-1}\xi_2\xi_3\xi_4\frac{\partial}{\partial\xi_1}-x^{-3}\xi_1\xi_3\xi_4\frac{\partial}{\partial\xi_2})+x^{-2}\xi_3\xi_4\xi_1\frac{\partial}{\partial\xi_1}-x^{-2}\xi_3\xi_4\xi_2\frac{\partial}{\partial\xi_2}$,

$2(x^{-1}\xi_1\xi_2\xi_4\frac{\partial}{\partial\xi_3}-x^{-3}\xi_1\xi_2\xi_3\frac{\partial}{\partial\xi_4})+x^{-2}\xi_1\xi_2\xi_3\frac{\partial}{\partial\xi_3}-x^{-2}\xi_1\xi_2\xi_4\frac{\partial}{\partial\xi_4}$,

$$x^{-1}\xi_1\xi_4\frac{\partial}{\partial x}+x^{-2}\xi_1\xi_4\xi_2\frac{\partial}{\partial\xi_2}+x^{-2}\xi_1\xi_4\xi_3\frac{\partial}{\partial\xi_3}- \\ -(x^{-1}\xi_2\xi_3\frac{\partial}{\partial x}+x^{-2}\xi_2\xi_3\xi_1\frac{\partial}{\partial\xi_1}+x^{-2}\xi_2\xi_3\xi_4\frac{\partial}{\partial\xi_4});$$

4) $2x^{-3}\xi_1\xi_2\xi_3\frac{\partial}{\partial\xi_3}+x^{-2}\xi_1\xi_3\xi_2\frac{\partial}{\partial\xi_2}+x^{-1}\xi_2\xi_3\xi_1\frac{\partial}{\partial\xi_1}$,

$$2x^{-3}\xi_1\xi_2\xi_4\frac{\partial}{\partial\xi_4}+x^{-2}\xi_1\xi_3\xi_4\frac{\partial}{\partial\xi_4}+x^{-1}\xi_2\xi_3\xi_4\frac{\partial}{\partial\xi_4},$$

$$2(x^{-3}\xi_1\xi_4\xi_2\frac{\partial}{\partial\xi_2}+x^{-3}\xi_1\xi_4\xi_3\frac{\partial}{\partial\xi_3})+ \\ +x^{-1}\xi_3\xi_4\xi_1\frac{\partial}{\partial\xi_1}+x^{-1}\xi_3\xi_4\xi_2\frac{\partial}{\partial\xi_2}+x^{-2}\xi_2\xi_4\xi_1\frac{\partial}{\partial\xi_1}+x^{-2}\xi_2\xi_4\xi_3\frac{\partial}{\partial\xi_3};$$

5) $x^{-1}\xi_1\xi_4\frac{\partial}{\partial x}+x^{-2}\xi_1\xi_4\xi_2\frac{\partial}{\partial\xi_2}+x^{-2}\xi_1\xi_4\xi_3\frac{\partial}{\partial\xi_3}-$

$$-(x^{-1}\xi_2\xi_3\frac{\partial}{\partial x}+x^{-2}\xi_2\xi_3\xi_1\frac{\partial}{\partial\xi_1}+x^{-2}\xi_2\xi_3\xi_4\frac{\partial}{\partial\xi_4}),$$

$$3(x^{-1}\xi_1\xi_4\frac{\partial}{\partial x}-x^{-1}\xi_2\xi_3\frac{\partial}{\partial x})+2(x^{-1}\xi_2\xi_4\xi_3\frac{\partial}{\partial\xi_3}-x^{-1}\xi_2\xi_4\xi_1\frac{\partial}{\partial\xi_1}- \\ -x^{-1}\xi_1\xi_3\xi_4\frac{\partial}{\partial\xi_2}+x^{-2}\xi_1\xi_4\xi_3\frac{\partial}{\partial\xi_3})+4x^{-2}\xi_1\xi_4\xi_2\frac{\partial}{\partial\xi_2}+6(x^{-3}\xi_1\xi_3\xi_4\frac{\partial}{\partial\xi_4}- \\ -x^{-2}\xi_2\xi_3\xi_1\frac{\partial}{\partial\xi_1}-x^{-3}\xi_1\xi_3\xi_2\frac{\partial}{\partial\xi_2})+8x^{-3}\xi_1\xi_2\xi_4\frac{\partial}{\partial\xi_3}.$$

Доказательство. Представим базис $H^1(\mathbb{CP}^1,(\mathcal{T}_{\mathrm{gr}})_2)^{\mathfrak{a}}$ $\mathfrak{a}$-инвариантными коциклами леммы 2(1). Из [4] имеем соответствующие условия:

$$[v,u^2]\sim 0, \tag{2}$$

$$[u^2,[u^2,v]]\sim 0, \tag{3}$$

для $\forall v\in\mathfrak{a}$. Далее в каждом из пяти рассматриваемых случаев супералгебры $\mathfrak{a}$ положим сначала $v=\mathbf{h}$, а потом $v=\mathbf{e}$. Тогда для каждого случая останутся линейные комбинации коциклов, пиведенных в формулировке предложения. Легко проверить, что условие (3) для линейных комбинаций этих коциклов выполняется. ■

Предложение 3. *Для любого из четырех описанных ранее случаев подалгебры* $\mathfrak{a}$ *имеем* $H^1(\mathbb{CP}^1,(\mathcal{T}_{\mathrm{gr}})_4)^{\mathfrak{a}}=\{0\}$.

Доказательство. Найдем такие $u^4\in Z^1(\mathbb{CP}^1,(\mathcal{T}_{\mathrm{gr}})_4)$, что

$$[v,u^4]\sim 0,\ \text{для } \forall v\in\mathfrak{a}.$$

Для любого из четырех случаев подалгебры $\mathfrak{a}$, при $v = \mathbf{h}$ получаем, что этому условию удовлетворяет только поле $x^{-3}\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4\dfrac{\partial}{\partial x}$. Но для любого $\mathbf{e}$ имеем $[\mathbf{e}, x^{-3}\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4\dfrac{\partial}{\partial x}] = -3x^{-4}\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4\dfrac{\partial}{\partial x} \not\sim 0$ по лемме 2(2). ■

Пусть $\lambda_2 : \mathcal{A}ut_{(2)}\mathcal{O}_{\mathrm{gr}} \to (\mathcal{T}_{\mathrm{gr}})_2$ — гомоморфизм пучков, сопоставляющий каждому ростку автоморфизма a 2-компоненту элемента $\log a$ в $(\mathcal{T}_{\mathrm{gr}})_2 \oplus (\mathcal{T}_{\mathrm{gr}})_4$. Из предложений 1 и 3 и леммы 1 можно вывести

Предложение 4. *Если $\mathfrak{a}$ — подалгебра, расщепляющая последовательность* (1) *и если $H^1(\mathbb{CP}^1, \mathcal{A}ut_{(2)}\mathcal{O}_{\mathrm{gr}})^{\mathfrak{a}}$ — множество классов, определяющих $\overline{0}$-однородные относительно $\mathfrak{a}$ супермногообразия, то λ_2^* биективно отображает это множество на $H^1(\mathbb{CP}^1, (\mathcal{T}_{\mathrm{gr}})_2)^{\mathfrak{a}}$.*

Иначе говоря, $\overline{0}$-однородные относительно $\mathfrak{a}$ супермногообразия задаются коциклами $u^2 + u^4$, где класс $[u^2]$ $\mathfrak{a}$-инвариантен, а класс $[u^4]$ может быть определен с помощью предложения 5.1 из [4]. Далее, $\mathfrak{a}$-инвариантные классы $[u^2]$ описаны в предложении 2. Так как для них $[u^2, u^2] = 0$, то из предложения 5.1 работы [4] следует, что класс $[u^4]$ также должен быть $\mathfrak{a}$-инвариантным. Используя предложение 3, получаем

Предложение 5. *В каждом из четырех случаев подалгебры $\mathfrak{a}$ четно-однородные относительно $\mathfrak{a}$ супермногообразия описаны в предложении 2.*

Проведем теперь исследование на однородность полученных $\overline{0}$-однородных супермногообразий с ретрактом $\mathbb{CP}^{1|4}_{2222}$. Для этого будем использовать

Предложение 6. *Пусть выполнены условия предложения 1 и $(\mathbb{CP}^1, \mathcal{O})$ — $\overline{0}$-однородное супермногообразие. Тогда для каждого из пяти описанных ранее случаев получаем, что супермногообразие $(\mathbb{CP}^1, \mathcal{O})$ однородно тогда и только тогда, когда векторные поля $\dfrac{\partial}{\partial \xi_j}$ поднимаются на $(\mathbb{CP}^1, \mathcal{O})$:*

(1) *для $j = 1, \ldots, 4$;*
(2) *для $j = 1, 3, 4$;*

(3) *для* $j = 1, 3$;
(4) *для* $j = 1, 4$;
(5) *для* $j = 1$.

Теорема 1. *Супермногообразие с ретрактом* $\mathbb{CP}^{1|4}_{2211}$ *однородно тогда и только тогда, когда оно задается линейной комбинацией следующих коциклов*

$$\begin{gathered}
x^{-1}\xi_1\xi_2\frac{\partial}{\partial x} + x^{-2}\xi_1\xi_2\xi_3\frac{\partial}{\partial \xi_3} + x^{-2}\xi_1\xi_2\xi_4\frac{\partial}{\partial \xi_4},\\
x^{-1}\xi_1\xi_3\frac{\partial}{\partial x} + x^{-2}\xi_1\xi_3\xi_2\frac{\partial}{\partial \xi_2} + x^{-2}\xi_1\xi_3\xi_4\frac{\partial}{\partial \xi_4},\\
x^{-1}\xi_1\xi_4\frac{\partial}{\partial x} + x^{-2}\xi_1\xi_4\xi_2\frac{\partial}{\partial \xi_2} + x^{-2}\xi_1\xi_4\xi_3\frac{\partial}{\partial \xi_3},\\
x^{-1}\xi_2\xi_3\frac{\partial}{\partial x} + x^{-2}\xi_2\xi_3\xi_1\frac{\partial}{\partial \xi_1} + x^{-2}\xi_2\xi_3\xi_4\frac{\partial}{\partial \xi_4},\\
x^{-1}\xi_2\xi_4\frac{\partial}{\partial x} + x^{-2}\xi_2\xi_4\xi_1\frac{\partial}{\partial \xi_1} + x^{-2}\xi_2\xi_4\xi_3\frac{\partial}{\partial \xi_3},\\
x^{-1}\xi_3\xi_4\frac{\partial}{\partial x} + x^{-2}\xi_3\xi_4\xi_1\frac{\partial}{\partial \xi_1} + x^{-2}\xi_3\xi_4\xi_2\frac{\partial}{\partial \xi_2}.
\end{gathered}$$

Доказательство. Рассмотрим коциклы предложения 2 и применим к ним предложение 6. Воспользуемся критерием подъема из [4] (предложение 5.1). Тогда получаем следующие условия для соответствующих каждому случаю $\frac{\partial}{\partial \xi_j}$:

$$[\frac{\partial}{\partial \xi_j}, u^2] \sim 0, \tag{4}$$

$$[u^2, [\frac{\partial}{\partial \xi_j}, u^2]] \sim 0. \tag{5}$$

1) Пусть $u^2 = x^{-1}\xi_1\xi_2\frac{\partial}{\partial x} + x^{-2}\xi_1\xi_2\xi_3\frac{\partial}{\partial \xi_3} + x^{-2}\xi_1\xi_2\xi_4\frac{\partial}{\partial \xi_4}$. Тогда имеем

v	$[v, u^2]$
$\frac{\partial}{\partial \xi_1}$	$x^{-1}\xi_2\frac{\partial}{\partial x} + x^{-2}\xi_2\xi_3\frac{\partial}{\partial \xi_3} + x^{-2}\xi_2\xi_4\frac{\partial}{\partial \xi_4}$
$\frac{\partial}{\partial \xi_2}$	$-x^{-1}\xi_1\frac{\partial}{\partial x} - x^{-2}\xi_1\xi_3\frac{\partial}{\partial \xi_3} - x^{-2}\xi_1\xi_4\frac{\partial}{\partial \xi_4}$
$\frac{\partial}{\partial \xi_3}$	$x^{-2}\xi_1\xi_2\frac{\partial}{\partial \xi_3}$
$\frac{\partial}{\partial \xi_4}$	$x^{-2}\xi_1\xi_2\frac{\partial}{\partial \xi_4}$

Из леммы 3 следует выполненность условия (4). Условие (5) выполняется, так как $[u^2,[\frac{\partial}{\partial\xi_j},u^2]]=0$ для $j=1,\dots,4$.

Для других базисных коциклов из аналогичных рассуждений следует выполнимость условий (4) и (5). Таким образом, все $\bar{0}$-однородные супермногообразия предложения 2(1) однородны.

2) Все $\bar{0}$-однородные супермногообразия предложения 2(2) также однородны, так как этот случай уже рассмотрен в предыдущем пункте.

3) Из предыдущих рассуждений следует, что для первых двух и последнего базисных коциклов этого случая условия (4) и (5) выполняются. Зная базис $H^1(\mathbb{CP}^1,(\mathcal{T}_{\mathrm{gr}})_1)$ из леммы 3, видим, что условие (4) не выполняется для третьего и пятого базисных коциклов при $j=3$ и для четвертого и шестого при $j=1$.

4) Зная базис $H^1(\mathbb{CP}^1,(\mathcal{T}_{\mathrm{gr}})_1)$ из леммы 3, видим, что условие (4) для коциклов этого случая не выполняется.

5) Из предыдущих рассуждений следует, что для первого коцикла этого случая условия (4) и (5) выполняются. Рассмотрим условие (4) для второго коцикла:

$$
\begin{aligned}
&[\frac{\partial}{\partial\xi_1},3(x^{-1}\xi_1\xi_4\frac{\partial}{\partial x}-x^{-1}\xi_2\xi_3\frac{\partial}{\partial x})+2(x^{-1}\xi_2\xi_4\xi_3\frac{\partial}{\partial\xi_3}-x^{-1}\xi_2\xi_4\xi_1\frac{\partial}{\partial\xi_1}-\\
&-x^{-1}\xi_1\xi_3\xi_4\frac{\partial}{\partial\xi_2}+x^{-2}\xi_1\xi_4\xi_3\frac{\partial}{\partial\xi_3})+4x^{-2}\xi_1\xi_4\xi_2\frac{\partial}{\partial\xi_2}+6(x^{-3}\xi_1\xi_3\xi_4\frac{\partial}{\partial\xi_4}-\\
&-x^{-2}\xi_2\xi_3\xi_1\frac{\partial}{\partial\xi_1}-x^{-3}\xi_1\xi_3\xi_2\frac{\partial}{\partial\xi_2})+8x^{-3}\xi_1\xi_2\xi_4\frac{\partial}{\partial\xi_3}]=\\
&=3x^{-1}\xi_4\frac{\partial}{\partial x}+2(-x^{-1}\xi_2\xi_4\frac{\partial}{\partial\xi_1}-x^{-1}\xi_3\xi_4\frac{\partial}{\partial\xi_2}+x^{-2}\xi_4\xi_3\frac{\partial}{\partial\xi_3})+\\
&+4x^{-2}\xi_4\xi_2\frac{\partial}{\partial\xi_2}+6(x^{-3}\xi_3\xi_4\frac{\partial}{\partial\xi_4}-x^{-2}\xi_2\xi_3\frac{\partial}{\partial\xi_1}-x^{-3}\xi_3\xi_2\frac{\partial}{\partial\xi_2})+\\
&+8x^{-3}\xi_2\xi_4\frac{\partial}{\partial\xi_3}\sim(-x^{-1}\xi_2\xi_4\frac{\partial}{\partial\xi_1}-x^{-1}\xi_3\xi_4\frac{\partial}{\partial\xi_2})\not\sim 0.
\end{aligned}
$$

Следовательно условие (4) не выполняется.

Обобщая полученные результаты в каждом из пяти пунктов, получаем утверждение теоремы. ■

Так как все однородные супермногообразия являются $\mathfrak{a}$-инвариантными относительно первого случая подалгебры $\mathfrak{a}$, то будем считать далее, что $\mathfrak{a}$ соответствует этому случаю.

Теорема 2. *Любое нерасщепимое однородное супермногообразие с ретрактом* $\mathbb{CP}^{1|4}_{2222}$ *с точностью до изоморфизма может быть представлено одним из следующих коциклов:*

$$\begin{aligned} &1) \quad x^{-1}\xi_1\xi_2\frac{\partial}{\partial x} + x^{-2}\xi_1\xi_2\xi_3\frac{\partial}{\partial \xi_3} + x^{-2}\xi_1\xi_2\xi_4\frac{\partial}{\partial \xi_4};\\ &2) \quad x^{-1}\xi_1\xi_2\frac{\partial}{\partial x} + x^{-2}\xi_1\xi_2\xi_3\frac{\partial}{\partial \xi_3} + x^{-2}\xi_1\xi_2\xi_4\frac{\partial}{\partial \xi_4} +\\ &\qquad + x^{-1}\xi_3\xi_4\frac{\partial}{\partial x} + x^{-2}\xi_3\xi_4\xi_1\frac{\partial}{\partial \xi_1} + x^{-2}\xi_3\xi_4\xi_2\frac{\partial}{\partial \xi_2}. \end{aligned}$$

Доказательство. Рассмотрим класс $\zeta \in H^1(\mathbb{CP}^1, (\mathcal{T}_{\mathrm{gr}})_2)^{\mathfrak{a}}$. Используя разложение $H^1(\mathbb{CP}^1, (\mathcal{T}_{\mathrm{gr}})_2)^{\mathfrak{a}} = \bigoplus\limits_{i<j} H^1(\mathbb{CP}^1, (\mathcal{T}_{\mathrm{gr}})_2^{(ij)})^{\mathfrak{a}}$ (см. [2]), представим $\zeta = \sum\limits_{i<j}\zeta_{ij}$, где $\zeta_{ij} \in H^1(\mathbb{CP}^1, (\mathcal{T}_{\mathrm{gr}})_2^{(ij)})^{\mathfrak{a}}$.

Рассмотрим точную последовательность $\mathfrak{a}$-инвариантов (см. [2]):

$$0 \to H^1(\mathbb{CP}^1, \mathcal{E}_r^*\otimes\bigwedge^3\mathcal{E})^{\mathfrak{a}} \to H^1(\mathbb{CP}^1, (\mathcal{T}_{\mathrm{gr}})_2^{(ij)})^{\mathfrak{a}} \xrightarrow{\beta^*} H^1(\mathbb{CP}^1, \Theta\otimes\mathcal{E}_i\otimes\mathcal{E}_j)^{\mathfrak{a}} \to 0,$$

в последнем члене которой индуцируется представление φ_0 алгебры Ли $\mathfrak{a}$. В этом случае $H^1(\mathbb{CP}^1, (\mathcal{T}_{\mathrm{gr}})_2^{(ij)})^{\mathfrak{a}} = H^1(\mathbb{CP}^1, (\mathcal{T}_{\mathrm{gr}})_2^{(ij)}) \simeq \mathbb{C}$ и β^* изоморфно отображает эту группу на $H^1(\mathbb{CP}^1, \Theta\otimes\mathcal{E}_i\otimes\mathcal{E}_j)$. Согласно предложению 7(2) из [2], базисный элемент последнего векторного пространства представляется коциклом $\xi_i\xi_j\otimes(x^{-1}\frac{\partial}{\partial x})$. Поэтому класс $\beta^*(\zeta)$ представляется коциклом $(\sum_{i<j}c_{ij}\xi_i\xi_j)\otimes(x^{-1}\frac{\partial}{\partial x})$, где $c_{ij}\in\mathbb{C}$.

Так как группа $\operatorname{Aut}\mathbf{E}$ содержит подгруппу $\mathrm{GL}_4(\mathbb{C})$, линейно действующую на ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4, то применяя к ζ подходящий автоморфизм расслоения $\mathbf{E}$, можно привести кососимметрическую билинейную форму $\sum_{i<j}c_{ij}\xi_i\xi_j$ к каноническому виду, т.е. к виду $\xi_1\xi_2$ (если ранг исходной формы равен 2) или к виду $\xi_1\xi_2+\xi_3\xi_4$ (если ранг исходной формы равен 4). Соответственно получаем коцикл $\xi_1\xi_2\otimes(x^{-1}\frac{\partial}{\partial x})$ или $(\xi_1\xi_2+\xi_3\xi_4)\otimes(x^{-1}\frac{\partial}{\partial x})$. Так как β^* инъективно, то ζ представляется коциклом $x^{-1}\xi_1\xi_2\frac{\partial}{\partial x}+x^{-2}\xi_1\xi_2\xi_3\frac{\partial}{\partial \xi_3}+$

$x^{-2}\xi_1\xi_2\xi_4\dfrac{\partial}{\partial\xi_4}$ или $x^{-1}\xi_1\xi_2\dfrac{\partial}{\partial x}+x^{-2}\xi_1\xi_2\xi_3\dfrac{\partial}{\partial\xi_3}+x^{-2}\xi_1\xi_2\xi_4\dfrac{\partial}{\partial\xi_4}+x^{-1}\xi_3\xi_4\dfrac{\partial}{\partial x}+ x^{-2}\xi_3\xi_4\xi_1\dfrac{\partial}{\partial\xi_1}+x^{-2}\xi_3\xi_4\xi_2\dfrac{\partial}{\partial\xi_2}$.

■

Библиографический список

1. *Онищик А.Л.* Проблемы классификации комплексных супермногообразий // Математика в Ярославском университете: Сб. обзорных статей. К 25-летию математического факультета / Яросл. гос. ун-т. Ярославль, 2001. С. 7–34.
2. *Бунегина В.А., Онищик А.Л.* Однородные супермногообразия, связанные с комплексной проективной прямой // М., ВИНИТИ, 2001. С. 141–180.
3. *Вишнякова Е.Г.* Четно-однородные комплексные супермногообразия размерности 1|3 на сфере Римана // Современные проблемы математики и информатики: Сборник научных трудов молодых ученых, аспирантов и студентов. Вып. 7. Яросл. гос. ун-т. Ярославль, 2005.
4. *Onishchik A.L.* A Construction of Non-Split Supermanifolds // Annals of Global Analysis and Geometry. 1998. V. 16. P. 309–333.

Об одной задаче классификации матриц

Ю.И. Большаков, Б. Райхштейн

В настоящей работе речь пойдет об одной нерешенной задаче классификации матриц. Отметим лишь несколько работ в которых рассмотрены задачи классификации систем форм и линейных отображений. Так, например, Н.М. Добровольская и В.А. Пономарев в [1] дали классификацию пары встречных операторов, в работе [2] Ю.Б. Ермолаева приведена классификация пар билинейных форм с различной степенью их симметрии, в [3] И.М. Гельфанд и В.А. Пономарев рассмотрели проблему классификации четверок подпространств конечномерного линейного пространства. Достаточно подробно задачи этого класса рассмотрены в работах [4] и

[5] В.В. Сергейчука в рамках общей теории колчанов. Представлениями частично упорядоченных множеств занимались Ю.А. Дрозд ([6]), Л.А. Назарова и А.В. Ройтер в ([7]). Некоторые из задач подобного типа решены Ю.И. Большаковым и Б. Райхштейном в [8].

Пусть G_0 – группа унипотентных верхних треугольных теплицевых матриц, т.е. матриц вида:

$$\begin{pmatrix} 1 & -x_1 & -x_2 & -x_3 & \dots & -x_{n-1} \\ 0 & 1 & -x_1 & -x_2 & \dots & -x_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

с элементами $x_i \in \mathbf{C}$.

Мы будем обозначать эти матрицы символом

$$Tp(1, -x_1, -x_2, -x_3, \dots, -x_{n-1}).$$

Множество X, на котором действует группа, представляет из себя некоторое подмножество $n \times n$ матриц, именно, $X = \{H \in \mathbf{C}^{n\times n}/H^* = H,\ detH \neq 0\}$. Группа G_0 действует на множестве X по следующему правилу: $(H)T = T^t H \bar{T}$, где $T \in G_0$, $H \in X$. Для всякой матрицы $H \in X$ мы определим пару чисел (k, l) следующим образом: для номера $k : h_{ij} = 0$ для всех $i + j \leqslant k$, но существует индекс i для которого $h_{i,k-i+1} \neq 0$; номер $l = min\{i/h_{i,k-i+1} \neq 0\}$. Заметим, что $k = k(H)$, $l = l(H)$,но, как показывает непосредственный подсчет, числа k, l, и $h_{k,l}$ являются инвариантами при действии группы G_0 на множестве X, что следует из матричного соотношения $F = T^t H \bar{T}$ или в скалярной форме:

$$f_{pq} = h_{pq} - \sum_{\beta=1}^{\beta=p-1} h_{p-\beta,q} x_\beta - \sum_{\gamma=1}^{\gamma=q-1} h_{p,q-\gamma} \bar{x}_\gamma + \sum_{\beta=1}^{\beta=p-1} \sum_{\gamma=1}^{\gamma=q-1} h_{p-\beta,q-\gamma} x_\beta \bar{x}_\gamma . \tag{1}$$

Рассмотрим следующую систему уравнений:

$$f_{l,q} = 0, \ \ q = k+2-l,\ k+3-l,\ \dots,\ n. \tag{2}$$

Из этой системы можно достаточно легко найти следующие параметры:

$$x_1 = x_1^0,\, x_2 = x_2^0,\, \ldots,\, x_{n-k+l-1} = x_{n-k+l-1}^0,$$

поскольку $h_{l,k+1-l} \neq 0$.

Мы будем решать нашу задачу при следующем ограничении:

$$k < \frac{n+3l-1}{2}. \tag{3}$$

Рассмотрим, далее, систему уравнений

$$f_{k+1-l,q} = 0, q = n+2l-k,\, n+2l-k+1, \ldots,\, n. \tag{4}$$

Как и в случае (3) мы найдем однозначно неизвестные $x_{n+l-k} = x_{n+l-k}^0$, $x_{n+l-k+1} = x_{n+l-k+1}^0, \ldots, x_{n-l} = x_{n-l}^0$.

Замечание 1. Как мы только что установили, при условиях (3) первые $n-l$ неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_{n-l}$ определены однозначно. В частности,при $l=1$ мы уже получили каноническую форму F для $H : f_{1,j} = f_{j,1} = 0$, если $j \neq k$, $f_{1k} = h_{1k}$; $f_{k1} = h_{k1}$ $(|h_{1k}| = 1)$, $f_{ij} = 0$; если $i+j \leqslant k$, $f_{kj} = f_{jk} = 0$, если $n+2-k \leqslant j \leqslant n$. В силу замечания 1, мы будем считать, что $l \geqslant 2$.

Замечание 2. Если в равенстве (1) сумма $p+q \leqslant n+k+2-l$, то f_{pq} не зависит от x_j для всех $j \geqslant n-l+1$ т.е. определенная часть канонической формы F нами уже найдена. В частности, найдена $(n-l+1)\times(n-l+1)$- подматрица канонической формы F.

Лемма 1. *Всякая теплицева матрица $T = Tp(1, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ может быть однозначно представлена в виде: $T = PQ = QP$, где*

$$P = Tp\,(1\,0\,\ldots\,0\,z_m\,z_{m+1}\,\ldots\,z_{n-1}),\; Q = Tp\,(1\,z_1\,\ldots\,z_{m-1}\,0\ldots 0).$$

Доказательство этой леммы следует сразу из определения теплицевой матрицы. Формула (1) может быть переписана следующим образом:

$$f_{pq} = g_{pq} - \sum_{\beta=n-l+1}^{\beta=p-1} g_{p-\beta,q} z_\beta - \sum_{\gamma=n-l+1}^{\gamma=q-1} g_{p,q-\gamma} \bar{z}_\gamma + \sum_{\beta=n-l+1}^{\beta=p-1} \sum_{\gamma=n-l+1}^{\gamma=q-1} g_{p-\beta,q-\gamma} z_\beta \bar{z}_\gamma. \tag{5}$$

Поскольку $g_{p-\beta,q-\gamma} = 0$, то

$$f_{pq} = g_{pq} - \sum_{\beta=n-l+1}^{\beta=p-1} g_{p-\beta,q} z_\beta - \sum_{\gamma=n-l+1}^{\gamma=q-1} g_{p,q-\gamma} \bar{z}_\gamma. \tag{6}$$

Формула (6) не содержит переменных z_j степени два при всех $j \geqslant n-l+1$, однако, $g_{pq} = g_{pq}(z_1, z_2, \ldots, z_{n-l}) = g_{pq}(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{n-l}^0)$.

Случай $l = 2$. (2.1) Если $g_{k+1,1} \neq 0$, то $\exists!\ z_{n-1} = z_{n-1}^0$, для которого $f_{k+1,n} = 0$. Если же $g_{k+1,1} = 0$, $g_{k+2,1} \neq 0$ то $\exists!\ z_{n-1} = z_{n-1}^0$, для которого $f_{k+2,n} = 0\ldots$ Если $g_{k+1,1} = g_{k+2,1} = \ldots = g_{n-2,1} = 0$, $g_{n-1,1} \neq 0$, то $\exists!\ z_{n-1} = z_{n-1}^0$, для которого $f_{n-1,n} = 0$.

(2.2) Пусть,наконец, $g_{k+1,1} = g_{k+2,1} = \ldots = g_{n-1,1} = 0$, $g_{n,1} \neq 0$, тогда, (см. Добавление) $z_{n-1} = at + b$, для которого $f_{n,n} = 0$, где $a \neq 0; t$ произвольный вещественный параметр.

И мы приходим к канонической форме F с элементами f_{pq}, которые удовлетворяют соотношениям (2), (4) и, кроме того, $f_{m,n} = 0$. Натуральное число m определено однозначно следующими условиями: $g_{k+1,1} = g_{k+2,1} = \ldots = g_{m-1,1} = 0$, $g_{m,1} \neq 0$, и $k+1 \leqslant m \leqslant n$. При этом,если $m \neq n$, то $St(F) = I$, если же $m = n$, то $St(F) = Tp(1, 0, \ldots, 0, at)$, $a \neq 0, t \in \mathbf{R}$. Пусть натуральное m удовлетворяет следующим условиям: $h_{k+1,1} = h_{k+2,1} = \ldots = h_{m-1,1}$, $h_{m,1} \neq 0$ и $k+1 \leqslant m \leqslant n$.

Случай $l = 3$. Прежде всего заметим, что каноническая форма F содержит элементы $f_{i,j}$ которые удовлетворяют (2) и (4).Число m единственным образом определяется из условий: $g_{k+1,1} = g_{k+2,1} = \ldots, = g_{m-1,1} = 0$, но $g_{m,1} \neq 0$.

(3.1) Пусть число m удовлетворяет двойному неравенству $k + 1 \leqslant m \leqslant n-2$ тогда мы потребуем, чтобы $f_{m,n-1} = 0$, $f_{m,n} = 0$

откуда однозначно найдем пару чисел $z_{n-2} = z^0_{n-2}$ и $z_{n-1} = z^0_{n-1}$ соответсвенно. И каноническая форма F имеет два дополнительных нуля $f_{m,n-1} = 0$, $f_{m,n} = 0$. Здесь $St(F) = I$.

(3.2) Пусть $m = n - 1$, тогда мы определим число r следующим образом: $g_{k,2} = g_{k+1,2} = \ldots = g_{r-1,2} = 0$, но $g_{r,2} \neq 0$. Если число r удовлетворяет двойному неравенству $k \leqslant r \leqslant n-2$, то мы положим $f_{r,n} = 0, f_{n-1,n} = 0$ и найдем переменные $z_{n-2} = z^0_{n-2}$ и $z_{n-1} = z^0_{n-1}$ соответсвенно. И каноническая форма F имеет два дополнительных нуля $f_{r,n} = 0$, и $f_{n-1,n} = 0$. Здесь $St(F) = I$.

(3.3) Пусть $m = r = n-1$, т.е. $g_{i,1} = g_{j,2} = 0$ для $k+1 \leqslant i \leqslant n-2$; $k \leqslant j \leqslant n-2$; но $g_{n-1,1} \neq 0$, $g_{n-1,2} \neq 0$. Положим $f_{n-1,n-1} = 0$ и получим, что $z_{n-2} = at + b$, $t \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$, равенство же $f_{n-1,n} = 0$ дает значение $z_{n-1} = ct + d$; $c, d \in \mathbf{C}$, $c \neq 0$. Может случиться, что $f_{n,n}(z_{n-2}, z_{n-1}) = const$, тогда в подобной ситуации каноническая форма имеет два дополнительных нуля $f_{n-1,n-1} = 0$ и $f_{n-1,n} = 0$. Здесь $St(F) = Tp(1, 0, \ldots, at, ct)$, где $a \neq 0$, $t \in \mathbf{R}$. Если же $f_{n,n}(z_{n-2}, z_{n-1}) = ut + v \in \mathbf{R}$, $u \neq 0$, то $\exists!\, t_0$, удовлетворяющий соотношению $f_{n,n} = ut_0 + v = 0$. Тогда каноническая форма F имеет три дополнительных нуля $f_{n-1,n-1} = 0$, $f_{n-1,n} = 0$ и $f_{n,n} = 0$. Здесь $St(F) = I$.

(3.4) Если $m = n - 1$, $r = n$, то возникает ситуация, полностью аналогичная пункту (3.3).

(3.5) Пусть теперь параметр $m = n$, т.е. $g_{i1} = 0$, если $k + 1 \leqslant i \leqslant n-1$, но $g_{n,1} \neq 0$. Если r удовлетворяет двойному неравенству $k \leqslant r \leqslant n-2$, то мы положим последовательно $f_{r,n} = 0$ и $f_{n,n} = 0$ и найдем соответственно $z_{n-2} = z^0_{n-2}$ и $z_{n-1} = at + b$, $t \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$. И каноническая форма F имеет два дополнительных нуля $f_{r,n} = 0$ и $f_{n,n} = 0$. Здесь $St(F) = Tp(1, 0, \ldots, 0, at), a \neq 0, t \in \mathbf{R}$.

(3.6) Пусть $m = n$, $r = n - 1$.

a) Если при этом, $|g_{1,n}| \neq |g_{n-1,2}|$,тогда $\exists! z_{n-2} = z^0_{n-2}$ и такой, что имеет место $f_{n-1,n} = 0$. Равенство $f_{n,n} = 0$ дает $z_{n-1} = at + b$, $t \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$. Тогда каноническая форма F содержит два дополнительных нуля $f_{n-1,n} = 0$ и $f_{n,n} = 0$. При этом, $St(F) = Tp(1, 0, \ldots, at)$, $t \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$.

b) Если же $|g_{1,n}| = |g_{n-1,2}|$, то $\exists!$ элемент $f_{n-1,n} = f^0_{n-1,n}$ и такой, что $|f^0_{n-1,n}| = dist(0, Imf_{n-1,n})$, и $z_{n-2} = at + b$, $t \in \mathbf{R}$,

$a \neq 0$. Равенство $f_{n,n} = 0$ приводит к следующему выражению $z_{n-1} = p\tau + qt + s$, $\tau, t \in \mathbf{R}$, $p \neq 0$. Каноническая форма F имеет дополнительно как один экстремальный элемент $f_{n-1,n} = f^0_{n-1,n}$, обладающий свойством $|f^0_{n-1,n}| = dist(0, Imf_{n-1,n})$, так и нулевой элемент $f_{n,n} = 0$. Здесь $St(F) = Tp(1, 0, \ldots, 0, p\tau + qt, at)$. Заметим, что случай $m = r = n$ исключен, поскольку $det\ G \neq 0$. Пусть числа m и r удовлетворяют следующим условиям: $h_{k+1,1} = h_{k+2,1} = \ldots = h_{m-1,1} = 0$, $h_{m1} \neq 0$; $h_{k2} = h_{k+1,2} = \ldots = h_{r-1,2} = 0$, $h_{r2} \neq 0$.

Случай $l = 4$**.** Каноническая форма F содержит такие $f_{i,j}$, которые удовлетворяют равенствам(2) и (4). Определим три натуральных s, r и m следующими соотношениями:

$$g_{k-1,3} = g_{k,3} = \ldots = g_{s-1,3} = 0, \text{ и } g_{s,3} \neq 0;\ k-1 \leqslant s \leqslant n;$$

$$g_{k,2} = g_{k+1,2} = \ldots = g_{r-1,2} = 0, \text{ и } g_{r,2} \neq 0;\ k \leqslant r \leqslant n;$$

$$g_{k+1,1} = g_{k+2,1} = \ldots = g_{m-1,1} = 0, \text{ и } g_{m,1} \neq 0;\ k+1 \leqslant m \leqslant n;$$

(4.1). Пусть m есть произвольное натуральное, удовлетворяющее двойному неравенству $k+1 \leqslant m \leqslant n-3$, тогда мы потребуем, чтобы $f_{m,n-2} = 0$, $f_{m,n-1} = 0$, и $f_{m,n} = 0$ что сразу приведет к решению $z_{n-3} = z^0_{n-3}$, $z_{n-2} = z^0_{n-2}$ и $z_{n-1} = z^0_{n-1}$. Поэтому каноническая форма F содержит дополнительно три нуля $f_{m,n-2} = 0$, $f_{m,n-1} = 0$ и $f_{m,n} = 0$. В этом случае $St(F) = I$.

(4.2). Пусть элемент $m = n-2$, т.е. $g_{j,1} = 0$ для всех $k+1 \leqslant j \leqslant n-3$, $g_{n-2,1} \neq 0$. Если для параметра r выполняется двойное неравенство $k \leqslant r \leqslant n-3$, то, полагая последовательно $f_{r,n-1} = 0$, $f_{r,n} = 0$ и $f_{n-2,n} = 0$, мы найдем $z_{n-3} = z^0_{n-3}$, $z_{n-2} = z^0_{n-2}$, и $z_{n-1} = z^0_{n-1}$ соответственно. И каноническая форма F, имеет дополнительно еще три нуля $f_{r,n-1} = 0$, $f_{r,n} = 0$ и $f_{n-2,n} = 0$. Здесь $St(F) = I$.

(4.3). Пусть $m = n-2$, $n-2 \leqslant r \leqslant n$, $k-1 \leqslant s \leqslant n-3$, тогда, полагая последовательно $f_{s,n} = 0$, $f_{n-2,n-1} = 0$, и $f_{n-2,n} = 0$, мы однозначно найдем тройку чисел $z_{n-3} = z^0_{n-3}$, $z_{n-2} = z^0_{n-2}$, и $z_{n-1} = z^0_{n-1}$. И каноническая форма F получит три дополнительных нуля $f_{s,n} = 0$, $f_{n-2,n-1} = 0$, $f_{n-2,n} = 0$. Здесь $St(F) = I$.

(4.4). Пусть $m = n-2$ и r – элементы, удовлетворяющие неравенствам $n-2 \leqslant r \leqslant n$, $n-2 \leqslant s \leqslant n$, тогда мы положим

$f_{n-2,n-2} = 0$, $f_{n-2,n-1} = 0$, и $f_{n-2,n} = 0$ и найдем тройку чисел $z_{n-3} = at + b$, $z_{n-2} = pt + q$ и $z_{n-1} = ut + v$, где $a \neq 0$, $t \in \mathbf{R}$. Если, далее, все три параметра $f_{n-1,n-1}$, $f_{n-1,n}$ и $f_{n,n}$ не зависят от $t \in \mathbf{R}$, то каноническая форма F имеет три дополнительных нуля $f_{n-2,n-2} = 0$, $f_{n-2,n-1} = 0$, и $f_{n-2,n} = 0$. Здесь $St(F) = Tp(1, 0, \dots, at, pt, ut)$. Если же, например, $f_{n-1,n}$ зависит от t , то $\exists!\, t_0 \in \mathbf{R}$ такое, что $|f_{n-1,n}(t_0)| = dist(0, Imf_{n-1,n})$, и наличие экстремального элемента $f_{n-1,n}(t_0)$ служит четвертым дополнительным условием для вида канонической формы F. Здесь $St(F) = I$.

(4.5). Пусть $m = n - 1$, а параметр r удовлетворяет двойному неравенству $k \leqslant r \leqslant n-3$, тогда, полагая последовательно $f_{r,n-1} = 0$, $f_{r,n} = 0$ и $f_{n-1,n} = 0$, мы однозначно найдем неизвестные $z_{n-3} = z^0_{n-3}$, $z_{n-2} = z^0_{n-2}$ и $z_{n-1} = z^0_{n-1}$. И каноническая форма F имеет три дополнительных нуля $f_{r,n-1} = 0$, $f_{r,n} = 0$ и $f_{n-1,n} = 0$. Здесь $St(F) = I$.

(4.6). Пусть $m = n - 1$, $r = n - 2$, а элемент s удовлетворяет двойному неравенству $k - 1 \leqslant s \leqslant n - 3$, тогда, полагая последовательно $f_{s,n} = 0$, $f_{n-2,n} = 0$ и $f_{n-1,n} = 0$ мы однозначно найдем неизвестные $z_{n-3} = z^0_{n-3}$, $z_{n-2} = z^0_{n-2}$ и $z_{n-1} = z^0_{n-1}$. И каноническая форма F имеет три дополнительных нуля $f_{s,n} = 0$, $f_{n-2,n} = 0$ и $f_{n-1,n} = 0$. Здесь $St(F) = I$.

(4.7).Пусть $m = n - 1$, $r = n - 2$ и $s \geqslant n - 2$. Если $|g_{1,n-1}| \neq |g_{n-2,2}|$, тогда, полагая последовательно $f_{n-2,n-1} = 0$, $f_{n-2,n} = 0$ и $f_{n-1,n} = 0$ мы найдем однозначно неизвестные $z_{n-3} = z^0_{n-3}$, $z_{n-2} = z^0_{n-2}$, и $z_{n-1} = z^0_{n-1}$. И каноническая форма F имеет три дополнительных нуля $f_{n-2,n-1} = 0$, $f_{n-2,n} = 0$ и $f_{n-1,n} = 0$. Здесь $St(F) = I$. Если $|g_{n,n-1}| = |g_{n-2,2}|$, то, согласно одной из теорем Дополнения $\exists!\, f^0_{n-2,n-1}$ обладающий свойством $|f^0_{n-2,n-1}| = dist(0, Imf_{n-2,n-1})$ и, за счет этого, $z_{n-3} = at + b$, $a \neq 0$. Тогда, полагая последовательно $f_{n-2,n} = 0$ и $f_{n-1,n} = 0$ мы найдем неизвестные: $z_{n-2} = pt + q$ и $z_{n-1} = ut + v$. Если оба элемента $f_{n-1,n-1}$ и $f_{n,n}$ не зависят от параметра $t \in \mathbf{R}$, тогда каноническая форма F имеет два нуля $f_{n-2,n} = 0$ и $f_{n-1,n} = 0$ и еще один экстремальный элемент $f_{n-2,n-1} = f^0_{n-2,n-1}$, для которого $|f^0_{n-2,n-1}| =$

$dist(0, Imf_{n-2,n-1})$. Здесь $St(F) = Tp(1, 0, \ldots, at, pt, ut)$, $a \neq 0$. Если, например, $f_{n-1,n-1}$ зависит от t, то $\exists t_0 \in \mathbf{R}, f_{n-1,n-1} = 0$. Это четвертое дополнительное условие для канонической формы F. Здесь $St(F) = I$.

(4.8). Пусть $m = n-1$, $r \geqslant n-1$. Полагая последовательно $f_{n-2,n-1} = 0$, $f_{n-1,n-1} = 0$ и $f_{n-1,n} = 0$ мы найдем неизвестные $z_{n-3} = z^0_{n-3}$, $z_{n-2} = at + b$ и $z_{n-1} = ct + d$ где $a \neq 0$, $t \in \mathbf{R}$. Если элемент $f_{n,n}$ не зависит от параметра $t \in \mathbf{R}$, то каноническая форма F имеет дополнительно $f_{n-2,n-1} = 0$, $f_{n-1,n-1} = 0$ и $f_{n-1,n} = 0$. Здесь $St(F) = Tp(1, 0, \ldots, at, ct)$, $a \neq 0$. Если же $f_{n,n}$ зависит от t, тогда $\exists! t_0 \in \mathbf{R}$ такое что $f_{n,n} = 0$. Каноническая форма F имеет четвертое дополнительное условие $f_{n,n} = 0$. Здесь $St(F) = I$.

(4.9). Пусть $m = n$, $k \leqslant r \leqslant n-2$. Полагая последовательно $f_{r,n-1} = 0$, $f_{r,n} = 0$ и $fn, n = 0$ мы найдем неизвестные $z_{n-3} = z^0_{n-3}$, $z_{n-2} = z^0_{n-2}$ и $z_{n-1} = kt + b$, $k \neq 0$, $t \in \mathbf{R}$. Каноническая форма F имеет дополнительно три нуля $f_{r,n-1} = 0$, $f_{r,n} = 0$ и $f_{n,n} = 0$. Здесь $St(F) = Tp(1, 0, \ldots, kt)$.

(4.10). Пусть $m = n$, $r = n-1$, $k-1 \leqslant s \leqslant n-3$ и пусть $|g_{1,n}| \neq |g_{n-1,2}|$. Полагая последовательно $f_{s,n} = 0$, $f_{n-1,n} = 0$ и $f_{n,n} = 0$ мы найдем неизвестные $z_{n-3} = z^0_{n-3}$, $z_{n-2} = z^0_{n-2}$ и $z_{n-1} = at + b$, $t \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$. И каноническая форма F имеет три дополнительных нуля $f_{s,n} = 0$, $f_{n-1,n} = 0$ и $f_{n,n} = 0$. Здесь $St(F) = Tp(1, 0, \ldots, at)$. Если же $m = n$, $r = n-1$, $k-1 \leqslant s \leqslant n-3$ и $|g_{1,n}| = |g_{n-1,2}|$ то полагая $f_{s,n} = 0$ мы найдем $z_{n-3} = z^0_{n-3}$ и по одной из теорем Дополнения $\exists!$ элемент $f^0_{n-1,n}$ обладающий свойством $|f^0_{n-1,n}| = dist(0, Imf_{n-1,n})$, что приводит к значению $z_{n-2} = at + b, a \neq 0$, $t \in \mathbf{R}$. Требование $f_{n,n} = 0$ по второй части из теоремы 5 Дополнения дает значение $z_{n-1} = \tau p + tq + r$, $p \neq 0, p \perp q$ и $t \in \mathbf{R}$. И каноническая форма F имеет дополнительно два нуля $f_{s,n} = 0$, $f_{n,n} = 0$ и, кроме того, содержит элемент $f_{n-1,n} = f^0_{n-1,n}$, удовлетворяющий соотношению $|f^0_{n-1,n}| = dist(0, Imf_{n-1,n})$. Здесь $St(F) = Tp(1, 0, \ldots, at, p\tau + qt)$.

(4.11). Пусть, наконец, $m = n$, $r = n-1, s = n-2$.

а) Если $|g_{1,n}| \neq |g_{n-2,3}|$ и $|g_{1,n}| \neq |g_{n-1,2}|$, тогда, полагая последовательно $f_{n-2,n} = 0$, $f_{n-1,n} = 0$, $f_{n,n} = 0$ мы найдем переменные $z_{n-3} = z^0_{n-3}$, $z_{n-2} = z^0_{n-2}$ и $z_{n-1} = at + b$, $a \neq 0$, $t \in \mathbf{R}$. И каноническая

ская форма имеет дополнительно три нулевых элемента $f_{n-2,n} = 0$, $f_{n-1,n} = 0$ и $f_{n,n} = 0$. Здесь $St(F) = Tp(1, 0, \dots, 0, at)$.

b) Если $|g_{1,n}| \neq |g_{n-2,3}|$, $|g_{1,n}| = |g_{n-1,2}|$, тогда, полагая $f_{n-2,n} = 0$ мы найдем $z_{n-3} = z^0_{n-3}$, тогда $\exists! f_{n-1,n} = f^0_{n-1,n}$ с $|f^0_{n-1,n}| = dist(0, Imf_{n-1,n})$ и $z_{n-2} = at + b$. Требование $f_{n,n} = 0$ по второй части теоремы 5 дает значение $z_{n-1} = \tau p + tq + r$, $p \neq 0$, $p \perp q$, $t \in \mathbf{R}$. И каноническая формаF имеет дополнительно два нуля $f_{n-2,n} = 0$, $f_{n,n} = 0$ и, кроме того, элемент $f_{n-1,n} = f^0_{n-1,n}$ обладающий свойством $|f^0_{n-1,n}| = dist(0, Imf_{n-1,n})$. Здесь $St(F) = Tp(1, 0, \dots, at, p\tau + qt)$.

c) Если $|g_{1,n}| = |g_{n-2,3}|$, $|g_{1,n}| \neq |g_{n-1,2}|$, тогда $\exists! f_{n-2,n} = f^0_{n-2,n}$ обладающее свойством $|f^0_{n-2,n}| = dist(0, Imf_{n-2,n})$ и $z_{n-3} = at + b$, $a \neq 0$, $t \in \mathbf{R}$.

c.1) Если $f_{n-1,n-1} = const$, тогда полагая последовательно $f_{n-1,n} = 0$ и $f_{n,n} = 0$ по следствию из теоремы 1 Дополнения мы получим $z_{n-2} = mt + n$ и по второй части теоремы 5 $z_{n-1} = \tau p + tq + r$. И каноническая форма F имеет два дополнительных нуля $f_{n-1,n} = 0$ и $f_{n,n} = 0$ она содержит элемент $f_{n-2,n} = f^0_{n-2,n}$ обладающий свойством $|f^0_{n-2,n}| = dist(0, Imf_{n-2,n})$. Здесь $St(F) = Tp(1, 0, \dots, at, mt, p\tau + qt)$.

c.2) Если $f_{n-1,n-1} = ut + v \in \mathbf{R}$, $u \neq 0$, тогда, очевидно, $\exists! t_0 \in \mathbf{R} : f_{n-1,n-1} = 0$. Полагая последовательно $f_{n-1,n} = 0$ и $f_{n,n} = 0$ мы найдем неизвестные $z_{n-2} = z^0_{n-2}$ и $z_{n-1} = p\tau + q$, $p \neq 0$, $\tau \in \mathbf{R}$. И каноническая форма F имеет три дополнительных нуля $f_{n-1,n} = 0$, $f_{n,n} = 0$ и $f_{n-1,n-1} = 0$ и она содержит четвертый дополнительный элемент $f_{n-2,n} = f^0_{n-2,n}$ обладающий свойством $|f^0_{n-2,n}| = dist(0, Imf_{n-2,n})$. Здесь $St(F) = Tp(1, 0, \dots, p\tau)$.

d) Если $|g_{1,n}| = |g_{n-2,3}| = |g_{n-1,2}|$ тогда существует единственный элемент $f^0_{n-2,n}$ с $|f^0_{n-2,n}| = dist(0, Imf_{n-2,n})$ и по теореме 4 Дополнения $z_{n-3} = pt + q$, $p \neq 0$, $p \perp q$, $t \in \mathbf{R}$.

d.1) Пусть $f_{n-1,n-1} = const$ и $f_{n-1,n} = -g_{1,n} z_{n-2} - g_{n-1,2} \bar{z}_{n-2} + tu + v$. Если векторы u и $e^{i\varphi}$ ($\varphi = \frac{1}{2}(arg\, g_{1,n} + arg\, g_{n-1,2})$) линейно независимы, то (по первой части теоремы 5 Дополнения) существует единственный параметр t_0 обладающий свойством $f_{n-1,n} = 0$. Кроме того, $z_{n-2} = a\sigma + b$ ($a \neq 0$, $a \perp b$, $\sigma \in \mathbf{R}$). Требование $f_{n,n} = 0$ по второй части теоремы 5 Дополнения дает $z_{n-1} = \tau w + \sigma r + s$,

$w \neq 0$, $\tau, \sigma \in \mathbf{R}$. Каноническая форма F имеет дополнительно два нуля $f_{n-1,n} = 0$ и $f_{n,n} = 0$ и обладает третим дополнительным элементом $f^0_{n-2,n}$, что $|f^0_{n-2,n}| = dist(0, f_{n-2,n})$. Здесь $St(F) = Tp(1, 0, \ldots, \sigma a, \tau w + \sigma r)$.

Если $u = \lambda_0 e^{i\varphi}$, то (по второй части теоремы 5 Дополнения) существует единственное число $f^0_{n-1,n}$ с $|f^0_{n-1,n}| = dist(0, Imf_{n-1,n}(t = 0))$ и $z_{n-2} = \delta q + tm + l$, $q \neq 0$, δ, $t \in \mathbf{R}$. Требование $f_{n,n} = 0$ по второй части теоремы 6 Дополнения дает $z_{n-1} = a\sigma + bt + c\delta + d$, $a \neq 0, \sigma, t, \delta \in \mathbf{R}$. Каноническая форма F имеет дополнительно один нуль $f_{n,n} = 0$ и она имеет два дополнительных элемента $f^0_{n-2,n}$ и $f^0_{n-1,n}$ с условиями $|f^0_{n-2,n}| = dist(0, Imf_{n-2,n})$; $|f^0_{n-1,n}| = dist(0, Imf_{n-1,n}(t = 0))$. Здесь $St(F) = Tp(1, 0 \ldots, 0, pt, q\delta + mt, a\sigma + bt + c\delta)$.

d.2) Пусть теперь $f_{n-1,n-1} = ut + v \in \mathbf{R}$, $u \neq 0$, тогда существует единственное вещественное число $t = t_0$ и такое, что $f_{n-1,n-1} = 0$. Далее, существует единственный элемент $f^0_{n-1,n} \in Imf_{n-1,n}$ с $|f^0_{n-1,n}| = dist(0, Imf_{n-1,n})$. Кроме того $z_{n-2} = p\tau + q$. Тогда, по второй части теоремы 5 Дополнения требование $f_{n,n} = 0$ дает нам $z_{n-1} = u\delta + v\tau + w$. Каноническая форма F имеет два дополнительных нуля $f_{n-1,n-1} = 0$ и $f_{n,n} = 0$ и два дополнительных элемента $f^0_{n-2,n}$ и $f^0_{n-1,n}$, обладающих свойствами $|f^0_{n-2,n}| = dist(0, Imf_{n-2,n})$; $|f^0_{n-1,n}| = dist(0, Imf_{n-1,n})$. Здесь $St(F) = Tp(1, 0, \ldots, p\tau, u\sigma + v\tau)$.

Используя инварианты n, k, l, m, r и s нетрудно показать, что в списке канонических форм, приведенном выше, нет двух одинаковых.

Дополнение

Функция $f(x) = ax + b\bar{x} + c$ над $\mathbf{C}$

Пусть $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ есть функция вида:

$$f(x) = ax + b\bar{x} + c, \text{ г } a, b, c, x \in \mathbf{C}. \tag{7}$$

Пусть символы α, β, γ и τ означают $\arg a, \arg b, \arg c$ и $\arg x$ соответственно.

Теорема 1. *Отображение* $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ *в* (7) *осуществляет биекцию между всеми элементами из* $\mathbf{C}$*тогда и только тогда, когда* $|a| \neq |b|$ *и при этом прообраз нуля имеет вид* $f^{-1}(0) = \frac{c\bar{a}-\bar{c}b}{b\bar{b}-a\bar{a}}$.

Следствие. *Если параметр* c *в* (7) *имеет вид* $c = \sum\limits_{k=0}^{k=m} c_k t_k$; $c_k \in \mathbf{C}$, $t_k \in \mathbf{R}$, $t_0 = 1$, *то прообраз нуля предствим в виде* $f^{-1}(0) = \sum\limits_{k=0}^{k=m} d_k t_k$, $d_k \in \mathbf{C}$.

Далее, в теормах 2$-$6 мы предполагаем, что $|a| = |b|$ и мы будем отождествлять $\mathbf{C}$ и $\mathbf{R}^2$ как двумерные векторные пространства над $\mathbf{R}$.

Теорема 2. *Пусть функция* f *определена равенством* (7). *Множество* Imf *есть прямая* $y = c + te^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}$, $t \in \mathbf{R}$, *такая, что точка*$c \in \mathbf{C}$ *и она имеет направляющий вектор* $e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}$. *Пусть* $y_0 = c + t_0 e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}$, *тогда* $f^{-1}(y_0)$ *есть прямая* $x = \frac{t_0}{2|a|}e^{i\frac{\beta-\alpha}{2}} + \sigma e^{i\frac{\pi+\beta-\alpha}{2}}$, $\sigma \in \mathbf{R}$. *Прообразы* $f^{-1}(y_0)$ *и* $f^{-1}(\tilde{y}_0)$ *есть пара параллельных прямых тогда и только тогда, когда* $y_0 \neq \tilde{y}_0$.

Теорема 3. *Нуль* $0 \in Imf$ *тогда и только тогда, когда* $c = \mu_0 e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}$ *для всех* $\mu_0 \in \mathbf{R}$. *Более того,* $f^{-1}(0)$ *есть прямая*

$$x = -\frac{\mu_0}{2|a|}e^{i\frac{\beta-\alpha}{2}} + \sigma e^{i\frac{\pi+\beta-\alpha}{2}},\ \sigma \in \mathbf{R}.$$

Следствие. *Если* $a = \bar{b}$ *тогда* $0 \in Imf$*тогда и только тогда, когда* $c \in \mathbf{R}$. *Более того,* $f^{-1}(0)$ *есть прямая* $x = -\frac{c}{2a} + \sigma i e^{-i\alpha}$, $\sigma \in \mathbf{R}$.

Теорема 4. *Нуль* $0 \notin Imf$. *Тогда существует единственный элемент* $y_0 \in Imf$, *такой что* $|y_0| = dist(0, Imf)$.

Замечание 1. Если $y_0 = c + t_0 e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}$ то (см. Теорему 2) $f^{-1}(y_0)$ есть прямая $x = \frac{t_0}{2|a|}e^{i\frac{\beta-\alpha}{2}} + \sigma e^{i\frac{\pi+\beta-\alpha}{2}}$, $\sigma \in \mathbf{R}$.

Замечание 2.Если $b = \bar{a}$, $c \in \mathbf{R}$, то $y_0 = 0$, т.е. $0 \in Imf$.

Теорема 5 *Пусть* $f(x) = ax + b\bar{x} + c + \tau d$, *где* $\tau \in \mathbf{R}$. *Если векторы* $e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}$ *и* d *линейно независимы над* $\mathbf{R}$, *то* $\exists! \tau_0 \in \mathbf{R}$, *такое, что* $f(x) = ax + b\bar{x} + c + \tau_0 d = 0$ *для некоторого* x. *Более того,* $f^{-1}(0) = \{x \in \mathbf{C}/x = p\sigma + q\}$, *где* σ – *произвольный вещественный параметр,* $p = \frac{i}{2|a|}e^{i\frac{\beta-\alpha}{2}}$, $q = \frac{\mu_0}{2|a|}e^{i\frac{\beta-\alpha}{2}}$ *и* $c = -\mu_0 e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} - \tau_0 d$.

Если вектор $d = \lambda_0 e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}$ *при некотором* $\lambda_0 \in \mathbf{R}$, *то* $Imf = Imf|(\tau = 0) = \{y \in \mathbf{C}/y = c + \sigma e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}},\ \sigma \in \mathbf{R}\}$ *и, кроме того, существует единственное вещественное* σ_0, *и такое, что* $y_0 = c + \sigma_0 e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}$ *и* $|y_0| = dist(0, Imf)$. *Более того,* $f^{-1}(y_0) = \{x \in \mathbf{C}/x = p\tau + q\delta + r\}$, *где* τ, δ – *произвольные вещественные параметры, при этом,* τ *тот же самый, который находится в выражении для* $f(x)$, $p = -\frac{\lambda_0}{2|a|}e^{i\frac{\beta-\alpha}{2}}$, $q = \frac{i}{2|a|}e^{i\frac{\beta-\alpha}{2}}$, $r = -\frac{1}{4|a|}(ce^{-i\alpha} + \bar{c}e^{i\beta})$. *Параметр* $\sigma_0 = -\frac{1}{2}(ce^{-i\frac{\alpha+\beta}{2}} + \bar{c}e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}})$.

Теорема 6. *Пусть* $f(x) = ax + b\bar{x} + c + \sum\limits_{k=1}^{k=m} \tau_k d_k$, *где* $\tau_k \in \mathbf{R}$. *Если, например, векторы* $e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}$ *и* d_1 *линейно независимы над* $\mathbf{R}$, *то* $\exists!\, 2m$ *действительных числа* $\mu^0, \tau^0, \mu_k^0, \tau_k^0$ $(k = 2, 3, \ldots, m)$, *и таких, что для всех* $\tau_2, \tau_3, \ldots, \tau_m$ *существует* $x \in \mathbf{C}$, *для которого* $f(x) = ax + b\bar{x} + c + (\tau^0 - \sum\limits_{k=2}^{k=m} \tau_k^0 \tau_k) d_1 + \sum\limits_{k=2}^{k=m} \tau_k d_k = 0$. *Более того,* $f^{-1}(0) = \{x \in \mathbf{C}/x = \frac{1}{2|a|}ei\frac{\beta-\alpha}{2}(\mu^0 - \sum\limits_{k=2}^{k=m} \mu_k^0 \tau_k + i\sigma)$, $\sigma \in \mathbf{R},\}$ *параметр* σ *не зависит от* $\tau_2, \tau_3, \ldots, \tau_m$. *Здесь* $c = -\mu^0 e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} - \tau^0 d_1$, $d_k = \mu_k^0 e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} + \tau_k^0 d_1$, $k = 2, 3, \ldots, m$. *Если для любого вектора* $d_k = \lambda_k^0 e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}$, *где* $\lambda_k^0 \in \mathbf{R}$, $k = 1, 2, \ldots, m$, *тогда* $Imf = Imf|(\tau_1 = \tau_2 = \ldots = \tau_m = 0) = \{y \in \mathbf{C}/y = c + \sigma e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}$, $\sigma \in \mathbf{R}\}$ *и существует однозначно определенное вещественное число* σ_0, *такое, что* $y_0 = c + \sigma_0 e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}$ *и* $|y_0| = dist(0, Imf)$. *Более того,* $f^{-1}(y_0) = \{x \in \mathbf{C}/x = \frac{1}{2|a|}(\sigma_0 - \sum\limits_{k=1}^{k=m} \lambda_k^0 \tau_k + i\delta)e^{i\frac{\beta-\alpha}{2}}\}$, *где параметр*

$\sigma_0 = \frac{1}{2}(ce^{-i\frac{\alpha+\beta}{2}} + \bar{c}e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}})$.

Библиографический список

1. Добровольская Н.М., Пономарев В.А. Пары встречных операторов// УМН. 1965. Т.20, N6. С. 81 - 86.
2. Ермолаев Ю.Б. Одновременное приведение пары билинейных форм к каноническому виду // ДАН СССР. 1960. Т.139, С. 257 - 259
3. Гельфанд И.М., Пономарев В.А. Четверки подпространств конечномерного векторного пространства // ДАН СССР. 1971. Т.197, N4 С. 762-765.
4. Сергейчук В.В. Классификационные задачи для систем линейных отображений и полуторалинейных форм Киев, 1983. Деп. в Укр. НИИНТИ, N196, Ук Д 84.
5. Сергейчук В.В. Классификационные задачи для систем форм и линейных отображений. // ДАН СССР. 1987 Т.51, N6
6. Дрозд Ю.А. Преобразования Кокстера и представления частично упорядоченных множеств // Функц. анал. и его прил. 1976. Т.8, N3 С. 34 - 42
7. Назарова Л.А., Ройтер А.В. Представления частично упорядоченных множеств // Иссл. по теор. представлений Л.: Наука, 1972
8. Bolshakov Yu., Reichstein B. Unitary equivalence in an indefinite scalar product: an analogue of singular value decomposition // LA and its appl. 1995. V. 222 P. 155-226

Анализ системы сингулярно возмущенных уравнений, описывающих проведение возбуждения по нервному волокну

В.В. Майоров, С.Е. Ануфриенко

В работе рассматривается модель импульсного проведения возбуждения по нервному волокну, покрытому особым веществом –

миелином, являющимся хорошим изолятором. Такие волокна называются миелинизированными. В миелиновой оболочке есть разрывы (перехваты Ранвье) [1, 2]. Сигнал по миелинизированному волокну передается скачкообразно. Модель основана на системе, включающей в себя дифференциальные уравнения с запаздыванием и обыкновенные дифференциальные уравнения. Система исследуется аналитически. Показано, что существует решение, при котором перехваты Ранвье генерируют цепочку спайков. Рассчитаны временные рассогласования между спайками соседних перехватов.

Рассмотрим участок нервного волокна, содержащий $N+1$ перехват Ранвье. Присвоим перехватам номера от 0 до N и обозначим через $u_i(t)$ их мембранные потенциалы. Потенциал миелинизированного участка, находящегося между перехватами с номерами i и $i-1$, обозначим $v_i(t)$ $(i = 1, \ldots, N)$. Мембранные потенциалы перехватов Ранвье и миелинизированных участков будем отсчитывать от уровня максимальной гиперполяризации, поэтому $u_i(t) \geqslant 0$ и $v_i(t) \geqslant 0$. Система, описывающая процесс распространения импульса по миелинизированному волокну, имеет вид [3]:

$$\dot{u}_i = \lambda\,[-1 - f_{Na}(u_i) + f_K(u_i(t-1))]u_i + \varepsilon + \ e^{-\lambda\sigma}(v_i - 2u_i + v_{i+1})$$
$$i = 0, \ldots, N; \quad v_0(\,t) \equiv u_0(t); \quad v_{N+1}(t) \equiv u_N(t); \tag{1}$$

$$\dot{v}_i = \lambda(u_{i-1} - 2v_i + u_i), \quad i = 1, \ldots N. \tag{2}$$

Здесь параметр $\lambda >> 1$ отражает высокую скорость протекания электрических процессов, параметр $0 < \varepsilon << 1$ учитывает токи утечки, проходящие через мембраны перехватов. Положительные достаточно гладкие функции $f_{Na}(u)$ и $f_K(u)$ монотонно убывают к нулю при $u \to \infty$ быстрее, чем $O(u^{-1})$. Они описывают состояние натриевых и калиевых каналов мембран перехватов. Параметры $\alpha = 1 + f_{Na}(0) - f_K(0) > 0$, $\alpha_1 = f_K(0) - 1 > 1$, $\alpha_2 = f_{Na}(0) + 1 > \alpha_1$, $0 < \sigma < \alpha_1$. Число $f_K(0) - f_{Na}(1) - 1 > 0$ связано с пороговым значением: будем читать, что спайк i-го перехвата начинается в момент времени t_s, такой что $u_i(t_s) = 1$, $u_i(t) < 1$ при $t_s - 1 < t < t_s$. Токи утечки через миелиновые оболочки не учитываются.

Система описывает последовательность перехватов Ранвье, связанных между собой посредством миелинизированных участков.

Отметим, что система уравнений имеет устойчивое состояние равновесия $u_i = v_i = u_* \approx \frac{\varepsilon}{\lambda\alpha}$.

Зададим начальные условия:

$u_0(s) = \varphi_0(s) \in S, \quad s \in [-1, 0];$

$u_i(s) = u_*, \quad s \in [-1, 0], \quad i = 1, \ldots, N;$

$v_i(0) = u_*, \quad i = 1, \ldots, N.$

Класс S состоит из непрерывных на отрезке $s \in [-1,\ 0]$ функций $\varphi\,(s)$, удовлетворяющих условиям: $\varphi\,(0) = 1$ и $0 \leqslant \varphi\,(s) \leqslant \max(\exp\,(\lambda\alpha s/2)\,, 1/\lambda)$.

Формулы, описывающие динамику мембранного потенциала нулевого перехвата при отсутствии внешнего воздействия, имеют вид [4]:

$$u_0(t) = \begin{cases} \exp(\lambda\alpha_1(t + o(1))), \quad t \in [\delta\,,\ 1 - \delta\,]; \\ \exp(\lambda(\alpha_1 - (t-1) + o(1))),\ t \in [1 + \delta 1 + \alpha_1 - \delta\,]; \\ \frac{\varepsilon\, + o(1)}{\lambda\,\alpha_2}\,, \quad t \in [1 + \alpha_1 + \delta\,,\ 2 + \alpha_1 - \delta\,]; \\ \frac{\varepsilon\, + o(1)}{\lambda\alpha}\,, \quad t \geqslant 2 + \alpha_1 + \delta. \end{cases} \tag{3}$$

Здесь $0 < \delta\, << 1$ – произвольно малое фиксированное число, $o(1)$ – слагаемые, которые стремятся к нулю при $\lambda \to \infty$.

Проанализируем систему (1)–(2) при $\lambda\ \to\ \infty$. Из начальных условий следует, что при $t = 0$ начинается спайк у нулевого перехвата. Кроме этого выполнены соотношения: $v_1(0) << u_0(0) = 1$, $u_1(0)\ <<\ 1$. Из них следует, что на некотором промежутке при $t > 0$ последнее слагаемое уравнения (1) при $i{=}0$ асимптотически мало, и данное уравнение может быть проинтегрировано независимо от других. Имеем:

$$u_0(t) = \exp(\lambda\alpha_1(t + o(1))).$$

Рассмотрим промежуток $t \in [\delta, \tau - \delta]$, где τ – первый корень уравнения $u_1(t) = 1$. Скоро мы покажем, что $\tau < 1$, поэтому справедливы оценки: $u_0(t) >> 1$, $u_1(t) << 1$. Запишем уравнение (2) при $i{=}1$:

$$\dot{v}_1 = -2\lambda v_1 + \lambda \exp(\lambda\alpha_1(t + o(1))), \quad v_1(0) = u_*.$$

Главное слагаемое решения имеет вид:

$$v_1(t) = \exp(\lambda\alpha_1(t + o(1))).$$

Для нахождения τ рассмотрим уравнение (1) при i=1. Учитывая, что $u_1(t) = o(1)$ и $v_2(t) = o(1)$, запишем его в виде:

$$\dot{u}_1 = -\lambda[\alpha + o(1)]u_1 + \varepsilon + \exp(\lambda(\alpha_1 t - \sigma + o(1))), \quad u_1(0) = u_*.$$

Его решение имеет вид:

$$u_1(t) = \frac{\varepsilon}{\lambda\alpha} + \frac{\exp(\lambda(\alpha_1 t - \delta + o(1))) - \exp(-\lambda(\alpha t + \sigma + o(1)))}{\lambda(\alpha + \alpha_1)}.$$

Найдем τ из условия $u_1(t) = o(1)$: $\tau = \frac{\sigma}{\alpha_1} + o(1) < 1$.

Отметим, что при $s \in [-1,\ 0]$ выполнено условие $u_1(\tau + s) = \varphi_1(s) \in S$.

Рассмотрим промежуток $t \in [\tau + \delta, t_2 - \delta]$, где $\tau < t_2 < 1$ и для всех $t < t_2$ справедливо неравенство: $u_1(t) < u_0(t)$. Здесь уравнение, описывающее динамику мембранного потенциала нулевого перехвата, может быть проинтегрировано независимо от других. Поэтому

$$u_0(t) = \exp(\lambda\alpha_1(t + o(1))).$$

Уравнение для $v_1(t)$ сохранит свой вид, следовательно, не изменится и решение:

$$v_1(t) = \exp(\lambda\alpha_1(t + o(1))).$$

Уравнение для $u_1(t)$ примет вид:

$$\dot{u}_1 = \lambda[\alpha_1 + o(1)]u_1 + \varepsilon + \exp(\lambda(\alpha_1 t - \sigma + o(1))), \quad u_1(\tau) = 1.$$

Его решение имеет вид:

$$u_1(t) = \left(1 + \frac{\varepsilon}{\lambda\alpha_1}\right)\exp(\lambda(\alpha_1 + o(1))(t - \tau)) + (t - \tau)\exp(\lambda(\alpha_1 t - \sigma + o(1))) - \frac{\varepsilon}{\lambda\alpha_1}.$$

Учитывая, что $\tau < t < 1$ и $\tau = \frac{\sigma}{\alpha_1} + o(1)$, получаем:

$$u_1(t) = \exp(\lambda\alpha_1(t - \tau + o(1))).$$

Это значит, что $u_1(t) \approx u_0(t-\tau)$ (с точностью до слагаемых (1)). Поскольку t_2 произвольно, все формулы верны на промежутке $t \in [\tau+\delta, 1-\delta]$.

Рассмотрим промежуток $t \in [1+\delta, 1+\tau-\delta]$. Здесь уравнения, описывающие динамику мембранных потенциалов нулевого и первого перехватов, могут быть проинтегрированы независимо от других. Имеем:

$u_0(t) = \exp(\lambda(\alpha_1 - (t-1) + o(1)))$,

$u_1(t) = \exp(\lambda\alpha_1(t-\tau+o(1)))$.

Мембранный потенциал нулевого перехвата убывает, а первого перехвата – возрастает. Уравнение для $v_1(t)$ примет вид:

$$\dot{v}_1 = -2\lambda v_1 + \lambda\exp(\lambda(\alpha_1 - (t-1) + o(1))) + \lambda\exp(\lambda\alpha_1(t-\tau+o(1))).$$

Здесь следует рассмотреть два случая:

1) $u_0(t) > u_1(t)$,

2) $u_0(t) < u_1(t)$.

Случай первый. Имеем:

$$\exp(\lambda(\alpha_1 - (t-1) + o(1))) > \exp(\lambda\alpha_1(t-\tau+o(1))),$$

$$t < t_* + o(1), \quad t_* = \frac{\alpha_1\tau}{\alpha_1+1} + 1.$$

Заметим, что $1 < t_* < 1+\tau$. Перепишем уравнение для $v_1(t)$:

$$\dot{v}_1 = -2\lambda v_1 + \lambda\exp(\lambda(\alpha_1 - (t-1) + o(1))), \quad v_1(1) = \exp(\lambda\alpha_1(1+o(1))).$$

Его решение имеет вид:

$$v_1(t) = \exp(\lambda(\alpha_1 - (t-1) + o(1))).$$

Получили приближенное равенство: $v_1(t) \approx u_0(t)$ (с точностью до слагаемых (1)).

Случай второй: $t \in [t_*+\delta, 1+\tau-\delta]$. Здесь уравнение для $v_1(t)$ примет вид:

$$\dot{v}_1 = -2\lambda v_1 + \lambda\exp(\lambda\alpha_1(t-\tau+o(1))), \quad v_1(t_*) = \exp(\lambda(\alpha_1 - (t_*-1) + o(1))).$$

Его решение имеет вид:

$$v_1(t) = \exp(\lambda\alpha_1(t-\tau+o(1))).$$

Получили, что на данном промежутке справедливо приближенное равенство: $v_1(t) \approx u_1(t)$ (с точностью до слагаемых (1)).

Дальнейшее исследование системы (1)–(2) показывает, что на нулевой перехват влияние не оказывается при $t > 0$, а на первый перехват – при $t > \tau$. Это значит, что миелинизированные участки не могут повлиять на перехваты Ранвье, когда те генерируют спайки и в течение некоторого времени после спайка. Этот временной промежуток называется периодом рефрактерности. Его продолжительность $T_R = 2+\alpha_1+o(1)$. В указанный период каждое из уравнений (1) может быть проинтегрировано независимо от других. Следовательно, мембранный потенциал нулевого перехвата определяется формулой (3), а для первого перехвата при $t > \tau$ справедливо равенство: $u_1(t) \approx u_0(t-\tau)$ (с точностью до слагаемых (1)). Описанное явление имеет простой биологический смысл. Известно [1], что миелинизированное волокно не может проводить импульсный сигнал большой частоты, потому что перехваты должны "восстановиться".

Формулы, задающие мембранный потенциал первого миелинизированного участка, имеют вид:

$$v_1(t)! = \begin{cases} \exp(\lambda\alpha_1(t+o(1))), \quad t\in[\delta\,,\ 1-\delta\,]; \\ \exp(\lambda(\alpha_1-(t-1)+o(1))), \quad t\in[1+\delta\,,\ t_*-\delta\,]; \\ \exp(\lambda\alpha_1(t-\tau+o(1))), \quad t\in[t_*+\delta\,,\ 1+\tau-\delta\,]; \\ \exp(\lambda(\alpha_1-(t-\tau-1)+o(1))), \ t\in[1+\tau+\delta, 1+\alpha_1+\tau-\delta]; \\ \frac{\varepsilon+o(1)}{\lambda\,\alpha_2}, \quad t\in[1+\alpha_1+\tau+\delta\,,\ 2+\alpha_1-\delta\,]; \\ \frac{\varepsilon\,(\alpha+\alpha_2)+o(1)}{2\lambda\alpha\,\alpha_2}, \quad t\in[2+\alpha_1+\delta\,,\ 2+\alpha_1+\tau-\delta\,]; \\ \frac{\varepsilon+o(1)}{\lambda\alpha}, \quad t\geqslant 2+\alpha_1+\tau+\delta. \end{cases} \tag{4}$$

Из приведенных формул следует, что

$$v_1(t) \approx u_0(t) \text{ при } 0 < t < t_*,$$
$$v_1(t) \approx u_1(t) \text{ при } t > t_*.$$

Тем самым, мембранный потенциал первого миелинизированного участка имеет две точки максимума

$$t^1_{\max} = 1 + o(1),$$
$$t^2_{\max} = 1 + \tau + o(1)$$

и находящуюся между ними точку локального минимума

$$t_{\min} = t_* + o(1).$$

Рассуждения, аналогичные проведенным выше, показывают, что спайк i-го перехвата Ранвье начинается в момент времени $t = i\tau + o(1)$, а мембранный потенциал i-го миелинизированного участка получается временным сдвигом потенциала первого участка:

$$v_i(t) \approx v_1(t - (i-1)\tau) \text{ при } t > (i-1)\tau.$$

Итак, доказана следующая теорема.

Теорема. *Рассмотрим систему* (1) – (2) *с начальными условиями*

$$u_0(s) = \varphi_0(s) \in S, \quad s \in [-1, 0];$$
$$u_i(s) = u_*, \quad s \in [-1, 0], \quad i = 1, \ldots, N;$$
$$v_i(0) = u_*, \quad i = 1, \ldots, N.$$

Тогда при $t > 0$ *мембранный потенциал определяется формулой* (3), *мембранный потенциал первого миелинизированного участка – по формуле* (4), *мембранные потенциалы других перехватов равны*

$$u_i(t) = u_0(t - i\tau) \text{ при } t > i\tau, \quad i = 1, \ldots, N,$$

мембранные потенциалы остальных миелинизированных участков равны

$$v_i(t) \approx v_1(t - (i-1)\tau) \text{ при } t > (i-1)\tau, \quad i = 2, \ldots, N.$$

Таким образом, при возбуждении нулевого перехвата Ранвье по цепочке перехватов будет распространяться волна импульсов (спайков) в направлении возрастания номеров перехватов. Если возбуждается перехват в середине цепочки, то волна распространяется в двух направлениях. Возбуждение последнего перехвата порождает волну импульсов, распространяющуюся в сторону убывания номеров перехватов. При одновременном возбуждении двух крайних перехватов возникнут две волны, бегущие навстречу друг другу, которые взаимно погашаются при столкновении.

Полученные результаты полностью соответствуют биологическим данным.

Библиографический список

1. *Тасаки И.* Нервное возбуждение. М.: Мир, 1971.
2. *Шаде Дж., Форд Д.* Основы неврологии. М.: Мир, 1976.
3. *Майоров В.В., Мышкин И.Ю., Громов С.А.* Модель сальтаторного проведения возбуждения, основанная на системе уравнений с запаздыванием. КГТУ: Нейроинформатика, 2002. С. 85–86.
4. *Майоров В.В., Мышкин И.Ю.* Математическое моделирование нейронной сети на основе уравнений с запаздыванием // Математическое моделирование, 1990. Т. 2. № 11. С. 64–76.

О представлении функций из пространства L^2 их интегралами Фурье

С.В. Зотиков

(В статье рассматриваются условия сходимости почти всюду интегралов Фурье функций из пространстваL^2 по отношению к скрещенному произведению двух ортонормированных систем функций. В качестве следствия одного из установленных результатов получен континуальный аналог теоремы Билларда о сходимости почти всюду ряда Фурье по системе Уолша функции $f \in L^2_{[0;1]}$ к самой функции).

Пусть на $[0;1[$ заданы две произвольные ортонормированные системы функций (о.н.с.) $\varphi = (\varphi_k)_{k=0}^{\infty}$ и $\psi = (\psi_k)_{k=0}^{\infty}$. Положим

$\forall k \in \mathbf{N}$ и$\forall l \in \mathbf{N}(\mathbf{N}=\{0,1,2,...\})$

$$\varphi_k(l+t)=\varphi_k(t), \quad \psi_k(l+t)=\psi_k(t), \quad \text{где} \;\; t\in[0;1[.$$

Скрещенным произведением о.н.с. φ на о.н.с. ψ называется функция $K_{\varphi\psi}$, определенная на $\mathbf{R}_0\times\ \mathbf{R}_0$ соотношением

$$K_{\varphi\psi}(x;y)=\varphi_{[y]}(x)\cdot\psi_{[x]}(y),$$

где $[a]$ – целая часть числа $a\in\mathbf{R}_0$ (см. [1]). Легко видеть, что функция $K_{\varphi\psi}$ может рассматриваться как континуальный аналог каждой из о.н.с. φ и ψ.

Если φ, ψ – ограниченные о.н.с., то функция $K_{\varphi\psi}$ порождает для всякой функции $f\in L^1_{[0;+\infty[}$ интегральные преобразования вида

$$\hat{f}(y)=\int\limits_0^{\infty} f(x)\overline{K_{\varphi\psi}(x;y)}dx,\ y\in\mathbf{R}_0$$

и

$$f^*(x)=\int\limits_0^{\infty} f(y)K_{\varphi\psi}(x;y)dy,\ x\in\mathbf{R}_0,$$

которые являются аналогами классического преобразования Фурье и которые мы называем преобразованиями Фурье функции f по отношению к скрещенному произведению $K_{\varphi\psi}$. Очевидно, что преобразование $\hat{f}$ является континуальным аналогом коэффициентов Фурье функции f по о.н.с. φ, а преобразование f^* является континуальным аналогом коэффициентов Фурье той же функции по о.н.с. ψ.

Для произвольной функции f из пространства $L^2_{[0;+\infty[}$ ее преобразования Фурье функции f по отношению к произвольному скрещенному произведению $K_{\varphi\psi}$ определены в работе [2] следующими соотношениями:

$$\hat{f}(y)\overset{L^2}{=}\int\limits_0^{\infty} f(x)\overline{K_{\varphi\psi}(x;y)}dx \quad \text{и} \qquad f^*(x)\overset{L^2}{=}\int\limits_0^{\infty} f(y)K_{\varphi\psi}(x;y)dy.$$

При этом выполняются неравенства $||\hat{f}|| \leqslant ||f||$ и $||f^*|| \leqslant ||f||$. Если о.н.с. φ является полной, то при любой о.н.с. ψ имеет место равенство $||\hat{f}|| = ||f||$. Если же полной является о.н.с. ψ, то при любой о.н.с. φ выполняется равенство $||f^*|| = ||f||$ (см.теоремы 1 и 2 в [2]). В случае, когда полна о.н.с. φ, при любой о.н.с. ψ имеет место формула обращения преобразования $\hat{f}$ (см. теорему 1 в [3]):

$$f(x) \overset{L^2}{=} \int\limits_0^\infty \hat{f}(y) K_{\varphi\psi}(x;y)dy$$

если полной является о.н.с. ψ, то при любой о.н.с. φ справедлива формула обращения преобразования f^* (см. теорему 2 в [3]):

$$\hat{f}(y) \overset{L^2}{=} \int\limits_0^\infty f^*(x)\overline{K_{\varphi\psi}(x;y)}dx$$

Ниже рассматриваются условия сходимости почти всюду интеграла Фурье функции f по отношению к $K_{\varphi\psi}$ в правой части первого из записанных выше равенств к самой функции f. Для второго интеграла все рассмотрения аналогичны.

Итак, справедлива

Теорема 1. *Пусть ограниченная о.н.с.* φ *и функция* $f \in L^2_{[0;+\infty[}$ *таковы, что ряд Фурье по системе* φ *каждого сужения* $f_k = f|_{[k;k+1[}$, $k = 0, 1, 2, ...$ *почти всюду сходится к* f_k, *а* $\hat{f}(y) \overset{L^2}{=} \int\limits_0^\infty f(x)\overline{K_{\varphi\psi}(x;y)}dx$ *– преобразование Фурье функции* f *в пространстве* L^2 *по отношению к скрещенному произведению* $K_{\varphi\psi}$, *где* ψ *– произвольная о.н.с. Тогда интеграл Фурье функции* f *по отношению к* $K_{\varphi\psi}$ *сходится почти всюду на* $\boldsymbol{R}_0$ *к самой функции* f, *т.е. справедливо представление*

$$f(x) \doteq \int\limits_0^\infty \hat{f}(y) K_{\varphi\psi}(x;y)dy$$

Доказательство. Пусть о.н.с. φ и функция $f \in L^2_{[0;+\infty[}$ удовлетворяют условию доказываемой теоремы 1, а ψ – произвольная о.н.с. Тогда определена функция $\hat{f}$: $\hat{f}(y) \overset{L^2}{=} \int\limits_0^\infty f(x)\overline{K_{\varphi\psi}(x;y)}dx$ – преобразование Фурье функции f по отношению к скрещенному произведению $K_{\varphi\psi}$.

В силу теоремы 7 из [3] для любых функций f и g из $L^2_{[0;+\infty[}$ и их преобразований Фурье $\hat{f}$и g^* по отношению к произвольному скрещенному произведению $K_{\varphi\psi}$ имеет место равенство

$$\int\limits_0^\infty \hat{f}(y)\overline{g(y)}dy = \int\limits_0^\infty f(x)\overline{g^*(x)}dx \tag{1}$$

С целью использовать равенство (1) возьмем в качестве функции g следующую финитную функцию

$$g(y) = \left[\begin{array}{l} \overline{K_{\varphi\psi}(x;y)}, y \leqslant A \\ 0, y > A \end{array} \right. ,$$

где A – произвольное фиксированное число $\mathbf{R}_0$, а x – любое число из $\mathbf{R}_0$. Покажем, что для любых A и x из $\mathbf{R}_0$ функция g принадлежит пространству $L^2_{[0;+\infty[}$. Действительно,

$$||g||^2 = \int\limits_0^\infty |g(y)|^2 dy = \int\limits_0^A |K_{\varphi\psi}(x;y)|^2 dy =$$

$$= \sum_{i=0}^{[A]-1} \int\limits_{[i;i+1[} |\varphi_{[y]}(x)|^2 \cdot |\psi_{[x]}(y)|^2 dy + \int\limits_{[A]}^A |\varphi_{[y]}(x)|^2 \cdot |\psi_{[x]}(y)|^2 dy =$$

$$+ \sum_{i=0}^{[A]-1} |\varphi_i(x)|^2 + |\varphi_{[A]}(x)|^2 \int\limits_{[A]}^A |\psi_{[x]}(y)|^2 dy \leqslant ([A]+1)C_\varphi <$$

$< +\infty$, т.к. $C_\varphi = \sup\limits_{n,t} |\varphi_n(t)| < +\infty$.

Теперь в силу теоремы 2 из [2] преобразование g^* функции g по отношению к $K_{\varphi\psi}$ также принадлежит пространству $L^2_{[0;+\infty[}$. Поскольку g – финитная функция, то ее преобразование Фурье по отношению к $K_{\varphi\psi}$ в пространствах $L^2_{[0;+\infty[}$ и $L^1_{[0;+\infty[}$ совпадают, и для $u \in \mathbf{R}_0$ имеем, используя определение $K_{\varphi\psi}$:

$$g^*(u) = \int_0^\infty g(y)K_{\varphi\psi}(u;y)dy = \int_0^A \overline{K_{\varphi\psi}(x;y)}K_{\varphi\psi}(u;y)dy =$$
$$= \sum_{k=0}^{[A]-1} \int_{[k;k+1[} \overline{\varphi_{[y]}(x)} \cdot \overline{\psi_{[x]}(y)} \cdot \varphi_{[y]}(u) \cdot \psi_{[u]}(y)dy$$
$$+\overline{\varphi_{[A]}(x)} \cdot \varphi_{[A]}(u) \int_{[A]}^A \overline{\psi_{[x]}(y)} \cdot \psi_{[u]}(y)dy =$$
$$= \left[\begin{array}{l} \sum\limits_{k=0}^{[A]-1} \overline{\varphi_k(x)} \cdot \varphi_k(u) + \overline{\varphi_{[A]}(x)} \cdot \varphi_{[A]}(u) \int\limits_0^{\{A\}} |\psi_{[x]}(y)|^2 dy, [u] = [x] \\ \overline{\varphi_{[A]}(x)} \cdot \varphi_{[A]}(u) \int\limits_0^{\{A\}} \overline{\psi_{[x]}(y)} \cdot \psi_{[u]}(y)dy, [u] \neq [x] \end{array} \right. \tag{2}$$

где x – произвольное фиксированное число из $\mathbf{R}_0$.

Теперь подставим f, $\hat{f}$, g и g^* в равенство (1). Тогда

$$\int_0^A \hat{f}(y)K_{\varphi\psi}(x;y)dy = \int_0^\infty f(u)\overline{g^*(u)}du \tag{3}$$

Ввиду свойства σ- аддитивности интеграла Лебега и представления (2) имеем:

$$\int_0^\infty f(u)\cdot\overline{g^*(u)}du = \int_{[[x];[x]+1[} f(u) \cdot \overline{g^*(u)}du+$$
$$+ \sum_{\substack{n=0 \\ n\neq[x]}}^\infty \int_{[n;n+1[} f(u) \cdot \overline{g^*(u)}du = \sum_{k=0}^{[A]-1} \left(\int_{[x]}^{[x]+1} f(u)\overline{\varphi_k(u)}du \right) \varphi_k(x)+$$
$$+\varphi_{[A]}(x) \sum_{n=0}^\infty \int_n^{n+1} f(u) \cdot \overline{\varphi_{[A]}(u)}du \int_0^{\{A\}} \psi_{[x]}(y) \cdot \overline{\psi_n(y)}dy =$$
$$= S^{(\varphi)}_{[A]}(x; f_{[x]}) + R_A(x;f), \tag{4}$$

где первое слагаемое есть [A]-ая частичная сумма ряда Фурье по о.н.с. φ функции $f_{[x]} = f|_{[[x];[x]+1[}$, составленная для точки x. По условию теоремы предел этой суммы при $A \to +\infty$ для почти всех x равен $f(x)$. Конъюнкция соотношений (2) и (4) имплицирует равенство

$$\int_0^A \hat{f}(y) K_{\varphi\psi}(x;y)dy \quad = \quad S_{[A]}^{(\varphi)}(x; f_{[x]}) + R_A(x;f). \qquad (5)$$

Покажем теперь, что для $\forall x \in \mathbf{R}_0 \quad \lim\limits_{A\to+\infty} R_A(x;f) = 0$. Для произвольного $M \in \mathbf{N}$, с учетом ограниченности о.н.с. φ и неравенства Коши для интегралов, имеем:

$$|R_A(x;f)| \leqslant C_\varphi \Big\langle \sum_{n=0}^{M-1} |\int_0^\infty f(n+u) \cdot \overline{\varphi_{[A]}(u)} du| +$$
$$+ \sum_{n=M}^{\infty} |\int_n^{n+1} f(u) \cdot \overline{\varphi_{[A]}(u)} du| \cdot |\int_0^{\{A\}} \psi_{[x]}(y) \cdot \overline{\psi_n(y)} dy| \Big\rangle.$$

Применяя ко второму слагаемому в скобках неравенства Коши для сумм и интегралов и неравенство Бесселя, приходим к соотношению:

$$|R_A(x;f)| \leqslant C_\varphi \left\langle \sum_{n=0}^{M-1} |\int_0^1 f(n+u) \overline{\varphi_{[A]}(u)} du| + \sqrt{\int_M^\infty |f(u)|^2 du} \right\rangle.$$

Поскольку $f \in L^2_{[0;+\infty[}$, то второе слагаемое в скобках независимо от A может быть сделано меньше любого $\varepsilon > 0$ при соответствующем выборе $M \in \mathbf{N}$. При таком M первое слагаемое в скобках в силу теоремы Мерсера станет меньше заданного ε для $\forall A > A(\varepsilon)$. Таким образом, для $\forall \varepsilon > 0 \exists A(\varepsilon)$ – такое, что при $\forall A > A(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|R_A(x;f)| < 2C_\varphi \varepsilon$ для $\forall x \in \mathbf{R}_0$. Следовательно, $\lim\limits_{A\to+\infty} R_A(x;f) = 0$ при любом $x \in \mathbf{R}_0$.

Наконец, учитывая все сказанное и переходя к пределу при$A \to +\infty$ в равенстве (5), завершаем доказательство теоремы 1.

Одной из самых замечательных о.н.с. в теории ортогональных рядов является система Уолша $w = (w_n)_{n=0}^\infty$ (см. ее определение в [4]). В 1967 году П. Биллардом был доказан аналог для системы Уолша известной теорема А.Л. Карлесона, утверждающей, что ряд Фурье по тригонометрической системе любой функции из пространства $f \in L^2_{[0;2\pi]}$ сходится к этой функции почти всюду. Таким образом, справедлива (см. [4. С. 189–201]).

Теорема Билларда. *Для любой функции $f \in L^2_{]0;1[}$ частные суммы $S_n(x; f)$ ее ряда Фурье по системе Уолша сходятся к $f(x)$ почти всюду на* $[0; 1]$.

Установим континуальный аналог этой теоремы.

Континуальный аналог самой системы Уолша строится на основе конструкции скрещенного произведения двух о.н.с. $K_{\varphi\psi}$. Взяв в качестве одной из компонент скрещенного произведения $K_{\varphi\psi}$ о.н.с. Уолша $w = (w_n)_{n=0}^{\infty}$, мы получим ее континуальные аналоги вида $K_{w\psi}$ и $K_{\varphi w}$, где в качествеφ и ψ могут выступать любые о.н.с., в том числе и сама система Уолша. Ниже рассматривается лишь функция $K_{w\psi}$.

Для произвольной функции $f \in L^2_{[0;+\infty[}$ ее преобразования Фурье по отношению к $K_{w\psi}$ определяются равенствами

$$\hat{f}(y) \overset{L^2}{=} \int_0^{\infty} f(x)\overline{K_{w\psi}(x;y)}dx \quad \text{и} \quad f^*(x) \overset{L^2}{=} \int_0^{\infty} f(y)K_{w\psi}(x;y)dy.$$

Первое из этих преобразований мы называем преобразованием Фурье-Уолша функции f в пространстве $L^2_{[0;+\infty[}$. Интеграл $J_A(f; x) = \int_0^A \hat{f}(y)K_{w\psi}(x;y)dy$ будем называть частным интегралом Фурье-Уолша функции f, а его предел при $A \to +\infty$ в метрике L^2, то есть $\underset{A\to+\infty}{l.i.m}\, J_A(f;x) = \int_0^{\infty} \hat{f}(y)K_{w\psi}(x;y)dy$ будем называть интегралом Фурье-Уолша функции $f \in L^2_{[0;+\infty[}$. Поскольку система Уолша полна, то имеет место формула обращения преобразования Фурье-Уолша

$$f(x) \overset{L^2}{=} \int_0^{\infty} \hat{f}(y)K_{w\psi}(x;y)dy.$$

Теперь из теоремы 1 и теоремы Билларда выводим континуальный аналог результата Билларда.

Теорема 2. *Пусть f – произвольная функция из пространства $L^2_{[0;+\infty[}$, ψ – любая о.н.с., а $\hat{f}(y) \overset{L^2}{=} \int\limits_0^\infty f(x)\overline{K_{w\psi}(x;y)}dx$ – преобразования Фурье-Уолша функции f по отношению к $K_{w\psi}$. Тогда интеграл Фурье-Уолша функции f сходится почти всюду на $\boldsymbol{R}_0$ к самой функции f, то есть справедливо представление*

$$f(x) \doteq \int\limits_0^\infty \hat{f}(y)K_{w\psi}(x;y)dy.$$

В теореме 1 для представления почти всюду функции $f \in L^2_{[0;+\infty[}$ ее интегралом Фурье по отношению к скрещенному произведению $K_{\varphi\psi}$ требовалась ограниченность первой компоненты $K_{\varphi\psi}$. В следующем утверждении первая компонента $K_{\varphi\psi}$ может быть и неограниченной о.н.с. Точнее, справедлива

Теорема 3. *Пусть о.н.с. φ и ψ и функция $f \in L^2_{[0;+\infty[}$ таковы, что для преобразования Фурье $\hat{f}$ функции f по отношению к $K_{\varphi\psi}$ почти всюду выполнено равенство*

$$\hat{f}(y) = \int\limits_0^\infty f(x)\overline{K_{\varphi\psi}(x;y)}dx.$$

Если ряд Фурье по о.н.с. φ любого сужения $f_k = f|_{[k;k+1[}$, $k = 0, 1, 2, ...$ п.в. сходится к f_k, то почти всюду на $\boldsymbol{R}_0$ имеет место представление

$$f(t) = \int\limits_0^\infty \hat{f}(y)K_{\varphi\psi}(t;y)dy.$$

Доказательство. Пусть о.н.с. φ и ψ и функция $f \in L^2_{[0;+\infty[}$ таковы, что выполнено условие теоремы 3. Оценим сверху модуль разности между значением функции f в произвольной точке $t \in \mathbf{R}_0$

и ее частным интегралом Фурье по отношению к $K_{\varphi\psi}$, вычисленным в точке t:

$$|f(t)-\int_0^A \hat{f}(y)K_{\varphi\psi}(t;y)dy| \leqslant |f(t)-\int_0^{[A]} \hat{f}(y)K_{\varphi\psi}(t;y)dy|+|\int_{[A]}^A \hat{f}(y)K_{\varphi\psi}(t;y)dy| \tag{6}$$

Поскольку по условию теоремы почти всюду на $\mathbf{R}_0$ выполнено равенство $\hat{f}(y) = \int\limits_0^\infty f(x)\overline{K_{\varphi\psi}(x;y)}dx$, то имеем с учетом соотношения (2)

$$\int_0^{[A]} \hat{f}(y)K_{\varphi\psi}(t;y)dy = \int_0^\infty f(x)\int_0^{[A]} K_{\varphi\psi}(t;y)\cdot\overline{K_{\varphi\psi}(x;y)}dydx = S_{[A]}^{(\varphi)}(t;f_{[t]}),$$

$S_{[A]}^{(\varphi)}(t;f_{[t]})$ есть $[A]$-ая частичная сумма ряда Фурье по о.н.с. φ функции $f_{[t]} = f|_{[[t];[t]+1[}$, составленная для точки t. В силу условия теоремы для почти всех t выполняется $\lim\limits_{A\to+\infty} S_{[A]}^{(\varphi)}(t;f_{[t]}) = f(t)$, поэтому предел при $A \to +\infty$ первого слагаемого правой части неравенства (6) для почти всех $t \in\mathbf{R}_0$ равен нулю.

Далее, оценивая с помощью неравенства Коши квадрат второго слагаемого правой части неравенства (6), получаем для $\forall A \in\mathbf{R}_0$ и для$\forall t \in\mathbf{R}_0$:

$$|\int_{[A]}^A \hat{f}(y)K_{\varphi\psi}(t;y)dy|^2 \leqslant \quad |\varphi_{[A]}(t)|^2 \int_{[A]}^{[A]+1} |\hat{f}(y)|^2dy \tag{7}$$

Теперь покажем, что для почти всех $t \in\mathbf{R}_0$ сходится ряд

$$\sum_{k=0}^\infty |\varphi_k(t)|^2 \int_k^{k+1} |\hat{f}(y)|^2dy \quad . \tag{8}$$

Для этого рассмотрим соответствующий проинтегрированный ряд по промежутку $[j;j+1[$, $j \in\mathbf{N}$:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\int\limits_{j}^{j+1}|\varphi_k(t)|^2\int\limits_{k}^{k+1}|\hat{f}(y)|^2dydt=||\hat{f}||^2. \tag{9}$$

Поскольку функция $f\in L^2_{[0;+\infty[}$, ее преобразование Фурье $\hat{f}$ также принадлежит пространству $L^2_{[0;+\infty[}$, причем $||\hat{f}||\leqslant||f||$. Таким образом, ряд в левой части равенства (9) сходится. Но тогда в силу теоремы Б. Леви почти всюду на $[j;j+1[$ сходится ряд (8), а потому при почти всех $t\in[j;j+1[$ имеем

$$|\varphi_{[A]}(t)|^2\int\limits_{[A]}^{[A]+1}|\hat{f}(y)|^2dy\to 0 \quad\text{при}\quad A\to+\infty.$$

Так как j выбиралась произвольным из $\mathbf{N}$, то последнее соотношение имеет место для почти всех $t\in\bigcup\limits_{j=0}^{\infty}[j;j+1[=\mathbf{R}_0$. С учетом этого, из неравенства (7) следует, что второе слагаемое правой части неравенства (6) стремится к нулю при$A\to+\infty$ при почти всех $t\in\mathbf{R}_0$. Переход к пределу при $A\to+\infty$ в неравенстве (6) завершает доказательство теоремы 3.

Известно, что ряд Фурье по системе Хаара (см. ее определение в [1]) всякой интегрируемой функции сходится почти всюду к этой функции. Поэтому из теоремы 3 выводим следующее утверждение:

Теорема 4. *Если χ – система Хаара, а о.н.с. ψ и функция $f\in L^2_{[0;+\infty[}$ таковы, что для преобразования Фурье-Хаара $\hat{f}$ функции f по отношению к $K_{\chi\psi}$ справедливо почти всюду равенство $\hat{f}(y)\overset{п.в.}{=}\int\limits_0^{\infty}f(x)\overline{K_{\chi\psi}(x;y)}dx$, то функция f почти всюду представима своим интегралом Фурье-Хаара , т.е.*

$$f(t)\overset{\text{п.в.}}{=}\int\limits_0^{\infty}\hat{f}(y)K_{\chi\psi}(t;y)dy.$$

Замечание. Утверждение теоремы 4 будет заведомо выполнено, если в качестве о.н.с. ψ взять тригонометрическую систему $\psi_k(t) = e^{2\pi nit}$, $t \in [0;1]$, $n \in\mathbf{Z}$, или систему Уолша, т.е. $\psi = w$.

Библиографический список

1. *Виленкин Н.Я., Зотиков С.В.* О скрещенных произведениях ортонормированных систем функций. Математические заметки, 1973. Т. 13. № 3. С. 469–480.
2. *Зотиков С.В.* Определение преобразования и интеграла Фурье по отношению к скрещенному произведению ортонормированных систем функций в пространстве L^2. Применение функционального анализа в теории приближений. Калинин, 1988. С. 26–32.
3. *Зотиков С.В.* О формулах обращения преобразований Фурье функций из пространства L^2 и континуальных аналогах равенства Парсеваля. Методология и история математики, сборник научных трудов. Под редакцией Н.М. Матвеева. ЛГОУ им. А.С. Пушкина, Санкт-Петербург, 2003; М.: Изд. дом “Руда и металлы”, 2003. Т. 4. С. 82–89.
4. *Голубов Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А.* Ряды и преобразования Уолша: Теория и применения. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит. 1987. 344 с.

Глава 3

Теория и методика обучения математике в школе и вузе

О формировании индивидуального стиля деятельности студентов-математиков в процессе методической подготовки

Т.В. Бурлакова

Методическая подготовка в педагогическом вузе является центральным звеном в профессиональном становлении будущего учителя, поскольку связывает воедино предметную и психолого-педагогическую линию процесса обучения. В плане повышения эффективности методической подготовки весьма перспективной представляется идея индивидуализации.

В целом, в практике работы высшей педагогической школы преобладает та сторона индивидуализации, которая характеризует сам процесс обучения, но фактически слабо связана с будущей профессионально-педагогической деятельностью студента. Вместе с тем, следует рассмотреть и другой аспект проблемы: индивидуализация обучения должна осуществляться с целью развития индивидуальности будущего педагога и основ индивидуального стиля его педагогической деятельности. Более того, можно утверждать, что формирование индивидуального стиля педагогической деятельности – это не дополнительная или выборочно реализуемая постановка цели профессионального образования, а это его максимально достижимый результат.

Понятие стиля определяет взаимоотношения объективных требований деятельности и свойств индивидуальности, а индивидуальный стиль опосредует связь, взаимодействие индивидуальности с миром. Предваряя создание теории индивидуального стиля деятельности, Б.М. Теплов писал: “Нет ничего нежизненнее схоластичнее идеи о том, что существует только один способ успешного выполнения всякой деятельности. Эти способы бесконечно разнообразны, как разнообразны человеческие способности".

Очевидно, прежде чем говорить о методике формирования индивидуального стиля деятельности будущего учителя математики, необходимо обратиться к общим вопросам теории индивидуального стиля.

Известно, что теория и понятие стиля были разработаны А. Адлером в 1927 году, который определил его как совокупность особенностей поведения человека, способствующих компенсации его индивидуальных дефектов (физических, психических, социальных).

В отечественной психологии анализируемое понятие сформулировал Ю.А. Самарин, который полагал, что стиль имеет опосредующую роль в развитии способностей человека и является производным трех компонентов: направленности личности; степени сознательного владения своими психическими процессами, технических приемов деятельности.

Наиболее прочно понятие "стиль" вошло в отечественную науку с началом разработки целостной концепции индивидуального стиля деятельности (В.С. Мерлин, Е.А. Климов). В широком смысле слова стиль деятельности – устойчивая система способов, приемов, проявляющаяся в разных условиях ее осуществления. В собственно психологическом смысле индивидуальный стиль деятельности – "это обусловленная типологическими особенностями устойчивая система способов, которая складывается у человека, стремящегося к наилучшему осуществлению данной деятельности,... индивидуально-своеобразная система психологических средств, к которым сознательно или стихийно прибегает человек в целях наилучшего уравновешивания своей (типологически обусловленной) индивидуальности с предметными внешними условиями деятельности (Климов, 1963; 49). В этом определении особенно подчеркивается, что это "индивидуальное своеобразное сочетание приемов и способов, обеспечивающее наилучшее выполнение деятельности" (В.С. Мерлин).

Стиль педагогической деятельности, который имеет большую значимость для данной статьи, выявляет воздействие по меньшей мере трех факторов: а) индивидуально-психологических особенностей субъекта этой деятельности – учителя (преподавателя), включающих индивидуально-типологические, личностные, поведенческие особенности; б) особенностей самой деятельности и в) особенностей обучающихся (возраст, пол, статус, уровень знаний и т.д.). В педагогической деятельности указанные факторы соотносятся также: с характером взаимодействия; с характером организации деятельности; с предметно-профессиональной компетентностью учителя; с характером общения.

В педагогической науке стили педагогической деятельности прежде всего подразделяют на три общих: авторитарный, демократический и либерально-попустительский, каждый из которых, выявляя отношение к партнеру взаимодействия, определяет его характер: от подчинения – к партнерству – к отсутствию направленного воздействия. Существенно, что каждый из этих стилей предполагает доминирование либо монологической, либо диалогической формы общения.

В рамках данной статьи важно рассмотреть структуру личности, лежащую в основе выработки индивидуального стиля будущего учителя математики. Традиционно ее представляют в виде иерархической пирамиды, на низшем уровне которой располагают *биологически обусловленные особенности* – темперамент и черты характера; следующий уровень содержит *формы отражение* – внимание, восприятие, память, мышление, способности; далее следует *опыт* – знания, умения, привычки, формы и методы работы и, наконец, на высшем уровне – *направленность* – идеалы, ценности, отношения (Платонов, 1974).

Как и в любой иерархии, особенности низшего уровня влияют на поведение человека больше, чем подструктуры высших уровней (Успенский, Чернявская, 2003). В ситуации, требующей быстрой реакции или решения, действия педагога, не достигшего высокого уровня профессионального развития, импульсивно отражают особенности его темперамента и биологически обусловленные черты. И только по мере анализа он будет использовать накопленные знания и опыт, т.е. руководствуется подструктурами высших уровней. При этом опытные и компетентные учителя, знающие и использующие особенности индивидуального стиля, не находятся в столь полной зависимости от особенностей своего темперамента. Понимание своих особенностей позволяет им компенсировать нежелательные личностные особенности за счет использования других свойств личности. Следовательно, основные пути формирования индивидуального стиля могут заключаться в максимальном использовании профессионально важных качеств человека и их структур и компенсации нежелательных с точки зрения профессиональной деятельности проявлений личностных факторов.

Занимаясь формированием индивидуального стиля деятельности студентов-математиков, необходимо помнить, что он вырабатывается как под влиянием общих целей деятельности, так и представлений субъекта о ее успешности, а наибольшая успешность деятельности обеспечивается благодаря выработанному стилю. Предпосылками выработки индивидуального стиля являются: наличие зоны неопределенности деятельности, благодаря чему одна и та же деятельность может быть выполнена по-разному; желание человека сделать свою деятельность более успешной, приятной и приносящей эмоциональное удовлетворение.

Очевидно, что началом любой деятельности является мотив. Следовательно, определяющим условием при организации первых занятиях по методике преподавания математики должна стать личностная включенность каждого участника в работу. Необходимо заинтересовать студентов, создать такую атмосферу, чтобы позволить максимально раскрыться каждому. Наряду с традиционными целесообразно включать задания на развитие мотивационной сферы, позволяющие использовать игровые технологии и коллективные творческие дела. Например, обсуждение таких тем, как "Почему я выбрал профессию учителя математики", "Почему дети не хотят учиться математике", "Мой любимый учитель. Какой он?", "Как я научился решать задачи" и т.п. во многом снимают психологические барьеры, способствуют развитию навыков коммуникации, создают непринужденную рабочую обстановку. Подобные задания ценны еще и тем, что помогают каждому научиться аргументированно отстаивать свою точку зрения, давать критический анализ высказываниям других. В логике развития мотивационного компонента индивидуального стиля педагогической деятельности можно использовать задания типа “Завершите фрагмент урока, предложенный другой группой”, “Продолжи объяснение темы” и другие. Для формирования у студентов направленности на педагогическую деятельность можно предложить методику “Я через десять лет”.

Как одна из подструктур индивидуального стиля педагогической деятельности, *мотивационный* компонент также включает в себя направленность на саморазвитие, самовоспитание, самовыражение; преодоление недостатков собственной педагогической деятельности; овладение новыми знаниями и умениями и творческое применение их в профессионально-педагогической деятельности. Современный учитель должен уметь работать с разными детьми (с разным исходным уровнем готовности к обучению, разным складом ума, разным отношением к учебе), выстраивая особую линию обучения для конкретного ребенка с учетом его индивидуальных особенностей. Поэтому студентам предлагается разработать несколько вариантов одного урока, представить теоретический материал в словесной, визуальной, предметно-практической формах; использовать разные способы передачи информации (аналитический или синтетический, индуктивный или дедуктивный). Подобные задания особенно важны в поиске индивидуального стиля деятельности.

Креативность как необходимый компонент, отличающий индивидуальный стиль педагогической деятельности, включает в себя способность обобщать опыт творческой деятельности других учителей, видеть новое в привычной профессиональной деятельности, сравнивать различные педагогические концепции, доказывать и обосновывать свои способы деятельности, предлагать различные решения одной и той же проблемы. Как известно, в образовательной практике разработаны и используются различные технологии: трансформирования знаний, умений и навыков; поэтапного формирования умственных действий; коллективного взаимообучения; полного усвоения; разноуровнего обучения; адаптивного обучения; проблемного обучения; модульного обучения и другие.

Будущему специалисту необходимо знать слагаемые указанных педагогических технологий, чтобы иметь возможность свободного их выбора в соответствии с целями обучения и личностными особенностями, и совершенствоваться в их применении. Каждую из названных технологий студенты постигают в процессе непосредственного ее использования в рамках изучения курса методики обучения математики сначала в роли обучающегося, а затем учителя. Важно почувствовать обе роли, только тогда формирование профессионала будет эффективным. К примеру, на занятиях, посвященных логико-математическому анализу основных компонентов учебного материала, актуально применение традиционной технологии трансформирования знаний, включающей следующие процедуры: объяснение сути задания, его цели, последовательности выполнения операций, показ выполнения каждой операции, внесение корректив, оценку выполненной работы. Выполнив предложенные задания, студенты обсуждают суть технологии и разрабатывают фрагменты уроков на ее основе. Технология поэтапного формирования умственных действий активно используется в процессе формирования навыков решения геометрических задач, а затем обучения студентов умению составлять системы учебных заданий, направленных на овладение общими умениями решения геометрических задач. При работе по адаптивной технологии обучения, процесс учения в условиях которой становится преимущественно самостоятельной деятельностью, появляется возможность построения работы студентов в статических парах, обеспечивающих постоянное общение друг с другом. Технология адаптивного обучения готовит студентов к осуществлению индивидуального подхода к учащимся на уроках.

Наконец, *оценочный* компонент индивидуального стиля педагогической деятельности, позволяющий соотнести искомый и полученный результат профессиональному эталону, соединяет в себе умение, анализируя, проектировать свою будущую деятельность и дать оценку своим действиям. Критерием указанного компонента служит сформированность педагогической рефлексии. Можно использовать известные из педагогической литературы рекомендации: оценить в различной форме свое состояние, настроение в начале и в конце занятия. Иногда предлагается изобразить свое состояние жестом и мимикой, иногда оценить в баллах, или нарисовать, соотнести ассоциации с цветом, погодой. На педагогической практике студентам предлагается пронаблюдать в течение всего урока за собой и учениками и после проведения урока представить, как оценят учащиеся компоненты урока по пяти- бальной шкале. Полезно попросить учащихся оценить урок по тем же параметрам, а затем сравнить с собственным прогнозом. Такое задание постепенно вырабатывает привычку вставать в рефлексивную позицию по отношению к самому себе, что очень важно при осуществлении педагогической деятельности.

Итак, формирование стиля педагогической деятельности зависит от специально организованных условий:

1) осознание и понимание каждым студентом своих особенностей и способностей (осуществление психолого-педагогической диагностики),

2) привитие им интереса к педагогической деятельности,

3) создание ситуаций, требующих многовариантного решения, а также моделирующих нестандартные ситуации педагогической деятельности и общения,

4) развитие рефлексивно-оценочных способностей и навыков студентов,

5) включение их в поисково-исследовательскую деятельность.

Интегративным показателем эффективности процесса формирования индивидуального стиля педагогической деятельности является профессиональная творческая активность студентов, их самостоятельность в приобретении нового опыта, знаний и включения в свою практику. Для этого необходимы демократические, диалоговые, вариативные методы общения. Рефлексия, неизбежно возникающая при этом, способствует становлению профессионального мировоззрения. Совместную деятельность должна пронизывать идея преодоления сложностей и достижения цели; следует стремиться к достижению абсолютного признания достоинства студента, его права на выбор. И если при этом каждая личность стремиться овладеть собственным, неповторимым, индивидуальным стилем, то это поднимает ее на более высокий уровень осуществления профессиональной деятельности, и можно делать вывод, что процесс подготовки специалиста в вузе осуществлен успешно.

Библиографический список

1. *Климов Е.А.* Индивидуальный стиль деятельности в зависимости от типологических свойств нервной системы. Казань, 1969.
2. *Платонов К.К.* Способности и характер //Теоретические проблемы психологии личности / Под ред. Е.В. Шороховой. М., 1974.
3. *Успенский В.Б., Чернявская А.П.* Введение в психолого-педагогическую деятельность. М., 2003.
4. *Щедровицкий Г., Розин В., Алексеев Н., Непомнящая Н.* Педагогика и логика. М., 1993.

О методологических проблемах преподавания элементов комбинаторики теории вероятностей студентам гуманитарных специальностей

С.Н. Бычков

Новыми образовательными стандартами элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей включены в обязательную программу средней школы. Теория вероятностей довольно существенно отличается от геометрии и других разделов школьной программы, поэтому сложные методологические проблемы, сопровождавшие эту научную дисциплину на всем пути ее исторического развития, становятся весьма актуальными для преподавания ее учащимся, не обладающим неординарными математическими способностями.

В том, что эти проблемы действительно нетривиальны, можно убедиться хотя бы на примере переписки между А.Д. Александровым и А.Н. Колмогоровым в связи с подготовкой основоположником современной теории вероятностей статьи [1] для сборника "Математика, ее содержание, методы и значение".

Хотя выдающийся специалист в области теории вероятностей А.Я. Хинчин и написал в своем отзыве на первый вариант статьи, что “написанная на очень высоком научном уровне, без всяких скидок на неподготовленность читателя, она в то же время доступна пониманию широкого круга лиц, интересующихся математикой” [2. С. 111], ответственный редактор книги А.Д. Александров, область научных интересов которого не была связана непосредственно с этой дисциплиной, пришел к другому мнению. Признавая, что статья “Вероятность” в БСЭ по простоте и, вместе с тем, глубине изложения не имеет себе равных, в отношении статьи для сборника написал прямо противоположное: “В настоящем ее виде Ваша статья трудна, и с ее появлением может даже создаться представление, будто основы теории вероятностей и нельзя понять “« простому смертному»” [Там же. С. 112].

Следует отдать должное ответственному редактору, который нашел возможность смягчить суровую оценку: “Для того чтобы Ваши глубокие и важные, а вместе с тем, простые идеи стали достоянием возможно более широкого круга читателей, я просил бы Вас перестроить Вашу статью с тем, чтобы, начав с указания на объективный характер статистических закономерностей, дав краткую характеристику субъективизма, сразу перейти к указанию на связь явления с условиями и развернуть Ваше понимание вероятности, чтобы оно не затерялось за детерминистической схемой или какими-либо выкладками. В соединении глубины с простотой изложения Ваша статья станет лучшим украшением нашей монографии” [Там же. С. 112].

В ответе на высказанные замечания Андрей Николаевич согласился пояснить на примерах понятия случайной величины, математического ожидания и дисперсии, а также более подробно изложить ряд других важных моментов, но вместе с тем высказал сомнения по поводу принципиальных методологических вопросов: “Менее ясен для меня вопрос о перестройке всей статьи и отказе от того, чтобы вводить вероятностные схемы путем противопоставления их детерминистическим. . .

Основная трудность при освещении философских вопросов теории вероятностей начинается с ясного изложения и диалектического объединения двух положений:

1. Существует объективная случайность.
2. Не существует ничего абсолютно случайного.

Я понимаю, что с точки зрения отстаивания права на существование теории вероятностей (а, как Вы знаете, эта тема не совсем беспредметна) наиболее существенно первое. Но мне представляется, что в сколь угодно популярной статье необходимо говорить об обеих сторонах дела" [Там же. С. 113].

Расхождение в оценках узловых вопросов двух крупных математиков – специалиста в области стохастических методов и неспециалиста – не случайно. "Интерпретационная схема, предложенная Колмогоровым в 1933 г., – пишет известный исследователь в области философско-методологических проблем теории вероятностей А.А. Григорян, – не разъясняла, почему приложение теоретико-мерной теории вероятностей к решению естественнонаучных проблем должно давать хорошие результаты, однако удивительным образом рецепт применения, предложенный Колмогоровым, никогда не подводил. Поэтому в течение нескольких десятилетий после создания аксиоматики основные усилия ее сторонников были сосредоточены на получении далеко идущих математических результатов, в то время как проблема обоснованности применений стояла на втором плане" [3. С. 395–396].

В работе [1] А.Н. Колмогоров впервые "вполне определенно ставит и пытается анализировать онтологические и гносеологические проблемы, связанные с определением понятий случайности и необходимости, со статусом вероятностных и статистических закономерностей в структуре реальности" [3. С. 397].

С такого рода проблемами сталкиваются и студенты тех гуманитарных специальностей, в профессиональной подготовке которых существенная роль отводится изучению статистических методов (речь идет о психологах, социологах и политологах). Еще более важны подобные проблемы для преподавателей математики. Без отчетливого понимания их сути едва ли можно надеяться добиться у учащихся *понимания* статистических утверждений, на что ориентируют педагогов принятые образовательные стандарты школьного образования. Наработанные в преподавании студентам естественно-научных и технических специальностей методики изучения статистических методов, основанные на непосредственном использовании языка современной теории вероятностей, вряд ли в состоянии помочь в решении этой задачи.

Констатация этого факта содержится в написанной более двадцати лет назад работе [4]. Анализ знаний повышавших свою квалификацию выпускников технических и экономических вузов показал, что, спустя определенное время после изучения курсов теории вероятностей и математической статистики, “имевшиеся (и то далеко не у всех) представления о способах постановки и проверки статистических гипотез не шли далее небольшого набора рецептурных схем без какой бы то ни было связи с условиями применимости тех или иных критериев” [4. С. 54]. Рекомендуя далее для преодоления указанных недостатков при формальном изложении теории вероятностей в технических вузах аксиоматику А.Н. Колмогорова, автор замечает, что “непосредственное использование этой аксиоматики в учебном процессе может…повлечь за собой определенные неудобства, особенно в тех случаях, когда речь идет о курсах прикладной направленности” [Там же. С. 59].

Именно такую направленность имеют курсы статистических методов для студентов вышеназванных гуманитарных специальностей. При этом следует иметь в виду, что даже сугубо формальное усвоение рецептов теории вероятностей студентами технических и экономических специальностей, ставящееся им в вину, едва ли достижимо их “более гуманитарными” коллегами, поскольку большинство из них еще со средней школы испытывает неприязнь к чисто алгебраическим выкладкам, не подкрепленным содержательными представлениями из их собственной предметной области. Абстрактно-дедуктивное изложение вероятностно-статистических методов не препятствует самым сильным в математическом отношении студентам-гуманитариям усваивать необходимые формальные рецепты, но даже они теряются при ответах на самые простые вопросы качественного характера.

Автор настоящей статьи на протяжении десяти лет читал курс “Математическое моделирование политических процессов” студентам-политологам РГГУ, взяв изначально за основу замечательное учебное пособие [5] для студентов естественных специальностей университетов и пединститутов. Выбранная В.Н. Тутубалиным последовательность изложения позволяет следующим образом построить вероятностную часть математического курса для политологов в соответствии с принципом нисхождения от общего к частному:

элементы комбинаторики → основные теоремы элементарной теории вероятностей → испытания Бернулли → числовые характеристики случайной величины → формула Муавра-Лапласа → предсказание исхода выборов на основе социологических опросов.

Перенос акцента с локальной на интегральную формулу Муавра-Лапласа позволяет при данном способе изложения избежать громоздких выкладок, связанных с формулой Стирлинга. Наиболее сложной в техническом отношении оказывается на этом пути формула дисперсии суммы для независимых случайных величин, однако и она усваивается наиболее подготовленными студентами. Вместе с тем, даже таких студентов после изложения соответствующего общего материала ставит в тупик вопрос: во сколько раз больше нужно опросить респондентов для повышения точности прогноза исхода выборов с 3% до 1%?

Возможно, преподаватель и рад был бы услышать естественный с точки зрения "здравого смысла" ответ: "В три раза", чтобы продемонстрировать оправданность предшествовавших длинных вычислений с дисперсией для обоснования правильного ответа, но надежда на это невелика. Ожидающие подвох в вопросе преподавателя студенты могут сказать: "В десять раз" или: "В сто раз", или даже: "Во много раз", но вероятность услышать числа "3", а тем более "9", немногим больше нуля.

Вывод напрашивается сам собой: логическая убедительность утверждений математической теории вероятностей не связана напрямую с пониманием причин удивительной эффективности ее методов в приложениях. Это обстоятельство отмечал и В.Н. Тутубалин, сравнивая естественнонаучное и формально-математическое определения испытаний Бернулли: "Старое определение не вполне ясно, но с его помощью можно узнавать, в каких конкретных ситуациях речь идет об испытаниях Бернулли. Испытаниями Бернулли будут, например, бросания монеты (герб – успех), стрельба в цель нескольких одинаково метких стрелков (попадание – успех), наблюдения за погодой, проводимые в данный день... каждого года (дождь – успех, нет дождя – неудача). Определению испытаний Бернулли не будут удовлетворять бросания по-разному искривленных монет (от бросания к бросанию меняется вероятность успеха), стрельба в цель при наличии корректировки (нет независимости результатов отдельных выстрелов и постоянства вероятности успеха), наблюдения за погодой в последовательные дни одного года (нет независимости)" [5. С. 35–36]. Хотя абстрактное определение "ясно и удобно для математических выводов, но, если строго им ограничиться, то оно совершенно не дает пути применения схемы Бернулли" [Там же. С. 36].

Следует отметить, что вопрос касательно зависимости между точностью опроса и количеством респондентов не является второстепенным для теории вероятностей. Говоря о пропорциональности точности действия вероятностных закономерностей корню квадратному из числа наблюдений – "законе квадратного корня из n", Колмогоров упоминает о его толковании (в связи с работами П.Л. Чебышева) даже как основном законе теории вероятностей [1. С. 266]. Это замечание А.Н. Колмогорова может быть использовано для такого построения курса "Математическое моделирование политических процессов", при котором изложение в целом будет подчинено выработке интуитивного понимания этого закона.

Главной методической трудностью на этом пути оказывается использование понятия дисперсии случайной величины. Если вводить его обычным способом, т.е. посредством абстрактного определения, то прежние проблемы формального "понимания" (или, что то же самое, – непонимания), останутся. Если бы эта числовая характеристика естественным образом возникала при анализе проблемы точности опроса, то это существенно бы упростило понимание учащимися процесса моделирования.

К счастью, подобная возможность существует. Идея для ее реализации содержится в гл. 6 книги [6]. Для геометрической интерпретации испытаний Бернулли в виде случайного блуждания на прямой полезна замена значения 0 числа благоприятных исходов в каждом отдельном испытании на -1. На языке политологии это означает, что вместо подсчета абсолютного числа голосов за кандидата вычисляется перевес одного из кандидатов по отношению к другому[1]. Для упрощения выкладок, далее, достаточно рассмотреть случай $p = q = 1/2$ (интуитивно очевидно, что закон корня квадратного из n не зависит от величины параметра p).

Среднюю величину модуля суммы результатов отдельных испытаний[1]

$$|X_1 + X_2 + X_3 + X_4| \tag{1}$$

оценить сложно (не ясно, как даже к этому подступиться с помощью стандартных средств школьной алгебры), поэтому естественно вместо величины (1) попытаться оценить среднее значение ее квадрата:

$$\begin{gathered}(X_1 + X_2 + X_3 + X_4)^2 = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 + \\ +2X_1X_2 + 2X_1X_3 + 2X_1X_4 + 2X_2X_3 + 2X_2X_4 + 2X_3X_4.\end{gathered} \tag{2}$$

Каждое из первых четырех слагаемых равно 1 (уже здесь проявляется преимущество замены стандартного бернуллиевского слагаемого симметричными значениями). Следующие шесть слагаемых распределены по тому же самому закону, что и X_1 (и здесь налицо преимущество с вычислительной точки зрения по сравнению с несимметричными значениями 0 и 1). Поэтому среднее значение случайной величины (2) равно, как легко видеть, 4.

Само собой разумеется, что для произвольного числа n проголосовавших квадрат величины перевеса первого над вторым для равных по популярности кандидатов равен n (необходимость извлечения квадратного корня из этой величины, дающего оценку перевеса одного кандидата над другим, вытекает из “соображений

[1] Для второго тура голосования это совершенно естественно.

[1] Студенты-гуманитарии не любят использования символов суммирования для произвольного числа слагаемых, поэтому достаточно рассмотреть случай $n = 4$.

размерности”). При этом важно, что здесь не предполагается доказательство общей теоремы о среднем значении двух независимых случайных величин.

Погрешность оценки популярности кандидата на основе опроса общественного мнения может быть далее найдена по классическому образцу [7. С. 112-113].

Конечно, приведенного анализа формально не достаточно для проверки статистических гипотез о корректности проведения выборов с точки зрения их согласованности с результатами предварительных опросов общественного мнения. Но последующий путь с использованием нормального приближения биномиального распределения связан с трудностями сугубо аналитического характера, не имеющими отношения к стохастической природе “основного закона теории вероятности”. Это будет лишь количественным уточнением хорошо усвоенного качественного результата. Полученный же элементарными “вероятностно-алгебраическими” средствами “закон квадратного корня из n” для погрешности популярности кандидата будет тем ключевым примером из специфической предметной области, на базе которого естественно формулируются (и в некоторых случаях доказываются) универсальные утверждения теории вероятности, уже не связанные с политологией.

Ход изложения будет, таким образом, уже не нисхождением от общего к частному, а, наоборот, *восхождением* от частного к общему. Общие законы теории вероятности получают тем самым *предметный* характер. Но в таком случае и вводный раздел, содержащий основные правила комбинаторики, необходимо излагать подобным же предметным образом[1].

Правило умножения комбинаторики лучше с этой точки зрения излагать без использования понятия декартова произведения множеств, взяв, например, следующий его вариант: “Если предметы первого типа можно выбрать m способами, а после каждого такого выбора предметы второго типа[2] можно выбрать одним и

[1] Демократические процедуры в Древней Греции, как известно, проводились при помощи псефосов.

[2] Различение предметов по типу носит чисто формальный характер. В частности, наборы предметы двух типов могут полностью совпадать между собой,

тем же числом k способов, то последовательный выбор предметов двух типов можно осуществить mk способами".

Для доказательства рисуется таблица из m строк и k столбцов, в клетки которой выкладываются поочередно пары предметов в фиксированном порядке[1]. После заполнения всех mk клеток мы имеем в наличии все возможные упорядоченные пары предметов двух типов.

Аналогичным образом излагаются правило сложения комбинаторики, формулы числа размещений предметов (с повторениями и без повторений), перестановок и сочетаний. Этого достаточно для "предметного" же изложения формул элементарной теории вероятности и схемы Бернулли.

В результате все изложение статистического моделирования процедуры предсказания исходов будущих выборов становится максимально наглядным и органичным образом согласуется с процедурами формирования репрезентативных выборок.

Библиографический список

1. *Колмогоров А.Н.* Теория вероятностей // Математика, ее содержание, методы и значение. М., 1956. Т. 2. С. 252–284.
2. Колмогоров. Юбилейное издание в 3-х кн. Кн. 1. Истина – благо. Биобиблиография / Ред.-составитель А.Н. Ширяев. М., 2003.
3. *Григорян А.А.* Алгоритмическая теория вероятностей: здравый смысл и проблема обоснования применимости теоретико-мерной теории к реальным случайным событиям // Математика и опыт / Под ред. А.Г. Барабашева. М., 2003. С. 395–415.
4. *Матюшкин-Герке А.А.* О содержании и методике преподавания теории вероятностей и математической статистики (для технических специальностей) // Методологические проблемы

хотя могут и полностью отличаться друг от друга.

[1] Для этого полезно предположить возможность брать "копии" предметов второго типа в случае, когда наборы из k предметов при различных выбранных первых предметах имеют повторяющиеся элементы.

преподавания математики. Сборник научных трудов. М., 1987. С. 53–62.

5. *Тутубалин В.Н.* Теория вероятностей. М., 1972.
6. *Колмогоров А.Н., Журбенко И.Г., Прохоров А.В.* Введение в теорию вероятностей. М., 1982.
7. *Гнеденко Б.В., Хинчин А.Я.* Элементарное введение в теорию вероятностей. М., 1970. Изд. 7, доп.

О новом федеральном учебно-методическом комплекте по стереометрии для 10–11 классов с углубленным и профильным изучением математики

Е.В. Потоскуев

Особенностью развития системы школьного математического образования в Российской Федерации является и, по всей вероятности, будет являться в ближайшем будущем ориентация на профильную дифференциацию обучения математике.

В 2003–2005 г. вышел в свет новый учебно-методический комплект, состоящий из учебников [1; 3], задачников [2; 4] и методических пособий [5; 6] по геометрии для классов с углубленным и профильным изучением математики. Этим учебникам и задачникам решением Федерального экспертного совета МО РФ присвоен гриф “Рекомендовано”, они включены в федеральный список учебников для классов с углубленным и профильным изучением математики.

Кроме того, издательство “Дрофа” планирует издание подготовленных этими же авторами дидактических материалов.

Содержание основных частей учебников и задачников соответствует программе курса стереометрии для классов с углубленным изучением математики; помимо текста, содержащего программный теоретический материал, в учебниках имеется ряд дополнений и приложений, а в задачниках предлагаются задачи к дополнительным разделам.

При написании учебников выдержан принцип преемственности – изложение материала согласуется (как в содержательном, так в методическом отношениях) с изложением материала в имеющихся учебниках геометрии для 7–9 классов.

Изучение программного материала рассчитано на 3 часа в неделю. Примерное почасовое планирование для каждого класса приведено в конце каждого учебника.

Остановимся кратко на каждой из частей комплекта.

Учебно-методический комплект-10, состоящий из учебника, задачника и методического пособия, предназначен для обучения геометрии (стереометрии) учащихся 10 класса школ и классов с углубленным и профильным изучением математики. Этот комплект может быть использован также для обучения геометрии учащихся и в общеобразовательных классах (с сильным составом учащихся).

"Вхождение" в курс стереометрии в учебнике для 10 класса начинается с обзора различных многогранников. На интуитивном (наглядном) уровне учащиеся знакомятся с кубом, параллелепипедом, призмой, пирамидами, в частности, с тетраэдрами. Вводятся основные элементы этих многогранников, при этом изучаются вопросы об изображении многогранников. (В конце учебника имеется дополнительный материал "Изображение фигур в параллельной проекции".)

В школьном курсе геометрии часто приходится жертвовать логической строгостью, прибегая к наглядности. При изучении стереометрии авторы учебника придерживаются концепции изучать в задачах начальные и основополагающие темы стереометрии, используя при этом модели и изображения куба, правильного тетраэдра, призмы, пирамиды, параллелепипеда. Такие задачи обладают конструктивностью и содержательностью, а рассуждения учащихся при их решении становятся доступными и естественными, что, в свою очередь, приводит к сознательному и эффективному формированию конструктивных пространственных представлений учеников.

Большое внимание в учебнике и задачнике уделено вопросам построения сечений многогранников. Строить сечения многогранников учащиеся могут уже при изучении первой главы. В нашем задачнике приведены многочисленные блоки рисунков для построений сечений куба. О построениях более сложных сечений многогранников речь идет в дополнении “Методы построения сечений многогранников” (в конце задачника).

В нашем учебнике нет строгого аксиоматического построения стереометрии. На основании нескольких аксиом и следствий из них последовательно доказываются теоремы стереометрии. При этом школьникам можно и нужно сказать, что приведенная в учебнике система аксиом не является полной, и мы изучаем школьный предмет “Геометрия”, а не институтский курс “Основания геометрии”.

Программа изучения стереометрии в 10-м классе достаточно насыщена. Кроме пяти тем, в которых изучаются основополагающие вопросы о взаимном расположении точек, прямых и плоскостей в пространстве, о вычислении расстояний между ними, а также о нахождении углов между прямыми и плоскостями, в учебнике рассмотрены еще две темы: “Векторный метод в пространстве” и “Координатный метод в пространстве”.

Эти темы, в отличие от пяти выше названных, могут изучаться на различных уровнях углубления. Каждый учитель сам выберет подходящий его классу уровень их изучения. Они могут быть изучены обзорно, с решением небольшого набора задач и, напротив, могут быть изучены достаточно подробно с решением многих задач, часть из которых соответствует уровню вступительных экзаменов в вузы и некоторым задачам вузовского курса аналитической геометрии.

Отличием изучения геометрии в классах с углубленным изучением математики является не только углубление и расширение теоретического материала, но и методически верная подборка решаемых задач, как в количественном, так и в качественном отношении.

В этой связи задачи в задачнике подобраны по принципу: от простого – к сложному. Прежде всего, ученику необходимо решить все опорные задачи курса. Этими задачами ни в коем случае не следует пренебрегать, какими бы простыми они ни казались. Только после решения всех опорных задач следует переходить к решению более сложных задач. В задачнике многие задачи содержат большое количество “подзадач”, связанных друг с другом и “организованных” в таблицы.

В задачнике предлагаются три “графические работы”. Эти работы соответствуют темам: “Следствия из аксиом стереометрии”, “Параллельность в пространстве”, “Перпендикулярность в пространстве”. Приведенные в этих работах задачи, с одной стороны, достаточно просты, но, с другой стороны, они очень важны. Ученик, разобравшийся в этих задачах и безошибочно выполнивший для каждой из них рисунок, достигает необходимого уровня геометрической культуры, который позволит ему справиться в дальнейшем с решением стереометрических задач повышенной сложности.

В разделе “Дополнения” нашего задачника содержатся также “Материалы для повторения и углубления планиметрии”. В них собран обширный теоретический и задачный материал по планиметрии. Решение учеником данных в этом разделе около 200 задач вполне достаточно, чтобы поднять его “планиметрическую культуру”.

В методическом пособии к учебнику “Геометрия. 10 кл.” авторами комплекта предлагаются некоторые методические рекомендации тем учителям, которые используют или будут использовать данный комплект учебников и задачников при изучении стереометрии.

Любая задача может быть решена не единственным методом, и решения задач, приведенные в методическом пособии, не претендуют на то, чтобы быть единственно возможными. Кроме того, следует особо отметить, что эти решения ни в коем случае нельзя принимать за образцы оформления решений той или иной задачи ввиду, например, отсутствия в них полных аргументированных обоснований некоторых утверждений, что обусловлено невозможностью подробного разбора огромного количества задач в небольшой по объему книге.

В методическом пособии для 10 класса предложены десять контрольных работ. Каждая контрольная работа предваряется списком подготовительных задач. Используя эти контрольные работы, учитель сам решит, полностью ли они соответствуют тому уровню знаний, который он собирается “задать” при работе с данным классом. При этом возможны как разгрузка контрольных работ посредством изменения текстов задач, введения необязательных заданий, так и усложнение текстов.

Учителя, которые сочтут нужным проводить зачеты по темам курса, или итоговый экзамен по курсу стереометрии, в данном методическом пособии найдут материалы, как для проведения зачетов, так и для проведения экзаменов. Каждый из 20 билетов экзамена содержат 2 устных вопроса по стереометрии и 2 задачи, при этом одна задача – по планиметрии.

В методическом пособии имеется также пример итогового теста.

Составляя задачный материал, авторы не ставили себе целью включение трудных, олимпиадных задач. В методическом пособии рассказывается о том, как стоит решать те или иные помещенные в нашем задачнике упражнения, сделать наиболее оптимальные чертежи к ним. Это, разумеется, не означает, что способ решения задачи, предложенный в пособии, является единственным или наилучшим. Как известно, в большинстве случаев такой способ трудно определить.

Учебно-методический комплект-11 состоит также из учебника, задачника и методического пособия - книги для учителя.

Тема “Геометрические преобразования пространства” занимает важное место в изучении стереометрии в 11 классе. Материал этой темы изложен в первой главе нашего учебника и может изучаться на различных уровнях сложности. Каждый учитель может сам выбрать подходящий его классу уровень изучения этой темы.

Изложение теоретического материала этой главы (как и других глав) авторы советуют вести лекционным методом, излагая материал крупными тематическими блоками.

В нашем учебнике концептуально каждое преобразование пространства (кроме преобразования подобия) изучается “конструктивно-алгоритмически”: сначала “конструктивно строится” отображение пространства на себя, затем доказывается, что построенное отображение является преобразованием пространства, после чего вводится соответствующее название и определение, символическое обозначение этого преобразования и изучаются его свойства.

Корректному и последовательному изучению свойств многогранников посвящена глава 2 учебника 11 класса. Изложение теории этой главы авторы советуют вести также лекционным методом, крупными тематическими блоками.

Многогранник определяется как геометрическое тело, граница (поверхность) которого есть объединение конечного числа многоугольников. при этом сообщается, что в школе изучаются лишь выпуклые многогранники. Теорема Декарта-Эйлера о том, что для любого выпуклого многогранника, имеющего В вершин, Р ребер и Г граней, выполняется равенство В–Р+Г=2, принимается без доказательства. Изложение лекционного материала о введении понятия многогранника завершается рассмотрением вопроса о развертках многогранников.

На более позднем уровне, после изучения различных призм, параллелепипедов, пирамид в нашем задачнике предлагается для решения достаточное количество задач на изготовление разверток многогранников с последующим склеиванием из них этих многогранников. Кроме того, после изучения фигур вращения, в задачах требуется изготовить развертку многогранника, при условии, что в него можно вписать шар или около него можно описать шар. Наиболее интересные задачи (всего 55 задач) о развертках многогранников ждут учащихся в конце нашего задачника “Геометрия. 11 класс”, в дополнении “Может быть или не может быть?”.

При изучении пирамид в учебнике рассматриваются некоторые частные их виды (в методическом пособии даны полезные рекомендации по вопросам изучения свойств таких пирамид). Особого внимания заслуживает изучение материала о правильных пирамидах, в частности, о правильном тетраэдре.

В учебнике доказывается теорема о существовании пяти видов правильных многогранников, при этом изучаются некоторые их свойства.

Строгое обоснование вывода формул для вычисления объемов тел в стереометрии весьма сложно. Однако этот вопрос может быть решен, если принять без доказательства принцип Кавальери: “Если при пересечении двух тел плоскостями, параллельными одной и той же плоскости, в сечениях этих тел любой из плоскостей получаются равновеликие между собой фигуры, то объемы этих тел равны".

В нашем учебнике мы выводим формулы объемов тел, основываясь на еще более сильном утверждении: "Если при пересечении двух тел плоскостями, параллельными одной и той же плоскости, в сечениях этих тел любой из плоскостей получаются фигуры, площади которых относятся как $m : n$, то объемы данных тел относятся как $m : n$".

Используя этот принцип, в учебнике выводятся формулы для вычисления объемов призмы, пирамиды, цилиндра, конуса, шара и его частей.

Фигурам вращения посвящена глава 3 учебника.

При изучении свойств цилиндра и конуса обращается внимание на правильность изображения этих фигур, а также на изображения правильных многогранников, вписанных в цилиндр и конус. При этом учащиеся классов с углубленным и профильным изучением математики узнают, что сечением конической поверхности плоскостью может быть либо окружность, либо эллипс, либо парабола, либо гипербола, либо пара пересекающихся прямых. (Подробнее о конических сечениях можно прочитать в конце нашего учебника "Геометрия. 11 класс" в дополнении "О поверхностях второго порядка".)

При изучении теоретического материала и решении задач выясняется, что, решая задачу, в которой дан правильный многогранник, вписанный в конус, не всегда нужно изображать конус и многогранник, а достаточно изобразить сечение этих фигур плоскостью, проходящей через ось конуса. Причем, плоскость осевого сечения конуса бывает удобно провести через диагональ основания многогранника. В таком случае решение данной стереометрической задачи сводится к решению задачи планиметрической.

Материалом о сфере и шаре, о вписанных в них и описанных около них многогранниках, цилиндрах и конусах практически завершается изучение школьного курса элементарной геометрии в 11 классе.

В методическом пособии к учебнику "Геометрия. 11 кл." даются методические рекомендации по организации учебного процесса при изучении программного геометрического материала 11 класса, приводятся решения многих задач задачника. В этом пособии предложены восемь контрольных работ. Каждая контрольная работа предваряется списком подготовительных задач и состоит из двух вариантов. При этом возможна, как разгрузка, так и усложнение контрольных работ.

Библиографический список

1. *Потоскуев Е.В., Звавич Л.И.* Геометрия. 10 кл.: Учебник для общеобразовательных учреждений с углубленным и профильным изучением математики. М.: Дрофа, 2003.
2. *Потоскуев Е.В., Звавич Л.И.* Геометрия. 10 кл.: Задачник для общеобразовательных учреждений с углубленным и профильным изучением математики. М.: Дрофа, 2003.
3. *Потоскуев Е.В., Звавич Л.И.* Геометрия. 11 кл.: Учебник для общеобразовательных учреждений с углубленным и профильным изучением математики. М.: Дрофа, 2003.
4. *Потоскуев Е.В., Звавич Л.И.* Геометрия. 11 кл.: Задачник для общеобразовательных учреждений с углубленным и профильным изучением математики. М.: Дрофа, 2003.
5. *Потоскуев Е.В., Звавич Л.И., Шляпочник Л.Я.* Геометрия. 10 кл.: Методическое пособие к учебнику Е.В. Потоскуева, Л.И. Звавича “Геометрия. 10 класс”. М.: Дрофа, 2004.
6. *Потоскуев Е.В., Звавич Л.И.* Геометрия. 11 кл.: Методическое пособие к учебнику Е.В. Потоскуева, Л.И. Звавича “Геометрия. 11 класс”. М.: Дрофа, 2005 (готовится к изданию).

Проблема размещения новых понятий и объектов в школьном курсе математики

Н.Х. Розов

Цель настоящей статьи – пригласить специалистов и всех заинтересованных лиц подумать над вопросом: нужна ли модернизация программы школьного курса математики и концепции ее реализации, а если нужна – то какая. Вопрос очень непростой. Здесь не следует проявлять спешки и принимать волевые единоличные решения – мы это уже проходили и знаем, чем это кончается. Но вообще уйти от обсуждения, от выработки единых взглядов на то, какой должна быть школьная математика середины 21 века, все равно не удастся.

Чтобы избежать недоразумений и недопониманий, сразу же отметим, что речь пойдет о курсе математики в общеобразовательной школе, а также в специализированных школах не физико-математического профиля.

За минувший век в математике произошли грандиозные изменения, она (впрочем, как и все другие науки) шагнула необыкновенно далеко вперед. Математические методы стали более общими и разнообразными, математические модели природных явлений, технических процессов, общественных ситуаций стали полноценнее, точнее и надежнее отображать существо дела. Математика все увереннее превращается в мощный инструментарий анализа, исследования и прогнозирования, повышается ее прикладное значение. Сочетание с гигантскими возможностями компьютеров позволило оформиться принципиально новому направлению научного познания – математическому моделированию и математическому эксперименту.

В математической науке содержательно изменилось почти все. Почти ничего содержательно не изменилось в программе школьного курса математики. Сравните программы 1940 и 2000 годов: исключены комплексные числа, бином Ньютона и еще несколько небольших тем, включены начальные понятия математического анализа, операции с векторами и кое-что другое. В целом же сохранилась старая ситуация: математика оставляет учащихся почти в XVIII веке по алгебре и началам анализа и почти в древней Греции по геометрии! По другим предметам они информацию получают (пусть часто описательно и фрагментарно) на современном научном уровне. Так что – сохраним такую ситуацию до 2050 года?

Представляется, что в школьной математике назрели перемены – и в содержании программы, и в методике преподавания, и в формах занятий.

1. Содержание программы. Содержание школьной программы по математике – самый болезненный и неоднозначный вопрос. С одной стороны, оставлять знания школьников на уровне XVIII века явно невозможно. С другой стороны, явно неразумно пытаться внедрить изучение в школе абстрактной алгебры, теории функций комплексного переменного, функционального анализа. Но нельзя упускать из вида, что, помимо специфических (чисто математических) понятий, математика создала и целый ряд важных общеобразовательных понятий и методов, имеющих общекультурное значение.

Сегодня в разряд общеобразовательных уверенно можно отнести такие понятия, как бифуркация, фрактал, хаос... С этими понятиями работают и физики, и социологи, и биологи, и философы. И школьный курс математики обязан знакомить молодежь с этими понятиями, хотя бы в описательно-наглядном плане.

Сегодня приобретает особое значение умение быстро провести вычисления – для хотя бы приближенной оценки интересующей нас величины. Значит, выпускник школы должен владеть простейшими вычислительными алгоритмами.

Сегодня школьный курс математики должен быть прагматичен, учить людей правильно ориентироваться в жизни, помогать им решать практические вопросы, обеспечивать свою безопасность в самом широком смысле.

2. Бифуркация. Одно из важнейших современных понятий – бифуркация процесса в ходе изменения параметра. Этим понятием оперируют сейчас все – естествоиспытатели, инженеры, специалисты гуманитарных наук. Должна ли школа ответить на такой вызов времени? Несомненно!

И наиболее уместно понятие бифуркации анализировать в школьном курсе математики. Ибо здесь даже ничего особо нового вводить или добавлять не потребуется! Хорошо и давно известные примеры бифуркаций в изобилии можно найти и в алгебре, и в геометрии – просто до сих пор на этом не акцентировалось внимание. Наблюдайте за изменением формы сечения куба плоскостью, перпендикулярной его диагонали, при продвижении плоскости от одной вершины куба до другой – вот простейший бифуркационный процесс. Изменение числа корней квадратного уравнения

$$3x^2 - 5x + 2c = 0$$

при "пробегании" параметром c всех действительных значений – другой бифуркационный процесс.

Надо только пожелать при изложении материала сделать нужные методологические акценты, привлечь и практические примеры. На наших глазах разрастается эпидемия пособий по "теории уравнений и неравенств с параметрами", задачи в них становятся все более громоздкими и изощренными (подчас только ответ занимает полстраницы). Но, удивительно, никто из многочисленных "творцов" этой теории не удосужился хотя бы вскользь рассказать о рядом лежащем общеобразовательном понятии.

3. Фрактал. Это – удивительное понятие математики, оказавшееся средством адекватного отображения природных явлений (роста кристаллов, прохождения пузырьков воздуха через нефть, образования трещин и других) и описания объектов (включая и человеческий организм).

Но познакомить учащихся с фракталами стоит еще и для того, чтобы продемонстрировать им непредсказуемые особенности диалектики развития науки. А понимание процесса научного познания мира – одна из важных характеристик образованного и культурного человека. Фактически понятие фрактала было введено и изучено в конце 10-х годов прошлого века, но работы основоположников никого не заинтересовали – идея пришла слишком рано и не имела должного инструментального и прикладного основания. И лишь более полувека спустя усилиями Б. Мандельброта и благодаря уже имевшейся высокопроизводительной компьютерной технике исследования фракталов приобрели большой размах.

В методической литературе много любят рассуждать об эстетическом воздействии математики на школьников, о ее значении при воспитании у них понятия прекрасного. Обычно говорят о стройности доказательства какой-то теоремы, об изящности решения задачи, о красоте неожиданного дополнительного построения. Однако все это доступно и ощутимо, скорее, только ученику, действительно увлеченному математикой. А какое эстетическое наслаждение может получать от решения бесконечного числа квадратных уравнений тот, кто к ней "глух"? В качестве примера эстетического воздействия обычно приводят и картины М. Эшера, но ведь эти безусловно талантливые работы скорее можно назвать лишь вариациями на математические темы, иллюстрациями к отдельным математическим фактам, глубокое понимание которых часто до конца недоступно учащимся.

Фракталы же непосредственно, компьютерной реализацией формул, порождают действительно красочные, оригинальные полотна, не уступающие произведениям абстрактной живописи (см. [1]).

4. Хаос. Сейчас "проблема хаоса" привлекает особое внимание ученых, интерес физиков и философов, экономистов и медиков, биологов и обществоведов (и даже теоретиков образования) прикован к новой области науки – синергетике (см., например, [2]).

Один из основополагающих сценариев перехода к хаосу был открыт в 1978 г. М. Фейгенбаумом буквально "на коленке", путем численного эксперимента на карманном(!) калькуляторе – анализа поведения последовательности $\{x_n\}$, порождаемой отображением

$$x_n \longrightarrow x_{n+1} = \lambda x_n(1 - x_n).$$

Ознакомление с этой и другими простейшими математическими моделями рождения хаоса, входящего составной частью в современное представление о "нелинейном мире", будет иметь исключительно важное методологическое значение для формированию научных мировоззренческих представлений у молодежи, не только обогатит сам курс математики и сделает его современным, но и продемонстрирует ее роль как универсального языка исследований природы и общества.

5. Вычислительная тематика. Преподаватели старшего поколения помнят, а молодежь может увидеть в книге [3] алгоритм извлечения квадратного корня из числа. Это был сложный момент былой школьной программы – формулировка правила занимала фактически целую страницу. Потом появились микрокалькуляторы, которые считали квадратные корни за долю секунды, и правило из учебников исчезло. Однако кто из учеников обычных (не профильных) школ понимает, как именно выполняет эту операцию калькулятор персонального компьютера? И что делать, если при вычислениях, связанных с объемами тел, надо посчитать кубический корень из числа?

Хорошо было бы оценить с точки зрения влияния на развитие общего интеллектуального потенциала и воспитание практических жизненных умений (но не с позиций отработки формальных математических навыков) сравнительную важность знания учащимися, с одной стороны, метода определения взаимного расположения корней двух квадратных уравнений, зависящих от параметра, и, с другой стороны, метода последовательных приближений решения уравнения любой степени.

Вообще вычислительная тематика – падчерица программы школьной математики. Распространено мнение, что такая тематика – прерогатива курса информатики. Но это более чем нелогично! Например, школьный предмет "Информатика" объявил "своим" понятие алгоритма, которое на самом деле является фундаментальным математическим понятием и изучалось математиками задолго до появления самого слова "информатика". Кстати, это понятие всегда подспудно присутствровало в школьном курсе математики, по неясным причинам избегавшим, однако, самого термина.

В свое время курс математики гордился прикладными расчетами на логарифмической линейке. И сейчас элементарные и доступные вычислительные математические методы позволили бы ярко демонстрировать прикладное значение математики во многих важных мировоззренческих и содержательных практических проблемах.

6. Лабораторные работы по математике. Сейчас педагоги и психологи все более настойчиво рекомендуют усиливать в учебном процессе творческое начало, внедрять исследовательские проекты, стимулировать самостоятельный познавательный поиск. Конечно, широко практикуемое сейчас решение нестандартных (олимпиадных) задач – это форма самостоятельного познавательного поиска. Но лишь одна из возможных. И к тому же почти всегда, к сожалению, с “предписанным результатом”.

А почему мы никогда не задумывались о месте и содержании возможных в школьной математике лабораторных работ? Чтобы ученик изучал некоторое явление или объект, причем не только “головой”, но и “руками”, подмечал некие закономерности реального мира и пытался дать их адекватное математическое описание. Богатейший материал для увлекательных лабораторных работ и самостоятельных исследований может дать вычислительная тематика – например, феномен Фейгенбаума и численное рассмотрение различных итерационных процессов, имеющих вполне реальную естественно-научную интерпретацию.

Вопрос о лабораторных работах по математике имеет и иной, очень глубокий и важный аспект. Если обстоятельно посмотреть на школьный курс, то нетрудно убедиться, что практически весь он направлен на воспитание умения считать и производить преобразования. В начальной школе в центре внимания – автоматизм в использовании таблицы умножения. Затем идут арифметические вычисления – “чистые” или в “текстовых” задачах (где до сих пор борются содержательный и формалистический подходы). Затем наступает расцвет алгебраических и тригонометрических “тождественных преобразований”, включая решение уравнений и неравенств (и, выражаясь старым, но точным языком, “геометрические задачи с применением тригонометрии”).

Между тем, человеческое бытие требует еще одного важного навыка – геометрического, или пространственного воображения. К сожалению, подавляющее большинство выпускников, прошедших горнила школьного курса математики, худо-бедно владеют правилами формальных преобразований, но не имеют зачастую даже элементарного геометрического воображения. Это серьезный упрек математике в школе. Геометрическое воображение, как и навыки счета, логику, язык, необходимо воспитывать, развивать постоянно, планомерно и непрерывно, с первого до последнего класса.

Главным условием развития геометрического воображения является работа с реальным материалом. Освоение объектов материального мира и действий в материальном мире с постепенным переносом этих объектов и этих действий в мир воображения – вот, видимо, единственно возможный путь формирования пространственного мышления. И наиболее удачно реализовать его можно именно на математических лабораторных работах, материалом для которых служили бы как классические объекты, так и другие, в традиционную программу не входящие, но, тем не менее, весьма полезные. Одним из таких объектов являются, например, узлы, работа с которыми, помимо воспитания пространственного воображения и развития творческих навыков, позволяет выйти на такие понятия, как пространственная кривая, левая и правая ориентации, принципы классификации и т.д., и имеет немаловажное житейское применение.

Кстати, большое значение лабораторным работам по математике в свое время придавал А.Н. Колмогоров, и в физико-математической школе-интернате при МГУ накоплен большой опыт их проведения. Жаль, что он не получил широкого распространения.

7. Прагматичность. Неприятно говорить, но катастрофы типа МММ или Властилины, затронувшие судьбы тысяч наших людей, на совести не только власти, "кинувшей" своих граждан на произвол судьбы, но и школьного курса алгебры. Он не рассматривал такие "мелочи", как финансовые пирамиды, и не готовил выпускников к коллизиям жизни, ориентируясь лишь на "высокие материи" типа цепочек логарифмических и тригонометрических преобразований. Наше "лучшее в мире естественно-научное образование" показало свою полную несостоятельность при столкновении с творчески думающими мошенниками, магами, гадалками и проч.

Есть и другой аспект этого вопроса. Математика могла бы быть более эффективным средством познания окружающего нас мира и решения насущных практических проблем, если бы школьный курс геометрии не ограничивал себя одними скучными окружностями и однообразными кубами, а давал информацию о всем многообразии геометрических форм мира, конкретно показывал и знакомил с изобилием фигур и тел.

8. Теория вероятности. Впрочем, будем объективны – процесс перестройки программы школьного курса математики пошел. Наконец-то туда включено знакомство с основными понятиями теории вероятностей и математической статистики, появились уже первые учебники. Спор об этом происходил у нас еще почти век назад, во многих странах мира вопрос был решен уже давно. Теперь и наши выпускники школ не будут делать изумленные глаза, услышав по TV слова "доверительный интервал".

9. Методика преподавания. Серьезной концептуальной перестройки требует важнейшая для школы наука, исследующая и устанавливающая принципы и методы преподавания математики. Многие важные изменения в программе школьной математики невозможно осуществить, если не согласиться с тем, что отдельные ее вопросы или даже темы допустимо изучать на описательно-демонстрационном уровне, опуская формальные доказательства, добиваясь от учеников понимания сути дела без усвоения и воспроизведения ими (и даже без сообщения им!) "строгих логических обоснований".

Это предложение психологически особенно трудно принять профессионалам, убежденным, что советская и российская методология преподавания математики в школе всегда во главу угла ставила требование строгой научности и логической доказательности (чем и обосновывалось утверждение о нашем "лучшем в мире математическом образовании"). Это, однако, не совсем так. Во-первых, многие моменты школьного курса в принципе невозможно изложить школьникам абсолютно строго – приходится прибегать к 'убедительным эрзацам". Во-вторых, достаточно внимательно просмотреть классические учебники А.П. Киселева [3–5] (скажем, те места, где должен работать метод математической индукции), чтобы заметить "описательно-демонстрационное" изложение целого ряда вопросов. В-третьих, наконец, наше образование по физике или химии нисколько не страдало от того, что преподавание этих предметов не содержало всех исчерпывающих логических доказательств.

Главное возражение против "описательно-демонстрационного" изложения основано на широко распространенном (особенно среди математиков) мнении, что математика, только математика и одна лишь математика может воспитать в человеке культуру логического мышления, что исключительно в ходе “строгого” преподавания математики обеспечивается развитие умения правильно рассуждать.

Конечно, нельзя отрицать, что в определенном смысле изучение математики “ум в порядок приводит” (М. Ломоносов), но и не следует преувеличивать, считая, что это – единственный эффективный путь к цели. Логике можно учиться иными путями, не связываясь с непривлекательными для “нематематиков” формальными преобразованиями и скучными рассуждениями. Позвольте в качестве эксперта привлечь выдающегося физика-теоретика, лауреата Нобелевской премии Л. Ландау: “Мне не хочется дискутировать с достойной средневековой схоластики мыслью, что путем изучения ненужных вещей люди будто бы научаться логически мыслить”. И в самом деле, действительно ли поглощенная изучением языков девочка, декламируя зазубренное как стихи доказательство теоремы о трех перпендикулярах, осваивает логику?

10. “Математика вступительных экзаменов”. Нельзя сказать, что в школьной математике не происходит никаких перемен. Но некоторые перемены исключительно опасны, и если мы в ближайшее время не найдем здравые пути модернизации школьной программы – можем попасть в тупик.

С прискорбием надо констатировать, что в последние 10–20 лет, помимо “классических” элементарной математики и высшей математики, сформировалась еще одна “область” математики – “математика вступительных экзаменов” (МВЭ). Экзаменаторы вузов и предприимчивые репетиторы уже создали целую “науку”, содержащую теоретическое рассмотрение специальных экзаменационных задач и не имеющую никакой образовательной ценности. Ладно бы еще речь шла о дополнительных знаниях, которые необходимы для освоения вузовской программы. Но МВЭ изобилует темами, вопросами, сведениями, задачами, которые никому потом не потребуются (даже на мехмате МГУ!) – после поступления все это можно (и нужно!) спокойно забыть.

В качестве примера возьмем одну лишь тему школьного курса – абсолютная величина (модуль) действительного числа. Модуль числа – далеко не одно из концептуальных изобретений математической науки, скорее это просто удобное, но техническое понятие. В самом школьном курсе оно имеет весьма узкую сферу приложения – разве что дает возможность компактно записывать некоторые операции с участием квадратных корней и логарифмов, удобно сформулировать определение непрерывной функции и "неравенство треугольника".

Нет, я не предлагаю исключить это понятие из школьной программы. Но я не вижу никаких объективных причин для того, чтобы создавать и предлагать школьникам и учителям фундаментальные наукообразные сочинения о модуле и задачах, для решения которых требуется не знание стандартного школьного курса, а специальная дополнительная дрессировка.

Сколько страниц текста нужно написать, чтобы объяснить школьнику, что такое модуль и как с ним работать? Вот "Пособие для абитуриентов и старшеклассников" под названием "Решение задач с модулями" – авторы ухитрились разогнать его до... 304 страниц! Как и полагается научному трактату, книга состоит из двух глав: "Уравнения с модулями" и "Нера- венства с модулями". В науке самое главное – систематичность. Поэтому первая глава содержит параграфы "Уравнения с одним модулем", "Уравнения с двумя модулями", "Уравнения с тремя модулями", "Уравнения с четырьмя и большим число модулей". Интересно, сможете ли вы самостоятельно догадаться, как называются параграфы второй главы?

Энтузиазм творцов МВЭ по обогащению теории модуля на этом не угас, поиск продолжается. И вот уже на вступительных экзаменах появляется задача, в решении которой в другом, более новом пособии для абитуриентов читаем:

"Последнее неравенство следует из того, что для любых чисел a и b

$$\max\{|a+b|, |a-b|\} = |a| + |b|."$$

Решение другой задачи в статье для поступающих начинается словами:

"Для уравнения $|y| + |z| = a$ применим схему

$$|y|+|z|=a \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} yz \geqslant 0; \\ |y+z|=a; \end{cases} \\ \begin{cases} yz \leqslant 0; \\ |y-z|=a; \end{cases} \end{array}\right. \qquad (a \geqslant 0).\text{”}$$

Не знаю, как вам, а меня особенно подкупает обращенный к школьнику простенький и элегантный оборот речи “применим схему”... Конечно, всем ведь отлично она, схема эта, известна – ну, как таблица умножения. Интересно было бы поставить следственный эксперимент и узнать: смог ли бы сочинитель задачи, сам в свое время заведомо не знавший этой “схемы”, до нее додуматься в обстановке вступительного экзамена?

Эти шедевры можно продолжать долго:

“Воспользуемся известной(!) формулой $\sin 5\alpha = ...$”,

“Далее заметим... $\sin 18^\circ = ...$ – известная(!) величина”...

Отдельного внимания заслуживают “новые” темы, открытые и разработанные в рамках МВЭ, – скажем, “Уравнения и неравенства с параметрами” (этой теме посвящено огромное число пособий и брошюр, а сама она уже оформилась в “стройную” теорию с множеством “методов”).

Постоянное усложнение задач вступительных экзаменов по математике привело к расцвету репетиторства. Конечно, в дополнительных занятиях с учеником, плохо усваивающим материал или пропустившим уроки по болезни, нет абсолютно ничего дурного (в советские времена это называлось “взять отстающего на буксир”). Но как быть, если для решения задач вступительных экзаменов недостаточно знать (даже хорошо!) то, что проходили на уроках и что написано в школьном учебнике? В крупных городах как-то само собой стало разуметься, что для поступления в вуз надо выплачивать кругленькие суммы репетиторам – “специалистам” по МВЭ. Те в свою очередь, преследуя очевидные цели и пользуясь очевидными связями, продолжают раскручивать маховик усложнения экзаменационных задач и успешно развивать МВЭ. А что же делать школьникам из деревень, небольших городков, тем, кто проживает вдали от научно-педагогических центров, там, где сегодня и квалифицированный учитель – редкость?

Именно репетиторы и близкие им лица будет активно противодействовать изменению существующей школьной программы по математике. Кстати, сейчас математики упорно просят увеличить часы на свой предмет в школе. Есть основания считать, что это делается не для "осовременивания" программы, а для более подробного изучения "важнейших" тем МВЭ – теории эквивалентности уравнений и неравенств и других вопросов, не имеющих особого значения.

Я думаю, что появление идеи "Единого государственного экзамена" было не случайной блажью, а объективным порождением обстановки репетиторского беспредела. "Кризис математической подготовки" школьников особенно ярко проявляется во все более иезуитских задачах, предлагаемых иногда на приемных экзаменах в вузы, и его надо было преодолевать. Но "хотели, как лучше, а получилось, как всегда" – мы перешли "из огня, да в полымя". Вместо толковых и содержательных задач, действительно проверяющих знание и понимание математики, нам теперь предлагают тесты типа "При каком значении аргумента изображенная на рисунке функция принимает наименьшее значение?", для ответа на который не нужно ничего понимать в математике – достаточно быть просто зрячим.

11. Новый тип учителя. Изменения в содержании программы школьного курса математики требуют радикального пересмотра программы и системы подготовки школьных учителей математики, причем эта подготовка должна вестись с существенным опережением по времени, начиная еще со студенческой скамьи. Одновременно и также с опережением необходимо начать работу над школьными учебниками, задачниками, пособиями, описаниями лабораторных работ и т.д.

Но самая серьезная трудность – переобучение действующих учителей, их профессиональная и психологическая переориентация на новые проблемы. А для этого нужно создать соответствующие условия, прежде всего экономические, ибо учитель с 25-часовой недельной нагрузкой физически просто не в состоянии осваивать принципиально новые идей. К сожалению, понимание этого недоступно "власть придержащим".

Серьезные усилия для этого должны предпринять и наши специалисты по методике преподавания математики. Многим из них пора отказаться от "теоретизирования", часто на каком-то "птичьем языке". Что полезного и поучительного может почерпнуть рядовой учитель из сочинения, полного таких, например, пассажей: "Методологической основой системного моделирования содержания математического образования выбран диалектический синтез целого, обеспечивающий структурную связность содержательных единиц не только в рамках данного этапа подготовки, но и предопределяющей взаимоувязывание структурных срезов при движении по этапам"?

Библиографический список

1. *Пайтген Х.О., Рихтер П.Х.* Красота фракталов. Образцы комплексных динамических систем. М.: Мир, 1993.
2. *Трубецков Д.И.* Введение в синергетику. Хаос и структуры. М.: Едиториал УРСС, 2004.
3. *Киселев А.П.* Алгебра. М.: Физматлит, 2005.
4. *Киселев А.П.* Арифметика. М.: Физматлит, 2002.
5. *Киселев А.П.* Геометрия. М.: Физматлит, 2004.

Принцип субъектной значимости методической подготовки учителя

И.Е. Малова

Величайшее добро, какое ты можешь
сделать для другого, – это не просто
поделиться с ним своими богатствами,
но и открыть для него
его собственные богатства.
Бенджамин Дизраэли

Центральную часть в профессиональной подготовке учителя занимает его методическая подготовка, позволяющая (или не позволяющая, если она слабая) успешно осуществлять *методическую деятельность* – деятельность по организации педагогического процесса в связи с освоением учащимися соответствующего учебного предмета. С процессом методической подготовки учителя в условиях педагогического вуза, институтов повышения квалификации, практической работы учителя мы связываем принцип субъектной значимости. Основополагающими задачами при этом считаем: 1) внедрение необходимых (способствующих достижению современных целей образования) изменений в методическую деятельность обучающегося (студента, учителя), 2) его профессиональный и личностный рост в процессе такого обучения или самообучения.

Одна из причин того, что происходят сбои в процессе внедрения необходимых изменений в практику работы школы, заключается в том, что при внедрении таких изменений в практику обучающегося не были учтены их методические ошибки и затруднения.

Ликвидацию обозначенной причины обеспечивает реализация **принципа субъектной значимости**, который требует, чтобы *любое проявление субъектности обучающегося в процессе методической подготовки (его успехи, затруднения, неудачи) рассматривалось как значимое не только для самого обучающегося, но и для совершенствования методики и практики обучения учащихся.*

Допустим, что какой-то учитель (преподаватель) добился некоторого методического успеха. Например, учитель разработал урок, отвечающий современным требованиям: учащиеся активно привлекаются к самостоятельному построению новых знаний на основе имеющегося у них опыта; их деятельность на протяжении всего урока мотивирована; учитель выстраивает грамотный диалог, включает учащихся в подведение личных итогов, отражающих обогащение их субъектного опыта. Такой урок приносит профессиональное удовлетворение его автору, вызывает у него желание в разработке новых, таких же успешных уроков и т.д. Этот же урок значим и для совершенствования методики и практики обучения учащихся, поскольку в силу того, что любое творчество уникально, в разработанном учителем уроке обязательно будет что-то объективно новое (методический прием; удачный вопрос; подборка заданий; интересное дидактическое средство и др.).

Допустим, что какой-то учитель (преподаватель) испытал методическое затруднение в некоторой учебной ситуации (например, столкнулся с тем, что какой-то ученик (студент) никак не может научиться решать задачи) и не знал, каковы причины подобной ситуации, каким может быть методический выход из нее. Если будет найден путь преодоления этого затруднения, то он, безусловно, будет значим не только для обратившегося за методической помощью, но и для других учителей (преподавателей), поскольку подобная ситуация может повториться и у них. Учитель (преподаватель) также заинтересован в исправлении своих методических ошибок, а другие – в их предотвращении. И получается, что не будь методических затруднений, не были бы разработаны пути их преодоления; не будь методических ошибок – не было бы и путей их предотвращения.

Очень важно собирать методическое богатство (связанное как с методическими успехами, так и с затруднениями и ошибками). Поэтому ***критерием реализации принципа субъектной значимости*** служит *наличие печатных материалов, отражающих объективно новые решения методических проблем.*

Приведем примеры реализации принципа субъектной значимости.

Пример 1. Анализ методической деятельности учителей в различных регионах России показал, что большинство из них испытывает большие затруднения в ведении учебного диалога. При этом все учителя, с которыми довелось работать в рамках проблемных семинаров, не были авторитарными учителями, склонными к монологическому обучению. Однако, вопросы, которые они задавали на своих уроках, носили, в основном, контролирующий или подсказывающий характер, что не способствует выдвижению учащихся на ведущие позиции в обучении, не предоставляет им возможность найти причины своих затруднений и пути их преодоления, самостоятельно предложить решение той или иной проблемы, овладеть способами руководства своей интеллектуальной деятельностью. Анализ возникавших на уроках ситуаций (анализировался каждый вопрос учителя и соответствующая ему реакция учащихся) послужил основой для разработки путей совершенствования учебного диалога. Эти пути мы назвали правилами ведения учебного диалога. На сегодняшний день нами сформулировано семь правил учебного диалога: мотивации; установления связей, включая обращение к опыту учащихся; полилога; общих подходов; направленности; этапности; инициативности [3. С. 98–102] или [4. С. 27, часть правил] и [5. С. 48, остальные правила]. Мы не исключаем того, что в будущем встретится такая ситуация, связанная с ведением диалога, что потребуется разрабатывать новое правило.

Наше понимание диалога и техники его ведения полностью совпало с теми методологическими положениями, которые отражены в диалогической педагогике бразильского педагога Пауло Фрейре: 1) завоевание человеком своей позиции в мире связано с ответственным отношением к слову; 2) именно такое отношение и есть результат сложного образовательного процесса, понимаемого как диалог; 3) в диалоге важно не только устанавливать равноправные (горизонтальные) отношения, но и достигать плодотворности диалога, когда “каждый человек проявляется в качестве субъекта собственной истории в открытой, непосредственной и прямой форме” [1. С. 126].

Пример 2. Известно, что для студентов важным периодом обучения является их педагогическая практика. Их успехи, затруднения и методические ошибки нами рассматривались как значимые не только для самих обучающихся, но и для совершенствования методики и практики обучения учащихся. В результате были разработаны методические правила, которых желательно придерживаться при конструировании, проведении и анализе урока. Лучшие примеры проведенных уроков были включены в учебные пособия по теории и методике обучения математике для вузов и институтов повышения квалификации работников образования.

Пример 3. С января 2001 года при Брянском институте повышения квалификации работает трехгодичная Школа совершенствования методического мастерства учителя математики. После двух лет обучения слушатели школы представили свои достижения на областных педагогических чтениях “Реализация базовых методик математики в системе личностно ориентированного обучения”. Ими обозначен ряд направлений углубленной методической подготовки учителя и приведены примеры реализации в конкретных педагогических процессах. Так, в связи с методикой формирования математических понятий представлены следующие направления: конструирование различных вариантов введения одного и того же определения как дедуктивным, так и индуктивным методами; формирование понятий, которым в учебниках нет определений; анализ предложенных в школьных учебниках вариантов введения определений с позиций их мотивированности для учащихся и др. [7. Раздел II].

В связи с методикой формирования математических умений представлены следующие направления: обучение учащихся составлению схем выполнения математических заданий; формирование алгебраических умений в 7 классе, при которых учащиеся осознают логику алгебраического курса, видят необходимость обоснования алгебраических действий, успешно анализируют структуры алгебраических выражений; формирование геометрических умений с помощью составления обобщенных схем (схем-карт); конструирование приемов организации деятельности учащихся с шаговыми заданиями; работа учителя по предупреждению математических ошибок учащихся; сравнительный анализ традиционного и личностно ориентированного варианта первого урока по формированию математических умений и др. [7. Раздел III].

В связи с методикой изучения теорем представлены следующие направления: обсуждение с учащимися вопроса “Зачем учить доказательства теорем?”; мотивация деятельности учащихся при изучении теорем; преодоление проблем учащихся в применении теорем; конструирование и использование приемов запоминания доказательства теорем; конструирование и использование приемов опроса доказательства теорем; усиление роли доказательств теорем-признаков в закреплении определений; выделение этапов доказательства теорем и др. [7. Раздел IV].

В связи с методикой обучения учащихся решению текстовых задач представлены следующие направления: сравнительный анализ традиционного и личностно ориентированного обучения учащихся решению текстовых задач; конструирование и использование приемов организации деятельности учащихся при решении текстовых задач; усиление роли рефлексии учителя и учащихся в связи с решением текстовых задач; формирование открытой познавательной позиции учителя через работу методических объединений по проблеме обучения учащихся решению текстовых задач; выявление и ликвидация типичных методических ошибок учителя при работе с текстовой задачей и др. [7. Раздел V].

В связи с методикой обучения учащихся решению планиметрических задач представлены следующие направления: составление справочника по методике обучения учащихся решению планиметрических задач; изучение методики обучения решению задач на построение; обучение учащихся 8 класса решению задач на построение; конструирование путей обогащения опыта учащихся по решению планиметрических задач; обучение учащихся анализу условия и поиску способа решения планиметрической задачи и др. [7. Раздел VI].

Многие методические находки, созданные за годы работы Школы, отражены в методических дидактических материалах, которые получает каждый слушатель Школы. Познакомиться с некоторыми из них можно на сайте www.fio.ru в разделе "Школа учителя математики".

Реализовать принцип субъектной значимости при работе с учителями помогает разработанный нами ***метод коллективного субъектного опыта***, который имеет следующие этапы:

1. Актуализация субъектного опыта учителей: важно помочь задуматься над теми вопросами, которые они раньше себе даже не ставили.

2. Изучение теории вопроса и ее технологических решений.

3. Применение теории к разработке или анализу конкретных фрагментов урока под руководством преподавателя.

4. Самостоятельная групповая работа по разработке или анализу конкретных фрагментов урока.

5. Коррекция и обогащение группового опыта.

6. Самостоятельная работа по разработке и анализу конкретных фрагментов урока с последующей проверкой преподавателем в индивидуальном порядке.

7. Коррекция и обогащение индивидуального опыта каждого.

8. Оформление коллективного субъектного опыта в виде печатных материалов.

Мы привели примеры того, как проявления субъектности обучающегося (учителя) в процессе методической подготовки (его успехи, затруднения, неудачи) рассматривались нами как значимые не только для самого обучающегося, но и для совершенствования методики и практики обучения учащихся.

Не менее значимым является проявление субъектности самого обучающего (преподавателя вуза, института повышения квалификации) – его профессиональные и научные успехи, затруднения, неудачи, его поиски творческих решений методических и научных проблем и др. Такую реализацию принципа субъектной значимости мы назвали ***анализом пути собственных достижений*** (что способствовало успехам, почему "открытие" состоялось; что помогало, что мешало при этом и пр.). При анализе методической деятельности учителя мы всегда придерживались двух правил: 1) поскольку каждый учитель уникален, мы старались находить в его опыте то, чего не было в нашем собственном опыте, 2) поскольку любой учитель в процессе своего профессионального роста испытывает методические затруднения (иначе бы не было роста), мы стремились оказывать ему методическую помощь, тем самым "подрастали" вместе с ним.

Такой анализ удобно связывать с ситуацией, в которой проявились успехи, затруднения, неудачи, или которая послужила "толчком" к обнаружению нового решения. И тогда факторы, способствовавшие получению научных результатов, позволят сформулировать условия, которые желательно создать, чтобы, возможно, появились профессиональные и научные достижения у других обучающих. Причины, которые мешали в той или иной ситуации или приводили к методическим ошибкам, позволят найти способы их предотвращения.

Если же анализируется большой промежуток профессиональной или научной деятельности, то удобно выделять ее этапы, фиксировать профессиональные или научные цели, которые ставились, используемые методы, полученные результаты, обнаруженные негативные явления, факторы или условия, которые способствовали разработке путей преодоления таких явлений. Продемонстрируем сказанное.

На первом этапе нашего исследования, посвященном методической подготовке учителя (1980–1990 гг.), ставилось две *цели*: 1) разработать базовые методики обучения учащихся математике, чтобы обеспечить успешность методической деятельности учителя; 2) найти примеры математических тем, в которых учителя испытывают значительные методические или предметные затруднения, чтобы затем оказать им действенную методическую помощь.

Для достижения этих целей использовались *методы*: анализ психолого-педагогической и методической литературы с целью учета имеющегося научного опыта для разработки базовых методик; опрос учителей – слушателей курсов повышения квалификации – с целью выяснения их методических запросов; посещение уроков учителей с целью определения методических затруднений учителя; обсуждение методических проблем учителя в методическом объединении учителей школы. В *результате* на основе психолого-педагогических требований к формированию понятий, умений с учетом методических затруднений учителей были разработаны базовые методики обучения учащихся, составившие стержень методических знаний учителя; подбор конкретных примеров с учетом запросов учителей, позволил студенту (учителю), решая методические задачи, повысить уровень своих предметных знаний, поскольку, учась обучать учащихся, следуя закономерностям обучения, можно обучить самого себя. Показательными в этом плане были их изменения в успешности решения математических задач.

По завершении курсов, на которых обсуждались базовые методики, учителям предлагалось выделить те темы занятий из программы повышения квалификации, которые они считают для себя наиболее значимыми. Из 288 учителей 252 учителя (87,5%) выделили темы, связанные с базовыми методиками обучения математике, что подтверждает правильность выбранного нами направления оказания учителю методической помощи. По результатам исследования было издано пособие (1993 г.), в котором раскрыты базовые методики обучения математике и показаны примеры их применения. На этом этапе исследования также были выделены темы школьного курса математики, в которых учителя испытывают методические затруднения. Эти темы в дальнейшем были включены в учебные пособия по теории и методике обучения учащихся математике.

Вместе с тем, были выявлены методические ошибки, допускаемые учителями, при самостоятельной реализации базовых методик на конкретных уроках. Мы предположили, что причина методических ошибок заключалась в том, что учителя успешность обучения учащихся не ставили в прямую зависимость от реализации предложенных им методических рекомендаций, поэтому не считали такие рекомендации обязательными к исполнению.

Поэтому на втором этапе (1990–1997 гг.) мы включили в содержание методической подготовки учителя изучение школьных учебников, направленных на интеллектуальное воспитание учащихся (руководители авторского коллектива Э.Г. Гельфман и М.А. Холодная). Важно было проверить, может ли знакомство учителей с учебниками нового поколения помочь им увидеть важность ориентации на учащихся при выборе своих методических действий; повысить уровень их методической подготовки.

Наблюдение за деятельностью учителей во время изучения личностно ориентированных учебников, обсуждение с учителями проблем обучения учащихся с использованием таких учебников в рамках работы проблемных групп в различных регионах России, анализ методических ошибок учителей, использующих учебники на практике, показал необходимость внесения коренных изменений в методическую подготовку учителя.

Анализировались также уроки учителей, прошедших курсовую подготовку. Оказалось, что учителя практически не применяли на своих уроках изученные на занятиях базовые методики обучения учащихся, если не совпадали темы учебного предмета, что было отмечено комиссией по аттестации педагогических кадров (было посещено 123 урока).

Так был сделан вывод о том, что от курсовых занятий учителя ждут готовых методических разработок, а не базы, на которой можно строить свою методическую деятельность, поэтому изменения в методической подготовке учителя должны помочь учителям осознавать значимость своей методической деятельности для учащихся. Таким образом, *в теории методической подготовки учителя обозначилось новое направление,* изменяющее цель методической подготовки с освоения учителем конкретного учебного предмета и методики его изложения на соотнесение учителем своих методических действий с их влиянием на учащегося. Так мы практически вышли на необходимость овладения учителем технологией осуществления личностно ориентированного обучения учащихся.

На третьем этапе (1997–2000 гг.) ставилась *цель*: разработать и проверить на практике учебно-методические материалы для студентов (учителей), которые помогли бы им связывать свои методические действия с учебными проблемами учащихся; позволяли бы им самостоятельно совершенствовать свою методическую деятельность.

Разработанные учебно-методические пособия помогают формировать у студентов (учителей) не только методическую компетентность, но и открытую познавательную позицию, которая позволяет "подстраиваться" под учебные проблемы любого учащегося и отражает потребность человека в самосовершенствовании своей деятельности.

Метод коллективного субъектного опыта при создании учебно-методических пособий обеспечил их качество, а при его внедрении в учебный процесс в вузе (институте повышения квалификации учителей) – показал их значимость и эффективность.

Вместе с тем обнаружилось, что процесс методического совершенствования требовал как организационных решений (существовавшая тогда система курсовой подготовки не позволяла регулярно и систематически оказывать учителю методическую помощь), так и теоретического исследования (так мы вышли на проблему непрерывности методической подготовки учителей к осуществлению личностно ориентированного обучения учащихся).

Поэтому в 2001 году была создана Школа совершенствования методического мастерства учителя математики. Учителя – слушатели Школы – включились в разработку технологических основ осуществления личностно ориентированного обучения учащихся математике (ЛОО). На сегодняшний день: выделен отличительный *признак*, по которому можно разделить все системы обучения на виды (позиция, которую занимает учащийся в процессе обучения); сформулировано *определение* личностно ориентированного обучения (обучения, при котором учащиеся являются субъектами обучения и собственного развития, и учитываются их индивидуальные особенности); выделено *ключевое понятие* ЛОО (субъектный опыт учащихся); определены главная *цель* ЛОО (обогащение субъектного опыта учащихся средствами учебного предмета; развитие учащихся – это результат достижения этой цели) и основные образовательные *источники* при ЛОО (содержание учебного предмета и процесс его освоения); сформулирована *основная задача учителя* при ЛОО (организация деятельности учащихся над содержанием учебного предмета с целью обогащения их субъектного опыта); обозначен *результат*, который может быть получен при ЛОО (личность, которая умеет "познавать, делать, жить, жить вместе").

Теория непрерывной методической подготовки содержит, кроме принципа субъектной значимости, принципы: инвариантности, гуманизации, фундаментальности, персонализации методической поддержки, личностно ориентированной организации занятий [2]. Мы уверены, что если бы перечисленные принципы были учтены в тот период, когда проводилась реформа 1966 года, названная В.М. Монаховым самой радикальной и фундаментальной, потому что "именно она вывела наше учительство на качественно иной уровень методической культуры, которой мы до сих пор гордимся" [6. С. 7]), то реформа А.Н. Колмогорова реализовала бы все предусмотренные в ней возможности существенного совершенствования математического образования в нашей стране.

В завершении представим одно из направлений новых теоретических исследований, которые могли бы существенно улучшить теорию и практику обучения в школе, вузе, институте повышения квалификации работников образования. Темы таких исследований могли бы иметь такие структуры: “Реализация принципа субъектной значимости в методической подготовке... (указывается категория обучающего: учитель или преподаватель, а также учебный предмет)” или “Реализация принципа субъектной значимости в методической подготовке... (указывается категория обучающего: учитель или преподаватель) по теме... (указывается название темы соответствующего учебного предмета)”. Например, “Реализация принципа субъектной значимости в методической подготовке вузовского преподавателя геометрии” или “Реализация принципа субъектной значимости в методической подготовке учителя по теме “Алгебраические дроби”.

Целью таких исследований может быть поиск путей реализации принципа субъектной значимости в методической подготовке учителя или преподавателя соответствующего учебного предмета.

Задачи исследования:

1. На основе анализа практики обучения этому учебному предмету выявить ситуации методических затруднений (ошибок) обучающих.

2. На основе анализа содержания учебного предмета определить характер выявленных ситуаций (единичный, тематический, межтематический, общепредметный) и направления методической помощи обучающим.

3. На основе анализа современных достижений в науке и практике определить пути оказания обучающему действенной методической помощи; эта помощь должна адекватно соответствовать запросам: обучающихся и их родителей, обучающих и управленцев, сегодняшним и будущим запросам общества.

4. Создать ориентирующие тексты по преодолению методических затруднений и разработать пути учета, формирования и обогащения субъектного опыта обучающих.

5. Разработать примеры-образцы реализации путей учета, формирования и обогащения субъектного опыта обучающих (представить конспекты конкретных занятий с учителями или преподавателями).

6. Проверить эффективность предложенных методик в практике обучения и провести, в случае необходимости, коррекцию. По-

скольку проявление субъектности значимо не только для самого участника эксперимента, но и для совершенствования методики и практики обучения учащихся, то разработанные методики должны помогать каждому участнику эксперимента разработать пути оказания действенной методической помощи другим учителям (преподавателям).

7. Оформить результаты методических достижений обучающихся (студентов, учителей) в виде статей, материалов для методических пособий, методических дидактических материалов и пр.

Библиографический список

1. *Бухарева Л.* Диалогическая педагогика Пауло Фрейре // Высшее образование в России. 2001. № 3. С. 122.
2. *Малова И.Е.* Теоретические аспекты непрерывной методической подготовки учителя // Образование и общество. 2004. № 5.
3. *Малова И.Е.* Непрерывная методическая подготовка учителя математики к осуществлению личностно ориентированного обучения учащихся: Монография. Брянск: Издательство Брянского государственного университета, 2003. 225 с.
4. *Малова И.Е.* Пути совершенствования методической подготовки учителя в послевузовский период // Дидактика математики: сегодня и завтра. Томск: Изд-во Томского государственного педагогического университета, 2000. С. 26.
5. *Малова И.Е.* Совершенствование диалогов на уроках математики // Дидактика математики: сегодня и завтра: Материалы школы-семинара "Мастерство учителя в психологически ориентированных моделях обучения". Томск: Изд-во Томского государственного педагогического университета, 2001. С. 48.
6. Основы научного образования в современной школе // Педагогика. 2004. № 10. С. 3.
7. Реализация базовых методик математики в системе личностно ориентированного обучения: По материалам областных педагогических чтений по итогам работы школы совершенствования

методического мастерства учителя математики / Сост. и ред. И.Е. Малова. Брянск: Изд-во БИПКРО, 2004. 172 с.

Особенности подготовки учителя математики для работы в профильных классах

Н.Д. Кучугурова

Согласно "Концепции модернизации российского образования на период до 2010 года" предусматривается профильное обучение на старшей ступени общеобразовательной школы. Основная идея такого обновления состоит в том, что образование здесь должно стать более индивидуализированным, ориентированным на реальные потребности рынка труда, поэтому необходим учитель "широкого профиля", который сможет обеспечить не только достижение учащимися определенного учебного результата, но и обогатить их жизненный опыт положительными качествами активной ответственной личности, способной к осмыслению жизни, к ее преобразованию, обладающую положительным отношением к труду, стратегией личной жизни и приверженную гуманистическим ценностям. Сформировать указанные качества обучающихся может только учитель, который сам обладает этими качествами.

Система профильного обучения по математике, по нашему мнению, должна включать в себя базовые курсы (чтобы не было одностороннего развития способностей и интересов); профильный курс (математика, физика, информатика); элективные курсы, способствующие расширению знаний внутри профилирующего предмета, спецкурсы, спецпрактикумы и модули для углубления знаний по отдельным разделам (по выбору учащихся). Все эти курсы должны быть направлены на осуществление специальной подготовки учащихся в соответствии с их интересами, определяющими будущую профессию. Только в этом случае профильное обучение будет средством дифференциации и индивидуализации процесса обучения, позволяющим наиболее полно учитывать интересы учащихся и развивать их способности, т.е. личностно-ориентированным, обеспечивающим продвижение каждого ученика по индивидуальной траектории развития.

Создание профильных школ и классов с углубленным изучением отдельных предметов требует нового уровня подготовки педагогических кадров, знающих и владеющих современными методами обучения и воспитания учащихся по избранному профилю. Учитель профильной школы обязан не просто быть специалистом высокого уровня, соответствующем профилю и специализации своей деятельности, но должен уметь проектировать индивидуальные образовательные траектории развития учащихся, владеть проектно-исследовательскими и коммуникативными методами, уметь сориентировать старшеклассников с учетом их способностей для получения специальности в соответствующей сфере профильного образования, т.е. обеспечить преемственность между общим и профессиональным образованием, подготовить учащихся профильных классов к продолжению образования в высшей школе.

И только учитель нового типа, глубоко и профессионально знающий соответствующую область науки, имеющий личный интерес к ее определенным разделам, способный обогатить опыт учащихся, связанный с освоением новых знаний, организацией процесса обучения и самообучения, с рефлексией своей учебной деятельности сможет качественно решить эту задачу.

Такой учитель умеет не только решать, но и ставить новые задачи, он способен принести в школу творческое направление и помочь школьникам освоить научно-исследовательские методы хотя бы на первоначальном уровне решения творческих задач.

Достаточно подробная характеристика учителя нового типа ориентирует преподавателей вузов на внесение инновационных элементов в процесс подготовки специалиста, т.е. создание условий превращения научно-методических знаний в личностно-значимые для будущего учителя.

Для достижения этой цели мы предлагаем уже с ранних курсов при изучении математических дисциплин, а затем и методических, вносить по возможности элементы рефлексивной деятельности, основной формой осуществления которой служат карты само-развития студентов, описание и особенности использования которых были даны ранее [2]. Это позволит активно решать проблемные и творческие задачи, осуществлять эвристическое обучение и будет способствовать развитию креативных способностей будущих специалистов, в частности, таких как умение самостоятельно увидеть и сформулировать проблему; способность выдвинуть гипотезу, найти или изобрести способ ее проверки; собрать данные, проанализировать их, предложить методику их обработки; способность сформулировать выводы и увидеть возможности практического применения полученных результатов; видение проблемы в целом, все аспекты и этапы ее решения, а при коллективной работе свою роль в решении рассматриваемой проблемы.

В процессе изучения методических дисциплин мы работаем в сотрудничестве со студентами, приобщаем к совместной деятельности по разработке спецкурсов для профильных школ, приобщаем к научным идеям во время работы над совместными статьями и квалификационными проектами студентов, помогаем освоить систему не готового бесспорного знания, а стать активными соучастниками педагогического процесса. Такой диалог-взаимообучение на основе рефлексии является очень эффективным в ситуации инновационной деятельности, где формируется и новый тип общения, формируется способность к созданию новой позиции личности в отношении к образованию, к педагогической науке, к себе. Это помогает гуманизировать отношения, освоить многообразные типы познания, принципы и способы мышления с разнообразных точек зрения, в том числе с позиций синергетики. Именно в возможностях преодоления стереотипности мышления посредством сотворчества инновационное обучение дает опору становлению нового образа учителя профильной школы.

Высокую эффективность дает разработанная нами в курсе методики преподавания математики технология интенсивного обучения, предусматривающая нелинейное структурирование процесса обучения, которое позволяет студентам выходить на индивидуальные траектории обучения и развития, что обеспечивает каждому студенту оптимальное протекание процесса обучения с разумным и экономным использованием его психических и физиологических возможностей, с наиболее целесообразным отбором содержания подготовки и одновременно форм организации, приемов и методов самостоятельной работы. Использование новых технологий обеспечивает наиболее благоприятные условия для достижения целей обучения и формирования нового типа учителя профильной школы.

Положительный эффект новых технологий сказывается уже в период прохождения педагогической практики, когда студенты стараются применить испытанные на себе технологии в учебном процессе школы, пытаясь вывести на индивидуальную траекторию развития хотя бы нескольких учеников. И здесь методист старается скорректировать действия студентов по отношению к учащимся с учетом их психологических особенностей и имеющейся базы математических знаний. При этом студенты испытывают значительные затруднения, которые мы разрешаем в процессе работы педагогических мастерских, необходимость которых особенно ощущается в период педагогической практики. План работы мастерских также корректируется по мере возникновения трудностей у студентов, недостаточной компетентности их в отдельных вопросах. Обсуждение различных проблем значительно активизируется, варьируются формы проведения заседаний, происходит активный обмен опытом работы, в том числе с приглашением учителей школ, педагогов и психологов, т.е. появляется востребованность психолого-педагогических знаний, причем эта активность идет со стороны студентов.

На данном этапе среди всего многообразия используемых форм организации учебной деятельности студентов особое предпочтение отдается игровым формам, в частности методу “деловой игры”. Эта форма, основанная на игровом моделировании профессиональной деятельности, дает возможность максимально приблизить обучение к реальным условиям, “отрепетировать” отдельные сложные элементы учебного процесса, обеспечивает широкую самостоятельность участников, создает базу для развития их инициативы и творчества.

В дальнейшем процессе обучения использование отдельных игровых элементов осуществляется поэтапно от более простых форм к более сложным формам. Например, дается задание провести фрагмент учебного занятия в форме “деловой игры”: первоначально по разработанному плану, а затем с заданным приемом (формой) организации деятельности учащихся, в дальнейшем с указанием типа класса (углубленного изучения предмета, классе естественно-математического профиля, гуманитарного профиля, выравнивания и др.). Используемый здесь набор ситуационных задач и имитационных упражнений охватывает практически все элементы профессиональной деятельности учителя математики по проектированию и проведению учебных занятий и завершается серией деловых игр “учебное занятие с определенной дидактической целью”. Обязательным элементом таких игр является “обсуждение открытого занятия коллегами”, которое проводится после “урока”. Этот элемент развивает рефлексивные умения, умения обосновывать и отстаивать свои педагогические позиции, развивает критичность и способность к адекватной самооценке своей деятельности.

Студентам также предлагается разработать систему заданий для отслеживания результатов учебной деятельности учащихся по отдельном элементу учебного процесса (теме, понятию, разделу, умению и т.д.). Оценить сформированность знаний (умений) учащегося по выполненной им контрольной работе (задаче). Обосновать предпочтительную для себя систему оценивания результатов учебной деятельности учащихся при обучении математике, основываясь на известных технологиях обучения математике или на опыте конкретного учителя.

Совершенствование педагогических умений осуществляется в процессе выполнения студентами разнообразных видов деятельности (учебных заданий): наблюдение за деятельностью учителя и учащихся в ходе разнообразных учебных занятий по математике, конспектирование наблюдаемых учебных занятий, их научно-методический и педагогический анализ; планирование, подготовка и проведение фрагментов учебных занятий и, впоследствии, отдельных учебных занятий и внеклассных мероприятий по математике; сбор материалов и написание творческих отчетов по заданным темам и др.

Индивидуальная программа деятельности студента в педагогической мастерской составляется с учетом желаний студента, корректируется и направляется методистом. Педагогические практики старших курсов развивают приобретенные знания и умения студентов, их профессиональные качества, решая уже более сложные задачи, например, изучение отдельных проблем современной школы и практики преподавания математики; развитие умений анализа учебных занятий коллег и овладение умением осуществлять самоанализ проведенных учебных занятий, на основе этого корректировать свою дальнейшую деятельность и др.

На последнем этапе обучения студентам предлагается изучить и описать опыт работы своего учителя-мастера, и по возможности включить его в свою квалификационную работу по методике преподавания математики. В случае затруднения студенты получают консультацию методиста. Недостающую информацию они находят в научно-методической литературе и в результате общения с руководителями педагогических мастерских.

Таким образом, переход от информационного обучения к сотрудничеству с использованием инновационных технологий позволит сформировать учителя нового типа, который будет эффективно работать в профильных классах и школах.

Библиографический список

1. *Кучугурова Н.Д.* Формирование основ профессионализма учителя математики: интегративный подход. Монография. Ставрополь: Типография ФРВИ РВ, 2001. Ч. 1. 228 с.
2. *Кучугурова Н.Д.* Формирование основ профессионализма учителя математики: интегративный подход. Монография. Ставрополь: Типография ФРВИ РВ, 2001. Ч. 2. 132 с.

Формирование исследовательских умений будущего учителя в процессе изучения истории математики

Н.Д. Кучугурова

Образование в высшем учебном заведении предполагает не только получение фундаментальных научных знаний студентами, но и личностную ориентацию процесса обучения. Наиболее полно этим требованиям удовлетворяет научно-исследовательская работа, поскольку она способствует профессиональному росту, творческому саморазвитию личности.

Современный преподаватель должен отличаться общей культурой, иметь глубокие психолого-педагогические знания, высокий уровень профессиональной подготовки в своей предметной области, являться творческой развивающейся личностью. Целью образовательного процесса в настоящее время становится не усвоение готовых знаний, а усвоение определенного *способа мышления*, обеспечивающего получение и производство новых знаний.

Естественно высшая школа не может полностью охватить все задачи воспитания творца-исследователя, но она может решать ряд локальных задач этого направления, в частности, методики формирования исследовательских умений у школьников. В настоящее время владение элементарными исследовательскими умениями математического характера необходимо каждому человеку для обеспечения подготовки к творческому труду в широкой сфере деятельности, т.к. математические методы исследования проникли во все области науки, техники и производства и неизмеримо возросла потребность в подготовке людей, не только обладающих некоторой системой математических знаний, но и умеющих их применять, причем в неизвестной заранее ситуации.

Для формирования творческой личности будущего учителя курс истории математики имеет большой потенциал. Основой творчества являются исследовательские умения, которые мы стремимся развивать в процессе изучения истории математики.

Психологи отмечают, что начинать развитие творчества следует с развития *умения видеть*, которым, естественно, обладают студенты старших курсов, но мы предполагаем развитие умения видеть на более высоком уровне креативности, т.е. на основе уже полученного фундаментального багажа математических знаний исследовать развитие математических идей, провести сравнительный анализ появления новых математических фактов, оценить роль интуиции в открытии новых идей и законов.

Учим студентов “перенестись” в ту или иную эпоху, самостоятельно увидеть и сформулировать проблему того времени, выдвинуть гипотезу, найти или изобрести новый способ ее проверки; собрать исторические данные, проанализировать их, предложить методику их обработки; сформулировать выводы и увидеть возможности практического применения полученных результатов как в той эпохе, так и в настоящее время.

На примерах из истории развития математики мы предлагаем проследить развитие не только ее самой, но и человеческой культуры в целом, с помощью математики осмыслить мир, в котором мы живем, осознать новейшие математические достижения и их роль в современной науке.

Для обеспечения творческих условий познавательной деятельности необходимо приучить студентов к работе с первоисточником, с книгой, монографией, научной статьей; научить его приемам просмотрового чтения для быстрого нахождения нужной информации. С этой целью мы проводим творческие дискуссии на занятиях или за круглым столом, создавая в доброжелательной обстановке возможности релаксации, свободы обмена мнениями, чтобы развивать воображение, гибкость и дивергентность мышления, используем методы развития творчества, такие как метод мозгового штурма для генерации идей, отбора идеи; синектику, способ организации коллективной мыслительной деятельности на основе четырех приемов: рассмотрение проблемы в том виде, как она дана; отказ от очевидного решения; проведение прямой аналогии с чем-либо; формулировка проблемы в общем виде.

Поскольку всякая исследовательская деятельность начинается и заканчивается процедурой анализа (ситуации, результата деятельности), в значительной части исследовательских заданий этому элементу уделяется большое внимание. Тем более, что это является слабым звеном у студентов даже старших курсов.

Для развития аналитических умений будущих учителей каждая профессиональная задача (элемент профессиональной деятельности), осваиваемая в ходе обучения, должна быть осознана, проанализирована на предмет выявления ее содержания, структуры, способов выполнения, возможных форм реализации и форм, предпочтительных для конкретного студента. С этой целью предлагаются задания типа:

– приведите примеры задач, которые умели решать вавилонские, древнеегипетские, индусские математики. Какие вам известны материальные источники, свидетельствующие об этих знаниях и умениях математиков древности. Проанализируйте методы их решения и сравните с современными подходами к их решению;

– охарактеризуйте книгу “Начала” Евклида. В чем ее принципиальное отличие от предшествующих математических работ. Какую роль играет данное произведение в настоящее время?

– представьте мнение автора (или различных авторов) указанной книги по заданной исторической проблеме на основе выписок или конспекта.

Для составления исследовательских заданий и их решения мы широко используем книгу Г.Д. Глейзера [3].

При формировании исследовательских умений мы большую роль отводим дальнейшему развитию интуиции и воображения, т.к. они являются важнейшим механизмом развития творчества. В этом нам помогает, в частности, книга В. Босса [1]. Мы предлагаем студентам следующие задания:

– проанализируйте “Загадки теории вероятностей” [1. С. 68–76]. Какова роль интуиции в решении этих загадок? Подберите современные загадки теории вероятностей для учащихся средней школы, разработайте методику их решения.

– проанализируйте главу “ДНК истории” [1. С. 106–116]. Объясните причину выбора автором данной структуры указанной главы.

История математики полна неожиданных и интересных софизмов и парадоксов, разрешение которых также приводило к новым открытиям, поэтому в исследовательские задания мы включаем анализ и разрешение разнообразных софизмов и парадоксов и советуем использовать книгу [2].

В комплексе исследовательских заданий не последнее место мы отводим работам студентов, направленным на освоение ими методов и приемов работы по самообразованию и профессиональному самосовершенствованию, а также основным методам осуществления педагогического исследования. Существенное внимание уделяется овладению способами поиска, извлечения, переработки и представления необходимой для творческого процесса информации. С этой целью в учебном процессе используются задания типа:

– провести сравнительный анализ методов решения задач в различные эпохи (по указанию преподавателя или по желанию студента);

– написать реферат по заданной теме с известным, а затем и самостоятельно составленным списком источников;

– написать реферат по свободной теме с целью определения области профессиональных интересов студента для формирования темы курсового, дипломного исследования и т.д.;

– написать аннотацию на книгу по истории математики или журнальную статью и т.п.;

– подготовить выступление (сообщение) по заданной теме;

– подобрать литературу по заданной проблеме;

– составить тест для контроля знаний по указанной теме или по теме, выбранной студентом.

Каждое учебно-исследовательское задание направлено на овладение конкретным набором элементов или видом профессиональной деятельности учителя математики и предполагает освоение студентом исследовательского подхода. Поэтому общая структура выполнения заданий включает в себя осознание (осмысление) задачи; разработку плана ее решения, реализацию плана и анализ полученного решения.

Для развития исследовательских умений поиска и переработки информации у студентов, которые обучались по индивидуальному плану, им давалось задание подготовить творческий отчет, включающий разнообразные задания по различным темам истории математики, который засчитывался как зачет по истории математики.

Заключительной работой по этому направлению является выполнение студентами (по желанию) курсовой работы по методике преподавания математики, связанной с историей развития математики или использованием исторических сведений на уроках математики в школе, которая затем перерастает в квалификационное исследование.

Таким образом, курс истории математики дает широкую возможность эффективной подготовки студентов к профессиональной исследовательской деятельности в рамках традиционной системы методической подготовки будущего учителя математики.

Библиографический список

1. *Босс В.* Интуиция и математика. М.: Айрис-пресс, 2003. 192 с.
2. *Мадера А.Г.* Математические софизмы: Правдоподобные рассуждения. Приводящие к ошибочным рассуждениям: Кн. для учащихся 7–11 кл. / А.Г. Мадера, Д.А. Мадера. М.: Просвещение, 2003. 112 с.
3. Математика: Хрестоматия по истории методологии, дидактике / Сост. Г.Д. Глейзер. М.: Изд-во УРАО, 2001. 384 с.

Учащийся – субъект учебной диагностики

О.В. Кваша

Актуальная сегодня тенденция к гуманизации образования требует разработки новых технологий, методик, позволяющих эту тенденцию реализовать. В современном процессе обучения все чаще в качестве основного требования к организации процесса звучит включение учащегося в процесс обучения в качестве субъекта собственного обучения и развития. Для того, чтобы ученик мог выступать субъектом своего обучения, учителю необходимо обеспечить успешность протекания всех компонентов такого процесса. В частности, необходимо организовать учебный процесс таким образом, чтобы каждый ученик имел возможность выявить свои успехи и трудности в учебной деятельности, их причины, осуществить коррекцию возникших ошибок, трудностей, отталкиваясь от их причин, выяснить причины успехов, чтобы приобрести позитивный учебный опыт.

Процесс, в ходе которого осуществляется распознавание, выявление, оценка состояния исследуемого объекта с целью его оптимизации, в психологии (Н.И. Шевандрин, И.В. Дубровина и др.) и в педагогике (К. Ингенкамп, Б.Т. Лихачев, И.П. Подласый и др.) называют *диагностическим.* Рассматривая диагностику применительно к более узкой области – процессу обучения, в педагогике традиционно связывают ее с выявлением качества или уровня знаний, умений, навыков, относят к области контроля успеваемости учащихся. Близки к такой трактовке используемые сегодня диагностика обученности, критериально-ориентированная диагностика, диагностика успеваемости, диагностика качества обучения и др. Реализуется такая диагностика, как правило, посредством тестирования и позволяет более объективно оценить уровень и качество знаний, умений и навыков учащихся по сравнению с традиционными формами контроля.

Существует ряд исследований, в рамках которых диагностику связывают не только с результатом обучения, но и с процессом осуществления учебной деятельности учащимися (И.С. Якиманская, Е.Н. Перевощикова, Т.А. Иванова и др.). Такой подход позволяет учителю получать более своевременную и точную информацию о состоянии учебной деятельности учащихся, что делает процесс управления этой деятельностью более эффективным.

Учитывая необходимость ведущей позиции ученика в процессе обучения, одним из первых субъектов, получающих информацию в процессе диагностики, должен являться сам учащийся. Кроме того, выбор объектов диагностики, ее цель и организация также должны быть ориентированы в первую очередь на конкретного ученика. С учетом этих позиций ***диагностикой*** будем считать *совокупность действий учителя и учащихся, направленных на выявление каждым учащимся особенностей осуществления своей учебной деятельности, причин этих особенностей с целью обогащения своего учебного опыта.* Поскольку термин диагностика достаточно популярен сегодня и используется в разных значениях, уточним, что проводимое нами исследование касается ***учебной диагностики*** – диагностики, осуществляемой в учебном процессе, и имеющей в том числе и обучающий характер. Одной из важных особенностей учебной диагностики, наиболее способствующей обогащению учебного опыта учащихся, является обеспечение коррекции выявленных учеником в процессе диагностики ошибок, трудностей, выяснение и работа по устранению причин, их вызвавших.

Итак, ученик в процессе диагностики выявляет для себя свои успехи, трудности, причины возникших трудностей и в случае необходимости их корректирует, являясь при этом субъектом диагностики. С другой стороны, субъектом учебной диагностики выступает учитель, задача которого – организовать диагностику.

Мы выделяем следующие *виды учебной диагностики*:

- Входная диагностика. Направлена на предотвращение трудностей, связанных *с прошлым опытом учащегося*, которые могут оказать негативное влияние на изучение нового материала. Ее объектом будут те составляющие учебного опыта учащихся, которые сформированы при изучении иных тем (разделов, курсов) и которые будут востребованы при изучении нового материала;
- Текущая диагностика. Направлена на оказание своевременной помощи учащимся в усвоении *ключевого* материала темы. Объектом текущей диагностики являются те составляющие учебного опыта, которые формируются в процессе изучения фрагмента школьного курса предмета (темы) и связаны с владением ключевым материалом этого фрагмента, с установлением взаимосвязей между этим материалом.
- Итоговая диагностика. Направлена на оказание помощи учащемуся установить *взаимосвязь* между только что изученным материалом и имеющимся у него на данный момент учебным опытом, выявить как в теоретическом материале темы, так и в комплексном его использовании. Объектом итоговой диагностики являются те составляющие учебного опыта учащихся, которые формируются при изучении как данной темы (раздела, курса), так и при изучении других тем, связанных с ней. Связаны эти составляющие с комплексным применением изученного материала, с установлением связей между материалом как внутри темы, так и вне ее по содержательной линии и по совокупности методов решения и доказательства.

Включаются учащиеся в диагностическую деятельность в ходе выполнения диагностических заданий, которые и являются содержанием учебной диагностики.

Диагностическое задание – комплексное задание, помогающее учащимся выявить особенности осуществления собственной учебной деятельности, причины этих особенностей и провести, в случае необходимости, коррекцию.

В соответствии с перечисленными видами учебной диагностики можно выделить виды диагностических заданий: задания входной диагностики, задания текущей диагностики и задания итоговой диагностики

Перечислим *требования к составлению диагностических заданий.* Эти задания составляются таким образом, чтобы:

- обеспечить успешность выполнения самого задания;
- дать возможность учащимся выявить свои ошибки и трудности;
- дать возможность каждому ученику провести коррекцию своих ошибок и проблем, возникших в ходе учебной деятельности;
- включить учащегося в рефлексивную деятельность;
- не требовать больших временных затрат по выполнению и по проверке результатов.

Диагностическое задание, как правило, имеет следующую *структуру*:

1) организационная часть (она содержит обращение к ученику и инструкцию по выполнению задания);

2) основная часть (она содержит блоки заданий на основные группы умений и заглавие каждого блока, которое отражает цель деятельности учащихся);

3) коррекционная часть (она может представлять собой как отдельный блок, так и "раствориться" в заданиях основного блока).

С учетом рассмотренных теоретических положений был разработан комплект диагностических заданий по одной из тем школьного курса математики, включающий задания входной, текущей и итоговой диагностики с целью экспериментальной проверки эффективности учебной диагностики. Была выбрана тема "Тождества сокращенного умножения", поскольку она имеет определяющее значение во всем школьном курсе алгебры. В рамках данной темы учащиеся 7 класса учатся работать с тождествами и формулами, вытекающими из них. В процессе изучения формируются следующие **общие умения**: комплексно использовать формулы, использовать формулы для решения задач разложения на множители в совокупности с изученными ранее способами.

Анализ изучаемого материала и его взаимосвязей с имеющимся у учащихся субъектным опытом позволил выяснить, что задания *входной диагностики* к данной теме связаны с актуализацией следующих компонентов учебного опыта учащихся:

- подстановка различных значений вместо букв в выражение;
- умение определять, подходит ли данное выражение под заданную структуру алгебраического выражения;
- выделение общей структуры нескольких алгебраических выражений и составление различных выражений по заданной структуре.

Задания *текущей диагностики* в рамках данной темы будут иметь одинаковую структуру для каждой изучаемой формулы и состоять из трех частей (блоков): 1) знаю ли я формулу? 2) умею ли я выполнять каждый шаг применения формулы? 3) знаю ли я для каких выражений можно применить формулу? Умею ли я ее применять? В ходе работы учащихся с этими заданиями будут диагностироваться следующие особенности осуществления учебной деятельности:

- запись вида и схемы формулы;
- чтение формулы;
- работа с признаками формулы;
- работа по алгоритму применения формулы;
- применение формулы в стандартных ситуациях;
- применение формулы в иных ситуациях.

Задания *итоговой диагностики* по теме “Тождества сокращенного умножения” выявляют особенности учебной деятельности учащихся по установлению следующих связей:

– связь между формулами сокращенного умножения, составляющими одно тождество;

– связь между формулами сокращенного умножения и различными видами алгебраических выражений, подставляемых в формулу;

– связь между структурой выражения и несколькими формулами сокращенного умножения, которые применимы к нему;

– связь между формулами сокращенного умножения и другими способами разложения на множители.

Данная тема лежит в основе содержательной линии тождеств и тождественных преобразований. Поэтому, во-первых, она требует особого внимания с точки зрения ее изучения учащимися, во-вторых, разработанные диагностические задания по этой теме могут быть использованы для разработки диагностических заданий последующих тем данной содержательной линии, поскольку выделенные особенности осуществления учебной деятельности будут иметь место и для последующих формул школьного курса математики.

В качестве примера приведем задание итоговой диагностики, опустив организационный блок задания.

1. Знаю ли я общий вид тождеств сокращенного умножения?

Для каждого выражения в левом столбике найдите такое выражение в правом столбике, чтобы получилось тождество сокращенного умножения. Соедините левую и правую части тождества стрелкой, вместо многоточий впишите пропущенные выражения.

$$\begin{array}{ll} 1)\ a^2+2ab+b^2; & 4)\ a^2-b^2; \\ 2)\ (a-b)^2; & 5)\ (a+b)^2; \\ 3)\ (a+b)(\ldots); & 6)\ \ldots-2ab+\ldots. \end{array}$$

2. Знаю ли я названия формул? Умею ли я подставлять в формулу различные значения букв?

Заполни пропущенные строки в таблице:

Названия формул сокращенного умножения	Выражения, полученные из формулы при $a = -2m$, $b = \boxed{n^2 + 1}$
1) полный квадрат суммы	1) …
2) …	2) $(-2m - n^2 - 1)^2$;
3) …	3) $(-2m + n^2 + 1)(-2m - n^2 - 1)$;
4) разность квадратов	4) …
5) квадрат суммы	5) …
6) …	6) $4m^2 + 4m(n^2 + 1) + (n^2 + 1)^2$.

3. Умею ли я находить формулы сокращенного умножения, которые “спрятались” в различных алгебраических выражениях?

Перед Вами список различных алгебраических выражений. Впишите рядом с каждым выражением номера формул сокращенного умножения (смотри задание № 1), которые можно применить для преобразования данного выражения.

а) $(p - 3)^2(p + 3)^2$; ____________
б) $(4a^2 + 4a + 1)^2$; ____________
в) $(b - 2)(b^2 + 4)(b + 2)$; __________
г) $(5c - 3d)^2 - 9d^2$; ____________
д) $((2x - 1)^2 + 3)^2$; ____________
е) $-10x^3y + y^2 + 25x^6$; ____________
ж) $(a + 3)^2 + (a - 3)^2$; ____________
з) $(a + 8)^2 - (a - 4)(a + 4)$; ____________
и) $(100 - 4y^2)^2$; ____________
к) $4a^2 + 4ab - 4ab^2 + b^2$; ____________

4. Умею ли я комплексно применять формулы сокращенного умножения?

Заполни пропуски в решениях:

а) разложите на множители:

1) $(a-1)^4 - b^4 = ((a-1)^2 - b^2)(\ldots) = (a-1-\ldots)(\ldots)((a-1)^2+b^2)$;

2) $9y^2 - 1 - 4y - 4y^2 = 9y^2 - (\ldots) = 9y^2 - (\ldots)^2 = (3y + 1 + 2y)(3y - \ldots) = (\ldots)(y - 1)$.

б) преобразуйте выражение в многочлен несколькими способами:

1) $(a + 2 - b)^2 =$

$$\rightarrow\ a^2 + \ \ldots\ + (2 - b)^2 = a^2 + 4a - 2ab + \ \ldots\ + b^2;$$
$$\rightarrow\ (\quad \ldots \quad)^2 + 4(a - b + 4) = \ \ldots\ + 4a - 4b + 4;$$
$$\rightarrow\ (\quad \ldots \quad)^2 - 2b(a + 2) + b^2 = \ \ldots\ - 2ab - 4b + b^2;$$

2) $(p - 3)^2(p + 3)^2 =$

$$\rightarrow\ ((\quad \ldots \quad)(\quad \ldots \quad))^2 = (p^2 - \ldots)^2 = p^4 - 18p^2 + 81;$$
$$\rightarrow\ (p^2 - 6p + 9)(\quad \ldots \quad) = ((p^2 + 9) - \ldots)\,((p^2 + 9) + \ldots) =$$
$$= (\ \ldots\ )^2 - 36p^2 = p^4 + \ldots - 36p^2 = p^4 \quad \ldots \quad + 81.$$

5. Знаю ли я признаки выражений, к которым можно применить формулу сокращенного умножения?

*Напишите Вашу любимую формулу сокращенного умножения:*_______________________

Приведите примеры выражений, к которым можно применить эту формулу.

Разработанный комплект диагностических заданий был опробован в 2002 году в трех школах Брянской области. Полученные результаты позволили провести коррекцию и доработку диагностических заданий а также выдвинуть гипотезу: изучение отдельно взятой темы, организованное с использованием учебной диагностики, будет протекать более успешно для учащихся, чем изучение без использования диагностики.

Эксперимент по использованию учебной диагностики в процессе изучения одной из тем школьного курса математики проходил в 2004 году в школах г. Брянска и Брянской области. В экспериментальную работу было включено 64 учащихся, составивших экспериментальную и контрольную группы. Средний балл успеваемости учащихся экспериментальной группы составил 3,77, контрольной группы – 3,83. С помощью t-критерия Стьюдента было доказано, что данные выборки статистически достоверно не различаются, а значит, могут участвовать в эксперименте.

Учителям были предложены комплекты диагностических заданий по числу учеников экспериментальной группы и рекомендации по их использованию. В ходе индивидуальной беседы были выяснены все возникшие у учителя вопросы, касающиеся как теоретических основ учебной диагностики, так и ее практического осуществления. По завершении изучения темы после предлагаемой нами итоговой диагностики учащиеся написали традиционную контрольную работу, результаты которой мы проанализировали и сравнили со средним баллом успеваемости. Средний балл полученных оценок за контрольную работу в экспериментальной группе составил 4,15, в контрольной группе – 3,95.

Как видим, в обеих группах результаты контрольной работы оказались лучше текущих, что позволило предположить улучшение успеваемости в двух группах. С помощью статистических методов (χ^2-критерий) была проведена проверка полученных результатов, подтвердившая наличие значимых положительных изменений успеваемости в группе, изучавшей тему с использованием диагностики, и опровергнувшая улучшение успеваемости в контрольной группе.

Поскольку диагностику традиционно связывают с контролем, возник вопрос, можем ли мы использовать результаты учебной диагностики в целях оценки уровня успеваемости учащихся по данной теме (например, вместо контрольной работы). Для ответа на этот вопрос мы сравнили совокупности оценок, полученных за контрольную работу и оценок за задание итоговой диагностики, используя методы математической статистики (t-критерий Стьюдента). Получили, что между совокупностями оценок за контрольную работу и за выполнение диагностического задания, не смотря на разницу в средних баллах, не существует статистически достоверных различий. Значит, диагностические задания как минимум могут быть использованы в целях контроля в процессе обучения, что помимо достаточно адекватных оценок, как подтвердил проведенный эксперимент, позволит значимо улучшить успеваемость учащихся. Полученные положительные результаты были обеспечены в основном самими диагностическими заданиями, их содержанием, формой предъявления, поскольку дополнительного времени на изучение темы не выделялось, а учителя, осуществлявшие диагностику, выполняли это впервые и без специальной подготовки. Следовательно, можно сделать вывод о необходимости работы в двух направлениях:

1) разработка новых диагностических заданий по другим темам школьного курса математики;

2) организация подготовки учителей действующих и будущих

к диагностической деятельности, включающей в том числе и конструирование диагностических заданий.

Совершенствование организации деятельности учащихся на уроках математики

И.А. Котова

Педагогические наблюдения и опыт показывают, что учитель неизменно стремится каждый очередной урок провести лучше, чем предыдущие, а в каждом следующем классе по данной теме урока – лучше, чем до этого в параллельном классе. Это обусловлено, прежде всего, тем, что каждый учитель в той или иной степени стремится решать современные задачи образования.

Однако не редко оказывается, что такое стремление концентрируется с одной стороны – вокруг содержания материала, отбираемого учителем для урока, с другой стороны – вокруг новых форм организации обучения; средств обучения, разнообразных методов, которые кажутся учителю более эффективными, результативными, эффектными. Не случайно М.Н.Скаткин отмечал: "успех обучения зависит как от правильного определения его целей и содержания, так и способов достижения целей, т. е. методов обучения" [3. С. 181]. И "чтобы уверенно прогнозировать искомый результат, принимать безошибочные научно обоснованные решения, учитель должен профессионально владеть методами педагогической деятельности" [6. С. 292].

Цели современного образования выдвигают ряд требований к использованию учителем методов обучения. Необходимо использовать такие методы, которые обеспечивают, во-первых, *успешное продвижение* учащихся в освоении учебного материала, во-вторых, *высокую активность* учащихся в обучении, в-третьих, достаточную *самостоятельность* в приобретении и творческом использовании знаний, в-четвертых, *учет индивидуальных* возможностей, потребностей и интересов обучаемых, в-пятых, *обогащение учебного опыта* учащихся. Перечисленные требования и будут служить ориентиром для определения путей совершенствования деятельности учащихся на уроке, поскольку они *обеспечивают выдвижение учащихся на ведущие позиции в обучении.*

Сформулируем ведущую *идею* совершенствования организации деятельности учащихся на уроках: *технологические основы совершенствования организации деятельности учащихся связать с реализацией многоаспектного подхода к рассмотрению методов обучения и процедурой обогащения субъектного опыта учащихся.*

С методами обучения связывают: *источники получения знаний* (С.И. Перовский, Е.Я. Голант); *характер познавательной деятельности* (И.Я. Лернер, М.Н. Скаткин); *этапы обучения на уроке* (М.А. Данилов, Б.П. Есипов); *уровень самостоятельности* (А.Н. Алексюк, И.Д. Зверев и др.); *логическое обоснование материала* (Н.М. Верзилин). Ю.К. Бабанский, поддержав идею С.Г. Шаповаленко о том, что необходимо рассматривать методы обучения как многоаспектное явление, и сохраняя ранее выделенные аспекты, добавил необходимость учета компонентов деятельности (организационно-деятельностного, мотивационно-стимулирующего, контрольно-оценочного).

Представим в виде таблицы обозначенные аспекты рассмотрения методов обучения и разновидности каждого из них (табл. 1).

Таблица 1

Аспекты методов обучения

<table>
<tr><th>Источники знаний</th><th>Характер учебно-познавательной деятельности</th><th>Компоненты деятельности</th><th>Характер материала (логическое обоснование)</th><th>Уровень самостоятельности</th><th>Этапы обучения</th></tr>
<tr><td>Практика</td><td>Репродуктивный</td><td>Организационно-деятельностный</td><td>Индуктивный</td><td>Фронтальная работа под руководством учителя (без вмешательства учителя)</td><td>Целеполагание и планирование</td></tr>
<tr><td>Наглядность</td><td>Эвристический</td><td>Мотивационно-стимулирующий</td><td>Дедуктивный</td><td>Групповая (коллективная) работа под руководством учителя (без вмешательства учителя)</td><td>Изучение нового и его усвоение</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Слово</td><td rowspan="3">Исследовательский</td><td rowspan="3">Контрольно-оценочный</td><td rowspan="3">Обобщающий</td><td rowspan="3">Индивидуальная работа под руководством учителя (без вмешательства учителя)</td><td>Закрепление</td></tr>
<tr><td>Обобщение и систематизация</td></tr>
<tr><td>Рефлексия</td></tr>
</table>

Г.И. Саранцев обратил внимание на необходимость учитывать при рассмотрении методов обучения предметное содержание. И поэтому, учитывая тот факт, что “математическое содержание учебного предмета развивается главным образом посредством индукции, дедукции и обобщения, а способы взаимодействия учителя и ученика выражаются через репродукцию, эвристику и исследование” [4. С. 161], Г.И. Саранцев, используя комбинирование разновидностей характера учебно-познавательной деятельности и характера математического содержания, выделяет соответствующие методы обучения математике: индуктивно-репродуктивный, индуктивно-эвристический, индуктивно-исследовательский, дедуктивно-репродуктивный, дедуктивно-эвристический, дедуктивно-исследовательский, обобщенно-репродуктивный, обобщенно-эвристический, обобщенно-исследовательский.

Поскольку значимым является каждый из обозначенных в таблице 1 аспектов, то при раскрытии методов обучения, в том числе методов обучения математике, предлагаем в каждом методе учитывать все аспекты.

И в соответствии с этим суть рассмотрения методов обучения математике, в нашем понимании, заключается в выделении структуры метода по разработанной нами схеме:

Структура метода обучения математике

– Источник знаний – ______________________________

– Характер учебно-познавательной деятельности – ______________

– Компонент деятельности – __________________________

– Характер материала – _____________________________

– Уровень самостоятельности – _______________________

– Этап обучения – _________________________________

И тогда подбирая сочетания тех или иных разновидностей того или иного аспекта, отраженных в схеме, можно получить множество разнообразных методов.

Наше исследование показывает, что еще одним важным аспектом, участвующим в расшифровке термина "метод обучения" является организационный аспект.

Не трудно убедиться в том, что организационный аспект относится к совокупности всех остальных аспектов, отраженных в схеме методов обучения. К тому же, любой метод должен быть реализован в процессе обучения, а в современной науке за структурную единицу учебного процесса принимают учебную ситуацию. Значит, на уроке может быть несколько учебных ситуаций и, следовательно, несколько методов обучения.

Возникает необходимость обсуждать способы (варианты) организации деятельности учащихся применительно к используемым учителем методам обучения, иными словами – обсуждать *способы реализации* методов обучения на практике (приемы организации деятельности учащихся).

И тогда совершенствование организации деятельности учащихся подчинено главной цели деятельности учителя, а использование различных приемов организации, способствующих этому, является средством достижения поставленной цели.

Следовательно, технология совершенствования организации деятельности учащихся и процедура обогащения субъектного опыта учащихся теснейшим образом взаимосвязаны. Процедура обогащения опыта служит необходимой опорой в реализации задач совершенствования организации деятельности, а совершенствование организации, в свою очередь, обеспечивает обогащение опыта.

Приведем вариант реализации выстроенных нами идей совершенствования организации деятельности учащихся на уроках.

Обозначим ситуацию, с которой связана организация деятельности учащихся: *в классе на этапе изучения нового деятельность учащихся связана с темой "Сложение многочленов"*.

Определим, как обычно действовал учитель в подобной ситуации, каким при этом был характер деятельности учащихся. Традиционно возможны два варианта.

Вариант 1. Учитель использует фронтальную работу с учащимися (сам объясняет материал); учащиеся выполняют при таком подходе репродуктивную деятельность (слушают учителя, делают записи по ходу объяснения учителя и пр.)

Заполним схему метода, который соответствует обозначенной ситуации; действиям учителя; характеру учебно-познавательной деятельности учащихся.

– **Источник знаний –** слово учителя – **Характер учебно-познавательной деятельности –** репродуктивная – **Компонент деятельности –** организационно-деятельностный – **Характер материала –** индуктивный – **Уровень самостоятельности –** фронтальная работа под руководством учителя – **Этап обучения –** изучение нового

Вариант 2. Учитель использует самостоятельную работу с учащимися (изучают тему по учебнику); учащиеся выполняют при этом репродуктивную деятельность (знакомятся с готовой информацией, а затем, например, пересказывают учителю).

Заполним схему метода, который соответствует варианту 2.

– **Источник знаний –** слово (школьный учебник)
– **Характер учебно-познавательной деятельности –** репродуктивный
– **Компонент деятельности –** организационно-деятельностный
– **Характер материала –** индуктивный
– **Уровень самостоятельности –** индивидуальная работа под руководством учителя
– **Этап обучения –** изучение нового

Остановимся на варианте 2 и покажем, как можно усовершенствовать организацию деятельности учащихся при изучении темы "Сложение многочленов" по учебнику. Назовем, представленный в варианте 2 метод – методом 1.

Опишем опыт учащихся, который требуется для реализации этого метода:

- уметь читать текст учебника (математический текст);
- "увидеть" последовательность изложения материала;
- воспроизвести представленные действия в той же последовательности.

Сформулируем цель, связанную с обогащением опыта учащихся, иными словами, определим, в чем именно можно обогатить опыт учащихся.

Цель: не только "видеть" последовательность изложения текстов, представленных авторами, но и обосновывать авторскую позицию (например, определить цели, которые преследовал автор).

Заполним схему метода, который будет соответствовать сформулированной цели обогащения опыта учащихся. Назовем полученный метод – методом 2.

– **Источник знаний –** слово (школьный учебник)
– **Характер учебно-познавательной деятельности –** исследовательский
– **Компонент деятельности –** организационно-деятельностный
– **Характер материала –** индуктивный
– **Уровень самостоятельности –** индивидуальная работа под руководством учителя
– **Этап обучения –** изучение нового

Замечание. Можно было определить цель, связанную с обогащением опыта учащихся по воспроизведению текста учебника.

Предложим вариант реализации метода 2 с помощью приемзаданий.

Так, по тексту: *“Сложим многочлены* $5x^2+7x-9$ *и* $-3x^2-6x+8$.

Для этого составим их сумму, затем раскроем скобки и приведем в полученном многочлене подобные члены:

$$(5x^2+7x-9)+(-3x^2-6x+8) = 5x^2+7x-9-3x^2-6x+8 = 2x^2+x-1.$$

Сумму многочленов $5x^2+7x-9$ *и* $-3x^2-6x+8$ *мы представили в виде многочлена* $2x^2+x-1$. *Вообще, сумму любых многочленов можно представить в виде многочлена”* [1. С. 118] можно предложить следующий прием-задание (прием 1).

Прием 1. Подчеркните глаголы, которые отражают последовательность авторских мыслей, и обоснуйте каждую мысль, изложенную автором.

Учащимся можно предложить дидактический материал в сопровождение этого метода:

Текст	Обоснование
Сложим многочлены $5x^2 + 7x - 9$ и $-3x^2 - 6x + 8$. Для этого составим их сумму, затем раскроем скобки и приведем в полученном многочлене подобные члены: $(5x^2 + 7x - 9) + (-3x^2 - 6x + 8) =$ $=5x^2 + 7x - 9 - 3x^2 - 6x + 8 = 2x^2 + x - 1$. Сумму многочленов $5x^2 + 7x - 9$ и $-3x^2 - 6x + 8$ мы представили в виде многочлена $2x^2 + x - 1$. Вообще, сумму любых многочленов можно представить в виде многочлена.	

Предложим иной вариант реализации метода 2, сменив при этом школьный учебник (учащиеся работают по учебнику [5]).

Использование приема 1 позволяет выделить дополнительные сведения: при введении какого-либо понятия стоит задача осваивать работу с этим понятием, в частности, учится выполнять операции над многочленами.

Предложим другой прием-задание (прием 2).

Прием 2. Составьте вопросы, на которые можете получить ответ в предложенном тексте.

Так, учащиеся могут сформулировать следующие вопросы:

1. С каким понятием продолжаем работать?
2. Чему предстоит научиться в теме "Многочлены"?
3. С какой операцией следует начинать и почему?
4. Как складывать многочлены?

Снова сменим учебник (учащиеся работают по учебнику [2]). И применим тот же прием 2. В этом случае учащиеся могут сформулировать вопросы:

1. Кто сопровождает читателя в ходе знакомства со сложением многочленов (какие методы помогают при этом)? (ответ: методы аналогии и сравнения).

2. Сколько примеров рассматривается? (ответ: три).

3. Между какими выражениями проводится аналогия? (ответ: аналогия проводится между числовыми и алгебраическими выражениями).

4. Что требуется выполнить в примере 1? (ответ: найти значение числового и алгебраического выражений).

5. Что требуется в примере 2; примере3? (ответ: сложить числа и многочлены).

6. Какова последовательность действий, когда складываем многочлены? (ответ: записываем сумму; раскрываем скобки; приводим подобные).

7. Что называют суммой многочленов? (ответ: результат сложения многочленов).

8. Какие два способа сложения многочленов рассматривается? (ответ: в строчку и столбик).

9. Каковы свойства сложения многочленов? (в ответе формулируются переместительное и сочетательное свойства).

10. Может ли случиться так, что многочлен-сумма окажется равным нулевому многочлену, то есть нулю? (ответ: да).

11. Чем отличается сложение многочленом от сложения одночленов? (ответ: сложение многочленов в отличие от сложения одночленов не приводит к алгебраическим выражениям нового вида).

Продолжим совершенствовать организацию деятельности учащихся при работе с учебником. Заменим исследовательскую деятельность учащихся на эвристическую, и тогда можно предложить следующий прием-задание (прием 3).

Прием 3. I часть. На какие вопросы авторы предлагают учащимся найти ответ самостоятельно?

В этом случае учащиеся сформулируют следующие вопросы:

1. Какими свойствами операции сложения чисел вы пользовались при выполнении задания?

2. В чем проявляется аналогия при сложении чисел и многочленов?

3. Какое алгебраическое выражение получилось в результате сложения многочленов?

4. Каков алгоритм сложения многочленов в строчку?

5. Каков алгоритм сложения многочленов столбиком?

6. Как проверить, что для сложения многочленов выполняются законы сложения?

7. Как можно назвать по отношению друг к другу многочлены, сумма которых равна нулю?

Прием 3. II часть. Сформулируйте свои вопросы, которые начинаются словами: “Что общего...?” и “Чем отличаются...?”.

Замечание. Можно было также предложить сформулировать вопросы, которые начинаются словами “Почему авторы...?”.

Оценим процедуру обогащения опыта учащихся в ситуации когда, в классе на этапе изучения нового предложено рассматривать материал по учебнику.

Осмыслить текст помогает: 1) выделение ключевых слов; 2) поиск обоснований авторских мыслей. Систематизации прочитанного помогает составление вопросов, на которые можно получить ответ в представленном материале. Когда ученику предлагают найти вопросы, которые ставят авторы, но не дают на них ответа, то учащиеся обогащают свой опыт в следующих направлениях:

– поиска таких вопросов;

– выбора своей позиции: отвечать или не отвечать на конкретно поставленный вопрос;

– выбор последовательности действий в случае, если сразу не удается дать ответ;

– оценки своего ответа и процесса его получения;

– обмена мнениями в связи с деятельностью по выполнению задания.

Когда ученику предлагают: сформулировать свои вопросы по предложенному тексту учебника, которые начинаются словами: “Что общего. . . ?” и “Чем отличаются. . . ?”, то происходит обогащение опыта применения учащимися метода сравнения, опыта проявления инициативы. Кроме того, если организовать обсуждение составленных учащимися вопросов, то за счет организации полилога произойдет обогащение опыта по вариативности: постановки вопросов; предполагаемых ответов; направлений сравнения различных объектов.

Подобного рода проведенная учителем работа позволяет пополнить методическую копилку приемов, а также усовершенствовать свою методическую деятельность. В эту копилку могут попасть:

– описание учебной ситуации;

– варианты возможных действий учителя в связи с обозначенной ситуацией;

– методы соответствующие этим вариантам;

– приемы организации деятельности учащихся как способа реализации этих методов;

– вопросы диалога, которые учитель мог бы задавать не только в этой, но и иной ситуации;

– разработанные дидактические средства, позволяющие реализовать тот или иной прием;

– процедура обогащения опыта учащихся в связи с применением тех или иных приемов организации.

Приведенный пример совершенствования организации деятельности учащихся был разработан по следующей технологии.

Технология совершенствования организации деятельности учащихся

I этап. Выделение учебной ситуации.

Шаг 1. Обозначить ситуацию, с которой связана организация деятельности учащихся.

В связи с этим можно использовать предложенный ниже трафарет:

Трафарет 1

В $\underset{\textit{классе, дома}}{\underline{\qquad\qquad\qquad}}$ на этапе $\underset{\textit{указывается этап обучения}}{\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}}$ деятельность учащихся $\frac{\textit{будет}}{\textit{была}}$ связана с $\underset{\textit{указывается математическое содержание}}{\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}}$.

II этап. Анализ варианта организации деятельности учащихся, с которым уже сталкивался учитель в своем методическом опыте.

Шаг 2. Определить, как обычно действовал учитель в подобной ситуации, каким при этом был характер деятельности учащихся.

В этом случае предлагаем воспользоваться следующим трафаретом:

Трафарет 2

Учитель использовал $\underset{\textit{фронтальную, групповую, индивидуальную работу}}{\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}}$ с учащимися, учащиеся выполняли $\underset{\textit{указывается характер учебно – познавательной деятельности}}{\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}}$.

Шаг 3. Заполнить схему метода обучения, который соответствует: обозначенной ситуации; действиям учителя; характеру учебно-познавательной деятельности (назовем полученный метод- "метод 1").

Шаг 4. Описать опыт учащихся, который требуется для реализации "метода 1" (при описании этого опыта необходимо отвлечься от математического содержания).

III этап. Совершенствование организации деятельности учащихся в связи с обозначенной ситуацией.

Шаг 5. Сформулировать конкретную цель, связанную с обогащением опыта учащихся (иными словами, определить, в чем именно можно обогатить опыт учащихся).

Шаг 6. Заполнить схему метода обучения, который будет соответствовать сформулированной цели обогащения опыта учащихся (назовем полученный метод – "метод 2").

Шаг 7. Предложить вариант реализации "метода 2":

а) разработать прием организации деятельности учащихся;

б) разработать соответствующие дидактические средства.

Шаг 8. Предложить иной вариант реализации "метода 2".

Шаг 9. Предложить иной метод обучения, в котором изменен характер деятельности учащихся в сторону усиления (назовем полученный метод – "метод 3").

IV этап. Осуществление учителем рефлексии своей методической деятельности, направленной на усовершенствование организации деятельности учащихся.

Шаг 10. Оценить процедуру обогащения учащихся в рамках обозначенной ситуации.

Шаг 11. Создание учителем методической копилки приемов.

Шаг 12. Выделение методических ошибок, связанных с организацией деятельности учащихся.

Мы показали технологию совершенствования организации деятельности учащихся, когда эта деятельность прогнозируется учителем. Однако на уроке возможны ситуации, когда учащиеся сталкиваются с математическими (учебными или прочими) затруднениями или допускают ошибки. Тогда при выделении ситуации (I этап) обозначить ее можно с помощью следующего трафарета (трафарет 1'):

Трафарет 1'

В ________ (*классе, дома*) на этапе ____________ (*указывается этап обучения*) при работе с ________________ (*указывается математическое содержание*) учащиеся столкнулись с ____________ (*описание того, что произошло*).

На этапе II при определении действий учителя в этой ситуации и характере деятельность учащихся можно использовать следующий трафарет (трафарет 2'):

Трафарет 2'

Учитель использовал ____________________ с учащимися,
фронтальную, групповую, индивидуальную работу

учащиеся выполняли ____________________;
указывается характер учебно – познавательной деятельности

и ____________________.
описывается деятельность учителя в сложившееся ситуации

Именно таковыми нам представляются состав деятельности и последовательность действий учителя, обдумывающего и планирующего организацию деятельности учащихся на уроке.

Библиографический список

1. Алгебра: Учеб. Для 7 кл. сред.шк. / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова; Под ред. С.А. Теляковского. М.: Просвещение, 1993. 240 с.
2. *Гельфман Э.Г. и др.* Знакомимся с алгеброй: Учебное пособие по математике для 7 класса. Томск: Изд-во Том. Ун-та. 248 с.
3. Дидактика средней школы: Некоторые проблемы современной дидактики. Учеб. Пособие для слушателей ФПК директоров общеобразовательных школ и в качестве учебного пособия по спецкурсу для студентов пед. ин-тов / Под ред. М.Н. Скаткина. М.: Просвещение, 1982. 319 с.
4. Методика обучения математике в средней школе: Учеб. Пособие для студентов мат. спец. Пед. вузов и ун-тов / Г.И. Саранцев. М.: Просвещение, 2002. 224 с.
5. *Мордкович А.Г.* Алгебра. 7 кл.: В двух частях. Ч. 1: Учебник для общеобразоват. Учреждений. М.: Мнемозина, 2002. 160 с.
6. Педагогика: Учебное пособие для студентов педагогических учебных заведений / В.А. Сластенин, И.Ф. Исаев, А.И. Мищенко, Е.Н. Шиянов. М.: Школа-Пресс, 1998. 512 с.

А.Н. Колмогоров о развитии математических способностей

А.И. Голиков, Н.Х. Розов

Задача всестороннего и гармонического развития личности человека делает совершенно необходимой глубокую научную разработку проблемы способностей людей к тем или иным видам деятельности. Разработка этой проблемы представляет как теоретический, так и практический интерес.

Проблема способностей – это проблема индивидуальных различий. Если бы все люди обладали одинаковыми потенциальными возможностями для развития во всех направлениях и для занятий всеми видами деятельности, то не было бы смысла говорить о способностях. Один добивается высоких достижений, больших успехов без особой затраты сил и труда в сравнительно короткий срок, другой при всем желании и старании не может подняться до того же уровня или это сопряжено у него с большим трудом. В этом смысле мы и говорим о более способных, и менее способных обучаемых.

Академика А.Н. Колмогорова глубоко интересовала проблема выявления и отбора способных к математике школьников. Отметим несколько его идей, каждая из которых стала предметом обсуждения многих известных психологов и педагогов, основой для дальнейших исследований.

Во-первых, А.Н. Колмогоров указывает, что математические методы и математический стиль мышления проникают всюду. Трудно найти такую область знаний, к которой математика не имела бы никакого отношения. С каждым годом математика будет находить все более широкое применение в разнообразных областях человеческой деятельности. Принципиально область математики неограниченна [2]. Еще в 1962 году А.Н. Колмогоров отмечал, что развитие наук в последнее время характеризуется тенденцией к их математизации. В связи с этим в нашей стране ежегодно возрастает потребность в математиках. В последнее время потребность эта явно не удовлетворяется “математики стали дефицитны” [3]. Таким образом, А.Н. Колмогоров подчеркнул, что высокий уровень развития математики является необходимым условием подъема и эффективности целого ряда важнейших областей знания. В связи с этим, еще в большей степени увеличиваются требования к математическим знаниям и способностям специалистов, работающих над техническими проблемами.

Во-вторых, А.Н. Колмогоров отмечает, что для усвоения математики (“при хорошем руководстве или по хорошим книгам”) в объеме курса средней школы и даже элементов высшей математики достаточны обычные средние способности. Но для успешного овладения математикой на более высоком уровне, в качестве будущей специальности, требуются развитые математические способности, так как известно, что “разные люди воспринимают математические рассуждения, решают математические задачи…приходят к новым математическим открытиям с различной скоростью, легкостью и успехом” [4], а надо стремится, чтобы специалистам – математикам становились те, кто в этой области будет работать наиболее успешно. “Талант, одаренность…в области математики…даны от природы не всем” [5]. Обычным математиком можно стать, выдающимся, талантливым математиком нужно и родиться. Таким образом, А.Н. Колмогоров поставил проблему выяснения генетической природы математических способностей, которая до настоящего времени является важной задачей дальнейших исследований в этой области.

В-третьих, в состав математических способностей А.Н. Колмогоров включает [4]:

– способность умелого преобразования сложных буквенных выражений, нахождения удачных путей для решения уравнений, неподходящих под стандартные правила, или, как это принято называть у математиков, вычислительные, или “алгоритмические” способности;

– геометрическое воображение, или “геометрическую интуицию”;

– искусство последовательного, правильно расчлененного логического рассуждения; в частности, хорошим критерием логической зрелости, совершенно необходимой математику, является понимание и умение правильно применять принцип математической индукции.

Далее, он говорит и о тех особенностях мыслительной деятельности, которые, вопреки распространенному житейскому мнению, не имеют отношения к математическим способностям, например, способности механически запоминать большое число фактов, способности перемножать в уме многозначные числа. Многие выдающиеся математики не обладали сколько-нибудь выдающейся памятью такого рода.

Известный психолог В.А. Крутецкий, беря за основу и дополняя данные А.Н. Колмогоровым личностные и мыслительные качества, характеризующие математическое мышление и деятельность математиков при решении математических проблем, задач, выделил основные характеристики математического мышления [9]:

1) способность к формализации математического материала, к отделению формы от содержания, абстрагированию от конкретных количественных отношений и пространственных форм и оперированию формальными структурами, структурами отношений и связей;

2) способность обобщать математический материал, вычленять главное, отвлекаясь от несущественного, видеть общее во внешне различном;

3) способность к оперированию числовой и знаковой символикой;

4) способность к "последовательному, правильно расчлененному логическому рассуждению", связанному с потребностью в доказательствах, обоснования, выводах;

5) способность сокращать процесс рассуждения, мыслить свернутыми структурами;

6) способность к обратимости мыслительного процесса (к переходу с прямого на обратный ход мысли);

7) гибкость мышления, способность к переключению от одной умственной операции к другой, свобода от сковывающего влияния шаблонов и трафаретов;

8) математическая память – ее характерные особенности также вытекают из особенностей математической науки, это память на обобщения, формализованные структуры, логические схемы;

9) способность к пространственному воображению, которая прямым образом связана с развитием такой области математики, как геометрия.

В-четвертых, А.Н. Колмогоров указывает, что математические способности проявляются обычно довольно рано и требуют непрерывного упражнения [4]. В июне 1964 года Министерством просвещения РСФСР было проведено широкое совещание по проблемам преподавания математики в средней школе. С основным докладом выступил А.Н. Колмогоров, где он затронул проблему дифференциации математического образования. На первый план выдвигалась задача развития индивидуальных особенностей каждого учащегося с учетом его интересов, способностей и желаний. Участники совещания, одобрив основные положения доклада, все же выступили против различных программ даже в спецшколах. Отступление от утвержденных программ допускалось только в экспериментальных классах. К большому сожалению, идея А.Н. Колмогорова об уровневой дифференциации нашла отражение только в “Концепции развития школьного математического образования” 1990 года [7].

В-пятых, математика в целом не может быть до конца аксиоматизирована, можно говорить лишь о системах аксиом отдельных математических теорий [1]. Таким образом, А.Н. Колмогоров опровергал точку зрения, что аксиоматический метод распространяется на всю математику. Сочетание компонентов в индивидуальных структурах математических способностей может быть различным, что и образует различные типы структур, различные типы математических складов ума. Имеет место известное многообразие структур, т.е. высокие достижения в математической деятельности могут быть осуществлены различными комплексами способностей, причем одни из них могут компенсированы другими [4]. Различные стороны математических способностей встречаются в разных комбинациях [4]. Существование различных типов математических складов ума есть следствие не только индивидуальных и типовых психологических различий между людьми, но и следствие различных требований, которые предъявляют человеку разные разделы математики.

В-шестых, А.Н. Колмогоров считал, что “до 10–12 лет – с довольно хорошим успехом заменим общим воспитанием сообразительности и умственной активности”. Он считал, что содействие выдвижению математически одаренной молодежи является одной из важных задач школьных математических кружков, математических олимпиад и других мероприятий по пропаганде математических знаний и распространению интереса к самостоятельным занятиям математикой. Однако, в них “следует по возможности избегать установки на предопределение будущих профессиональных интересов”. Но запоздание с усвоением строгой логики и специальных математических навыков в 14–15 лет делается уже трудно восполнимым [8]. С введением профильного обучения в общеобразовательных школах остается актуальной мнение А.Н. Колмогорова, что недопустима ранняя специализация математических способностей. Расширенное и углубленное обучение необходимо начинать с 12–13 лет.

Следует сказать, что подробный анализ работ и выступлений академика А.Н. Колмогорова, связанных с проблемой математических способностей, еще ждут своей всесторонней разработки.

Библиографический список

1. Колмогоров А.Н. Аксиома (Аксиоматический метод в математике). БСЭ. Изд. 2, т.1
2. *Колмогоров А.Н.* Математика. БСЭ. Изд. 2. Т. 26.
3. *Колмогоров А.Н.* Наука требует горения. “Известия”, 1962. № 44.
4. *Колмогоров А.Н.* О профессии математика. Изд. 3-е., допол. М.: Изд-во МГУ, 1960. 30 с.
5. *Колмогоров А.Н.* Поиск таланта. “Известия”, 1963. № 83.
6. *Колмогоров А.Н.* Современная математика и математика в современной школе // Математика в школе. 1971. № 6. С. 2, 3.
7. Концепция развития школьного математического образования // Математика в школе. 1990. № 1. С.2–13.

8. Письмо А.Н. Колмогорова к В.А. Крутецкому. Вопросы психологии. 2001. № 3. С. 103–106.

К вопросу о преподавании математики в реальных училищах Оренбургского учебного округа

В.Д. Павлидис

Развитие средней школы на современном этапе проходит в сложных условиях реформирования всей системы образования. В настоящее время идет поиск наиболее оптимальных путей замены прежней школьной системы на новую, ориентированную на обучение и воспитание активной творческой личности.

Необходимость постоянного осмысления происходящего в историческом контексте повышает значимость историко-педагогических исследований. Глубинные изменения в материальной и духовной жизни современного российского общества, одновременно развивающиеся процессы гуманизации и дегуманизации, культурного возрождения и нравственной деградации, инноваций и псевдоинноваций актуализируют необходимость обращения к анализу системы народного образования в нашем государстве до 1917 г. Это, на наш взгляд, дает возможность использовать опыт работы общеобразовательных учреждений Российской империи в процессе совершенствования современных учебных заведений.

Сегодня одни учебные заведения, возвращаясь к опыту классической русской гимназии, уделяют повышенное внимание предметам гуманитарного цикла, включают в свои учебные планы изучение древних языков, например, латинского, и, полагая, что гуманитарное образование наилучшим образом развивает способности человека, отводят второстепенное место преподаванию физики и математики. Другие, следуя примеру реальных гимназий и училищ, усиливают преподавание предметов естественно-математического цикла, особенно, математики. Эти оба направления в построении учебного процесса имеют как свои плюсы, так и минусы. Но в последнее время школам реальной направленности стало уделяться значительно меньше внимания, чем это было еще десятилетие назад. Это кажется нам неправомерным: технический прогресс, независимость и безопасность нашей страны во многом зависят от уровня преподавания естественно-математических наук в средней школе, и, следовательно, обсуждение проблем таких школ, их реформирование – одно из основных требований времени.

Одним из базовых разделов реального образования является математическое образование. Тенденции в его развитии во многом определяют качество и эффективность всего учебного процесса в школе реальной направленности, что в свою очередь достаточно сильно влияет на формирование перспективных направлений развития всей образовательной системы России.

Круг затронутых проблем показывает, что перед отечественной школой сегодня, как и столетие назад, стоят очень трудные и важные задачи, решение которых являлось тогда и является сегодня насущной необходимостью. Именно сегодня осмысление педагогического наследия прошлого является необходимым, в частности, развитие реального образования без его резкого противопоставления гуманитарному – одна из основных проблем современной школы.

Подавляющее большинство исследований в области истории среднего математического образования в России в XIX–начале XX века, проводимых ранее, либо посвящено анализу реформ математического образования в целом [1, 2, 11], либо освещает преподавание математики в гимназиях [10, 15, 23, 31, 34], кадетских корпусах [4], коммерческих училищах [3]. Преподавание математики в реальных училищах освещалось, чаще всего, в связи с реформами средней школы России конца XIX–начала XX века, работой Всероссийских съездов преподавателей математики [14, 19, 20]. При этом, особенности преподавания математических дисциплин в реальных гимназиях и училищах, его влияние на постановку преподавания математики в классических гимназиях и на развитие всего среднего образования осталось, за редким исключением [24, 25, 30, 35], вне поля зрения исследователей.

В данной статье на примере реальных училищ Оренбургского учебного округа рассматриваются и анализируются основные тенденции в развитии среднего математического образования России конца XIX–начала XX века, и связанный с ними ряд особенностей в постановке преподавания математических дисциплин в реальных училищах этого периода.

Изучение и анализ историко-математических материалов [16, 17, 18, 21, 22, 28] позволяет выделить в качестве основных тенденций в развитии среднего математического образования в России в конце XIX–начале XX века следующие: сближение науки и учебного предмета математики; усиление прикладной направленности в обучении математике; модернизация форм и методов обучения математике; специализация и фуркация в старших классах средней школы. Все эти направления достаточно отчетливо проявлялись в организации математических курсов в реальных училищах этого периода.

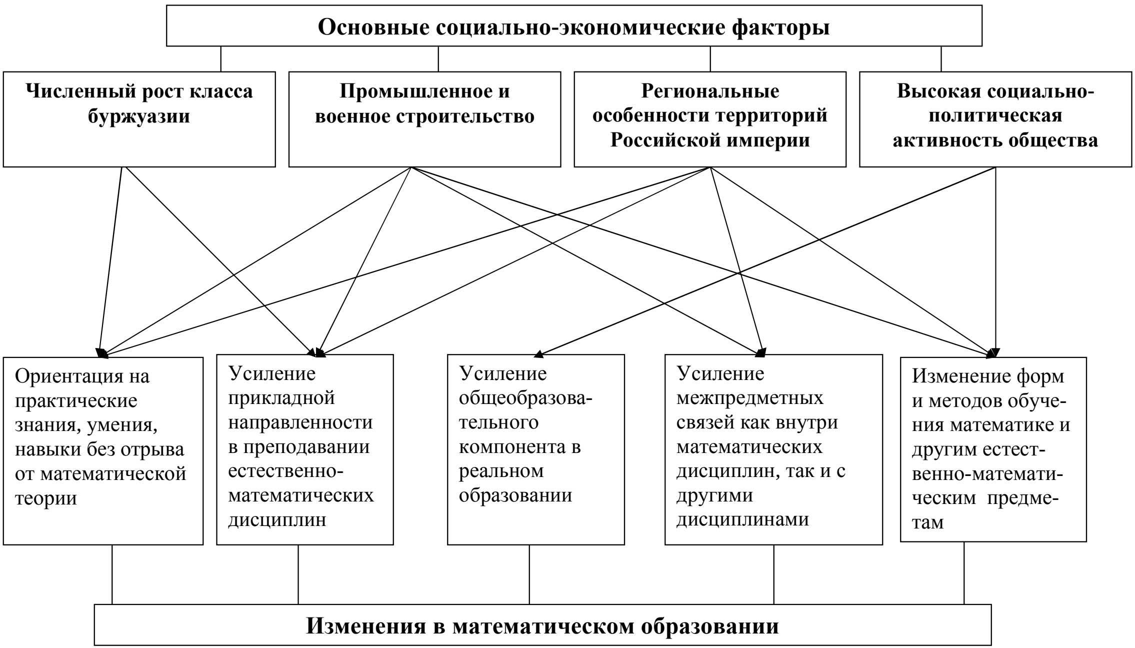
На содержание математического образования в средней школе России XIX–начала XX века существенное влияние оказывали сословно-ограничительная политика государственного аппарата; развитие промышленности и военное строительство; активная позиция среднего класса Российского общества; общественно-педагогическое движение за реформу средней школы; педагогические дискуссии о формах, методах преподавания и содержании среднего образования.

Уровень математического образования в средней школе России в начале XX века как компонент реального образования должен быть оценен как достаточно высокий [24, 25]. Естественно-математические дисциплины составляли фундамент реального образования и являлись полигоном для апробации новых организационно-методических идей, гибко реагируя на изменение социального заказа общества.

Следует отметить ряд несомненных достижений в области математического образования в реальной школе по сравнению с классической гимназией: изучение математики ведется с точки зрения современных теорий; математический аппарат применяется к изучению различных областей знания; усилены внутри- и межпредметные связи, как среди математических дисциплин, так и среди дисциплин естественно-математического цикла; усилена практическая направленность в преподавании математики; учтены возрастные и психологические особенности учащихся в процессе преподавания математики.

Влияние социально-экономических факторов на развитие математического образования в реальной школе России в XIX–начале XX века может быть охарактеризовано табл. 1.

Таблица 1. **Основные социально-экономические факторы, влияющие на развитие математического образования в реальной школе России в XIX–начале XX века**



Особым фактором развития образования на Южном Урале стала организация Оренбургского учебного округа. В 1873 г. Д.А. Толстой предложил царю образовать новый Оренбургский учебный округ, в который вошли бы Оренбургская, Пермская, Уфимская, Вятская губернии. Через год он был создан но Вятская губерния была оставлена в прежнем Казанском учебном округе.

Развитие среднего звена образовательной системы в Оренбургском учебном округе во второй половине XIX–начале XX вв. шло в том же направлении, в котором развивалась средняя школа дореволюционной России. Оно выразилось в количественном росте числа учебных заведений, увеличении контингента учащихся, появлении новых типов общеобразовательных и специальных учебных заведений, более рациональном размещении их по территории губернии и т.п.

Подавляющее большинство реальных училищ края располагалось в губернских городах – Перми, Уфе, и Оренбурге, а также Екатеринбурге – горнозаводской столице Урала. Вторая половина XIX века – это время, когда бурное развитие промышленного производства и обусловленные им социокультурные изменения повлекли за собой существенные сдвиги в сфере образования.

Средняя школа сыграла важную роль в подготовке будущих студентов для высшей школы страны, а также в обеспечении местных потребностей в учителях, чиновниках, офицерах, техниках.

Формирование сети реальных училищ в Оренбургском учебном округе проходило под воздействием различных факторов и во многом учитывало региональные особенности края.

Быстрое развитие промышленности, ее растущие потребности в квалифицированных кадрах провоцировали активный рост числа реальных училищ в крупных городах и увеличение их концентрации в северных и северо-восточных частях региона. Огромная площадь учебного округа и различный уровень социально-экономического развития различных его областей приводил к определенной специализации в подготовке выпускников реальных училищ. Удаленность от столицы и постоянно растущая потребность в специалистах различного профиля на местах также способствовала увеличению числа реальных училищ в крае.

При этом в функционировании Оренбургского округа были свои особенности, которые нашли свое отражение и в постановке преподавания математических дисциплин в реальных училищах.

Отсутствие университета в округе приводило к тому, что на должности преподавателей средних учебных заведений, в том числе и реальных училищ, присылались выпускники Казанского, Московского, Петербургского, Дерптского, Варшавского, Киевского университетов [29]. Это способствовало тому, что представители различных направлений в преподавании математики тесно взаимодействовали и взаимообогащали свой методико-математический багаж.

Наличие хорошей материальной базы, активная поддержка представителями государственной власти и общественности новых идей в преподавании математики [6, 9, 27] создали необходимые условия для реализации в реальных училищах Оренбургского учебного округа основных направлений реформирования среднего математического образования. Одной из ведущих в деятельности преподавателей-математиков реальных училищ округа стала идея усиления практической направленности в преподавании математических дисциплин, укрепления его связи с жизнью и потребностями региона. Огромный промышленный потенциал и заинтересованность местной власти вели к широкому распространению в реальных училищах округа экскурсионного и лабораторного методов.

Этот метод, удовлетворяющий требованиям жизни и педагогической науки в начале XX века, нашел отражение в постановке преподавания математических дисциплин в реальных училищах.

Его основные достоинства, как отмечали педагоги того времени, состояли в следующем: 1) приучает ученика воспринимать и анализировать конкретные признаки явлений; 2) помогает пробудить интерес ученика к знаниям; 3) помогает развитию сосредоточенности и серьезного отношения к делу, изощряет наблюдательность и внимание, повышает активность; 4) приучает к работе в коллективе, координируя деятельность вокруг центральной общей цели.

Педагогическая задача лабораторных занятий определялась как дальнейшее расширение и углубление принципа наглядности в обучении, в том, что они способствуют отчетливому усвоению и прочному запоминанию изучаемого материала, в том, что они будят интерес к предмету, учат сознательно координировать свою интеллектуальную деятельность с деятельностью органов внешнего восприятия, прививают ценные практические навыки.

Особенностью проведения лабораторных занятий в реальных училищах Оренбурга и Перми, было то, что опыты и наблюдения производились не для подтверждения заранее высказанных предположений, а наоборот, эти последние выводились из опытов и наблюдения учащихся.

Применение лабораторного метода в реальной школе преследовало двоякую цель: с одной стороны, дать конкретные представления и укрепить в сознании детей проходимый ими курс, а с другой – приучить их к самостоятельности, к умению без посторонней помощи решить проблему.

Большинство педагогов-математиков, признавая этот метод преподавания крайне ценным, способным поднять интерес учащихся к математике и развить в них любовь к самостоятельным исследованиям, затруднилась, однако, рекомендовать систематическое пользование им на уроках математики, видя препятствие к этому в характере и объеме обязательного курса по математике [33].

Учащимся предлагалось выполнять лабораторные работы в классе на моделях, картах, планах и т.п. и связывать с измерениями и вычислениями. При этом различали два вида таких работ в зависимости от их назначения: познавательные и прикладные.

К познавательным относили такие лабораторные работы, которые ставят целью познакомить школьников с новым для них математическим фактом.

В прикладных лабораторных работах реалисты учились применять математические знания к конкретным задачам, связанным, например, с измерениями на моделях геометрических тел и вычислениями их площадей поверхностей, объемов или с измерениями на карте и вычислениями расстояний (при изучении числового масштаба) и т.п.

К практическим работам относятся и работы на местности, связанные в основном с геометрией (подобие треугольников, съемка плана местности и т.п.) или решением треугольников (вычисление расстояния до удаленной точки, высоты предмета). Такие работы часто сочетались с математической или комплексной (по нескольким предметам одновременно) экскурсией.

На рубеже XIX–XX веков педагоги Оренбургского учебного округа в поиске новых подходов, позволяющих обновить и обогатить систему образования, обратились к экскурсии как к средству, способному не только оживить практику школьной работы, но и реализовать творческую активность ребенка в процессе деятельного освоения им окружающего мира [26, 33].

Экскурсионная деятельность рассматривалась преподавателями математики реальных училищ округа как метод педагогической работы, позволяющий:

– получить знание в результате возникших у ребенка вопросов, требующих разрешения их путем активной деятельности;

– проиллюстрировать и подтвердить знания, получаемые учащимися в процессе школьных занятий, а также дать материал для последующих уроков и практических заданий.

Метод учебных экскурсий реализовывал выполнение двух основных принципов обучения – наглядности и самодеятельности и широко применялся в обучении математике в Оренбургском реальном училище [12, 13, 26, 33].

Новые формы организации учебной работы в реальных училищах округа: лабораторные занятия, экскурсии способствовали индивидуализации учебно-воспитательной работы и конкретному руководству в развитии самодеятельности учащихся, повышали работоспособность учащихся в учебном процессе.

Активная позиция сильного преподавательского состава реальных училищ Оренбургского учебного округа позволяла вести эффективную учебно-методическую работу. Ученые пособия, написанные преподавателями, были широко распространены не только на территории округа, но и нашли благожелательный прием за его пределами. Так, учебником К.А. Торопова “Краткий курс тригонометрии” пользовались и в Таганроге, и в Красноуфимске и в Перми [32]. Он был рекомендован в ученические библиотеки.

Новые методические приемы и находки в преподавании математики находили свое отражение и в учебно-методической литературе, публикуемой преподавателями реальных училищ округа.

В начале XX века в практике реальных училищ стали часто применяться дополнительные звенья процесса обучения: внеклассная работа.

Заинтересованность преподавателей и учащихся реальных училищ находила реализацию в кружковой и индивидуальной работе по математике.

Эта работа была предназначена для любителей математики и находилась в определенной взаимосвязи с обязательным учебным процессом. Эффективная постановка последнего создавала достаточный контингент настоящих любителей математики, что позволяло в случае необходимости отобрать наиболее способных, а также создать основу для успешной работы, благодаря хорошему знанию обязательного курса и наличию навыков самостоятельного творческого мышления.

Так, в Оренбургском реальном училище на протяжении свыше пятнадцати лет активно функционировал открытый математический кружок. Его членами в разное время были не только преподаватели и учащиеся этого учебного заведения, но и учителя гимназий, кадетских корпусов, воспитанники этих заведений [5, 7, 8].

Здесь учили методам и приемам поиска путей решения и применению их в самостоятельной работе учащихся, рассматривали занимательные вопросы и задачи, периодически заслушивали информационные сообщения, доклады. Введение кружков было тесно связано с идеей фуркации – дифференцированного обучения, учитывающего индивидуальные способности учащихся.

Математический кружок издавал журнал, который на протяжении многих лет пользовался широкой известностью в городе. Здесь публиковались как доклады преподавателей, так и результаты проводимых под их руководством самостоятельных исследований учеников [7, 8]. Многие преподаватели-члены кружка вели индивидуальную работу с заинтересованными и способными реалистами, направляли их изыскания, помогали проделывать сложнейшие выкладки.

Таким образом, на примере реальных училищ Оренбургского учебного округа мы видим, как основные направления реформы среднего математического образования претворялись в жизнь. Многое из достигнутого (сближение курса школьной математики как с наукой, так и с требованиями жизни, практическая направленность преподавания, фуркация, экскурсионный, лабораторный методы и др.) может быть востребовано и на нынешнем этапе реформирования среднего математического образования.

Библиографический список

1. *Волнистова З.И.* Движение за реформу средней школы (классической и реальной) в России в конце революции 1905 г. М., 1936.
2. *Ганелин Ш.И.* Очерки по истории средней школы в России 2 половины XIX в. М.: Учпедгиз, 1954. 304 с.
3. *Гольтиков В.Ф.* Из истории развития передовых идей в преподавании математики в России // В помощь учителю математики. Челябинск, 1974. Вып. 7. С. 17–26
4. *Гольтиков В.Ф.* О преподавании математики в военных гимназиях и кадетских корпусах России // Уч. записки Свердловского педагогического института. 1973. Вып. 6. С. 52–59.
5. Дополнительные сведения к отчету о деятельности реального училища за 1905–1906 учебный год. Уфа, 1906.
6. Журналы I, II совещания по народному образованию при Оренбургской губернской земской управе в 1915 г. Оренбург, 1915.
7. Записки математического кружка при реальном училище (1–8). Оренбург, 1906.
8. Записки математического кружка при реальном училище (1–8). Оренбург, 1907.
9. Исторический очерк народного образования в Оренбургском учебном округе за первое 25-летие его существования (1875–1899) / Сост. В.Е. Игнатьев Оренбург, 1901.

10. *Кондратьева М.А.* Российская гимназия: исторический опыт и современные проблемы // Современные проблемы истории образования и педагогической науки. Монографический сборник: В 3-х тт. Под ред. З.И. Равкина. М.: ИТП и МИО РАО, 1994. Т.2. С. 18–32.
11. *Константинов Н.А.* Очерки по истории средней школы. М.: Учпедгиз, 1956. 246 с.
12. Краткий отчет о состоянии Оренбургского реального училища за 1900–1901 гг. Оренбург, 1901.
13. Краткий отчет о состоянии Оренбургского реального училища за 1901–1902 гг. Оренбург, 1902.
14. *Кузьмин Н.Н.* Основные вопросы реформы средней общеобразовательной школы (гимназий и реальных училищ) период нового революционного подъема и первой мировой войны // Уч. зап. МОПИ им. Н.К. Крупской. 1958. Т. 68. Вып. 6. С. 93–131.
15. *Купинская Е.В.* Проблемы реформы средней общеобразовательной школы в деятельности Министерства народного просвещения России в конце XIX–начале XX в. М., 1999. 159 с.
16. Материалы по преобразованию средней школы, переданные из МНП в Ученый комитет: проекты уставов; доклады комиссий; отзывы печати, различных ведомств, попечителей различных советов; очерки состояния средней школы за границей и т.п. РГИА. Ф. 734, оп. 5, д. 64, л. 7–42, 49, 69, 111–178, 235.
17. Материалы по проектам реформы средней школы. РГИА. Ф. 1152, д. 173, л. 580.
18. Материалы по реформе средней школы. Примерные программы и объяснительные записки, изданные по распоряжению г. Министра народного просвещения. Пг.: Сенатская тип., 1915. 547 с.
19. *Метельский Н.В.* Очерки истории методики математики. Минск. Вышейшая школа, 1968. 340 с.
20. *Никитин Н.И.* Съезды преподавателей математики России. Историко-библиографический очерк // Изв. АПН РСФСР. 1946. Вып. 6. С. 84–93.

21. Новые учебные планы и предметные программы классических гимназий и прогимназий с новыми объяснительными записками Министерства народного просвещения, вышедшими к Уставу дополнениями по распоряжению об улучшениях состава учеников. М.: Тип. П.М. Мартынова, 1891. 120 с.
22. О некоторых изменениях в постановке преподавания предметов в средних учебных заведениях. РГИА. Ф. 733, оп. 168, д. 1488, л. 47.
23. Очерки истории и педагогической мысли народов СССР. Конец XIX–начало XX в. / под ред. Э.Д. Днепрова, С.Ф. Егорова, Ф.Г. Паначина, Б.К. Тебиева. М.: Педагогика, 1991. 448 с.
24. *Полякова Т.С.* История математического образования в России. М.: Изд-во МГУ, 2001. 627 с.
25. *Полякова Т.С.* История отечественного школьного математического образования. Два века. Кн. II. Век девятнадцатый. Ростов-на-Дону: Издательство РГПУ, 2001. 324 с.
26. Приложение к краткому отчету о состоянии Оренбургского реального училища за 1903–1904 гг. Оренбург, 1904.
27. Протоколы первого съезда директоров гимназий и реальных училищ Оренбургского учебного округа (24–29 сентября 1912 г.). Уфа, 1912.
28. Реформа средней школы, общие основания и вопросы. РГИА. Ф. 733, оп. 168, д. 1182, л. 73.
29. Сведения о личном составе и о ходе учебного дела в Оренбургском реальном училище. ГООА. Ф. 82. Оп. 1. Д. 135, 168, 172, 183, 186, 191, 199.
30. *Синюшина И.В.* Реальное образование в России в XIX–начале XX века. М., 2000. 158 с.
31. *Скрипченко С.Н.* Развитие государственного гимназического образования в России в конце XIX–начале XX века. Брянск, 2000. 205 с.
32. *Торопов К.А.* Краткий курс тригонометрии. Пермь, 1894.
33. Указания относительно методов преподавания некоторых предметов. ГООА. Ф. 82. Оп. 1. Д. 88.

34. *Фадеева Т.Ю.* Средние учебные заведения в системе образования России второй половины XIX в.–начале XX в. Ярославль, 2000. 238 с.

35. *Чувашев Е.П.* История реальных училищ в России. М., 1938.

Болонский процесс и стратегия математического образования

В.А. Тестов

Вступление России в Болонский процесс поставило перед математическим образованием вообще и математическим образованием учителей в частности целый ряд новых проблем. Хотя провозглашенные европейскими министрами образования принципы Болонского процесса выглядят довольно привлекательно (повышение качества образования и установление совместимых общеевропейских критериев его оценки, введение единого для всей Европы механизма учета освоенного студентом содержания образования, создание условий для значительного повышения мобильности студентов и преподавателей, введение двухуровневого образования), тем не менее, педагогическую общественность тревожит вопрос о том, насколько предлагаемые пути реализации этих принципов согласуются со стратегией образования и действительно будут ли они способствовать повышению качества образования.

У преподавателей вузов, ученых-педагогов многих стран Европы вызывает тревогу то обстоятельство, что предлагаются единые пути для всех стран и народов без учета их традиций, достижений, без учета особенностей их национального образования. Кроме того, не учитываются специфические особенности подготовки специалиста в конкретной области. Невозможно по одной схеме готовить юристов и математиков, инженеров и педагогов.

Для российского высшего образования традиционной является моноуровневая система, которая ориентирована на подготовку специалиста определенного вида профессиональной деятельности. Для этой системы характерна фундаментальная подготовка специалиста, что сегодня является основой профессиональной гибко-сти, требуемой постоянно изменяющимися условиями современного рынка труда.

Фундаментальная научная подготовка может быть осуществлена только с учетом целого ряда дидактических принципов (научности, систематичности и последовательности и т.д.). Фундаментальности вузовской подготовки, особенно на младших курсах, всегда обращалось особое внимание в российской высшей школе. Как отмечал в своем докладе на 7-м съезде союза ректоров В.А. Садовничий, в отличие от других наций, мы сразу стали учиться научно мыслить и учить студенчество мыслить целостными, фундаментальными теориями и действовать в практике сообразно методам получения таких фундаментальных знаний. На этой основе взросли наша академическая наука, университеты, общеобразовательная школа. В этом – одна из важнейших национальных традиций российского образования, которая сейчас оказалась под угрозой.

При переходе на двухступенчатое образование (бакалавриат – магистратура) необходимо учитывать специфику подготовки будущих специалистов. Так предлагаемый переход наибольшие трудности создает для математического образования.

Сама по себе идея перехода на двухступенчатое образование не несет в себе ничего деструктивного. Весь вопрос в том, по какому принципу производить такое разделение на ступени. Документами, сопровождающими Болонский процесс, предлагается первый цикл (ступень) высшего образования сориентировать на приобретение компетенций исполнительского типа, а второй – на развитие творческих способностей. Этот принцип вполне может быть осуществлен при подготовке многих специалистов, прежде всего гуманитариев. Не случайно в МГУ уже около 15 лет ведется подготовка бакалавров и магистров на экономическом факультете.

Но насколько подходит этот принцип для математической подготовки? Можно ли овладеть математикой только на исполнительском уровне, оставляя на потом развитие творческих способностей?

Весь опыт преподавания математики в России, да и в ряде других стран, говорит о том, что это сделать нельзя, что необходимо развивать творческие способности намного раньше, параллельно приобретению математических знаний, еще в школе и на первых курсах в вузе.

Причины таких особенностей стратегии обучения математике кроются в следующем. Все сколько-нибудь серьезные приложения математики требуют значительной первоначальной фундаментальной математической подготовки. Как указывал Л.Д. Кудрявцев, "содержание общего курса математики не может быть определено с чисто прагматической точки зрения, основанной лишь на специфике будущей специальности учащегося, без учета внутренней логики самой математики" [4. С. 88].

Как математик-профессионал, так и учитель математики, должен, прежде всего, получить широкий математический кругозор, должен представлять себе структуру современной математики в целом.

Принцип научности обучения требует, чтобы его содержание являлось строго научным, объективно отражающим современное состояние соответствующей отрасли научного знания и учитывающим тенденции и перспективы его развития. В соответствии с принципом научности в ходе обучения важно обеспечить усвоение не только научных фактов, законов, теорий, но и основных тенденций развития науки, единства и противоречивости, характерных для современной науки процессов дифференциации и одновременной интеграции научных знаний. Для реализации этого принципа в преподавании математики необходима научная строгость и логическая последовательность курса математики, системность и обобщенность математических знаний и опыта.

Однако в процессе освоения фундамента математических знаний возникают существенные трудности. Это вызвано специфической сложностью предмета математики. Сложность математики, как указывал академик А.Д. Александров, состоит в том, что она абсолютизирует свои абстракции и предметом математики являются идеализированные объекты. В абстрактности – сила, общность и универсальность математики, но в тоже время и специфическая сложность ее усвоения [1]. Поэтому принцип научности обязательно должен дополняться принципом доступности обучения.

Для учителя фундаментальная математическая подготовка должна являться не целью, а средством, а потому должна быть согласована с нуждами приобретаемой профессии. Это положение А.Г. Мордкович назвал принципом фундаментальности. В соответствии с этим принципом в математическом образовании будущих учителей математики, кроме традиционных курсов математического анализа, алгебры и геометрии важное место занимают курсы (или разделы) “Числовые системы”, “Основания геометрии”, “Теория изображений” и т.п., не изучаемые в университетах. В то же время ряд университетских математических курсов, важных для приложений, но далеких от школьного курса, в педвузах или не изучается вовсе или изучается совсем с другими целями.

Необходимость фундаментальности математической подготовки вытекает и из основных положений современной когнитивной психологии, согласно которым чем лучше развита и структурно организована когнитивная система, тем дольше и прочнее сохранение материала в памяти. В более развитой и сложной по структуре когнитивной системе идет более глубокий и всесторонний анализ поступающей информации. А это является одной из главных предпосылок прочного и длительного запоминания любого материала. Аналогичные мысли высказывал и американский психолог Дж. Брунер: “Быть может самое главное, что можно сказать о памяти человека после столетия интенсивных исследований, это то, что до тех пор, пока какой-либо частный факт не согласован со структурой, он быстро забывается. Отдельные детали материала сохраняются в памяти посредством включения их в определенную структуру или схему... Обучение общим или основным принципам способствует сохранению материала в памяти, позволяет нам восстановить отдельные подробности, когда это необходимо. Хорошая теория является не только средством понимания явлений, но и средством их последующего воспроизведения в памяти” [2. С. 25–26].

Фундаментализация математической подготовки тесно связана с реализацией принципа генерализации знаний, который означает, что начинать построение курса надо с выделения основных структур и понятий и организовывать материал обучения в порядке логического развертывания этих структур и понятий по мере их конкретизаций в систему математической науки. Изучение конкретных математических структур должно осуществляться таким образом, чтобы в первую очередь выявлялись наиболее их общие, фундаментальные свойства; для этого начинать ознакомление с главного, с общего, не с элементов, а со структуры.

Используя этот принцип, можно сформировать не только отдельные знания, отдельные качества какого-либо вида мышления, но и всю его структуру, раскрыть внутренние связи и отношения фундаментальных понятий, показать их проявления на конкретных фактах и явлениях действительности.

Генерализация знаний позволяет обеспечить и лучшее понимание, поскольку порождает структуру, которая значительно сильнее взаимодействует с новыми знаниями, чем отдельные факты. А чем больше разных связей новых знаний с уже имеющимися в долговременной памяти может быть установлено, тем глубже и шире понимание нового материала, тем лучше он усваивается. Ведь для этого уже существуют необходимые когнитивные структуры, которые должны развиваться дальше, усложняться и усовершенствоваться при усвоении нового.

Генерализация знаний при изучении математики, т.е. объединение разрозненных понятий на основе общей математической идеи, необходима для того, чтобы заложить прочные основы формирования теоретического мышления. Следуя этому принципу, содержание предмета должно представлять собой единое целое по научным идеям и методам его изложения. Рассмотрение каждого отдельного факта только тогда будет эффективно, когда этот факт явится частностью какой-то общей системы, но частностью, вытекающей из общего.

С фундаментальностью математического образования тесно связан еще один дидактический принцип – систематичности и последовательности, который требует, чтобы знания, умения и навыки формировались в определенном порядке, системе: каждый элемент учебного материала логически связывался с другими, последующее опирается на предыдущее и готовит к усвоению нового. Данный принцип допускает определенные варианты систем и последовательности обучения, но неизменным остается сохранение логически стройного подхода к обучению, а не стихийного, не вытекающего из учета особенностей и внутренней логики предмета. К системности содержания относится целостность построения каждого из математических курсов и определенная законченность его разделов; построение частных вопросов курса математики вокруг его ведущих идей; возможность логических обобщений по мере изучения частных вопросов к более общим.

С определенной сложностью усвоения математики в вузах способны справиться далеко не все выпускники средней школы. Как отмечал А.Н. Колмогоров, картина современных представлений о строении математической науки несомненным образом слишком сложна для школьников, даже проявляющим особый интерес к математике, и рассказать о ней можно лишь немногое. Для преодоления этой сложности в свое время в СССР была создана целая система подготовки школьников к изучению фундаментальных математических курсов. Это математические кружки, факультативы, математические классы и целые школы, заочные математические школы, летние математические лагеря, олимпиады и конкурсы. Все эти формы работы со школьниками имели главной своей целью развитие математического мышления, развитие интереса к математике, развитие творческих способностей. Для математического мышления из всех математических структур особое значение имеют логические, алгоритмические, комбинаторные, образно-геометрические и стохастические структуры, представляющие собой определенные качества математического мышления, являющиеся схемами (методами) мышления, математической деятельности. При формировании этих качеств важно не упустить время, использовать сенситивные периоды.

Многое из этой системы работает и в настоящее время. Эта система прошла проверку временем и доказала свою эффективность. Математические факультеты получали хорошо подготовленных выпускников, давая им фундаментальное математическое образование и развивая дальше их творческие математические способности. Благодаря этой системе математической подготовки российские математики, а также физики, инженеры, программисты получили всемирное признание и пользуются высоким спросом в различных странах и крупнейших фирмах.

На изучение фундаментальных математических дисциплин, как показывает практика, необходимо 3,5–4 года. То есть можно после этого давать диплом бакалавра математики, что и делают некоторые российские вузы, но такие бакалавры для практической работы никому не нужны. Им необходимо сразу учиться дальше, либо изучать отдельные приложения современной математики (для профессионального математика), либо психолого-педагогические и методические дисциплины (для учителя математики).

Опыт зарубежных стран (Великобритания, США и др.) также показывает, что бакалаврам, для того чтобы получить сертификаты, разрешающую работу учителем, необходимо еще пройти основательную психолого-педагогическую и методическую подготовку. Так в Великобритании с 1995 г. степень бакалавра образования не дает права преподавания в средней школе. Для приобретения права на преподавание в школе необходимо получить университетскую степень бакалавра по какой-либо науке, а затем пройти специальный курс педагогической подготовки, в результате которого он приобретает "Статус квалифицированного учителя" и получает специальный сертификат по педагогике. В США процесс сертификации школьных учителей еще сложнее. В 1996 г. здесь вышли рекомендации Национальной комиссии по вопросам обучения, согласно которым минимальной степенью для получения постоянной лицензии для работы учителем стала степень магистра [3].

В России сложившаяся система подготовки учителя фактически очень близка к тому, к чему приходят эти западные страны. При существующем пятилетнем сроке обучения в вузах последние курсы обучения (1–1,5 года) используется для получения различных специализаций, для изучения отдельных приложений современной математики (в университетах) или для подготовки учителя (в педвузах). Именно на этом этапе происходит основная часть методической подготовки учителя, проходит педагогическая практика. Отличие от того, что рекомендуется документами Болонского процесса с формальной точки зрения небольшое, но по существу весьма важное: на второй ступени математического образования мы делаем то, что фактически нас призывают делать на первой ступени – происходит приобретение компетенций исполнительского типа.

Опираясь на отечественный и зарубежный опыт, можно сделать вывод, что бакалавриат в условиях России не должен стать завершающим уровнем математического педагогического образования. После бакалавриата необходимо обязательно проводить дополнительную профессионально-педагогическую подготовку длительностью не менее одного года, которая должна включать в себя психолого-педагогический и методический блоки, а также интенсивное прохождение педагогической практики. Только прохождение такой подготовки должно давать основание на присвоение квалификации учителя математики и право работать в школе.

Такую подготовку наиболее целесообразно осуществлять прямо в вузе, где есть необходимая база и подготовленные кадры. Поэтому лучше всего наряду с созданием магистратуры в вузах на базе бакалавриата сохранить и существующую систему специалистета (5-летняя подготовка специалиста).

Только при соблюдении указанных условий можно будет сохранить высокий потенциал отечественного математического образования, его фундаментальный характер, не допустить снижения качества образования при переходе к двухступенчатому образованию в условиях общеевропейского образовательного пространства.

Библиографический список

1. *Александров А.Д.* Математика и диалектика // Математика в школе, 1972. № 1. С. 3–9.
2. *Брунер Дж.* Процесс обучения. М.: Изд-во АПН РСФСР, 1962.
3. *Зайцев В.В.* Пути развития отечественного педагогического образования в условиях Болонского процесса // Педагогическое образование и наука. 2005. № 1. С. 39–43.
4. *Кудрявцев Л.Д.* Современная математика и ее преподавание. М.: Наука, 1980.
5. *Тестов В.А.* Стратегия обучения математике. М., “Технологическая школа бизнеса”, 1999. 303 с.

Структура компьютеризированного учебника по геометрии для педагогических вузов

Т.В. Капустина

Необходимость информатизации процесса обучения математике в настоящее время является неоспоримой в связи с наличием такого инструмента новых информационных технологий, как компьютерные математические системы (Mathematica, Maple). Актуальной задачей, призванной сдвинуть с мертвой точки внедрение информатизации в обучение математике, является разработка соответствующего методического обеспечения и программных продуктов учебного назначения. Одним из видов методического обеспечения учебного процесса по математике являются компьютеризированные учебные пособия.

В настоящей заметке будем рассматривать компьютерную систему Mathematica в качестве основного средства создания таких пособий, поскольку она обладает не только возможностями вычислений (численных, символьных, графических), но также является языком программирования сверхвысокого уровня, чрезвычайно удобным для пользователя. За рубежом компьютеризированные учебники на основе системы Mathematica уже создаются (например, книги А. Грея [3, 4]).

Под *компьютеризированным учебником (задачником)* будем понимать учебник (задачник) нового поколения, представляющий собой печатное издание, предусматривающее систематическое применение системы Mathematica. Это выражается в том, что классическое изложение в тексте учебника дополняется специальным разделом, содержащим параллельное сопровождение основных формул и опорных задач предметного раздела программами для их реализации в среде Mathematica. Цель такого дополнения – автоматизация вычислений и визуализация графических объектов (кривых, поверхностей, векторных полей, семейств кривых, сетей на поверхностях и т.п.). Именно курс геометрии является благодатной почвой для создания учебных пособий такого рода, так как появляется возможность по-новому изложить материал и включить в него вопросы, ранее рассматривавшиеся лишь теоретически (например, восстановление формы кривой по ее натуральным уравнениям).

Итак, компьютеризированный учебник должен состоять из двух основных частей: классически изложенной теоретической части и дублирующего ее раздела, который содержит реализацию основных формул в среде Mathematica, а также запрограммированные в этой среде опорные задачи для их автоматического решения. Программирование этих формул и опорных задач неизбежно происходит в характерном для среды Mathematica стиле *функционального* программирования; при этом должны быть сделаны все необходимые пояснения о структуре программ. Третья, необязательная составляющая компьютеризированного учебника – компакт-диск, в котором содержатся все файлы с формулами второго раздела. Эти файлы могут быть организованы как документы среды Mathematica (с расширением **.nb**) или как стандартные дополнения среды Mathematica [1]. Стандартные дополнения представляют собой, по сути, расширение ядра среды, они содержат новые (так называемые “внешние”) функции, которых нет в ядре (функции ядра называются встроенными). Подключив стандартное дополнение, можно пользоваться внешними функциями так же, как встроенными, не вводя программы для этих функций.

Второй раздел компьютеризированного учебника может быть выдержан в таком стиле программирования, когда содержащиеся в нем программы автономны, насколько это возможно. (Отметим, что стремление к автономности отдельных программ не способствует их компактности.) В этом случае можно не дополнять учебник компакт-диском с пакетом стандартных дополнений. Студенты при использовании учебника могут сами делать вводы содержащихся в нем программ и проводить вычисления с их помощью.

Оптимальный способ применения компьютеризированного учебника может быть достигнут в том случае, когда он дополнен специально созданным пакетом стандартных дополнений, содержащим все имеющиеся в учебнике программы. Пользователь будет иметь возможность легко интерпретировать эти программы в среде Mathematica, применяя готовые внешние функции пакета. К тому же, благодаря взаимосвязи всех внешних функций в пакете, программы могут быть составлены компактно.

Компьютеризированный учебник, добавленный к нему компьютеризированный задачник и сопровождающий их пакет стандартных дополнений составляют целостный учебный комплекс для компьютерного сопровождения нормативного курса геометрии. Вероятно, что в ближайшее десятилетие эти комплексы будут созданы по всем основным математическим дисциплинам учебного плана педагогического вуза.

Необходимость скорейшего издания учебников нового поколения (то есть компьютеризированных учебников) отмечается в [2].

Проведем структурирование содержания семинарских занятий по нормативному курсу "Геометрия" для физико-математических факультетов педагогических вузов, имеющее целью выделить темы, для изучения которых необходимо компьютерное сопровождение. (Применение компьютера во время чтения лекций каждый преподаватель должен осуществлять в соответствии с индивидуальным взглядом на организацию этого вида учебной деятельности; компьютерное сопровождение лекций в подавляющем большинстве вузов сдерживается не столько отсутствием необходимого оснащения, сколько нехваткой необходимых педагогических программных продуктов.)

Основные цели применения компьютера на занятиях по геометрии:

1) исключение рутинной работы;

2) визуализация геометрических объектов;

3) конструктивная деятельность в этой предметной области.

Поскольку большинство задач курса "Геометрия" может быть отнесено (в той или иной степени) к типу расчетных (за исключением задач раздела "Конструктивная геометрия и методы изображений"), то применять систему Mathematica можно почти на каждом занятии в форме свободной работы пользователя в ее среде. Нас же будет интересовать другое: какие опорные задачи курса "Геометрия" следует запрограммировать, с тем чтобы создать программные продукты учебного назначения в среде Mathematica для наиболее эффективного компьютерного сопровождения? Ниже дадим перечень этих задач. В нем будут выделены курсивом те задачи, которые не включают в программу (в силу большой затратности времени на их решение или невозможности аналитического решения) и рассмотрение которых стало реальным благодаря замечательным возможностям системы Mathematica.

Аналитическая геометрия

1. Общая теория линий второго порядка (определение асимптотических направлений и асимптот; составление уравнения диаметра, сопряженного данному направлению, и диаметра, проходящего через данную точку; определение центра линии второго порядка; составление уравнения касательной к линии второго порядка (по данной точке касания, по данному направлению касательной, по точке, через которую проходит касательная); определение главных направлений и главных диаметров; приведение общего уравнения линии второго порядка к каноническому виду).

2. Геометрические преобразования плоскости (составление формул аффинного преобразования по данным трем парам соответственных точек; определение образа и прообраза данной прямой при аффинном преобразовании; *определение образа и прообраза при аффинном преобразовании произвольной кривой, заданной неявным уравнением;* определение инвариантных точек и инвариантных прямых данного аффинного преобразования).

3. *Составление уравнения поверхности вращения, ось которой не совпадает ни с одной из координатных осей.* Составление уравнения цилиндрической поверхности по данной направляющей кривой и данному направлению образующих. Составление уравнения конической поверхности по данной направляющей и вершине. *Опорные задачи общей теории поверхностей второго порядка.*

4. *Все опорные задачи теории геометрических преобразований пространства.*

Проективная геометрия

1. Составление уравнений коллинеации, заданной четырьмя парами соответственных точек. Определение образа и прообраза точки и прямой при данной коллинеации.

2. Поляритет относительно линии второго порядка на проектив-

ной плоскости. Определение типа квадрики на проективной плоскости по ее уравнению.

Дифференциальная геометрия

1. Вычисление длины дуги плоской кривой. Вычисление кривизны плоской кривой. Нахождение огибающей однопараметрического семейства плоских кривых. Нахождение эволюты плоской кривой. Нахождение семейства эвольвент плоской кривой. Составление натурального уравнения плоской кривой. *Восстановление плоской кривой по ее натуральному уравнению.*

2. Вычисление длины дуги пространственной кривой. Вычисление кривизны и кручения пространственной кривой. Нахождение элементов сопровождающего трехгранника кривой. Составление натуральных уравнений пространственной кривой. *Восстановление пространственной кривой по ее натуральным уравнениям.*

3. Составление уравнений касательной плоскости и нормали к поверхности. Нахождение огибающей однопараметрического семейства поверхностей. Вычисление первой квадратичной формы поверхности. Длина дуги линии, принадлежащей поверхности. Угол между двумя линиями на поверхности. Площадь области поверхности.

Вычисление второй квадратичной формы поверхности. Вычисление нормальной кривизны, соответствующей данному направлению на поверхности. Вычисление главных кривизн поверхности. Полная и средняя кривизны поверхности. Сопряженные сети. Асимптотические линии. Линии кривизны.

Вычисление символов Кристоффеля. Геодезическая кривизна. Геодезические линии. *Вычисление кратчайшего расстояния между двумя точками на поверхности. Визуализация геодезических.*

В качестве примера приведем решение задачи о восстановлении формы плоской кривой по ее натуральному уравнению $k = k(s)$. Mathematica позволяет сделать это благодаря возможности решения в ее среде систем дифференциальных уравнений (в большинстве случаев, естественно, приближенного, но с требуемой точностью) и наличия уникального объекта – так называемой интерполяционной функции. Тело программы для визуализации кривой, заданной натуральным уравнением, общий вид которого $k = fun\,(s)$, выглядит так:

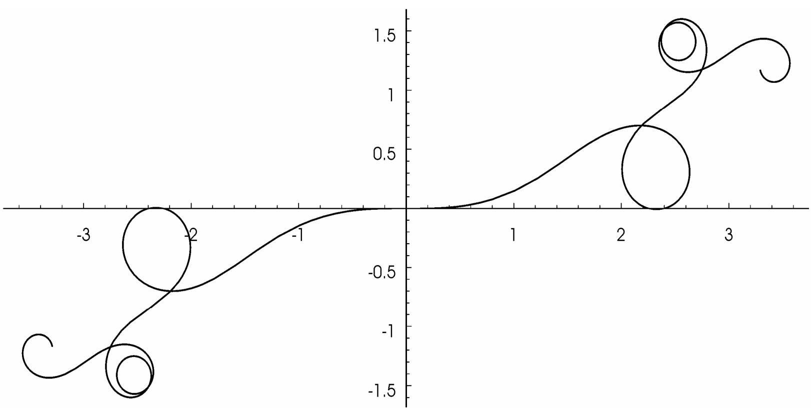
```
plotncurve2D[fun_,a_:0,{b_:0,c_:0,b1_:1,c1_:0,b2_:0,
    c2_:1},optsnd___,{smin_:-10,smax_:10},optspp___][t_]:=
    ParametricPlot[Module[{x,y,l,m},{x[t],y[t]}/.NDSolve[
    {x''[ss]==fun[ss]*l[ss],y''[ss]==fun[ss]*m[ss],
    l'[ss]==-fun[ss]*x'[ss],m'[ss]==-fun[ss]*y'[ss],
    x[a]==b,y[a]==c,x'[a]==b1,y'[a]==c1,l[a]==b2,m[a]==c2},
    {x,y,l,m},{ss,smin,smax},optsnd]]//Evaluate,
    {t,smin,smax},AspectRatio->Automatic,optspp]
```

Здесь реализованы формулы Френе; plotncurve2D – имя внешней функции. Добавим, что программа абсолютно автономна, то есть не использует другие внешние функции.

Для кривой, заданной натуральным уравнением $k = s\cos s$, применение внешней функции plotncurve2D выглядит так:

```
plotncurve2D[# Cos[#]&,0,{0,0,1,0,0,1},{-9,9},
PlotPoints->80]
```

В результате получается следующее изображение:



Системное внедрение в учебный процесс вуза компьютерной системы Математика, как средства новых информационных технологий и как среды для создания и использования программных средств учебного назначения, служит целям оптимизации процесса обучения математике. Для педагогических вузов это особенно актуально, так как современный учитель, кроме знаний по предмету (математике), должен обладать знаниями в области применения средств новых информационных технологий.

Библиографический список

1. *Капустина Т. В.* Информатизация процесса обучения математическим дисциплинам в педагогическом вузе на основе компьютерной системы Mathematica // Труды школы-семинара по проблемам фундирования профессиональной подготовки учителя математики. Посвящается 100-летию со дня рождения академика А.Н. Колмогорова. Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2003. С. 191–199.
2. *Мантуров О.В.* Mathematica (3.0–5.0) и ее роль в изучении математики // Проблемы и перспективы информатизации математического образования: Сборник научных работ, представленных на всероссийскую научно-методическую школу-семинар "Проблемы и перспективы информатизации математического образования". Елабуга: Изд-во ЕГПУ, 2004. С. 3–10.
3. *Gray A.* Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica. 2nd ed. CRC Press, 1997.
4. *Gray A., Mezzino M., Pinsky M.* Ordinary Differential Equations with Mathematica. TELOS, 1996.

О некоторых особенностях абитуриентского тестирования

Н.Л. Майорова

В течение последних восьми лет в России успешно развивалась такая форма проверки знаний учащихся, как Централизованное абитуриентское тестирование (ЦТ), которое во многом являлось также мониторингом качества деятельности учебных заведений. Тестирование представляло одну из альтернативных форм получения экзаменационной оценки на выпускных экзаменах в школе, или оценки вступительных экзаменов в те вузы страны, которые засчитывали сертификат Централизованного тестирования. Оно проводилось (и пока еще проводится) по 12 школьным предметам с 10 по 24 апреля одновременно во всех регионах Российской Федерации. При этом по большинству предметов существуют формы тестирования по двум уровням сложности, проходящим в разные дни (единые для всей страны). Школьник может участвовать последовательно в тестировании по обеим формам.

На современном этапе обучения очень важными считаются умение учиться быстро и эффективно, адаптироваться к новым жизненным условиям, желание непрерывно совершенствоваться. Именно эти личностные качества традиционная система экзаменов измеряла плохо или не измеряла вовсе. В первые годы становления тестирования учащиеся в большинстве своем были совершенно не подготовлены даже психологически к такой форме проверки знаний, при которой надо в сжатое время "выдать на гора" все полученные за одиннадцать лет обучения в школе знания и навыки, а также найти им самое рациональное применение. Кстати, не меньшие психологические и даже профессиональные трудности испытывали и учителя школ. Однако с течением времени тестовая форма контроля становилась все более востребованной школьниками. Число участников Централизованного тестирования росло от года к году. Выпускники средних учебных заведений были заинтересованы в возможности до летних вступительных испытаний проверить свои знания, а в случае получения высокого балла предъявить сертификат ЦТ в приемные комиссии вузов. В 2004 году на процедуру абитуриентского тестирования в региональное представительство Федерального Центра тестирования при Яргосуниверситете им. П.Г. Демидова пришло более 5000 учащихся средних учебных заведений, что в 1,5 раза превышало число всех абитуриентов ЯрГУ, участвовавших в летней приемной кампании. Аналогичный центр функционировал при ЯГТУ, в котором через процедуру ЦТ прошло также несколько тысяч школьников.

Тестирование нельзя рассматривать как идеальный метод, исключая на этом основании все иные, традиционные формы контроля. Нельзя не согласиться с мнением профессионалов, что при устной беседе с абитуриентом экзаменатор может и должен оценить умение школьника не только формулировать теорему и применять ее, но и проводить доказательство, уметь логически мыслить, что, без сомнения, необходимо для успешной учебы на естественных факультетах. Однако в силу человеческого фактора и объективных обстоятельств эту возможность не всегда удается реализовать. При письменном тестировании школьники поставлены в равные условия: варианты тестов однотипны, одинакового уровня сложности, всем предоставлено единое время, проводится машинная обработка результатов сторонней организацией. Ценным является то, что содержание теста охватывает практически все разделы алгебры, многие задания (особенно в тестах второго уровня сложности) имеют оригинальные формулировки, требующие глубокого понимания вопроса. Дефицит времени создается специально, чтобы проверить беглость владения материалом и умение рационально мыслить. При надлежащей предварительной подготовке именно тесты лучше других средств удовлетворяют основные методические критерии качества, обеспечивают приемлемую объективность всех трех главных стадий процесса оценки – измерения, обработки данных и их интерпретации. Хорошо подготовленное тестирование дает возможность удовлетворить и критерий прогностической валидности, то есть предсказания успешности дальнейшего обучения испытуемого.

На идеи, формы и методы Централизованного тестирования опирается и такая форма оценивания учебных достижений, как Единый Государственный Экзамен. При этом ЕГЭ активно вытесняет абитуриентское апрельское тестирование, хотя логичнее было бы сохранить обе формы контроля знаний. В пользу ЦТ может говорить тот факт, что учащиеся тщательно готовились и весьма активно участвовали в весеннем тестировании. При этом педагогов должно было бы радовать то, что уже к началу апреля ученики полностью повторяли учебную программу, самостоятельно изучали методические пособия по подготовке к тестированию, решали типовые задачи различного уровня сложности из вариантов тестирования прошлых лет, тем самым систематизируя накопленные в школе знания и закрепляя их. В сложившихся обстоятельствах проведения эксперимента по введению ЕГЭ такая подготовка к ЦТ лишь помогала бы учащимся и их учителям показать лучшие результаты на летних испытаниях. Кроме того, по мнению многих специалистов, уровень сложности тестов ЦТ по физике и математике соответствовал требованиям, предъявляемым предметными комиссиями вузов по данным предметам к уровню сложности вступительных экзаменационных материалов. Материалы опубликованных образцов тестов по физике и математике, используемых при проведении ЕГЭ в 2004 году, показывают, что их уровень сложности значительно ниже по сравнению с тестами ЦТ. Задания из части 1 (типа А) в количестве 14 штук (что составляет половину всех заданий) такого низкого уровня сложности, что более-менее грамотный ученик решает их за 10–15 минут. Эти задания могут быть рекомендованы лишь для проверки уровня подготовленности тех учащихся, которые в дальнейшем не планируют обучение, связанное с этими предметами. В вариантах тестов ЦТ разных лет такие задания вообще отсутствуют, поскольку абитуриентское тестирование (особенно повышенного уровня сложности) предназначено в основном для профессионально ориентированных учащихся. Следующие 9–10 заданий части 2 (типа В) могут рассматриваться как минимально необходимые требования для проверки базовых знаний абитуриентов. В тестах ЦТ все 30 заданий по уровню сложности соответствовали этим заданиям типа В, или же превосходили их по сложности. Задания части 3 (типа С) соответствовали уровню сложности вступительных экзаменов по специальности (например, в ЯрГУ), однако этих заданий всего 5, в то время как в тестах ЦТ их количество составляло от 30 до 50%. Кроме того, в ЕГЭ правильный ответ предлагается выбирать не из пяти вариантов (дистракторов), как в ЦТ, а из четырех, что повышает вероятность угадывания правильного ответа. Время написания ЦТ – три часа на 30 заданий, для ЕГЭ – 4 часа на 27 заданий. Все эти рассуждения приведены не с целью умаления достоинств ЕГЭ, а лишь в защиту уже апробированной и весьма сложной формы контроля, каковой являлась процедура ЦТ. Во время становления ЕГЭ варианты тестов ЦТ могли бы быть использованы как ориентиры для его подготовки. Участие в ЦТ, проводимое по срокам раньше ЕГЭ, могло бы дать учащимся возможность объективно и квалифицированно оценить уровень своей подготовки, выявить проблемные, менее усвоенные темы, а также технически и психологически адаптироваться к условиям проведения ЕГЭ.

Более того, автор не хочет сказать, что выполнить тесты ЦТ и ЕГЭ легко и просто. Многолетние наблюдения за процедурой тестирования показывают, что высшие баллы (от 90 до 100) набрать крайне сложно. В 2004 году из 467 участников ЦТ по математике 100 баллов получил один учащийся, 97 баллов – 2, 95 баллов – 1, 92 балла – 11, 90 баллов – 9 школьников, что составило 5,9% от всей выборки. Аналогичная ситуация наблюдается и на ЕГЭ. Поэтому все рассуждения о сложности или легкости вариантов рассматриваемых форм тестирования касаются лишь их сравнительных характеристик.

На основе статистической обработки результатов абитуриентского тестирования по математике можно сделать вывод, что у выпускников традиционно вызывает трудности геометрический материал (51,2% – планиметрические задачи, 43,5% – стереометрические задачи), задачи на проценты (55,7%), решение тригонометрических уравнений и неравенств (33%), понятие обратной функции (37%), задания, связанные с исследованием функций и геометрическим смыслом производной (46,5%), уравнения с переменной под знаком модуля (47,1%), действия с векторами (58,5%), прогрессии (53,5%), решение смешанных неравенств (44,5%), приложения теоремы Виета (58,2%) и другие.

Анализ результатов ЦТ и ЕГЭ может быть весьма полезен для преподавателей методики преподавания математики и других дисциплин, поскольку наглядно демонстрирует, какие темы и конкретные задания вызывают наибольшие затруднения у большинства выпускников средней школы. Эти проблемные темы могут выносится на семинарские и практические занятия со студентами, что будет способствовать повышению качества их профессиональной подготовки.

Обратимся теперь к краткому анализу содержания тестов ЦТ. Сразу же отметим, что среди тестовых заданий нет таких, как, например, “решить уравнение…”, поскольку по каждому заданию предлагалось найти верный ответ из приведенных в тесте пяти вариантов ответов (дистракторов), и нельзя было бы методом подстановки определить правильное решение. Поэтому некоторые типы заданий имели следующую формулировку:

– чему равна сумма корней уравнения;
– чему равно наибольшее из решений неравенства;
– чему равна сумма целых решений неравенства;
– чему равен модуль разности корней уравнения и т.п.

Задачи подобраны так, что, во-первых, допускают несколько способов решения и, во-вторых, все ответы в предлагаемом списке правдоподобны и отражают типичные ошибки школьников. Например, при решении заданий: “уравнение, корни которого обратны корням уравнения $15x^2-7x-24=0$, имеет вид...” или “значение свободного члена приведенного квадратного уравнения, корни которого в три раза больше корней уравнения $3x^2+x-5=0$, равно...” не требуется непосредственного нахождения корней данных уравнений, а необходимо сразу же применить теорему Виета. Эта же теорема и знание определения логарифмической функции позволит “найти сумму абсцисс точек пересечения графика функции $y=\log_{11}(x^2-5x-13)$ с осью абсцисс” в два действия: $x^2-5x-13=1$ и $x_1+x_2=5$. А более глубокое знание этой темы предоставляет возможность в задаче нахождения среднего арифметического корней уравнения $x^3-12x-16=0$ дать устный ответ, что искомая сумма равна нулю.

Для нахождения параметра a, при котором совместна система уравнений

$$\begin{cases} 2x+ay=3; \\ 4x-3y=2; \end{cases}$$

школьнику необходимо представить три возможных случая расположения двух прямых на плоскости и знать соответствующие этим случаям соотношения между коэффициентами при неизвестных и свободными членами уравнений. Однако большинство учащихся пытаются получить правильный ответ путем непосредственного решения системы.

У школьников возникают сложности даже с употреблением формул сокращенного умножения. Например, не все могут представить как разность кубов выражение $x - y$ или связать сумму квадратов или кубов двух чисел с их суммой и произведением, что позволило бы, воспользовавшись той же теоремой Виета, рационально справиться с заданием нахождения суммы квадратов или кубов корней квадратного уравнения, непосредственно их не вычисляя.

Некоторые задания приводят школьников к мысли о том, что при огромном дефиците времени залог успеха определяется не аккуратным последовательным выполнением всех необходимых (по их мнению) выкладок, приводящих к ответу, а более глубоким пониманием материала, позволяющим применять непривычные, новые приемы и своеобразные, оригинальные рассуждения. Например, при выборе одного из приведенных в задании промежутков, содержащих корень уравнения $6^{\log_{11} x} + x^{\log_{11} 6} = 72$, надо понимать, что в общем случае показательная и степенная функции не связаны между собой никакими соотношениями, поэтому уравнения, содержащие такие функции, трудно разрешимы. И хотя в конкретном уравнении можно получить ответ путем тождественных преобразований, значение корня здесь проще подобрать ($x = 121$). В задаче нахождения объема треугольной пирамиды, боковые ребра которой попарно перпендикулярны и равны 2, 4 и 9, стандартное представление пирамиды заставило бы с большими трудностями находить площадь ее основания, тогда как в той же пирамиде, но“положенной”на боковую грань, объем находится устно, как одна шестая от произведения заданных в условии длин ребер. В третьем примере при вычислении суммы корней уравнения $(6 - x)\sqrt{x^2 - 7x + 12} = 6x\sqrt{12 + x - x^2} - x^3\sqrt{x - 3} - x$ идет “игра” с областью допустимых значений функций, входящих в уравнение. Оказывается, здесь эта область состоит из двух точек ($x = x$, $x = 4$), которые и надо подставить в уравнение.

Как правило, очень большую сложность для учащихся представляют вопросы, связанные с тригонометрическими и, в особенности, с обратными тригонометрическими функциями. Поэтому желательно хотя бы в краткой форме объяснять школьникам необходимые условия обратимости функций и наиболее важные свойства прямой и обратной функции. Это позволило бы учащимся наиболее наглядно представить два важнейших для функции множества: область ее определения и множество допустимых значений. Без этих знаний весьма сложно, например, вычислить значение выражения $\arcsin(\sin 2)$, которое, очевидно, не равно двум единицам, поскольку область допустимых значений функции $y = \arcsin x$ представляет собой отрезок $[-\pi/2; \pi/2]$. Привлекая геометрическую интерпретацию, легко показать, что $\arcsin(\sin 2) = \pi - 2$. В достаточно сложном задании нахождения функции $y = g(x)$, график которой симметричен относительно прямой $y = -x$ графику функции $f(x) = 2^{x-2}$, необходимо разрешить уравнение $y = 2^{x-2}$ относительно независимой переменной для получения уравнения обратной функции $y = \log_2 4x$, симметричной исходной функции относительно прямой $y = x$, а затем еще двумя симметриями относительно прямых Ox и Oy получить формулу искомой функции $y = -\log_2(-4x)$.

Трудны для школьников задания типа: “если $\sin\alpha = 3/5$, $\cos\beta = 24/25$, $\alpha \in (\pi/2; \pi)$, $\beta \in (3\pi/2; 2\pi)$, то чему равна величина $\sin(\alpha+\beta)$?” Здесь, кроме знания формулы синуса суммы двух углов, необходимо уметь вычислять величину $\sin(\arccos 24/25)$ и $\cos(\arcsin 3/5)$ и не забыть учесть знаки $\sin\beta$ и $\cos\alpha$ в указанных четвертях.

В школьном курсе математики очень мало времени отводится геометрическим способам решения алгебраических задач. Применение этих методов в некоторых случаях значительно ускоряет и облегчает процесс получения верного ответа. Однако, результаты тестирования демонстрируют отсутствие у школьников должных навыков в использовании геометрических методов, например, при решении задач с параметрами. Рассмотрим пример нахождения значения параметра a, при котором уравнение $\sqrt{16\,|x| - 4x^2} = a$ имеет ровно два корня. Для этого, во-первых, требуется найти область допустимых значений переменных x и a ($x \in [-4, 4]$ и $a \in [0, \infty)$), во-вторых, произвести преобразование в виде возведения в квадрат обеих частей уравнения и, в-третьих, построить графики функций $y = 16\,|x| - 4x^2$ и $y = a^2$, содержащихся в левой и правой частях полученного уравнения. При этом очевидно, что при $a = 4$ данные графики пересекаются именно в двух точках.

Значение $a = -4$ не лежит в области допустимых значений a. Отметим также, что из графиков весьма просто увидеть, при каких значениях параметра a исследуемое уравнение имеет три решения, четыре решения или не имеет их вовсе.

Не менее интересна и задача нахождения значения параметра a, при котором сумма целых корней уравнения $|x+2|+|x| = a$ равна -3. Понимая, что графиком функции левой части уравнения является ломаная с горизонтальным отрезком прямой $y = 2$ для значений независимой переменной $x \in [-2, 0]$, а графиком функции правой части – горизонтальная прямая $y = a$ при $x \in (-\infty, \infty)$, очевидно, что графики этих функций пересекаются либо в двух точках (при $x < -2$ и $x > 0$), сумма абсцисс которых не равна предложенному в условии задачи значению -3, либо по целому отрезку $-2 \leqslant x \leqslant 0$ при $a = 2$. При этом значении параметра сумма целых абсцисс точек пересечения двух графиков и равна заданному числу -3. Приведенная интерпретация данной алгебраической задачи позволит школьнику в отведенные ему четыре минуты (средняя длительность решения одной задачи теста) справиться с заданием.

В данном кратком исследовании содержания тестов нельзя подробно остановиться на всех типах предлагаемых заданий. Многие из них весьма интересны не только по содержанию, но и по способу их формулирования, некоторые потребуют значительного времени для решения, если не подойти к нему рационально, отдельные задачи требуют знаний, несколько превышающих школьный уровень. Последний тезис можно проиллюстрировать следующей задачей, связанной с пониманием вопроса о суперпозиции двух функций. Необходимо найти функцию $g(x)$, если $f(x+2) = -x+1$, а $f(g(x)) = 4x+5$. При ее решении прежде всего требуется выделить аргумент $t = x+2$ в двучлене $-x+1$. Имеем $f(x+2) = -((x+2)-3)$, т.е. задана функция $f(t) = -(t-3)$. Во-вторых, $f(g(x)) = -(-4x-5) = -\left[(-4x-2)-3\right]$, откуда $g(x) = -4x-2$.

При анализе тестов, предлагаемых в течение ряда последних лет, прослеживается тенденция к нарастанию их трудности. Хотя формально варианты тестов составлены согласно образовательному стандарту и программе для поступающих в вузы, выполнить задания теста полностью и правильно в отведенное время для большинства школьников достаточно сложно. В свою очередь, облегченные тесты не будут выполнять активизирующей роли в процессе познания и не будут способствовать формированию продуктивных знаний у школьников.

Теория и методика решения уравнений, неравенств и их систем с параметром

Э.С. Беляева, А.С. Потапов, С.А. Титоренко

Уравнения, неравенства и их системы с параметром традиционно входили в курс математики средней школы (до 60 годов XX века). Задачами с параметрами, уровень сложности которых был вполне доступен учащимся, обычно заканчивалась изучаемая тема. И это не случайно. Параметр позволяет задавать целые классы структур (выражений, уравнений, неравенств, систем уравнений (неравенств), геометрических фигур и т.д.). Этим обстоятельством нельзя не воспользоваться для обобщения, систематизации и контроля знаний учащихся по математике. Например, предложив ученику решить неравенство $\log_a x < 3$, мы проверим знание им определения логарифмической функции, ее области определения, умение применять свойство монотонности для каждого из видов неравенств: $\log_a x < 3$, где $a > 1$, и $\log_a x < 3$, где $0 < a < 1$.

Включение параметра в задачный материал школьной математики позволяет не только разнообразить его, но и углубить знания учащихся, выявить пробелы, определить уровень овладения практическими навыками, применять как известные, так и новые методы исследования в нестандартной ситуации. Задачи с параметрами развивают логическое мышление школьников, формируют первоначальные навыки исследовательской деятельности, развивают алгебро-геометрический язык, воспитывают самоконтроль, способствуют искоренению формализма в знаниях, поднимают уровень математической культуры. Причем достичь этого можно на несложных, но дидактически грамотно подобранных системах упражнений с параметром. При этом надо постоянно помнить, что параметр, входящий в условие, существенно влияет на логический и технический ход решения, а также на форму ответа.

Знакомство с параметром в средней школе поможет учащимся - будущим студентам при изучении высшей математики. Большое число математических проблем функционального анализа и других областей высшей математики изначально формулируются как задачи с параметром.

Мы считаем, что тема "Задачи с параметрами" должна занять достойное место в курсе математики общеобразовательной школы, а не только в материалах выпускных и вступительных экзаменов в вузы.

Задания с параметрами, включаемые в ЕГЭ в последние годы, имеют такой уровень сложности, что не под силу даже учителям школ, не говоря об учащихся, многие из которых впервые встречаются с такими упражнениями только на экзамене.

В имеющейся учебно-методической литературе, посвященной задачам с параметрами, нет четкой трактовки основных понятий (параметра, области определения уравнения (неравенства) с параметром, что значит решить уравнение (неравенство) с параметром и др.). И каждый авторский коллектив производит свою классификацию задач с параметром: по особенностям математической деятельности, необходимой для решения задачи [4]; по важнейшим темам школьного курса математики [5]; по некоторому узкому кругу вопросов и т.д. И во многих из этих пособий не соблюдены основные дидактические принципы. Поэтому они трудны для восприятия учащимися средних школ, да и не только ими.

Остановимся на понятии "параметр".

Существует несколько определений понятия "параметр". Рассмотрим некоторые из них.

"Параметр (от греч. $\pi\alpha\rho\alpha\mu\epsilon\tau\varpi\upsilon$) – величина, значения которой служат для различения элементов некоторого множества между собой" [1]. Например, в декартовых координатах уравнение $y = ax^2$, $a \neq 0$, задает множество всех парабол с вершинами в начале координат. И при конкретном значении $a \in \mathbf{R}$ мы получаем одну из парабол этого семейства.

В задачах с одним параметром разделительная функция параметра может проявляться по-разному.

1. В зависимости от значений параметра может изменяться вид уравнений (неравенства). Например, уравнение $(b-2)x^2+2x-3=0$ при $b=2$ является линейным, а при $b \neq 2$ – квадратным.

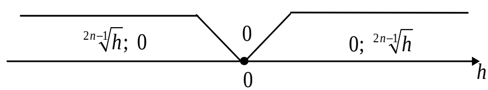
2. Ось параметра, используемая при решении уравнений и неравенств с параметром, делится на промежутки, на которых удается проследить качественные изменения структуры множества решений [7–11].

3. Изменяясь непрерывно, параметр может принимать критическое значение, начиная с которого резко изменяется множество корней уравнений (неравенства).

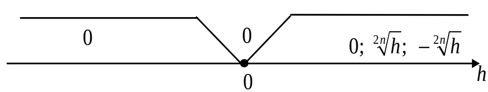
Пример. Даны уравнения с параметром h:

$$x = (1-h)x + x^k, \quad \text{г} \quad k \in \mathbf{N}, \quad k \geqslant 2. \tag{1}$$

Все эти уравнения имеют при любом h решение $x=0$, которое будет единственным при $h=0$. Нас будут интересовать случаи, когда уравнения (1) имеют решения $x(h) \neq 0$ такие, что $x(h) \to 0$ при $h \to 0$. При $k=2n$, $n \in \mathbf{N}$, множество ненулевых решений уравнения (1) задается формулой $x = \sqrt[2n-1]{h}$ ($x \to 0$ при $h \to 0$).



При $k = 2n+1$, $n \in \mathbf{N}$, картина несколько иная. Если $h \leqslant 0$, то ненулевых решений нет. Если $h > 0$, то имеем две ветви решений: $x = \sqrt[2n]{h}$, $x = -\sqrt[2n]{h}$.



Видим, что при нечетном k при изменении h значение $h=0$ является критическим. При нем происходит скачкообразное изменение количества корней. Общая задача для уравнений типа (1) в бесконечномерном пространстве была подробно изучена М.А. Красносельским и его учениками [3].

Нам представляется более доступным для учащихся следующее определение параметра.

“Неизвестные величины, значения которых задаем мы сами, называются параметрами” [2]. Там же читаем: “Какие неизвестные следует выбрать в качестве параметров, обычно определяется уже самим подходом к исследованию выражения”.

Пусть, например, нужно решить уравнение

$$x^4 + x^3 - x^2(1+2a) - x(a+1) + a^2 + a = 0.$$

Легко видеть, что в роли параметра лучше сначала выбрать x и решать квадратное относительно a уравнение. Получим:

$$\left[\begin{array}{l} a = x^2 - 1, \\ a = x^2 + x. \end{array}\right.$$

А теперь поменяем x и a ролями. Тогда остается решить два квадратных относительно x уравнения:

$$\left[\begin{array}{l} x^2 = a + 1, \\ x^2 + x - a = 0. \end{array}\right.$$

Из приведенных выше двух определений следует, что параметр является переменной величиной и имеет при этом двойственную природу: 1) параметр – число; 2) параметр – неизвестное число.

Его первая функция позволяет обращаться с параметром, как с числом. А вторая создает дополнительные трудности в работе с параметром, ограничивая свободу общения его неизвестностью.

Будучи убежденными в необходимости планомерного изучения в курсе математики средней школы задач с параметром, мы попытались разработать теорию и методику решения уравнений, неравенств и их систем с параметром, подобрали системы упражнений, классифицируя их по видам функций в соответствии с программой по математике общеобразовательных школ [7–11]. Часть задач может включаться в содержание уроков и домашних заданий, другие – в факультативные курсы по математике.

Остановимся на методических особенностях наших пособий, которые прошли многолетнюю апробацию в школах и вузах г. Воронежа, Воронежской и ряда других областей. Изданные книги [7–11] рекомендованы УМО по специальности педагогического образования в качестве учебных пособий, обучающихся по специальности 032100 – математика.

В каждом из пособий содержится пункт “Основные понятия”.

Сформулируем определения основных понятий.

Определение 1. *Пусть дано равенство с переменными x и a: $f(x;a)=0$. Если ставится задача для каждого действительного значения a решить это уравнение относительно x, то уравнение $f(x;a)=0$ называется уравнением с переменной x и параметром a.*

Определение 2. *Под областью определения уравнения $f(x;a)=0$ с параметром a будем понимать все такие системы значений x и a, при которых $f(x;a)$ имеет смысл.*

Заметим, что иногда область определения уравнения устанавливается довольно легко, а иногда в явном виде это сделать трудно. Тогда ограничиваемся только системой неравенств, множество решений которой и является областью определения уравнения. Этого бывает, как правило, достаточно для решения уравнения.

Примеры:

1. $2x-a=a+1$. О.О.У.: $\begin{cases} x\in\mathbf{R}, \\ a\in\mathbf{R}. \end{cases}$

2. $\frac{x}{a}+x^2=\sqrt{x}$. О.О.У.: $\begin{cases} x\geqslant 0, \\ a\neq 0. \end{cases}$

3. $\frac{x-2c+1}{cx-3}=0$ О.О.У.: $\begin{cases} cx\neq 3, \\ c\in\mathbf{R}. \end{cases}$

4. $\log_{(a-1)}(x^2-a^2)=3$ О.О.У.: $\begin{cases} x^2-a^2>0, \\ a>1, \\ a\neq 2. \end{cases}$

Определение 3. *Под решением уравнения $f(x;a)=0$ с параметром a будем понимать систему значений x и a из области определения уравнения, обращающую его в верное числовое равенство.*

Определение 4. *Решить уравнение $f(x;a)=0$ с параметром a – это значит, для каждого действительного значения a*

найти все решения данного уравнения или установить, что их нет.

Договоримся все значения параметра а, при которых $f(x;a)$ не имеет смысла, включать в число значений параметра, при которых уравнение не имеет решений.

Определение 5. *Уравнения* $f(x;a)=0$ и $\varphi(x;a)=0$ *равносильны при фиксированном значении* $a=a_0$, *если уравнения без параметра* $f(x;a_0)=0$ и $\varphi(x;a_0)=0$ *равносильны.*

Пример. Найдите все значения параметра a, при которых уравнения $(a-1)x=a-2$ и $(a-1)x=3a-8$ равносильны.

Решение.

1. При $a=1$ оба уравнения решений не имеют, а потому равносильны.

2. Если $a\neq 1$, то $x=\frac{a-2}{a-1}$ – решение первого уравнения, $x=\frac{3a-8}{a-1}$ – решение второго уравнения.

Найдем значения a, при которых эти решения равны.

$$\frac{a-2}{a-1}=\frac{3a-8}{a-1},\ a=3.\ \text{При}\ \ a=3,\ x=\frac{1}{2}.$$

Ответ: $a=1$; $a=3$.

Определение 6. *Уравнение* $f(x;a)=0$ *является следствием уравнения* $\varphi(x;a)=0$ *при некотором значении* $a=a_0$, *если множество решений уравнения* $\varphi(x;a_0)=0$ *содержится среди множества решений уравнения* $f(x;a_0)=0$.

Пример. При каких значениях a неравенство $2x>a$ (1) является следствием неравенства $3x+2\geqslant 2a$ (2)?

Решение. Решаем каждое из неравенств:

$(1)\left\{\begin{array}{l} a\in\mathbf{R},\\ x>\frac{a}{2}.\end{array}\right.\quad (2)\left\{\begin{array}{c} a\in\mathbf{R},\\ x\geqslant\frac{2a-2}{3}.\end{array}\right.$

А теперь достаточно решить неравенство

$$\frac{2a-2}{3}>\frac{a}{2}:\quad 4a-4>3a,\quad a>4.$$

Ответ: $a\in(4;+\infty)$.

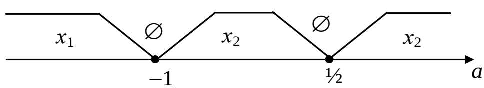
2. Широко используется координатная прямая параметра, которая служит не только для иллюстрации аналитического решения, но является инструментом работы. Это помогает снять проблему записи ответа (он легко считывается с оси). Завершение заполнения координатной прямой параметра обычно служит сигналом окончания решения (если задание не содержит дополнительных условий).

При решении тригонометрических уравнений и неравенств применяется и вторая модель множества действительных чисел – единичная окружность.

Пример. Решите уравнение $\frac{ax+1}{x+2} = 2a + 1$.

Решение.

О.О.У.: $\begin{cases} x \neq -2, \\ a \in \mathbf{R}. \end{cases}$



$$ax + 1 = 2ax + x + 4a + 2, \quad x(a+1) = -1 - 4a.$$

1. $a = -1 : x \cdot 0 = 3$. Решений нет.
2. $a \neq -1 : x_1 = -\frac{1+4a}{a+1}$.

Исследование.

1. $\begin{cases} x_1 = -\frac{1+4a}{a+1}, \\ -\frac{1+4a}{a+1} \neq -2, \\ a \neq -1, \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = -\frac{1+4a}{a+1}, \\ a \neq \frac{1}{2}, \\ a \neq -1. \end{cases}$ 2. Если $a = \frac{1}{2}$, то решений нет.

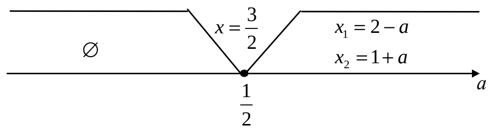
Ответ: Если $a \neq -1$, $a \neq \frac{1}{2}$, то $x = -\frac{1+4a}{a+1}$. Если $a = -1$ или $a = \frac{1}{2}$, то решений нет.

3. Графическая интерпретация ответа, особенно в начале работы с параметром, помогает лучше увидеть связь переменной и параметра в уравнении (неравенстве), а также глубже понять природу параметра.

Пример. Решите уравнение $|3 - 2x| = 2a - 1$.

Решение.

О.О.У.: $\begin{cases} x \in \mathbf{R}, \\ a \in \mathbf{R}. \end{cases}$

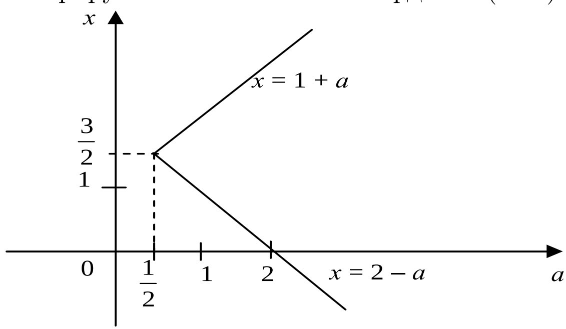


1. $a = \frac{1}{2} : |3 - 2x| = 0,\ x = \frac{3}{2}.$

2. $a > \frac{1}{2} : \left[\begin{array}{l} 3 - 2x = 2a - 1, \\ 3 - 2x = -2a + 1, \end{array} \right. \quad \left[\begin{array}{l} x_1 = 2 - a, \\ x_2 = 1 + a. \end{array} \right.$

3. $a < \frac{1}{2}$: решений нет.

Проиллюстрируем ответ в системе координат (aOx).



4. Разработанные содержание и методика решения уравнений и неравенств с параметром позволяет знакомить учащихся с параметром, начиная с 7 класса (и даже раньше), а затем продолжать далее по мере изучения основных видов функций и соответствующих им классов уравнений и неравенств (без увеличения количества часов).

5. Все пособия [8–11] содержат необходимый справочный материал, который предшествует изложению заданий с параметром.

Цель такого раздела – систематизация основных сведений по видам функций; построение теории равносильности уравнений и неравенств и ее применение при решении базисных типов уравнений и неравенств без параметра, а затем и с параметром.

6. Почти все разделы, посвященные уравнениям и неравенствам с параметром, начинаются с подготовительных упражнений, кото-

рые помогут ученику перейти к более сложным заданиям, являясь как бы своеобразным “переходным мостиком”. А слабым учащимся, возможно, будет достаточно овладеть приемами решения хотя бы только таких уравнений (неравенств).

7. Базисные упражнения пункта решаются авторами с подробным объяснением, а для закрепления читателю предлагается решить серию аналогичных заданий. Такое построение пособий позволяет использовать их и для самостоятельного изучения материала.

8. Сложность задач возрастает постепенно. Завершается каждый раздел более трудными упражнениями, в том числе и олимпиадными. Объем изучаемой информации можно определять в соответствии с уровнем подготовленности обучаемых, т.е. осуществлять дифференцированный подход.

9. Авторы отдают предпочтение аналитическому методу решения уравнений, неравенств и их систем с параметром, как более богатому своими дидактическими возможностями. Но активно привлекается и графический метод решения в системах координат (xOy), (aOx), (xOa) там, где он более эффективен.

10. Значительная часть упражнений решается несколькими способами, что позволяет обобщить и систематизировать более обширный теоретический и практический материал.

Библиографический список

1. Математический энциклопедический словарь. М.: Советская энциклопедия. 1988. С. 451.
2. *Фрид Э. и др.* Малая математическая энциклопедия. Будапешт: Изд-во Академии наук Венгрии, 1976. С. 84.
3. *Красносельский М.А., Забрайко П.П.* Геометрические методы нелинейного анализа. М.: Наука, 1979. С. 512.
4. *Горштейн П.И., Полонский В.Б., Якир М.С.* Задачи с параметрами. Киев: РИА “Текст”, МП “ОКО”, 1992.
5. *Амелькин А.А., Рабцевич В.Л.* Задачи с параметрами. Справочное пособие по математике. Минск: “Асар”, 1996.

6. *Гусев В.А., Мордкович А.Г.* Математика. Справочные материалы. М.: Просвещение, 1988.
7. *Беляева Э.С., Потапов А.С.* Уравнения и неравенства с параметром первой степени и к ним сводимые: Учебное пособие. Воронеж: ВГПУ, 2001. 80 с.
8. *Беляева Э.С., Потапов А.С., Титоренко С.А.* Уравнения и неравенства второй степени с параметром и к ним сводимые: Учебное пособие. Воронеж: ВГПУ, 2001. 191 с.
9. *Беляева Э.С., Потапов А.С.* Тригонометрические уравнения и неравенства с параметром: Учебное пособие. Воронеж: ВГПУ, 2001. 179 с.
10. *Беляева Э.С., Потапов А.С., Титоренко С.А.* Иррациональные уравнения и неравенства с параметром: Учебное пособие. 2-е издан., перераб., испр. и доп. Воронеж: ВГПУ, 2004. 239 с.
11. *Беляева Э.С., Потапов А.С.* Показательные и логарифмические уравнения и неравенства с параметром: Учебное пособие. Воронеж: ВГПУ, 2002. 256 с.

О концепции обучения математике учащихся начальной школы на основе информационно-категориального подхода

Г.Л. Луканкин, Т.Ф. Сергеева

Современный мир, включая Россию, вступил в XXI – век образования. Общество будущего – это общество с востребованным образованием. Поэтому важнейшая задача настоящего этапа модернизации системы образования состоит в создании условий для развития знаний и умений, формирования навыков и достижения учащимися необходимого уровня компетентности. Настоящий этап развития социума характеризуется его вступлением в новую фазу – “информационное общество”. Уже сегодня можно предвидеть, что главным общественным продуктом, обеспечивающим интенсификацию всех сфер экономики, интеллектуализацию основных видов человеческой деятельности, станет информация.

Создание условий, позволяющих личности адаптироваться в условиях возрастания информационной емкости мира, быть способной мобильно осваивать новые технологии получения, переработки и распространения информации, и составляет, на наш взгляд, главную цель образования. Именно ему принадлежит в этом процессе ведущая роль, поскольку в образовательном пространстве начинают свое формирование социальные, психологические и профессиональные предпосылки информатизации общества в целом.

Этот процесс потребует переосмысления существующих подходов к обучению с точки зрения их адекватности сложившимся реалиям, а также разработки новых.

Предлагаемый информационно-категориальный подход призван, прежде всего, обеспечить универсальность образования, что позволяет сделать первый шаг в достижении этой цели. Основные концептуальные идеи отражены в следующих положениях:

1. Универсальность содержания образования может быть достигнута, если создать систему, включающую спектр образовательных областей, каждая из которых была бы представима в форме языка познания и отражения окружающего мира, и разработки внутри каждой из них содержания обучения, основанного на выделении определенных категорий (обобщенных понятий, формирующих "язык" данной образовательной области, что позволяет проводить описание предметов, явлений и процессов во внешней среде).

2. Одновременно с формированием системы категорий должно осуществляться обучение способам деятельности, как специальных – для того или иного предмета, так и универсальных, что в совокупности составит основу информационной культуры как одной из составляющих общей культуры человека.

3. Обеспечение универсальности образования предполагает создание условий для сохранения самобытности каждой личности, развития ее интересов и способностей.

Данные концептуальные идеи могут стать основой для построения образовательной программы, основными компонентами которой являются познание окружающего мира (внешняя среда) и самопознание (внутренний мир). Каждый из этих процессов проходит несколько этапов (см. схему 1).

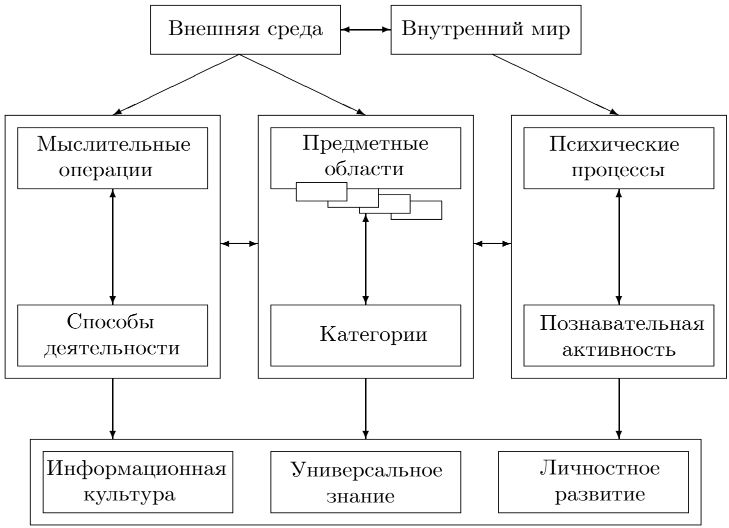


Схема 1

Процесс познания окружающего мира начинается с перевода его объектов и явлений в понятия определенной предметной области. При этом происходит овладение мыслительными операциями сравнения, анализа, синтеза, обобщения, абстрагирования и др.

Следующий этап – выстраивание иерархии понятий, в результате чего образуется совокупность категорий, которая, в свою очередь, становится основой универсального знания.

Параллельно с освоением содержания образования продолжается работа, направленная на формирование у обучаемых способов деятельности, важнейшими из которых выступают кодирование, алгоритмизация и моделирование.

Особое внимание должно быть уделено формированию личности учащегося, которое также проходит несколько стадий: от определенных психических процессов (памяти, мышления, восприятия, воображения и т.д.) к воспитанию познавательного интереса и активности и далее - к диагностике и развитию индивидуальных способностей.

Принципы отбора категорий, составляющих предметное содержание, заключаются в следующем:

1. Каждая категория – фундаментальное понятие, определяющее "язык" данной предметной области и обладающее широким прикладным значением.

2. Категория может быть адаптирована к данному этапу обучения.

3. Категории, составляющие основу содержания одной предметной области, могут быть интегрированы в любую другую.

Информационное пространство действия каждой категории складывается из понятий, свойств, операций и моделей. Процесс трансляции объектов окружающего мира в предметное содержание отражен на схеме 2.

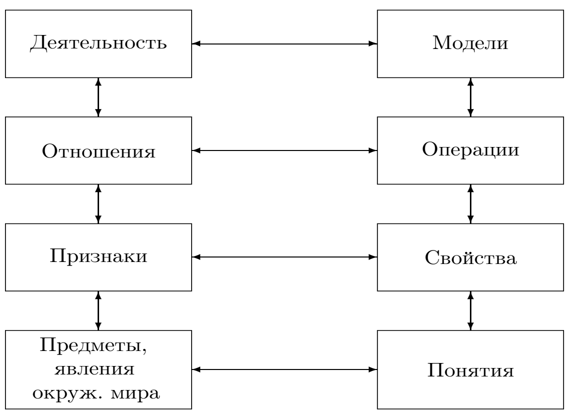


Схема 2

В соответствии с приведенными в первой главе работы концептуальными идеями система категорий, составляющих основу начального курса математики может быть представлена следующим образом (см. таблицу 1).

Категория	Понятия
Форма	Точка, прямая, кривая, ломаная, угол, многоугольник (и его разновидности), круг, овал, куб, прямоугольный параллелепипед, шар.
Пространство	Понятия, описывающие расположение предметов на листе бумаги и в пространстве: а) относительно выбранного ориентира; б) относительно друг друга. Пересекающиеся и параллельные прямые. Числовой луч и числовая прямая. Расположение чисел на числовой прямой.
Величина	Множество, элементы множества. Число. Цифра. Целые неотрицательные числа. Отрицательные числа. Масса, длина, емкость, площадь, объем. Мера. Измерение. Единица измерения длины, массы, емкости, площади и объема.
Модель	Объединение, пересечение множеств. Выделение подмножества из множества. Удаление части множества. Сложение, вычитание, умножение, деление. Знаки и компоненты арифметических действий. Числовые и буквенные выражения. Уравнения. Неравенства. Задача и ее компоненты.

Каждая категория в совокупности с соответствующей системой понятий составляет содержание определенного раздела программы по математике. Так, категории “форма” и “пространство” – геометрического, “величина” – арифметического и “модель” – алгебраического и текстовых арифметических задач. Категория изменение пронизывает все разделы программы начального курса математики и потому не выделяется в отдельную систему.

Процесс формирования информационной культуры при изучении основных разделов начального курса математики можно условно разделить на несколько этапов.

Первый этап заключается в том, что в объектах, предметах и явлениях окружающего мира выделяются признаки или свойства, подлежащие описанию на языке математики (например, количество, длина и др.). Основной задачей этого этапа является научить учащихся выявлять существенные признаки и свойства предметов и абстрагироваться от несущественных.

Второй этап характеризуется переводом уже собственно математических понятий на язык математических символов, т.е. происходит процесс кодирования информации, обучение которому проходит, в свою очередь, несколько стадий: от условных обозначений с помощью геометрических фигур до использования буквенной символики.

Следующий этап – знакомство с известными алгоритмами, обучение их исполнению и овладение умениями составлять собственные алгоритмы решения задач на основе известных. Следует отметить, что существует достаточно большой круг вопросов начального курса математики, которые поддаются алгоритмизации (в частности, приемы вычислений, решение уравнений и др.).

Четвертый этап – работа с математическими моделями или их конструирование. Надо сказать, что этот этап может в некоторых случаях отсутствовать. Наиболее характерной иллюстрацией такой работы может служить следующие задания: составьте задачу по данному уравнению, подберите к данному чертежу соответствующее числовое выражение и др.

Концепция информационно-категориального подхода позволяет успешно реализовать в обучении так же компетентностный подход.

На основе концепции авторами подготовлен учебно-методической комплект по математике для начальной школы, который прошел экспериментальную проверку. В настоящее время начата работа по созданию курса математики для неполной средней школы.

О технологии конструирования процесса обучения математике в технических вузах

К.В. Курочкина

Изменения, происходящие в образовании, относятся как к педагогике в целом, так и к конкретным педагогическим технологиям. Эти изменения носят противоречивый и разнонаправленный характер. С одной стороны, потребности общества в качественном и доступном высшем образовании, рост числа вузов и количества студентов, развитие разнообразных форм обучения, увеличение объемов и сложности учебной информации обусловили новые высокие требования к качеству подготовки специалистов.

С другой стороны – негативные тенденции: сокращение количества часов, недостаточность и неоднородность подготовки абитуриентов, нехватка методического обеспечения, кадровые проблемы и другие.

Эти процессы обусловили повышение требований к научной организации учебного процесса, его моделированию и технологичности.

Одним из направлений теоретических и практических исследований является создание таких моделей учебного процесса, которые позволяют оптимальным образом конструировать процессы обучения различным дисциплинам для одной или нескольких специальностей технических вузов, ввести качественные и количественные оценки его эффективности, а также обеспечить регулярный контроль со стороны организующих и контролирующих органов.

Тем не менее, большинство имеющихся моделей и технологий конструирования учебного процесса относятся к отдельным дисциплинам и не носят универсального характера. В то же время повышение требований к математической подготовке специалистов, введение новых Государственные общеобразовательных стандартов, предусматривающие обучение разделам математики, ранее не изучавшимся в технических вузах, дифференциация математических дисциплин по группам специальностей, делают особенно актуальной разработку научного обоснованных и практически реализуемых моделей и технологий конструирования процессов обучения математическим дисциплинам.

В связи с этим при создании рабочих программ и практической реализации процесса обучения математике необходима общая и достаточно гибкая технология.

Так как в педагогической литературе отсутствуют единые определения, уточним конкретный смысл понятий "технология", "интеграция", "блочно-модульный метод". Теме доклада наиболее полно соответствуют определения В.М. Монахова: "Технология – это проект определенной педагогической системы, реализуемый на практике", М.П. Сибирской "интегративность – взаимовозникающая проблемная, методологическая, терминологическая связь в содержании курсов" и идея блочно-модульного метода Ф.У. Тейлора и Г. Форда: выделение автономной единицы – модуля в том или ином образовательном комплексе или процессе, которая затем может быть введена в формируемый комплекс или процесс (блок). При этом модули в зависимости от исследуемой проблемы, могут быть связаны между собой различным образом. Несмотря на распространенность и широкую применимость, блочно-модульные технологии не лишены существенных недостатков. Все они не допускают естественных количественных и качественных оценок сконструированных с их помощью образовательных процессов. Для совершенствования блочно-модульного подхода нами предлагается воспользоваться основами теории графов, частным случаем которой, является блочно-модульный подход.

Сформулируем основные требования, предъявляемые к разрабатываемой модели учебного процесса и отвечающие общедидактическим принципам вузовского обучения:

– наглядность структурно-логического построения процесса обучения;

– возможность оптимизации структуры процесса обучения;

– возможность оценок оптимальности процесса обучения;

– технически простая корректировка процесса;

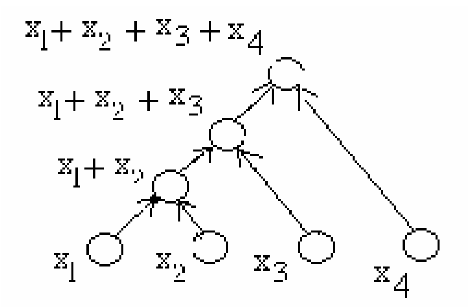
– возможность учета межпредметных связей;

– простота контроля процесса обучения со стороны кафедры, деканатов, учебной части.

Чтобы решить эту проблему необходимо разработать такую модель учебного процесса, которая позволяет отразить его различные стороны.

Из определения процесса обучения, данное академиком А.М. Новиковым – "педагогический процесс представляет собой *совокупность последовательных и взаимосвязанных действий* педагогов и учащихся, *направленных на* сознательное и прочное усвоение системы знаний, навыков и умений, формирование способности применять их на практике" выделим ключевую часть фразы. То есть подчеркнем, что педагогический процесс является процессом *направленным, последовательным, накопительным и конечным.*

По идейной сущности за основу модели любого образовательного процесса нами предлагается принять граф процесса *последовательного сложения нескольких чисел*, изображенный на нижеприведенном рисунке.



При конструировании учебного процесса числа обозначают так называемые события, а стрелки – логические связи, последовательно связывающие эти события. События представляют собой факт завершения какого-либо процесса, получение определенного результата. Например, процессы завершения изучения отдельных элементов учебного материала (модулей). Таким образом, в основании модели будут указываться номера элементов знаний, навыков и умений по теме определенного учебного материала, а стрелки характеризуют связь между этими элементами. Модель в ходе конструирования учебного процесса может трансформироваться и наклонная прямая может отражать не только накопление знаний, умений и навыков, но в зависимости от наполнения модулей и их смысла и другие компоненты.

Составление предложенной модели учебного процесса по математическим дисциплинам желательно подчинить разработанным и апробированным на практике правилам:

1. Преподаватель, составляющий рабочую программу по предмету, должен с необходимой для выполнения целей обучения полнотой представлять себе курс в целом, видеть большинство внутрипредметных связей между различными темами предмета. Иметь значительный опыт чтения лекций различных типов, проведения практических занятий различных форм, владеть традиционными методами контроля. При этом он должен ориентироваться на ГОС по дисциплине, базовый уровень подготовки студентов, уровень наличия компонентов наполнения учебного модуля.

2. В основании графа должны находиться события, имеющие самостоятельно значение. При необходимости или целесообразности их можно менять местами, дробить на более мелкие части, исключать или вводить новые – то есть моделировать практически любые особенности процесса обучения.

3. При проектировании графа необходимо избегать кратных дуг или петель. Несоблюдение этого правила может сподвигнуть неопытного преподавателя на дублирование материала или к проведению занятий на разные темы с группой студентов в одной аудитории несколькими преподавателями сразу (хотя такое принципиально и возможно в случае наличия группы квалифицированных преподавателей, проводящих занятия в компьютерном классе). Лучше занятия с *необходимыми* повторами материала включать в граф в виде отдельной вершины.

4. В силу того, что при выполнении данных правил построения получается граф, у которого все вершины и все дуги различны, можно ввести *количественную характеристику* графа и назвать ее по аналогии с теорией графов “*длиной маршрута*”, или его (маршрута) части. Эта длина определяется однозначно длиной дуг в порядке их прохождения. Для определения длины дуги, то есть

расстояния между вершинами, нами вводится единица измерения, равная количеству учебных аудиторных часов, требующихся для изучения какого-либо раздела или всего предмета в целом. (Расширяя границы применения модели, можно проставлять, например, часы самостоятельной работы студентов или и то, и другое).

5. Контрольные и курсовые работы, работы по дипломному проектированию, зачеты, экзамены и т.д. следует включать в граф отдельной вершиной в полном соответствии с очередностью в учебном процессе, то есть после завершения определенного этапа обучения или всего процесса в целом.

В силу того, что при выполнении данных правил построения получается граф, у которого все вершины и все дуги различны, можно ввести количественную характеристику графа и назвать ее по аналогии с теорией графов “длиной маршрута”, или его (маршрута) части. Эта длина определяется однозначно суммой длин дуг в порядке их прохождения. Для определения длины дуги, то есть расстояния между вершинами, вводится единица измерения, равная *количеству учебных аудиторных часов*, требующихся для изучения какого-либо раздела или всего предмета в целом. (Расширяя границы применения модели, можно проставлять, например, часы самостоятельной работы студентов или и то, и другое).

Для сравнительной оценки *количественных характеристик* структурной сложности образовательного процесса может быть использована *степень* (или сложность) *графа*, определяемая как отношение удвоенного числа дуг к числу всех вершин графа.

При реализации модели были обобщены способы построения матриц связей. Это касается введения единой структуры матриц связи и единых – принятых в математике правил их построения при подготовке рабочей программы по предмету или специальности в целом.

Наличие единообразно составленных матриц как внутрикафедрального, так и межкафедрального использования позволяет

– пределить правильную последовательность изучения предметов в процессе обучения и приблизиться к верному варианту изложения тем и разделов предмета;

– более глубоко понять логическое и структурное построение процесса обучения и мировоззренческих особенностей предмета;

– при необходимости установить структурные особенности корректировки процесса обучения;

– с достаточной полнотой выявить межпредметные связи при обучении как предмету, так и по специальности в целом;

– определить комплектность и очередность оснащения учебного процесса методической и учебной литературой.

Предлагаемая технология конструирования состоит из нескольких этапов.

1. Организация принятия *директивного документа* о совместной работе по отбору и структурированию материала специалистов выпускающих и смежных кафедр. Вопрос о совместной работе обычно плохо решается. Такое положение хорошо соотносится с известными энергетическими принципами естествознания и социально-психологической “теорией X” Дугласа Мак Грегора [2].

2. При *отборе содержания* реального интеграционного учебного процесса, связанного с изучением любой математической дисциплины, на практике необходимо учитывать следующие факторы: неоднородность физико-математической подготовки студентов не только различных специальностей, но и различных форм обучения; содержательную наполненность изучаемого курса применительно к специальным знаниям будущего инженера; полноту содержания материала в пределах отведенного времени изучения; преемственность содержания курса с комплексным восприятием ранее полученных знаний о научной картине мира, целостности представлений о нем; единство и дифференциацию эмпирической и теоретической информаций, относящихся к сущностным характеристикам объектов и процессов, характерных для конкретной специализации обучающегося.

Действия желательно выполнять в следующей последовательности.

1.1. Содержание соответствующего конкретной специальности центрального (предметного) блока предлагается определять на основе анализа материала на предмет дублирования и обеспечения преемственности на межпредметных уровнях, точнее – уровне специальных знаний. При этом нужно учитывать временную корреляцию, и выявлять пересекающиеся по содержанию разделы. На этом основании делается заключение о целесообразности включения той или иной информации в массив содержания предмета, не нарушая при этом фундаментальности самой науки. Это позволяет не только избежать дублирования, уменьшить количество отводимых часов для изучения того или иного раздела, но и придать курсу большую обобщенность и мировоззренческую корректность.

2.2. Отбор содержания учебного процесса предполагает анализ массива содержания в плане обеспечения всех целей обучения. За основные компоненты, которым, кроме перечисленных, должен удовлетворять этот массив, желательно принимать: полноту содержания и его внутреннюю целостность; полноту системы основных идей и концепций той или ной дисциплины; соответствие знаний задачам профессиональной деятельности обучаемого.

2.3. Как понятия, так и основное содержание математики и смежных дисциплин выпускающей кафедры, рекомендуется располагать в последовательности, обеспечивающей постепенное и более глубокое изучение материала. Для обеспечения усвоения знаний в ходе работы по внедрению в учебный процесс предложенной технологии перерабатывалось содержание каждого изучаемого раздела математики по специальности со специалистами смежных и выпускающей кафедр.

Тем самым установливаливаются межпредметные связи, благодаря которым учебная программа разгружается от дублирования, а эффективность усвоения знаний значительно повышается, достижение чего является не только актуальной, но и исключительно трудной задачей. При таком подходе приходится увязывать принципиальные вопросы, используя понятия и идеи как из разделов математики, так и из курсов по специальности.

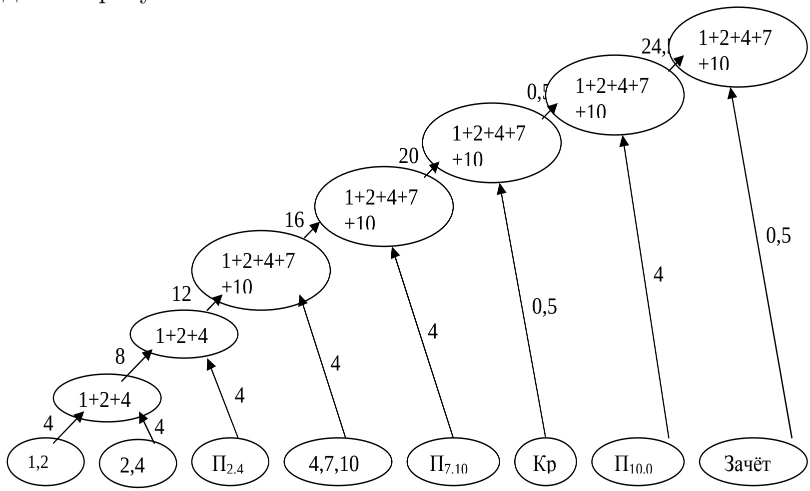
3. При тщательно выполненной работе, перечисленной выше, *структурирование* содержания обучения практически вызывает лишь субъективные трудности. Связаны они с определением необходимого для обучения тому или иному разделу математики (модулю) количества часов аудиторной работы, а также с установлением выражающихся в этих же часах количестве и видах форм контроля (контрольные работы для заочной формы обучения, коллокви-

умы, зачеты и экзамены) и переносе вычислений в компьютерные классы.

На практике предложения по количеству аудиторных часов, отводимых на аудиторное обучение, целесообразно готовить с помощью учебно-методической комиссии и утверждать на заседании кафедры.

4. Предполагается, что *остальные этапы* конструирования учебного процесса: определение требований к знаниям и умениям по каждой теме; планирование лабораторных, практических и контрольных работ; определение объема и содержания самостоятельной работы студентов; определение параметров курсового проекта; рекомендации по рациональному выбору форм организации обучения - выполняются на основе традиционных технологий.

Примером, иллюстрирующим простоту и полезность составления графа предложенного вида, может служить граф предмета "методы оптимизации", в настоящее время широко введенного на факультетах "Управление и информатизация" и "Технологический менеджмент" МГУТУ (Московский государственный университет технологий и управления). Отдельные модули этого предмета входят также в программу обучения некоторым специальностям факультета "Экономика и предпринимательство". При этом программы обучения для большинства специальностей отличаются друг от друга содержанием, количеством часов самостоятельной и аудиторной работы, методами контроля, временем обучения и ориентацией на форму обучения. Для всех специальностей, в программу обучения которых входит данный предмет, определена своя структура стандарта по предмету. Для его создания использовалась предлагаемая технология. Общее количество модулей превышает двадцать. Рабочие программы по данному курсу составлялись нами после отбора модулей, необходимых для той или иной специальности (работа проводилась совместно с представителями выпускающих кафедр), а также учета межпредметных связей с дисциплинами, входящими в Государственный стандарт по соответствующей специальности. Неотъемлемой частью рабочей программы являлся граф процесса обучения. В обозначениях работы [3] для студентов-технологов полной заочной формы обучения специальностей 2701, 2703, 2704, 2705 граф изображен на нижеприведенном рисунке.



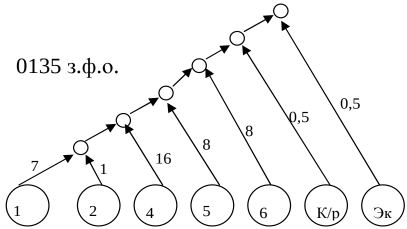
В блок предмета входят следующие модули (приводятся только названия, являющиеся для математика ключевыми словами): "Вводный" – 1; "Классическое вариационное исчисление" – 2; "Корреляционный и регрессионный анализ" – 4; "Исследование операций (методы выработки качественно обоснованных рекомендаций по принятию решений)" – 7; "Линейное программирование" – 10. В качестве форм контроля предусмотрены контрольная работа и зачет.

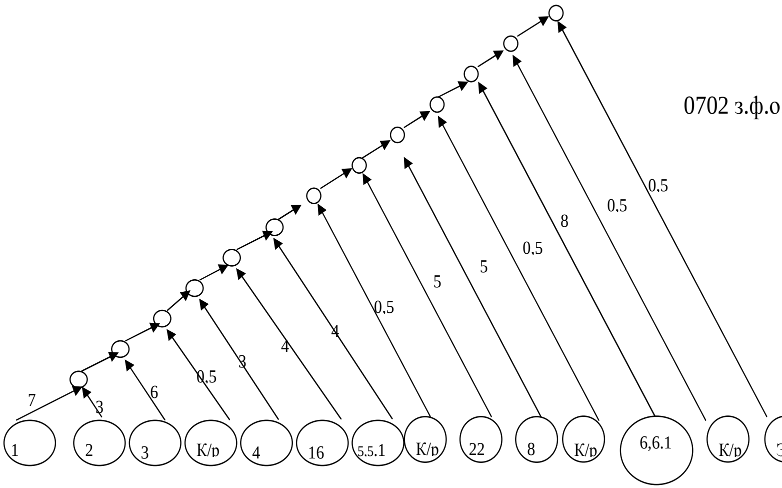
В нижней строке графа его восемь вершин соответствуют трем запланированным лекциям, трем практическим занятиям, контрольной работе и зачету. Цифры в вершинах соответствуют номерам модулей, на основе которых построены четырехчасовые лекции или практическое занятие. Индексы в обозначении практического занятия $П_{i,j}$ указывают на тематику практического занятия. Количество индексов при необходимости может быть увеличено. Если j=0, это означает, что занятие посвящено одной теме, соответствующей номеру i. На дугах графа указана длина маршрута в аудиторных часах (контрольная работа выполняется в межсессионный период; количество аудиторных часов, отводимых на контрольную работу и зачет зависит от численности потока студентов). Для определенности в рассматриваемом случае оно принято за 0,5 часа соответственно. Вершины наклонной, суммирующей, линии отражают ход учебного процесса, суммарное число аудиторных часов, отводимых на изучение курса, то есть, в конечном счете, динамику процесса обучения.

Из анализа структуры графа видно, что лишние учебные элементы отсутствуют.

Практика работы показывает: организованный процесс обучения может быть выполнен лишь при активной работе и студентов и преподавателей. Незначительное отступление от заданной программы при условии, что средний уровень усвояемости знаний потока студентов по базовому курсу математики не выходит за границы между "удовлетворительно" и "хорошо", создает и преподавателю, и студентам значительные трудности в процессе обучения, которые могут быть восполнены упорной самостоятельной работой студентов и активным использованием времени текущих консультаций.

На нижеприведенных рисунках изображены графы, составленные по действующим до недавнего времени в МГУТУ тематическим планам первого курса двух различных специальностей (0135 – "Биоэкология" (тематический план полностью совпадает с тематическим планом специальности 3117 – "Водные биоресурсы и аквакультура") и 0702 – "Техника и физика низких температур" заочной форм обучения). Количество аудиторных часов (22 часа лекций и 28 часов практики), отведенное на аудиторные занятия для студентов этих специальностей одинаковое. На дугах графа приведено в цифрах общее количество часов аудиторных занятий.





Под цифрами понимаются следующие модули: 1 – линейная алгебра; 2 – векторные и линейные отображения; 3 – аналитическая геометрия; 4 – теория пределов; 5 – дифференциальное исчисление (функция одной переменной); 5.1 – численное дифференцирование; 6-интегральное исчисление; 6.1 – приближенное вычисление интегралов; 8 – последовательности и ряды; 16 – основы теории функций комплексного переменного; 22 – функции многих переменных (согласно Госстандартам для всех специальностей МГУ-ТУ было выделено 42 различных модуля. Многие из них являются укрупненными, т.е. содержат несколько подмодулей. Каждому модулю был присвоен порядковый номер).

Из анализа графов видно, что в случае специальности 0135 интеграционные факторы не учитывались вовсе, а при составлении тематического плана по специальности 0702 требования выпускающей кафедры учтены.

Таким образом, из-за отсутствия совместной работы с представителями выпускающих кафедр по специальностям 0135 и 3117 не решены вопросы о включении в образовательные программы по математике таких тем, присутствующих в Госстандартах, как элементы математической логики; основы математического моделирования; основы планирования эксперимента, методы математической статистики и другие.

Для специальности 0702 сомнение вызывает отсутствие раздела "основы теории поля", в частности темы "векторные поля", изучение которого принесло бы существенную пользу для профессионального образования студента данной специальности. Этот раздел имеет практическую связь со специальными знаниями. Также вызывает сомнение модуль 16. Изложить основные понятия комплексных чисел за 3 часа аудиторного времени возможно, но дать при этом еще и основы теории функций комплексного переменного реальным не представляется.

При утвержденных на заседании кафедры тематике модулей и необходимого на их изучение количестве аудиторных часов, данные тематические планы не прошли бы утверждения в учебной части, если бы к этому моменту была внедрена предложенная в докладе методика.

Таким образом, основным результатом проведенной работы является создание и апробирование технологии конструирования процесса обучения математике. В настоящее время эта технология внедрена в практику нашего вуза при организации процесса обучения по всем математическим дисциплинам.

Библиографический список

1. *Новиков А.М.* Образование и классовое расслоение общества. М.: Специалист, № 3, 2004.
2. *McGregor D.M.* The Human Side of Enterprise. N.Y.: McGrow-hill, 1960.

3. *Малакеева К.В.* Конструирование учебного процесса по предмету “Методы оптимизации” как пример инновационной технологии направленный на повышение качества образования. Сб. ст. “Проблемы управления качеством подготовки специалистов в системе непрерывного профессионального образования”. М.: Изд-во МГУТУ, 2003. С. 137–145

4. *Малакеева К.В.* Применение элементов теории графов к планированию образовательных процессов. “Специалист”. № 3. М., 2004.

Учащиеся – авторы задач школьных учебников

Н.М. Епифанова

Известно много случаев яркого проявления математических способностей в детском и юношеском возрасте. Исторический опыт свидетельствует о том, что подростки “порой способны найти исключительно простое и остроумное решение задачи, которое нередко ускользает от умственного взора взрослого человека” [2]. Но исключительно редко можно столкнуться с таким явлением, чтобы задача, составленная подростком, вошла в популярные сборники задач и школьные учебники математики.

Об одном уникальном случае проявления математических способностей и будет рассказано в данной статье.

Журнал “Вестник Опытной Физики и Элементарной Математики” (издавался с 1886 по 1918 год), предназначавшийся, по мнению первого редактора журнала Э.К. Шпачинского, “для воспитания в наших учебных заведениях юношества” и “разъяснения различных педагогических вопросов” [2], был популярен среди учителей средних учебных заведений и учащихся, интересующихся, как правило, отделом задач.

Редактор отдела задач Е.Л. Буницкий вел систематическое наблюдение, “как юноша начинает сначала решать предлагаемые задачи, затем начинает сам предлагать задачи, пока не вырастает до уровня других отделов журнала” [2].

В статье, посвященной двадцатипятилетию журнала, редакционная коллегия с гордостью отмечала, что первый импульс к серьезным занятиям математикой на страницах журнала "получили: ученик Екатеринославской гимназии В. Каган (приват-доцент, редактор данного журнала), ученик одесской гимназии Ю. Рабинович (приват-доцент в Казани), М. Зимин из Ельца (приват-доцент в Новочеркасске), И. Александров (Москва)..." [2].

В каждом номере журнала "Вестник Опытной Физики и Элементарной Математики" в разделе "Задачи" помещались:

– несколько задач с указанием фамилии приславшего ту или иную задачу и места его жительства;

– решения предлагавшихся ранее задач, с указанием фамилии и места жительства читателя (ученика, преподавателя), приславшего свое решение;

– "Задачи на премию" (авторы лучшего решения получали книги по выбору на сумму 10 рублей).

По этому отделу особенно видно, что "Вестник" был действительно всероссийским журналом. Например, в № 505 тексты и решения задач были присланы читателями из Киева, Казани, Уфы, Козлова, Варшавы, Винницы, Шацка, Одессы, Ярославля, Пинеги, Стерлитамака, Санкт-Петербурга, Самары.

В "Вестнике" за первое полугодие 1910 года (№ 505–516) в разделе "Задачи" наиболее часто мелькает фамилия – Л. Богданович (Ярославль). За указанный период этим читателем были присланы правильные решения 31 задачи и были предложены 5 авторских задач для решения подписчикам журнала.

Вызывают восхищение

– необыкновенная работоспособность автора (в каждый номер (в течение года выходит 24–30 номеров) им присылается верное решение 3–5 задач);

– широкий математический кругозор автора (при решении задач автор свободно пользуется знаниями по тригонометрии, планиметрии, стереометрии, комбинаторике, дифференциальному исчислению...);

– умение составлять задачи и упражнения разнообразного математического содержания. (В период с 1910 по 1913 годы (№ 505–

588) им были предложены для решения читателям журнала 32 оригинальные авторские задачи.)

Оказалось, что данный автор (Л. Богданович) был родным братом Максима Богдановича, выдающегося белорусского поэта, почти всю жизнь прожившего на берегах Волги – сначала в Нижнем Новгороде, затем в Ярославле.

Удивительна судьба старших братьев талантливой семьи Богдановичей!

В семье учителя Минского приходского училища и земского деятеля Адама Егоровича Богдановича и Марии Афанасьевны Мякото было три сына: Вадим (1889 г.), Максим (1891 г. – будущий выдающийся белорусский поэт), Лев (родился в городе Гродно в 1893 г.).

Раннее детство братьев было счастливым. Благоприятная атмосфера в доме, прогулки в лес, лето в деревне у бабушки, музыка, чтение книг. Дети росли в семье, в которой все способствовало пробуждению и развитию способностей детей. Прабабушка и бабушка были талантливыми сказительницами, хорошо знавшими бесконечное количество песен, сказок, легенд и народных преданий. Отец, Адам Богданович, был личностью значительной в белорусской культуре: выдающийся этнограф, фольклорист, краевед, общественный деятель, замечательный педагог. Мать, Мария Афанасьевна Мякото (из рода священников, дочь губернского секретаря), обладала большим литературным и музыкальным дарованием.

В октября 1896 года семью постигает большое горе: от скоротечной чахотки, ускоренной рождением четвертого ребенка (дочери Нины), умирает мать. Адама Егоровича переводят по службе в Нижний Новгород, где он вскоре женится на Александре Павловне Волжиной, родной сестре Екатерины Павловны Пешковой, жены Максима Горького.

В Нижнем Новгороде старшие дети (Вадим, Максим, Лев) пошли в гимназию. Именно в этом городе началась литературная деятельность Максима: появился его первый рассказ “Музыка” (“Скрипач”), который был напечатан в белорусской газете “Наша нива” в 1907 году. Но семью вновь постигает несчастье. От чахотки умирает старший сын – Вадим.

В 1908 году Адама Богдановича переводят на службу в Ярославль, где он работает в должности "непременного члена крестьянского земельного банка", затем управляющим этого банка. Дети посещают Ярославскую мужскую гимназию (ныне здание ЯрГУ на Красной площади).

Большая семья постоянно испытывала денежные затруднения. (У Адама Богдановича от третьего брака (он был женат на родной сестре своей первой жены – Александре Афанасьевне Мякото) родились еще пятеро сыновей.) Поэтому Максим давал уроки детям фабриканта Дунаева; Лев, проявлявший незаурядные математические способности, был постоянным участником конкурсов задач, объявляемых журналом "Вестник Опытной Физики и Элементарной Математики", получая за участие вознаграждение, позволявшее частично оплачивать учебу в гимназии.

После окончания гимназии Максим хотел поступать в Петербургский университет, куда он был рекомендован белорусскими издателями журнала "Наша нива" в надежде, что талантливый юноша в дальнейшем займет кафедру белоруссоведения. Но отец не отпустил сына в Петербург, ссылаясь на нездоровый климат (в старших классах гимназии у Максима были обнаружены признаки туберкулезного процесса в легких) и невозможность содержать двух студентов (на будущий год предстояло поступать в университет младшему сыну Льву). Максиму пришлось остаться в Ярославле. В 1911 году он поступил в Демидовский юридический лицей. В 1913 году в Ярославле им был подготовлен сборник стихов "Венок", написанный на белорусском языке (единственный прижизненный сборник).

Окончив Демидовский лицей, Максим в 1916 году уехал работать в Минск. Напряженная деятельность в Минском губернском продовольственном комитете, Белорусском комитете помощи жертвам войны, материальные лишения тяжелого военного времени, бытовая неустроенность привели к обострению болезни, и сослуживцы отправили его в Ялту. Лечение не помогло. Максим Богданович умер в Ялте 25 мая 1917 года в возрасте 26 лет. Отец передал рукописи сына, чуть не сгоревшие в 1918 году во время белогвардейского мятежа в Ярославле, Белорусской академии. В 1927 году в Минске вышло первое двухтомное собрание сочинений Максима Богдановича.

Лев Богданович, младший брат Максима, весьма способный математик, в 1912 году, окончив гимназию "с отличными успехами в науках, в особенности же в математике", поступил на математический факультет Московского университета. Учился отлично, в Ярославль приезжал на каникулы. Когда началась Первая мировая война, Лев оставляет университет, поступает в Александровское военное училище и добровольцем идет в действующую армию. Во время Брусиловского прорыва в 1917 году под Тернополем был ранен в ногу, отправлен сначала во фронтовой госпиталь, затем переведен в офицерский госпиталь в Киев. Трагически погиб в возрасте 25 лет в августе 1918 года. (Со слов денщика, Лев Адамович вместе с другими офицерами был выброшен большевиками в окно.)

Остальные дети в семье также были не лишены таланта: Алексей был способным художником пейзажистом (умер в 27 лет от туберкулеза); Павел, человек всесторонне образованный, оригинальный, принципиальный, весьма способный математик, долгие годы работал в Ярославле преподавателем математики в школе, располагавшейся в бывшей мужской гимназии, которую окончили его талантливые братья (умер в 1967 году).

Большая и дружная семья поддерживала тесные связи со своими многочисленными родственниками. Вместе с Максимом учился в Демидовском лицее и его двоюродный брат Петр Гапанович, оставивший воспоминания о жизни братьев Максима и Льва Богдановичей. Двоюродная сестра Нюта (Анна Гапанович) увлекалась математикой и так же, как Лев, посылала решения конкурсных задач в журнал "Вестник Опытной Физики и Элементарной Математики". (В журнале за 1910 год 9 раз можно встретить подпись – "Нюта (Нижний Новгород)". Это единственное женское имя, встречающееся в перечне читателей, приславших решения в раздел "Задачи".) Письма свидетельствуют, что сестра поддерживала тесные отношения со Львом даже тогда, когда он был студентом университета.

Левушка! Не будешь ли ты бесконечно любезен, не сделаешь ли одну из задач. У меня получаются ужасныя формулы, так что я в отчаяние прихожу. Из знакомых мне (...) нижегородского математического мира никто сделать не может. Я была бы безконечно благодарна.

1. Гипотенуза равна 5 м.; биссектор большаго из острых углов равен $\frac{3}{2\sqrt{5}}$. Найдите катеты.

2. В окружность вписан равнобедренный треугольник ABC, в котором AB=AC=a. Через точку A проведена хорда AK=в, которая пересекает BC в точке M. Найдите AM. Ответ a^2/в.

А. Гапанович 29 окт. 1912 г.

Сам Адам Егорович Богданович, являясь довольно колоритной личностью для Ярославля той поры (этнограф, библиограф, в 1920–1931 годах – заведующий научной библиотекой Ярославского государственного музея, один из организаторов секции краеведения ЯЕИКО), был и прекрасным отцом, заботящимся о здоровье своих детей, следящим за их духовным развитием. Его письма к детям дышат любовью и уважением.

Милый Лева! Вот видишь – и простудился. А что я тебе говорил? Впредь будь осторожнее. Сожалею, что университет не доставил тебе такого удовольствия, какого хотелось бы. Что делать. Старайся использовать с наибольшей выгодой то, что он дает: иначе жалко было бы времени, здоровья, средств. Плохо то, что ты, как говоришь, меньше занимаешься, чем дома. Если этому виной особенности твоей квартиры, то ищи другую: время у тебя есть.

А. Богданович. 1912 г.

Дорогой сынок! Твоя болезнь меня сильно опечалила. Особенно простуда, одевайся потеплее, носи шерстяные носки и фуфайку. Купи себе на завтрак и ужин масло и грудинку. Я тебе прибавлю на этот расход рублей пять. Далеко ли до столовой?

Папа. 24 сентября 1913 г.

...Лессинга читай: важны его принципы искусства, а примеры хотя он берет из неведомых тебе произведений, но приводит полностью. Лед у нас сломало, но затор образовался. Жаворонок. Тоже хорошая погода.

А.Б. 22. 03. 13

Сынок! Меня удивляет твой отзыв о переводе Мицкевича. Ты просто не умеешь читать стихов и не понимаешь красоты такого про-

изведения, как Пан Тадеуш. Ну, не беда; все придет в свое время. Ты ведь вообще развивался своеобразно: односторонне, а потому в других отношениях медленно.

А. Богд. 15.02.13

Адам Егорович умер в 1942 году, похоронив 9 из 12 своих детей.

Имя Максима Богдановича принадлежит истории. Его знаменитая “Лявониха” стала уже белорусской народной песней. Гимн Белоруссии также принадлежит перу поэта.

Имя Льва Богдановича тоже не должно быть забыто, так как задачи, придуманные девятнадцатилетним юношей, входят во многие математические сборники.

Например, в 1913 году в 582 номере журнала “Вестник Опытной Физики и Элементарной Математики” на странице 172 под номером 96 была напечатана за подписью “Л. Богданович” следующая задача: доказать справедливость неравенства $h_a + h_b + h_c \geqslant 9r$, где h_a, h_b, h_c, r – суть высоты и радиус вписанного круга некоторого треугольника.

В сборнике В.В. Прасолова [3] в главе 10 под номером 10.12 приводится текст аналогичной задачи: докажите, что $h_a+h_b+h_c \geqslant 9r$.

Интересно сравнить решения данной задачи, предложенные авторами. Решение В.В. Просалова более изящно. Решение, предложенное Львом Богдановичем,

– позволяет, закономерность (неравенство (1)), увиденную автором, использовать применительно к другим элементам треугольника;

– свидетельствует о прекрасном знании им алгебраического и геометрического материала курса математики, а также о владении гимназистом основными приемами исследовательской и творческой деятельности (умением последовательного, правильного расчлененного логического рассуждения; умением ставить новые вопросы; умением сопоставлять выводы; умением анализировать; умением вычленять и устанавливать зависимости между различными элементами чисел и геометрических фигур; точно, сжато, словесно ясно выражать мысли).

Задачи, предложенные юным автором в 1910–1912 годах читателям журнала “Вестник Опытной Физики и Элементарной Математики”, по теме “Вневписанная окружность” вошли во многие современные сборники олимпиадных задач. Например:

1. Доказать следующее предложение: если в треугольнике $r_a - r = 2R$, где r_a, r, R суть радиусы кругов вневписанного, вписанного и описанного, то это треугольник прямоугольный.

2. Доказать тождество, где r_a, r, R суть радиусы кругов вневписанного, вписанного и описанного треугольника, а p – полупериметр данного треугольника:

a) $\frac{r_b+r_c}{a} + \frac{r_a+r_c}{b} + \frac{r_a+r_b}{c} = \frac{p}{r}$;

b) $\frac{a}{r_a-r} + \frac{b}{r_b-r} + \frac{c}{r_c-r} = \frac{p}{r}$;

c) $\frac{a^2}{r_b+r_c} + \frac{b^2}{r_a+r_c} + \frac{c^2}{r_a+r_d} = 2(2R-r)$;

d) $\frac{b^2-c^2}{r_b-r_c} + \frac{c^2-a^2}{r_c-r_a} + \frac{a^2-b^2}{r_a-r_b} = 4(R+r)$;

e) $ar_a + br_b + cr_c = 2p(2R-r) \ldots$

Вызывают восхищение

– лаконичность, строгость выводов в приводимых автором решениях задач по темам “Ряды”, “Комбинаторика”, “Тригонометрия”;

– важность подмеченных гимназистом, студентом 1–2 курсов университета математических закономерностей;

– редкое умение “сочинять задачи”. (В 1910 году автором было предложено для решения читателям журнала 20 оригинальных задач, в 1911 году 26 задач...)

“До какого совершенства дошли бы его способности, если бы он получил образование и имел случай чаще упражнять их”, – писал о своем сыне Адам Егорович.

Нерукотворным памятником этому талантливому юноше служат его задачи, решаемые нынешним поколением школьников.

Библиографический список

1. *Астафьев А.В., Астафьева Н.И.* Писатели Ярославского края. Ярославль, 1990. 400 с.

2. Вестник Опытной Физики и Элементарной Математики. Одесса, 1910–1913.
3. *Прасолов В.В.* Задачи по планиметрии: В 2-х ч. Ч. 1: Учеб. пособие. 3-е изд., стер. М.: Наука, Физматлит, 1995. 320 с.

Дифференциация и интеграция математических знаний в процессе решения профессионально-ориентированных экономических задач

Е.Н. Трофимец, В.Я. Трофимец

В современных условиях рыночной экономики существенно возросли требования к качеству подготовки выпускников экономических специальностей вузов, которые должны уметь решать не только типовые задачи учетно-расчетного характера, при решении которых доминирующую роль играет операционная составляющая, но также и сложные задачи аналитического характера, при решении которых доминирующую роль играет интеллектуальная составляющая, базирующаяся на умении анализировать текущее и прогнозировать будущее состояние экономических объектов и процессов, мыслить и действовать в изменяющихся условиях, моделировать и находить оптимальные решения, основанные на применении современных математических моделей и методов. Наиболее известными, из последних являются: оптимизационные модели и методы (в частности ассортиментная задача Канторовича, транспортная задача, задача о назначениях и др.), балансовые модели (в частности модель межотраслевого баланса Леонтьева, модель соотношения национальных доходов стран), модели теории вероятности и математической статистики.

Данное обстоятельство нашло свое отражение в Государственном образовательном стандарте, где определены достаточно высокие требования к уровню математической подготовки современного специалиста финансово-экономического профиля. При этом изучение математических дисциплин призвано раскрыть не только содержание собственно математических знаний, но и установить тесные интегративные связи со специальными дисциплинами, особенно с теми, изучение которых сопровождается решением профессионально-ориентированных задач с использованием экономико-математических методов и моделей. Основная интегративная роль здесь принадлежит математике. Поэтому первоочередной задачей математической подготовки в вузах на экономических специальностях, на наш взгляд, является обучение будущего специалиста умению разрабатывать или обоснованно выбирать математические модели и применять математические методы для решения практических задач будущей профессиональной деятельности.

Анализ современного состояния проблемы интеграции математических знаний позволяет констатировать, что в настоящее время заметно усилился интерес ученых к исследованию данной проблемы и ряду смежных вопросов. При этом исследования проводятся, главным образом, в рамках следующих научных направлений: реализация внутри- и межпредметных связей, разработка интегрированных курсов, формирование прикладной направленности в обучении математике, укрупнение дидактических единиц, разработка форм и средств интеграции математических знаний, наглядно-модельное исследования учебно-познавательной деятельности.

На основе проведенного анализа научных трудов, Государственного образовательного стандарта, учебных и рабочих программ было установлено что:

а) к настоящему времени еще не достаточно разработаны педагогические условия, методы и формы реализации интегративной направленности обучения математике при моделировании экономических процессов и явлений;

б) в теории и практике обучения математике еще не сформировалось понимания сущности, характеристик и критериев интеграции математических знаний на основе наглядного моделирования.

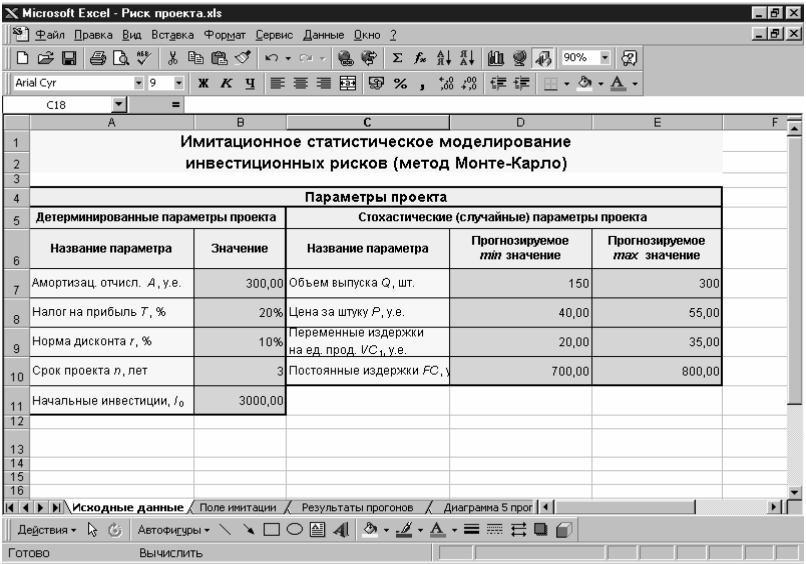
Это, в свою очередь, порождает противоречие между органически целостной структурой и сущностью математического знания и наличием традиционно формализованной на данный момент системы обучения математике студентов экономических специальностей вузов.

Технология наглядного моделирования применяется в процессе обучения математике студентов экономических специальностей Ярославского государственного технического университета (ЯГТУ), Международного университета бизнеса и новых технологий (института) (МУБиНТ) Ярославского филиала Московской финансово-юридической академии (ЯФ МФЮА) при решении профессионально-ориентированных экономических задач (ПОЭЗ).

Для решения некоторых ПОЭЗ необходимо использовать сложные наукоемкие экономико-математические методы, требующие проведения большого объема вычислительной работы. Для решения подобного рода задач целесообразно использовать компьютер, а занятия проводить в аудиториях, оснащенных средствами вычислительной техники.

Рассмотрим более подробно одну из таких профессионально-ориентированных задач, для объяснения решения которой используется табличный процессор Microsoft Excel. Предлагаемая задача связана с оценкой рисков инвестиционных проектов и имеет важную прикладную направленность. Для решения задач по оценке рисков в современной финансово-экономической практике используются различные методы, которые рекомендованы такими организациями как UNIDO (Организация объединенных наций по промышленному развитию), Министерство финансов, Министерство экономики, Госстрой. Одним из наиболее эффективных, но одновременно и одним из наиболее сложных методов является метод имитационного статистического моделирования (или метод Монте-Карло), который используется в процессе решения рассматриваемой задачи.

Постановка задачи. Для производства некоторой продукции "X" планируется привлечение инвестиций из внебюджетных источников. В процессе предварительного анализа выявлены параметры проекта, часть из которых экспертами-аналитиками была отнесена к детерминированным, а часть – к случайным (стохастическим), см. рис. 1. Для случайных параметров проекта определен возможный интервал их вариации (прогнозируемые max и min значения).



Имитационное статистическое моделирование инвестиционных рисков (метод Монте-Карло)

Параметры проекта				
Детерминированные параметры проекта		Стохастические (случайные) параметры проекта		
Название параметра	Значение	Название параметра	Прогнозируемое *min* значение	Прогнозируемое *max* значение
Амортизац. отчисл. A, у.е.	300,00	Объем выпуска Q, шт.	150	300
Налог на прибыль T, %	20%	Цена за штуку P, у.е.	40,00	55,00
Норма дисконта r, %	10%	Переменные издержки на ед. прод. VC_1, у.е.	20,00	35,00
Срок проекта n, лет	3	Постоянные издержки FC, у	700,00	800,00
Начальные инвестиции, I_0	3000,00			

Рис. 1

Требуется ответить на вопрос, следует ли принимать данный проект к реализации и какова вероятность того, что проект окажется убыточным?

Прежде чем переходить к демонстрации решения задачи в среде табличного процессора Microsoft Excel, рассмотрим, какое место занимают процессы дифференциации и интеграции математических знаний в ходе её решения.

Следует отметить, что ввиду того, что задача имеет сложный междисциплинарный характер, то при её решении наблюдается несколько уровней дифференциации.

Первый уровень дифференциации происходит на уровне учебных дисциплин, так как для решения задачи требуются знания из различных дисциплин, основными из которых являются: экономическая теория, математика, финансово-экономические расчеты, эконометрика, информатика.

Второй уровень дифференциации связан с особенностью решения задачи методом Монте-Карло. Для реализации этого метода необходимо разработать три модели: модель воздействий случайных факторов, модель экономической системы и модель статистической обработки. На этом этапе модели пока имеют только самое общее (абстрактное) представление и не реализованы в виде конкретных математических моделей. Для построения таких моделей необходимо отобрать соответствующие математические знания, что ведет к третьему уровню дифференциации.

Третий уровень дифференциации – дифференциация на уровне математических знаний. Так, базовыми знаниями, которые необходимы для построения модели воздействий случайных факторов являются: понятие случайной величины; вероятностные законы распределения; предельные теоремы теории вероятности; методы моделирования случайных величин. Базовыми знаниями, которые необходимы для построения модели экономической системы являются: схема наращения; схема дисконтирования; геометрическая прогрессия; логарифмы; количественные методы оценки инвестиционных проектов. Базовыми знаниями, которые необходимы для построения модели статистической обработки, являются: методы статистического оценивания числовых характеристик случайных величин; методы проверки статистических гипотез.

Последовательное изучение и применение отобранных знаний в соответствии с логикой решения задачи определяют суть процесса интеграции математических знаний. В рассматриваемой задаче результатом процесса интеграции математических знаний являются математические модели, которые, в отличие от абстрактных моделей 2-го уровня дифференциации, имеют конкретное наполнение в виде совокупности математических выражений. Таким образом, можно сказать, что в процессе интеграции математических знаний происходит трансформация абстрактных моделей в математические модели, которые в рассматриваемой задаче представляют собой:

1) модель воздействий случайных факторов – это модель (поле) имитации стохастических параметров инвестиционного проекта;

2) модель экономической системы – это модель оценки эффек-

тивности инвестиционного проекта по показателю *NPV (net present value* – чистая современная стоимость);

3) модель статистической обработки – модель статистической оценки стохастических параметров проекта.

Разработанные модели должны быть объединены в единую комплексную модель, что можно рассматривать как 2-ой уровень интеграции. Работа с комплексной моделью, в общем-то, и позволяет решить рассматриваемую задачу.

Следует отметить, что здесь также можно выделить и третий уровень интеграции – интеграцию на уровне дисциплин, так как полученные знания могут в последующем использоваться обучаемыми при изучении таких дисциплин, как финансовый анализ, управление проектами, ценные бумаги, инвестиции, бизнес-планирование.

Таким образом, весь процесс решения рассматриваемой задачи распадается на ряд последовательных этапов дифференциации и интеграции, ключевыми из которых являются этапы дифференциации и интеграции математических знаний.

Разработанные на уровне интеграции математических знаний модели достаточно легко реализуются программным образом в среде табличного процессора Microsoft Excel.

Библиографический список

1. *Макарова Н.В., Трофимец В.Я.* Статистика в Excel. М.: Финансы и статистика, 2002. 365 с.
2. *Монахов В.М.* Технологические основы проектирования и конструирования учебного процесса. Волгоград, 1995. 152 с.
3. Подготовка учителя математики: Инновационные подходы: Учеб. пособие / под ред. В.Д. Шадрикова. М.:Гардарики, 2002. 383 с.
4. *Трофимец Е.Н.* Наглядное моделирование экономических явлений и процессов как средство интеграции математических знаний в процессе обучения математике студентов экономических специальностей вузов. Дисс.... канд. пед. наук. Ярославль, 2004. 194 с.

Применение имитационного статистического моделирования в процессе обучения математике студентов-экономистов

Е.Н. Трофимец, В.Я. Трофимец

Современный специалист в области экономики немыслим без активного владения методами и средствами информатики и такой специалист не может быть подготовлен без систематического использования ЭВМ в учебном процессе.

Информатизация высшего образования – это реализация комплекса мер, направленных на повышение уровня подготовки специалистов путем расширения сферы использования вычислительной техники и компьютерных технологий в учебной и научно-исследовательской работе, в управлении учебным процессом.

Информатизация создает дополнительные возможности для стимулирования у студентов творческого мышления, усиливает значимость их самостоятельной работы. Упрощаются контроль и самоконтроль самостоятельной работы студентов. Повышается уровень индивидуальной работы преподавателя, изменяется соотношение между интеллектуальной и рутинной составляющими в учебной работе. Естественный шаг в компьютеризации учебного процесса – передача компьютеру некоторых функций преподавателя. Реализовать этот процесс можно с помощью обучающих компьютерных программ, которые естественно рассматривать как средства обучения, дополняющие традиционные формы преподавания.

Что касается роли компьютера в совершенствовании навыков моделирования, то его использование на занятиях математики определяется как обращение к задачам прикладного и исследовательского характера, задачам, возникающим на стыке различных дисциплин, требующим для своего решения владения приёмами математического моделирования. Это позволит в дальнейшем совершить плавный переход к обучающим программам моделирования конкретных экономических ситуаций в курсе специализированных математических дисциплин, допускающих наличие случайных факторов, то есть создаст почву для овладения навыками имитационного моделирования.

В контексте вышесказанного проведем характеристику и демонстрацию имитационного статистического моделирования конкретной экономической ситуации в среде табличного процессора Microsoft Excel.

Постановка задачи рассматривалась в статье: “Дифференциация и интеграция математических знаний в процессе решения профессионально-ориентированных экономических задач” настоящего сборника научных трудов, поэтому целесообразно сразу же перейти к разработке модели экономической системы.

1. Разработка модели экономической системы. В качестве критерия эффективности инвестиционного проекта в предлагаемой модели используется показатель *NPV (net present value* – чистая современная стоимость), идея которого заключается в том, чтобы найти разницу между инвестиционными затратами и будущими доходами, выраженную в скорректированной во времени (как правило, к началу реализации проекта) денежной величине

$$NPV = PV - I_0,$$

где PV – современная стоимость денежного потока; I_0 – сумма первоначальных инвестиций.

Для расчета современной стоимости денежного потока используются формулы:

$$PV = \sum_{t=1}^{n} \frac{NCF_t}{(1+r)^t};$$

$$NCF = [Q \times (P - VC_1) - FC - A] \times (1 - T) + A.$$

При разработке модели было принято допущение, что генерируемый проектом поток платежей имеет вид аннуитета.

Не вдаваясь в детальное рассмотрение, следует только отметить, что если $NPV > 0$, то проект приносит доход, в противном случае убыточен (чем больше NPV, тем лучше, при незначительном положительном NPV, по всей видимости, также нет смысла рисковать капиталом).

Ключевые математические формулы, использованные для расчета NPV приведены на листе “Исходные данные”.

При разработке модели принято допущение, что генерируемый проектом поток платежей имеет вид аннуитета.

2. Разработка модели воздействий случайных параметров проекта. Модель воздействий случайных параметров проекта разработана на листе “Поле имитации”. Принято допущение, что все случайные параметры имеют равномерное распределение. Случайные числа генерировались с использованием функции СЛЧИС(). В учебных целях модель реализована в нескольких вариантах, отличающихся размерностью (от 100 до 5000 элементов).

Зная, что распределения равномерные, казалось бы можно легко посчитать среднее значение NPV без всякого моделирования. Действительно это так. Но без моделирования вероятность риска рассчитать не удастся. Более того, ниже будет показано, что полученное среднее значение окажется излишне оптимистичным (завышенным). При принятии решения следует опираться на наиболее вероятное (модальное) значение, которое окажется меньше среднего.

3. Разработка модели статистической обработки. Данная модель достаточна сложна и фрагментарно представлена на нескольких листах. О ней будет сказано ниже на этапе статистического анализа.

4. Имитационное статистическое моделирование экономической системы. Имитационное статистическое моделирование проекта заключается в прогонах разработанных моделей (F9). Так как модель имеет существенную размерность (до 5000), то можно ограничиться несколькими прогонами (в нашем случае 10, для размерности 5000 получаем 50000 испытаний). На листе “Поле имитации” убыточные проекты ($NPV < 0$) отображаются кирпичным цветом. Чтобы сгладить возможные отклонения (см. примеры выше), модель прогонялась 10 раз и рассчитывалось среднее по 10 прогонам (лист “Результаты прогонов”).

Ниже представлена таблица и графики рассчитанной доверительной вероятности – можно пропустить.

Лист “Диаграмма 5 прогонов” показывает, что с ростом числа генерируемых точек (проектов) оценки стабилизируются вокруг среднего (математического ожидания), т.е. наступает стационарный процесс.

Лист “Дисперсия прогонов” показывает, что “нужно вовремя остановиться”, т.е. последующий существенный рост размерности модели приводит к несущественному увеличению точности результатов.

5. Статистический анализ результатов моделирования. На листе “Результаты моделирования” рассчитаны выходные параметры проекта (для размерности модели 5000). Важнейшими являются – “Среднее NPV” (около 4600, что говорит о хорошей эффективности проекта – $\approx$150% от первоначальных вложений за 3 года) и “Вероятность $NPV < 0$” (около 7%, что свидетельствует о незначительном риске).

Тем не менее, последующий анализ, основанный на построении функции плотности распределения NPV (детали опускаем) показывает (лист “Распределение NPV)”, что распределение NPV имеет правостороннюю асимметрию, поэтому наиболее вероятное (модальное) значение NPV меньше среднего (около 3700). При принятии решения следует ориентироваться на модальное значение NPV.

Чтобы узнать о параметрах проекта можно воспользоваться автофильтром на листе “Поле имитации” (лучше для размерности модели 5000). Например, рассмотрим проекты с NPV, близкими к модальному, т.е. от 3690 до 3710 – получим около 10–15 проектов). Некоторые из отобранных проектов, по всей видимости, могут быть исключены из последующего рассмотрения, как не в полной мере соответствующие на данный момент конкретным сложившимся внутренним и внешним обстоятельствам.

Заметим также, что помимо рассмотренной прикладной задачи, табличный процессор Microsoft Excel используется также для проведения занятий по теоретическим основам метода Монте-Карло, в частности для демонстрации основных принципов имитационного моделирования и экспериментального подтверждения ряда предельных теорем теории вероятности, в частности, теорем Чебышева, Бернулли, Ляпунова.

Библиографический список

1. *Макарова Н.В., Трофимец В.Я.* Статистика в Excel. М.: Финансы и статистика, 2002. 365 с.
2. *Монахов В.М.* Технологические основы проектирования и конструирования учебного процесса. Волгоград, 1995. 152 с.
3. Подготовка учителя математики: Инновационные подходы: Учеб. пособие / под ред. В.Д. Шадрикова. М.:Гардарики, 2002. 383 с.
4. *Трофимец Е.Н.* Наглядное моделирование экономических явлений и процессов как средство интеграции математических знаний в процессе обучения математике студентов экономических специальностей вузов. Дисс.... канд. пед. наук. Ярославль, 2004. 194 с.

О введении в математический анализ

О.С. Ивашев-Мусатов

При изложении теории пределов все мы находимся под гипнозом математиков. Но студентами нематематических специальностей (особенно слабыми в математике) все это воспринимается как пустая схоластика и не формирует никаких реальных образов. Для этого контингента изучение математического анализа удобнее начинать с наблюдения, которое всем понятно: есть линии, которые можно нарисовать не отрывая карандаша от бумаги. Таковы окружность, ломаная, прямая, траектория движущейся точки и т.п. Когда рисуются эти линии движение карандаша не прерывается. Поэтому такие линии принято называть непрерывными.

I. История развития науки и техники показала, что непрерывные линии играют фундаментальную роль. Например, температура θ в комнате изменяется со временем t вполне определенным образом, т.е. переменная θ есть функция переменной $t:\ \theta = \theta(t)$.

Автомат-самописец, записывающий изменения температуры θ с течением времени t, выдаст на ленте непрерывную линию (поскольку температура не изменяется мгновенно). Эта линия – график функции $\theta(t)$. Поэтому про функцию $\theta(t)$ говорят – “непрерывная функция”.

Аналогичное положение с давлением p воздуха – это функция времени t, т.е. $p = p(t)$. Ясно, что $p(t)$ – непрерывная функция. И подобное наблюдается повсеместно.

Таким образом возникло понятие о непрерывной функции: функцию f называют непрерывной, если ее график – непрерывная линия, т.е. его можно нарисовать не отрывая карандаша от бумаги.

Уже такое наглядное представление о непрерывной функции позволяет уяснить ее простейшие свойства. Так, если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, т.е. ее график можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги, начиная с точки $(a, f(a))$ и кончая точкой $(b, f(b))$ (рис. 1),

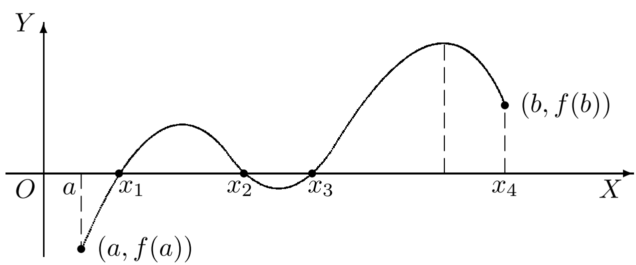


Рис. 1

то:

1) если числа $f(a)$ и $f(b)$ разных знаков, то $f(x) = 0$ хотя бы при одном x из интервала (a, b). На рис. 1 таких точек три: x_1, x_2, x_3;

2) на отрезке $[a, b]$ функция f имеет наибольшее и наименьшее значения: на рис. 1 число $f(a)$ – наименьшее значение f на отрезке $[a, b]$, число $f(x_4)$ – наибольшее значение f на отрезке $[a, b]$, т.е. при любом x из отрезка $[a, b]$ выполнены неравенства $f(a) \leqslant f(x) \leqslant$

$f(x_4)$.

II. Эти наглядно ясные факты конечно требуют строгого доказательства. Но такое доказательство можно дать только после того, как понятию непрерывности функции будет дано полное математическое определение. Чтобы получить его,надо провести средствами математики анализ наглядных соображений, приведенных выше. Коротко говорят: проведем математический анализ подмеченного. При этом будет удобно воспользоваться приближенными вычислениями.

В общем случае положение аналогично. Пусть фушсция f непрерывна на интервале (т.е. ее график над этим интервалом можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги), и надо вычислить $f(a)$ для числа a из этого интервала. Для этого берут $x \approx a$ и считают, что $f(x) \approx f(a)$. При этом непрерывность функции вселяет уверенность в том, что чем точнее приближенное равенство $x \approx a$, тем точнее приближенное равенство $f(x) \approx f(a)$, и точность последнего может быть получена любой при повышении точности $x \approx a$.

Геометрически это ясно из рис. 2, где приведен график функции f и процесс вычисления $f(a)$ и $f(x)$.

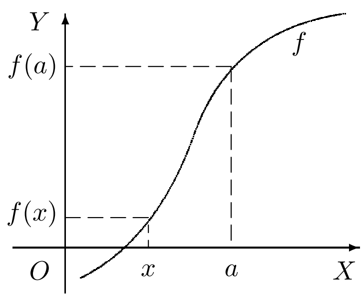


Рис. 2

Точность приближенного равенства $x \approx a$ есть число $|x-a|$. Это длина отрезка $[x, a]$, выделенного на оси Ox. Аналогично, точность приближенного равенства $f(x) \approx f(a)$ есть число $|f(x) - f(a)|$. Это длина отрезка, выделенного на оси Oy – отрезок $[f(x), f(a)]$.

Из рисунка видно: чем короче отрезок $[x, a]$, тем короче отрезок $[f(x), f(a)]$, и его длину можно сделать как угодно малой за счет уменьшения длины отрезка $[x, a]$. В терминах приближенных вычислений это означает: приближенное равенство $f(x) \approx f(a)$ можно получить с любой точностью за счет повышения точности приближенного равенства $x \approx a$.

Коротко говорят: если функция f непрерывна в точке a, то $f(x) \approx f(a)$ с любой точностью при $x \approx a$.

III. Вот это свойство непрерывной функции было принято за основу определения после придания наглядной формулировке этого свойства математического содержания. Для этого вспомним: точность приближенного равенства характеризуется положительным числом (с точностью до 0,001 или с точностью до 0,00001 и т.п.). В приведенной формулировке есть два приближенных равенства. Точность приближенного равенства $x \approx a$ характеризуется одним положительным числом, которое по традиции обозначают греческой буквой δ "дельта". Точность приближенного равенства $f(x) \approx f(a)$ характеризуется другим (как правило) положительным числом, которое по традиции обозначается греческой буквой ε "эпсилон". При этом: точность приближенного равенства $f(x) \approx f(a)$ мы хотим получить любой, т.е. число $\varepsilon > 0$ задается любым (у инженеров и вычислителей указывается в задании – в вычислениях гарантировать точность 0,001 и т.п.), а число $\delta > 0$ надо подобрать так в зависимости от заданного ε (точки a и функции f), чтобы выполнялось условие: если точность приближенного равенства $x \approx a$ меньше δ, то точность приближенного равенства $f(x) \approx f(a)$ должна быть меньше ε.

Итак, мы подошли к *определению непрерывности функции в точке:* функция f непрерывна в точке a, если для любого положительного числа ε можно подобрать такое положительное число δ, что при любом x из неравенства $|x-a| < \delta$ о следует неравенство $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Добавим к этому определению: при любых x, удовлетворяющих неравенству $|x - a| < \delta$, функция определена, т.е. функция f должна быть определена в некоторой окрестности точки a.

Пример.1 Линейная функция $f(x) = kx + b$ непрерывна в любой точке $a \in \mathbf{R}$.

При доказательстве фиксируем любую точку $a \in \mathbf{R}$. Для произвольно взятого числа $\varepsilon > 0$ число $\delta > 0$ подбираем следующим образом:

$$|f(x) - f(a)| = |kx + b - (ka + b)| = |k| \cdot |x - a| < (|k| + 1) \cdot |x - a.$$

Из полученного неравенства видно: если взять $\delta = \frac{\varepsilon}{|k|+1}$, то при любом x из неравенства $|x - a| < \delta$ следует неравенство $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Таким образом доказано, что для любого числа $\varepsilon > 0$ можно подобрать число $\delta > 0$ (в этом примере $\delta = \frac{\varepsilon}{|k|+1} > 0$) так, что выполнены условия, указанные в определении. Непрерывность линейной функции в выбранной точке $a \in \mathbf{R}$ доказана. Отсюда получаем непрерывность в любой точке $a \in \mathbf{R}$.

Пример 2. Функция синус непрерывна в любой точке $a \in \mathbf{R}$.

Фиксируем любое число a. Для произвольно взятого числа $\varepsilon > 0$ число $\delta > 0$ подбираем, пользуясь определением синуса числа: длина дуги (рис. 3) $\smile BM = t$, длина дуги $\smile BN = a$, тогда длина дуги $\smile MN = |a - t| > MN \geqslant |\sin a - \sin t|$ (это длина отрезка $[\sin t, \sin a]$ на оси Oy, этот отрезок – проекция хорды MN, которая короче дуги $\smile MN$.

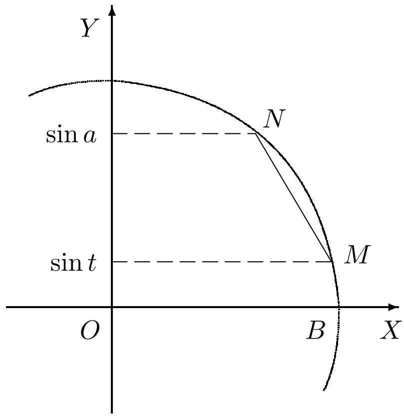


Рис. 3

Отсюда видно, что можно взять $\delta = \varepsilon$. Тогда для любого числа t из неравенства $|t-a| < \delta$ будет следовать неравенство $|\sin t - \sin a| < \varepsilon$. Непрерывность синуса в точке a доказана. Точка же a была взята любой из множества $\mathbf{R}$.

В процессе разбора примеров и доказательства теорем постепенно осваивается определение непрерывности функции в точке.

Используя логические символы, *определение непрерывности функции в точке* может быть записано так:

$$\text{ф } f \text{ н} \quad a \in \mathbf{R} \overset{def}{\iff} \forall\varepsilon > 0\, \exists\delta > 0\, \forall x \in \mathbf{R}\, (|x-a| < \delta \Leftarrow |f(x)-f(a)| < \varepsilon). \tag{1}$$

Буквы def над $\iff$ указывают на то, что это определение (def – сокращение английского слова *definition* – определение), т.е. знак $\overset{def}{\iff}$ заменяет слова “по определению, тогда и только тогда”.

Развитие науки и техники показало, что большую роль играет понятие предела функции, которое можно трактовать как обобщение понятия непрерывности функции в точке.

Начну с наглядного примера. Здравый смысл подсказывает, что малая дуга окружности и ее хорда почти совпадают (рис. 4), т.е. $\frac{AB}{\smile AB} \approx 1$ с любой точностью при малой дуге $\smile AB$.

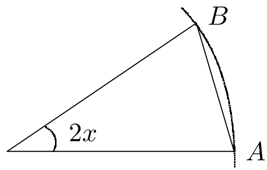


Рис. 4

Если центральный угол дуги $\smile AB$ равен $2x$ радиан, то $\smile AB = R \cdot 2x$, $AB = 2R\sin x$ и потому $\frac{\sin x}{x} \approx 1$ с любой точностью при малых x. Это же можно заметить и по таблицам.

Проведем теперь полное математическое доказательство сделанного утверждения. Зафиксируем число $x \in \mathbf{R}$. На рис. 5 проведена дуга окружности радиуса R с центром O, касательная к ней, A – точка касания.

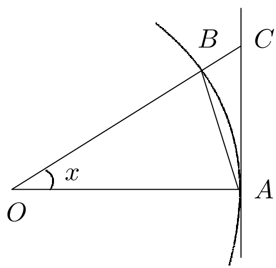


Рис. 5

Сравнивая площади двух треугольников и сектора окружности получаем: $S_{\Delta OAB} < S_{\text{с.}OAB} < S_{\Delta OAC} \Leftrightarrow \frac{1}{2}R^2\sin x < \frac{1}{2}R^2 x < \frac{1}{2}R^2 \operatorname{tg} x$, откуда следует:

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1. \tag{2}$$

Все члены последнего неравенства – четные функции. Поэтому оно верно и для любого числа $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, т.е. при $\forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ и

$x \neq 0$. Для таких x в силу неравенства (2) получаем:

$$\left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| = 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} < 2\left|\frac{x}{2}\right| = \frac{x^2}{2}.$$

Отсюда видно: $\frac{\sin x}{x} \approx 1$ с любой точностью при $x \approx 0$ и $x \neq 0$.

В самом деле, если $|x| < 0,01$, то $\left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| < \frac{0,0001}{2}$, если $|x| < 0,001$, то $\left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| < \frac{0,000001}{2}$ и т.д. Это очень похоже на непрерывность функции $y = \frac{\sin x}{x}$ в нуле, если бы она была там определена и имела значение 1. Но она в 0 не определена. Поэтому говорить о ее непрерывности в 0 нельзя. Вместо этого говорят: "функция $y = \frac{\sin x}{x}$ при x, стремящемся к 0, имеет предел, равный 1" и пишут

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1. \tag{3}$$

Говорят также: "функция $y = \frac{\sin x}{x}$ стремится к 1 при x, стремящемся к 0" и пишут $\frac{\sin x}{x} \to 1$ при $x \to 0$. Здесь (и выше) знак "$\to$" заменяет слово "стремится".

Оказалось, что при решении многих задач (нахождение мгновенной скорости, ускорения и пр.) возникает аналогичная ситуация: для функции f можно подобрать такое число A, что $f(x) \approx A$ с любой точностью при $x \approx a$ и $x \neq a$. Тогда число A называют пределом функции f при x, стремящемся к a, и пишут:

$$A = \lim_{x\to a} f(x) \quad (\text{и} \quad f(x) \to A \quad \text{п} \quad x \to a). \tag{4}$$

Это положение сходно с тем, что привело к определению (1), только $f(a)$ надо заменить числом A и сделать оговорку $x \neq a$.

Итак, мы подошли к *определению предела функции в точке:*

$$A = \lim_{x\to a} f(x) \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall\varepsilon > 0\,\exists\delta > 0\,\forall x \in \mathbf{R}\,(0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-A| < \varepsilon). \tag{5}$$

(Оговорка $x \neq a$ учтена неравенством $0 < |x - a|$.)

Таким образом, о пределе функции в точке a (или при $x \to a$) можно говорить только в том случае, когда функция определена в окрестности точки a за исключением, быть может, самой точки a.

Сравнивая (1) и (5) получаем:

$$\text{ф} \quad f \quad \text{н} \qquad a \Longleftrightarrow f(a) = \lim_{x \to a} f(x). \tag{6}$$

После (1), (5) и (6) обычным образом формулируются и доказываются теоремы о пределах и непрерывных функциях. Это есть в любых учебниках и нет нужды здесь на этом останавливаться.

Технологический подход к обучению в профессиональном учебном заведении

О.Б. Епишева

Одним из условий достижения основной цели модернизации российского образования – его современного *качества* [5, 10], как показано во многих педагогических исследованиях [1, 2, 6–8, 11], является теоретическая разработка и внедрение в практику работы учебных заведений *педагогической технологии.* Технология обучения является развитием традиционной методики обучения и, в отличие от нее, дает инструментарий достижения планируемых целей образования. Это объясняется тем, что она представляет собой такой уровень методики, который трансформирует ее теоретические закономерности в систему совместной *практической деятельности* всех участников учебно-воспитательного процесса, в проект методической системы, содержащий описание процесса достижения планируемых результатов обучения (В.П. Беспалько, В.М. Монахов) и процедур совместной деятельности учителя (преподавателя) и учащихся (студентов).

В профессиональном образовании проблема достижения высокого уровня подготовки компетентного специалиста обострилась и в связи с намерениями вхождения России в мировое образовательное пространство и повышением уровня требований к стандартам инженерного образования. В качестве примера приводим разработанный Ассоциацией инженерного образования России вариант стандартов для аккредитации инженерных программ двух циклов – первого (FCD) и второго (SCD). Эти стандарты представляют собой адаптированные и модифицированные версии формулировок требований к выпускникам, используемых в существующих системах аккредитации европейских стран и в странах Вашингтонского соглашения. Результаты обучения по этим программам (как умения выпускника) описываются в терминах задач и видов деятельности разного уровня сложности, которые выпускники должны решать (табл. 1 и 2), применимы ко всем инженерным программам и должны быть дополнены специальными требованиями в зависимости от дисциплин [3].

Таблица 1

Академические результаты обучения

		Выпускник FCD должен	**Выпускник SCD должен**
1.	Знания в области инженерных наук	Применять знания математики, естественных, общеинженерных и специальных наук в инженерной практике, системах, процессах или методологии	Применять знания математики, естественных, общеинженерных и специальных наук для разработки концепций инженерных моделей
2.	Анализ проблем	Определять, формулировать проблему, находить необходимую литературу и решать инженерные задачи *средней сложности*, достигая обоснованных выводов, используя аналитические приемы в зависимости от выбранной дисциплины или выбранной специализации	Определять, формулировать проблему, находить необходимую литературу и решать *сложные* инженерные задачи, достигая обоснованных выводов, используя основные принципы математики и инженерных наук
3.	Проектирование /выработка решений	Находить решения для задач *средней сложности* и *участвовать* в проектировании систем, их компонентов или процессов с учетом вопросов здравоохранения и безопасности, культурных, социальных, экологических аспектов	Находить решения для *сложных* задач и проектировать системы, их компоненты или процессы с учетом вопросов здравоохранения и безопасности, культурных, социальных, экологических аспектов

4.	Проведение исследований	Проводить исследования задач *средней сложности,* систематизировать, находить и выбирать необходимые данные из программ, баз данных и специализированной литературы; проектировать и проводить эксперименты для получения обоснованных выводов	Проводить исследования *сложных* задач, в том числе, путем проектирования экспериментов, анализа и интерпретации данных и синтеза информации для получения обоснованных выводов
5.	Использование современных методов	Выбирать и использовать соответствующие ресурсы, современные методики и оборудование, включая прогнозирование и моделирование для решения инженерных задач *средней сложности*, с пониманием правильности их применения	Создавать, выбирать и использовать соответствующие ресурсы, современные методики и оборудование, включая прогнозирование и моделирование для решения *сложных* инженерных задач, с пониманием правильности их применения

Таблица 2

Личностные результаты обучения

		Выпускник FCD должен	***Выпускник SCD должен***
1.	Индивидуальная работа и работа в команде	Эффективно работать как индивидуально, так и в качестве лидера или члена разнотипных команд	Эффективно работать по междисциплинарной тематике как индивидуально, так и в качестве лидера или члена разнотипных команд

2.	Общение	Эффективно общаться с членами инженерного сообщества и общества в целом в решении задач *средней сложности*: быть способным понимать, писать рабочие отчеты, разрабатывать документацию, делать содержательные презентации, понимать и давать четкие инструкции	Эффективно общаться с членами инженерного сообщества и общества в целом в решении *сложных* задач: быть способным понимать, писать рабочие отчеты, вести документацию, делать содержательные презентации, понимать и давать четкие инструкции
3.	Взаимодействие инженера с обществом	Демонстрировать понимание социальных, культурных, юридических аспектов, вопросов здравоохранения и безопасности и осознание ответственности за последствия инженерной деятельности	Демонстрировать понимание социальных, культурных, юридических аспектов, вопросов здравоохранения и безопасности и осознание ответственности за последствия инженерной деятельности
4.	Этика	Понимать ответственность и следовать этике и нормам инженерной деятельности	Понимать ответственность и следовать этике и нормам инженерной деятельности
5.	Окружающая среда и устойчивое развитие	Понимать влияние инженерных решений в социальном контексте и демонстрировать понимание и необходимость устойчивого развития	Понимать влияние инженерных решений в социальном контексте и демонстрировать понимание и необходимость устойчивого развития

6.	Управление проектами и финансы	Демонстрировать осведомленность и понимание в сфере менеджмента и бизнеса, такие как риск, возможные изменения условий и понимание их последствий	Демонстрировать осведомленность и понимание в сфере менеджмента и бизнеса, такие как риск, возможные изменения условий и понимание их последствий
7.	Межкультурные компетенции	Работать в интернациональной среде с пониманием культурных, языковых и социально-экономических различий	Работать в интернациональ-ной среде с пониманием культурных, языковых и социально-экономических различий
8.	“Обучение через всю жизнь”	Осознавать необходимость и иметь способность самостоятельно учиться и повышать квалификацию в течение жизни	Осознавать необходимость и иметь способность самостоятельно учиться и повышать квалификацию в течение жизни

Традиционная дидактическая система, которой исполнилось уже 350 лет, в настоящее время уже недостаточна для решения задач модернизации образования, что объясняется такими ее особенностями, как а) ведущая роль теоретических знаний в содержании обучения, б) преобладание объяснительно-иллюстративного способа обучения, в) как следствие – ориентация учебного процесса на деятельность учителя (например, цели обучения выражены в действиях учителя – “ознакомить учащихся с ...”, “решить с учащимися задачи” и т.п.), г) как следствие – отсутствие акцента на учебную деятельность обучаемых, и д) как результат, – доминирование у них памяти над мышлением, низкий уровень самостоятельности и результативности учебной деятельности.

“Традиционность” существующей дидактической системы в вызе и привычка к ней преподавателей не позволяет сегодня получить существенно лучшие результаты образования. Педагогика высшей школы сегодня исходит из того, что методы обучения в вузе, ориентированные на объяснение педагога, формируют интеллектуальную пассивность и ограничивают творческие способности студента; таким образом, время их обучения используется неэффективно.

Основной технологической процедурой является *проектирование образовательных целей,* которые являются ключом к проектированию всей технологии (всех ее технологических процедур). Это соответствует и стратегии модернизации образования, которая говорит о необходимости положить в основу обновления образования планируемые цели (характеристики результата “на выходе”) и только после этого формировать само содержание образования “на входе” [10. С. 15]. Цели образования должны быть представлены не в объектно-знаниевой, а в деятельностной форме (выражены в действиях ученика или эталонах этих действий), что определяет деятельностный характер образовательного стандарта и содержания образования [10. С. 25]. При этом можно проектировать три традиционные группы образовательных целей: 1) учебные цели (а не обучающие, т.к. они являются целями не учителя, а ученика, целями его учебной деятельности); 2) цели развития (развивающие цели) и 3) цели воспитания (воспитательные цели). В психолого-педагогических исследованиях давно показано, что эффективность достижения учебных (обучающих) целей образования в значительной степени зависит от достижения развивающих и воспитательных целей, а в новой концепции и стратегии модернизации образования последние являются приоритетными, т.к. их достижение определяет так называемую “обучаемость” ученика, т.е. его способность к усвоению изучаемого материала. Если цели образования определены и сформулированы неверно, то по результатам их достижения ни о каком качестве не может идти речь [9. С. 21].

При конкретизации целей обучения в профессиональном учебном заведении их необходимо также соотнести с особенностями будущей профессии (специальности). Результаты исследований сущности *профессиональной деятельности* показывают, что ее психологическая основа как система, имеет такую же структуру, как и учебная деятельность. Это – мотивы, цели, программа деятельности, информационная основа деятельности, принятие решений, подсистема профессионально важных качеств и способностей личности; при этом профессиональные способности рассматриваются как общие способности, приобретшие черты оперативности под влиянием деятельности, что может быть ориентиром для проектирования целей развития и воспитания в этом вузе [12]. Цели профессионального образования должны быть компонентами *профессиональной компетентности специалиста* и *стандартов инженерного образования* (табл. 1 и 2).

Вторая технологическая процедура – проектирование на основе полученных целей *содержания обучения* в деятельностной форме, которое получается переводом спроектированных целей в адекватные им предметные (математические, технические и т.д.) и учебные задачи. Эти задачи предъявляются обучаемым в виде учебных заданий во всех видах учебной деятельности; они должны составлять постоянно пополняемый *банк учебных заданий*, из которого, в частности, формируется и *тестовый фонд*.

Согласно правительственной стратегии обновления образования – усилению деятельностного подхода к обучению, проектирование всех остальных компонентов системы обучения осуществляется также на основе этого подхода. В частности, необходима "деятельностная формулировка ключевых компетентностей" [10. С. 20], проектирование всего хода учебного занятия, оценка текущих результатов, коррекция обучения, направленная на достижение обучаемыми запланированных целей [7].

После диагностики готовности обучаемых к учебной деятельности (входной контроль) проектируется *учебный процесс* – его структура (этапы), содержание и методический инструментарий (методы, формы и средства его организации, контроля, коррекционной работы и оценки результатов обучения), организующий учебную деятельность учащихся (студентов) с подготовленным учебный материалом, направленную на достижение запланированных результатов обучения. Выбор как структуры учебного процесса, так и методического инструментария определяется целями и содержанием изучаемого материала; уровнями его сложности и подготовленности обучаемых к его усвоению; сравнительной характеристики возможностей, сильных и слабых сторон различных методов, форм и средств обучения; особенностей самого преподавателя; возможностей учебно-материальной базы вуза; регламента учебного времени.

Таким образом, технологический подход к обучению позволяет не только декларировать, но и, как показывают научные исследования и опыт их внедрения в педагогическую практику, на деле достигать более высокого уровня качества обучения при условии овладения преподавателем обязательными технологическими процедурами. Использование педагогической технологии и процесса проектирования технологических процедур сокращает время овладения преподавателем процессом формирования собственной методики (технологии) обучения своей дисциплине.

Библиографический список

1. *Бахусова Е.В., Коростелев А.А., Монахов В.М. и др.* Технологии В.М. Монахова – дидактический инструментарий модернизации образования: Учеб. пособие. М.-Тольятти: Волжский ун-т им. В.Н. Татищева, 2004. 60 с.
2. *Епишева О.Б.* Технология обучения математике на основе деятельностного подхода: Кн. для учителя. М.: Просвещение, 2003. 223 с.
3. EUR-ACE критерии и процедуры аккредитации программ в области техники и технологии. М.: Ассоциация инженерного образования России, Аккредитационный центр. 2005. 15 с.
4. Качество образования. Достижения. Проблемы. Материалы IV Международной научно-методической конференции / Под ред. А.С. Вострикова. Новосибирск: НГТУ, 2001. 433 с.
5. Концепция модернизации российского образования на период до 2010 года. Concepcia.rtf. 28 с.
6. *Кларин М.В.* Педагогическая технология в учебном процессе. Анализ зарубежного опыта. М.: Знание, 1989. 89 с.

7. *Кларин. М.В.* Технологический подход к обучению // Школьные технологии. № 5. 2003. С. 3–22.
8. *Монахов В.М.* Технологические основы проектирования и конструирования учебного процесса. Волгоград: Перемена, 1995. 152 с.
9. *Поташник М.М.* Качество образования: проблемы и технологии управления (В вопросах и ответах). М.: Педагогическое общество России, 2002. 352 с.
10. Стратегия модернизации содержания общего образования: Материалы для разработки документов для обновления общего образования. М.: ООО “Мир книги”, 2001. 66 с.
11. *Чернилевский Д.В., Филатов О.К.* Технология обучения в высшей школе: Учеб. издание / Под ред. Д.В. Чернилевского. М.: “Экспедитор”, 1996. 288 с.
12. *Шадриков В.Д.* Психология деятельности и способности человека: Учеб. пособие. М.: “Логос”, 1996. 320 с.

Глава 4

История и философия математики

Арифметическая техника и развитие математики [1]

Г.А. Зверкина

Нумерация и техника счета в древности

Математика на всем протяжении своей истории практически всегда использовала числа или их обобщения. Геометрический объект имеет размер и (или) положение в пространстве, что задается числами; алгебраические теории предполагают возможность выполнения неких операций, прототипом которых были арифметические действия. Функции, являющиеся отображением из области определения в множество чисел (действительных, комплексных, p-адических...), – это тоже числа, которые можно складывать и умножать.

Подразумевая повсеместное использование в математике чисел, современный исследователь не задумывается о том, каким образом можно практически выполнить те арифметические действия, которые он использует в своих теоретических рассуждениях. Вопрос о практическом исполнении арифметических действий рассматривается только в школе. Даже вычислительная математика при описании алгоритмов численного решения задач не касается вопроса их практического воплощения: сейчас вычислительная техника позволяет об этом не задумываться. Причем уверенность в практической осуществимости любых вычислительных действий, упоминающихся в теоретических рассуждениях, была присуща математикам не только нашего времени, но и последних трех столетий. То, как записываются числа и то, как производятся над ними арифметические операции, на протяжении нескольких сотен лет не оказывало

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 03-06-80226а) и CNRS (проект “Les instruments du calcul savant”).

практически никакого влияния на развитие математики. Но всегда ли так было?

Возникновение отвлеченного (абстрактного) числа в человеческой практике сопровождалось представлением о числе как о неком мистическом, божественном даре: не отделявший ранее числительного от перечисляемых объектов, человек был поражен тем, что одними и теми же словами можно указывать количество объектов различной структуры. Числам приписывались различные магические, сакральные качества, – это сохранялось, например, в нумерологии[1]. Системы нумерации практически всех известных древних цивилизаций основывались на числах 5, 10 и 20. Однако это не означает, что одновременно автоматически создавалась соответствующая позиционная система записи чисел.

Первые обозначения чисел – черточки и точки – с появлением письменности заменялись новыми символами. Сначала они объединялись в группы, а со временем превратились в пиктограммы. В некоторых случаях эти пиктограммы содержали в себе некую информацию о составе числа, что существенно усложняло их вид.

Однако экономическое развитие древнего общества требовало умения выполнения арифметических операций с большими числами, и делать это, пересчитывая десятки черточек, было неудобно. Возникли первые обозначения чисел, практически всегда это были пиктограммы, в иероглифической письменности превратившиеся затем в иероглифы, а в алфавитной они в ряде случаев заменялись буквами или их комбинациями. При этом для одинакового количества единиц, десятков, сотен, тысяч и т.д. применялись различные значки. Иногда (Китай, Египет) письменная нумерация соответствовала устному названию числа (например, 500=пять сотен, five hundred, cinq cents и т.д.); в ряде случаев это приводило к формированию аддитивно-мультипликативной нумерации, которая была удобнее для записи результатов вычислений, чем, например, алфавитная. Естественно, арифметические операции в иероглифической и алфавитной нумерации требовали больших усилий.

[1]Так, пифагорейцы из того, что разные народы Средиземноморья использовали естественный для человека счет десятками, выводили множество замечательных свойств числа 10.

Счет на пальцах (и др. частях тела) и счетном материале (мелких предметах) в ряде случаев привел к созданию первых счетных приспособлений – абаков. При этом нельзя представлять себе абак исключительно как специально изготовленную размеченную доску или даже рамку со стержнями и надетыми на них счетными костями (русские счеты или китайский суаньпань): при необходимости сложных расчетов человек мог просто расчертить на любой гладкой поверхности таблицу, на которой можно было разложить счетный материал и, перекладывая его, производить вычисления.

Распространенность практики счета на абаках привела некоторые цивилизации к формированию позиционной системы нумерации. У инков роль абака играли кипу – узелковые записи, что, очевидно, способствовало возникновению у них позиционной десятичной нумерации[1].

При этом можно предположить, что количество счетного материала на одной линии абака должно было соответствовать основанию формировавшейся системы нумерации. То есть, например, в математике майя можно предположить использование пятеричного абака; при этом двадцатеричная система нумерации трансформировалась в пятерично-двадцатеричную.

В Китае, несмотря на использование ориентированного на пятеричность суаньпаня[2], возникла десятичная нумерация – здесь, скорее всего, оказала влияние также и древняя аддитивно-мультипликативная нумерация. Запись $7\times10000+5\times1000+6\times100+9\times10+6$ естественно трансформируется в 75696 (здесь, видимо, сыграла свою роль и иероглифичность записи, когда, следуя словесному обозначению, число 600 или "шесть сотен", например, записывалось знаком "6" и знаком "100"[3]). Единственно, чего здесь не хватает – знака 0. Однако этот знак использовался при обозначении на бумаге пустой клетки счетной таблицы, в ячейках которой рас-

[1] Нечто подобное узелковому счету инков использовалось и в Японии.

[2] Впрочем, сложно сказать, что появилось раньше – позиционная нумерация или суаньпань.

[3] В Китае сформировалось две системы записи чисел – "научная", использовавшая кружок 0 в качестве 0 и 9 знаков из черточек, где горизонтальная черта соответствовала 5, а вертикальная – 1, и "бытовая" иероглифическая.

кладывались счетные палочки.

Казалось бы, использование абаков и естественной для человека десятичной (устной) нумерации должно было привести к формированию позиционных систем нумерации во всех развивающихся цивилизациях. Однако этого не произошло. В Азии десятичная система стала использоваться в Индии, видимо, она была, заимствована из Китая. Написание индийских чисел, как и везде, возникло сначала в виде различных значков для всех разрядов, затем были попытки ввести слоговую (подобную греческой алфавитной) нумерацию, и лишь в середине I тысячелетия н.э. в Индии появилась десятичная нумерация. При этом форма цифр в разных регионах Индии имеет сходство и, по-видимому, имеет общий источник.

Однако в цивилизациях Средиземноморья такого прогресса в системах нумерации не случилось. В древней Месопотамии возникшая было десятичная почти позиционная (без знака 0) система нумерации была скомбинирована с шестеричной системой, происхождение которой неизвестно[1]. Вавилонская нумерация не была полноценной позиционной нумерацией (такой, какой она позднее стала в работах греческих астрономов и арабских ученых), и из-за сложности записи чисел в этой системе она была мало пригодна для сложных арифметических расчетов.

Также и в Египте, несмотря на достаточно высокое развитие техники и экономической системы, нумерация оставалась иероглифической (при этом она не содержала специальных знаков для чисел первого десятка), что не способствовало развитию арифметической техники. Причиной этого, видимо, была монополизация права на проведение расчетов небольшой части населения – касты жрецов и писцов – схожая ситуация была и в Месопотамии.

Мистический ореол чисел привел к формированию во многих древних цивилизациях мнения об избранности тех, кто может заниматься расчетами. Человек, научившийся читать, писать и считать, был обеспечен твердым заработком; попасть в касту избранных, допущенных к обучению арифметическим расчетам, было

[1]Возможно, она произошла из неких национальных традиций, подобно тому, как некоторые племена Папуа-Новой Гвинеи обзавелись развитой одиннадцатеричной (устной) системой счета.

непросто и в Месопотамии, и в Египте. Естественно, забота о сохранении своих доходов препятствовала демократизации счета. Сложность системы расчета, особенно в части определения дробных долей величин, служила надежным препятствием распространению среди широких масс математических знаний. Важной особенностью счета в Египте и Месопотамии была необходимость использования многочисленных таблиц; видимо, обладание такими таблицами было привилегией определенного слоя населения.

Интересно, что, в противоположность египетской практике, в Китае в глубокой древности возникла практика сдачи экзаменов для занятия места чиновника; сдавать такие экзамены имели право практически все, и в программу экзамена входила математика в достаточно большом объеме. Таким образом, в Китае *все* чиновники умели производить достаточно сложные арифметические расчеты, и, кроме того, еще большее количество людей, пытавшихся сдать экзамены, но безуспешно, в той или иной степени были знакомы с математикой. *Математические знания были широко распространены в Китае, что и привело к демократизации арифметических знаний, и способствовало становлению позиционной нумерации.*

Итак, в Средиземноморье сформировалось несколько систем нумерации (иероглифическая, алфавитная и шестидесятеричная, представлявшая собой комбинацию десятичной и шестеричной), а в Китае и позднее в Индии была принята к использованию позиционная десятичная. Анализ дальнейшего развития систем нумерации приводит к выводу о том, что развитие математических знаний ведет к упрощению нумерации и тяготеет к позиционному принципу систем записи чисел. Так, в Египте времен Новой Империи нумерация в демотических текстах схожа с китайской, а в поздней Византии числа иногда записываются в позиционном виде. До того в Греции Архимедом и Аполлонием Пергским делались попытки построить позиционную нумерацию с основанием 10^8 или 10^4.

Естественно, в случае алфавитной, иероглифической или позиционной нумерации с большим основанием имелись трудности с записью дробных чисел, в то время как в позиционной системе были достаточно быстро введены десятичные дроби (китайцы они умели записывать числа от 10^{-128} до 10^{128} – см. [4, 5]). Поэтому и в вычислениях естественным образом возникали различные алгоритмы.

Так, в Месопотамии был изобретен так называемый метод Герона для вычисления приближенных значений квадратных корней. Эта итерационная процедура заключалась, как известно, в следующем.

Если $\sqrt{A} \approx a_0$, то лучшим приближением будет $\sqrt{A} \approx a_1 = \frac{1}{2}\left(a_0 + \frac{A}{a_0}\right)$; эта процедура повторяется необходимое число раз, и таким образом получалась последовательность приближений $\sqrt{A}$, которая затем заменялась шестидесятеричной дробью. Например, для $\sqrt{2}$ с начальным приближением $\sqrt{2} \approx 1$ получается последовательность приближений

$$\frac{3}{2},\ \frac{17}{12},\ \frac{577}{408},\ \frac{665857}{470832},\ldots \qquad (*)$$

В Китайской математике при вычислении корня использовали так называемую схему Горнера, фактически подбирая десятичные знаки искомого числа по достаточно простому алгоритму, основанному на формуле квадрата суммы. При этом часто умножали подкоренное выражение на 10^{2n} для того, чтобы результат вычислений поделить затем на 10^n и получить десятичную дробь.

Например, $\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2\times 10^8}}{10^4}$, и $\sqrt{200000000} = \sqrt{2.00.00.00.00} \approx 10000$. Для подбора второй цифры ищем такое a, чтобы $(10+a)^2 \leqslant 200$; $a{=}4$. Теперь ищем такое a, чтобы $(140+a)^2 \leqslant 20000$; $a{=}1$. Далее ищем такое a, чтобы $(1410+a)^2 \leqslant 2000000$; $a{=}4$. И, наконец, ищем такое a, чтобы $(14140+a)^2 \approx 200000000$; $a = 2$. Действительно, $14142^2{=}199996164$, т.е. $\sqrt{2} \approx 1,4142$.

На первый взгляд, применение вавилонской схемы проще. Но мы судим об этом, имея в своем распоряжении вычислительную технику (в которой, кстати, “запаян” метод Герона для вычисления корней). Однако, получив число из последовательности (*), древний вычислитель в Вавилоне был должен представить это выражение шестидесятеричной дробью, что было непросто. Еще сложнее приходилось египетским писцам: любую дробь они записывали в виде суммы долей – аликвотных дробей, т.е. дробей с числителем 1[1]. Проделать такого сорта преобразования и сейчас, имея в распоряжении десятичную систему, непросто.

Итак, уже простой пример показывает, что *использовавшаяся система нумерации влияла на численные методы.* Но оказывала ли она более глубокое влияние на развитие математики?

Геометрия или алгебра? Выбор языка науки

Широко известно, что в Египте практиковались измерения и разметка местности с помощью веревки; этим занимались "арпедонапты", или "натягивающие веревку". Такими методами пользовались во всех древних земледельческих цивилизациях. В Египте, превосходившем своих соседей по уровню развития техники, письменности и культуры, практика арпедонаптов позднее преобразовалась в геометрические построения на плоскости с помощью циркуля и линейки и развилась потом до высочайшего уровня в древней Греции.

"Греческое чудо" – возникновение аксиоматико-дедуктивной системы математических знаний – возникло именно благодаря исследованию геометрических свойств плоских фигур.

Простейшие, "очевидные" геометрические факты сначала не доказывались, а "объяснялись": таковы приписываемые Фалесу объяснения равенства вертикальных углов [10]; таково архаичное рассуждение о причинах равенства углов при основании равнобедренного треугольника, изложенное Аристотелем [1]. (Этот факт был первым отвлеченным знанием, полученным греками от египтян: египтяне использовали треугольный уровень-ватерпас, да и при строительстве четырехугольных пирамид этот факт был важен – см.[3]).

Видимо, до исследований Гиппократа Хиосского греческая математика удовлетворялась наглядными объяснениями геометриче-

[1]Причиной этого, видимо, была невозможность представления отношения двух целых чисел как одной величины: египтяне, а за ними и греки мыслили в терминах "долей", т.е. равных частей при делении целого. Только в начале новой эры мы встречаем у греков в явном виде рациональные числа – дроби.

ских фактов, и лишь тогда, когда Гиппократ в попытках квадрировать круг отысканием квадрируемых луночек начал использовать достаточно сложные логические построения, математика столкнулась с необходимостью не только наглядного, но и логически безукоризненного объяснения (доказательства) геометрических фактов[1].

Но почему греки (а перед ними египтяне и вавилоняне) ориентировались на геометрические построения в математике, почему они изобрели то, что теперь называется геометрической алгеброй древних и почему они пытались свести алгебраическую задачу к геометрическому построению? Почему они пытались квадрировать (т.е. сопоставить с равным по площади квадратом) различные фигуры? И почему в качестве инструментов геометрических построений они выбрали только циркуль и линейку? Почему при решении алгебраических задач третьего порядка они строили специальными инструментами отличные от окружности и прямой кривые, а не вычисляли решения с необходимой точностью, как это делали на Востоке?

Почему в одних случаях в древней математике основной акцент делался на геометрические методы, а в других – на алгебраические? Рассмотрим два примера.

Теорема Пифагора.

Греческое доказательство. Доказательство этого, одного из самых древних математических фактов, известного всем древним цивилизациям, в “Началах” Евклида, естественно, геометрическое (“Начала”, Книга 1, Предложение 47). Доказательство чрезвычайно наглядно и строится на рассматривании подходящим образом построенного чертежа.

Китайское доказательство[1] из сочинения “Чжоу би суань цзин” (“Канон расчета чжоуского гномона”) построено, наоборот, на ал-

[1]Позднее, после исследований Аристотеля по логике, математика оформилась в строгую аксиоматико-дедуктивную науку, основанную на аксиомах и правилах доказательства. Но это – не тема данной статьи.

[1]Принято считать, что доказательств в негреческой математике не было. Действительно, тех доказательств, которые были в греческой математике, в математике других древних цивилизаций не встречалось. Но были другие доказательства, основанные на логических рассуждениях. Не было в явном виде

гебраических преобразованиях и арифметической технике определения одинаковых площадей на разграфленном чертеже (Рис. 11). Главную роль здесь играет не наглядность чертежа, а скрупулезное выискивание одинаковых геометрических фигур и их подсчет. Это, скорее, не доказательство теоремы Пифагора, а доказательство прямоугольности треугольника со сторонами 3, 4, 5, основанное на факте: $3^2+4^2=5^2$.

Позднее это рассуждение трансформировалось в широко известные в индокитайской математике доказательства теоремы Пифагора уже в общем виде. В обоих случаях доказательство основано на правиле возведения в квадрат суммы или разности (бином Ньютона). При этом в рассуждениях роль аксиом (очевидных фактов) играли именно алгебраические правила.

Надо отметить, что математическое образование в Индии и Китае включало в себя заучивание наизусть правил арифметических действий с различным образом представленными величинами. Они включали в себя то, что мы сейчас называем правилами раскрытия скобок, сокращенного умножения, операции с величинами, имеющими разные знаки. Эти правила заучивались наизусть, часто в виде стихов, и, как мы видим, на них были основаны доказательства геометрических фактов.

И здесь мы переходим к другому примеру.

Алгебраические формулы. Алгебраические формулы в юго-восточной математике (Индия, Китай, Япония, Корея) не доказывались – они входили с систему образования и предназначались для заучивания. Происхождение их следует искать в вычислительной практике. Как мы видели, позиционная система, возникшая в этом регионе, позволяла производить достаточно сложные вычисления без чрезмерных усилий.

Не так обстояло дело в греческой математике.

Значительная часть “Начал” Евклида посвящена именно доказательству алгебраических формул. Вот как, например, доказывалась одна из простейших формул – бином Ньютона.

представлено системы аксиом, но доказательства опирались на факты, представлявшиеся древним математикам (и нам) очевидными.

Те правила, которые в Индии и Китае были результатом многочисленных практических вычислений, в Греции требовали доказательства. Почему? Неужели греки были так слабы в искусстве счета?

Ответ на этот вопрос – это сложность греческой нумерации для выполнения многочисленных вычислений, требовавшихся на практике. Так, надо было знать, фактически, таблицу умножения не только единиц, но и единиц на десятки, единиц на сотни, десятков на десятки и пр.[1]

Например, вместо одной формулы $2\times3=6$ греческому вычислителю надо было запомнить много формул:

$$
\begin{array}{rcl}
\beta \times \gamma = \varsigma & \leftrightarrow & 2 \times 3 = 6; \\
\beta \times \lambda = \kappa \times \gamma = \xi & \leftrightarrow & 2 \times 30 = 20 \times 3 = 60; \\
\kappa \times \lambda = \beta \times \tau = \sigma \times \gamma = \chi & \leftrightarrow & 20\times30=2\times300=200\times3=600; \\
\kappa\times\tau=\sigma\times\lambda=\beta\times{}_{/}\gamma={}_{/}\beta\times\gamma={}_{/}\varsigma & \leftrightarrow & 20\times300=200\times30=2\times3000= \\
 & & =2000\times3=6000; \\
\sigma \times \tau = \overset{\varsigma}{M} & \leftrightarrow & 200 \times 300 = 60000; \\
{}_{/}\beta \times {}_{/}\gamma = \overset{\chi}{M} & \leftrightarrow & 2000 \times 3000 = 6000000 \text{ и ..}
\end{array}
$$

Следуя египетской традиции, греки все дробные величины представляли в виде долей или аликвотных дробей. Долгое время выражение вида $\frac{m}{n}$ называлось не числом, но отношением величин. Простая в десятичной нумерации процедура сравнения или упрощения дробей в алфавитной нумерации требовала сложных вычислений.

Если вспомнить, что арифметические операции – это не самоцель математики, а средство решения различных технических проблем, то станет понятно, с какими сложными проблемами сталкивались древние инженеры Египта, Месопотамии и Греции.

[1] Известный эксперимент французского исследователя П.Таннери, научившегося арифметике в греческой алфавитной нумерации, некорректен: как бы современный человек ни пытался поставить себя на место древнего вычислителя, с ним всегда останется знание арифметики в десятичной нумерации. И, умножая, например, сотни на десятки, он всегда в уме держит результат этой операции в десятичной системе и переводит ее потом на язык древней нумерации.

Но нуждались они не в записи числа, а в конкретном размере конкретного сооружаемого объекта. То есть им был важен не записанный числами результат, а то, какой размер надо отмерить на той или иной детали или на местности.

И здесь на помощь древнему инженеру пришла геометрия.

Если, к примеру, надо было построить квадрат, равновеликий данной площади, то вместо вычисления этой площади можно было, измерив линейные размеры исходной площади, путем геометрических построений на местности разметить нужный квадрат.

Самый простой случай – исходная площадь прямоугольна. Отложив стороны этого прямоугольника a и b, легко найти сторону нужного квадрата.

Несколько сложнее решаются и другие технические задачи, которые сейчас сводятся к алгебраическим уравнениям первого и второго порядков. Общим для этих задач является их разрешимость с помощью циркуля и линейки, т.е. простейших инструментов, всегда имевшихся в распоряжении древнего инженера.

Когда же задача не могла быть решена с помощью простейших геометрических инструментов (циркуля и линейки), изобретались инструменты для вычерчивания новых кривых, с помощью которых задача могла быть решена. Или же создавались механические инструменты, решавшие задачу. О некоторых таких инструментах сохранились достаточно ясные упоминания в древнегреческих текстах; прочие же могут быть реконструированы на основании сохранившихся отрывочных упоминаний.

Использование кривых и специальных инструментов для их вычерчивания, а также стремление как можно более точно решить задачу (т.е. стремление построить как можно более точный чертеж) привело греческих математиков к формированию понятия идеальной (не имеющей толщины) кривой.

Сам же чертеж в греческой математике представлял собой аналог современной формулы для решения задачи. Это был алгоритм, следуя которому и проявляя достаточную аккуратность в геометрических построениях, можно было построить сколь угодно точное решение задачи.

Вторая книга "Начал" Евклида посвящена представлению любой прямолинейной фигуры (многоугольника) равновеликим квадратом. Что было причиной стремления греков квадрировать различные фигуры? Видимо, в рамках геометрических представлений решения алгебраических задач построение равновеликого фигуре квадрата соответствовало вычислению площади этой фигуры.

Для решения этой задачи Евклид во второй книге "Начал" доказывает ряд алгебраических тождеств, в т.ч. теоремы о "приложении площадей", которые сейчас следовало бы интерпретировать как правило выделения полного квадрата в равенствах $x(a-x)=b^2$ и $x(a+x)=b^2$. Затем это правило применяется к решению (геометрическими методами) квадратного уравнения; способ решения уравнения соответствует нашему решению квадратного уравнения с помощью дискриминанта.

Интересно, что, если бы греческие математики изначально рассматривали решение квадратного уравнения как геометрическую задачу, то вряд ли они решали бы уравнение $x(a-x)=b^2$ с помощью метода, эквивалентного решению с помощью дискриминанта. Действительно, поскольку b есть среднее геометрическое между x и $(a-x)$, решение легко найти с помощью простого чертежа.

Таким образом, *геометрическая алгебра есть не самостоятельная дисциплина, происходящая из геометрических рассуждений, а средство решения алгебраических задач в терминах отрезков с помощью геометрических методов в ситуации, когда неудобная система нумерации и отсутствие эффективной техники счета не позволяют достаточно быстро находить решения алгебраических задач с достаточной степенью точности.*

С другой стороны, отсутствие удобной позиционной нумерации для записи дробных чисел привело греков к идее выражать все отношения величин как отношения целых чисел. Отсюда происходит открытие ими несоизмеримости.

Этого не было и, видимо, не могло случиться в позиционной математике (по крайней мере, на первом этапе ее развития). В арифметической технике позиционной нумерации любое число могло быть вычислено с любой степенью точности. И лишь по прошествии некоторого времени математики заметили бы, что в одном случае решение представляется периодической десятичной дробью, а в другом – непериодической, т.е. была бы открыта иррациональность.

Итак, мы приходим к выводу, что именно *удобство или неудобство системы нумерации для арифметики, или, что то же самое, эффективность или неэффективность используемой техники вычислений, определяет направление развития математики в начальный период ее становления.* А именно: более эффективной технике вычислений следует развитие алгебраических методов, а менее эффективной – геометрических. Развитие алгебраических методов базируется на системе правил алгебраических преобразований (полученных эмпирически), и при исследовании любых задач, в т.ч. геометрических, эти правила используются в логических рассуждениях, фактически заменяя собой систему аксиом. В противном случае алгебраические задачи решаются геометрическими методами, и здесь уже правила алгебраических преобразований есть результат геометрического доказательства, базирующегося на системе геометрических аксиом.

Другие цивилизации: подтверждение гипотезы. Однако к изложенному выводу мы пришли, анализируя математику Средиземноморья и Индокитая.

Как же обстояло дело в других древних цивилизациях?

Обратимся сначала к тем странам, где использовалась алфавитная нумерация. По большей части это были страны, находившиеся под влиянием Византии (Древняя Русь, Грузия, Армения), а также финикийцы, копты и евреи. Последние три этноса не имели сколь-нибудь развитой математики. В Грузии и Армении уровень развития технических знаний был достаточно высок, но судить об их достижениях в области математики мы можем лишь по сведениям о сочинениях Анания Ширакаци, что крайне мало для нашего анализа.

Несколько лучше обстоит дело с Древней Русью.

Древнерусская нумерация, как известно, была создана по подобию греческой алфавитной, однако была еще менее удобна для вычислений, поскольку обозначения чисел высших разрядов несли в себе некоторые признаки иероглифичности, и, кроме того, сначала сами разряды формировались по мультипликативному признаку (10^3, 10^6, 10^{12} и т.д.), что затрудняло при счете переход из разряда в разряд.

Известно, что при проектировании и постройке храмовых комплексов древнерусские зодчие практически не вели каких-либо письменных расчетов. Однако при этом пропорции зданий были однотипны.

Достигалось это использованием, во-первых, стандартных шкал размеров (эталонов), подобно тому, как это делалось в Египте. Сохранилось изображение зодчего Хасиры (Сира-ха), держащего в руках несколько жезлов эталонной длины, имеющих отношение длин между собой, равное, в частности, $\sqrt{2}$ и отношению золотого сечения.

Древнерусские зодчие также использовали шкалу эталонов для разметки строящихся объектов. Это были сажени разных наименований (прямая, косая, морская, и т.п.), общим числом до 6 разных размеров, разделенные каждая на 4 локтя (также различной длины). Отношение длин разных саженей друг к другу было равно отношению квадратных корней из целых чисел ($\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, 2, $\sqrt{5}$,...); отмерялись эти сажени при помощи несложного чертежа (геометрическое построение! – см. подробнее [6, 7]).

Еще один инструмент древнерусских зодчих – т.н. "Вавилон" – система подобных прямоугольников с общим центром, напоминающая план древневавилонского зиккурата – башни. Пропорции прямоугольников (длина относится к высоте как $\sqrt{2}$:1, площадь каждого последующего прямоугольника в два раза меньше площади предыдущего) подобраны таким образом, что отрезки, соединяющие определенные точки "Вавилона", представляют собой стороны правильных фигур, имеющих заданное отношение площадей. "Вавилон" позволял не только строить равновеликие правильные многоугольники с разным числом сторон, но и "раздваивать"и "растроивать" квадраты, а также строить приближенную квадратуру круга. И все это без утомительных вычислений, используя только нужным образом построенный чертеж.

Другим геометрическим инструментом, использовавшимся для разметки сооружаемой конструкции, было "мерило" – шест с нанесенными на трех гранях разными шкалами, находившимися в заданном отношении. При этом каждая шкала делилась, в частности, на 21 часть, что позволяло использовать эти шкалы и для разметки круглых объектов (учитывая архимедово приближение $\pi \approx 22/7$). Практика древнерусского зодчества подтверждает гипотезу о связи неудобства системы нумерации с развитием геометрических методов.

Рассмотрим другой пример. Как известно, в древнеиндийском трактате "Шульба-сутра" ("Правила веревки") последовательно излагаются приемы геометрической алгебры вплоть до решения квадратных уравнений [8].

Но и нумерация, которой пользовался автор Шульба-сутры Апастамба, была иероглифической (для единиц, десятков, сотен использовались различные значки нумерации "брахми"). И здесь наша гипотеза подтверждается!

Что же касается цивилизаций, использовавших позиционные системы нумерации с маленьким основанием, то математические интересы там были смещены в область арифметических и алгебраических фактов. Так, майя и индийцы интересовались суммированием прогрессий, индийцы искали решения диофантовых уравнений, в частности, уравнения Пелля-Ферма $x^2 - Ay^2 = 1$, которое возникало при поиске наилучшего рационального приближения $\sqrt{A}$. В области геометрии, зная ряд основных геометрических фактов о треугольниках и простейших четырехугольниках, алгебраическая математика легко решала возникавшие в практике геометрические задачи, используя алгебраические преобразования геометрических величин.

Дальнейшее развитие математики. Развитие математики в Греции и в юго-восточной Азии шло по разным направлениям: геометрические методы греческих ученых существенно отличались от алгебраических воззрений индо-китайской науки. Оба этих направления объединились в арабоязычной математике средневековья. Имея в своем распоряжении удобную десятичную нумерацию и, в дополнение к ней, "научную" шестидесятеричную, арабские математики изучали геометрические методы греческой математики, но на практике их не применяли: кубические и квадратные уравнения они решали численно, используя вычисление квадратных корней в позиционной нумерации или итерационные процедуры.

Интересно, что и философия в древности и в средневековье претерпевала изменения в соответствии с господствовавшим в математике отношением к числу. Так, на заре развития философии, когда человек еще не привык к обыденности чисел, казавшихся ему божественным даром, пифагорейцы строили свою философию как "числовую", искавшую причину всего в числе и числовых закономерностях. Однако с изменением математики и геометризацией знания и философия начинает опираться на геометрические рассуждения (Платон).

Много позднее, когда в Европе стала обиходной позиционная нумерация, математика вновь алгебраизируется и философия вслед за ней.

В развитии математики в Новое время существовавшая техника вычислений также оказывала существенное влияние на развитие науки. Так, формирование теории рядов и осознание возможности вычисления любой функции со сколь угодно высокой точностью способствовало развитию теории функций и свободному применению логарифмов.

В наше время, когда вычислительная техника позволяет не только обрабатывать большие массивы данных, но и быстро производить большие объемы точных вычислений, новую жизнь получили давно изобретенные численные методы. Так, метод Эйлера интегрирования дифференциальных уравнений развился в методы Рунге-Кутта различных порядков.

А, например, методы численного интегрирования, такие, как метод Монте-Карло, вообще не имели бы без наличия вычислительной техники права на существование.

Развиваются новые методы комбинаторной и дискретной математики, которые в полном виде не реализуемы без использования вычислительной техники.

Описывающие реальные процессы системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных практически никогда не допускают полного математического анализа. Однако, не имея возможности установить условия существования и единственности решения, современные исследователи получают численными методами достаточно точные решения задач. Точно так же исследование стохастических процессов, описывающих поведение сложных систем, проводится с помощью компьютерного моделирования.

Постепенно меняется подход к методам доказательства математических фактов. Так, решение задачи о раскраске карты было сделано с использованием машинного перебора большого количества вариантов структуры карты. Возможно, уже в ближайшее время получит право на законное существование доказательство, состоящее из текста программы и распечатки результата ее работы.

Содержание представленной статьи обсуждалось с профессором И.Г. Башмаковой. Автор также выражает признательность за ценные советы и содержательное обсуждение вопроса проф. А.С. Братусю, И.Х. Сигалу, Р.З. Гушель и участникам семинара по истории математики МГУ.

Библиографический список

1. *Аристотель.* Первая Аналитика // Сочинения в трех томах. М., 1978. Т. 2.
2. *Брестед Д., Тураев Б.* История древнего Египта. Мн., 2003.
3. *Бычков С.Н.* Египетская геометрия и греческая наука // Историко-математические исследования. М., 2001. Вып. 6(41). С. 277–284.
4. *Жаров В.К.* О "Введении" к трактату "Чжу Шицзе Суань сюе ци Мэн" // ИМИ. М., 2001. Вып. 6(41). С. 347–353.
5. *Жаров В.К.* Развитие методов преподавания традиционной китайской математики. М., 2002.
6. *Рыбаков Б.А.* Архитектурная математика древнерусских зодчих // Б.А. Рыбаков. Из истории культуры древней Руси. Исследования и заметки. Изд-во Московского университета, 1984. С. 82–104.

7. *Рыбаков Б.А.* Мерило новгородского зодчего XIII в. // Б.А. Рыбаков. Из истории культуры древней Руси. Исследования и заметки. Изд-во Московского университета, 1984. С. 105–118.
8. Bibhutibhusan Datta. The Science of the Sulba. 1932.
9. *Ifran G.* Histoire universelle des chiffres. T. 1–2. Paris, 1994.
10. Proclus. A commentery on the first book of the Euclid's Elements. Transl. By G.N.Morrow. Princeton, 1970.

Годы и судьбы: русский институт в Белграде

Н.В. Локоть

Восемьдесят пять лет в жизни человека – это почти все отведенное ему земное существование; восемь с половиной десятков лет в жизни цивилизации – это миг, но порой этот миг перестраивает судьбы людей и стран. В этом году среди знаменательных дат была еще одна, которую нужно вспомнить: ровно 85 лет назад в Париже была образована Русская Академическая группа, в состав которой вошли ученые-эмигранты из России.

Через некоторое время после революции правительство большевиков, по существу, начало высылку интеллигенции из страны. Огромное число ученых разных научных направлений вынуждено было покинуть родину "легально" или "нелегально". Одни уезжали с глубочайшей горечью и, порой, непониманием происходящего: почему их труд на поприще науки, образования, культуры не нужен России. Другие, осознанно владея ситуацией, понимали необходимость выезда, но все равно, еще надеясь на что-то, пытались наладить подобие прежней жизни на "островках", где еще не было большевиков.

Вот пример одной из многих тысяч судеб, характерный для того времени: *Федор Васильевич Тарановский (1875–1936) – уроженец Плоцка, воспитанник юридического факультета Варшавского университета; получил в 1917 году кафедру в Петроградском университете, но в связи с начавшимся террором и гонениями работать не смог и вместе с рядом столичных ученых бежал* *на юг, долго скитался, уклоняясь от предложенного ему поста министра в гетьманском правительстве. Затем "...он принял звание члена Украинской АН, возглавляемой тогда В.И. Вернадским, и деятельно участвовал в попытке сохранить или наладить настоящую академическую работу в Киеве, Полтаве, Харькове, Екатеринославе и Симферополе. После крушения белого движения он без колебания предпочел горечь изгнания рабскому прозябанию под игом большевиков. В 1920 году Ф.В. эмигрирует с семьей из России. За рубежом ему представилась возможность получить кафедру в Варшаве, Софии, Белграде. Он предпочел Белград. В течение 16 лет, до смерти он оставался профессором Белградского университета по пустовавшей до него в течение 17 лет кафедре истории права славянских народов. За это время он проявил совершенно исключительную научную производительность... Внешним выражением признания его ученых заслуг было звание члена трех академий и председателя РНИ в Белграде... он стал исключительным по ширине горизонта историком права в европейском ученом мире"* [3. С. IX–XI]. Примерно то же самое можно сказать о биографиях многих русских ученых, волею судеб оказавшихся за пределами России. История русской научной эмиграции сложна, запутана и очень мало изучена. Но ведь уже сложившиеся к началу XX века русские школы в математике, естествознании, медицине, гуманитарных науках, имеющие свои традиции, свои направления, методологию исследований, не могли не повлиять на развитие науки в странах, принявших русскую интеллигенцию. Тема эта находится еще в стадии становления в связи с появлением некоторого доступа к документам рассматриваемой эпохи. История русской математической эмиграции достойна изучения и анализа, особенно в наше сложное для науки время. Цель данной статьи – попытка рассмотреть малую толику обозначенной проблемы. В русском журнальном фонде РНБ сохранились "Записки Русского научного института в Белграде (1930–)" (РНИ), которые содержат ценнейшие документы той эпохи [2].

Сведениям об истории создания таких институтов за рубежом мы обязаны историку Е.В. Спекторскому :

"Русские ученые, не принявшие ига большевиков и покинувшие

родину, не ограничились приисканием себе заработка на чужбине. Начиная с 1920 года, по примеру Белградского Общества русских ученых и Парижской Академической группы, они образовали в разных странах профессиональные объединения. На первом зарубежном академическом съезде, состоявшемся в 1921 году в Праге, эти объединения учредили Союз русских академических организаций за границей" [3. С. 3]. Возникающие организации были призваны решать три основные задачи: 1) правозащитную, 2) помощь эмигрантской молодежи в получении образования, 3) сохранение и углубление традиций русской науки, дальнейшее изучение собственного отечества.

"В связи с этою последнею задачею явилась мысль об основании особых русских научных институтов на чужбине. Во исполнение этой мысли и в связи со вторым академическим съездом в 1922 году в Праге был открыт Русский институт, преследующий цель поддержания изучения наук, искусства, литературы, права, хозяйства, истории и природных сил России. ...Второй научный институт был основан в Берлине, третий в Белграде" [3. С. 4]. Идея создании такого института возникла еще в 1922 году. В речи на открытии РНИ в Праге его первый председатель – П.И. Новгородцев – говорил о том, что *"...есть еще один славянский народ и одно государство, среди которого также возможно сейчас же основание такого института"*, имея в виду Сербию, Хорватию и Словению. Это заявление не было голословным: известно, что правительство Югославии пыталось многое сделать, чтобы облегчить чужестранцам тяготы жизни, создав так называемую Державную Комиссию, призванную заботиться об удовлетворении материальных и учебных нужд русских эмигрантов в Югославии. Председателем комиссии был А.И. Белич, президент Сербской АН, питомец Московского университета. Кроме того, под покровительством короля Александра I *"была образована особая Культурная Комиссия, поставившая себе задачею содействие русской науке и искусству...Первое организационное собрание Института состоялось 23 июня 1928 г. Торжество открытия Института было приурочено к первому заседанию четвертого съезда русских ученых в Белграде, 16 сентября 1928 г., в большой физической аудитории*

нового здания университета".

В торжественной речи председатель РНИ четко определил задачу и направления будущей работы:

"*Задача... двоякая – исследовательская и просветительская. Работа... предполагается в трояком направлении: разработка общих вопросов науки с применением традиций и методов русской науки, изучение прошлого и настоящего России,... и, наконец, изучение страны, гостеприимством которой мы пользуемся.... В задачу института входит также подготовка молодых ученых и печатание научных трудов"* [3. С. 6].

Первоначально состав РНИ был немногочислен, на проекте его устава всего 21 подпись, дальнейшее пополнение института происходило путем избрания. Согласно Уставу, члены РНИ делились на почетных, действительных и сотрудников: почетными могли стать *лица, оказавшие крупные услуги институту или пользующиеся известностью, благодаря своим выдающимся научным трудам",... действительными... только лица, занимавшие прежде кафедры в высших учебных заведениях России или состоящие ныне ординарными или экстраординарными профессорами университета Югославии, членами-сотрудниками – ...лица, принимающие участие в научных исследованиях"* [3. С. 9]. В 1938 году Устав был немного изменен: действительными членами РНИ могли быть все занимавшиеся преподаванием в югославских университетах, а также магистры и доктора российских университетов. Институт до 1932 года мог себе позволить приглашать ученых и деятелей искусства и культуры из других стран, давать стипендии молодым ученым, как проживающим в Югославии, так и приглашенным (например, впоследствии известный геометр В.Х. Даватц – стипендиат РНИ). Институт был организован по русским академическим традициям и управлялся Советом. Первым председателем института был избран философ Е.В. Спекторский (1928–1930), затем его сменил историк права Ф.В. Тарановский (1930–1936), о жизненном пути которого упоминалось в начале статьи; в 1936–37 гг. руководил РНИ историк церкви А.П. Доброклонский, с 1938 по 1939 – профессор медицины А.И. Игнатовский. В октябре 1928 года в институте было образовано пять отделений:

философское, языка и литературы, общественных и исторических наук, естественных, агрономических и медицинских наук, математических и технических наук.

У института была своя небольшая библиотека; Народная библиотека Белграда и книгохранилище Сербской Королевской Академии предоставляли свои фонды РНИ, но русскими изданиями ученых обеспечивала, в основном, университетская библиотека Гельсингфорса В институте проводились торжественные публичные собрания, посвященные знаменательным датам и юбилеям, а также закрытые – для бесед с приезжавшими в Белград учеными и писателями *(З. Гиппиус, Д. Мережковский, К. Бальмонт (1928); С. Маслов (1930); И. Северянин, А. Алехин, И. Лапшин (1931)).*

Для ознакомления интересующихся и особенно начинающих ученых с методами научной работы, с современным положением отдельных научных дисциплин были организованы семинарии, которыми руководили 17 членов института, читался ряд систематических курсов.

Председателем интересующего нас отделения в 1928–1933 гг. был инженер-механик Г.Н. Пио-Ульский.

Георгий Николаевич Пио-Ульский (1864–1938) родился в Пскове, окончил Морское Инженерное Училище в Кронштадте (1884) и Николаевскую Морскую Академию по механическому отделению (1890). С 1891 года преподавал в Кронштадтском инженерном училище, затем в институте инженеров путей сообщения, политехническом институте, после революции в Донском и Кубанском политехникумах, а после эвакуации (1920) – в Белградском университете, где являлся ординарным, а после выхода на пенсию в 1928 году – гонорарным профессором. “Специальностью [его] были паровые турбины и термодинамика, по этим наукам Г.Н. напечатал целый ряд научных трудов и учебников на русском, сербском и иностранных языках. Г.Н. не ограничился преподавательской деятельностью, а, оставаясь в России (до 1919 г.) на действительной службе во флоте (где он достиг чина генерал-майора корпуса инженеров-механиков флота), проводил и провел в жизнь применение паровых турбин на военном флоте.... На техническом факультете БУ [он] организовал музей машин и *оставил наилучшую память как энергичный организатор, отличный профессор и отзывчивый коллега”* [3. С. II–III].

С 1933 года деятельность отделения математики и механики связана с именем выдающегося, но почти не известного в России математика – Николая Николаевича Салтыкова.

“Салтыков Никола (25.9.1872–28.9.1961) – югославский математик. Проф. ун-та в Белграде. Осн. труды по теории дифференциальных уравнений в частных производных. С 1921 года опубликовал ок. 300 работ” – это дословная запись из справочника [1. С. 458]. Именно при изучении вклада Салтыкова в развитие теории дифференциальных уравнений возникла идея рассказать о Русском научном институте в Белграде.

Николай Николаевич Салтыков родился в Вышнем Волочке, учился в Харьковском университете (1891–1895), после его окончания был оставлен для приготовления к профессорскому званию, в Харькове защитил магистерскую (1899) и докторскую (1907) диссертации. В Белград он приехал в 50-летнем возрасте зрелым ученым, имея уже более 20 лет научного стажа и более полусотни опубликованных научных работ по теории дифференциальных уравнений в частных производных, теоретической механике, методике преподавания математики и др.

Будучи уже ординарным профессором Белградского университета, Салтыков входил в первоначальный состав РНИ, участвовал в работе редакционной комиссии, в 1933 году возглавил отделение математики и механики, руководил семинариями, читал курсы лекций для русскоязычных студентов. В белградский период у него появилось еще более 150 научных публикаций. Сербская АН, учитывая огромные заслуги Николая Николаевича в развитии математики, издала в 1947 году его объемную монографию ***“Методы интегрирования дифференциальных частных уравнений 1 порядка одной неизвестной функции”,*** в которой были изложены наиважнейшие результаты многолетней работы. По своему историческому подходу, по методам изложения, по содержанию книга имеет характер энциклопедии: она разошлась по 700 странам, издана на многих языках, а русского издания до сих пор нет!

Основание русских научных организаций за рубежом давало возможность издавать свои труды: многие *"русские ученые в эмиграции получили возможность печатать свои научные труды на всевозможных языках до японского включительно и по всем дисциплинам от богословия до радиотехники"* [3. С. 24]. Тем не менее, сложности в издательской деятельности научной продукции на русском языке у руководства РНИ были огромны. Спекторский при водит примеры о том, что *"на одной из выставок в Праге находилось математическое исследование Н.Я. Подтягина, который домашним способом собственноручно набрал и переплел свою работу... Совершенно готовые к печати труды третьего съезда русских ученых в Праге в 1924 году доныне [1938 г.!] остаются в рукописи. Прекратилась издательская деятельность русских ученых в Берлине. Молодые ученые, желающие получить от русских академических организаций степень магистра или доктора, принуждены представлять свои исследования в рукописном виде..."* [3. С. 24].

На II съезде в Праге (1922) была образована комиссия по изданию трудов русских ученых на родном языке, но за недостатком средств все разработанные ею планы изданий остались на бумаге. В Белграде же все сложилось иначе. Благодаря *"сочувственному отношению Культурной комиссии Югославии"*, осенью 1928 года в РНИ было утверждено Положение об издании трудов, которое предусматривало *"... печатание диссертаций, монографий, в случае возможности – курсов наук, преподаваемых в высших школах, если они представляют известную оригинальность, а также Записок, содержащих научные и критико-библиографические статьи..."* [3. С. 25]. Из-за недостатка средств Положение было выполнено частично, но Институту удалось напечатать два тома ***"Трудов четвертого съезда русских академических организаций за границей"*** (2-ой том посвящен математическим, техническим и естественным наукам, в нем 13 статей – по математике, технике, физике), первый выпуск ***"Материалов для библиографии русских научных трудов за рубежом"*** (1930), четырнадцать выпусков ***"Записок Русского научного института"*** (в них 77 из 163 статей посвящены математике и естественным наукам). Отметим, что в “Записках РНИ” помещались работы не только его членов и авторов, проживающих в Югославии, но и русских ученых из Франции, Германии, Чехословакии, Америки, что придает этому изданию *“характер ученого органа всей русской эмиграции”* [3. С. 25].

По случаю празднования десятилетия РНИ Совет постановил издать II выпуск библиографических “Материалов”, а также “собрать автобиографии членов Института с их фотографическими карточками. Институт вступает во второе десятилетие своего существования с верою, что ему и впредь удастся работать в том направлении, которое определилось в течение первого десятилетия. Будущие историки русской эмиграции выяснят, какова культурная ценность этой работы” [3. С. 27].

Библиографический список

1. *Бородин А.И., Бугай А.С.* Выдающиеся математики. Киев: Радяньска школа, 1987.
2. Записки Русского научного института в Белграде. 1930–1939. Вып. 1–14.
3. *Спекторский Е.В.* Десятилетие Русского научного института в Белграде // Записки Русского научного института в Белграде. 1939. Вып. 14. С. 3–35.
4. *Локоть Н.В.* Забытые имена: Николай Николаевич Салтыков (1872-1961) // История науки в вузе и школе. Мурманск, 1996. Вып. III. С. 14–40.

О профессиональной направленности курса истории математики в педвузе

Г.Н. Никитина

Один из выдающихся математиков XX века, А.Н. Колмогоров выделил четыре периода в истории развития математики: первый период – зарождение математики (от глубокой древности до VI–V вв. до н.э.); второй период – период элементарной математики (от VI–V вв. до н.э. до XVI в.); третий период – период создания математики переменных величин (от XVI в. до середины XIX в.) и четвертый период – современная математика (от середины XIX в. и до наших дней).

Для нас особенно важным является второй период. Этот период является периодом математики постоянных величин, периодом создания глубокой научной теории. Именно в этот период были разработаны все традиционные разделы современной школьной математики. Поэтому читаемый нами курс истории математики в основном посвящен данному периоду.

Это в некоторой мере обеспечивает соблюдение принципа профессионально-педагогической направленности при обучении истории математики студентов в педвузе. Основным условием профессиональной направленности в обучении является, как известно, мотивационное обеспечение всей учебной работы и каждой отдельно взятой темы изучаемой дисциплины.

Существуют различные подходы к чтению курса истории математики в педвузе. Мы апробировали два их них: горизонтальный – по основным цивилизациям (Древний Египет, Вавилон, Древняя Греция, Эллинистические страны, Китай, Индия, страны ислама) и вертикальный – по содержательно-методическим линиям школьного курса математики. Остановимся более подробно на втором подходе.

Перечень основных содержательно-методических линий школьного курса математики регламентируется программой для общеобразовательной школы, в соответствии с которой рассматриваются следующие содержательные линии:

– числа и величины;

– выражения и преобразования;

– уравнения и неравенства;

– функции;

– геометрические фигуры и их свойства; измерение геометрических величин.

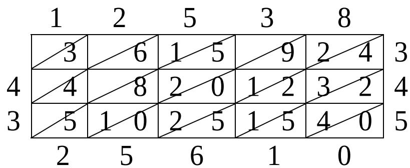
Знакомство студентов с историей развития каждой содержательно-методической линии школьного курса математики и является, на наш взгляд, важной предпосылкой создания положительной мотивации к учению, а также развитию у студентов интереса не только к истории математики, но и к самой математике.

Опыт работы показывает, что эффективным средством профессиональной направленности в обучении истории математики является обогащение методической копилки будущего учителя математики интересными историческими задачами и их реконструкциями. Проиллюстрируем это на примерах.

При изложении истории развития содержательно-методической линии “Числа и величины” мы подробно останавливаемся на системах счисления и вычислительной технике у разных народов. Так, на первый взгляд кажется, что рисование египетских иероглифов, таких как мерная палка, путы для стреноживания коров, веревка для обмера полей, цветок лотоса, указательный палец, лягушка, удивленный человек и, наконец, солнце, которые соответствуют числам 10^n, где $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, является потерей бесценного времени. Однако, как оказалось, именно этот материал во время активной педагогической практики студенты наиболее часто используют на кружковых занятиях по математике с учащимися среднего звена. У учащихся 5–6 классов вызывают интерес не только способы написания чисел у разных народов, но и их вычислительная техника: умножение и деление по-египетски, вавилонские таблицы умножения, индийский алгоритм умножения многозначных чисел и др. При этом учащиеся знакомятся с различными принципами записи чисел: аддитивным, субстрактивным и мультипликативным. Они узнают о различных системах счисления: непозиционных и позиционных, в том числе и о первой в истории науки позиционной вавилонской шестидесятеричной системе счисления. Вместе с тем они знакомятся с историей так называемой арабской системы счисления, которой пользуются в настоящее время большинство народов.

Что касается техники вычислений, то индийский алгоритм умножения никого не оставляет равнодушными: ни студентов, ни учащихся. Напомним этот алгоритм.

Счетную доску, на которой работали индийцы, расчерчивали на сетку прямоугольников, каждый из которых делился пополам диагональю. По сторонам сетки записывали сомножители, промежуточные произведения писали в треугольниках и затем складывали их по диагоналям. В приведенной ниже таблице умножаются числа 12 538 и 345.



Итак, $12538 \cdot 345 = 4325610$.

Содержание данной методической линии также позволяет с исторической точки зрения более глубоко взглянуть на многие математические проблемы. Так изучение истории развития теории действительного числа от Евдокса (IV в. до н.э.), Евклида (III в. до н.э.), О. Хайяма (XII в.) и ат-Туси (XIII в.) до Р. Дедекинда и К. Вейерштрасса (XIX в.), сравнительный анализ этих теорий, установление аналогий между теориями Евдокса и Дедекинда может служить материалом курсового сочинения. История формирования абстрактного понятия отрицательного числа от математиков Древнего Китая (II в. до н.э.) до Р. Декарта и П. Ферма (XVII в.) также является хорошим материалом для курсовых сочинений по методике преподавания математики.

Другой содержательно-методической линией школьного курса математики, богатой для приложений в будущей профессиональной деятельности, является геометрическая. Опыт работы показывает, что только конкретный фактический материал из курса истории математики дает возможность студенту применить это знание в школе. Начиная с геометрии древних египтян, мы даем студентам не только исторические задачи и их реконструкции с целью подтверждения тех или иных гипотез о математических результатах математиков древности, но и различные гипотезы получения ими всевозможных математических формул. Проиллюстрируем это на гипотезах открытия египтянами точного способа вычисления объема усеченной пирамиды с квадратным основанием:

$$V = \frac{1}{3}h\left(a^2 + ab + b^2\right)).$$

Как известно, о получении этой формулы в папирусах ничего не сказано. Однако трудно предположить, что она была получена эмпирически. Очевидно, что это можно сделать только логическим путем с использованием геометрических и арифметических рассуждений.

Немецкий историк математики О. Нейгебауэр предложил вывод этой формулы (для усеченной пирамиды частного вида с боковым ребром, перпендикулярным плоскости основания), основанный на разбиении данной пирамиды на четыре многогранника: на параллелепипед, две равных между собой треугольных призмы и четырехугольную пирамиду (рис. 1).

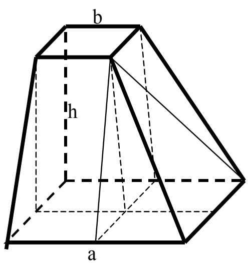


рис. 1

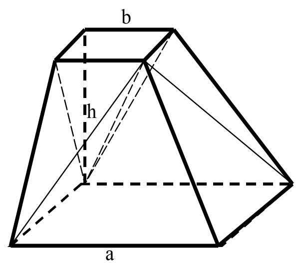


рис. 2

Тогда $V = b^2h + \frac{1}{3}(a-b)^2h + 2\cdot\frac{1}{2}h(a-b)b = \frac{1}{3}h(a^2+ab+b^2)$. При такой реконструкции следует постулировать умение египтян выполнять некоторые алгебраические преобразования, например, знать формулу $(a\pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$. Между тем, явных подтверждений того, что они этим владели, в источниках нет.

Профессор Мордовского университета А.Е. Раик предположила, что этот замечательный результат получен гораздо проще. А именно, разбиением усеченной пирамиды данного вида на четыре пирамиды (рис. 2).

Тогда $V = 2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}abh + \frac{1}{3}ha^2 + \frac{1}{3}hb^2 = \frac{1}{3}h(a^2+ab+b^2)$.

Очевидно, что обе гипотезы являются очень интересными способами решения одной и той же геометрической задачи.

Большой интерес вызывает у студентов история теоремы Пифагора и ее многочисленные применения в задачах математиков Древнего Вавилона, Греции, Китая. Различные способы доказательства этой теоремы, в том числе, изящное, красивое доказательство по Евклиду, также часто используются студентами на уроках математики во время их педагогических практик. По отзывам самих студентов привлечение исторического материала на уроках математики вызывает живой интерес у учащихся, а у самих студентов чувство удовлетворенности и радости первых успехов в педагогической деятельности.

Данная содержательно-методическая линия также содержит много проблем, которые можно вынести на рассмотрение в курсовых сочинениях. К ним относятся:

– история теории параллельных линий от III в. до н.э. до XIX в. (Евклид, ибн-Корра, ал-Хайсам, О. Хайям, ат-Туси, К. Гаусс, Я. Больяи, Н.И. Лобачевский);

– история классических задач на построение: об удвоении куба, трисекции угла и квадратуре круга; история числа π;

– теория конических сечений Аполлония и ее роль в математике и математическом естествознании.

Заметим, что изучение “Начал” Евклида, одного из самых знаменитых произведений античных авторов, нами вынесено на семинарское занятие по истории математики. При этом каждый студент, работая с первоисточником, готовит по индивидуальному заданию сообщение на 5–7 минут. Наиболее интересные и полезные с профессиональной точки зрения вопросы выносятся на обсуждение во время занятия. К таким вопросам относятся: постулаты Евклида, первые три предложения “Начал”, конструктивные задачи абсолютной геометрии, золотое сечение, золотой треугольник, построение правильного пятиугольника, вписанного в круг и др.

По содержательно-методической линии “Функции” особый интерес вызывают у студентов интегральные и дифференциальные методы в трудах Архимеда. Подробное рассмотрение примера на вычисление площади первого витка спирали (спирали Архимеда) убедительно показывает, что Архимед фактически строил верхние и нижние интегральные суммы, которые мы сейчас называем суммами Римана и Дарбу. Из работы Архимеда “О спиралях” очевидно следует, что он стоял у истоков дифференциального исчисления, и, по-видимому, о нем говорил в XVII веке один из творцов математического анализа И. Ньютон: “Я видел дальше, потому что стоял на плечах гигантов”.

При изучении таких содержательно-методических линий, как “Выражения и преобразования”, “Уравнения и неравенства” также имеется богатейший материал для методических копилок будущих учителей математики. Это и красивые геометрические доказательства основных алгебраических тождеств, и история происхождения и развития многих математических терминов и математической символики, популярные задачи на арифметические и геометрические прогрессии у математиков Древнего Египта и Вавилона. Особый интерес у студентов вызывают различные методы решения уравнений и систем уравнений у разных народов. В том числе китайский метод “Фан-чэн” решения систем уравнений с числом неизвестных $n \geqslant 2$, который по существу является хорошо известным методом Гаусса с той лишь разницей, что в процессе решения китайским методом осуществляется процедура преобразования столбцов матрицы, а не ее строк.

Интересен пример решения индийского математики Бхаскары II уравнения $x^4 - 2x^2 - 400x = 9999$. Прибавляя к обеим частям данного уравнения выражение $400x + 1 + 4x^2$, он приходит к уравнению $(x^2 + 1)^2 = (2x + 100)^2$.

По истории развития данных содержательно-методических линий хорошим материалом для курсовых сочинений является изучение по первоисточнику геометрической теории кубических уравнений арабских математиков, в том числе О. Хайяма, а также открытия итальянскими математиками С. Ферро, Н. Тарталья и Д. Кардано (XVI в.) алгоритма решения кубических уравнений в радикалах.

Как известно, первое в истории математики, дошедшее до нас, изложение основ буквенной алгебры содержится в произведении Диофанта “Арифметика” (III в.). Этому произведению также посвящено отдельное семинарское занятие, в процессе подготовки к которому студенты знакомятся не только с началами буквенной символики, но и с методами решения неопределенных уравнений.

Опыт работы показывает, что изложение курса истории математики по содержательно-методическим линиям школьного курса математики с наполнением его содержания конкретными историческими задачами, их решений и реконструкциями этих решений, а также с показом различных точек зрения, различных способов доказательства одной и той же задачи или теоремы, является важным средством осуществления одного из ведущих принципов обучения в педвузе – принципа профессионально-педагогической направленности. Следование этому принципу способствует решению одной из важных задач курса истории математики: создание благоприятствующего эмоционального фона в отношении студентов к профессии учителя математики.

К реконструкции итерационного метода решения кубических уравнений у ал-Бируни и Леонардо Пизанского

А.И. Щетников

Абу-р-Райхан ал-Бируни при вычислении тригонометрических таблиц в 3 главе III книги “Канона Мас‘уда” (ок. 1030) выполняет приближенное построение правильного девятиугольника [1. Ч. 1. С. 260] и по ходу этого построения отыскивает приближенные решения кубических уравнений

$$x^3 = 1 + 3x, \tag{1.1}$$

$$x^3 + 1 = 3x. \tag{1.2}$$

Свой метод отыскания решений он никак не разъясняет. Для уравнения (1.1) найденное приближенное значение положительного корня в шестидесятеричных дробях равно 1;52,45,47,13. Уравнение (1.2) имеет два положительных корня. Исходя из геометрических соображений, Бируни ищет меньший из них – тот, который близок к $1/3 = 0;20$. Найденное им приближенное значение корня равно 0;20,50,16,01. О существовании второго положительного корня, близкого к $3/2$, Бируни ничего не говорит, поскольку этот корень его не интересует.

Из истории средневековой математики известно также, что Леонардо Пизанский, известный также под прозвищем Фибоначчи, в трактате “Цветок” (1225) исследовал кубическое уравнение

$$x^3 + 2x^2 + 10x = 20, \tag{2}$$

предложенное ему Иоанном Палермским на математическом состязании при дворе императора Фредерика II (см. [2. Т. 1. С. 266]). Сам Иоанн Палермский почти наверняка заимствовал это уравнение из трактата Омара Хайяма “О доказательствах задач алгебры” (1074), где оно приводится как пример одного из видов в классификации кубических уравнений [3. С. 107]. Леонардо Пизанский исследовал уравнение (2) и решил его численно. Найденное им значение корня равно 1;22,07,42,33,04,40. Подобно Бируни, он не разъясняет своего метода. Правдоподобно будет предположить, что Леонардо научился этому методу у математиков Востока во время своих путешествий.

В настоящей статье делается попытка восстановить методы и воспроизвести результаты Бируни и Леонардо. Сразу же сообщим, что реконструированные нами итерационные формулы по виду совпадают с формулами так называемого метода Ньютона (он же – метод касательных). Однако в качестве рабочих средств для их получения мы будем пользоваться не алгебраическими выражениями, раскладываемыми по порядкам малости, как это делал сам Ньютон в “Анализе уравнений с бесконечным числом членов” (1669), но традиционными для античной и средневековой математики плоскими и телесными фигурами “геометрической алгебры”. Ньютон имеет дело с алгебраическими символами; когда он говорит об отбрасывании членов по их сравнительной малости, эти члены мыслятся им как числа, которыми можно пренебречь в вычислениях по сравнению с другими числами. Математики средневековья, в отличие от Ньютона, мыслили свои уравнения телесно; и их соображения об отбрасывании малых членов должны отсылать не к числовым оценкам, но к геометрической интуиции, согласно которой пространственное тело, его тонкий поверхностный слой (“лист бумаги”), узкая граница этого слоя (“волос”) и короткий конец этой границы (“песчинка”) образуют иерархию последовательно убывающих порядков малости.

При чтении статьи читателю рекомендуется постоянно помнить о том, что мы записываем квадратные и кубические уравнения в привычной нам алгебраической символике, а математики средних веков формулировали эти уравнения словесно. К примеру, уравнения (1.1) и (1.2) у Бируни формулируются так: "единица в сумме с тремя вещами равна кубу вещи" и "куб вещи в сумме с единицей равны трем вещам" [1. Ч. 1. С. 260]. Такие словесные описания сами по себе не могут служить субстратом алгебраических преобразований, и потому они отсылают к изображениям плоских (в случае квадратных уравнений) или телесных (в случае кубических уравнений) фигур, которые и играют роль действительного оперативного материала алгебры.

Надо понимать и то, что для нас кубические уравнения (1.1) и (1.2) представляют собой два варианта одного и того же уравнения, тем более, что одно из них преобразуется в другое заменой $x \to -x$. Но для средневековых математиков эти два уравнения были существенно различными, поскольку они изображались и решались с помощью разных чертежей, как это будет показано ниже. Само собой разумеется, отрицательные корни уравнений в расчет не принимались, поскольку неизвестное в исходных формулировках выступало как отрезок, сторона квадрата, ребро куба. Точно так же и суммарные величины, стоявшие в правой и левой частях уравнения, изначально считались положительными, поскольку они представляли собой некоторые площади в случае квадратного уравнения и объемы в случае кубического уравнения.

Рассмотрим кубическое уравнение (1.1), которое решал Бируни:

$$x^3 = 1 + 3x.$$

Начнем процесс решения с подбора "вручную" такого x_0, чтобы при $x = x_0$ численные значения правой и левой частей не сильно отличались друг от друга. Удобно положить $x_0 = 2$, при этом в левой части получается 8, а в правой части 7, и левая часть превышает правую на 1. Нетрудно понять, что начальное приближение $x_0 = 2$ оказалось завышенным по сравнению с точным значением корня, и его надо уменьшить на некоторую величину δ.

Будем мыслить это "уменьшение подбираемой вещи" геометрически: со стоящего в левой части “куба вещи” надо снять гномон толщины δ, а со стоящего в правой части “тела” с площадью основания 3 и высотой x надо снять пластину объемом 3δ. Основная идея решения состоит в том, что при вычислении объема гномона мы будем приближено считать, что он складывается из трех квадратных пластин площадью x_0^2 и толщиной δ; тем самым объем гномона приближенно равен $3x_0^2\delta = 12\delta$. Величину δ нужно подобрать так, чтобы объем гномона 12δ оказался на единицу больше объема пластины 3δ:

$$12\delta = 1 + 3\delta,$$

откуда $\delta = 1/9 = 0;06,40$. Тем самым очередное приближенное значение “вещи”

$$x_1 = x_0 - \delta = 2 - 0;06,40 = 1;53,20.$$

Каждая следующая итерация будет приводить к уравнению для определения толщины гномона δ, имеющему вид

$$x_n^3 - 3x_n^2\delta = (3x_n + 1) - 3\delta,$$

откуда получается итерационная формула

$$x_{n+1} = x_n - \delta = x_n - \frac{x_n^3 - (3x_n + 1)}{3(x_n^2 - 1)} = \frac{2x_n^3 + 1}{3(x_n^2 - 1)}.$$

Вычисления по этой формуле дают результат Бируни уже на третьем шаге:

x_0	2
x_1	1;53,20
x_2	1;52,46,...
x_3	1;52,45,47,13...

Для уравнения (1.2) соответствующая итерационная формула строится аналогичным образом; она имеет вид

$$x_{n+1} = \frac{2x_n^3 - 1}{3(x_n^2 - 1)}.$$

Стартуя с $x_0 = 1/3 = 0;20$, мы получаем результат Бируни уже на втором шаге:

x_0	0;20
x_1	0;20,50
x_2	0;20,50,16,01...

Если стартовать с $x_0 = 3/2 = 1;30$, итерационный процесс будет сходиться ко второму положительному корню уравнения (2.1):

x_0	1;30
x_1	1;32
x_2	1;31,55,31...
x_3	1;31,55,31,11,57,56...

Зададимся теперь вопросом: если Бируни и в самом деле пользовался описанным выше методом, то как он производил оценку точности полученных результатов? На каждой итерации имеет смысл оставлять в результате только верные шестидесятеричные знаки, чтобы не делать лишних вычислений. Но как узнать, сколько найденных знаков являются точными, не выполняя следующей итерации? Возможно, что здесь применялся эмпирически установленный на многих примерах факт удвоения числа верных знаков с каждой следующей итерацией.

Применим этот алгоритм к отысканию положительного корня кубического уравнения (2), которое решал Леонардо Пизанский. Пусть приближение x_n, подставленное в левую часть уравнения (2), дает результат, отличный от 20. Получившаяся разница может быть представлена как $x_n^3 + 2x_n^2 + 10x_n - 20$. С другой стороны, мы представляем ее как суммарный объем гномонов всех тел, из которых составляется левая часть уравнения (2). Если пренебречь столбиками сечением δ^2 и кубиком δ^3, эта сумма будет приближенно равна $(3x_n^2 + 4x_n + 10)\delta$. Отсюда

$$x_{n+1} = x_n - \delta = x_n - \frac{x_n^3 + 2x_n^2 + 10x_n - 20}{3x_n^2 + 4x_n + 10} = \frac{2x_n^3 + 2x_n^2 + 20}{3x_n^2 + 4x_n + 10}.$$

Стартуя с $x_0 = 1;30$, мы вновь получаем требуемую точность уже на третьем шаге:

x_0	1;30
x_1	1;22...
x_2	1;22,07,42...
x_3	1;22,07,42,33,04,37...

Весомым доводом в пользу того, что Бируни и Леонардо могли пользоваться описанным выше методом, служит совпадение результатов вычислений, проведенных в две или три итерации без какого-либо специального подбора начального приближения, с теми результатами, которые сообщают сами эти математики.

С другой стороны, во всей этой истории имеется одна существенная проблема: по нашему методу последовательные приближенные значения должны подходить к корню уравнения (2) снизу, а сам Леонардо получил завышенное приближенное значение корня. Расхождение нашего результата с результатом Леонардо составляет 3 единицы в шестом знаке; при этом истинное значение корня лежит примерно посередине между этими двумя приближениями. И конечно, желательно было бы показать, откуда у Леонардо могло возникнуть отклонение в другую сторону от точного значения.

Ранее попытка реконструировать итерационный метод Леонардо Пизанского была сделана С. Глушковым. В работе [4] им было выдвинуто предположение, что Леонардо вычислял приближенное значение корня, пользуясь методом линейной интерполяции (в средние века этот метод называли правилом двух ложных положений). В соответствующих вычислениях результат Леонардо достигается на 18-й итерации. Думается, что третий шаг итерационного процесса, на котором требуемая точность достигается в нашей реконструкции, является достаточно сильным аргументом в пользу ее большего правдоподобия по сравнению с реконструкцией Глушкова.

Другая реконструкция итерационного метода Леонардо Пизанского описана Б.Л. Ван дер Варденом [5. С. 34]. Он предполагает, что Леонардо мог строить последовательные приближения по схеме Горнера. (Отметим, что сама эта схема для извлечения квадратных и кубических корней была описана под названием “метода небесных элементов” в древнекитайском трактате “Математика в девяти книгах” (II в. до н.э.), а китайские математики Цзу Чунчжи (V в.) и Ван Сяо-тун (VII в.) решали этим методом кубические уравнения [2. Т. 1.С. 171].) Так, для уравнения

$$x^3 + 2x^2 + 10x = 20$$

на первом шаге устанавливается, что $1 < x < 2$. Затем полагается $x = 1 + y/60$, что после раскрытия скобок приводит к кубическому уравнению

$$y^3 + 5,00y^2 + 17,00,00y = 7,00,00,00.$$

(коэффициенты записаны в шестидесятеричной системе), для которого подбором устанавливается, что $22 < y < 23$ (при подборе удобно двигаться сверху, вычитая одну за другой единицы из приближения $7,00 : 17 \approx 24$). На следующем шаге точно так же кладется $y = 22 + z/60$, получается новое кубическое уравнение и отыскиваются целочисленные границы, внутри которых заключено значение z; и так далее.

Проблемная точка у этой реконструкции та же самая, что и у нашей: если бы Леонардо находил приближенные значения корня по этой схеме, то на шестой итерации он неминуемо получил бы результат 1;22,07,42,33,04,38, а у него в шестом шестидесятеричном знаке стоит 40.

В целом вопрос, конечно, нельзя считать окончательно решенным; для его дальнейшего прояснения было бы желательно применить реконструированный в настоящей статье метод к какимнибудь другим уравнениям, решавшимся в средневековой математической литературе. В частности, большой интерес представляли бы примеры численного решения алгебраических уравнений степени выше третьей, так как для них описанная выше процедура “снятия гномона” уже не допускает наглядной геометрической интерпретации и требует формальных алгебраических рассуждений, основанных на использовании таблицы биномиальных коэффициентов.

Библиографический список

1. *Беруни Абу Райхан.* Канон Мас‘уда // Беруни Абу Райхан. Избранные произведения. Ташкент: Фан, 1973–76. Т. 5. Ч. 1–2.
2. История математики с древнейших времен до начала XIX столетия. М.: Наука, 1970. В 3 т.
3. *Хаййам ‘Омар.* Трактаты. М.: Изд. вост. лит., 1964.
4. *Glushkov S.* On approximation methods of Leonardo Fibonacci. Historia Mathematica. 1976. V. 3. P. 291–296.
5. *Van der Waerden B.L.* A history of algebra: From al-Khwвrizmo to Emmy Noeter. Berlin a. o., Springer, 1985.

Колмогоровские основания математики

А.С. Кузичев

В основаниях математики выделяются два пути построения теорий (исчислений) первого порядка, формализующих различные разделы математики: хорошо известный путь Фреге и новый путь Колмогорова. Путь Колмогорова характеризуется использованием наивной теории множеств при определении основных (исходных) понятий каждого исчисления; в этой связи ниже выделяется определение 3, вводящее бесконечные классы, бесконечное число которых представляет новый параметр для исследования исчислений (см. ниже доказательство теоремы 1). Поэтому мы и говорим о *колмогоровских (теоретико-множественных)* основаниях математики.

Обсуждая с автором проблемы оснований математики, А.Н. Колмогоров не только отметил, что его редукция 1925 года позволяет, используя теоретико-множественную общность, значительно упростить построения и доказательства в основаниях математики, сделав их общепонятными и общедоступными, но и впервые обратил внимание на правила вывода теорий, два этажа (посылки и заключение) которых могут быть основой упрощений. Важно при этом выбрать среди всех эквивалентных выводимых формул подходящие аксиомы для каждой теории.

Эта идея Андрея Николаевича о двухэтажности правил вывода теорий нашла свое выражение ниже в определении 4 перевода *(0-*

перевода) всех формул каждого фиксированного вывода теории в формулы логики высказываний.

Различные постулаты (аксиомы и правила вывода) всех теорий (исчислений) сформированы на фрегевском пути.

Автором предложена и осуществлена к концу XX века теоретико-множественная колмогоровская *перестройка* основных понятий, уже построенных по Мендельсону на пути Фреге исчислений.

Следуя А.Н. Колмогорову, центральным понятием каждой теории является бесконечный класс выводов, а не конечный вывод, как принято, начиная с Г. Фреге (1848–1920).

На колмогоровском теоретико-множественном пути впервые найдено доказательство непротиворечивости всех известных (на пути Фреге) теорий первого порядка (редуцируемых по Колмогорову в логику высказываний). Доказательство получено для каждой такой неполной (по Геделю) теории известными школьными комбинаторными средствами.

Результаты работы могут и должны быть внедрены в учебный процесс – преподавать основания наук целесообразно не по Фреге с ограничительными теоремами Геделя о неполноте, как это делается в настоящее время, а теоретико-множественно по Колмогорову без ограничений.

Проблема доказательства непротиворечивости известных аксиоматических теорий первого порядка и схема ее решения на новом колмогоровском направлении в основаниях наук

К числу известных аксиоматических теорий относятся формульные исчисления гильбертовского типа, например, арифметика FA Пеано, теории множеств ZF Цермело-Френкеля, теории множеств NBG Неймана-Бернайса-Геделя, теории множеств NF Куайна.

Эти теории, естественно, создавались как непротиворечивые на фрегевском пути оснований математики: для каждой теории все ее постулаты (аксиомы и правила вывода) выбраны так, что множество всех ее выводимых формул не совпадает, как уверены создатели теории, с множеством всех формул ее языка.

Однако доказательство непротиворечивости большинства этих теорий пока не найдено, а для таких, как исчисление FA арифметики Пеано, доказательства весьма громоздки, в них применяются понятия и методы (например, фрагменты теории счетных порядковых чисел), очевидно не формализуемые средствами исчисления FA. Доказательства непротиворечивости исчисления FA получены Г. Генценом (1936, 1938), П.С. Новиковым (1941), К. Шютте (1951) и другими авторами.

Для каждой теории предложить доказательство непротиворечивости – весьма трудная проблема.

Многочисленные попытки ее решения для различных теорий осуществляются и по сегодняшний день на, как думают, "единственном", фрегевском пути в основаниях математики.

Автор предлагает ее решение для всех известных аксиоматических теорий (редуцируемых по Колмогорову в логику высказываний), благодаря теоретико-множественной перестройке по Колмогорову каждой такой теории (с сохранением всех выбранных на фрегевском направлении ее постулатов), на новом колмогоровском пути в основаниях математики. Предлагается единый алгоритм такой перестройки каждой теории.

Доказательство непротиворечивости теории K осуществляется в два этапа:

первый этап – доказывается теорема 1 о редукции теории K (перестроенной по Колмогорову) в логику высказываний, при этом (в случае доказательства теоремы 1) сама теория K *называется редуцируемой* (в логику высказываний);

второй этап – доказывается теорема 2 о непротиворечивости теории K.

Теорема 2 доказывается от противного как следствие теоремы 1. Теорема 1 доказывается последовательно по построению всех бесконечных классов $A_0, A_1, A_2, \ldots$ выводов исследуемой теории – непосредственно проверяем индукцией по n (с использованием метода от противного), что в каждом классе a_n, $n \geqslant 0$, нет выводов с правилом MP*.

Заметим: если теорема 1 опровергается, то соответствующее множество всех выводов не образует "известную" теорию и не рассматривается.

Предлагаемое доказательство непротиворечивости теории K синтаксическое. Выбор постулатов теорий связан и с хорошо известной классической семантикой, прежде всего, логических операторов, логических аксиом и правил вывода каждой теории K.

О роли теорем Геделя о неполноте в основаниях математики

В основаниях математики (на фрегевском пути) широко известны теоремы Геделя 1931 года о неполноте богатых по выразительным возможностям теорий первого порядка. Из них, в частности, следует, что доказательство непротиворечивости каждой такой теории K должно использовать невыразимые в K идеи или методы.

Д. Гильберт, все авторы и исследователи этих теорий уверены в их непротиворечивости. Но ее доказательство для многих известных теорий пока не найдено, а для таких, как исчисление FA арифметики Пеано, доказательства весьма громоздки, используют теоретико-множественную индукцию.

Теоремы Геделя и следствие из них полностью обоснованы (доказаны). Никаких сомнений, казалось, нет. Более того, у многих сомневавшихся находились конкретные ошибки.

Я был потрясен, когда узнал, что А.Н. Колмогоров относит себя к сомневающимся в теоремах Геделя о неполноте. Нет, он не оспаривал результаты Геделя, относящиеся к конкретным исследуемым теориям, но он не верил в распространение этих теорем без доказательства на все известные теории при любых их построениях. Он так и говорил мне: “А где доказательство?”

Действительно, нет доказательства, что теоремы Геделя распространяются всеобъемлющим образом на все основания математики. А без доказательства Колмогоров не мог признать истинным обобщение этих теорем на все теории.

Надо сказать, что и сам Гедель выражал некоторое сомнение в величии и универсальности своих результатов о неполноте, особенно следствий из них [1].

Биограф Геделя Г. Крайзель пишет, что “вопреки усилиям... представить результаты Геделя как сенсацию, эти результаты не оказали революционизирующего влияния ни на представление большинства работающих математиков о своей науке, ни тем более на их практическую деятельность. Во всяком случае, **их влияние намного меньше, чем влияние внутреннего развития самой математики**" [1. Вып. 2(260). С. 175]; *выделено мною* – А.С.К.

А как мы преподаем основания не только математики, но и всех наук, особенно теоретических? Принято почти в самом начале соответствующих курсов или семинаров ссылаться на теоремы Геделя о неполноте (часто даже не формулируя их) как на ограничительные – запрещающие многое сделать в рассматриваемой области знания (как будто эти запреты в них доказаны или доказуемо следуют из них). Так, А. Тьюринг восклицает: "Может ли машина мыслить?" И отвечает, по существу ссылаясь на теоремы Геделя, что человек такую мыслящую машину (даже теоретически) создать не может (см., например, работу А. Тьюринга [2]).

Взгляды Колмогорова на теоремы Геделя о неполноте перевернули всю мою жизнь, особенно учитывая догматическую веру в эти теоремы моих ближайших родственников, коллег, учеников и подавляющего большинства математиков.

В нашей педагогической практике такая догматическая вера в теоремы Геделя и следствия из них по существу навязывается всем учащимся; доказательства, весьма громоздкие и сложные, разбираются лишь на узкоспециальных занятиях с небольшим числом заинтересованных студентов, да и в основном, как я сейчас глубоко убежден, занятия эти проводятся фактически с целью не разобрать все возможные случаи (что малореально), а только усилить веру в результаты Геделя и их обобщения.

Взгляды Колмогорова относительно теорем Геделя были мало известны. Они никогда им не публиковались (хотя, возможно, запечатлены в рукописных архивах). Под руководством Колмогорова я работал с января 1980 по октябрь 1987 года, когда Андрей Николаевич заведовал кафедрой математической логики механико-математического факультета МГУ (я был сотрудником этой кафедры). По поводу теорем Геделя я спорил с Андреем Николаевичем, однако, следуя его рекомендациям, изучал различные теории, прежде всего теоретико-множественные.

В результате мною впервые были найдены доказательства непротиворечивости многих известных теорий – доказательство непротиворечивости каждой теории строится секвенциально по Генцену на основе неразрешимого алгоритмического (но не логического!) аппарата одного из комбинаторно полных исчислений Шейнфинкеля-Карри-Черча, представляющего бестиповым образом неограниченное теоретико-множественное свертывание Кантора; многим такие доказательства кажутся (без предъявления серьезных математических обоснований), особенно в силу их длиннот, очевидно противоречащими теоремам Геделя о неполноте.

Мои результаты после обсуждений А.Н. Колмогоров представлял в печать – работы опубликованы в Докладах Академии наук и других изданиях [3–12] (см. библ. 4–12 в [13] и библ. 33, 38–44 в [11]).

Андрей Николаевич подчеркивал значимость полученных результатов. Он не только отмечал при этом, что его редукция 1925 года (см. [14]) позволяет, используя теоретико-множественную общность, значительно упростить построения и доказательства, сделав их общепонятными и общедоступными, но и **впервые** обратил внимание на правила вывода теорий, два этажа (посылки и заключение) которых могут быть основой упрощений. Важно при этом выбрать среди всех эквивалентных выводимых формул подходящие аксиомы для каждой теории.

Только к концу XX века я понял, что А.Н. Колмогоров был прав в своих сомнениях относительно роли теорем Геделя в основаниях наук. Я не только понял, но и в [15] и настоящей работе излагаю вариант теоретико-множественной перестройки по Колмогорову каждой известной теории K (с сохранением выбранных ее постулатов), предложенный мною в соответствии с идеями и рекомендациями Андрея Николаевича. Изложение результатов в [15] ведется на примере классической формальной арифметики FA, сформулированной в [16] по Мендельсону.

В целом математика развивается теоретико-множественно. Ее разделы формализуются в виде аксиоматических теорий первого порядка. Однако в основе каждой теории лежит конечный объект – вывод. Такой путь исследования теорий восходит к трудам Готлоба Фреге.

Что будет, если центральным понятием теории считать не конечный, а бесконечный объект – класс выводов? Ответ на этот вопрос получаем, следуя идеям и рекомендациям А.Н. Колмогорова: становится возможным доказать непротиворечивость всех аксиоматических теорий первого порядка (редуцируемых по Колмогорову в логику высказываний).

Доказательство непротиворечивости каждой известной аксиоматической теории K первого порядка, построенной в [15, 16] на фрегевском пути по Мендельсону и редуцируемой по Колмогорову в логику высказываний

Настоящая работа содержит для теории K принципиально новые определения, формулировки и доказательства предложений из [15], а также комментарии к ним. Эти предложения, как и в [15], рассматриваются так же детально с целью убедить читателей в важности нового колмогоровского направления в основаниях современной науки.

Определение 1. Каждую формулу (языка теории K) вида $\forall x_1 ... (\forall x_n (\rceil (A \supset A)) ...)$, где $n \geqslant 0$, назовем W-формулой.

Определение 2. Каждую формулу (языка теории K) вида $\mathrm{T} \supset \mathrm{H}$ назовем Выделенной формулой, если T не является W-формулой, а H есть W-формула.

Замечание о выборе собственных аксиом теории K:

Если C есть Выделенная формула языка теории K, то в качестве собственной аксиомы теории K (не уменьшая общности) объявляется не она, а эквивалентная ей формула $\rceil\rceil$C, не являющаяся Выделенной.

Очевидно, что число всех аксиом теории K бесконечно и выбраны они на фрегевском пути по Мендельсону (см. [15]).

В [15] приведены все постулаты исчисления формальной арифметики; вообще, по форме теории различаются синтаксически только собственными аксиомами (см. [16]).

Лемма 1. *Каждая аксиома (Собственная или Логическая) теории K не является ни* W*-формулой, ни Выделенной формулой.*

Доказательство. Лемму 1 доказываем непосредственно, исследуя строение каждой аксиомы теории K и сравнивая ее как слово в алфавите языка теории K с W-формулами и Выделенными формулами теории K.

Лемма 1 доказана.

Подчеркнем, что предложения, аналогичные лемме 1, в литературе ранее автору не встречались.

Лемма 1 доказана комбинаторно на фрегевском пути. Но именно она (см. ниже п. 1 определения 3), по существу, характеризует теоретико-множественную колмогоровскую перестройку основных понятий (прежде всего,введение нового понятия – *класса выводов)* теории K. Перестройка теории K осуществлена в следующем определении 3.

Определение 3. Индуктивно определим бесконечные классы $A_0, A_1, A_2, ...$, построив (определив) все их элементы – (конечные) выводы теории K так, что каждый вывод D формулы E входит только в один класс A_k, $k \geqslant 0$, в D укажем все его пары.

1. Если E – аксиома теории K, то считаем: вывод D состоит только из одной формулы E, и D принадлежит классу A_0. В классе A_0 других элементов (выводов), кроме всех так введенных, нет.

Парой указанного **вывода** D из класса A_0 считается единственная пара E, D.

2. Пусть классы $A_0, ..., A_n$ определены, $n \geqslant 0$. Определим класс A_{n+1}.

2.1. Если вывод U формулы T принадлежит классу A_n, то считаем, что вывод D формулы $= \forall x$T, являющийся продолжением вывода U по правилу Gen, принадлежит классу A_{n+1}.

Парами вывода D считаются пара E,D и все пары вывода U.

2.2. Пусть вывод U формулы T и вывод Y формулы T $\supset$ E хотя бы один принадлежит классу A_n, а другой принадлежит одному из классов $A_0, ..., A_n$.

Считаем, что вывод D формулы E, являющийся продолжением выводов U и Y по правилу MP, принадлежит классу A_{n+1}.

Парами вывода D считаются (называются) пара E,D и все пары выводов U и Y. Например, пара $\supset$,Y в D есть по этому определению пара T $\supset$ E,Y в Y.

Вместо MP пишем MP*, если вторая посылка T ⊃ E правила MP является Выделенной формулой.

2.3. Вывод J формулы S принадлежит классу A_{n+1} тогда и только тогда, когда J определен в п. 2.1 либо в п. 2.2.

3. Считаем, что в множестве M всех выводов теории K других элементов (выводов), кроме указанных в пп. 1 и 2, нет.

Классы $A_0, A_1, A_2, ...$ состоящие только из выводов теории K (построенных в пп. 1 и 2), определены.

По заданию каждый из классов $A_0, A_1, A_2, ...$ очевидно бесконечен.

Множество M (всех выводов теории K) есть объединение всех классов $A_0, A_1, A_2, ...$

Определение 3 закончено.

Определение 4. Пусть J – фиксированный вывод из множества M всех выводов теории K.

Каждой паре F,B вывода J, по его построению (см. определение 3), сопоставим формулу [F,B] языка L логики высказываний, которую назовем **0-переводом (формулы** F **из** J**):**

1) в случае каждого правила MP из J, например, вида, указанного в п. 2.2 (определения 3), если MP есть MP*, то для пар T ⊃ E,Y и E, D в J положим

$$[\mathrm{T} \supset \mathrm{E}, Y] = q \quad \text{и} \quad [\mathrm{E}, \mathrm{D}] = q,$$

где q есть ⌉(R ⊃ R), R – фиксированная формула языка L логики высказываний;

2) для каждой пары F,B вывода J, для которой 0-перевод в п. 1) не указан, положим

$$[\mathrm{F},] = \rceil q.$$

Определение 4 закончено.

Далее иногда вместо выражения “формула [F,B] выводима в исчислении L логики высказываний” будем писать (см. теорему 1): “*предложение* (1) $< \mathrm{F}, \mathrm{B} >$ *верно*”.

Отметим, что в множестве M каждая пара F,B любого вывода J теории K в соответствии с определением 3 есть пара F,B вывода B теории K.

Заметим, что в каждом выводе J из множества M, следуя определению 3 (п. 2.2), пара T⊃E,Y в D для указанного в этом определении вывода D (из J) вводится однозначно как пара T⊃E,Y в Y. Здесь вывод Y принадлежит классу A_k, $0 \leqslant k \leqslant n$, вывод D принадлежит классу A_{n+1}, вывод J принадлежит классу A_r, $r \geqslant n+1$, причем вывод D формулы E построен продолжением по правилу MP выводов U и Y формул T и T⊃E соответственно, вывод U принадлежит классу A_t, $0 \leqslant t \leqslant n$; хотя бы один из двух выводов U и Y обязательно принадлежит классу A_n.

В фиксированном выводе J **не путать** указанную **пару** T⊃E,Y **с формулой** [T⊃E,Y] логики высказываний, вводимой определением 4 и сопоставляемой указанной паре T⊃E,Y из J (формула [T⊃E,Y] есть по определению 4 либо q, либо ⌉q)!

Редукция теории K в логику высказываний L на колмогоровском пути доказана в следующей теореме 1 на основе определений 3 и 4, леммы 1 с использованием метода от противного.

Теорема 1. (о редукции M в L). *Предложение (1)* $<$ F, B $>$ *верно для всех пар* F,B *каждого вывода из множества* M*; в* M *нет выводов с правилом* MP* *.

Доказательство. Теорему 1 докажем непосредственно по построению выводов (элементов) в множестве M, следуя пп. 1–3 определения 3, то есть теорему 1 докажем индукцией по числу s бесконечных классов $A_0, ..., A_s$ (базис: $s = 0$; шаг индукции: от $s = n$ к $s = n + l$, $n \geqslant 0$).

1. Прежде всего теорему 1 доказываем для всех выводов из класса A_0 при всех их вхождениях в элементы (выводы) из M ($s = 0$), поскольку на основании леммы 1 аксиомы теории K не являются ни W-формулами, ни Выделенными формулами, их 0-переводы ⌉q =⌉⌉(R ⊃ R) выводимы в исчислении L логики высказываний. Базис индукции по s доказан.

2. Шаг индукции. Обратимся к п. 2 определения 3, предполагая теорему 1 уже (по гипотезе индукции) доказанной для всех выводов из классов $A_0, ..., A_n$, $n \geqslant 0$.

Пусть $s = n + 1$. По построению вывода D из класса A_{n+1} для выводов U и Y из пп. 2.1 и 2.2 определения 3 при их вхождениях в вывод D теорема 1 доказана по гипотезе индукции.

Докажем теперь теорему 1 для пары E,D этого вывода D из класса A_{n+1}.

Следуя определениям 3 и 4, осталось рассмотреть п. 2.2 определения 3 задания вывода D. Доказательство проведем методом от противного.

Предположим, что в правиле MP из п. 2.2 определения 3 посылка T⊃E является Выделенной формулой – правило MP есть MP*.

Тогда по п. 1 определения 4 в выводе D имеем [T⊃E,Y]=q, q есть ⌉(R⊃R), где R - формула логики высказываний, и теорема 1 в D для пары T⊃E,Y ложна. Однако по гипотезе индукции теорема 1 доказана для всех пар вывода Y и для пары T⊃E,Y в D, являющейся парой T⊃E,Y в Y по п. 2.2 определения 3.

Получили противоречие: теорема 1 для пары T⊃E,Y в D одновременно является ложной и истинной.

Поэтому вторая посылка T⊃E правила MP в п. 2.2 определения 3 не может быть Выделенной формулой.

Следовательно, в соответствии с п. 2 определения 4, имеем [T⊃E,Y]=⌉q и [E,D]=⌉q. Формула ⌉q выводима в логике высказываний, поэтому теорема 1 истинна для пары E,D и, следовательно, для всех пар F,B вывода D.

Таким образом, теорема 1 доказана для всех элементов (выводов) класса A_{n+1}, $n \geqslant 0$.

Итак, исследование постулатов в выводах из множества M закончено; показано: предложение (1) <F,B> верно для всех пар F,B каждого вывода множества M; в M нет выводов с правилом MP*.

Теорема 1 (о редукции множества M всех выводов теории K в логику высказываний L) доказана.

Теорема 2. *Теория* K *непротиворечива.*

Доказательство. Теорему 2 докажем от противного. Допустим, что теория K противоречива. Тогда в K выводима каждая формула языка теории K; в частности, выводимы формулы S и S⊃C, где S⊃C есть Выделенная формула, поэтому применение правила MP к S и S⊃C дает в множестве M вывод, кончающийся правилом MP*, что невозможно в силу теоремы 1.

Теорема 2 о непротиворечивости теории K доказана.

Таким образом, каждая известная аксиоматическая теория первого порядка, редуцируемая по Колмогорову в логику высказываний и построенная на пути Фреге, доказуемо непротиворечива. Доказательство получено комбинаторными средствами с помощью теоретико-множественной перестройки по Колмогорову каждой такой теории. Теоремы Геделя о неполноте, доказанные на фрегевском пути, в перестроенной теории не являются ограничительными, поскольку все известные теории строятся и исследуются автором (в частности, доказывается их непротиворечивость) на теоретико-множественном пути Колмогорова.

В [15], в частности, объясняется, почему результаты [15] и настоящей работы стали возможны только в XXI веке.

Дело в том, что гений Колмогорова опережал время; современники далеко не всегда и не вполне понимали его. Так, в свое время многими была не понята и подвергнута критике колмогоровская реформа школьного математического образования. В частности, попытки Андрея Николаевича включить в школьный курс математики некоторые элементы теории множеств и логики (см., к примеру, [17, 18]) встретились с неприятием и сопротивлением. Колмогорова ругали за "чуждый нашему обществу" "идеалистический" (!) теоретико-множественный подход. Несостоятельность критики проявилась позднее, когда "изгнание слова "множество" и соответствующих атрибутов из школьного курса не дало ожидаемого эффекта" ([19. С. 130]). Более того, именно теоретико-множественный подход позволяет разрешить многие проблемы оснований наук, исключить из оснований всякие рассуждения о парадоксах и доказать (на примере предлагаемой и других работ автора этих строк), что теоретико-множественная математика в ее целостности имеет доказуемо непротиворечивую формализацию, естественно неаксиоматическую.

Я убежден, что многие непонятые при жизни Колмогорова его идеи – это, в сущности, идеи XXI века, реализовывать которые предстоит его ученикам и последователям.

О вкладе А.Н. Колмогорова в математическое образование см., например, [19–21].

Результаты данной работы могут и должны быть внедрены в учебный процесс – преподавать основания наук целесообразно не по Фреге с ограничительными теоремами Геделя о неполноте, как это делается в настоящее время, а теоретико-множественно по Колмогорову без ограничений, ибо только на колмогоровском пути впервые найдено доказательство непротиворечивости всех известных (на пути Фреге) теорий первого порядка, редуцируемых в логику высказываний. Доказательство получено для каждой такой неполной (по Геделю) теории известными школьными комбинаторными средствами.

Я благодарен всем, кто явно или неявно содействует становлению и развитию колмогоровского направления в основаниях наук. Особенно я признателен Юрию Васильевичу Прохорову, представившему в ДАН мои статьи [13, 22, 23], Анатолию Тимофеевичу Фоменко, опубликовавшему мою работу [15], а также всем сотрудникам механико-математического и философского факультетов МГУ и других научных организаций России и зарубежья, обсуждавшим мои результаты.

Библиографический список

1. *Крайзель Г.* Биография Курта Геделя. УМН, 1988. Т. 43. Вып. 2. С. 175–216; Т. 43. Вып. 3. С. 203–238.
2. *Тьюринг А.* Может ли машина мыслить? (С приложением статьи Дж. фон Неймана “Общая и логическая теория автоматов”). М.: Физматгиз, 1960. 112 с.
3. *Кузичев А.С.* Арифметические теории, строящиеся на основе λ-конверсии // Доклады Академии наук. 1981. Т. 261. № 4. С. 792–796. \
4. *Кузичев А.С.* Арифметически непротиворечивые λ-теории // ДАН. 1982. Т. 262. № 4. С. 795-799.
5. *Кузичев А.С.* Аксиоматические теории в комбинаторно полных системах // ДАН. 1982. Т. 264. № 3. С. 538–542.
6. *Кузичев А.С.* О представлении теорий первого порядка в бестиповых комбинаторно полных системах // ДАН. 1982. Т. 266. № 1. С. 23–27.

7. *Кузичев А.С.* Арифметически непротиворечивые λ-теории бестиповой логики // ДАН. 1983. Т. 268. № 2. С. 288–292.
8. *Кузичев А.С.* Теория множеств в бестиповых комбинаторно полных системах // Вестник Московского университета. Матем., механ. 1983. № 3. С. 36–42.
9. *Кузичев А.С.* Непротиворечивость системы NF Куайна // ДАН. 1983. Т. 270. № 3. С. 537–541.
10. *Кузичев А.С.* Арифметическая полнота бестиповой логики // ДАН. 1983. Т. 270. № 6. С. 1323–1327.
11. *Кузичев А.С.* Об одной арифметически непротиворечивой λ-теории // Zeitschr. f. math. Logik und Grundlagen d. Math. 1983. Bd. 29. S. 385–416.
12. *Кузичев А.С.* Теорема о непротиворечивости системы ZF Цермело-Френкеля // ДАН. 1983. Т. 273. № 5. С. 1053–1057.
13. *Кузичев А.С.* Колмогоровская редукция и непротиворечивость // ДАН. 1999. Т. 367. № 2. С. 161–163.
14. *Колмогоров А.Н.* О принципе Tertium non datur // Математический сборник. 1925. Т. 32. № 4. С. 646–667.
15. *Кузичев А.С.* О негеделевской перестройке арифметики и других аксиоматических теорий первого порядка по Колмогорову. Доказательство их непротиворечивости. М.: Изд-во механико-математического ф-та МГУ, 2004. 36 с.
16. *Мендельсон Э.* Введение в математическую логику. М.: Наука, 1984. 320 с.
17. *Колмогоров А.Н.* Замечания о понятии множества в школьном курсе математики // Математика в школе. 1984. № 1. С. 52–53.
18. *Колмогоров А.Н.* Элементы логики в современной школе // Математика в школе. 1971. № 3. С. 91–92.
19. *Абрамов А.М.* О педагогическом наследии Колмогорова // Явление чрезвычайное. Книга о Колмогорове. М.: Фазис, 1999. С. 99–147.
20. *Ершов А.П.* Компьютеризация школы и математическое образование // Явление чрезвычайное. Книга о Колмогорове. М.: Фазис, 1999. С. 148–152.

21. *Черкасов Р.С.* Андрей Николаевич Колмогоров и школьное математическое образование // Колмогоров в воспоминаниях. М.: Физматлит, 1993. С. 583–605.

22. *Кузичев А.С.* Вариант формализации канторовской теории множеств // ДАН. 1999. Т. 369. № 6. С. 740–742.

23. *Кузичев А.С.* Решение проблемы Гильберта по Колмогорову // ДАН. 2000. № 3. С. 303–306.

О стандарте математического образования в школе им. А.Н. Колмогорова

В.В. Вавилов

В школу им. А.Н. Колмогорова Специализированного Учебно-научного центра Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова поступают на конкурсной основе старшеклассники из различных регионов страны, которые уже проявили интерес к изучению одной из наших профильных дисциплин – к математике, информатике, физике, химии, биологии. За более чем сорокалетний период работы школы в ней сложились собственные концепции и традиции при постановке основных профилирующих курсов и организации внеклассной работы.

Само понятие стандарта обучения может базироваться только на тех целях и задачах, которые школа сама ставит перед собой, и которые, в свою очередь, диктуются всем развитием социально-экономической системы в стране и лучшими схемами и традициями в преподавании, сложившимися во всей системе математического образования в средней и высшей школе. Нужно иметь также в виду, что школа является университетским структурным подразделением, и подавляющее большинство преподавателей школьных профильных дисциплин являются, по основному месту работы, сотрудниками соответствующих факультетов. Кроме того, большинство выпускников школы становятся студентами университета, в стенах которого они в качестве своих научных руководителей выбирают зачастую и своих бывших школьных преподавателей.

Основные цели в преподавании математики в нашей школе направлены, в первую очередь, *на развитие интеллекта и на подготовку учащихся к обучению в вузе.* С этими положениями общего порядка трудно не согласиться и они практически ни у кого не вызывают возражений. Критике иногда подвергается вторая из этих целей, но и то только потому, что ее иногда понимают слишком узко – подготовку к вступительным экзаменам в вузы. В первые годы работы школы акцент был смещен в сторону первого из этих положений, и в наших публикациях о школе мы это неоднократно подчеркивали – школа не является подготовительными курсами для поступающих в вузы (см. [1]; в этой брошюре в качестве приложения помещены выдержки из положения о школе, на основании которого мы и проработали вплоть до 1986 года). Для соответствующей возможности постановки и организации всех математических курсов были все предпосылки, главной из которых было то, что вся система школьного математического образования в стране довольно эффективно работала, и нам удавалось набрать в школу (через олимпиады и летнюю школу для наших абитуриентов) действительно увлеченных и хорошо подготовленных детей. Сейчас ситуация в стране в деле образования молодежи явно изменилась, причем к худшему, и не без специальных усилий наших "правителей" самого различного уровня. Ныне продвигаемая и здравствующая государственная доктрина в образовании (как бы это ни камуфлировалось) – подготовка людей – ремесленников ("homo faberov") – нацелена *только* на репродуктивный процесс обучения со всеми вытекающими отсюда последствиями: уменьшение учебных часов, "разгрузка программ", система ЕГЭ, немыслимый для думающих людей предлагаемый и обсуждаемый стандарт школьного математического образования. Кроме того, все это сильно замешено на так называемых "рыночных отношениях", на идее платного обучения, и не только в частных школах. Целью статьи не является обсуждение всех этих скорбных дел, да и мы не генеральная прокуратура, которой давно пора самой обнародовать попытки многих желающих создать "РАО Образование". Но нам теперь приходится и принимать к себе учеников по другим экзаменационным схемам, и увеличивать долю учебных дел, направленных на ликвидацию у учащихся черт формального образования (имеются в виду итоги однобокого использования дидактической триады “знания, умения, навыки” без рассмотрения и получения ответов на вопросы “Почему?”) и расширять рамки целевой подготовки к вступительным экзаменам в вузы.

Наш стандарт математического образования в школе зависит, конечно, от содержания курсов, которых у нас три (по три часа в неделю): геометрия, алгебра, математический анализ. Но важно иметь в виду, что само содержание наших учебных программ далеко не является копией общепринятых программ профильной школы. И они, в первую очередь, ориентированы на воспитание тех ценных качеств личности, для которых изучение математики является одним из наилучших признанных полигонов. Одним из важнейших таких качеств нашего учащегося и будущего студента является умение ставить и решать задачи. Обучение *постановкам и решениям* задач является важной составной частью всех наших математических (и других) курсов. Можно сказать и более прямолинейно: постановка и решение задач – цель и средство обучения математике в нашей школе. Уместно здесь привести высказывание известного математика П. Халмоша: “Задачи – сердце математики, и мы должны подчеркивать все более и более в классе, на семинарах, в книгах и статьях, которые мы пишем, чтобы наши ученики стали лучшими постановщиками и решателями задач, чем мы сами”. Решение задач, как отмечалось многими крупнейшими учеными и педагогами, – та столбовая дорога в математику, шире которой нет и, видимо, другого способа привить интерес к математике и полюбить эту мудрую науку не существует. *Все наши школьники (за очень редким исключением) будут использовать математику и ее методы в своей будущей профессии или вообще станут профессиональными математиками-исследователями.* В частности, именно поэтому мы здесь говорим не только о решении задач, но и о постановках задач в ходе семинарских занятий по инициативе преподавателей, и, что более важно, – по инициативе самих школьников. Вся *школьная жизнь пропитана решениями задач* и их обсуждениями: обычные занятия, самостоятельные и контрольные работы, коллоквиумы, зачеты и экзамены, олимпиады и конкурсы решения задач, кружки, собственные исследования школьников и т.д.

Под стандартом математического образования мы понимаем тот список задач, который должны уметь решать школьники.

Здесь хотелось бы написать – *все учащиеся школы*, но этого реально достичь невозможно. Во-первых, у нас много специализаций: физико-математическая, компьютерно-информационная, химическая, биологическая. Во-вторых, имеется два одиннадцатых класса с одногодичным периодом обучения. В-третьих, как следствие первых двух причин, таких единых списков задач просто нет. Поэтому ниже, в этой статье, речь идет о физико-математических классах двухгодичного потока, где я многие годы работаю. Нужно сказать, что эти списки задач не есть что-то фиксированное раз и навсегда – они могут отличаться даже в параллельных классах. Их насыщение зависит от многих обстоятельств: и от уровня подготовки ученика, и от уровня подготовки учителя, и от многого другого. Основная “задачная нагрузка” школьника состоит из решения задач в классе и из выполнения домашних заданий. Задачный материал подбирается и разрабатывается под руководством ведущих преподавателей, дозируется, и именно на этой основе формируются календарные планы обучения. Важное место отводится организации контроля над ходом учебного процесса. Лектор, совместно с другими преподавателями, разрабатывает *тематические списки задач* (иногда крупные, чаще – не очень), часть из которых изучается на уроках, часть – в ходе самостоятельной работы (такой системы придерживаются и некоторые другие специализированные школы; см. например, [5, 6]). Дальше схема раздваивается: либо контроль за выполнением заданий происходит, в основном, на занятиях, либо, в основном, на специальных коллоквиумах. В своих классах я отдаю предпочтение коллоквиумам, не исключая, конечно, и традиционной формы работы в классе. Все учащиеся без исключения должны сдать тот или иной тематический список задач преподавателю на соответствующем коллоквиуме (на занятиях, на зачете), предъявив тетрадь с полными записями решений задач и доказательствами теорем. При этом, неукоснительным требованием является система оформления: четкие чертежи (выполненные циркулем и линейкой с применением различных цветов), полнота аргументации в решениях задач, ясные ссылки на теоремы и ранее решенные задачи. Если есть возможность проводить такие коллоквиумы после уроков, то мы проводим их там, а если такой возможности нет, то они проводятся во время обязательных часов. Эта система довольно эффективна, так как на коллоквиум требуется, во-первых, принести тетрадь с тщательно оформленными записями (что само по себе уже важно и дисциплинирует учащихся), не тратится время на подробный разбор домашних заданий в классе (при такой схеме – обычных поурочных домашних заданий или вообще нет, или их немного), школьники привыкают к правильному оформлению решений и к полноте необходимой аргументации – “писанию и чистописанию”, да и индивидуальная устная беседа с учителем по решенным и нерешенным задачам приносит неоценимую помощь обучающемуся. Еще один важный плюс при такой схеме контроля состоит в том, что нет особой нужды “в текущем опросе учащихся с выставлением оценки”, что сильно экономит драгоценное время на текущих уроках. Бытующее мнение (но не у нас в школе) о том, что для сдачи коллоквиума школьники занимаются списыванием решений задач друг у друга не выдерживает серьезной критики, да мы и не препятствуем взаимным консультациям учащихся; опытный учитель всегда легко оценит качество изученного материала и практически всегда определит реальные источники написанных решений задач. Отметим, что ничего страшного нет в том, что на коллоквиуме предъявлены решения не всех задач из списка; общая же организационная схема такова – прием заданий проходит только два раза, во время второй попытки отличную оценку получить нельзя. Еще одной важной компонентой такой работы является то, что в такие списки зачастую *включаются задачи исследовательского плана (математические проекты)*, требующие значительного времени на их продумывание, а это практически невозможно на текущих занятиях. Кроме того, сюда включаются так называемые *“задачи на доказательство теорем”*, которые представлены в виде цепочки вспомогательных задач. По ходу такой работы как бы сама собой решается и “проблема накопляемости оценок”, решение которой при обычной схеме ориентировано не на весь класс – многие школьники “отдыхают” или начинают заниматься другим делом, а в это время у доски “страдает” вызванный к ней учащийся (а это уже – неэффективно использованное учебное время). Такой методики придерживаются, конечно, не все преподаватели нашей школы, да и не всегда хватает желания, терпения и трудолюбия на такую большую деятельность (намного проще: 5–7 задач в классе, столько же – на дом, разбор домашнего задания , 5–7 задач в классе,...). *Проблема домашних заданий, а точнее, их выполнения,* – проблема, к которой нужно очень серьезно относиться всем преподавателям, а не только преподавателям математики. Простой подсчет показывает, что в семестр наши школьники только по основным математическим курсам должны решать около 500 задач, не считая задач на контрольных работах, на зачетах и др. А это колоссальная нагрузка для учащихся, имеющих кроме математики еще много дисциплин и, тем самым, много других домашних заданий и практикумов. Система математических коллоквиумов помогает четче и более планово организовать изучение той или иной темы и контроль за ее усвоением учащимися.

Приведем здесь примеры некоторых (из многих существующих; см.[3, 4]) тематических списков заданий, которые выносились на текущие коллоквиумы. При их отборе мы хотели показать не совсем стандартные темы и задачи к ним, которые не всегда используются в специализированных классах и школах, хотя они этого явно заслуживают. До проведения коллоквиума на лекциях и на практических занятиях, естественно, изучались основные фрагменты соответствующих теорий, теоремы и задачи (иногда даже из материалов будущего коллоквиума). Довольно часто, список заданий для коллоквиума содержит намного больше задач, чем требуется оформить для его сдачи преподавателю; в этом случае, школьники получают конкретные задания к коллоквиуму, а остальные задачи “расходуются” на классных занятиях и на домашние задания в текущей работе. Библиографические указания и замечания исторического характера по теме специально каждый раз обсуждается с учащимися и с довольно обширными комментариями.

Бесконечные периодические десятичные дроби.

1. Найти первые три цифры после запятой в десятичном представлении частного чисел $0,1234567891011\ldots495051$ и $0,515049\ldots1110987654321$.

2. Доказать, что дроби $\frac{n}{2n^2+1}$, $\frac{n}{n^2+n+1}$ имеют чисто периодические десятичные разложения.

3. Доказать, что десятичное разложение числа $1/3^n$ имеет период длины 3^{n-2}, $n \geqslant 2$.

4. Найти все натуральные $n < 31$, для каждого из которых десятичное разложение числа $n/31$ имеет те же цифры, что и период десятичного разложения числа $1/31$.

5. Пусть n – натуральное число, $0 < n < 73$. Доказать, что десятичное разложение дроби $n/73$ не содержит двух подряд идущих одинаковых цифр.

6. Найти знаменатель обыкновенной дроби $1/n$, десятичное разложение которой имеет период длины 2.

7. Пусть числа A и A – периоды десятичных разложений дробей $1/n$ и $1/m$, где n, m – натуральные числа. Найти наименьшие n и m такие, что $\mathrm{T}(n) = T(m)$ и $(A, B) = 10989$.

8. Найти последние 1000 цифр числа $1 + 50 + 50^2 + \ldots + 50^{999}$.

9. Решить числовые ребусы (каждая буква обозначает некоторую цифру и различным буквам соответствуют различные цифры):

a) $0, aaa\ldots = (0, bbb\ldots)^2$;

b) $aba/cdc = 0,(fghk)$.

10. Каково наименьшее натуральное число n, для которого десятичное разложение дроби m/n содержит блок 501, т.е. $m/n = A,\ldots 501\ldots$?

11. Доказать, что период десятичного разложения дроби $1/3^{100}$ содержит

a) не менее 20 последовательных равных цифр;

b) последовательность 123456789;

c) любую последовательность из 46 цифр.

12. Доказать, что в десятичном разложении дроби $1/p$, $p > 5$ – простое, сумма всех цифр в периоде кратна 9.

13. Пусть p – простое число и $1/p = 0,(a_1 a_2 \ldots a_k)$, $k \geqslant 2$.

Доказать, что если $k = 2m$, то $\overline{a_1 a_2 \ldots a_m} + \overline{a_{m+1} a_{m+2} \ldots a_k} = 99\ldots9$.

14. Известно, что длина периода десятичного разложения для дроби $1/59$ равна 58. Имеется калькулятор, который все результаты вычислений выдает с шестью верными знаками. Применяя только такой калькулятор, найти период этого десятичного разложения.

15. a) Найти все простые числа p, для которых десятичные разложения дробей $1/p$ в своем десятичном разложении содержат цифры 1,2,3,4,5,6.

b) Определить (составить таблицу) длины периодов десятичных разложений дробей $1/p$ для всех простых p, $1 < p < 100$.

16. Пусть m, n – натуральные числа, $m \neq n$. Доказать, что десятичное разложение дроби

a) $1/(10^n - 1)$ имеет период длины n;

b) $(10^m - 1)/(10^n - 1)$ имеет период длины n, $1 \leqslant m < n$.

17. Пусть $T(k)$ – длина периода десятичного разложения дроби $1/k$.

Доказать, что

a) $T([m, n]) = [T(m), T(n)]$;

b) $T((m, n))$ делит $(T(m), T(n))$.

18. Пусть n и m – натуральные числа. Доказать, что десятичное разложение дроби

$$\frac{10^{(m,n)} - 1}{[10^n - 1, 10^m - 1]}$$

имеет период длины $[m, n]$.

Следующие две задачи не являются обязательными и адресованы тем, кто заинтересовался данной тематикой.

19. Построить теорию “Бесконечные периодические дроби в системе счисления по заданному основанию”. Как формулируются в этой теории основные теоремы и, в частности, задачи из этого списка?

20. Как связаны между собой длины периодов (и предпериодов) десятичных представлений суммы и произведения двух рациональных чисел и самих этих чисел? Рассмотрите произвольную

систему счисления.

Принцип Дирихле.

При решении самых различных задач часто бывает полезен так называемый “принцип Дирихле”, названный в честь немецкого математика Петера Густава Лежена Дирихле (1805–1859); по-другому этот принцип еще называют “принципом ящиков” или “ принципом голубятни”.

Более общая форма принципа Дирихле такова:

Если $(kn+1)$ *кролик помещен в* n *клетках, то в одной из клеток находятся не менее* $(k+1)$ *кролика; или в эквивалентной форме – нельзя посадить* $(kn+1)$ *кролика в* n *клеток так, чтобы в каждой клетке находилось не более* k *кроликов.*

1. В Москве (Нью-Йорке) более $10,1$ млн. жителей, на голове у каждого не больше 100000 волос. Докажите, что имеются, по крайней мере, 100 человек с одинаковым числом волос на голове.

2. Докажите, что из любых двенадцати натуральных чисел можно выбрать два, разность которых делится на 11.

3. (*Ленинградская олимпиада.*) Можно ли в клетках квадратной таблицы 5×5 расставить числа $0, +1, -1$ так, чтобы все суммы в каждом столбце, в каждой строке и на каждой из двух диагоналей были различны?

4. В ряд выписано пять натуральных чисел: a_1, a_2, a_3, a_4, a_5. Докажите, что либо одно из них делится на 5, либо сумма нескольких рядом стоящих чисел делится на 5.

5. Имеется шесть точек на плоскости, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Тем самым, имеется $C_6^2 = 15$ отрезков, которые эти точки соединяют попарно. Предположим, что все пятнадцать отрезков окрашены либо в красный, либо в синий цвет.

Докажите, что найдется, по крайней мере, один хроматический треугольник, т.е. такой, все стороны которого окрашены в один цвет.

Замечание. Задачу 5 можно интерпретировать и так: в любой компании из шести человек можно выделить трех, которые между собой знакомы, или таких, которые между собой не знакомы.

6. На каждой стороне выпуклого четырехугольника, как на диаметре, построен круг. Докажите, что эти четыре круга полностью

покрывают четырехугольник.

7. Равносторонний треугольник ABC и квадрат $MNPQ$ вписаны в окружность длины S. Ни одна из вершин треугольника не совпадает с вершинами квадрата. Их вершины делят окружность на семь частей. Докажите, что, по крайней мере, одна из них не больше $S/24$.

8. (*Ленинградская олимпиада.*) Треугольник разрезан на несколько выпуклых многоугольников. Докажите, что среди них либо есть треугольник, либо есть два многоугольника с одинаковым числом сторон.

9. В каждую вершину правильного стоугольника помещено одно из чисел $\{1, 2, 3, \ldots, 49\}$. Докажите, что существуют четыре вершины A, B, C, D данного стоугольника, которые образуют параллелограмм $ABCD$, и такие, что $a + b = c + d$, где a, b, c, d — числа, стоящие соответственно в вершинах A, B, C и D.

10. Основание пирамиды – выпуклый девятиугольник. Каждая диагональ основания и все боковые ребра окрашены в красный или синий цвет. Оба цвета использованы (заметим, что стороны основания не окрашиваются). Докажите, что существует хроматический (одноцветный) треугольник.

11. В квадрате со стороной 1 отметили 51 точку. Докажите, что три из них можно покрыть кругом диаметра 1/7.

12. Несколько дуг окружности покрашены в красный цвет. Сумма длин окрашенных дуг меньше половины длины окружности. Докажите, что существует диаметр, оба конца которого не окрашены.

13. В квадрате со стороной 1 м расположено несколько окружностей с суммой их длин, равной 1 м. Докажите, что существует прямая, параллельная сторонам квадрата, которая пересекает не менее трех окружностей.

14. (*Ленинградская олимпиада, Турнир городов.*) Докажите, что любой выпуклый многоугольник с четным числом сторон имеет диагональ, которая не параллельна ни одной из сторон многоугольника.

15. (*Международная олимпиада.*) В системе из p уравнений с

$q = 2p$ неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + ... + a_{1q}x_q = 0, \\ \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\ a_{p1}x_1 + ... + a_{pq}x_q = 0, \end{cases}$$

коэффициенты $a_{ij} \in \{-1, 0, 1\}$. Докажите, что существует решение $(x_1, x_2, \ldots, x_q,)$ такое, что:

а) все x_j – целые;

б) $|x_j| \neq 0$ для некоторого j $(1 \leqslant j \leqslant q)$; и $|x_j| \leqslant q$ для всех j $(1 \leqslant j \leqslant q)$.

16. (*Ленинградская олимпиада.*). Доказать, что для всякого простого числа p, не равного 2 или 5, существует натуральное число k такое, что pk записывается в десятичной системе одними единицами.

17. Докажите, что в выпуклом многограннике есть две грани с одинаковым числом сторон.

18. В правильном двадцатиугольнике отметели 9 вершин. Докажите, что найдется равнобедренный треугольник с вершинами в отмеченных точках.

19. Верно ли, что из ста произвольных целых чисел всегда можно выбрать: а) 15; б) 16 таких, у которых разность любых двух делится на 7?

20. Имеется 17 точек на плоскости, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Они попарно соединены между собой отрезками. Все отрезки покрашены в один из цветов: красный, синий или белый. Докажите, что существует, по крайней мере, один хроматический (одноцветный) треугольник. (В этой задаче число 17 – наименьшее. Почему?)

21. Выберем любым способом 5 человек. Докажите, что, по крайней мере, двое из них имеют одинаковое число знакомых среди выбранных.

Докажите то же самое, если выбрано не 5, а 100 человек, n человек.

22. а) В квадрате со стороной 1 см расположены несколько окружностей, сумма радиусов которых равна 0,6 см (окружности

могут пересекаться или совпадать). Докажите, что найдется прямая, параллельная одной из сторон квадрата, имеющая общие точки, по крайней мере, с двумя окружностями.

б) В круге радиуса 1 см расположены несколько окружностей, сумма радиусов которых равна 0,6 см (окружности могут пересекаться или совпадать). Докажите, что найдется окружность, концентрическая с данной окружностью радиуса 1 см, которая не имеет общих точек с другими окружностями.

23. (*Ленинградская олимпиада*) В квадрат со стороной 1 см поместили 1979 многоугольников, сумма площадей которых равна 1978,5 см^2. Докажите, что все многоугольники имеют общую точку.

24. (*Международная олимпиада*) Международное общество состоит из представителей шести различных стран. Список членов общества состоит из 1978 фамилий, занумерованными числами 1, 2,..., 1978. Докажите, что существует хотя бы один член общества, номер которого равен сумме номеров двух членов из его страны или удвоенному номеру некоторого члена из его страны.

25. В круге радиуса 3 см произвольным образом помещено несколько кругов, сумма радиусов которых равна 25 см. Докажите, что найдется прямая, которая пересекает не менее 9 из этих кругов.

26. (*Ленинградская олимпиада*) Сумма 100 чисел, меньших 100, равна 200. Докажите, что из этих чисел можно выбрать несколько, сумма которых равна 100.

27. Принцип Дирихле позволяет доказать ряд важнейших теорем из теории чисел. Попробуйте их доказать.

Теорема Кронекера 1. *Пусть α – действительное число. Тогда для любого положительного числа ε найдутся два целых числа m и n такие, что*

$$|m\alpha - n| < \varepsilon.$$

Почти аналогично устанавливается более общий результат.

Теорема Кронекера 2. *Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ – действительные числа. Тогда для любого положительного числа ε найдутся* *натуральное число* m *и целые числа* $n_1, n_2, \ldots, n_k$ *такие, что*

$$|m\alpha_i - n_i| < \varepsilon, \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Другими словами, найдется такое натуральное число m, что каждое из чисел $m\alpha_i$ отличается от целого менее, чем на ε т.е.

$$\{m\alpha_i\} \in [0, \varepsilon) \cup (1 - \varepsilon, 1]$$

или, другими словами, для набора чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ любой длины при некотором натуральном m числа $m\alpha_i$ одновременно отличаются от целых меньше, чем на ε.

Теорема Дирихле. *Для любого числа* α *найдется бесконечно много дробей* p/q *таких, что*

$$|\alpha - p/q| < 1/q^2.$$

Принцип включения-исключения.

Наряду с методом математической индукции, принципом Дирихле, принцип (формула) включений и исключений является важнейшим математическим инструментом и, особенно, в комбинаторике, когда, зная число элементов в каждом из конечных данных множеств, нужно найти число элементов другого множества, которое составлено из данных множеств при помощи некоторых операций (объединений, пересечений и т.д.).

1. Сколько существует целых чисел от 1 до 16500, которые

а) не делятся на 5;

б) не делятся ни на 5, ни на 3;

в) не делятся ни на 5, ни на 3, ни на 11?

2. Сколько существует целых чисел от 1 до 1000000, которые не являются ни полным квадратом, ни полным кубом, ни четвертой степенью?

3. Рассмотрим множество объектов и четыре свойства α, β, γ, δ. Напишите формулу для числа объектов, которые имеют свойство β, но не имеют ни одного из свойств α, γ, δ.

4. Пусть имеется n подмножеств $A_1, \ldots, A_n$ конечного множества E и χ_j – характеристические функции этих множеств, то есть

$$\chi_j(x) = \begin{cases} 1, x \in A_j, \\ 0, x \in E \backslash A_j \quad (j = 1, 2, ..., n). \end{cases}$$

Докажите, что при этом $\chi(x)$ – характеристическая функция множества $A = A_1 \cup \ldots \cup A_n$, связана с функциями $\chi_1(x), \ldots, \chi_n(x)$ формулой $1 - \chi(x) = (1 - \chi_1(x)) \ldots (1 - \chi_n(x))$.

5. (*Формула Эйлера*). Одним из проявлений формулы включений и исключений в теории чисел является красивое выражение для функции Эйлера $\varphi(n)$, которая по своему определению равна количеству натуральных чисел, не превосходящих n и взаимно простых с n; при этом, предполагается, что $\varphi(1) = 1$. Так, например, $\varphi(10) = 4$, так как в ряду чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 взаимно простыми с 10 будут четыре числа 1, 3, 7, 9. С другой стороны $\varphi(11) = 10$, т.к. число 11 простое и все числа, меньшие 11, будут взаимно простыми с 11. Ясно, что $\varphi(p) = p - 1$ для любого простого числа p, $p \geqslant 2$.

Докажите, что если $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_k^{\alpha_k}$ – каноническое разложение натурального числа на простые множители, то

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) ... \left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

Из этой формулы, например, для числа $5256 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 73$ имеем:

$$\varphi(5256) = 5256(1 - 1/2)(1 - 1/3)(1 - 1/73) = 1728.$$

6. Каждая сторона в треугольнике ABC разделена на 8 равных отрезков. Сколько существует различных треугольников с вершинами в точках деления (точки A, B, C, не могут быть вершинами треугольников), у которых ни одна сторона не параллельна ни одной из сторон треугольника ABC?

7. (Из творчества известного детского писателя и математика *Льюиса Кэрролла,* автора книг “Алиса в стране чудес” и “Алиса в Зазеркалье”, давно уже ставших достоянием мировой культуры.)

В ожесточенном бою более 70 из 100 пиратов потеряли один глаз, более 75 – одно ухо, более 80 – одну руку и более 85 – одну ногу. Каково наименьшее количество пиратов, потерявших одновременно глаз, ухо, руку и ногу?

8. *(Московская олимпиада, 1968).* а) В квадрате 2×2 размещены 7 многоугольников, каждый из которых имеет площадь 1. Доказать, что найдутся два многоугольника, площадь пересечения которых больше, чем $1/7$.

б) В прямоугольнике площади 5 размещены 9 многоугольников, каждый из которых имеет площадь 1. Доказать, что найдутся два многоугольника, площадь пересечения которых не меньше, чем $1/9$.

9. На экзамене по математике были предложены три задачи: одна по алгебре, одна по геометрии, одна по математическому анализу. Из 1000 участников экзамена задачу по алгебре решили 800, по геометрии – 700, по анализу – 600 человек. При этом, задачи по алгебре и геометрии решило 600 человек, по алгебре и анализу – 500, по геометрии и анализу – 400. А 300 экзаменующихся решили все задачи. Сколько человек не решили ни одной задачи?

10. В комнате площадью 6 м^2 постелили 3 ковра произвольной формы площадью 3 м^2 каждый. Докажите, что какие-либо два из них перекрываются по площади, не меньшей 1 м^2.

11. Из 100 студентов университета английский язык знают 28 человек, немецкий – 30, французский – 42, английский и немецкий – 8, английский и французский – 10, немецкий и французский – 5; все три языка знают 3 студентов. Сколько студентов не знают ни одного из этих трех языков?

12. В многоугольнике площадью единица расположены 5 фигур площадью большей или равной $1/2$. Доказать, что если площадь пересечения любых двух фигур больше или равна $1/4$, то существуют такие 3 фигуры, площадь пересечения которых больше или равна $3/40$.

13. *(Московская олимпиада, 1956).* На столе прямоугольной формы лежат 15 журналов, которые закрывают его полностью. Доказать, что можно убрать 7 журналов таким образом, что оставшиеся 8 закроют, по крайней мере , $8/15$ поверхности стола.

14. В классе 30 учеников. Сколькими способами они могут пересесть так, чтобы ни один ученик не сел на свое место?

15. (*Число беспорядков*). Несколько человек подбросили в воздух свои шляпы во время взятия футбольных ворот. Шляпы вернулись этим же людям (по одной – каждому), но в произвольном порядке. Какова вероятность того, что каждый получит чужую шляпу?

Под вероятностью понимается отношение числа возможностей распределения шляп указанным способом к числу всех возможностей.

16. *(Чешская олимпиада, 1970).* На прямой даны n^2+1 отрезков. Доказать, что можно выбрать $n+1$ отрезков, которые попарно не пересекаются, или существуют $n+1$, которые имеют общую точку.

17. *(Олимпиада Великобритании, 1976).* Из элементов конечного множества X составили 50 его подмножеств $A_1, A_2, \ldots, A_{50}$ так, что каждое из них содержит более половины всех элементов из X. Доказать, что существует такое подмножество $B \subset X$, которое имеет не менее 5 элементов и которое имеет по крайней мере один общий элемент с каждым из подмножеств $A_1, A_2, \ldots, A_{50}$.

18. *(Бельгийская олимпиада, 1979).* Множество X имеет n элементов. Найти наибольшее число его подмножеств, состоящих из трех элементов таких, что любые два из выбранных подмножеств имеют ровно один общий элемент.

19. *(Олимпиада США, 1979).* Из множества с $n \geqslant 5$ элементами выбрали $n+1$ различных подмножеств, каждое из которых состоит из трех элементов. Доказать, что среди выбранных подмножеств существует два, которые имеют ровно один общий элемент.

20. (Олимпиада С.-Петербурга, 1999). Пусть множество M можно представить в виде объединения его непересекающихся подмножеств следующими способами

$$M = \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{j=1}^{n} B_j = \bigcup_{k=1}^{n} C_k,$$

причем для всех $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$

$$|A_i \cap B_j| + |A_i \cap C_k| + |B_j \cap C_k| \geqslant n$$

(где $|X|$ – число элементов множества X). Доказать, что

$$|M| \geqslant \frac{n^3}{3}.$$

Библиографический список

1. *Колмогоров А.Н., Вавилов В.В., Тропин И.Т.* Физико-математическая школа при МГУ // М.: Знание, 1981. 85 с.
2. *Вавилов В.В.* Школа им. академика А.Н. Колмогорова Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова // Сборник статей ко дню рождения А.Н. Колмогорова. М.: Научно-технический центр “Университетский”, 2003. С. 3–41.
3. *Вавилов В.В.* Школа математического творчества // М.: РОХОС, 2004. 72 с.
4. *Вавилов В.В.* Математические коллоквиумы // М.: Школа им. А.Н. Колмогорова. “VVV”, 2003. 78 с.
5. *Еременко С.В., Сохет А.М., Ушаков В.А.* Элементы геометрии в задачах. М.: МЦНМО, 2003. 168 с.
6. Задачи по математике, предлагавшиеся ученикам математического класса 57 школы (выпуск 2004 года, класс “Д”) / Под ред. В. Доценко. М.: МЦМНО, 2004. 224 с.

О некоторых результатах леонарда эйлера по дифференциальной геометрии

И.В. Игнатушина

Дифференциальная геометрия – раздел математики, в котором геометрические образы (кривые, поверхности, а также их семейства) изучаются методами математического анализа. Ее можно условно разделить на три части: первая изучает свойства кривых на плоскости; вторая – свойства пространственных кривых; третья – поверхности.

Дифференциальная геометрия возникла в XVIII в., когда в математике уже широко применялись созданные Исааком Ньютоном (1643–1727) и Готфридом Вильгельмом Лейбницем (1646–1716) дифференциальное и интегральное исчисление. Однако она имеет длительную предысторию.

Первые исследования, связанные с изучением касательных и нормалей к немногим простейшим плоским кривым (преимущественно коническим сечениям) и нахождением площадей и объемов, встречаются еще в древнегреческой математике. Например, в сочинении Архимеда (ок. 287–212 до н.э.) “О спиралях” предложен метод нахождения касательной к спирали, который ретроспективно может быть оценен как дифференциальный. Суть этого метода заключается во введении достаточно малого треугольника, играющего роль дифференциального треугольника.

В работах ученых XVII в. Рене Декарта (1596–1650), И. Ньютона, Г.В. Лейбница, Христиана Гюйгенса (1629–1695), братьев Бернулли, Якоба (1654–1705) и Иоганна (1667–1748), и др. были решены многие конкретные вопросы теории плоских кривых.

Так, Декарт в своей “Геометрии” (1637) опубликовал способ проведения касательных и нормалей к алгебраическим кривым, разработанный им в 1629 г. в связи с занятиями оптикой. Прием Декарта опирался на аппарат аналитической геометрии, созданный им одновременно с Пьером Ферма (1601–1665). Для определения положения нормали в данной точке M кривой Декарт описывал окружность из предполагаемой точки N пересечения нормали с осью абсцисс и для отыскания этой точки N требовал, чтобы две точки пересечения окружности и кривой сливались в одну в точке M. Это требование накладывало определенные условия на коэффициенты уравнения, служащего для отыскания координат точек пересечения кривой и окружности (корни должны быть здесь кратными), и позволяло найти абсциссу точки N. Однако эти чисто алгебраические методы были весьма громоздкими и не годились для трансцендентных или, как тогда говорили, “механических" кривых. Поэтому для построения касательной к циклоиде Декарт предложил новый кинематический прием, опирающийся на то, что нормаль к этой кривой проходит через точку касания порождающей циклоиду окружности с прямой, по которой эта окружность катится.

Другой частный кинематический метод построения касательной был предложен Жилем Робервалем (1602–1675) и Эванджелистой Торричелли (1608–1647).

Гюйгенс, отыскивая кривую, по которой должен двигаться конец маятника, чтобы выполнялось условие изохронности, пришел к теории эволют и эвольвент и фактически ввел понятие радиуса кривизны. Кроме того, при решении некоторых задач оптики он вплотную подошел к понятию огибающей.

В работах Ньютона, Лейбница и братьев Бернулли кривые на плоскости рассматривались в связи с определением касательных, экстремумов, выпуклостей, вогнутостей и точек перегиба, а также при изучении роговидных углов. Ньютону принадлежат термины "центр" и "радиус кривизны".

Итак, к началу XVIII в. были решены некоторые вопросы из первого раздела дифференциальной геометрии – теории плоских кривых, и начаты исследования пространственных кривых и поверхностей.

В XVIII в. наиболее значительные результаты в формирующейся дифференциальной геометрии были достигнуты Леонардом Эйлером (1707–1783), Гаспаром Монжем (1746–1818) и Алексисом Клодом Клеро (1713–1768). Настоящая статья посвящена творчеству Эйлера, которое сыграло основополагающую роль в указанной области геометрии.

К рассмотрению вопросов дифференциальной геометрии Эйлера привели два пути: первый связан с формированием математического анализа и рассмотрением его приложений к геометрии (т.е. вызванный внутренним развитием математической теории), а второй – с решением задач картографии и геодезии (т.е. с потребностями практики).

Исследования по дифференциальной геометрии Эйлер начал в 1728–1732 гг. с изучения геодезических линий. Эту проблему в

1728 г. поставил перед ним в своем письме И. Бернулли, после чего, молодой петербургский ученый вывел дифференциальное уравнение геодезических линий:

$$\frac{Qd^2x + Pd^2y}{Qdx + Pdy} = \frac{dxd^2x + dyd^2y}{dt^2 + dx^2 + dy^2},$$

где P и Q определяются из дифференциального уравнения поверхности $Pdx = Qdy + Rdt$. Полученный результат Эйлер сообщил И. Бернулли в ответном письме 18 февраля 1729 г. Кроме вывода общего уравнения, Эйлер подробно рассмотрел геодезические линии на цилиндрических, конических поверхностях и поверхностях вращения. Впоследствии он неоднократно возвращался к этой проблеме. Во втором томе "Механики, или науки о движении, изложенной аналитически" (1736) он доказал, что точка, движущаяся по поверхности при отсутствии действующих сил, перемещается по геодезической линии; при этом было показано, что главная нормаль к геодезической в каждой ее точке совпадает с нормалью к поверхности.

Многие работы Эйлера по дифференциальной геометрии связаны с задачей о траекториях семейств кривых, т.е. об определении кривых, пересекающих кривые данного семейства под постоянным углом или под углом, изменяющимся по определенному закону; в первом случае траектории называются изогональными, а в случае, когда угол прямой, – ортогональными. Задачей о разыскании траекторий, также поставленной И. Бернулли в 1697 г., занимался и Николай II Бернулли (1695–1726, сын Я. Бернулли).

Этой проблеме были посвящены некоторые ранние работы Эйлера: "Метод нахождения алгебраических взаимных траекторий" (1727) [8], "Решение задачи о взаимных траекториях" (1727) [9], "О спрямляемых алгебраических кривых и взаимных траекториях" (1730) [10]. Здесь рассматривается задача: найти такое семейство параллельных кривых $y = f(x) + C$, чтобы кривые симметричного ему по отношению к оси Oy семейства $y = f(-x) + c$ явились изогональными траекториями. Эйлер отыскивает простейшие алгебраические кривые, обладающие таким свойством.

В работе "Соображения об ортогональных траекториях" (1769)

[11] Эйлер продолжает начатое исследование и решает задачу по отысканию однопараметрических кривых, пересекающихся под прямым углом. Для этого он вводит функции комплексного переменного:

$$\begin{aligned} x + y\sqrt{-1} &= f(T + V\sqrt{-1}), \\ x - y\sqrt{-1} &= f(T - V\sqrt{-1}). \end{aligned} \tag{1}$$

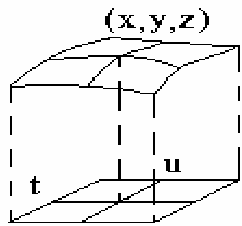
Ортогональные семейства линий могут быть получены этими преобразованиями из ортогональных семейств прямых $T = const$ и $V = const$. Преобразование (1) является конформным, а функции, задающие его, аналитическими. В конце указанной работы Эйлер доказывает, что дробно-линейная функция комплексного переменного преобразует прямые в окружности.

Таким образом, Эйлер впервые ввел в рассмотрение функции комплексной переменной, применил их для конформных отображений и положил начало способу отыскания изометрических сеток координат.

Первый, кто перенес методы, использовавшиеся для исследования кривых на плоскости, на трехмерный случай, был А.К. Клеро. Он рассмотрел касательные и нормали к пространственным кривым, ввел касательную плоскость к поверхности, содержащей данную кривую. В его работе "Исследования о кривых двоякой кривизны" (1731) впервые встречается формула элемента длины пространственной кривой в виде $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$. Однако решение рассмотренных им задач в основном требовало простой замены двух переменных тремя.

Изучению дифференциальной геометрии пространственных кривых посвящен мемуар Эйлера "Легкий способ исследовать все свойства кривых линий, не расположенных в одной плоскости" (1782) [12]. Здесь он рассмотрел координаты (x, y, z) точки кривой как функции длины дуги s и направляющих коэффициентов p, q, r подвижного триедра, а кроме того, доказал первую формулу Ж. Френе: $\frac{dt}{ds} = kn$, где k – кривизна кривой.

К рассмотрению пространственных задач дифференциальной геометрии Эйлера привели и проблемы картографии. Результаты изучения вопроса о развертывающихся поверхностях Эйлер опубликовал в мемуаре "О телах, поверхность которых можно развернуть на плоскость" (1771) [13]. Здесь впервые было введено и само понятие развертывающейся поверхности, т.е. поверхности, которая может быть наложена на плоскость без складок и разрывов. Эйлер исходил из того, что бесконечно малый треугольник на такой поверхности должен быть конгруэнтен соответствующему треугольнику на плоскости, на которую он развертывается. Он представляет координаты x, y, z точки на поверхности как функции от двух переменных t и u, где t и u являются координатами соответствующей точки на плоскости. Таким образом Эйлер ввел так называемые Гауссовы (или изотермические) координаты.



Точкам $(t+dt, u)$ и $(t, u+du)$ плоскости соответствуют точки поверхности, координаты которых имеют вид:

$$\begin{aligned} &x + ldt, \quad x + \lambda du, \\ &y + mdt, \quad y + \mu du, \\ &z + hdt, \quad z + \nu du, \end{aligned}$$

где $l = \frac{\partial x}{\partial t}$, $m = \frac{\partial y}{\partial t}$, $h = \frac{\partial z}{\partial t}$, $\lambda = \frac{\partial x}{\partial u}$, $\mu = \frac{\partial y}{\partial u}$, $\nu = \frac{\partial z}{\partial u}$.

Наряду с применением параметрического представления поверхности, Эйлер вводит в рассмотрение линейный элемент ds поверхности (т.е. дифференциал дуги линий на ней), как средство исследования тех свойств поверхности, которые впоследствии были названы внутренними и которые могут быть исследованы с помощью измерений на ней самой, без обращения к пространству, ее содержащему. Эта идея получила дальнейшее глубокое развитие лишь начиная с Гаусса (1827).

Условие развертывания (или условие наложимости), полученное Эйлером, может быть сформулировано как условие совпадения линейного элемента развертывающейся поверхности $ds^2 = dx^2+dy^2+dz^2$ с линейным элементом плоскости $ds^2 = dt^2+du^2$, т.е. при любых du, dt расстояние между точками $(t+dt, u)$ и $(t, u+du)$ должно равняться расстоянию между соответствующими точками развертывающейся плоскости:

$$dt^2 + du^2 = (ldt - \lambda du)^2 + (mdt - \mu du)^2 + (hdt - \nu du)^2.$$

Раскрыв скобки, получим:

$$dt^2 + du^2 = l^2dt^2 - 2l\lambda dtdu + \lambda^2du^2 + m^2dt^2 - 2m\mu dtdu+ \\ +\mu^2du^2 + h^2dt^2 - 2h\nu dtdu + \nu^2du^2.$$

Отсюда получаем условия наложимости:

$$\begin{cases} l^2 + m^2 + h^2 = 1, \\ \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1, \\ l\lambda + m\mu + h\nu = 0. \end{cases}$$

С современной точки зрения, это условия единичности и ортогональности векторов, координаты которых равны частным производным радиус-вектора точки поверхности по координатам t, u.

В этой работе Эйлер сформулировал и доказал теорему о том, что всякая развертывающаяся поверхность является либо цилиндром, либо конусом, либо образована касательными к некоторой пространственной кривой.

Полученные результаты Эйлер применил в работах по картографии [7]: “Об изображении сферической поверхности на плоскости” (1777), “О географической проекции сферической поверхности” (1777), “О географической проекции Делиля, принятой для общей карты Российской империи” (1777).

В первой из них он доказал невозможность конгруэнтно отобразить кусок сферы на плоскость. Здесь же рассмотрены такие отображения, при которых меридианы и параллели переходят во взаимно-перпендикулярные прямые, а также конформные отображения (т.е. сохраняющие углы) и эквивалентные отображения (т.е. сохраняющие площади).

Во второй из указанных работ Эйлер рассматривает стереографическую проекцию сферы на плоскость, а затем при помощи функции комплексной переменной конформно деформирует ее в плоскости и получает так называемую косую стереографическую проекцию.

В третьей работе подробно разбирается практический вопрос о проекции Николая Делиля (1688–1768), принятой в то время при вычерчивании карт Российской империи. Эта проекция равнопромежуточная, сохраняющая главный масштаб по меридианам, причем параллели, на которых сохраняется главный масштаб, берутся на равных расстояниях от средней и крайних параллелей изображенной территории. Эйлер исследовал искажения в проекции Делиля и предложил свою проекцию, в которой параллели сечений выбираются с условием, чтобы разности длин дуг на поверхности земного эллипсоида и его проекции были на крайних широтах изображаемой территории одинаковы и равнялись разности длин дуг на карте и в действительности для средней широты.

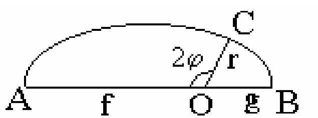
В мемуаре 1760 г. “Исследования о кривизне поверхностей” [14] содержатся существенно новые и важные результаты по теории поверхностей, а также из области трехмерной дифференциальной геометрии. До Эйлера было установлено только существование касательной плоскости в данной точке поверхности. Эйлер сделал определенный шаг вперед и пришел к теореме о кривизне поверхностей, теперь носящей его имя. Называя “главным сечением” поверхности $z = f(x, y)$ нормальное сечение, перпендикулярное к плоскости xOy, и изменяя угол между плоскостью произвольного нормального сечения и плоскостью главного сечения, он нашел, что в каждой точке поверхности имеются нормальные сечения с максимальным радиусом кривизны f и с минимальным g. Эти сечения, как доказал Эйлер, перпендикулярны друг другу. Далее, обозначая через φ угол между плоскостью произвольного нормального сечения и плоскостью нормального сечения с максимальным радиусом кривизны, он показал, что радиус кривизны r произвольного нормального сечения выражается через f и g по формуле:

$$r = \frac{2fg}{f + g + (f - g)\cos 2\varphi}. \qquad (2)$$

Полвека спустя Шарль Дюпен (1784–1873), преобразуя выражение (2), дал более употребительную ныне формулу для обратной величины радиуса кривизны, т.е. для кривизны нормального сечения:

$$\frac{1}{r} = \frac{\cos^2\varphi}{f} + \frac{\sin^2\varphi}{g}.$$

В указанном мемуаре [14] Эйлер предложил следующее интересное построение радиуса кривизны r для сечения данного направления. Он строит отрезок $AB = f+g$ и на нем, как на большой оси, полуэллипс с фокусом в точке O, тогда, если угол $AOC = 2\varphi$, то $r = OC$ есть искомый радиус.



Здесь же показано, что несмотря на все разнообразие поверхностей, искривленность регулярных поверхностей может быть всего лишь нескольких определенных типов.

Решение задачи о нахождении семейства поверхностей, ортогональных к данному однопараметрическому семейству поверхностей, представлено в его мемуаре 1782 г. "Об обобщении задачи об ортогональных траекториях на поверхности" [15].

Содержание мемуаров Эйлера, посвященных вопросам дифференциальной геометрии, рассматривалось во вводных статьях А. Шпайзера [17] к соответствующим томам полного собрания сочинений Л. Эйлера ("Leonhardi Euleri opera omnia"). Анализ некоторых из полученных им результатов дан в работах Г. Вилейтнера [1], М.Я. Выгодского [2], Б.Н. Делоне [3], В.В. Котека [4], В. Коммереля [16], Б.А. Розенфельда [5], Д.Дж. Стройка [6] и др.

Но даже беглый просмотр работ Эйлера по дифференциальной геометрии, содержащихся в тт. 27–29 "Leonhardi Euleri opera omnia" показывает, что его роль в разработке этой области математики освещена недостаточно полно. Поэтому в дальнейшем мы планируем сначала подробно изучить его опубликованные работы (свыше 40) по данной тематике, а затем рассмотреть переписку и неопубликованные материалы из записных книжек ученого, где тоже содержатся результаты по дифференциальной геометрии.

Библиографический список

1. *Вилейтнер Г.* История математики от Декарта до середины XIX столетия / Пер. с нем. и ред. А.П. Юшкевича. М.: Наука, 1966. 507 с.
2. *Выгодский М.Я.* Возникновение дифференциальной геометрии // Г. Монж. Приложение анализа к геометрии / Пер. с фр. В.А. Гуковской. М.-Л.: ОНТИ, 1936. С. 1–70.
3. *Делоне Б.Н.* Эйлер как геометр // Леонард Эйлер. Сборник статей в честь 250-летия со дня рождения, представленных Академии наук СССР / Под ред. М.А. Лаврентьева, А.П. Юшкевича, А.Т. Григорьяна. М.: Академия наук СССР, 1958. С. 133–181.
4. *Котек В.В.* Геометрия // История отечественной математики с древнейших времен до конца XVIII в. / Под ред. И.З. Штокало. Киев: Наукова думка, 1968. Т. 1. Гл. VIII. Труды Леонарда Эйлера в области дифференциальных уравнений в частных производных, вариационного исчисления, геометрии, теории вероятностей и теории чисел. С. 277–284.
5. *Розенфельд Б.А.* Геометрия // История математики. Математика XVIII столетия / Под ред. А.П. Юшкевича. М.: Наука, 1972. Т.3. Гл. V. С. 153–221.
6. *Стройк Д. Дж.* Очерки истории дифференциальной геометрии до XX столетия. М.-Л.: ОГИЗ, 1941. 80 с.
7. *Эйлер Л.* Избранные картографические статьи.Три статьи по математической картографии / Пер. Н.Ф. Булаевского. Ред. и вступ. ст. Г.В. Багратуни. М.–Л.: Геодезическая литература, 1959. 79 с.
8. *Euler L.* Methodus inveniendi trajectorias reciprocas algebraicas [1727] // Leonhardi Euleri Opera omnia. Ser. I. Opera mathematica / Ed. A. Speiser. Turici (Zürich), 1954. Vol. 27. S. 1–5.

9. *Euler L.* Problematis trajectoriarum reciprocarum solutio [1729] // Leonhardi Euleri Opera omnia. Ser. I. Opera mathematica / Ed. A. Speiser. Turici (Zürich), 1954. Vol. 27. S. 6–23.
10. *Euler L.* De curvis rectificabilibus algebraicis atque trajectoriis reciprocis algebraicis [1738] // Leonhardi Euleri Opera omnia. Ser. I. Opera mathematica / Ed. A. Speiser. Turici (Zürich), 1954. Vol. 27. S. 24–28.
11. *Euler L.* Considerationes de trajectoriis orthogonalibus [1770] // Leonhardi Euleri Opera omnia. Ser. I. Opera mathematica / Ed. A. Speiser. Turici (Zürich), 1955. Vol. 28. S. 99–119.
12. *Euler L.* Methodus facilis omnia symptomata linearum curvarum non in eodem plano sitarum investigandi [1786] // Leonhardi Euleri Opera omnia. Ser. I. Opera mathematica / Ed. A. Speiser. Turici (Zürich), 1955. Vol. 28. S. 348–381.
13. *Euler L.* De solidis quorum superficiem in planum explicare licet [1772] // Leonhardi Euleri Opera omnia. Ser. I. Opera mathematica / Ed. A. Speiser. Turici (Zürich), 1955. Vol. 28. S. 161–186.
14. *Euler L.* Recherches sur la courbure des surfaces [1767] // Leonhardi Euleri Opera omnia. Ser. I. Opera mathematica / Ed. A. Speiser. Turici (Zürich), 1955. Vol. 28. S. 1–22.
15. *Euler L.* De problemate traiectoriarum orthogonalium ad superficies translato [1820] // Leonhardi Euleri Opera omnia. Ser. I. Opera mathematica / Ed. A. Speiser. Turici (Zürich), 1956. Vol. 29. S. 276–308.
16. *Kommerell V.* Analytische Geometrie der Ebene und des Raumes // M. Cantor. Vorlesungen über Geschichte des Mathematik. Leipzig, 1908. B. IV. S. 453–576.
17. *Speiser A.* Übersicht über die im Bände 27, 28, 28 der ersten Serie enthaltenen abhandlungen // Leonhardi Euleri Opera omnia. Ser. I. Opera mathematica / Ed. A. Speiser. Turici (Zürich), 1954. Vol. 27. S. VII–XLVI; 1955. Vol. 28. S. VII–XLIV; 1956. Vol. 28. S. VII–XLII.

Об опыте чтения курса истории математики на физико-математическом факультете оренбургского университета

И.К. Зубова

Понятие “университетское образование студента” предполагает не только наличие определенной суммы знаний в его профессиональной области, но и широкий кругозор, достаточную эрудицию, некоторое представление о науке в целом и о том, какое место занимают точные науки в жизни современного общества. Именно поэтому в учебном плане физико-математического факультета целесообразно предусмотреть чтение гуманитарных курсов, в том числе курса истории математики.

Нередко случается, что студент, даже неплохо справляющийся с требованиями учебной программы, с трудом применяет на практике имеющиеся у него знания, особенно когда в рамках одного предмета сталкивается с проблемой, требующей привлечения сведений из другой дисциплины. Историко-научное образование помогает успешно преодолевать такого рода недостатки, укрепляя межпредметные связи.

Читая в течение многих лет в техническом вузе курсы высшей математики и математического анализа, автору приходилось замечать, что изложение любой сложной темы можно сделать намного доступнее, если во введении или заключении к ней дать обзор истории формирования изучаемой теории. Такие обзоры можно включить и в курс истории математики, если представляется возможность прочитать его параллельно с курсом математического анализа.

В Оренбургском государственном университете, созданном в 1996 году на базе политехнического института, лекции по истории математики читаются с 2003 года. Особенность этого курса состоит в том, что он включен в учебный план первого или второго семестра, тогда как обычно этим курсом завершается образование студентов-математиков. В нашем учебном заведении будущие программисты, изучающие основные математические дисциплины – алгебру, геометрию, математический анализ – в течение первых трех семестров, параллельно знакомятся с историей этих дисциплин. Курс традиционно называется “История математики и техники”, но точнее было бы назвать его “Историческое введение в высшую математику”. Из нескольких вариантов построения курса наиболее удачным оказался тот, где на него отводилось 68 часов во втором семестре. Распределение материала по лекционным и семинарским занятиям зависит от подготовленности студентов. В сильных группах, как правило, всегда находятся желающие выбрать тему для самостоятельного изучения и подготовить по ней сообщение, которое затем обсуждается и дополняется на семинарском занятии. В более слабых группах целесообразнее больше времени отвести на лекции.

Первое занятие мы начинаем обычно с беседы об элементарной математике и о тех разделах высшей, с которыми студент уже начал знакомиться в университете. Приходится, к сожалению, констатировать, что во втором семестре студент – первокурсник нередко затрудняется при ответах на вопросы, связанные с основными понятиями математического анализа, хотя в это время уже знаком с основами дифференциального исчисления функции одной переменной. Для того, чтобы систематизировать имеющиеся у него знания, мы знакомим его с периодизацией развития математики, предложенной академиком А.Н. Колмогоровым, которая положена в основу построения всего курса.

Выделив основные черты первого этапа развития математической науки (период зарождения математики), мы останавливаемся на формировании понятия числа, системах счисления, а затем – на математике и технике Древнего Египта и Вавилона. На обсуждение этих тем отводится шесть часов.

Следующие шесть часов посвящаются началу второго этапа развития математики (период математики постоянных величин), общей характеристике математики Древней Греции, школам Фалеса (624–548 до н.э.) и Пифагора (ок. 570–500 до н.э.), геометрической алгебре древних греков и трем знаменитым задачам древности.

Далее десять часов отводятся математике эпохи эллинизма. Здесь целесообразно выделить следующие темы:

1) аксиоматическое построение курса геометрии в “Началах” Евклида (ок. 340–287 до н.э.);

2) возникновение теории конических сечений в трудах Архита (ок. 428–365 до н.э.), Менехма (IV в. до н.э.), Аполлония (вторая половина III в. до н.э.–первая половина II в. до н.э.);

3) жизнь и научное творчество Архимеда (ок. 287–212 до н.э.).

Обсуждая первую из этих тем, мы вспоминаем изученную в средней школе элементарную геометрию – планиметрию и стереометрию. Особое внимание обращаем на постулаты Евклида. Поскольку курс геометрии на нашем факультете не включает подробных сведений о неевклидовых геометриях, мы делаем попытку дать некоторое представление о них в связи с пятым постулатом Евклида.

Лекцию о конических сечениях Аполлония целесообразно прочитать, если к этому времени в курсе геометрии студенты уже познакомились с кривыми второго порядка. Здесь представляется удобный случай напомнить им об основных свойствах указанных кривых и показать связь этих свойств с эллиптической, гиперболической и параболической задачами геометрической алгебры, объяснив при этом происхождение названий – “эллипс”, “гипербола”, “парабола”.

Жизни и творчеству Архимеда посвящается семинар, который обычно проходит при большой активности студентов. Но, поскольку в курсе математического анализа они к этому времени еще не подошли к понятию определенного интеграла, занятие имеет скорее общеобразовательный, чем математический характер. К интеграционным методам Архимеда мы возвращаемся позже, рассматривая вопрос о возникновении понятия интеграла в XVII в.

Следующие восемь часов посвящаются математике средневекового Востока. Особое внимание уделяем здесь важнейшим моментам истории арифметики и алгебры – началу широкого применения десятичной позиционной системы счисления с нулем и решению алгебраических уравнений второй степени. В лекции о Самаркандской школе Улукбека (1394–1449) сообщаются сведения об астрономических инструментах дотелескопического периода.

Далее следует беглый обзор математики средневековой Европы и эпохи Возрождения. Эти два занятия (лекционные или семинарские) носят в основном общеобразовательный характер.

Шесть следующих часов посвящены истории развития алгебры. Вначале на семинарском занятии студентам поручается выделить основные этапы формирования этой науки до XVI века, а затем читается лекция, посвященная решению уравнений третьей и четвертой степеней Сципионом дель Ферро (1465–1526), Никколо Тартальей (1499–1557), Джироламо Кардано (1501–1576) и Луиджи Феррари (1526–1565).

Для того, чтобы завершить исторический обзор развития алгебры, приходится, временно отказавшись от хронологического принципа изложения материала, рассказать о попытках разрешения в радикалах алгебраических уравнений более высоких степеней, поисках условий разрешимости этих уравнений и возникшей в связи с этим теорией Эвариста Галуа (1811–1832). Затем дается краткий обзор истории алгебраической символики.

XVII век в истории математики – это начало периода математики переменных величин. Основные темы следующей лекции – общая характеристика науки этого столетия, жизнь и творчество величайших ученых XVII в., предпосылки возникновения дифференциального исчисления. Здесь студентам приходится основательно вспомнить материал курса математического анализа первого семестра.

Далее мы переходим к предпосылкам возникновения интегрального исчисления, начиная с идей Архимеда. К этому времени в курсе математического анализа уже начато ознакомление с понятиями интеграла Ньютона-Лейбница, сумм Дарбу, интеграла Римана, потому полезно проследить предысторию этих понятий. Всего на математику XVII века, предысторию и формирование дифференциального и интегрального исчисления отводится восемь часов.

Математику XVIII века проанализировать не удается, прежде всего из-за недостаточности знаний у студентов, которые к этому моменту еще не знакомы ни с теорией рядов, ни с дифференциальными уравнениями. Поэтому оставшиеся восемнадцать часов можно использовать для лекций и семинаров общеобразовательного характера, посвятив их общей характеристике науки XVIII века, событиям, происходившим в это время в России, биографиям выдающихся математиков столетия. Сведения об их научной деятельности имеет смысл перенести в третий семестр, в завершающую часть курса математического анализа. Последнюю его лекцию можно закончить кратким обзором математики первой половины XIX века, а затем – характеристикой начала периода современной математики. При этом мы создадим у слушателей некоторое предварительное представление о тех математических курсах, которые будут читаться в следующих семестрах – “Дифференциальные уравнения”, “Функциональный анализ” и другие.

Математические и астрономические модели архитектуры пирамид Гизы

В.В. Богун

Изобразительное искусство и архитектура Древнего Египта тесно связаны с заупокойным культом, при этом характерным архитектурным геометрическим элементом того времени является правильная четырехугольная пирамида.

Идея подобной геометрической интерпретации принадлежит зодчему Имхотепу, спроектировавшему ступенчатую пирамиду для фараона Джосера в Саккаре. Форма пирамиды характеризуются двумя основными элементами: квадратным в плане основанием и схождением боковых граней в одной вершине.

Гениальная по своей простоте пирамидальная форма отражает как суть древнеегипетского общества (уменьшение количества представителей с повышением касты начиная с большого количества рабов, заполняемых основание пирамиды, и заканчивая одним единственным обожествляемым фараоном, царственно восседающим на ее вершине), так и принцип жизненного пути каждого человека (изначальное получение большого количества информации теоретического и практического плана с последующим уменьшением области интересов для получения определенных навыков и умений с окончательным выбором профессии узкого профиля), то есть геометрическая форма правильной пирамиды характеризует последовательный переход определенных количественных характеристик на новый качественный уровень.

О геометрических и астрономических интерпретациях наиболее известных представителей – пирамидах долины Гизы (Хеопса, Хефрена и Микерина) – написано множество книг и статей, однако в большинстве случаев либо не имеющих строгих математических выкладок, либо имеющих расхождения с реальными аналогами.

Бесспорно, в геометрии пирамид долины Гизы, бесподобных по своей красоте, грандиозности и изысканности, таится огромное количество соотношений, основанных на золотой пропорции, числах e и π. Однако важно построить четкую математическую теорию, отражающей не только пропорции, заложенные в каждой из пирамид, но и взаимосвязь между ними, а также возможность выражения как можно более точных, а главное, логичных, характерных размеров (математические модели), при этом необходимо проанализировать взаимосвязь полученных расчетов пирамид с определенными соотношениями в Солнечной системе (астрономические модели).

На протяжении этой статьи исследуются математических взаимосвязи между пирамидами Хеопса, Хефрена и Микерина, золотой пропорцией и геометрией Солнечной системы, а также рассматриваются геометрические свойства равнобедренных треугольников и правильных четырехугольных пирамид.

В нашем исследовании будут неоднократно использоваться введенные автором следующие определения:

Поперечный треугольник – равнобедренный треугольник, получаемый при рассечении правильной четырехугольной пирамиды фронтальной плоскостью, проходящей через ее вершину и середины противоположных сторон основания.

Граневый треугольник – равнобедренный треугольник, совпадающий с гранью правильной четырехугольной пирамиды.

Диагональный треугольник – равнобедренный треугольник, получаемый при рассечении правильной четырехугольной пирамиды фронтальной плоскостью, проходящей через ее вершину и противоположные вершины сторон основания.

Определение известной с древних времен золотой пропорции, названной по имени знаменитого древнегреческого скульптора Фидия, заключается в следующем:

Если разделить отрезок С на отрезки А и В таким образом, что это будет отражать золотую пропорцию, то А, деленное на В, будет равно С, деленному на А, или 1, 618033989... (рис. 1) или С/А=А/В=$\varphi \approx 1,6180339$, где ϕ – золотое число и коэффициент пропорциональности ($\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$).

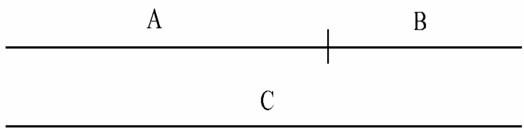


Рис. 1. Золотая пропорция

На основании проведенных автором исследований золотой пропорции и геометрических свойствах равнобедренных треугольников и правильных четырехугольных пирамид получены следующие геометрические фигуры:

Золотой треугольник 1-го рода – равнобедренный треугольник, в котором отношение боковой стороны к половине основания равно золотому числу (рис. 2).

В данном треугольнике центр вписанной окружности делит основную высоту в золотом отношении.

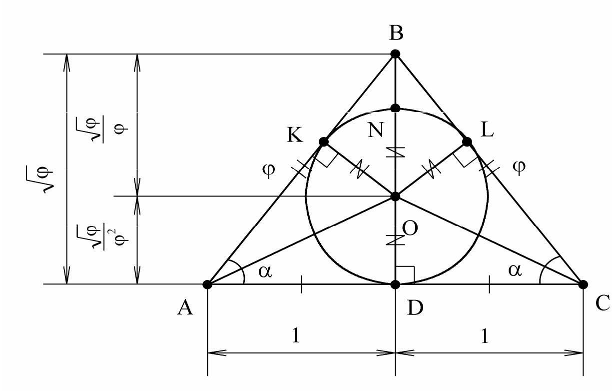


Рис. 2. Золотой треугольник 1-го рода

Золотая пирамида – правильная четырехугольная пирамида, углы при основаниях поперечного и граневого треугольников которой образуют в сумме прямой угол (рис. 3).

Граневый треугольник золотой пирамиды является золотым треугольником 1-го рода.

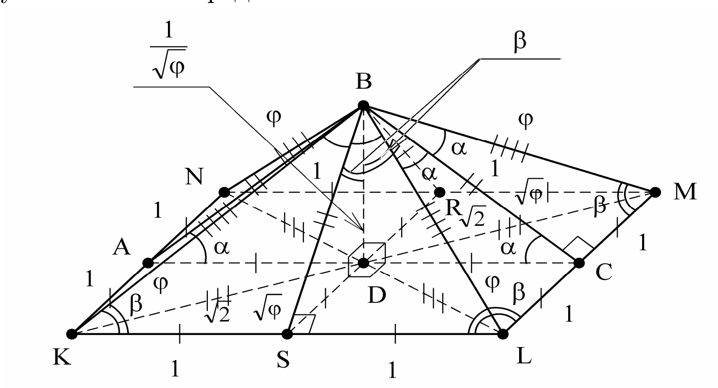


Рис. 3. Золотая пирамида ($\alpha + \beta = \pi/2 = 90^\circ$)

В качестве базиса для построения и исследования геометрических моделей пирамид Хеопса, Хефрена и Микерина использовались основные известные математические сведения о рассматриваемых пирамидах:

1. Пирамиды Хеопса, Хефрена и Микерина являются правильными четырехугольными пирамидами.

2. Золотая пропорция представлена в пирамиде Хеопса отношением между апофемой и половиной стороны основания (Г. Ребер, 1855 г.).

3. Квадрат высоты пирамиды Хеопса равен площади каждой из её боковых граней (Геродот).

4. Периметр основания пирамиды Хеопса равен длине окружности с радиусом, равным высоте пирамиды.

5. Тангенсы углов наклона граней пирамид Хефрена и Микерина равны 4/3 и 5/4 соответственно.

В ходе расчетов получено, что геометрическое преобразование поперечного треугольника пирамиды Хефрена в аналогичный треугольник пирамиды Микерина происходит по принципу преобразования поперечного треугольника пирамиды Хеопса в равный себе треугольник: если построить две правильные четырехугольные пирамиды на общем основании, поперечные треугольники которых построены на общем основании и описываются одной и той же окружностью, то если один из двух исследуемых треугольников является поперечным треугольником одной пирамиды, то второй треугольник является граневым треугольником второй пирамиды (рис. 4, 5).

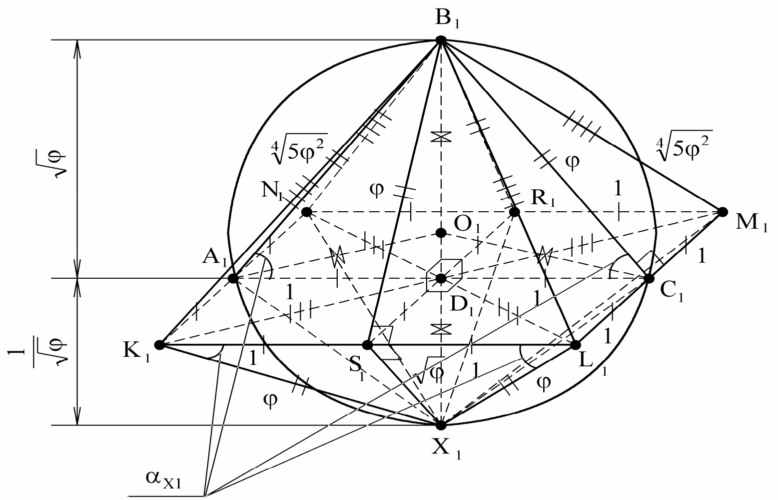


Рис. 4. Геометрическое преобразование золотого треугольника 1-го рода в себе равный

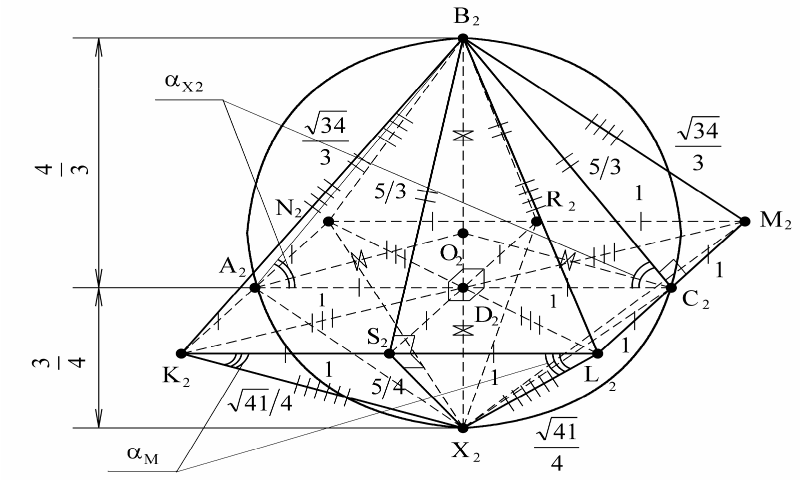


Рис. 5. Геометрическое преобразование поперечного треугольника модели пирамиды Хефрена в поперечный треугольник модели пирамиды Микерина

Таким образом, можно сделать вывод о том, что наличие именно трех основных пирамид в Гизе является необходимым и достаточном условием для выполнения описанных выше преобразований.

С другой стороны, геометрическая взаимосвязь между геометрическими моделями пирамид Хеопса и Хефрена выражается в виде двух последовательных шагов, каждый из которых состоит в нахождении равнобедренного треугольника, в котором центр вписанной в него окружности совпадает с центром описанной вокруг исходного треугольника окружности при общей высоте (рис. 6):

1. Граневый треугольник пирамиды Хеопса (ΔBEF) $\Rightarrow$ квадробедренный треугольник (основная высота равна основанию) (ΔBGH).

2. Квадробедренный треугольник (ΔBGH) $\Rightarrow$ поперечный треугольник пирамиды Хефрена (ΔABC).

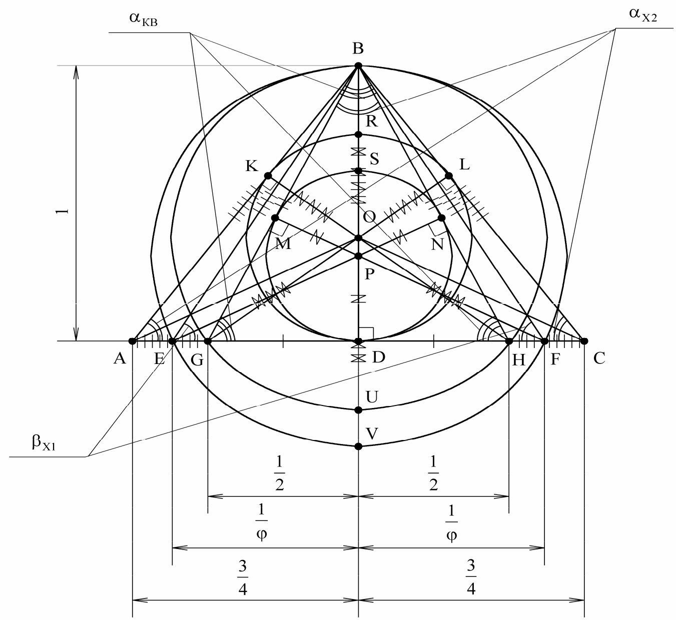


Рис. 6. Геометрическое преобразование граневого треугольника модели пирамиды Хеопса в поперечный треугольник модели пирамиды Хефрена

Расчет реальных размеров пирамид Гизы осуществлялся на основе математического анализа комбинаций имеющих место геометрических пропорций и царского локтя (ц.л.), который являлся основной единицей измерения в Древнем Египте:

$$1 \text{ ц.л.} = 52{,}36 \text{ см} = 0{,}5236 \text{ м}.$$

До настоящего времени размеры пирамид выражались через числа, кратные царскому локтю и никаких внятных объяснений о взаимосвязи между размерами трех пирамид выше, не высказывалось.

Если посчитать тангенсы углов при основании поперечных треугольников пирамид Хеопса, Хефрена и Микерина, исходя из известных данных о размерах высот и сторон основания данных пирамид, и сравнить их с геометрическими пропорциями пирамид, то получим значительные расхождения, что доказывает факт несостоятельности выражения размеров пирамид через числа, кратные царскому локтю.

На рис. 7 ниже показана основная пирамида Гизы, связывающая царский локоть с одним из характерных размеров пирамид Хеопса и Хефрена, то есть для нее справедливо следующее утверждение: если поперечные треугольники правильной четырехугольной пирамиды являются золотыми треугольниками 1-го рода, а величина радиуса вписанного в пирамиду шара равен ста царским локтям, то высота данной пирамиды равна усеченной высоте пирамиды Хеопса, а стороны основания – сторонам основания пирамиды Хефрена.

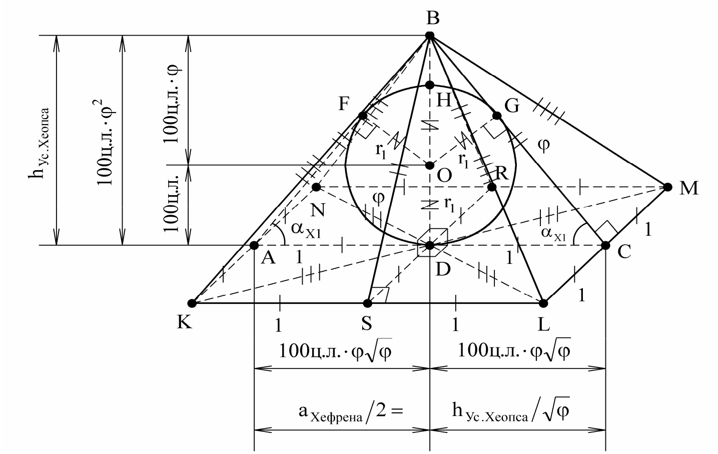


Рис. 7. Модель пирамиды, отображающей проект, заложенный в пирамидах Хеопса и Хефрена

В книге [1] показано, что пирамида Хеопса и основная пирамида Гизы имеют идентичные геометрические модели, при этом высоты пирамид равны по значениям полной и усеченной высотам пирамиды Хеопса соответственно с разницей между собой в 20 царских локтей, стороны оснований соответственно равны сторонам оснований пирамид Хеопса и Хефрена, причем сторона основания пирамиды Хеопса равна 232 метрам с точностью до 6 знака, а радиус вписанного в основную пирамиды Гизы шара равен по значению 100 царским локтям и меньше аналогичного параметра пирамиды Хеопса ровно на 4 метра.

Сторона основания пирамиды Хефрена определяется исходя из значения тангенса угла при основании и определенного выше значения высоты, тогда как для пирамиды Микерина рассчитывается значение высоты исходя из значения стороны основания (половина аналогичного параметра пирамиды Хефрена) и тангенса угла при основании.

Рассчитанные на основе геометрических моделей размеры пирамид Хеопса, Хефрена и Микерина реально согласуются с результатами, полученными в ходе замеров пирамид различными исследователями, археологами и египтологами.

Что касается внутренней архитектуры пирамиды Хеопса, то для ее поперечного треугольника по результатам расчетов получаем расположение центра вписанной в него окружности на уровне камеры царя, а центра описанной вокруг него окружности – на уровне камеры царицы (рис. 8).

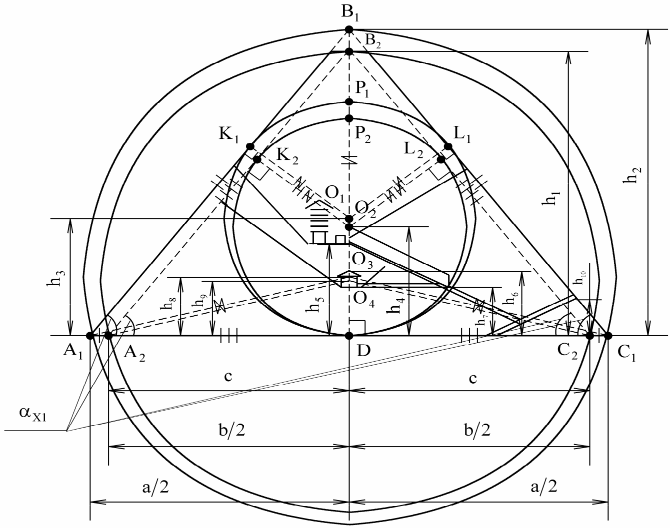


Рис. 8. Поперечный разрез пирамиды Хеопса (версия автора)

Сторона основания пирамиды Хеопса, помноженная на 6 миллионов, даст значение диаметра Солнца с абсолютной погрешностью около 1 км, тогда как значение величины, полученной перемножением полной и усеченной высоты пирамиды Хеопса на сторону основания пирамиды и на число e (основание натурального логарифма), отличается от экваториального диаметра Земли менее чем на 10 м!

На рис.9 ниже показана схема, согласно которой, вероятнее всего, древние египтяне зашифровали расположение Венеры, Земли и Марса относительно Солнца в геометрии модели пирамиды Хеопса (поперечном и граневом треугольниках).

Суть схемы основывается на принципе последовательного преобразования равнобедренных треугольников, для которых имеет место равенство отношения основной высоты первого треугольника к половине его основания отношению диаметра описанной вокруг второго треугольника окружности к его основной высоте (диаметр описанной вокруг второго треугольника окружности равен основной высоте первого треугольника), причем преобразования треугольников происходят в следующей последовательности:

1. Отношение средних радиусов орбит Марса и Земли – отношение средних радиусов орбит Земли и Венеры ($\Delta A_3B_3C_3$).

2. Отношение средних радиусов орбит Земли и Венеры – граневый треугольник геометрической модели пирамиды Хеопса ($\Delta A_2B_2C_2$).

3. Граневый треугольник геометрической модели пирамиды Хеопса – поперечный треугольник пирамиды Хеопса ($\Delta A_1B_1C_1$) (рис. 9).

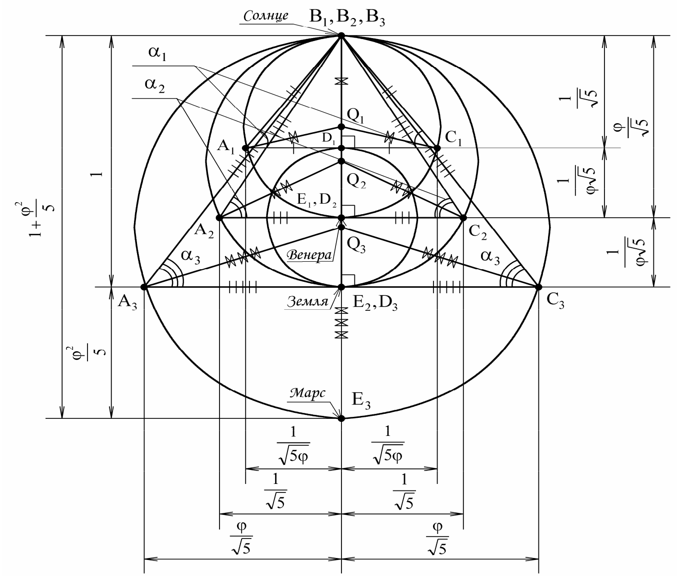


Рис. 9. Геометрическая интерпретация поперечного и граневого треугольников пирамиды Хеопса через расположение Венеры, Земли и Марса относительно Солнца

Таким образом, геометрия пирамиды Хеопса является своеобразной отправной точкой для построения схемы, показывающей взаимосвязь между средними радиусами орбит Венеры, Земли и

Марса, причем, согласно данной схеме, мы получаем так называемый парад трех вышеуказанных планет и Солнца, что, возможно, указывает на дату такого парада планет, зашифрованную в комплексе пирамид Гизы, и несущую необходимую для нас информацию относительно комплекса пирамид, расположенных на плато Гиза, Египет.

Библиографический список

1. *Богун В.В.* Геометрия древнего Египта. М.: Компания Спутник+, 2003. 203 с.
2. *Богун В.В., Колескин В.Н.* Исследование золотой пропорции. Социальные и гносеологические проблемы общества: Сб. науч. тр. / Под общ. ред. д-ра техн. наук, проф. Л.П. Размолодина. Ярославль: Изд-во: “Еще не поздно!”, 2004. С. 126 – 135.
3. *Богун В.В.* Взаимосвязь геометрии пирамиды Хеопса со средними радиусами орбит Венеры, Марса и Земли. Proc. Of JISC “New Geometry of Nature”, 2003. Kazan University Press. Vol. 3, P. 38–45.
4. *Богун В.В.* Геометрические свойства равнобедренных треугольников. Ярославский педагогический вестник. Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2002. С. 119–124. № 2.

Глава 5

История математического образования

О некоторых задачах двойственности

Г.И. Синкевич

История математики знает немало примеров двойственных задач, наиболее известная – это обнаруженная Исааком Барроу двойственность между задачами о нахождении касательной к кривой и о нахождении площади под кривой, что привело к открытию связи между дифференцированием и интегрированием. Конец девятнадцатого – начало двадцатого века характеризовались появлением большого количества математических наблюдений, новых математических объектов, формированием новых теорий.

Польский математик В. Серпинский, создавая теоретическую платформу польской школы, видел необходимость упорядочения аксиоматики теории множеств относительно аксиомы выбора и гипотезы континуума. В период с 1914 по 1918 гг. Серпинский жил в Москве и общался с математиками Московского университета: Б.К. Млодзеевским , Д.Ф. Егоровым и Н.Н. Лузиным. В беседах с Лузиным у Серпинского появляется критический взгляд на гипотезу выбора и природу континуума. Вообще говоря, Лузин не был сторонником применения аксиомы выбора. Его интересы лежали в области эффективных множеств, но при построении примеров совместно с Серпинским он осознанно пользуется аксиомой выбора. Заметим, что в некоторых ранних работах Лузина часто встречается произвольный выбор. Из девяти работ Лузина, в которых явно используется аксиома Цермело, три работы написаны совместно, одна является письмом к Серпинскому, а остальные (кроме одной) содержат обращение к работам Серпинского, либо ссылку на беседы с ним. Это показывает влияние идей Серпинского на творчество Лузина. Правда в конце третьего десятилетия XX века, видимо под влиянием Бореля, позиция Лузина меняется, хотя он не отказывается от аксиомы выбора окончательно. Приведем здесь высказывание Лузина 1933 г., достаточно полно характеризующее его позицию: "Я рассматриваю вопросы существования с точки зрения натуралистов, как это делает Борель – великий натуралист нашего времени. С этой точи зрения нет никакой разницы между применением рассуждения Цермело во всей его полноте и употребления так называемой "гипотезы континуума". Все эти вещи одинаково нереальны.

Если я трачу время на рассмотрение этих вещей, то не потому, что считаю их действительно серьезными, а потому, что через множество чисто словесных "существований", слишком легких, чтобы принимать их всерьез, я вижу слабый свет настоящей интуиции, могущей привести нас к совершенно неожиданным фактам, которые мы обнаружим, если следовать другому пути" [1. Т. 2. С. 707].

Но в период 1914–1918 гг. Лузин не был столь осторожен, и немалую роль в этом сыграл Серпинский. Результаты, полученные ими совместно, во многом послужили основой для дальнейших разработок Серпинского и ученых полькой школы; таковым было, например множество Лузина. Это название в литературе имеют несколько объектов; мы будем иметь в виду несчетное множество первой категории на всяком совершенном множестве, расположенном в сегменте. Это множество было построено Лузиным в 1914 г. в работе "Об одной проблеме Бэра" [1. Т. 2. С. 683–685].

Благодаря Лузину Серпинский стал требовательней к строгости доказательств. В 1918 г. им был предложен новый способ доказательства – так называемый принцип минимума. Впервые Серпинский использовал его в статье "Аксиоматическое определение множеств, измеримых B" [2. Т. 2. С. 187–191].

Другая проблема, поставленная Лузиным и также увлекшая Серпинского – это сохранение свойств Бэра и измеримости при суперпозиции функции. Относительно измеримых функций Лебег установил только, что сумма и предел сходящейся последовательности измеримых функций, есть измеримая функция, отсюда измеримы все бэровские функции. Серпинский завершил цикл работ по инвариантности, измеримости и свойству Бэра перед Второй мировой войной, а начал его в московский период. Много своих работ посвятил Серпинский связи аксиомы выбора с гипотезой континуума и исследованию множества Лузина, которое он использует во многих своих работах, в том числе, в одной из центральных своих работ по мере и категории “Двойственность между первой категорией и мерой ноль”.

И Серпинский, и Лузин формировали свою методологию при разработке общих проблем. Лузин тяготеет к конструктивности, анализу свойств существующих объектов. Серпинского же интересует наличие отображений, логически двойственные объекты. Эти тенденции впоследствии проявятся ярко в творчестве каждого из них.

Наиболее значительным из всех исследований Серпинского, после работ по упорядочению основ теории множеств, является цикл работ двадцатых и тридцатых годов XX века по мере и категории. При этом Серпинский пользовался довольно широким понятием функции – как функции множества, а не как функции точки, различая ее поведение на различных подмножествах области определения.

Смещение приоритета от функции точки к функции области обусловлено работами Лебега, Бэра, Бореля и Цермело. В методе интегрирования Лебега область определения функции подвергается перегруппировке точек для удобства интегрирования, то есть в понятии функции уже не столь важным становится закон соответствия, сколько множества определения и изменения функции.

При этом, наряду с представлением о функции как конструктивном объекте (для которого прежде всего устанавливается, как осуществляется соответствие), возникает неэффективное представление (свое начало оно берет, видимо с определения Дирихле, согласно которому совершенно не важно, как осуществляется это соответствие).

В работах Серпинского и его современников образ функции одного аргумента – это одномерное множество таких точек y, для которых $y = f(x)$, а график такой функции – это плоское множество таких точек (x, y), для которых $y = f(x)$. Лузин, например, в журнале “Fundamenta mathematicae” ставит вопрос так: любая ли функция, образ которой обладает свойством Бэра, будет обладать свойством Бэра?

Функция обладает свойством Бэра, если она непрерывна для некоторого совершенного множества P, кроме, может быть, множества первой категории. (У Бэра условие сформулировано так: “Если функция точечно разрывна на любом совершенном множестве, кроме, может быть, множества первой категории”.)

Работа Серпинского “Функции, обратные функциям, удовлетворяющим условию Бэра” (1939 г.) [2. Т. 3. С. 409–410], посвященная вопросу о сохранении свойства Бэра при отображениях, была написана им уже после открытия им двойственности между мерой и категорией. Необходимость ее была вызвана тем, что, доказав существование взаимнооднозначного соответствия между множествами меры нуль и множествами первой категории и исследовав, на основании предыдущих работ, свойства отображающей функции, Серпинский задался вопросом о существовании обратного отображения и его свойствах. Можно предположить, что если бы не вскоре начавшаяся война, он решил бы проблему обратного отображения полностью.

В 1934 г. Серпинским была написана работа, занимающая центральное место среди исследований этого цикла. Она носит название “Дуальность между первой категорией и мерой нуль” [3]. Постановка вопроса такова. Известно много теорем о множестве первой категории, которые остаются верными и для множества меры нуль, и наоборот. С помощью гипотезы континуума доказывается теорема, объясняющая эту двойственность: если верна гипотеза континуума, то существует такое взаимно однозначное отображение $f(x)$ множества X всех действительных чисел на себя, что когда есть подмножество множества X первой категории, тогда $\mathrm{f}^{-1}(E)$ есть множество меры нуль; когда же есть подмножество множества X меры нуль, тогда $P^*(E)$ будет множеством первой категории. Серпинский отмечает, что остается открытым следующий вопрос: существует ли преобразование $f(X)$, которое удовлетворяет условиям теоремы и такое, что если E – множество меры нуль из X, то $f(E)$ будет первой категории, а если E – множество первой категории из X, то $f^{-1}(E)$ – множество меры нуль? Иными словами, существует ли взаимно однозначное отображение прямой на себя, которое переводит все множества первой категории во все множества меры нуль и все множества меры нуль во все множества первой категории? Серпинский приложил немало усилий для решения этого вопроса, но окончательный ответ на него дал венгерский математик П. Эрдёш.

Серпинский первым привел случай неприменимости теоремы о двойственности. Позднее Хаусдорф выделил пространства, где эта двойственность имеет место, назвав их пространствами меры, согласованной с категорией.

Зависимости теоремы дуальности от гипотезы континуума и характера функции, осуществляющей это преобразование, посвящена работа Серпинского “О некоторых взаимно однозначных преобразованиях прямой на себя”. Серпинский утверждает, что функция, осуществляющая указанную связь, не может быть измеримой. С помощью множества Лузина и множеств, названных позднее множествами Серпинского, он формулирует следующую теорему: “В предположении гипотезы континуума существует функция $f(x)$, которая преобразует взаимно однозначным образом прямую на себя и одновременно преобразует множество меры нуль во множество первой категории и каждое множество первой категории во множество меры нуль. Тем не менее, отмечает здесь же Серпинский, даже допуская гипотезу континуума, пока невозможно решить проблему существования функции, преобразующей взаимно однозначно прямую на себя, обратная к которой преобразует каждое множество первой категории во множество меры нуль и каждое множество меры нуль во множество первой категории.

В 1943 г. венгерский математик П. Эрдёш опубликовал статью “Некоторые замечания по поводу теории множеств” [4], первая часть которой посвящена доказательству указанной теоремы. Наложив условие на функцию $f(x)$, Эрдёш получает требуемое утверждение:

“Существует ли функция, которая имеет указанное свойство и также еще такое свойство – она отображает множества первой категории во множества меры нуль, а обратная к ней отображает множества меры нуль во множества первой категории? Мы докажем, что такая функция существует. Наше доказательство аналогично доказательству Серпинского: мы, конечно, полагаем, что гипотеза континуума выполняется.”

Окстоби в своей книге “Мера и категория” [5], высоко оценивая значение этой теоремы и отмечая, что Эрдёш лишь слегка усовершенствовал доказательство Серпинского, предлагает такой вариант теоремы (теперь она носит название теоремы Серпинского-Эрдёша):

Пусть P – утверждение, в которое входят понятия множества меры нуль, множества первой категории и понятия чистой теории множеств. Пусть P^* – утверждение, полученное из P взаимной заменой всех терминов “нуль-множество” и “множество первой категории”. Тогда каждое из утверждений P и P^* следует из другого при условии, что справедлива гипотеза континуума.

Итак, несмотря на то, что окончательный вариант результата принадлежит Эрдёшу, Серпинский сделал большую часть исследования: поставил и решил проблему одностороннего отображения, поставил проблему одновременного отображения, охарактеризовал функцию, осуществляющую отображение, рассмотрел зависимость теоремы от гипотезы континуума, а также показал ограниченность действия теоремы.

Теорема Серпинского-Эрдёша имеет методологический характер и в позднейшей литературе часто называется “методом двойственности”.

Можно предположить, почему Серпинскому не удалось доказать желаемую теорему. Он искал наиболее общий вид функции, описал некоторые ее свойства. Эрдёш удовлетворился частным случаем, не заботясь о степени общности.

В польской школе труды Серпинского по методу категорий были развиты К. Куратовским, С. Банахом, Э. Марчевским, В. Орличем и другими.

Преимуществом метода категорий перед конструктивным методом является то, что он не требует значительных построений. С. Хартман [6] отмечает ту особенность теории категории и меры, что она позволяет доказать чисто теоретико-множественные теоремы о несуществовании универсальной меры, что было разработано К. Куратовским, С. Банахом, Э. Марчевским, С. Уламом.

Принцип двойственности широко применяется и в доказательстве теорем существования.

Библиографический список

1. *Лузин Н.Н.* Собрание сочинений в трех томах. М., 1953–1959.
2. *Sierpinski W.* Oeuvres choisies. Warszawa: Panstowe wydwnictwo Naukowe. T. 1. 1974. 500 s. T. 2. 1975. 780 s. T. 3. 1976. 686 s.
3. *Sierpinski W.* Sur la dualite entre la premiere categorie et la mesure nulle // Fundamenta mathematicae. Vol. 22, p. 276–280.
4. Erdos P. Some remarks on set theory // Ann. Of math. 1943. Vol. 44. № 4. p. 643–646.
5. *Oxtoby J.C.* Measure and category N.Y. Heidelberg, B. Springer, 1971. *Окстоби Дж.* Мера и категория. М.: Мир, 1974.
6. *Hartman S.* Merure et categorie. Congruence des ensembles // В кн. [3. V. 2. P. 20–25].

Из истории международного движения за реформу математического образования в конце XIX – начале XX века

Р.З. Гушель

Как известно, в 1908 году на IV Международном математическом конгрессе в Риме была создана Международная комиссия по преподаванию математики (МКПМ). Среди целей ее создания было обобщение богатого опыта педагогов разных стран Европы и Северной Америки в деле модернизации школьного математического образования и координация их работы в этом направлении.

Таким образом, 1908 год оказался рубежным в истории международного движения по обновлению школьного математического образования – до этого времени в каждой стране реформы или реформаторские планы были самостоятельными, хотя и не без заимствования в некоторых случаях зарубежного опыта. С 1908 года реформаторское движение приобрело единое направление, которому в большей или меньшей степени следовали все страны, входившие в МКПМ.

Мы, однако, остановимся на периоде, предшествовавшем созданию Комиссии.

К концу XIX века во многих странах начались работы по реформированию средней школы. Интенсивное развитие промышленности требовало большого количества специалистов с высшим и средним естественнонаучным и техническим образованием. Классическая гимназия не могла дать соответствующую подготовку своим выпускникам. В связи с новыми задачами школы возникла необходимость реформ всей системы среднего образования. Курса математики эти реформы коснулись не в последнюю очередь.

В Англии на рубеже веков появилось и обрело многочисленных сторонников движение, во главе которого стоял инженер Джон Перри (1850 г.р). Он считал, что школьный курс геометрии должен строиться на опытах и измерениях. Дедуктивному построению курса, по мнению Перри, не место в средней школе. Лабораторный метод Перри предполагал широкое использование таблиц и графиков в арифметике и алгебре. Сторонники этого метода предлагали и понятие функции ввести с помощью графиков. Таким образом осуществлялось слияние всех математических дисциплин в единый учебный предмет [1].

Во Франции в 1902 году был принят и введен новый учебный план. Традиционная элементарная геометрия в этом плане "очень сильно отступает назад перед лицом современных новых идей" [2]. Во главу угла здесь ставится упрощение и большая наглядность преподавания, а также введение в курс средней школы новых разделов, в первую очередь, функций, координат и начал анализа бесконечно малых.

В Италии традиционно считалось, что преподавание геометрии должно вестись в духе "Начал" Евклида. Здесь очень высоко ценилось значение строгого логического построения курса геометрии. Однако, к концу XIX века и среди итальянских педагогов возобладали другие взгляды. Усилилось значение наглядности в преподавании, все больше внимания стали уделять приложениям математики.

Остановимся подробнее на России.

Еще в конце XIX века отечественные педагоги начали обсуждать и в печати, и на своих совещаниях и съездах вопросы, связанные как с обновлением содержания школьного математического образования, так и с изменением структуры системы средних учебных заведений. Приведем примеры.

В 1895 году в журнале "Русская мысль" была опубликована большая статья В.П. Шереметевского "Математика как наука и ее школьные суррогаты". Автор был убежден в необходимости обновления школьного курса за счет введения элементов высшей математики. Он писал: "Все, что делает математику основой современного естествознания, все, чем так быстро движется вперед современная техника, все то, что выпало на долю нашей науки в созидании и культуре XIX века – все это заключено в пределах так называемой высшей математики. Не удивительно, что давно уже раздаются голоса за включение ее элементов в программу средней школы" [3].

Годом раньше, в 1894 году, В.Б. Струве в журнале "Техническое образование" писал о необходимости фуркации (профильной дифференциации) старшего звена средней школы и введения в математических классах элементов анализа бесконечно малых.

В 1899 году министр народного просвещения Н.П. Боголепов разослал в учебные округа циркуляр, в котором указывалось на ряд недостатков существовавшей тогда средней школы. Среди них, в частности, отмечались: "отчужденность от семьи и бюрократический характер средней школы, ... невнимание к личным особенностям учащихся, ... чрезмерность ежедневной умственной работы, возлагаемой на учеников, ... несогласованность программ между собою и с учебным временем, ... излишнее преобладание древних языков..." [4]. Попечителям предлагалось делегировать опытных педагогов для участия в работе специальной комиссии по средней школе, которая должна была собраться в 1900 году в С.-Петербурге. В циркуляре записано: "Задача комиссии должна будет состоять в том, чтобы: а) обсудить всесторонне существующий строй средней школы с целью выяснить его недостатки и указать меры к их устранению при условии сохранения основ классической гимназии и реального училища как главных типов этой школы в России, и б) если бы при обсуждении первого вопроса возникли предположения о видоизменении существующих типов или о создании какого-либо нового типа, то подвергнуть рассмотрению и эти предложения" [4]. (Здесь и далее речь идет только о мужских школах.)

Некоторые попечители, получив циркуляр, организовали в своих округах совещания по отмеченным в циркуляре вопросам. Так поступил и попечитель Московского учебного округа известный математик, профессор П.А. Некрасов.

На Совещании в Москве осенью 1899 года были разработаны учебные планы для мужских гимназий шести типов. Такое большое количество типов школ объясняется разной степенью представленности древних языков в их учебных планах. Была предусмотрена и гимназия с фуркацией в старших классах.

Среди вопросов, обсуждавшихся на совещании, был вопрос о введении в программу элементов высшей математики. Сам П.А. Некрасов в своем выступлении говорил о необходимости изучения в средней школе элементов теории вероятностей. Выдвигалось предложение об организации в гимназиях лицейских классов для подготовки к поступлению в высшую школу.

И на Совещании в Москве, и в заседаниях Комиссии в С.-Петербурге обсуждался вопрос о праве реалистов на поступление в университет. Было единодушно решено, что им должно быть это право предоставлено (при поступлении на физико-математический и медицинский факультеты).

Однако, большая часть решений Комиссии 1900 года осталась только на бумаге, т.к. в 1901 году Н.П. Боголепов погиб от руки террориста, а его преемник ничего в системе школьного образования менять не стал.

Тем не менее, вопрос о праве реалистов на поступление в университет не был снят с повестки дня. К 1906 году были составлены программы дополнительного класса реальных училищ [5]. Окончание этого класса открывало ученику дорогу в университет. Программа по математике содержала большие разделы аналитической геометрии и анализа бесконечно малых. Эта программа была введена с 1907/1908 учебного года, и в соответствии с ней было написано довольно много учебных пособий.

Что касается других решений Комиссии Боголепова, то, возможно, они не были реализованы и потому, что в России в то время не нашлось человека, достаточно авторитетного и в научном, и в педагогическом ссобществе, и достаточно заинтересованного в том, чтобы эти решения воплотились в жизнь, который бы эту реформу возглавил.

Зато такой человек нашелся среди германских реформаторов. Это был выдающийся немецкий математик и педагог Феликс Клейн (1849–1925).

До 1895 года в Германии существовало несколько групп педагогов, занимавшихся вопросами, связанными с необходимостью реформирования математического образования. Это Союз германских инженеров, Германский союз для развития преподавания математики и естествознания и круги высшей школы, руководимые Ф. Клейном. Около 1895 года эти группы объединились. "Направление реформы должно было заключаться в том, чтобы в преподавании математики получили отражение и ее приложения, а также идеи, лежащие в основе огромных успехов математических наук в XVIII и XIX столетиях, чтобы эти идеи заняли в преподавании то место, которое соответствует их значению в современной культуре" [6]. На съезде германских естествоиспытателей и врачей в Бреславле в 1904 году была создана специальная комиссия, которой поручалось разработать новые программы по математике для средних учебных заведений всех типов. И уже в 1905 году на очередном съезде в Меране был представлен проект программы по математике для гимназий, получивший название Меранской программы. В 2005 году Меранской программе исполняется 100 лет.

Необычайная активность Ф. Клейна в борьбе за обновление курса математики, многочисленные его выступления и в печати, и перед учительской аудиторией, а также его высокий авторитет как ученого первой величины привлекли внимание к этой программе не только в Германии, но и в других странах. И хотя идеи, сформулированные в Меранской программе, не были в педагогическом сообществе новыми, все движение за реформу с этого времени связывается с именем Ф. Клейна. Не случайно на IV Международном математическом конгрессе в Риме при создании МКПМ именно он был приглашен стать ее президентом.

В чем же заключается суть Меранской программы?

В преамбуле к программе составители пишут, в частности: “Надо заботиться о том, чтобы, признавая вполне значение математики для формального развития, тем не менее отказаться от специальных знаний, лишенных практического значения и односторонних, напротив, стараться о возможном развитии способности математического исследования окружающего нас мира явлений. Отсюда вытекают две отдельных задачи: развитие пространственного восприятия и воспитание привычки к функциональному мышлению” [7].

Таким образом, во главу угла германские реформаторы ставили построение всего курса математики в средней школе на основе функциональной зависимости, а также усиление межпредметных и внутрипредметных связей при обучении. Значительно усиливается роль наглядности.

На передний план выдвигается возможность применения полученных в курсе математики знаний в различных сферах человеческой деятельности. Усиление внимания к приложениям не означало, однако, понижения требований к уровню строгости в изложении, и это составители отметили особо.

Они также сочли, что учителю должна быть предоставлена свобода “в подробностях преподавания – в изложении материала, распределении работ и прочем, – конечно, в рамках общего учебного плана” [7].

Особенно осторожно отнеслись германские реформаторы к вопросам введения элементов анализа бесконечно малых в курс средней школы. И объем материала, и форму изложения они предоставили на усмотрение преподавателя. В первую очередь, так поступили потому, что дело было новое, опыта работы ни у кого не было. В программе отмечено: “Многочисленные и разнообразные опыты в этом отношении, сделанные в разных учебных заведениях, дадут впоследствии возможность решить с большей уверенностью, как следует организовать это дело” [7].

Что касается конических сечений, то они были включены в программу выпускного класса. В объяснительной записке по этому поводу сказано: “Изложение теории конических сечений следует вести как синтетически, так и аналитически, по возможности, в равной мере” [7].

Систематическому курсу геометрии, начинавшемуся в III классе, программа предпосылает курс пропедевтический во II классе. Объяснительная записка обращает внимание на то, что “в планиметрии, где возможно, следует поддерживать живую связь с соотношениями трехмерного пространства, именно, приводя подходящие примеры из окружающей жизни” [7].

Особое внимание Меранская программа обращает на курс выпускного класса. Для него формулируется такая цель: “научный обзор и приведение в систему приобретенных знаний, способность математического понимания и применение ее для разработки различных вопросов... Все это даст учащимся не только цельное законченное знание математики, но также и почву для дальнейшей работы в области математики, если это потребуется их дальнейшим призванием. Резкий переход от средней школы к высшей, столь заметный сейчас, тогда совершенно исчезнет” [7].

Мы видим, что серьезную и очень не новую проблему подготовленности выпускников средней школы к продолжению образования в школе высшей германские реформаторы предлагали решать через обновление содержания образования и такую организацию обобщающего повторения всего курса в выпускном классе, которая бы сглаживала резкость перехода к высшему образованию.

Итоговую аттестацию выпускников средней школы предлагалось проводить в виде устного и письменного экзамена. Письменный экзамен должен был состоять в следующем: “1) Связное изложение какого-нибудь довольно обширного общего вопроса (по теории) и 2) полное, числовое и графическое, решение какой-нибудь одной задачи” [7].

Сами составители считали Меранскую программу лишь предварительным вариантом, разработанным только для мужских гимназий. Предстояло еще составить аналогичные программы для средних учебных заведений других типов.

Что касается внедрения новой программы в школу, то оно шло довольно медленно, и в разных регионах страны педагоги и руководство образованием относились к ним по-разному, несмотря на большую работу и самого Ф. Клейна, и его сторонников по пропаганде новых идей.

Зато в Европе эти идеи были восприняты с большим интересом. Ф. Клейн становится фактическим лидером международного движения за обновление школьного математического образования.

Прошло 100 лет, и сегодня мы уже не можем себе представить школьный курс математики без функций, координат, элементов анализа бесконечно малых.

Библиографический список

1. *Бонезен Т.* Реформа преподавания элементарной математики // Вестник опытной физики и элементарной математики. 1908. № 463. С. 157–161.
2. *Клейн Ф.* Элементарная математика с точки зрения высшей. М., 1987. Т. II.
3. *Шереметевский В.* Математика как наука и ее школьные суррогаты // Русская мысль. 1895. № 5. С. 105–125; также Математическое образование. 1999. № 4.
4. Совещания, происходившие в 1899 году в Московском учебном округе по вопросам о средней школе. М., 1899. Вып. 1.
5. Программа по математике для дополнительного класса реальных училищ // Журнал Министерства народного просвещения. 1907. № 1.
6. *Зейфарт Ф.* Развитие реформы преподавания математики в Германии // Клейн Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей. М.-Л., 1933. Т. 1. С. 401–418.
7. *Еткович Я.* О преподавании математики в прусских гимназиях // Педагогический вестник Московского учебного округа. 1911. № 5–6. С. 24–57.