МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
ЯРОСЛАВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ К.Д. УШИНСКОГО

ТРУДЫ

ВТОРЫХ КОЛМОГОРОВСКИХ ЧТЕНИЙ

Ярославль
2004

УДК 51; 51:372.8; 51(091)
ББК 22.1 я434
Т 782

Т 782 **Труды вторых Колмогоровских чтений.** Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2004. 382 с.

В связи со 100-летием со дня рождения академика А.Н. Колмогорова школа-семинар в Ярославле по исследованию проблем фундирования профессиональной подготовки учителя математики в 2003 году получила статус первых Колмогоровских чтений.

Настоящий сборник статей вторых Колмогоровских чтений (2004 г.) так или иначе отражает интересы А.Н. Колмогорова во многих областях математики, истории математики и математического образования, теории и методики обучения математике. Воспоминания учеников и коллег А.Н.Колмогорова содержат новые факты его биографии и аспекты научно-методических интересов ученого.

Настоящий сборник будет полезен преподавателям школ и вузов, студентам и всем, кто интересуется математикой и методикой ее преподавания.

ISBN 5–87555–391–X

УДК 51; 51:372.8; 51(091)
ББК 22.1 я434

ISBN 5–87555–391–X

Оглавление

Глава 1

Творчество А.Н. Колмогорова в историческом аспекте

Проблема обоснования математики у А.Н.Колмогорова

В.Я. Перминов

Давно замечено, что деятельность ученого-теоретика распадается на два типа. Деятельность первого типа нацелена на получение новых результатов, деятельность второго типа – на упорядочение и логическое обоснование достигнутого. Творчество различных математиков может сравниваться, в частности, и по соотношению в нем этих двух направлений деятельности. В творчестве Коши, Гаусса, Пуанкаре, несомненно, преобладал инновационный момент, стремление к открытию новых фактов, вне зависимости от возможностей их строгого обоснования. Лобачевский был математиком преимущественно обосновательного типа. Он сознательно нацеливал себя на упорядочение и обоснование областей, которые уже пройдены и разработаны. Особенность А.Н. Колмогорова как математика состоит в том, что оба этих интереса сочетались в нем, как кажется, без явного преобладания какой-либо одной из сторон. Он, конечно, останется в истории математики прежде всего как автор множества теорем и идей в различных разделах математики. Но, с другой стороны, сколько-нибудь внимательный взгляд на его творчество обнаруживает в нем весьма сильную обосновательную тенденцию, которая оказывала влияние и на направление конкретных исследований. Задача данной статьи состоит в том, чтобы выявить, насколько это возможно, общие направления и принципы обосновательного мышления А.Н. Колмогорова.

1. Исследование логики математического мышления

Будучи еще совсем молодым человеком, Колмогоров опубликовал статью "О принципе tertium non datur", которая стала заметным событием в обсуждении проблем логики и оснований математики [1]. Он определяет здесь систему минимальной логики, которая не содержит закона исключенного третьего, и затем показывает, что математические теории, изложенные в обычной классической логике, могут быть отражены в системах рассуждений с минимальной логикой. Это означает, что закон исключенного третьего не занимает того места в структуре математического рассуждения, которое ему приписывает интуиционизм, и для широкого круга теорий в принципе не может быть источником противоречий. В.А. Успенский и В.Е. Плиско пишут в своих комментариях к этой статье: "По существу, там намечена схема получения для широкого класса математических теорий следующего математического результата: если в некоторой классической теории с использованием закона исключенного третьего или эквивалентных ему принципов доказано некоторое утверждение, то некоторое равносильное ему (с классической точки зрения) утверждение может быть доказано и без закона исключенного третьего, а именно, в рамках минимальной логики. В частности, если в некоторой теории с помощью закона исключенного третьего было получено противоречие, то противоречивое суждение может быть доказано и без использования этого закона. Таким образом, использование закона исключенного третьего нельзя считать подлинной причиной противоречий в классической математике, в частности, причиной теоретико-множественных антиномий" [2].

Эта статья Колмогорова важна прежде всего в плане опровержения исходных положений интуиционистской программы обоснования математики. Как известно, для логицизма и формализма довольно скоро было найдено чисто логическое опровержение. Оно следовало из известных метатеоретических положений, доказанных К. Геделем в 1931 году. Первая теорема Геделя (о неполноте) утверждает, что арифметика содержит в себе истинные, но невыводимые утверждения и, таким образом, в принципе не может быть сведена к элементарным логическим исчислениям, обладающим свойством полноты. Вторая теорема К. Геделя (о непротиворечивости) устанавливает тот факт, что финитная метатеория в принципе не может обосновать непротиворечивость такой теории, как арифметика. Эти теоремы, при всех оговорках, относящихся к их методологической интерпретации, по общему мнению, ставят предел усилиям обоснования математики в рамках логицистской и формалистской программ. Теоремы Геделя, однако, связаны с аксиоматическим представлением математической теории и никак не затрагивают интуиционистской программы. Статья Колмогорова опровергает эту программу в ее наиболее важном пункте, а именно в том предположении, что причиной парадоксов в теории множеств является использование классической логики за пределами ее значимости. Она показывает, что противоречия в математической теории порождаются не каким-либо отдельным логическим законом и не логическими законами вообще, а исключительно системой предметных допущений, принятых в теории. Это принципиально важный вывод, который часто упускается из виду при обсуждении интуиционизма и конструктивизма как программ обоснования математики. Не только среди философов, но и среди математиков до настоящего времени сохраняется взгляд на конструктивное рассуждение как более строгое по сравнению с классическим. Этот предрассудок проистекает из плохой философии математики и, в частности, из незнания логических теорем, раскрывающих место закона исключенного третьего в структуре математической теории.

В статье “К истолкованию интуиционистской логики” (1932) А.Н. Колмогоров интерпретирует интуиционистскую логику как логику решения задач [3]. Согласно этой интерпретации, логическая формула $A\&B$ означает, что задача A и задача B решены, формула $A \vee B$ означает, что решена задача A или решена задача B, формула $\bar{A}$ означает то, что предположение о разрешимости задачи A приводит к противоречию. В таком случае формула $A \vee \bar{A}$ означает, что либо разрешима задача A, либо предположение о ее разрешении приводит к противоречию. Ясно, что эти два случая не исчерпывают всех мыслимых здесь возможностей, ибо может оказаться, что задача является неразрешимой и вместе с тем предположение о ее разрешимости само по себе не ведет к какому-либо противоречию. Это становится особо ясным в свете положения Геделя о существовании аксиоматически неразрешимых задач в достаточно богатых формальных исчислениях.

Представляется, что эта интерпретация интуиционистской логики не просто одна из возможных ее содержательных интерпретаций. Она является в некотором роде естественной, обнаруживающей основной смысл интуиционистской логики, ее связь с высказываниями о разрешимости. Интуиционистская логика – это не логика истинности-ложности математических высказываний, а теория разрешимости, выраженная в языке логики. Такая метаматематическая "логика" не совпадает и не должна совпадать с логикой собственно математического рассуждения. Поскольку в ней зафиксированы существенно внелогические предположения, связанные с фактической возможностью решения задачи в определенной системе аксиом, то она никак не может претендовать на статус общей логики математического мышления.

Эта работа Колмогорова дополняет первую в том отношении, что она вскрывает некоторую принципиальную недостаточность интуиционистской логики, которая по своему содержанию не выходит за пределы специальных математических интуиций. В настоящее время в философии математики все более осознается тот факт, что расширение математической теории обеспечивается как внутренними интуициями самой математики типа интуиции построения, так и внематематическими интуициями общей логики. Формальное исчисление, раскрывающее в своих принципах только смысл понятия "решить задачу", в силу уже своего специального характера не может претендовать на статус общей логики математического мышления. Попытка Брауэра свести логические интуиции к чисто математическим совершенно ошибочна. Заслуга Колмогорова состоит в прояснении содержания принципов интуиционистской логики, которое позволяет бросить взгляд на возможную сферу их применения.

Мы видим, что уже в начале своей творческой деятельности Колмогоров глубоко проник в обосновательные проблемы, которые в то время были в центре внимания, и внес существенный вклад в их разрешение. Он не сделал область логики и оснований математики основной сферой научного творчества, но его интерес к обосновательным проблемам никогда не угасал. Многие его математические достижения носят ярко выраженный обосновательный характер. Сюда прежде всего относится предложенная им в 1933 году аксиоматика теории вероятностей. Анализ предшествующих попыток сформулировать аксиомы для теории вероятностей (это прежде всего аксиоматики, предложенные Э. Борелем, С.Н. Бернштейном, Р. Мизесом и другими математиками) показывает, что основная трудность, которую нужно было здесь преодолеть, носит не математический, а методологический характер: нужно было отойти от ориентации на определение смысла вероятности и задать систему требований, удовлетворяющих формальным свойствам этого понятия. Колмогоров демонстрирует здесь стиль мышления, основанный на глубоком понимании сути аксиоматического метода.

2. Предмет математики

Обосновательные идеи Колмогорова существенно обусловлены его взглядами на природу математического мышления. В начале статьи "Математика" он цитирует высказывание Ф. Энгельса в "Анти-Дюринге": "Чистая математика имеет своим объектом пространственные формы и количественные отношения действительного мира, стало быть – весьма реальный материал. Тот факт, что этот материал принимает чрезвычайно абстрактную форму, может лишь слабо затушевать его происхождение из внешнего мира. Но чтобы быть в состоянии исследовать эти формы и отношения в чистом виде, необходимо совершенно отделить их от содержания, оставить последнее в стороне как нечто безразличное" [4].

Взгляд на природу математики, выраженный здесь Ф. Энгельсом, называется эмпиризмом и имеет свое начало в философских воззрениях Аристотеля. У Аристотеля в основе понимания предмета математики лежит понятие отвлечения или абстракции. Согласно Аристотелю, геометр и исследователь чисел изучают отдельно то, что отдельно не существует. Физика, по его мнению, появляется тогда, когда исследователь отвлекается от всех качеств тел, кроме движения, математика же появляется тогда, когда исследователь отвлекается и от движения. Аристотелевский взгляд на математику оказался очень живучим. Мы видим его у Ньютона, Лобачевского, Римана, а также и у многих современных ученых.

Есть основания думать, что в других идеологических условиях Колмогоров не начал бы свою статью с цитаты Ф. Энгельса. Но, с другой стороны, у нас нет оснований думать, что эта цитата приведена им исключительно из тактических соображений. Анализ его общих работ позволяет заключить, что взгляд на математику, высказанный Ф. Энгельсом, был созвучен его собственному пониманию природы математического мышления. Эмпирическое воззрение на природу математики декларировалось им неоднократно и в тех случаях, которые не требовали обязательного выражения философской позиции. Эмпирическое понимание математики является, вообще говоря, естественным для ученого, который видит в математике орудие исследования природы. Оно соответствует и основной традиции отечественного методологического мышления. Мы можем вспомнить в этой связи о позиции Н.И. Лобачевского, который все математические теории, включая и свою “воображаемую геометрию”, рассматривал как средство для описания существующего или возможного опыта.

Колмогоров фиксирует то положение, что в 19-м столетии математика перешла к абстрактным структурам, которые уже не могут быть поняты в качестве прямого отображения количественных или пространственных отношений реальности. К количественным отношениям поэтому могут быть добавлены количественно-подобные отношения, а к пространственным формам – пространственно-подобные формы. Он считает, кроме того, что пространственные формы могут быть поняты в качестве частного случая количественных отношений и математика, таким образом, может быть определена как наука о количественных и количественно-подобных отношениях [5]. Если воспользоваться геометрическим образом, то все содержание математики, по Колмогорову, может быть представлено в виде круга, в центре которого находятся традиционные теории, непосредственно связанные с опытом, а периферия состоит из теорий, являющихся обобщениями и абстракциями исходных теорий.

Главная проблема понимания природы математики состоит, очевидно, в понимании природы ее центрального ядра. Здесь важно ответить на два вопроса: какие теории находятся в центре математики (вопрос о содержании ядра) и каков источник и механизм становления этих теорий (вопрос о генезисе ядра). Ответ Колмогорова на оба этих вопроса достаточно ясен: в центре математики находятся арифметика и элементарная геометрия, и эти теории сформировались на основе опыта и абстракции.

Здесь уместно сравнить взгляды А.Н. Колмогорова с концепцией Д. Гильберта. В воззрениях этих двух выдающихся ученых очень много общего. Оба они были убеждены, что математика – это одна из наук, необходимых для практики, и что теории, имеющие практическую ценность, не могут отвергаться на основе каких-либо умозрительных соображений. Оба они отрицательно относились к брауэровской критике классической математики. Однако в понимании предмета математики имеется существенное различие. Гильберт полагал, что центр математики имеет внеопытную, априорную природу. В статье "Познание природы и логика" он писал: "Философы и в самом деле утверждали, – и Кант был классическим представителем этой точки зрения, – что помимо логики и опыта мы обладаем еще и некоторыми априорными знаниями о действительности. Я допускаю, что уже для построения теоретических каркасов различных теорий некоторые априорные представления необходимы и что именно они всегда лежат в основе осуществления нашего знания. Я полагаю, что и математическое знание в конечном счете также основывается на некоторой разновидности такого созерцательного понимания, и что даже для построения арифметики нам необходима определенная априорная установка. ...Я полагаю, что по существу именно это и делается в моих исследованиях по основаниям математики. ...Однако граница между тем, чем, с одной стороны, мы обладаем априори, и тем, для чего, с другой стороны, необходим опыт, должна проводиться иначе, чем у Канта. Кант сильно переоценил роль и масштабы априорного. ...В кантовской теории априорного еще содержатся антропоморфные шлаки, от которых она должна быть очищена, и после того, как они будут удалены, останется лишь та априорная установка, которая лежит в основе чисто математического знания. По существу, она и есть та финитная установка, которую я охарактеризовал в ряде своих работ" [6].

Отличие Гильберта от Колмогорова состоит в том, что у Гильберта центр математики характеризуется по содержанию как финитная математика и он понимается как данный априори, но не как абстрагированный из опыта. Это расхождение в понимании предмета математики сказывается на отношении Колмогорова к гильбертовской программе обоснования и на представлении о перспективах обосновательных исследований. В статье "Современные споры о природе математики" (1929) Колмогоров пишет: "Наиболее уязвимым пунктом гильбертовской теории является то, что для доказательства непротиворечивости математических аксиом ему приходится построить новую дисциплину "метаматематику", и есть опасения, что в "метаматематике" возродятся все трудности, изгнанные из математики" [7].

Для Гильберта в метаматематике не может возникнуть никаких трудностей, ибо она финитна и, по определению, априорна, т.е. необходима для нашего сознания. Априорность некоторой части математики означает для Гильберта ее принадлежность к обосновательному слою, предельную надежность ее доказательств и неуязвимость для противоречий. С эмпирической точки зрения, которой придерживается Колмогоров, полной надежности не может быть ни в одной теории, и для самой метатеории необходимо возникает проблема обоснования ее непротиворечивости.

3. Путь к обоснованию математики

Если принять эмпирическое представление о природе ядра математики, а Колмогоров, как мы видим, твердо стоит на этой позиции, то проблема абсолютного обоснования математики, конечно, теряет смысл. Он, однако, не отказывается от самой идеи обоснования математики. Он не верит в абсолютный характер обоснования, но считает важным четкое выявление ее логического основания.

Еще один недостаток гильбертовской программы Колмогоров усматривает в понятии финитности. “С теоретико-познавательной стороны, – пишет он, – точка зрения Гильберта сводится к строгому ограничению конечным; все математические предложения, в которые так или иначе входит бесконечность, объявляются лишенными всякого смысла. Правда, с блестящим искусством Гильберт восстанавливает забракованные математические теории в виде формальной непротиворечивой игры символами. Все же этот выход, не дающий никакого объяснения, чем же держалась математика до настоящего времени, почему, высказывая о бесконечности суждения, не имеющие никакого смысла, математики понимали друг друга, — продиктован только неумением найти выход более удовлетворительный” [7]. Брауэровский подход представляется ему в этом отношении более предпочтительным, ибо Брауэр, “не пугаясь проблемы, обещает выяснить природу бесконечности”. Брауэровскую попытку обоснования, однако, он также не считает выполнимой.

Заключительный абзац этой статьи очень важен, ибо здесь содержится некоторый намек на возможный выход из трудностей. “Но позволительно сомневаться, что интуиция и конструкция новых образов, исходя из натурального ряда, окажутся при этом надежными руководителями. В частности, Брауэр изучает континуум в форме бесконечных последовательностей натуральных чисел, так как только в такой форме его естественно получить чисто логическими средствами. Исторически же идея континуума создавалась посредством идеализации действительно наблюдаемых непрерывных сред; пока трудно представить себе, как отсюда извлечь опору для развития математической теории, но только это было бы прямым путем к пониманию природы математического континуума” [7].

Идея Колмогорова состоит в том, чтобы обосновать континуум непосредственно, исходя из того соображения, что эта идея родилась из наблюдения сплошных сред. Это принципиально новый взгляд на проблему обоснования математики, ибо намечается возможность выйти за пределы арифметики, которая лежит в основе как формалистской, так и интуиционистской программ обоснования, привлечь новые, более богатые представления в качестве непосредственно данных. Необходимо принять идею континуума как связанную непосредственно с некоторым типом опыта, с наблюдением непрерывных процессов. С эмпирической точки зрения аргумент представляется вполне приемлемым: если понятие числа, взятое из опыта, может быть положено в основу построения математики, то почему эта роль при определенных ограничениях не может быть предоставлена понятию континуума?

Примерно в это же время близкая идея выдвигалась Г. Фреге. Как это видно из его рукописей, изданных в 60-х годах, он разочаровался в логике и арифметике как достаточной базе для обоснования математики в целом. В первый период своей деятельности он, как известно, отвергал эмпирические и геометрические интуиции как не вполне надежные. Теперь он считает, что "арифметика и геометрия выросли на одной и той же почве, так что вся математика есть, собственно говоря, геометрия" [8]. Геометрическая интуиция богаче, чем арифметическая, ибо она содержит в себе идею континуума. Фреге дает схему нового подхода к обоснованию математики, исходя из геометрического понимания ее основы. В заметках, относящихся к этому периоду, мы видим набросок такого подхода, который сводится к тому, чтобы подойти к обоснованию арифметики и других числовых систем, исходя из геометрической интерпретации комплексных чисел. Из непротиворечивости теории комплексных чисел, оправданной на основе геометрической очевидности, должна следовать, по его мнению, безусловная непротиворечивость аксиоматики действительных и натуральных чисел. Математика, таким образом, обосновывается у Фреге на основе геометрического континуума, взятого в качестве исходного представления.

Идея Фреге, насколько известно, не получила практической разработки. Аргумент здесь простой и на первый взгляд неотразимый: нельзя в основание математики класть представления, с которыми связаны парадоксы. Это же возражение имеет силу и в отношении идеи Колмогорова использовать факт непрерывности реальных процессов для обоснования непрерывности математической. Трудности усугубляются здесь тем обстоятельством, что предлагается осуществить обоснование математики на фундаменте, не принадлежащем этой науке. Получается, что для обоснования истинности наших представлений о континууме мы должны обратиться к анализу физической непрерывности и механизмов формирования соответствующего математического понятия. Понимание этих трудностей, конечно, и заставляет Колмогорова говорить, что пока не видно путей, каким образом представление о реальной непрерывности может быть использовано для логического обоснования математических теорий, включающих в себя понятие непрерывности.

4. Понятие величины как логический фундамент математики

Хотя Колмогоров не говорит в явном виде о предлагаемой им новой программе обоснования математики, некоторые контуры такой программы намечаются им при анализе понятия величины. Величина – это понятие, к которому Колмогоров возвращался неоднократно. Известно, что первая его работа, относящаяся к 1923 году, уже содержит аксиоматику величины [9]. С некоторыми изменениями он приводит эту аксиоматику в БСЭ, в статье “Величина”. Идеи, связанные с понятием величины, обсуждаются им в предисловии к книге А. Лебега “Об измерении величин” (1938). Идея величины детально разрабатывается в книге “Введение в анализ” (1966) и в ряде статей, опубликованных в журнале “Математика в школе”. Этот непреходящий интерес к понятию величины имел в своей основе две задачи. Во-первых, Колмогоров стремился в максимальной степени выявить, так сказать, естественное соподчинение исходных понятий математики. Он упрекает Лебега в том, что величина определяется у него через число, в то время как само число понимается как результат измерения величин. Колмогоров считает, что понятие величины первично и что оно должно быть введено посредством системы аксиом до определения числа и какого-либо измерения вообще. Очевидно, что он считает возможным применить к понятию величины тот же абстрактно-аксиоматический метод определения, который он применил к определению понятия вероятности. Второй мотив, который присутствует в этом постоянном стремлении к прояснению понятия величины, – это интерес собственно обосновательный. Аксиомы величины даны нам с той же степенью очевидности, как и аксиомы арифметики, но они значительно более богаты по содержанию, поскольку содержат в себе представление о непрерывности и актуальной бесконечности. В аксиоматике величины Колмогоров видел систему представлений более общую, чем арифметика или геометрия, такую, которая может играть роль логической основы для развертывания основных математических теорий.

В небольшой книге “Введение в анализ” (1966) он обосновывает тот факт, что традиционное определение множества действительных чисел через десятичные дроби и определение их на основе понятия величины изоморфны, и, таким образом, аксиоматика величины достаточна для систематического построения теории вещественных чисел, а следовательно, и для систематического введения понятий математического анализа. Действительное число может быть определено в этом случае как монотонный аддитивный оператор на системе скалярных величин [10].

В 30-х годах прошлого века П. Бернайс сформулировал некоторый критерий успешной или состоявшейся программы обоснования математики, который сводится к тому, что любая такая программа должна быть способной обосновать математический анализ. Смысл критерия достаточно ясен. Математический анализ – центральная дисциплина современной математики, являющаяся идейным истоком большинства существующих математических теорий и основой большей части приложений математики. Программу, обосновывающую анализ, но не принимающую некоторых предпосылок теории множеств типа аксиомы выбора и т.п., можно с этой точки зрения считать успешной, обосновывающей математику в ее основе. Ясно, что ни одна из традиционных программ обоснования математики не удовлетворяет условию Бернайса. Если же аксиоматика величины оказывается достаточной для обоснования математического анализа, что доказывает Колмогоров, то мы имеем основание говорить о программе обоснования математики по Колмогорову, которая базируется не на арифметике, не на геометрии, не на логике, но на понятии величины. Эта программа соответствует общему замыслу Колмогорова построить математику на основе принципа непрерывности как обоснованного наблюдением реальных процессов.

Возможность эффективной программы обоснования, базирующейся на понятии величины, представляется вполне реальной. Понятие величины обладает особыми качествами. Это общее понятие, которое, однако, полностью представляется геометрическим понятием длины отрезка. Все аксиомы величины, кроме аксиомы непрерывности, даны нам в аподиктической очевидности и не вызывают сомнения в своей полной логической совместности. Таковы аксиомы существования суммы и разности величин, ассоциативности и коммутативности сложения и т.д. Что касается аксиомы непрерывности, то она не может внести противоречия в систему вследствие своей очевидной независимости от других аксиом. В понятии величины, мы, таким образом, имеем надежную базу для обоснования центральных разделов математики.

Нас, однако, должно смутить здесь то обстоятельство, что, настаивая на преимуществе предлагаемого им подхода к изложению анализа, Колмогоров нигде не квалифицирует его как подход к *обоснованию* анализа. Он рассматривает применение аксиоматики величины к изложению анализа только как способ более адекватного теоретического представления этой теории, но не как доказательство ее непротиворечивости.

Этот момент трудно объяснить. Можно, однако, с большой вероятностью предполагать, что отсутствие претензии на обоснование анализа проистекает у Колмогорова из его эмпирической установки и из проистекающего из нее скептического отношения к возможности абсолютного обоснования математики. Эмпирическая концепция величины, трактующая это понятие как взятое из наблюдения реальных процессов, и эмпирическая философия математики вообще не позволяют считать аксиоматику величины в качестве заведомо надежной системы утверждений, не нуждающейся в доказательстве непротиворечивости. В отличие от Гильберта, Колмогоров не допускал существования внутри математики слоя априорных, неколебимых и заведомо непротиворечивых систем утверждений. Любая метатеория, сколь бы ограниченной она ни была, с его точки зрения, возрождает проблему обоснования, поставленную для теории. С этой точки зрения, всякое обоснование математической теории является обоснованием относительным, оно может состоять только в прояснении принципов, достаточных для систематического представления наличного содержания этой теории.

Подходы к обоснованию математики у Гильберта и у Колмогорова существенно различны. Гильберт исходит из допущения априорной основы математики, он определяет ее через финитность и пытается на основе финитной математики доказать непротиворечивость теорий, содержащих трансфинитные элементы. Финитная математика оказалась, однако, недостаточной для этой цели. Колмогоров выдвигает на первый план понятие величины, показывает достаточность аксиоматики величины для систематического представления математического анализа, понимая это, однако, только как способ его более адекватного теоретического представления. Интересы истины требуют соединения этих подходов. Колмогоров нашел, по-видимому, наиболее адекватное понятие, достаточное для обоснования анализа и, следовательно, для построения эффективной программы обоснования математики. Это понятие величины. Если это так, то наша задача состоит в том, чтобы заменить финитную математику Гильберта аксиоматикой величины Колмогорова и попытаться затем обосновать априорный и, следовательно, безусловно надежный характер этой аксиоматики. Иначе говоря, мы должны перейти от эмпирических представлений о статусе величины к пониманию ее априорного статуса.

С точки зрения традиционного априоризма понятие величины – одно из глубинных представлений сознания, и мы имеем основание думать, что система аксиом, определяющих это понятие, также носит априорный и, безусловно, непротиворечивый характер. Принимая понятие величины в качестве исходного, мы не должны трактовать его как понятие, взятое из наблюдения реальных процессов. Мы должны оставить прямолинейный эмпиризм и обосновать права априористской точки зрения. Мы должны исходить из того, что в структуре математического мышления существует система предельно надежных представлений, которая определяет абсолютно надежные доказательства и абсолютно непротиворечивые системы. Арифметика непротиворечива не потому, что мы можем убедиться в этом факте посредством логического анализа, а по той причине, что все ее аксиомы обладают онтологической истинностью, что они даны нам как общезначимые и продиктованные структурой мышления. Аксиомы, определяющие понятие величины, в той же мере обладают аподиктической очевидностью обосновательного слоя, что и аксиомы арифметики, и мы имеем основание думать, что изложение анализа на основе понятия величины является одновременно и его абсолютным обоснованием.

В первом томе своих избранных работ Колмогоров пишет по поводу статьи "О принципе tertium non datur" следующее: "Построение в рамках интуиционистской математики различных разделов классической математики должно было служить для обоснования их непротиворечивости (непротиворечивость интуиционистской математики при этом считалась следствием ее интуитивной убедительности)" [11]. Переход от интуитивной убедительности к логической надежности – это гильбертовская или брауэровская установка, но, конечно, не установка эмпирической философии. В настоящее время именно этот путь и должен быть оправдан. Мы должны понять, что определенная часть представлений математики обладает априорностью, онтологической истинностью, особого рода интуитивной убедительностью и, как следствие, полной логической надежностью.

Для реализации идеи величины в качестве базы абсолютного обоснования математического анализа и математики в целом следует выполнить два условия. Во-первых, необходимо показать, что аксиоматика величины достаточна для обоснования исходных принципов математического анализа. Во-вторых, необходимо обосновать принадлежность аксиом величины к обосновательному слою, т.е. к априорной части математики. Если первая задача носит математический характер, ее успешность зависит от выбора аксиом и логики дедукции, то вторая задача является эпистемологической, основанной на разделении априорных и апостериорных компонентов знания. Представляется, что в настоящее время обе эти задачи могут быть разрешены. В этом случае программа обоснования математики на базе понятия величины, намеченная, так сказать, пунктиром в рассуждениях А.Н. Колмогорова, могла бы стать реальным разрешением трудностей, которые волнуют математиков и философов после обнаружения парадоксов в теории множеств.

Библиографический список

1. *Колмогоров А.Н.* О принципе tertium non datur // Колмогоров А.Н. Избранные труды. М., 1985. Т. 1. С. 45–69.
2. *Успенский В.А., Плиско В.Е.* Интуиционистская логика // Колмогоров А.Н. Избранные труды. М., 1985. Т. 1. С. 398.
3. *Колмогоров А.Н.* К истолкованию интуиционистской логики // Там же. С. 142–148.
4. *Маркс К., Энгельс Ф.* Сочинения. 1961. Изд. 2. Т. 20. С. 37.
5. *Колмогоров А.Н.* Математика // БСЭ. М., 1954. Т. 26. С. 475–476.
6. *Гильберт Д.* Познание природы и логика // Гильберт Д. Избранные труды. М., 1998. Т. 1. С. 461–463.
7. *Колмогоров А.Н.* Споры о природе математики // Научное слово. 1929. № 6. С. 54.
8. *Frege G.* Posthumous writings. Chicago University Press, 1974. P. 221–224.
9. *Колмогоров А.Н.* Понятие числа и величины // Историко-математические исследования. 1990. Вып. 32–33. С. 474–484.
10. *Колмогоров А.Н.* Введение в анализ. М., 1966. С. 14.
11. *Колмогоров А.Н.* К работам по интуиционистской логике // Колмогоров А.Н. Избранные труды. М., 1985. Т. 1. С. 393.

О роли строгости в преподавании математики и математическом творчестве: взгляды А.Н. Колмогорова и В.И. Арнольда

С.Н. Бычков

В последнее время В.И. Арнольдом развивается взгляд на математику как часть теоретической физики [1, 2, 3]. Этот подход позволяет критиковать "бурбакизм", рассматривающий математику как вывод логических следствий из аксиом, одновременно как в области самой теоретической математики, так и в ее преподавании: "... доказательства всегда играли в математике совершенно подчиненную роль, примерно такую, как орфография или даже каллиграфия в поэзии. Математика, как и физика, – экспериментальная наука, и сознательное сложение дробей $1/2$ и $1/3$ – стандартный элемент общечеловеческой культуры" [2. С. 1323]. Как известно, первыми крупными работами В.И. Арнольда были работы в области чистой математики (13-я проблема Гильберта и КАМ-теория[1]), поэтому пропагандируемые в последние годы взгляды выглядят плодом зрелых размышлений выдающегося математика. Тем неожиданней было узнать из воспоминаний ученого, что проблема математической строгости была предметом дискуссии с А.Н. Колмогоровым еще в переписке 1958 г. Отвечая на письмо ученика, Андрей Николаевич пишет: "Теперь немного о Ваших нападках на меня...

...Я считаю формальную строгость *обязательной* и думаю, что в конечном счете после большой (и обычно *полезной* для окончательного понимания) работы она всегда может быть соединена (при изложении *важных*, т.е. по сути дела *простых* результатов) с полной простотой и естественностью. Единственное средство добиться осуществления этих идеалов, это строго требовать логической отчетливости даже там, где она пока обременительна.

[1] Отнесение теории малых знаменателей из области математической физики в раздел физической теории предполагает оценку влияния на устойчивость планетной системы релятивистских эффектов, что во время создания теории специально не рассматривалось.

…*Я* никогда не имел времени (или энергии) писать как следует. Разнообразие моих математических и нематематических занятий…несколько извиняет такое положение дел, но я сам всегда хорошо понимаю, насколько я плохо и отрывочно все излагаю. Вот отсюда (из Франции – *С.Б.*) я привезу для публикации и по-французски, и по-русски несколько образцовых педагогических писаний" [4. С. 163].

Данное обстоятельство в своих воспоминаниях отметил и В.И. Арнольд: "Живой интерес к предмету своих занятий сохранялся у Андрея Николаевича, по его словам, только до тех пор, пока было неясно, в какую сторону вопрос решается ("как будто идешь по острию бритвы"). Как только ситуация прояснялась, Андрей Николаевич старался как можно быстрее отделаться от писания доказательств и начинал искать, какому бы подмастерью отдать всю область. В такие моменты следовало держаться от него подальше.

В развитии каждой области науки можно различить три стадии. Первая – пионерская, это прорыв в новую область, яркое и обычно неожиданное открытие, часто опровергающее сложившиеся представления. Затем следует техническая стадия – длительная и трудоемкая. Теория обрастает деталями, становится труднодоступной и громоздкой, но зато охватывает все большее число приложений. Наконец, в третьей стадии появляется новый, более общий взгляд на проблему и на ее связи с другими, по-видимому, далекими от нее вопросами: делается возможным прорыв в новую область исследований.

Для математических работ Андрея Николаевича характерно то, что он явился пионером и первооткрывателем во многих областях, решая порой двухсотлетние проблемы. Технической работы по обобщению построенной теории Андрей Николаевич старался избегать... Зато на третьей стадии, где надо осмыслить полученные результаты и увидеть новые пути, на стадии создания фундаментальных обобщающих теорий Андрею Николаевичу принадлежат замечательные достижения" [4. С. 149–151].

В работе [5], где В.И. Арнольд анализирует характер естественно-научного мышления А.Н. Колмогорова, проводится мысль, что вполне объяснимое стремление к строгости изложения в написанных под его руководством школьных учебниках, по сути, оказалось в противоречии со складом творческого мышления ученого. С этим мнением вполне можно было бы согласиться, если бы не недавно опубликованное свидетельство самого Андрея Николаевича из его переписки с П.С. Александровым 1942 г.: "... Все последние годы... меня продолжает мучить **проблема точного изложения мыслей**. ... Эти мои страдания начались с писания нашей "Алгебры" в 1937 г. и **отзыва о тебе** в 1938-м. С тех пор эти мучения забирают значительную часть моей нервной энергии. Даже письма я пишу по нескольку раз. . .

В отвлеченных (теоретико-множественных) частях современной математики достигнута **точность** (не **строгость** доказательств, а просто точность самих формулировок), которая еще весьма упорно не удается не только в психологии или философии, **но и в любой прикладной математической науке** (пресловутые споры об определениях силы, массы и т.п.). При "математизировании" любой подобной области трудность может быть обойдена путем создания аксиоматики, но тогда остается проблема интерпретации" [6. Кн. II. С. 559].

Если для В.И. Арнольда отход от принятой в физике схемы "наблюдение – модель – исследование модели – выводы – проверка наблюдениями" в пользу господствующей в дедуктивно-аксиоматической математике схемы "определение – теорема – доказательство" способен принести лишь вред как преподаванию, так и практической деятельности [1. С. 232], то А.Н. Колмогоров более осторожен в оценке соотношения принятых в физике и математике способов рассуждений.

Согласно Колмогорову, "и математики, и физики исследуют конкретные явления природы, которые безусловно едины в своей основе. Но подход математика и физика к изучению явления различен. . .

Суть различия между подходами к делу математика и физика популярно можно объяснить так. И тот, и другой отправляются от некоторого запаса наблюдений, создают схематические модели реальных явлений. Математик, взявшись за изучение такой модели, изучает последовательно все следствия из положенных в основу модели допущений, хотя бы они далеко выходили за рамки исходных наблюдательных данных. Физик проверяет соответствие модели новым наблюдениям и при обнаружении расхождений переключается на создание более гибкой модели, содержащей первоначальную лишь в качестве первого приближения. Раскрыть все пути плодотворного сотрудничества математиков и физиков и является увлекательной задачей межпредметных связей" [7. С. 17].

Мы видим, таким образом, момент противопоставления физического и математического мышления в подходе А.Н. Колмогорова (отсюда и указание на недостаток точности в прикладных математических науках) и сознательное игнорирование существенных различий между "настоящей" – не аксиоматической – математикой и (теоретической) физикой в концепции В.И. Арнольда.

Никакими формально-логическими рассуждениями разрешить спор между приведенными концепциями, естественно, невозможно, поэтому попробуем сначала подвергнуть анализу примеры, приведенные В.И. Арнольдом в [3] в поддержку своих взглядов.

В первом примере излагается дискуссия между Я.Б. Зельдовичем и Л.С. Понтрягиным касательно роли теории пределов в обосновании понятия производной. Согласно Зельдовичу, допустимо определять производную функции как величину отношения приращения функции к приращению аргумента, когда последнее достаточно мало. На малых интервалах структура физического пространства (или времени) не соответствует математической модели теории вещественных чисел вследствие квантовых эффектов. Так как находить отношения конечных приращений трудно, то для них были придуманы приближенные асимптотические формулы, которые математики и называют пределами и математическими производными. После длительного обсуждения Понтрягин согласился с возможностью изучать и применять анализ, не прибегая к его полному логическому обоснованию [3. С. 4–5].

Второй пример касается роли теоремы единственности для обыкновенных дифференциальных уравнений в задачах спутниковой баллистики. В предположении справедливости этой теоремы время мягкой посадки космического корабля на Луну (при регулировании посадки на основе принципа гладкой обратной связи) было бы бесконечным. Поэтому из-за работающей здесь против нас теоремы единственности космические станции, спускаемые на Луну или планеты, снабжены демпфирующими треногами с суставами, и некоторое время они должны при посадке попрыгать на этих треногах, пока непогашенная энергия не будет диссипирована в процессе изгибания колен ног треноги [Там же. С. 5–6].

Даже поверхностный анализ этих содержательных примеров, несомненно, малоприятных для адептов аксиоматического подхода, показывает, что они хорошо вписываются и в концепцию А.Н. Колмогорова.

Приемлемость анализа бесконечно малых в физике не вызывала сомнений до создания квантовой механики. Осознание неадекватности математических идеализаций природе пространства-времени вынуждает физиков создавать новые модели, даже если расхождение выводов теории с конкретным экспериментом и нельзя однозначно приписать использованию аппарата бесконечно малых величин.

Случай с теоремой единственности еще лучше вписывается в колмогоровскую концепцию: под сомнение ставится не сама по себе теорема, а адекватность ее применения в задачах управления посадкой. В результате вместо модели мягкой посадки создается новая математическая модель, описывающая жесткую посадку космической станции на Луну.

Видимое противоречие между логическими установками Колмогорова-ученого и Колмогорова-педагога, думается, вызвано не какими-то недостатками общеметодологической концепции Андрея Николаевича, а гораздо более прозаическими обстоятельствами.

Колмогоров, в отличие от Бурбаки, не противопоставлял математику наукам, изучающим окружающий чувственно воспринимаемый мир. Поиск *причин* справедливости того или иного математического утверждения (будь это теорема или контрпример к казавшейся правдоподобной гипотезе) приводит к непоколебимой интуитивной убежденности в собственной правоте. Ясно, что кратчайшим способом убеждения коллег по профессии в справедливости полученного результата является формальное доказательство, получаемое введением надлежащих общих определений и построением соответствующей “родовидовой” цепочки утверждений[1]. Вместе с тем, однако, ясно также, что написанное доказательство является доказательством “для других”, а самому по-прежнему более понятным остается первоначальное рассуждение, опирающееся на накопленные многолетним трудом “индивидуальные интуиции”.

В тех редких случаях, когда получен действительно фундаментальный результат[2], вскрывающий остававшиеся ранее не замеченными глубокие связи между различными математическими понятиями, затраты времени на поиск простого и естественного доказательства вполне окупают себя, так как представляют в данной конкретной ситуации ту самую третью стадию исследований, на которой “появляется новый, более общий взгляд на проблему и на ее связи с другими, по-видимому, далекими от нее вопросами”. Если же решенная проблема представляет главным образом “спортивный” интерес, то написание формального доказательства оказывается, по существу, завершением проделанный работы и приносит положительные эмоции лишь при наличии мощного “внематематического” стимула (как это было, например, в случае с 13-й проблемой Гильберта).

В учебник отбирают всегда не “спортивные” (типа Последней теоремы Ферма), а *важные* результаты. Поэтому проблема “естественного изложения” выходит здесь на первый план и представляет собой глубоко нетривиальную, в том числе и в научном отношении, задачу. Этим, видимо, объясняются многолетние размышления А.Н. Колмогорова над понятием величины как логическим основанием построения математического анализа [8].

В заключение рискнем высказать соображения по поводу возможной оценки концепции В.И. Арнольда со стороны А.Н. Колмогорова, если бы Владимир Игоревич стал развивать свою концепцию еще при жизни учителя.

В цитировавшемся ранее письме П.С. Александрову Андрей Николаевич противопоставляет точность формулировок теоретико-

[1]Излишне разъяснять, что категории причинности не место в математике формализованных текстов.

[2]А.Н. Колмогоров считает важные результаты *простыми*.

множественной математики неопределенности понятий физики. Это не означает признание Колмогоровым невозможности давать точные формулировки вне математики (далее в письме он как раз пишет о мечтах продолжить работу Э. Гуссерля в этом направлении [6. Кн. II. С. 560]), но с конкретно-исторической точки зрения проблема точности формулировок в физике и на сегодняшний день далека от решения. В то же время евклидова геометрия на протяжении тысячелетий являлась образцом точности для остальных наук, и эту особую роль геометрии в школе Колмогоров не мог игнорировать. Этим, видимо, и объясняются надежды, возлагавшиеся А.Н. Колмогоровым на теорию множеств как язык обновленного школьного курса геометрии.

Если строго следовать идее изложения геометрии как части теоретической физики, то даже учебник А.П. Киселева не будет в полной мере удовлетворять подобному критерию. Например, хотя формула объема пирамиды и может быть сформулирована в рамках наглядных физических представлений, ее доказательство предполагает возможность деления отрезка на сколь угодно большое число равных частей, что невозможно строго обосновать без геометрических аксиом. Здесь придется выбирать одно из двух: либо строго доказывать формулу с привлечением соответствующих аксиом, либо рассматривать ее как экспериментальный факт, в пользу которого можно привести правдоподобные соображения эвристического характера.

Первый подход неизбежен, если геометрия рассматривается как теоретическая математическая дисциплина. Второй вполне допустим, если эту науку в соответствии с этимологией рассматривать как прикладную дисциплину. Вообще говоря, в превращении землемерия в теоретическую науку не было объективной необходимости, хотя в конкретно-исторических условиях Древней Греции это не могло не произойти [9]. Несмотря на то, что данное обстоятельство естественно укладывается в рамки принадлежащей А.Н. Колмогорову концепции возникновения дедуктивной математики [10], сам Андрей Николаевич в конкретных условиях школьной реформы ни за что не пошел бы на серьезную перестройку самого фундамента геометрической науки, что предполагает концепция В.И. Арнольда. Степень инерции взглядов педагогического сообщества настолько велика, что единственно возможным способом осуществления школьной реформы мог быть только опыт лучших, по мнению Колмогорова, учебников, написанных самими школьными педагогами. А.Н. Колмогоров предполагал в дальнейшем совершенствовать реформированные школьные курсы, и не исключено, что им самим были бы сделаны шаги в сторону приближения курса геометрии к “реальному миру”, т.е. произошло бы сближение его подхода и подхода В.И. Арнольда. Так как История не предоставила великому ученому этого шанса, то гадать, насколько значительным могло бы быть подобное сближение, – занятие неблагодарное.

Библиографический список

1. *Арнольд В.И.* О преподавании математики // Успехи математических наук. 1998. Т. 53. Вып. 1. С. 229–234.
2. *Арнольд В.И.* Математика и физика: родитель и дитя или сестры? // Успехи физических наук. 1999. Т. 169. № 12. С. 1311–1323.
3. *Арнольд В.И.* Что такое математика? М., 2004.
4. *Арнольд В.И.* Об А.Н. Колмогорове // Колмогоров в воспоминаниях / Под ред. А.Н. Ширяева. М., 1993. С. 144–172.
5. *Арнольд В.И.* Новый обскурантизм и российское просвещение. М., 2003.
6. Колмогоров. Юбилейное издание в 3-х кн. / Ред.-сост. А.Н. Ширяев. М., 2003.
7. *Колмогоров А.Н.* Диалектико-материалистическое мировоззрение в школьных курсах математики и физики. [Текст доклада на IV пленуме Ученого методического совета Министерства просвещения СССР] // Квант. 1980. № 4. С. 15–18.
8. *Перминов В.Я.* Проблема обоснования математики у А.Н. Колмогорова // Ст. в наст. сб. С. 9–24.

9. *Бычков С.Н.* Египетская геометрия и греческая наука // Историко-математические исследования. Вторая сер. М., 2001. Вып. 6 (41). С. 277–284.

10. *Бычков С.Н.* Математика как теоретическая наука и как учебная дисциплина //Труды школы-семинара по проблемам фундирования профессиональной подготовки учителя математики. Посвящается 100-летию со дня рождения академика А.Н. Колмогорова. Ярославль, 2003. С. 32–48.

Математический практикум в школе им. А.Н. Колмогорова МГУ им. М.В. Ломоносова

В.В. Вавилов

Имена классиков, которые фигурируют в самом названии статьи, столь значимы для России и становления системы научных исследований, организации среднего и высшего образования, что ко многому обязывают. Оба – люди универсальных знаний, ученые-энциклопедисты, патриоты и гуманисты. Те семена, которые за два века до А.Н. Колмогорова посеял М.В. Ломоносов, взошли именно в Московском университете, основной традицией которого стал отбор талантов, создание условий для их развития, непосредственное участие в этом широкой научной общественности. Одно из самых плодотворных зерен – создание гимназии при Московском университете; М.В. Ломоносов так говорил об этом: “При университетах должна быть гимназия, без которой университет как пашня без семени. Здесь следует преподавать школьные предметы так, чтобы вышедшие оттуда должны быть способны приступить к занятиям высшего порядка в университетах”. Это зерно вновь заколосилось, когда по инициативе ведущих ученых страны – академиков А.Н. Колмогорова, И.К. Кикоина, И.Г. Петровского и при поддержке Академии наук в лице М.В. Келдыша – в 1963 году при МГУ была создана физико-математическая школа-интернат.

Школа была открыта и задумывалась она, прежде всего, как школа научного творчества для молодежи, куда на конкурсной основе принимались и принимаются сейчас школьники из Центральной России. Школа небольшая (около 350 учащихся) – в ней только десятые и одиннадцатые классы; имеется как двухгодичный цикл обучения, так и одногодичный. Специализаций обучения в настоящее время пять: физико-математическая, компьютерно-информационная, химическая, биологическая и биофизическая. Говоря о школе научного творчества, мы имеем в виду не только профилирующие дисциплины. Так, выступая на одном из заседаний педагогического совета, основатель школы А.Н. Колмогоров специально выделял эту учительскую задачу: *"Существенно, что здесь, в интернате, школьники приходят в соприкосновение с творческой мыслью. Это наш запрос, но по всем предметам!.. Метод работы – имитация научного исследования, шаг за шагом находить, вычислять нечто..., а не давать готовенькое..."*. В 1988 году на базе школы-интерната был организован Специализированный учебно-научный центр МГУ (куда вошла и школа), который стал самостоятельным структурным подразделением Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова со всеми его атрибутами: возникло звание "Учащийся Московского университета" с соответствующим удостоверением, правами и обязанностями, появились кафедры, ученый совет, выпускники школы при наличии рекомендации ученого совета Центра зачисляются в МГУ без экзаменов и т.д. Сама школа-интернат получила официальное название – школа имени академика А.Н. Колмогорова. Более подробно о ней, ее целях и задачах, о системе организации учебного и воспитательного процессов, об истории ее развития можно составить достаточно полное представление из работ [1–4, 13, 16, 36, 40] и многих других публикаций, ссылки на которые можно обнаружить в этих работах.

Школа им. А.Н. Колмогорова Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова обучает юношей и девушек, которые *любят учиться* и *уже проявили* стойкий интерес к углубленному изучению той или иной дисциплины. Ее основное предназначение состоит в создании условий для воспитания и развития у учащихся пытливого и творческого отношения к обучению, в подготовке их к обучению в вузе и к раннему приобщению к научной работе. Именно на это направлены основные усилия всего преподавательского коллектива и администрации школы.

В данной статье речь идет только об одной составляющей этой работы – о математическом практикуме, о его конкретных заданиях и некоторых методических вопросах, с ними связанных. При этом, говоря о математических экспериментах (различных заданиях практикумов), мы имеем в виду не только те вопросы постановки математического образования, где соприкасаются (или сливаются) математика и информатика, но и просто математику в чертежах, расчетах, графиках, схемах, построениях моделей, составлении таблиц, решении задач и т.д. Кроме того, преследуются и более серьезные цели: "привить вкус к конкретной, реальной математике, иллюстрировать наиболее тонкие теоретические разделы курса, показывать силу только что освоенных методов при решении практических задач" [4].

Задания практикума состоят из одной или нескольких ступеней: от очень конкретной до исследовательской. Начальная часть обязательна для всех учащихся, исследование – только для желающих; задания зачастую содержат темы творческого характера для проведения самостоятельных исследований. Довольно долго (1970–1988) в учебном плане школы был отдельный предмет, который так и назывался "Математический практикум"(и оценка за него заносилась в аттестат); при этом был предусмотрен один лекционный час в основной сетке расписания (на изложение теоретического материала и постановку заданий) и время на консультации и прием заданий (за основной сеткой). Все задания для учащихся индивидуальны, что достигается выбором значений исходных параметров; правда, в тех случаях, когда работа велика, класс разбивается на группы. Во времена чрезмерного увлечения "гуманитаризацией средней школы", введения в учебный план информатики вместо 12 часов в неделю на математику в сетке часов осталось только девять. На мой взгляд, это было серьезной ошибкой (и сейчас трудно исправимой) – в специализированной школе при МГУ такого уровня, с хорошими преподавателями, с хорошо организованными и согласованными курсами по естественным дисциплинам перенести изучение многих тем математических курсов за основную сетку занятий недопустимо. Уменьшение часов сказалось и на математическом практикуме. В настоящее время только отдельные преподаватели уделяют ему должное внимание с теми же исходными методическими установками. Попутно отметим, что программы по информатике содержат некоторую составляющую “вычислительного практикума”, но соответствующие задания служат несколько другим целям.

Это А.Н. Колмогоров со всей настойчивостью реализовал сначала в университете, а затем и в школе при МГУ такое нововведение в нашей стране. Он сам и руководил поначалу этими практикумами, сам придумывал новые постановки задач, используя при этом зачастую самые современные научные достижения. Именно такая конкретная и вычислительная работа (плюс постановка задач) при выполнении заданий математического практикума не на словах, а на деле показывает силу математических методов исследования в различных областях человеческой деятельности, осуществляет прикладную составляющую математического образования в школе и реализует межпредметные связи. Общие установки при создании математического практикума в школе А.Н. Колмогоров описывал так: “Часы математического практикума, проводящегося, в идеале, одновременно для всего потока (*в школе имелся тогда только физико-математический профиль; классы делились на потоки – в них работала одна группа преподавателей математики –* курсив автора статьи), используются частично для унификации требований к различным классам письменных работ, состоящих из серии задач обычного школьного типа. Но в основном эти часы отводятся для выполнения работ большого объема, требующих больших вычислений и чертежного оформления. Например, фактически осуществляется программа оценки числа π, после изучения в классе движения по циклоиде исследуются графически более сложные случаи сложения движений, находятся и изображаются графически системы дифференциальных уравнений последовательного радиоактивного распада... В проведении практикума участвуют преподаватели, работающие в классах, но отдельная небольшая группа преподавателей его организует и готовит для него материал” [9].

Расскажем сначала о заданиях тех практикумов, которые упоминает А.Н. Колмогоров в предисловии к книге [9], а потом и о некоторых других. Самый первый практикум был предложен А.Н. Колмогоровым на лекции по комбинаторике для учащихся (тогда) девятых классов и скорее являлся домашним упражнением на закрепление лекционного материала (следует иметь в виду, что лекции по математике у нас одночасовые и "сильно не разбежишься").

Практикум № 1

Задание. Сколькими способами можно отобразить множество из m элементов на множество из n элементов?

Сейчас такое задание МП у наших школьников может вызвать только улыбку, т.к. комбинаторная часть обязательного алгебраического курса в школе довольно насыщена и содержит такие задачи в качестве простых упражнений. Однако нужно иметь в виду, что это задание выдавалось в 1965–68 годах, когда основная масса учащихся еще практически не встречалась с комбинаторными задачами и понятием функции как отображения. Потом, давая такое задание, мы предполагали подведение его итогов с доказательством общей формулы, а также то, что дальнейшая группа комбинаторных задач на обязательных занятиях будет посвящена изучению отображений конечных множеств, изучению симметричных, рефлексивных и транзитивных отношений на конечных множествах и т.д.

Любопытно, что при получении задания ученику выдавался листок с подробно написанным решением такой задачи: "Альберт, Бобби и Смит хотят познакомиться (каждый) с одной из девушек: Дианой и Елен. При этом после состоявшегося знакомства оказалось, что с каждой из девушек кто-то познакомился. Каким количеством способов они могут познакомиться? Другими словами, сколько существует отображений множества из трех элементов на множество из двух элементов?".

Так что начался математический практикум в школе-интернате № 18 физико-математического профиля при МГУ с Альберта, Бобби, Смита, двух девушек и их желания познакомиться.

Число π

Задание. Найти приближенное значение числа π с точностью до 10^{-3}, проводя методом границ оценки на каждом шаге вычислений.

Это задание МП находится среди тех, на которых учащиеся знакомятся с техникой приближенных вычислений (абсолютная и относительная погрешности, верная цифра, правила для планирования приближенных вычислений с заданной точностью). Оно также одно из первых, которое подкрепляет тему "Действительные числа" в курсе математического анализа и служит пропедевтическим средством для получения в будущем правил для вычисления производных.

От учащихся требовалось получить три верных знака после запятой для числа π, используя периметры правильных вписанных и описанных многоугольников и формулы удвоения для их вычисления. При этом составлялись таблицы приближенных значений этих периметров с обоснованными оценками точности всех вычислений. При сдаче практикума учащийся должен был проявить умение уверенно работать с приближенными величинами. Основная трудность здесь состоит в том, что приходится находить квадратные корни с точностью, превышающей точность четырехзначных математических таблиц, общепринятых в школе (заметим, что никаких "механизмов" для приближенных вычислений не использовалось – все делалось "головой и руками").

Чтобы "оживить" этот числовой практикум (а школьники, в основной своей массе, не любят долгих арифметических вычислений, да еще и с известным ответом), заинтересовавшимся учащимся предлагалось уточнить расположение числа на интервале (p_n, q_n) с концами в уже вычисленных значениях периметров и численно проверить соотношение Х. Гюйгенса

$$\lim_{n\to\infty} \frac{q_n - \pi}{\pi - p_n} = 2,$$

которое порождает соответствующую приближенную формулу и позволяет, например, получить известные неравенства Архимеда, используя только правильные шестиугольники и двенадцатиугольники (а не девяностошестиугольники, как у Архимеда) – это производит очень сильное впечатление. Соответствующие числовые результаты позволяют сравнить и эффективности приближенных формул Архимеда и Гюйгенса. Сейчас такого практикума в школе нет, но в обязательном курсе геометрии на лекциях доказывается неравенство

$$p_n < \pi < r_n \quad (r_n = \frac{2}{3}p_n + \frac{1}{3}q_n),$$

означающее, что число π при любом n находится в первой трети интервала (p_n, q_n). В курсе математического анализа (иногда на лекциях, чаще – на упражнениях) затем показывается, что имеют место соотношения

$$2\lim_{n\to\infty} n^2(\pi - p_n) = \lim_{n\to\infty} n^2(q_n - \pi) = C_1, \quad \lim_{n\to\infty} n^4(r_n - \pi) = C_2,$$

где $5 < C_1 < 6$; $28 < C_2 < 29$.

Сопровождался этот практикум иногда и красивыми рисунками, когда на клетчатой бумаге при помощи 10 цветов (каждой цифре соответствовал свой цвет) закрашиваются в определенной последовательности квадратики, отвечающие знакам бесконечной десятичной дроби для числа π; на обложке журнала “Квант” аналогичная картинка показана на паркете из правильных шестиугольников, эскиз которой был выполнен одним из наших школьников. Отметим, что некоторые из учащихся аналогичные картинки строили и для других констант (правда, для этого нужно было сначала где-то найти их приближенные значения с достаточным числом знаков), а затем их пытались каким-то образом сравнить; одним из ответов на возникающие у них вопросы и предложения явилась заметка [23].

Сохранился полный текст, который сопровождал задание этого практикума в 1971 году и раздавался в классах. Приведем его здесь полностью:

“Каждый ученик получает номер, равный остатку от деления на 12 его номера в классном журнале. Номера 1–6 и 7–12 объединяются в “Шестерки” – бригады. Каждая бригада сдает письменный отчет.

Отчет должен содержать описание рассказанного на лекции метода и, в частности, вывод формулы

$$a_{2n} = R\sqrt{2-\sqrt{4-\frac{a_n^2}{R^2}}}$$

и оценки

$$\left|\pi - n\frac{a_n}{2}\right| < \frac{20}{n^2}\left(\frac{15}{n^2}\right),$$

удобочитаемые промежуточные вычисления и объяснение, почему ответ, полученный в результате приближенного вычисления, все-таки дает строгую оценку числа π:

$$n\frac{\overline{a_n}}{2} < \pi < n\frac{\overline{b_n}}{2}.$$[1]

Ученики с номерами k вычисляют p_n:

k	1		2	3		4	5		6
n		6,12			24,48			96,192	
k	7		8	9		10	11		12
n		8,16			32,64			128,256	

Тот, кто не попал ни в одну бригаду, может объединиться с номерами 7–12.”

Круговые циклоиды

Задание. Построить траекторию движения точки М подвижного круга радиуса r_2 , если он касается неподвижного круга радиуса r_1 внешним (внутренним) образом. Другими словами, построить эпициклоиду и гипоциклоиду при заданном отношении радиусов кругов.

Выполнение этого задания учащиеся начинают с самостоятельного вывода (из кинематических соображений) параметрического уравнения в виде

[1]Здесь $\overline{a_n}$, $\overline{b_n}$ – полученные в результате вычислений приближенные значения для сторон вписанных и описанных правильных многоугольников.

$$\overrightarrow{r(t)} = (r_1 + r_2)R^t(\overrightarrow{e}) + r_2 R^{\omega t}(\overrightarrow{e}),$$

где $\overrightarrow{e}$ – фиксированный вектор единичной длины и R^φ – поворот вокруг начала координат на угол φ. Для построения круговых циклоид используется так называемый метод шарнирного параллелограмма с применением методики, изученной при выполнении задания "Розы и розетки". В основе этой методики лежит приближенное построение по четырем точкам графика функции $y = \cos t$ на четверти периода; в точках 0, $\pi/8$, $\pi/4$, $3\pi/8$, $\pi/2$ значения косинуса с точностью до 0,1 легко запомнить – они равны 1; 0,9; 0,7; 0,4; 0 соответственно. Методика проста, эффективна и легко запоминается.

Для желающих предлагалось написать векторное уравнение трохоиды (траектория движения точки M, жестко связанной с катящимся кругом; например, когда точка M находится внутри круга) и привести графические примеры таких кривых.

Кривая (траектория), описываемая точкой M, жестко связанной с кривой Γ_2, катящейся без проскальзывания по другой, неподвижной кривой Γ_1, называется *рулеттой*. В качестве творческих заданий мы также предлагали исследовать рулетты, связанные с перекатыванием фигуры Γ_2 по фигуре Γ_1 в следующих случаях:

а) Γ_1 и Γ_2 – правильный многоугольник и отрезок (или наоборот);

б) Γ_1 и Γ_2 – правильные многоугольники (с одинаковым или различным числом сторон и, возможно, их разными длинами);

в) Γ_1 и Γ_2 – окружность и правильный многоугольник (или отрезок).

Во всех приведенных ситуациях существует много самых разнообразных вариантов. Интерес представляют замкнутые рулетты, типы которых в математической литературе в этих ситуациях не описаны.

Годографы

Задание. Дана вектор-функция

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r(t)} = at\overrightarrow{e} + R^{t+\alpha}(\overrightarrow{e}) + AR^{\omega t+\beta}(\overrightarrow{e}),$$

где значения параметров , α, A,ω,β заданы; $\overrightarrow{e}$ – единичный вектор, R^{φ} – поворот на угол φ вокруг начала координат.

а) Вычислить производные $\overrightarrow{r}'(t)$, $\overrightarrow{r}''(t)$ и провести аналитическое исследование вектор-функций $\overrightarrow{r}(t)$, $\overrightarrow{r}'(t)$, $\overrightarrow{r}''(t)$.

б) Построить годографы вектор-функции $\overrightarrow{r}(t)$, скорости $\overrightarrow{r}'(t)$ и ускорения $\overrightarrow{r}''(t)$; около точек годографа отметить отвечающие им значения t. Все указанные годографы расположить на двух-трех листах (миллиметровой) бумаги. Аналитическое исследование и вспомогательные чертежи дать на дополнительных листах. Масштаб следует выбрать так, чтобы все три годографа имели примерно одинаковые размеры.

В аналитическое исследование входит определение радиусов обводов годографов, исследование вектор-функции на периодичность и отыскание периода, отыскание осей симметрии, выяснение свойств поворотной и переносной симметрии годографов, отыскание особых точек. Вычерчиваются годографы по точкам, следует взять 15–20 точек на периоде поворотной или переносной симметрии.

Во-первых, отметим, что это задание математического практикума включает в себя практикум "Круговые циклоиды" – поэтому, как правило, они оба для одного потока обучающихся не используются. А если по каким-либо причинам все же выдавалось задание о циклоидах, то в этом практикуме мы рассматриваем только трансляционно-инвариантные годографы ("развернутые циклоиды": $a \neq 0$).

Более сложные задания состоят из построения

А) Так называемых *"циклоид Лагранжа"*

$$\overrightarrow{r}(t) = R^t(\overrightarrow{e}) + A_1 R^{\omega_1 t}(\overrightarrow{e}) + A_2 R^{\omega_2 t}(\overrightarrow{e}).$$

С подобного рода кривыми приходится сталкиваться в астрономии – при изучении одновременного движения трех тел, например, Земли, Луны и спутника Луны.

Б) "Разворачивающихся циклоид"

$$\overrightarrow{r}(t) = at^2 + R^t(\overrightarrow{e}).$$

Классификация кривых вида (А) и (Б) практически не разработана; исследование этих годографов – тема творческих заданий по данному математическому практикуму.

Радиоактивный распад

Задание. В результате радиоактивного распада атомы материнского вещества X превращаются в атомы вещества Y, а атомы вещества Y, в свою очередь, превращаются в атомы вещества Z. Количества атомов этих веществ, не распавшихся к моменту времени t, обозначим соответственно через $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$. Тогда эти количества связаны следующими уравнениями ($k_i = \ln 2/T_i$ – периоды полураспада веществ X, Y, Z) :

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = -k_1 x, \\ \frac{dy}{dt} = k_1 x - k_2 y, \\ \frac{dz}{dt} = k_2 y - k_3 z. \end{array}\right.$$

При начальных условиях $x(0) = a$, $y(0) = 0$, $z(0) = 0$ найти функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ и на одном листе миллиметровой бумаги построить их графики.

Определить t_0, при котором $y(t)$ максимально; выразить t_0 через T_1 и T_2.

Впервые такое задание МП появилось в декабре 1969 года для учащихся девятых классов (ныне десятых) в поддержку вводного курса математического анализа, который читал А.Н. Колмогоров. Школьники проучились в стенах школы всего три месяца и до поступления в школу ничего из анализа не знали. Само задание ориентировано больше на интуитивные представления об экспоненте и числе Непера, о понятии дифференциального уравнения и его решении. Преследовались также цели развития имеющихся у школьников графических представлений. (Графики строились по точкам с использованием логарифмических таблиц. Отметим, что самостоятельное построение небольших логарифмических таблиц было предметом отдельного практикума.) Число e вводилось в разные годы по-разному: иногда как основание показательной функции, у которой в нуле производная равна единице (в этом случае экспонента вводилась как одно из решений уравнения $x'(t) = x(t)$; именно такой подход затем был реализован в ряде школьных учебников); чаще сначала вводился натуральный логарифм как площадь под гиперболой (тоже с акцентом на интуицию), а затем уже возникала экспонента. Именно тогда возникли идеи введения комплексной экспоненты через известный предел, но вместе со строгим доказательством формулы Эйлера, которые впоследствии мастерски реализовал А.А. Егоров; до сих пор мы широко используем эту методику.

Модель "Хищник-Жертва"

Задание. Для экологической модели Лотки–Вольтерра

$$\begin{cases} x'(t) = -k_1 x - l_1 xy, \\ y'(t) = -k_2 + l_2 xy, \end{cases}$$

при заданных коэффициентах и самостоятельно выбранных различных начальных условиях $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, используя различные цвета, построить траектории движения точки $M = (x(t), y(t))$.

Этот практикум находится в серии заданий по теме "Дифференциальные уравнения". История его появления в 1972 году такова. Автор настоящих строк познакомился с этой классической моделью "хищник-жертва" и ее обобщениями во время пеших прогулок с А.Н. Колмогоровым в окрестностях его и П.С. Александрова дачи в Комаровке. Несколько раз затем эта тема обсуждалась уже в интернате, причем вместе с профессором В.М. Алексеевым, который в то время в школе читал лекции по математическому анализу и в университете активно занимался вопросами математической биологии. Тогда-то и было принято решение о создании практикума на "экологическую" тему (терминология в разговорах была различна: караси-щуки, овцы-волки, овцы-волки-охотники и т.д.). Для реализации этой идеи В.М. Алексееву пришлось прочитать на эту тему в вечерние часы две двухчасовые лекции (напомним, что в интернате основные лекции по математике одночасовые), которые проходили в актовом зале школы при самой широкой аудитории – присутствовали не только те, для которых это нужно было, чтобы выполнить задание МП. На этих лекциях было рассказано и о работе А.Н. Колмогорова, в которой в рамках модели "хищник-жертва" допускалась еще и конкурентная борьба хищников за жертву. Автор присутствовал на этих лекциях и довольно подробно их записал, подготовил конкретные задания, а затем в течение месяца реализовывал выполнение и прием самого математического практикума.

Для построения требуемых кривых учащимся рекомендовалась методика, непосредственно заимствованная из знаменитой работы В. Вольтерры, которая затем многократно использовалась в других заданиях МП. При сдаче этого задания от учащихся требовалось умение доказать замкнутость траекторий, закон периодического цикла и закон сохранения средних. В МП "Изоклины" мы еще раз возвращаемся к этой модели, но уже в плане приближенного построения интегральных кривых и с акцентом на наглядную классификацию особых точек для дифференциальных уравнений с дробно-линейной правой частью. Кроме того, в нашей школе невозможно обойтись без разъяснений научного вклада А.Н. Колмогорова в этой области, и поэтому, в частности, учащимся в качестве творческих заданий предлагалось на конкретных примерах проверить следующие результаты качественного характера: при различных соотношениях параметров соответствующей системы уравнений (модель "хищник-жертва" с межвидовой конкуренцией) система может обладать двумя или тремя особыми точками. Одна из них находится в начале координат фазовой плоскости и всегда является узлом. Две другие могут быть седлом либо устойчивым или неустойчивым фокусом и узлом. Если стационарная точка – неустойчивый фокус, то вокруг него могут существовать предельные циклы – устойчивые периодические колебательные решения.

В 1925 году А. Лотка выпускает книгу "Элементы физической биологии", в которой он, отталкиваясь от моделей химической кинетики, приходит к такой же системе дифференциальных уравнений, как и В. Вольтерра (и раньше его). Поэтому рассказы о работе Лотки, о задачах химической кинетики и реакции Белоусова–Жаботинского всегда сопровождают этот МП и создают определенную атмосферу поиска; так, например, по этой "химической теме” Р. Майоров в 1995 году не только повторил в стенах школы подобную реакцию, но и показал, что в соответствующей математической модели (им рассмотренной и разумной) имеется колебательное решение с особой точкой типа “устойчивый фокус”. По итогам этих исследований он занял I место на международной конференции школьников в г. Черновцы.

Кривые Уатта

Шарнирный механизм, о котором здесь идет речь, был предложен выдающимся английским изобретателем Джеймсом Уаттом в 1774 году, когда он работал механиком университета в Глазго и решал такую чисто практическую задачу по совершенствованию паровых двигателей: *как связать поршень с точкой махового колеса, чтобы вращение колеса сообщало поршню прямолинейное движение?*

Пусть $O_1A_1A_2O_2$ – трехзвенный шарнирный механизм, который состоит из трех прямолинейных стержней O_1A_1, A_1A_2 , A_2O_2 ($O_1O_2 = 2l, O_1A_1 = O_2A_2 = R$, $A_1A_2 = 2d$); при этом точки O_1 и O_2 закреплены, но все три указанных выше стержня могут вращаться вокруг точек O_1, A_1, A_2, O_2, т.е. во всех этих точках стержни соединены шарнирами (механизм Уатта).

Тщательно изучив движение середины M стержня A_1A_2, Д. Уатт, чисто эмпирически, определил параметры шарнирного механизма l, R, d, для которого кривая, описываемая точкой M, имеет “продолжительные” участки, незначительно отклоняющиеся от прямой линии.

Задание. Даны параметры плоского механизма Уатта: l, R, d.

1) При помощи циркуля и линейки построить кривые Уатта, описываемые серединой М стержня A_1A_2.

2) Определить длину L наибольшего участка каждой из построенных кривых, отличающегося от отрезка прямой менее чем на 5%; найти параметры l_0, r_0, a_0 механизма, которые давали бы подобный участок длины $L_0 = 0,3$ м.

Данное задание раздается учащимся сразу, как только они приступают к изучению темы “Функции и графики”, т.е. когда рассматриваются различные способы задания функций. При построении кривых Уатта используются две равные окружности с центрами O_1, O_2 и радиусом R: если точка A_1 расположена на первой окружности и для нее найдется точка A_2 второй окружности такая, что $A_1A_2 = 2d$, то точку M легко построить.

В качестве творческих заданий учащимся предлагалось найти уравнение кривой Уатта в декартовой и полярной системах координат; доказать, что существует всего 12 различных типов таких кривых (l – масштабный параметр), включая и вырожденные случаи. Кроме того, предлагалось изучить кривые, которые описывает точка M, не являющаяся серединой A_1A_2; изучить аналогичное семейство кривых для несимметричного механизма Уатта. Для очень активных учащихся предлагалось рассмотреть инверсоры Поселье, Гарта и дельтоид Кемпе, вплоть до общей теоремы о том, что для любой алгебраической кривой можно построить шарнирный механизм, состоящий из стержней, одна точка которого будет описывать данную кривую; такая теория важна в приложениях (луноход, роботы, станки и т.д.).

У этой темы богатая история, и рассказ об этом вызывает естественный интерес у школьников. Шарнирными механизмами много и плодотворно занимался замечательный русский ученый П.Л. Чебышев, который в связи с этими исследованиями разработал новый раздел теории функций – теорию наилучших приближений. Он собственноручно изготовил множество самых разнообразных шарнирных механизмов (соответствующие фотографии показываются учащимся): пресс, стопоходящую машину, гребную лодку и т.д.

Мензульная съемка на местности

Задание. При помощи планшета (горизонтальная доска с прикрепленным листом бумаги) и визирной линейки (два гвоздика на линейке), не производя никаких измерений реальных расстояний и углов, снять план местности в условном масштабе.

Провести оценку точности в определении положения некоторых точек на планшете.

Работа непосредственно примыкает к изучению преобразований гомотетии (подобия) в девятых классах массовой средней школы и большинству школьников представляется неожиданной и интригующей. Отметим, что практически все учебные пособия для массовой школы содержат задачи на измерение недоступного расстояния между доступными точками, измерение расстояния до недоступной точки, измерение расстояния между двумя недоступными точками и другие варианты этих задач, имеющих важное значение в реализации принципа совершенствования прикладной направленности учебных математических курсов в обучении. Это задание у нас в школе было особенно популярным в тот период, когда в нее поступали учащиеся на трехгодичное обучение (сейчас только двухгодичное).

Теоретические основы работы нашим школьникам хорошо известны, и поэтому важным элементом здесь является именно реальная задача на конкретной местности. В качестве реальных работ предлагались следующие: измерить расстояние от школы до видимого шпиля здания МГУ, снять план местности, где проходит общешкольная туристическая звездочка (Тучково, Дорохово,... в Подмосковье), снять план местности окрестностей, где проходила летняя школа для поступающих в нашу школу (Рубское озеро, 50 км. от г. Иваново) и некоторые другие. Об этой последней "картографической работе" со всеми подробностями, впечатлениями и эмоциями рассказано в книге [7]. Свою короткую заметку о математическом практикуме А.Б. Сосинский в одной из небольших брошюр о школе закончил впечатлениями об этом практикуме так: "...Вспоминаю холодный солнечный осенний день, группу ребят вокруг штатива с планшетом; где-то около интерната вдали виднеется шпиль университета, идет горячий спор о том, как лучше расположить базисный отрезок, куда наводить мензур. Мы тогда измеряли расстояние от интерната до университета.

Сейчас невольно думается, не произошел ли тогда квантово-механический эффект: в результате измерения не сократилось ли расстояние до университета?"

Графостатика

Для того, чтобы познакомить учащихся с алгеброй и геометрией скользящих векторов, без которых невозможно обойтись в построении физических курсов, мы и предлагаем это задание практикума. В обязательной программе курса по геометрии соответствующего раздела нет. Эта тема с интересом изучалась (также в "практическом исполнении") учащимися двух летних школ в г. Пущино на

Оке, организованных для желающих поступить в нашу школу.

Установочная лекция по этому заданию МП практически всегда начинается с цитирования известной басни И.А. Крылова "Лебедь, Рак и Щука". После такого литературного экскурса и рассказов на конкретных примерах о теории веревочного многоугольника голландского инженера С. Стевина и ее развитии в трудах французского ученого П. Вариньона, о расчетах мостов и сводов, которые проводили в России французские инженеры и ученые Габриэль Ламе и Бенуа Клапейрон, о применении этой теории в трудах швейцарских профессоров П. Кульмана и Дж. Максвела в расчетах опорных реакций и изгибающих моментов балок и ферм, о вкладе итальянского математика Л. Кремоны в графостатику, собственно, и рассказывать из теории (довольно простой) для выполнения этого любопытного и важного задания нечего. Более того, в 1985 году была опубликована в журнале "Квант" статья "Геометрия скользящих векторов" бывших преподавателей школы Ю.П. Соловьева и А.Б. Сосинского, в которой, по существу, изложены материалы одной из наших летних школ Пущино–80 и нашего практикума, проводимого в стенах школы. Ясно, что при обсуждении итогов практикума доказывалась правота Крылова – воз будет вращаться (при разумном выборе сил) вокруг некоторой точки и не сдвинется с места. Отметим, что каждый учащийся получает для расчетов свою ферму и свои наборы векторов.

Задание

а) Заменить данную систему скользящих векторов в пространстве на эквивалентную ей систему из меньшего числа скользящих векторов.

б) Построить веревочный многоугольник и найти равнодействующую данной системы скользящих векторов, расположенных в одной плоскости (т.е. определить направление и точку приложения).

в) При помощи диаграммы Максвелла-Кремоны графически определить реакции опор данной фермы и усилия в ее стержнях.

Группа изометрий

Задание. Описать группу изометрий для правильной прямой призмы и указать минимальное число образующих этой группы. Составить таблицу умножения в этой группе.

Пример выполнения этого задания для треугольной призмы можно описать так. Обозначим грани: 1 и 2 – основания, а 3,4,5 – боковые грани. Рассмотрим прямую, проходящую через центры оснований и обозначим через A поворот по часовой стрелке относительно этой прямой (оси) на угол $120°$. Через B обозначим преобразование симметрии пространства относительно плоскости, проходящей через боковое ребро призмы и центр противоположной грани. Наконец, рассмотрим симметрию C относительно плоскости, равноудаленной от плоскостей верхнего и нижнего оснований призмы. Тогда эти три преобразования (для вершин призмы) могут быть записаны так:

$$A = \begin{pmatrix} 12345 \\ 12534 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 12345 \\ 12435 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 12345 \\ 21345 \end{pmatrix}.$$

В искомой группе изометрий призмы эти преобразования являются образующими и представляют минимально возможное их число (при сдаче МП эти все утверждения школьниками обосновываются). Различных изометрий в группе всего 12:

$$G = \{E, B, A, AB, A^2, A^2B, C, CB, CA, CAB, CA^2, CA^2B\};$$

тем самым,

$$G = \left\{ \begin{matrix} \begin{pmatrix} 12345 \\ 12345 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12345 \\ 12435 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12345 \\ 12543 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12345 \\ 12543 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12345 \\ 12453 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12345 \\ 12354 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 12345 \\ 21345 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12345 \\ 21453 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12345 \\ 21534 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12345 \\ 21543 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12345 \\ 21543 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12345 \\ 21354 \end{pmatrix} \end{matrix} \right\}.$$

На основе этих данных составляется таблица умножения в группе G, которую здесь мы приводить не будем.

Многогранники

Задание. Дан чертеж (рисунок) полуправильного или правильного многогранника (см. книгу М. Венниджера “Модели многогранников”).

а) Начертить развертку этого многогранника.

б) Изобразить диаграмму Шлегеля (граф центральной проекции) данного многогранника.

в) Изготовить из плотной бумаги модель многогранника M (используя рецептуру из той же книги).

г) Раскрасить грани модели (и многоугольные области на диаграмме Шлегеля) в четыре цвета так, чтобы грани, имеющие общее ребро, были окрашены разным цветом.

д) Описать группу G_M вращений многогранника M: найти число ее элементов N_M; указать все типы осей поворотов (на рисунке многогранника и его модели), порядок осей и число осей каждого порядка.

Развертка, раскрашенная диаграмма и рисунок многогранника с указанными осями поворотов изображаются на основном листе в достаточно большом масштабе. Там же приводится таблица осей поворотов. Модель многогранника, в цветном исполнении, изготавливается одна на двух учащихся.

Развертка и диаграмма чертятся, по возможности, симметрично. Диаграмму удобно рисовать, имея перед собой уже изготовленную модель. Учащимся рекомендуется (для изучения группы вращений) сначала понять, как данный полуправильный многогранник связан с каким-либо правильным многогранником (на уровне подсказки – название многогранника). Нужные раскраски проводятся методом "проб и ошибок". Модель многогранника изготавливается по развертке или последовательно склеивается из граней.

Задание выдается одно на двоих учащихся. При этом мы предлагаем (в обязательной части) только платоновы и архимедовы тела: октаэдр, додекаэдр, икосаэдр, 4-угольная антипризма, усеченный октаэдр, усеченный куб, кубооктаэдр, ромбокубооктаэдр, псевдоромбокубооктаэдр Ашкинузе, усеченный кубооктаэдр, усеченный икосаэдр, усеченный додекаэдр, икосододекаэдр, ромбоикосододекаэдр, усеченный икосододекаэдр, курносый куб, курносый додекаэдр.

В качестве творческих (или дополнительных) заданий предлагалось перечислить все тела Пуансо и изготовить их модели; предлагалось также изучить вопрос о выпуклых параллелоэдрах –

также с изготовлением их моделей. Многие из учащихся выражают желание построить модели более сложных многогранников (одно время в школе была коллекция моделей всех полуправильных многогранников и их звездных форм и некоторых других. Жаль, что она со временем погибла). Сама тема и изготовленные руками школьников модели доставляют преподавателю много возможностей для любопытных и интересных исторических экскурсов.

Исторически этот МП возник из таких трех заданий первых лет существования школы (они имели порядковые номера 8, 9 и 10):

а) Найти двугранные углы полуправильного многогранника (точный ответ и приближенный ответ в градусах). Описать построение его проекции на плоскость. Описать группу вращений данного многогранника.

б) Построить проекцию додекаэдра на горизонтальную и вертикальную плоскости. Повернуть многогранник относительно "вертикальной" оси на 17° и спроектировать его на те же плоскости. Повернуть многогранник на 21° относительно "горизонтальной" оси и спроектировать его на те же плоскости. Натуральная величина ребра многогранника должна составлять 4 см.

в) Построить модель данного многогранника в произвольном масштабе.

Учащимся выдавался (и вывешивался для всеобщего обозрения) образец выполнения первых двух из этих заданий, а готовая модель додекаэдра практически всегда была под рукой в готовом виде (поэтому речь шла только о возможных способах изготовления модели).

Две проекции

Задание. а) Задана одна из одиннадцати возможных плоских мозаик (правильный паркет на плоскости). Построить ее параллельную и центральную проекции на другую плоскость, задав проекцию одного из правильных многоугольников. Полный каталог мозаик см. в [11].

б) Построить при помощи заданной параллельной и центральной проекций плоское изображение какой-либо фигуры, составленной из кубиков (самостоятельно придуманной!).

в) Построить центральную проекцию окружности на плоскость для трех различных случаев расположения центра проекции, соответствующих эллипсу, параболе и гиперболе. Для построения выбрать на окружности не менее 16 точек.

В каждом из заданий на основном листе оформляется итоговый результат работы с ясно выделенными элементами (с использованием различных цветов), определяющими (задающими) полноту изображения. На вспомогательных листах приводятся все (или многие) дополнительные и необходимые построения.

Первые два пункта задания нацелены на то, чтобы закрепить основные свойства параллельной и центральной проекций, понятие изображения фигуры и содержание теорем Польке-Шварца о проекциях треугольника и тетраэдра.

Третий пункт задания знакомит учащихся с определением кривой второго порядка как проекции окружности. Методика изготовления чертежей состоит в том, что, поворачивая плоскость, в которой находится проектируемая окружность, до совпадения с плоскостью изображения (поворот осуществляется вокруг линии пересечения), мы получаем задачу на построение, которая уже только при помощи одной линейки позволяет построить сколько угодно точек соответствующей кривой второго порядка.

Много раз вводную лекцию по этому заданию практикума читал А.Н. Колмогоров (широко известна фотография, которая имеется в школе, когда он как бы держит за вершину многогранник; снимок сделан в ФМШ примерно в 1970 году). На своей лекции, в частности, он обсуждал со школьниками следующую задачу: семь точек на плоскости общего положения являются образами семи вершин каркасного “кубоида” (многогранник типа куба, в котором, вообще говоря, нет различных параллельных сторон и граней) после некоторого центрального проектирования. Как при помощи только одной линейки построить точку, в которую проектируется восьмая вершина “кубоида”? Такой шестигранник и эту задачу мы использовали также при проведении МП “Сечения многогранников”. На занятиях геометрического кружка, которым руководил А.Н. Колмогоров, в этот период рассматривался вопрос о правильных паркетах; участниками кружка доказывалось (!), что таких различных паркетов ровно одиннадцать.

Алгоритм Евклида

Задание. а). На целочисленной решетке Z^2 отметить те ее узлы, координаты которых являются решениями уравнения вида $3x + 5y = c$ для различных значений c.

б) Построить фрагменты ломаных (в алгоритме "вытягивания носов"), которые соответствуют разложению в цепную дробь данного иррационального числа α, и на этом примере проверить (установить) три основных свойства подходящих дробей.

Этот интересный и важный практикум используется, как правило, не во всех классах. Акцент здесь делается на то, что алгоритм Евклида используется в математике не только для нахождения НОД двух чисел, но и в задачах разбиения прямоугольника на квадраты, для разложения чисел в непрерывные дроби. Общая же идея поиска общей меры находит потом еще одну реализацию в школьной программе обучения в курсе математического анализа при изучении бесконечных периодических и непериодических десятичных представлений, т.е. в теории действительного числа. Геометрический "носатый характер" этого древнего арифметического алгоритма на решетке (например, на клетчатой бумаге) был отмечен Ф. Клейном, а само это яркое название принадлежит нашему выдающемуся геометру Б.Н. Делоне, который эффективно использовал геометрические свойства алгоритма Евклида в ряде важных и трудных задач теории чисел.

Эти задания пользуются у учащихся значительным интересом, и поэтому не случайно, что несколько человек только в последнее время подготовили доклады для участия в школьных научных конференциях: "Равноугольные и равносторонние многоугольники на решетках и правильных паркетах", "Окружности на решетках" и т.д.

Латинские квадраты

Задание. а) Построить полные наборы ортогональных латинских квадратов порядков 3, 4, 5 и 7.

б) Изготовить цветную аппликацию для греко-латинского квадрата пятого порядка.

в) Построить шесть пучков параллельных прямых аффинной плоскости на двадцати пяти точках.

Латинским квадратом порядка n называется квадратная таблица, которая содержит в каждой строке перестановку элементов 1,2,...,n, и эти перестановки выбраны так, что ни один столбец не содержит повторяющихся элементов. Латинские квадраты (a_{ij}) и (b_{ij}) называются ортогональными, если все пары $(a_{ij},\, b_{ij})$ различны $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$. Пример двух ортогональных латинских квадратов порядка 3 можно увидеть из такой таблицы (сама эта таблица называется греко-латинским или эйлеровым квадратом порядка 3)

$$\begin{bmatrix} (1,1) & (2,2) & (3,3) \\ (2,3) & (3,1) & (1,2) \\ (3,2) & (1,3) & (2,1) \end{bmatrix}.$$

Это задание МП было организовано в поддержку курса лекций по геометрии, которые читал А.Н. Колмогоров. Этот аксиоматический курс начинался с аксиоматики аффинной и проективной плоскостей, а на занятиях рассматривались задачи, связанные с конечными плоскостями.

Для тех порядков латинских квадратов, которые предложены в практикуме, особых сложностей нет, и, в принципе, даже в случае $n = 7$ при известном числе таких квадратов можно перебором выполнить п.а) задания (и такие учащиеся были). Однако мы стремились к тому, чтобы на установочных занятиях (или после выполнения заданий МП) были доказаны теоремы о том, что

– число попарно ортогональных латинских квадратов порядка $n \geq 3$ не превосходит $n - 1$;

– если $n = p^{\alpha}$, где p – простое и α – натуральные числа, то существует полный набор из $n-1$ ортогональных латинских квадратов порядка n.

– каждое полное семейство попарно ортогональных квадратов порядка n порождает аффинную плоскость порядка n.

Другими словами, мы стремились к тому, чтобы учащиеся понимали связи между конечными полями Галуа и конечными аффинными плоскостями и методикой их установления. Сами доказательства были довольно традиционны в этих вопросах, с ними можно познакомиться в прекрасной книге Э. Артина "Геометрическая алгебра". Для поля Галуа из четырех элементов таблицы сложения и умножения школьникам сообщались, для других конечных полей простого порядка p элементы полей Галуа выбирались в виде полной системы вычетов по модулю p. Здесь уместно сказать, что на лекциях и на занятиях по алгебре традиционно всегда рассматривается арифметика остатков, конечные поля, кольца, и, конечно, время выдачи такого практикума выбирается тогда, когда школьники или уже знакомы с необходимым минимумом материала, или, наоборот, совсем не знакомы – тогда мы преследуем пропедевтические цели.

Интерес к этому практикуму у школьников велик, и однажды группа школьниц, отказавшись от изготовления бумажной аппликации, сделала ее в форме изящной вышивки мелким крестом (которая у автора статьи бережно хранится).

В одной статье невозможно с достаточной степенью подробности описать все задания математического практикума, которые мы проводили в стенах школы им. А.Н. Колмогорова при МГУ (их создавали и реализовывали А.Н. Колмогоров, И.Г. Журбенко, А.Б. Сосинский, А.М. Абрамов, В.В. Вавилов, А.Н. Земляков, В.Н. Дубровский, Н.М. Бовт, Т.Н. Трушанина и многие другие). Поэтому ограничимся только перечислением тех тем заданий МП, о которых выше речь не шла. О характере установочных лекций и образцах выполнения учащимися заданий можно судить по публикациям, указанным ниже в библиографии (особенно по работам [4, 5, 7, 14, 16, 18, 21, 24–34]).

Методы вычислений. Приближенное вычисление корней уравнений. Графические методы решений уравнений и их систем. Метод Гаусса. Две задачи линейного программирования. Итерации. Метод секущих и касательных Ньютона. Номограммы. Численное дифференцирование и интегрирование. Разностные уравнения. Дискретные гармонические функции. Непрерывные дроби. Задачи на клетчатой бумаге. Магические квадраты. Конечные поля и латинские квадраты. Неприводимые многочлены.

Функции и графики. Графики дробно-квадратичных рациональных функций. Фигуры Лиссажу. Циклоиды. Розы и розетки. Эволюты циклоидальных кривых. Кривые второго порядка. Пучок кривых второго порядка. Ортогональные семейства кривых.

Геометрия. Построения циркулем и линейкой. Сечения многогранников. Вычисление объемов и площадей. Орнаменты. Группы самосовмещений плоских фигур. Круговые преобразования плоскости. Теоремы Паскаля и Дезарга и построения при помощи одной линейки. Инверсия и построения при помощи только циркуля. Навигация. Расчет лунных затмений. Конечные аффинные и проективные плоскости и пространства.

Математический анализ. Интерполяция и сплайны. Квадратурные формулы Гаусса. Расчет полета многоступенчатой ракеты. Космические поезда. Диаграммы касательных. Прыгающий мячик. Изоклины. Фазовые портреты. Теория часов. Полет диска в сопротивляющейся среде. Динамическое программирование. Аэродинамическая задача Ньютона. Тригонометрические многочлены и ряды Фурье. Профили собственных колебаний натянутой нити с бусинками.

Комплексный анализ. Дробно-линейные преобразования. Расположение комплексных корней многочлена, зависящего от параметра. Модель Пуанкаре плоскости Лобачевского. Линии равного модуля и аргумента. Области однолистности многочленов. Фракталы.

Теория вероятностей. Доска Гальтона. Модель размножения и гибели. Случайные блуждания. Датчики случайных чисел. Криптография и расшифровка текстов.

Библиографический список

1. Явление чрезвычайное. Книга о Колмогорове. М.: ФАЗИС, МИРОС, 1999.
2. Колмогоров в воспоминаниях / Ред.-сост. А.Н. Ширяев. М.: Физматлит, 1993.
3. *Колмогоров А.Н.* Математика – наука и профессия / Сост. Г.А. Гальперин. М.: Наука, Библиотечка журнала “Квант”, вып.64, 1988. 88 с.

4. *Колмогоров А.Н., Вавилов В.В., Тропин И.Т.* Физико-математическая школа при МГУ. М., 1981. 64 с.
5. *Колмогоров А.Н.* О воспитании на уроках математики и физики диалектико-материалистического мировоззрения // Математика в школе. 1978. № 3.
6. *Колмогоров А.Н.* Диалектико-материалистическое мировоззрение в школьных курсах математики и физики // Квант. 1980. № 4.
7. *Колмогоров А.Н. и др.* Летняя школа на Рубском озере. М.: Просвещение, 1971.
8. *Колмогоров А.Н.* Паркеты из правильных многоугольников // Квант. 1970. № 3.
9. *Колмогоров А.Н. и др.* Курс математики для физико-математических школ. М.: Изд-во МГУ, 1971. 223 с.
10. *Колмогоров А.Н.* Современная математика и математика в современной школе // Математика в школе. 1971. № 6.
11. *Колмогоров А.Н.* Общие проблемы математического образования в СССР // История математического образования в СССР. Киев: Наукова думка, 1975.
12. *Колмогоров А.Н.* Группы преобразований // Квант. 1976. № 10.
13. *Колмогоров А.Н., Вавилов В.В.* ФМШ при МГУ – 15 лет // Квант. 1979. № 1.
14. *Колмогоров А.Н., Журбенко И.Г., Прохоров А.В.* Введение в теорию вероятностей. М.: Наука, 1982. 160 с.
15. *Вавилов В.В.* Школа математического творчества. М.: РОХОС, 2004. 72 с.
16. *Вавилов В.В.* Школа им. академика А.Н. Колмогорова Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова // Сборник статей ко дню рождения А.Н. Колмогорова. М.: Научно-техн. центр “Университетский”, 2003.
17. *Вавилов В.В.* Многоугольники на решетках. М.: Школа им. А.Н. Колмогорова, “Самообразование”, 2002. 56 с.

18. *Вавилов В.В.* Итерации радикалов. М.: Школа им. А.Н. Колмогорова, “Самообразование”, 2000. 20 с.
19. *Вавилов В.В.* Радикалы правые, левые и нейтральные. М.: Школа им. А.Н. Колмогорова, препринт 1995 года. 28 с.
20. *Вавилов В.В.* Изобретатель криволинейных координат. М.: Школа им. А.Н. Колмогорова, “Самообразование”, 2000. 24 с.
21. *Вавилов В.В., В.А.Бахтина.* Спецкурсы по математике. М.: Школа им. А.Н. Колмогорова, “Самообразование”, 1999. 56 с.
22. *Вавилов В.В.* Избранные лекции по геометрии. Алматы: РНПЦ “Дарын”, 1999. 84 с.
23. *Вавилов В.В.* Число π и роман “Война и мир” // Квант. 1977. № 2.
24. *Вавилов В.В.* Сечения многогранников // Квант. 1978. № 10.
25. *Вавилов В.В., Земляков А.Н.* Из опыта работы летней физико-математической школы при МГУ // Математика в школе. 1978. № 4.
26. *Вавилов В.В.* Сетчатые номограммы // Квант. 1978. № 6.
27. *Вавилов В.В.* Геометрия круга // Квант. 1977. № 6.
28. *Вавилов В.В.* Шарнирные механизмы. Кривые Уатта // Квант. 1978. № 1.
29. *Вавилов В.В., Мельников И.И.* Касательная // Квант. 1978. № 5.
30. *Вавилов В.В., Земляков А.Н.* Учебные задания по математике. Практические работы № 1–2. М.: НИИ СИМО АПН СССР. 1977. 23 с.
31. *Вавилов В.В., Земляков А.Н.* Учебные задания по математике. Практические работы № 3–6. М.: НИИ СИМО АПН СССР. 1977. 38 с.
32. *Вавилов В.В., Земляков А.Н.* Учебные задания по математике. Практические работы № 7-10. М.: НИИ СИМО АПН СССР. 1978. 47 с.
33. *Вавилов В.В.* Об одной формуле Христиана Гюйгенса // Квант. 1985. № 11; 1998. № 4; также Quantum. 1993. № 2.

34. *Вавилов В.В.* Эволюта и эвольвента // Квант. 1981. № 7.
35. *Вавилов В.В.* Об одной дискуссии П.Л. Капицы и А.Н. Колмогорова // Журнал ФМШ. 1996. № 1.
36. *Вавилов В.В., Егоров А.А., Русаков А.А.* Школа научного творчества // Квант. 2004. № 5.
37. *Вавилов В.В.* Школьные Харитоновские чтения // Математика. 2004. № 18.
38. *Гнеденко Б.В.* Политехнические аспекты преподавания математики в средней школе // Математика в школе. 1974. № 6.
39. *Гнеденко Б.В.* Математика и математическое образование в современном мире. М.: Просвещение, 1985. 192 с.
40. Сборник статей ко дню рождения А.Н. Колмогорова. М.: Научно-технический центр "Университетский", 2003. 150 с.

Использование методических идей А.Н. Колмогорова для развития математических способностей школьников

Н.А. Меньшикова

В статье рассматриваются взгляды А.Н. Колмогорова на работу с одаренными детьми на занятиях по математике и их важность как для современных уроков математики в средней школе, так и для различных форм внеурочной работы. Приводится ряд примеров математических задач, способствующих развитию интеллектуальных способностей учащихся и отобранных с учетом рекомендаций, имеющихся в работах А.Н. Колмогорова.

В многогранной научно-методической деятельности А.Н. Колмогорова выделяется важное направление – работа с учащимися, проявляющими интерес и способности к математике. В рамках этого направления он занимался организацией математических олимпиад, физико-математических школ, изданием научно-популярной литературы для учащихся. Ученый являлся сторонником дифференцированного обучения в старших классах. Многие его идеи оказались плодотворными, они продолжают использоваться и в наши дни.

А.Н. Колмогорова прежде всего интересовала систематическая подготовительная работа со школьниками, которая никоим образом не должна ограничиваться решением олимпиадных задач. Это циклы лекций, практикумы по решению задач, общекультурные аспекты математического образования. Им было написано немало книг и статей для учащихся, эти работы актуальны и поныне. Одним из его основных педагогических принципов является требование к законченности, содержательности, доступности и наглядности математических текстов для учащихся. А.Н. Колмогоров постоянно настаивал на необходимости включения в учебные пособия текстов, дополняющих основное содержание, а также задач повышенной трудности. Этот материал предназначался для ребят, интересующихся математикой. С этой же целью он публиковал статьи в журнале “Квант”. Эти статьи и сегодня используются многими учителями для работы с учащимися как на уроках, так и во внеурочное время.

В различных публикациях А.Н. Колмогоров неоднократно рассматривал проблему выявления и развития способностей к изучению математики у учащихся средней школы. Он считал, что математическое образование оказывает большое влияние на интеллектуальное развитие человека в целом, способствует формированию логического мышления, осознанному выбору профессии.

Современные взгляды на общие и специальные способности подтверждают актуальность высказанных им идей и в настоящее время. В современной науке принято считать, что проблема развития способностей и проблема роли деятельности как средства развития личности тесным образом взаимосвязаны. Например, в работах Н.Ф. Талызиной, В.Д. Шадрикова и др. показано, что способности имеют сложную структуру, отражающую системную организацию мозга, межфункциональные связи и деятельностный характер психических функций. Способности раскрываются прежде всего тогда, когда есть свобода деятельности, свобода в выборе самой деятельности, в формах ее реализации, в возможности творчества. От природы человек наделен общими способностями, а специальные способности являются общими способностями, приобретшими черты оперативности под влиянием требований деятельности. Творческие способности отдельной личности проявляются в индивидуальном развитии. Одаренность рассматривается как системное проявление способностей, определяющее возможный успех в деятельности.

Термины “математические способности”, “математическое мышление”, “математический стиль мышления” не являются терминами психологии, однако признаются многими учеными. С помощью этих терминов можно обозначить те особенности стиля мышления и способностей, которые присущи личности, успешно овладевающей математикой. Математические способности можно рассматривать в двух аспектах: как творческие (научные) способности, дающие новые и объективно значимые для общества результаты, и как учебные способности – способности к изучению и усвоению математики, быстрому и успешному овладению соответствующими знаниями, умениями, навыками. Развитие математических способностей учащихся и выявление у них математической одаренности будет эффективно происходить тогда, когда они будут вовлечены в процесс активной творческой деятельности (на школьном этапе – субъективно творческой). Это позволяет сделать обучение математике личностно значимым для ученика. Способные к математике школьники обладают особенностями переработки полученной в процессе решения задач информации. Они склонны к обобщению математических объектов, отношений и действий, к свертыванию процесса математического рассуждения и системы соответствующих действий. Им присущи гибкость мыслительных процессов, свободное переключение с прямого на обратный ход мысли.

Академик А.Н. Колмогоров указывал на несколько видов математических способностей:

– геометрическую интуицию;

– умение рассуждать последовательно и логически;

– вычислительные способности.

Он писал: “Различные стороны математических способностей встречаются в разных комбинациях. Уже исключительное развитие одной из них иногда позволяет приходить к неожиданным и замечательным открытиям, хотя чрезмерная односторонность, конечно, опасна. Само собой разумеется, что никакие способности не помогут без увлечения своим делом, без систематической повседневной работы” [2. С. 31–32]. По его мнению, математические способности проявляются обычно довольно рано и требуют непрерывного упражнения.

Большую роль в структуре математических способностей А.Н. Колмогоров отводил геометрическому воображению (“геометрической интуиции”), играющей большую роль при работе почти во всех разделах математики, даже самых отвлеченных.

Существенной стороной математических способностей является также искусство последовательного, правильно расчлененного логического рассуждения. Этому способствуют систематический курс геометрии и метод математической индукции, умелое применение которого служит хорошим критерием логической зрелости, необходимой математику.

Характерным среди математических способностей является и развитие алгоритмических способностей.

Для наиболее полного удовлетворения запросов учащихся, проявляющих математические способности и повышенный интерес к математике, предназначены (по мнению А.Н. Колмогорова) как специализированные классы, так и система факультативных занятий, которые должны быть доступны всем ученикам, имеющим серьезное намерение в них заниматься. Большая роль здесь отводится таким формам внеурочной работы по математике, как олимпиады, кружки, а также самостоятельное чтение учащимися популярной литературы и самостоятельное решение задач. По его мнению, для внеклассной работы желательно подбирать задачи, требующие серьезной работы мысли, похожей на ту, которая требуется от взрослого, самостоятельно работающего математика. Для самостоятельного чтения целесообразно подбирать такие книги, в которых читателя вводят в круг вопросов, служащих и в настоящее время предметом еще не законченного научного исследования.

А.Н. Колмогоров отмечал необходимость формирования пространственных представлений учащихся с помощью задач по таким темам, как сечения многогранников плоскостью, описанные и вписанные в сферу многогранники.

Заметим, что круг вопросов, затронутых в его методических трудах, не потерял актуальности и по сей день.

Опираясь на рекомендации А.Н. Колмогорова, можно осуществлять отбор тем и составлять организованные наборы упражнений для проведения факультативных занятий, разрабатывать для учащихся элективные курсы.

Рассмотрим один из вариантов подобной тематики занятий факультативных курсов, апробированной на практике. Приведенные ниже примеры конкретных задач избраны автором статьи из различных источников.

1. Построение сечений многогранников плоскостью и определение площадей полученных сечений (с индивидуализацией заданий); изучение взаимного расположения сферы и многогранников разных видов, взаимного расположения шаров разного диаметра.

Учащимся можно предложить, например, такие задачи:

а) изучить варианты взаимного расположения куба и плоскости. Вычислить площадь сечения единичного куба плоскостью в том случае, когда в сечении получается правильный шестиугольник;

б) шар касается всех ребер правильного тетраэдра. Длина ребра тетраэдра равна 10. Найти радиус шара;

в) четыре шара радиуса R располагаются так, что каждый шар касается трех других. Найти радиус сферы, касающейся каждого из этих 4 шаров и находящейся во внутреннем пространстве между ними;

г) решить аналогичную задачу, определив радиус сферы, касающейся каждого из этих 4 шаров и содержащей их внутри себя.

Наглядными примерами по этому разделу могут служить и задачи третьего уровня из вариантов единого государственного экзамена по математике, в которых рассматриваются комбинации геометрических тел и сформулированы задания на вычисление элементов этих тел.

2. Большую роль А.Н. Колмогоров отводил развитию логического мышления учащихся, их умению рассуждать. Уже в средних классах с учениками можно решать логические задачи олимпиадного характера, избирая их из дополнительной литературы.

Развитию логического мышления способствуют в немалой степени задачи по таким темам, как “Применение метода математической индукции”, “Применение принципа Дирихле для решения сюжетных задач”. При проведении занятия по использованию метода математической индукции обращается внимание на суть принципа математической индукции, основанного на нем метода, последовательности действий по данному методу, его области применимости. Рассматриваются примеры на доказательство формул, равенств и неравенств, признаков делимости, для опровержения ложных утверждений. Например:

а) вывести формулу для вычисления суммы кубов первых N натуральных чисел;

б) доказать неравенство Бернулли;

в) доказать, что выражение $(4^n + 15n - 1)$ кратно 9 для всех натуральных значений n;

г) доказать равенство для всех натуральных значений n:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + ... + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

На занятии, посвященном использованию принципа Дирихле, прежде всего разъясняется суть этого принципа. Ее можно предложить учащимся в следующем виде: “Если в N ячейках расположено $(N + 1)$ элементов, то в некоторой из ячеек расположено не менее двух элементов”. Далее рассматриваются сначала несложные задачи, например:

а) в лесу растет миллион елок, на каждой из них не более 600000 иголок; докажите, что в лесу есть 2 елки с одинаковым числом иголок;

б) в магазине есть 25 ящиков яблок трех разных сортов, причем в каждом ящике яблоки только одного сорта; докажите, что среди них содержится по крайней мере 9 ящиков с яблоками одного и того же сорта.

Далее учитель предлагает другие задачи по теме, подобранные из дополнительной литературы.

3. В тематике занятий, предложенных А.Н. Колмогоровым, содержится и тема “Применение графического метода для изучения

свойств функций". На факультативных занятиях тему можно расширить и рассматривать не только графики функций, но и графики уравнений, графический метод решения систем уравнений, построение различных точечных множеств на координатной плоскости и т.п. Среди заданий могут быть, например, такие:

а) построить фигуру, координаты точек которой удовлетворяют заданному неравенству или системе неравенств;

б) построить график функции, заданной кусочно;

в) решить графически систему уравнений с параметром и т.п.

4. Большое внимание А.Н. Колмогоров уделял изучению в школе элементов математического анализа. Помимо примеров, рассматриваемых на основных уроках, можно провести цикл занятий факультатива по теме "Приложения производной". На этих занятиях целесообразно помимо других вопросов рассматривать случаи, где производная используется для составления математической модели сюжетной задачи или перевода геометрической задачи на аналитический язык. Например:

а) вокруг прямоугольного поля площадью 400 га надо посадить со всех сторон деревья в форме полосы шириной 10 м. Каковы должны быть линейные размеры поля, чтобы площадь, занимаемая деревьями, была наименьшей?

б) в шар вписан конус наибольшего объема; в этот конус, в свою очередь, вписан цилиндр наибольшего объема. Найти отношение высоты цилиндра к радиусу шара;

в) канат висячего моста имеет вид параболы и прикреплен к вертикальным опорам, отстоящим одна от другой на 200 м. Самая нижняя точка каната находится на 40 м ниже точек подвеса. Найти угол между канатом и опорными колоннами.

По этой теме целесообразно провести семинарское занятие, на котором каждый учащийся рассматривает в качестве доклада решение избранной им задачи. В качестве источников ученикам можно рекомендовать не только учебники для общеобразовательных классов, но и учебники для классов с математической специализацией, отдельные вузовские учебники, где материал излагается на наглядном уровне, например, в книгах Н.Я. Виленкина и др.

5. С точки зрения А.Н. Колмогорова, учащимся обязательно на-

до предлагать задачи, способствующие развитию математической интуиции, развивающие гибкость мышления, способность рассуждать нестандартным образом. Здесь можно подбирать не только геометрические задачи на применение знаний в нестандартной ситуации, но и рассматривать нестандартные уравнения и неравенства. Например:

а) найти площадь треугольника, координаты вершин которого $(-1; 4)$, $(-3; -1)$, $(2; -2)$. В этой задаче ученик должен догадаться представить искомую площадь как разность площадей прямоугольника, порождаемого целочисленными координатами, и дополняющих заданный треугольник до этого прямоугольника прямоугольных треугольников;

б) на какой высоте висит уличный фонарь, если тень от вертикально поставленной палки высотой 0,9 м имеет длину 1,2 м, а при перемещении палки на 1 м от фонаря вдоль направления тени длина тени стала равной 1,5 м. Непосредственное измерение расстояния до источника света недоступно.

6. Актуальными являются и такие темы занятий, как решение комбинаторных и вероятностных задач. Таких задач немало в публикациях А.Н. Колмогорова, пособиях Н.Я. Виленкина и др.

7. Отдельного внимания заслуживают задачи на построение геометрических фигур, при решении которых применяются не только приемы, изученные на основных уроках, но и используются геометрические преобразования. Например:

а) построить ромб по сумме диагоналей и углу, образованному диагональю со стороной;

б) построить четырехугольник $ABCD$ по четырем сторонам, зная, что диагональ AC делит угол A пополам.

Перечисленные выше темы могут быть использованы учителем математики для конструирования учебно-исследовательских математических задач и организации учебно-исследовательской математической деятельности школьников. Примеры подобных задач приводятся автором статьи в источнике [3].

Изучая методические работы А.Н. Колмогорова и рассматривая темы, указанные им как наиболее важные и ценные для формирования математических способностей, учитель может составлять программы факультативных и элективных курсов, помогать школьникам в организации их индивидуальной образовательной траектории, развивать у них математический стиль мышления. Математический стиль мышления является весьма распространенным явлением, он может проявляться у человека в видах деятельности, даже не связанных непосредственно с математикой, и часто способствует успешному решению самых разнообразных проблем. Его развитие принесет пользу всем учащимся, независимо от их последующего самоопределения.

Библиографический список

1. *Абрамов А.М.* О педагогическом наследии А.Н. Колмогорова // УМН. 1988. Т. 43. Вып. 6.
2. *Колмогоров А.Н.* Математика – наука и профессия. М.: Наука, 1988. 288 с.
3. *Меньшикова Н.А.* Основы методики работы с учебно-исследовательскими математическими задачами // Яросл. пед. вестник. 2002. № 3. С. 109–114.
4. *Черкасов Р.С.* Академик Колмогоров и школьное математическое образование // Математика в школе. 1992. № 1.

Глава 2

История математики и математического образования

К истории российской системы школьного математического образования

С.С. Демидов, С.С. Петрова

1. Зарождение и первые шаги: XVIII–начало XIX вв. Математические исследования и математическое образование в том смысле этих слов, в каком их понимают сегодня, начинают свою историю в России с реформами Петра Великого. Практически все, что было до них (а было немало и значительного – достаточно вспомнить хотя бы хронологическое сочинение новгородского монаха XII века Кирика), следует отнести к средневековой культуре (об этом можно прочитать, например, в "Истории математики в России до 1917 года" А.П. Юшкевича [1], в первом томе "Истории отечественной математики" [2] или в работах Р.А. Симонова (скажем, в [3])). Безусловно, эта культура, в том числе и культура математическая, оказалась той плодородной почвой, на которой успешно прижились и получили успешное развитие ростки новой науки (1)[1].

Уже в ходе петровских реформ в области науки и образования математика и ее преподавание заняли одно из приоритетных мест - вспомним основанную в 1701 году Навигацкую школу, где обучению математике уделялось особое внимание и преподаватель которой Л.Ф. Магницкий в 1703 г. опубликовал знаменитую "Арифметику"; по ней обучалось несколько поколений русских школьников (и среди них великий М.В. Ломоносов). В созданной Петром в 1724 году Академии наук математика также была выделена особо – среди 23 академиков, приглашенных в Академию в пер-

[1] Цифры в круглых скобках означают номер примечания в конце статьи.

вые годы ее существования, семь были математиками. Им было вменено в обязанность преподавать математику молодым людям, привлеченным в организованный тогда при Академии университет. Особую роль в этой деятельности сыграл крупнейший математик XVIII века Леонард Эйлер. Он и его ученики – С.К. Котельников, С.Я. Румовский, Н.И. Фусс, М.Е. Головин и другие – внесли значительный вклад в становление российского математического образования. Они сделали первые шаги в создании современных руководств по математике на русском языке. Так, перу самого Л. Эйлера принадлежит "Руководство к арифметике для употребления в гимназии при Императорской Академии наук", изданное в 1738–1740 гг. в двух частях по-немецки, а в 1740–1760 гг. в русском переводе, а также "Универсальная арифметика", опубликованная по-русски в 1768–1769 гг. В большинстве своем основополагающие монографии великого математика не были адресованы широкому читателю, тем более, не были они приспособлены для лиц, математике только обучающихся. Адаптировав его изложение, приспособив его к нуждам школы, ученики Л. Эйлера создали замечательную учебную литературу для средней школы, стоящую на самом передовом для того времени научном уровне. Ограничимся одним примером. Как известно, современная форма изложения тригонометрии восходит к Л. Эйлеру. В 1789 году по решению Академии наук была опубликована "Плоская и сферическая тригонометрия с алгебраическими доказательствами" М.Е. Головина – учебник, который "превосходил по научному уровню все более ранние и даже некоторые изданные позднее" [1. С. 82]. Во многом именно благодаря этим учебным руководствам русская математика добилась своих первых ощутимых успехов уже в первой трети XIX века – вспомним об открытии Н.И. Лобачевским неевклидовой геометрии и результатах М.В. Остроградского.

Ученики и последователи Л. Эйлера (сам характер деятельности которых позволяет исследователям говорить о "методической школе Эйлера" (см. [4. С. 118–165]) приняли активное участие в развитии народного образования в последней трети XVIII–начале XIX века, в том числе, в знаменитых реформах начала царствования Александра I, в ходе которых была сформирована система народного образования в стране (2). Эта система, которую венчало созданное в 1802 г. Министерство Народного Просвещения, объединяла шесть учебных округов с центрами в Петербурге, Москве, Харькове, Казани, Дерпте и Вильно. В каждом из этих городов должен был быть организован университет (до этого существовал единственный - в Москве) (3). Он должен был являться головной "учебной" организацией округа. Университет курировал гимназии, которые учреждались в каждой губернии, а под призором гимназий оказывались уездные училища, которые было предписано организовывать в каждом уездном городе. Такая система позволяла осуществлять непрерывный учебный процесс – по окончании уездного училища было можно перейти в гимназию, полный курс которой был достаточным для поступления в университет. Для методического и административного руководства училищами при Министерстве народного просвещения было организовано Главное правление училищ, среди сотрудников которого мы видим учеников Л. Эйлера – С.Я. Румовского и Н.И. Фусса. Во многом именно их активной и целенаправленной деятельности Россия обязана хорошей постановке обучения математике в школе в начальный период становления системы народного образования.

Процессы развития математических исследований и математического образования в России, начиная со времени петровских реформ, отличают следующие характерные черты:

– власть, понимая важное значение математики для прогрессивного развития государства (в том числе, не в последнюю очередь, для военных нужд) придавала особое значение поднятию уровня математических исследований и совершенствованию математического образования; отсюда – всегдашнее преобладание государственной системы образования и подчиненный характер частного образования;

– организация математического образования всех уровней (от элементарного до высшего) стала одной из постоянных и важнейших забот математической элиты российского научного мира (в XVIII–XIX вв. это – члены Петербургской академии наук, ведущие профессора российских университетов, в их числе Л. Эйлер, М.В. Остроградский, Н.И. Лобачевский, П.Л. Чебышев) (4);

– взгляд на российскую систему образования как на органичную часть европейской системы образования (при этом ведущие деятели математического образования в России в большинстве своем старались бережно относиться к ее самобытности).

Именно эти родовые черты и определили высокий уровень преподавания математики в русской школе. Этот уровень и природная предрасположенность русских к математическим наукам стали тем основанием, на котором упрочилась высокая репутация русской математической школы. Власти всегда (и царское правительство, и советская власть) понимали важность математических наук для процветания государства, тем более, что занятия математикой, совершенствуя умственные способности учащегося и делая его способным к решению различных технических задач, государству полезных, не вносят в его голову опасных в идеологическом отношении идей. Об этом российские власти не забывали никогда.

2. Становление классической системы школьного математического образования: от эпохи Николая I до 90-х годов XIX века.

Мы не будем здесь особенно останавливаться на усилиях, предпринимавшихся в этот период государством для поддержания и развития научных исследований и народного образования. И, хотя эти усилия в разные исторические моменты были различными по интенсивности, – зачастую они ослаблялись соображениями идеологического характера (боязнью проникновения революционных идей, атеистических учений и т.п.), колебания эти менее всего сказывались на математике (5). Важность математики и математического образования для государства никем не оспаривались. Все более значительными становились успехи на ее ниве отечественных ученых. Напомним еще раз, что уже в первой половине века профессором из Казани Н.И. Лобачевским была открыта неевклидова геометрия – одно из важнейших достижений математики XIX века. Во вторую же его половину и в начале следующего столетия Россия уже заявила о себе как о стране, обладавшей достаточным математическим потенциалом, сосредоточенным, в основном, в двух ведущих национальных школах – прежде всего, в Петербургской школе П.Л. Чебышева, а также Московской философско-математической школе, в недрах которой накануне Второй мировой войны возникла одна из самых блистательных математических школ XX века – Московская школа теории функций Д.Ф. Егорова и Н.Н. Лузина. Значительным оказался вклад математиков в разработку прикладных наук и задач инженерного (в частности, военного) характера(6).

В ходе реформ Александра II была существенно преобразована средняя школа. По уставу гимназий 1864 г., наряду с "классическими" гимназиями учреждались "реальные" гимназии, в программе которых отсутствовали древние языки, зато усиливались курсы математики и естественных наук. В 1907 г. в реальных училищах, а в 1911 г. в кадетских корпусах были введены начала аналитической геометрии и математического анализа. Правительство следило за тем, чтобы в комитеты Министерства народного просвещения, определявшего содержание и программы преподаваемых в средней школе дисциплин, входили ведущие ученые страны. Так, крупнейший русский математик второй половины XIX века, уже упоминавшийся нами П.Л. Чебышев на протяжении 17 лет (с 1856 по 1873 г.) состоял членом Ученого комитета Министерства народного просвещения. Он представлял доклады о программах и методах обучения, писал многочисленные рецензии на учебные пособия, требуя от авторов строгости и ясности изложения. В 1901–1915 гг. членом Совета Министерства и председателем его Ученого комитета состоял академик Н.Я. Сонин. В 1905–1908 гг. для работы над реформой школьного математического образования в Министерство народного просвещения был приглашен известный математик, президент Московского математического общества П.А. Некрасов. Все они немало сделали для совершенствования школьного математического образования в России.

На протяжении XIX века в стране сложилось национальное математическое сообщество, центрами притяжения которого были находившиеся между собой в известной конфронтации математические Петербург с Императорской академией наук и Москва с ее математическим обществом и выполнявшим тогда отчасти общенациональные функции “Математическим сборником”. Выдающуюся роль в консолидации этого сообщества сыграли всероссийские съезды естествоиспытателей и врачей, первый из которых был собран в 1868 г. в Петербурге, а последующие проходили в обеих столицах, а также в Киеве, Казани, Варшаве и, наконец, в Тифлисе, где в 1913 г. состоялся последний XIII съезд. Съезды были чрезвычайно многолюдны, математическая секция на них работала особенно активно [6]. Ее заседания собирали очень разнообразный состав участников – от наиболее видных российских ученых (в них традиционно участвовал П.Л. Чебышев [7] и другие члены Петербургской Академии наук, профессора ведущих университетов, блистала С.В. Ковалевская) до преподавателей гимназий, составлявших большинство участников секции. Одной из главных тем, рассматривавшихся на секции, традиционно оставались вопросы преподавания математики в средней школе. Ведущие педагоги (А.П. Киселев, С.И. Шохор-Троцкий и др.) обсуждали свои проблемы с крупнейшими математиками своего времени, традиционно (еще со времен Л. Эйлера) в них заинтересованными. Ведущие математики не только охотно обсуждали проблемы школьной математики, но и сами писали учебники для средней школы, некоторые из которых (например, учебники М.В. Остроградского, А.Н. Тихомандрицкого, О.И. Сомова, А.Ю. Давидова (7)) получили широкое распространение. Впрочем, авторами большинства успешных учебников выступали преподаватели средних школ (8) – очевидно, опыт практической работы в школе оказывался чрезвычайно важным для успешной работы над учебником (9) [4. С. 429–468, 5. С. 82–86]. Так, самым знаменитым в России автором школьных математических учебников, ставшим в истории российской культуры фигурой почти легендарной, стал преподаватель реального училища и кадетского корпуса в г. Воронеже Андрей Петрович Киселев (10). Его замечательные руководства для средней школы – “Систематический курс арифметики для средних учебных заведений” (СПб., 1884), “Элементарная алгебра” (СПб., 1888) и “Элементарная геометрия” (СПб., 1892), совершенствовавшиеся от издания к изданию, стали основными учебными руководствами для русских школ. Эти книги (например, первая из них до 1938 г.

выдержала 36 изданий общим тиражом в 1800000 экземпляров, а руководство по алгебре только в дореволюционной России издавалось 30 раз) после их переработки в 1938 году были приняты советской школой в качестве стабильных учебников. На них основывалось школьное математическое образование в стране вплоть до 60-х годов XX века. Эти руководства явились, может быть, самым ярким проявлением сложившейся к 90-м годам российской модели системы, которую известный методист И.К. Андронов [9. С. 6] называл международной классической системой школьного математического образования. Для этой системы характерны 1) разделение математики как предмета изучения на два отдела – "элементарную математику", изучаемую в средней школе, и "высшую математику", изучаемую в высшей школе; 2) составление "элементарной математики" из четырех предметов – арифметики, алгебры, геометрии и тригонометрии, рассматриваемых "как самостоятельные и не зависимые друг от друга" [9. С. 7]; 3) изучение в начальной школе не "математики" в целом, но лишь пропедевтической арифметики, осуществляемое "на эмпирической основе без теории предмета" [9. С. 7]; 4) изучение в высшей школе "высшей математики", составленной из двух разделов – аналитической геометрии и математического анализа. Эта система преследовала цели дать учащемуся значительный запас математических знаний и развить его формально-логическое мышление. В этом процессе активную роль исполнял учитель, на долю же учащегося оставались пассивное восприятие учения и умение его воспроизводства. Так к 90-м годам XIX века сложилась оригинальная российская модель международной классической системы школьного математического образования, обеспеченная корпусом квалифицированных преподавателей, хорошо проработанными программами и превосходной учебной литературой. (О математическом школьном образовании в России в XIX веке см. также [10, 11].)

3. Русская система школьного математического образования накануне Первой мировой войны

Сложившаяся в 90-е годы XIX века система довольно быстро столкнулась с рядом проблем. Первая и самая главная из них (не получившая удовлетворительного решения по сию пору) – разительное несоответствие содержания математики, преподаваемой в школе, и математики как развивающейся науки. В результате образовывался разрыв между элементарной и высшей математикой. В статье "Математика как наука и ее школьные суррогаты", опубликованной в 1895 г. в журнале "Русская мысль", В.П. Шереметевский писал [12. С. 105]: "Молодые люди конца XIX века, готовящиеся принять официальное удостоверение в умственной зрелости, искусственно задерживаются на средневековом уровне математической мысли: считаются неспособными усвоить хотя бы элементы математики как науки нового времени". Шереметевский выступал за перестройку школьного курса математики вокруг понятия функциональной зависимости, за введение в него элементов аналитической геометрии и математического анализа. Другим серьезным недостатком складывавшейся системы стала проявившаяся в школьном курсе слабость взаимосвязей дисциплин, составлявших элементарную математику.

Эти проблемы (а также целый ряд других, на которых мы здесь не будем специально останавливаться) стали предметом активных дискуссий в среде педагогов-математиков и шире – в российском математическом сообществе, традиционно, как мы уже отмечали, интересующемся проблемами средней школы. Этим проблемам школы уделяло большое внимание уже упоминавшееся влиятельнейшее в стране Московское математическое общество (мы еще будем говорить об этом в разделе, посвященном XX веку). В начальный период существования общества вторая часть издававшегося им журнала "Математический сборник" предназначалась специально для преподавателей и учащихся гимназий (она просуществовала до 10 тома) [4. С. 376–378, 13]. Каждой гимназии и реальному училищу Министерством просвещения рекомендовалось иметь в своей библиотеке комплект этого журнала. (Проблемы школьной математики в конце XIX–начале XX века живо обсуждались на страницах специальных периодических изданий, адресованных учителям, издаваемого в Одессе "Вестника опытной физики и элементарной математики" (1886–1917), "Математического образования" (1912–1917) и др. (11).) Университетская профессура стала руководящей и активной частью общероссийского движения за совершенствование школьного математического образования. Так, в 1906 г. при Московском университете оформился Московский математический кружок, объединивший деятельность в этом направлении сотрудников университета и учителей. Его председателем стал профессор Московского университета Б.К. Млодзеевский. В 1912 г. кружок начал издавать получивший широкую известность журнал "Математическое образование" [4. С. 387–388].

Чрезвычайно активизировавшаяся в начале XX века методико-математическая деятельность требовала новых форм ее организации. И уже на стыке 1911 и 1912 гг. в Санкт-Петербурге состоялся Первый всероссийский съезд преподавателей математики, собравший 1217 участников из различных уголков страны. Среди них и представители российских университетов (К.А. Поссе, В.В. Бобынин, А.В. Васильев, Б.К. Млодзеевский, П.А. Некрасов, С.О. Шатуновский, Д.М. Синцов, В.Ф. Каган, Д.Д. Мордухай-Болтовской) и известные педагоги (А.П. Киселев, С.И. Шохор-Троцкий). На съезде был сделан 71 доклад: о преподавании геометрии и об изложении идей неевклидовой геометрии, о теоретической арифметике и введении в школьные курсы новых идей в этой области, о приближенных вычислениях, о реформе курса алгебры, о введении в преподавание сведений из истории математики, о преподавании в школе элементов высшей математики и т.д. [15, 4. С. 361–366, 5. С. 110–112]. Методика математики приобрела на этом съезде статус науки – ей была отведена отдельная третья секция. В решениях съезда (см. [4. С. 365–366]) подчеркивалась необходимость усиления активности и самодеятельности учащихся, обращалось особое внимание на наглядность обучения, на необходимость положить в основу всего школьного курса математики идею функциональной зависимости, приблизить школьный курс к уровню современной математики, включив в него идеи аналитической геометрии и математического анализа. А уже на стыке 1913 и 1914 гг. в Москве был собран Второй съезд (12). В нем приняли участие 1200 человек и было заслушано 32 доклада, среди которых доклады С.Н. Бернштейна о возможных способах введения в школьном курсе понятия функции, П.А. Некрасова с обоснованием необходимости включения в этот курс элементов теории вероятностей и статистики, Н.Н. Салтыкова и Д.М. Синцова о проблемах подготовки учителей средней школы [16]. В решениях съезда особое внимание было уделено подготовке учителей (подчеркивалась необходимость не только научного, но и педагогического их образования), совершенствованию программ по математике, наконец, введению в школьные курсы элементов высшей математики. Надо заметить, что к этому времени русская средняя школа уже имела некоторый опыт преподавания начал аналитической геометрии и математического анализа (об этом см. [17, 18]).Как отметил, открывая съезд, Б.К. Млодзеевский, "успехи естествознания и техники выдвинули вопрос о введении в среднюю школу вопросов, изучаемых теперь обыкновенно в высшей школе; стало очевидным, что в настоящее время основные понятия исчисления бесконечно малых, аналитической геометрии и теории вероятностей должны быть достоянием каждого образованного человека" [16. С. 3].

Как мы видим, направленность развития преподавания математики в российской средней школе в конце XIX–начале XX вв. совпадала с вектором движения за реформу преподавания математики, наметившегося в Европе в конце XIX–начале XX в. и возглавленного в Германии – Ф. Клейном, во Франции – П. Аппелем и Э. Борелем. Целью этой реформы стало воспитание у учащихся функционального мышления и введение в школьные программы элементов "высшей математики" – аналитической геометрии и анализа. О необходимости такой реформы заявил в 1897 году в своем докладе "Вопросы математического образования" на Первом международном математическом конгрессе в Цюрихе Ф. Клейн. Программа таких преобразований математического образования, разработанная под его руководством (1905), получила наименование "Меранской программы". Организационное оформление это движение получило в 1908 г. на IV Международном математическом конгрессе в Риме – была создана Международная комиссия преподавателей математики, президентом которой был избран Ф. Клейн [4. С. 357, 5. С. 108–109, 19]. Россия, в которой к идеям такой реформы пришли уже давно (соответствующее высказывание Шереметевского мы приводили выше, см. также [5. С. 109]), активно включилась в работу комиссии с самого момента ее организации. Русскую национальную подкомиссию возглавил академик Н.Я. Сонин.

К 1917 г., события которого открыли новый период в истории страны, Россия пришла со сложившейся системой среднего математического образования. Ее воплощением стала российская модель международной классической системы школьного математического образования. Математика преподавалась в классических гимназиях, реальных училищах, средних военных учебных заведениях и духовных семинариях по утвержденным программам и стабильным учебным руководствам. Для этого преподавания был сформирован корпус педагогов достаточно высокого уровня. Корпус этот, составленный преимущественно из выпускников российских университетов, сохранял неразрывную связь с университетскими математиками. Этому способствовала и практика привлечения к преподаванию в гимназиях университетских приват-доцентов, и традиция патронажа Академии наук и университетов над средней школой. В итоге, несмотря на существовавшие иерархические различия (между членом Императорской академии наук и учителем гимназии из Урюпинска существовала, конечно, дистанция огромного размера), учителя средней школы ощущали себя членами единого российского математического сообщества.

4. Математика в школе в советский период

Когда по окончании гражданской войны советское правительство приступило к строительству нового государства, в числе первых перед ним встали проблемы народного образования. Центральной здесь стала задача ликвидации в стране неграмотности. Задачи же развития системы школьного математического образования в направлениях, заданных предыдущим ходом реформ, обозначенных Первым и Вторым всероссийскими съездами преподавателей математики, отошли на второй план и затерялись в сутолоке и неразберихе, порожденных всякого рода псевдореволюционными нововведениями и преобразованиями: усилиями, направленными на замену общеобразовательных средних школ трудовыми школами, попытками ликвидации классно-урочной системы обучения, бригадно-лабораторным методом, отменой домашних заданий и индивидуальных оценок знаний учащихся и пр. Ситуация начала выправляться к концу 20-х годов, когда советское правительство вплотную подошло к решению задач средней и высшей школы и научного строительства, взятых в их взаимосвязи. В отношении методики преподавания математики школа во многом начала возвращаться к российскому дореволюционному опыту, учитывая его в той мере, в какой он оказывался приемлем в новых социальных условиях. В 1931 г. появилось постановление ЦК ВКП(б) "О начальной и средней школе", в котором давалась отрицательная характеристика школьного образования: недостаточность объема знаний, даваемых школой, неудовлетворительная проработка учебно-педагогических основ школьного образования, извращенное понимание идеи политехнической школы, отрывающее политехнизм от прочного усвоения основ наук (в частности, математики), на котором он должен основываться. В Постановлении осуждалась теория "отмирания школы", предлагалось с 1 января 1932 г. начать преподавание по тщательно разработанным программам. В январе 1932 г. такие программы были опубликованы. Дальнейшая работа над более рациональным распределением материала, его упрощением и согласованием с потребностями физики привела к новым программам 1935 года (подробнее об этих программах см. [5. С. 161–170]). Для обучения по новым программам потребовались и новые учебники. В 1937–1938 гг. в качестве основных стабильных учебных руководств по математике в средней школе были приняты несколько переработанные А.Я. Хинчиным, Н.А. Глаголевым и др. учебники А.П. Киселева. Вот список руководств, по которым стали обучаться математике с 1938 г.[5. С. 168]: руководство по арифметике А.П. Киселева и задачник Е.С. Березанской (5–6 классы), руководство по алгебре А.П. Киселева и задачник Н.А. Шапошникова и Н.К. Вальцева (6–10 классы), учебники по геометрии А.П. Киселева и задачники Н.А. Рыбкина (6–10 классы), учебник и задачник по тригонометрии Н.А. Рыбкина (9–10 классы). Эти учебники обслуживали русскую школу до 1954 г., "обеспечивая обучению математике столь важную для него стабильность" [5. С. 168]. Как считают многие современные авторы

[4. С. 356, 5. С. 161–166], именно этот двадцатилетний период стабильности во многом определил успехи советской науки и техники в 50-е–60-е годы (13).

Для решения проблем, которые возникают в ходе развития народного образования, при наркомате просвещения (переименованном впоследствии в министерство просвещения) были организованы специальные методические советы, в которые вошли ведущие математики и педагоги страны. В 1943 г. была основана Академия педагогических наук РСФСР, в 1966 г. преобразованная в Академию педагогических наук СССР (ныне Российская академия образования), одной из основных задач которой стала теоретическая разработка принципов преподавания наук (в том числе – математики) в средней школе. События, происходившие в области школьной математики (в том числе различные изменения в характере ее преподавания, появление новых учебников и т.д.) находили свое отражение в периодике, прежде всего в журнале “Математика в школе”, регулярное издание которого (шесть номеров в год) установилось с 1936 г.

Проблемы средней школы всегда оставались в поле внимания математической общественности. Так, старейшее Московское математическое общество в 1934 г. образовало специальную секцию – секцию элементарной математики, вскоре переименованную в научно-педагогическую, а затем в секцию средней школы, объединившую наиболее активных педагогов-математиков столицы и решительно вмешивавшуюся в обсуждение всех вопросов, влияющих на политику в области математического образования. Основными задачами секции стало содействие повышению уровня преподавания математики в средней школе, обмен преподавательским опытом, установление постоянных связей между преподавателями средней и высшей школы. Московское математическое общество выступило с инициативой проведения школьных олимпиад – соревнований, позволявших выявлять молодые математические таланты. Первая такая олимпиада прошла в стенах Московского университета осенью 1935 г. Ее возглавил П.С. Александров, а в оргкомитет вошли такие известные математики, как А.Н. Колмогоров, Л.Г. Шнирельман, С.Л. Соболев, Л.А. Люстерник. Карьера многих впоследствии известных математиков началась с победы на таких олимпиадах. Само олимпиадное движение с годами укреплялось и ширилось, со временем появились всесоюзные (ныне всероссийские), а в последние десятилетия и международные олимпиады.

Московский университет выступил еще с одной инициативой – создания школ-интернатов для особо одаренных к математике детей, которых отбирали по всей стране. Первое заведение такого рода – знаменитая Физико-математическая школа-интернат № 18 при МГУ – было основано в 1963 году А.Н. Колмогоровым. Преподавание в нем (а он существует и поныне) ведут сотрудники Московского университета по особым, созданным специально для школ такого уровня программам. Московский опыт не остался единственным. Примером тому может служить математическая школа-интернат при Петербургском университете. Кроме этого, в крупных научных центрах появилась сеть специализированных математических школ, обучение в которых следовало усложненной математической программе (14).

Однако центральной задачей среднего математического образования было и остается осуществление качественного обучения, отвечающего уровню современной науки и запросам практики сегодняшнего дня, в обычной неспециализированной средней школе.

В 60-е годы вновь (и как всегда) остро встала проблема изменения содержания курса школьной математики – приближения его к содержанию современной математической науки. На протяжении ряда лет соответствующая работа велась в Академии педагогических наук СССР под руководством ее вице-президента, известного математика и педагога А.И. Маркушевича. Ему удалось привлечь к ней крупнейшего математика XX века А.Н. Колмогорова, который и возглавил группу математиков и педагогов, приступивших в начале 60-х годов к подготовке глобальной реформы математического образования. Работа эта велась под патронажем Академии наук СССР, Академии педагогических наук СССР, Министерства просвещения СССР и Министерства просвещения РСФСР. В 1966 г. был опубликован первый вариант новой программы по математике для 4-10 классов, в 1967 г. – второй вариант, а в 1968 она была утверждена Министерством просвещения СССР. Согласно этой программе, кардинально менялись идеология и содержание школьного математического образования. Курс математики предполагалось начать с изучения элементов теории множеств, затем следовала основанная на этой теории арифметика, следом шла алгебра, пронизанная идеями множества, соответствия и функции. В планиметрии предполагалось выдвижение на передний план идеи геометрических преобразований, геометрические фигуры рассматривались как множества точек, вводились элементы векторного исчисления. Начала анализа, которые должны были изучаться в старших классах (с введением понятий предела, производной, определенного интеграла), предполагалось давать с использованием языка "эпсилон-дельта". Стереометрию предполагалось строить на векторной основе. Наконец, заключать курс математики должна была аксиоматическая система геометрии. На обсуждение программы, на написание учебников, на экспериментальную проверку отводилось очень мало времени. К новой системе в массовом порядке школы начали переходить в 1970/71 учебном году. По планам Министерства просвещения СССР, реформа должна была быть закончена в 1975 г. Закончилась она в 1978 полной неудачей. В чем основная причина неудачи – в самом ли содержании реформы, в неудачном ее исполнении (наскоро написанные учебники, не подготовленный к реформам контингент преподавателей), в торопливости ее проведения – мы здесь обсуждать не будем, отсылая читателя к специальной литературе, содержащей противоречивые оценки (см., например, [5, 20, 21]). Отметим только некоторые важные для нас моменты. Во-первых, вопрос о реформе преподавания математики в средней школе рассматривался как задача государственная – ее обсуждение выносилось на страницы ведущих изданий, в частности, главного идеологического журнала ЦК КПСС – журнала "Коммунист". Во-вторых, в ее обсуждение оказались вовлеченными крупнейшие математики страны (А.Н. Колмогоров, А.Н. Тихонов, Л.С. Понтрягин, С.Л. Соболев, А.Д. Александров, Л.В. Канторович, И.М. Гельфанд и др.), все математическое сообщество(15). (О математическом образовании в советской высшей школе см. также [22, 23].)

5. Последнее десятилетие (вместо заключения)

В последнее десятилетие Россия переживает сложный период своей истории. И вновь среди важнейших проблем, перед ней стоящих, оказываются задачи народного образования. Решать их приходится с учетом сложных социальных реалий сегодняшнего дня. Предложенная Министерством образования РФ реформа народного образования, включающая и реформу математического образования в средней школе, вызвала резкую, в значительной степени негативную реакцию математической общественности. С ее критикой выступил Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук (16). 27 ноября 2001 г. Московское математическое общество провело специальное заседание “Реформы школы и перспективы математического образования”, на котором с критикой реформы выступили ведущие крупнейшие математики (Д.В. Аносов, А.А. Болибрух, С.М. Никольский, В.М. Тихомиров и др.) и ведущие педагоги Москвы [24. С. 179]. Не вступая здесь в обсуждение основных положений предлагаемых нововведений (их взвешенный анализ читатель найдет, например, в книге [25]), подчеркнем только следующее: трехсотлетний (отсчитывая от основания в 1701 году Петром Великим Навигацкой школы) опыт развития системы русского математического образования со всей очевидностью показал, что успешное развитие Российского государства зиждется на высоком уровне его научно-технического потенциала, который может быть обеспечен только при наличии высокой математической культуры, она возможна лишь при соответствующем уровне математического образования, прежде всего, школьного. Государство, желающее быть сегодня конкурентноспособным, должно обратить особое внимание на народное образование как на систему, включающую все его ступени, от начального до высшего, в их тесной взаимосвязи, с особым вниманием к фундаментальным его составляющим, среди которых математике должно быть отведено одно из центральных мест. Российская система образования (и в этом всегда была ее особая сила) делала особый акцент не на незамедлительной пользе, которую должно давать образование, но на фундаментальности сообщаемого знания, что делает учащегося способным легко приобретать новое знание, лучше ориентироваться в окружающей его действительности и создает необходимый базис для формирования научного мировоззрения. Только при действенной государственной поддержке, опираясь на мощный творческий потенциал отечественных математиков и на опыт лучших наших педагогов, можно выработать систему математического образования, способную обеспечить потребности нашего отечества в XXI веке.

Примечания

1. Следует, конечно, помнить и о более ранних попытках приобщить Русь к учености Нового времени, ставших особенно заметными во второй половине XVII века. Эти попытки нашли свое выражение, например, в организации школ нового типа, из которых самой знаменитой стала Славяно-Греко-Латинская академия, учрежденная в Москве в 1687 г. Однако все эти попытки лишь создавали почву для великих реформ Петра.

2. Первые шаги в подготовке такой системы восходят еще к екатерининским временам: вспомним об организованной в 1782 г. Комиссии об учреждении народных училищ, подготовившей проект об организации университетов, реализации которого помешали революционные события во Франции. Эта комиссия создала в стране сеть училищ – уездных и губернских. В Петербургском главном училище было открыто специальное отделение для подготовки учителей, в 1786 г. преобразованное в Учительскую семинарию. Именно эта семинария в 1804 г. была преобразована в Педагогический институт, который с 1816 года был переименован в Главный педагогический институт. На его основе в 1819 г. и был организован Санкт-Петербургский университет.

3. В 1802 г. был учрежден университет в Дерпте, в 1803 – в Вильно, в 1805 – в Казани и Харькове, в 1819 – в Петербурге. В 1832 г. по политическим соображениям был закрыт университет в Вильно, вместо него в 1834 г. был организован университет Св. Владимира в Киеве.

4. Т.С. Полякова называет это “патронатом над математическим образованием математики как науки” [4. С. 602].

5. В 1828 г. был принят новый Устав гимназий, установивший жестко сословный принцип приема, усиливший классическое начало в составе преподаваемых дисциплин и ослабивший позиции так называемых реальных наук, в частности, математики. В то же время впервые в нашей истории Уставом вводился утвержденный министерством учебный план по математике [2. Т. 2. С. 147–150, 4. С. 267–268, 5. С. 58]. В 1835 г. появилось новое положение об управлении округами, согласно которому университеты, как рассадники вольнодумства, отстранялись от курирования гимназий, а директора гимназий – от управления низшими школами. Вся власть в округе сосредоточивалась в руках назначаемого правительством попечителя. В 1845 г., усиливая классическую компоненту гимназического образования, правительство издало циркуляр "Об ограничении в гимназиях преподавания математики", согласно которому из программы исключались аналитическая и начертательная геометрия. В 1849 г. "классическая компонента" в гимназическом образовании пошла на убыль – распоряжением министра в некоторых гимназиях уменьшалось число часов, выделяемых на греческий язык, и укреплялись позиции естествознания. В 1852 г. была введена новая экспериментальная программа по математике, в которой особое внимание уделялось приложениям математики к практике, а также ставилась задача выявления внутрипредметных связей между отдельными математическими дисциплинами [4. С. 293]. В 1864 г. на пике либеральных реформ Александра II был введен новый Устав гимназий и прогимназий, делавший среднее образование в России общедоступным для всех сословий, закреплявший их разделение на классические и реальные, поднимавший роль педагогических советов. В Уставе отсутствовали программы по каждому предмету. Объем же необходимых знаний определялся инструкциями Ученого комитета министерства просвещения. Опубликованная в 1865 г. инструкция по математике была составлена П.Л. Чебышевым. В 1871 г. на волне антилиберальных контрреформ устав 1864 г. был заменен новым, действовавшим вплоть до революции 1917 г. Не останавливаясь на общей оценке Устава 1871 г. – устава, вновь вернувшего сословный принцип комплектования гимназий, ограничимся цитатой из объяснитель-

ной записки к нему, дающей возможность почувствовать сам дух документа: "Главнейшими, основными предметами гимназического учения всегда и везде справедливо признавалась математика и, в особенности, древние классические языки, и поэтому на них должны преимущественно сосредоточиваться, упражняться и созревать умственные силы учащихся" (цит. по [4. С. 341]).

6. В XIX столетии в России в результате деятельности приглашенных в Россию парижских политехников П. Базена, Г. Ламе и Б.П.Э. Клайперона, а также русского ученого М.В. Остроградского сформировалась замечательная школа военных инженеров, превосходно владевших математикой и способных получать самостоятельные важные результаты в прикладной математике. Из этой школы в конце века вышел знаменитый А.Н. Крылов. Технические вопросы с успехом разрешались в Московской школе Н.Е. Жуковского, автора пионерских работ по аэро- и гидродинамике, "отца русской авиации".

7. Вот несколько таких учебных руководств: "Руководство начальной геометрии" (1855–1860) и "Программа и конспект тригонометрии для руководства военно-учебных заведений" (1851) знаменитого М.В. Остроградского, "Начальная алгебра" (1853; выдержала два переиздания) его ученика, профессора Киевского университета А.Н. Тихомандрицкого, "Начальная алгебра" (1860; выдержала четыре издания) академика О.И. Сомова, "Элементарная геометрия в объеме гимназического курса" (1-е изд. М., 1864, 39-е изд. М., 1922) и "Начальная алгебра" (1866; 25 изданий) известного математика, профессора Московского университета А.Ю. Давидова.

8. Вот некоторые из числа наиболее известных: Ф.И. Симашко – автор выдержавших несколько изданий "Уроков практической арифметики" (1852) и "Тригонометрии" (1852; выдержала 6 изданий) , А.Ф. Малинин и К.П. Буренин – авторы "Руководства арифметики" (1866; выдержало 15 изданий) и "Собрания арифметических задач" (1866; 18 изданий), Н.А. Шапошников – автор "Курса прямолинейной тригонометрии и собрания тригонометрических задач" (1880, 23 издания), Н.А. Рыбкин "Конспект прямо-

линейной тригонометрии” (1888, многократно переиздавался и в переработанном виде служил учебным руководством еще в 50-е годы XX века), С.И. Шохор-Троцкий – автор “Сборника упражнений по арифметике для учащихся в народной школе” (1888, 12 изданий).

9. Впрочем, очень немногие математики того периода могли избежать работы в средней школе в период своей практически не оплачивавшейся приват-доцентуры.

10. А.П. Киселев (1852–1940) – уроженец г. Мценска (ныне Орловская область), выпускник Санкт-Петербургского университета, автор замечательных учебников для средней школы [4, 5, 8].

11. О русских журналах XIX–XX вв., предназначенных учителям математики, см. [1, 4. С. 374–389, 5, 14].

12. Подчеркнем здесь чрезвычайную активность деятелей средней школы – для сравнения заметим, что в советское время первый Всероссийский математический съезд был собран только в 1927 г.

13. “Мы считаем, что и советская система математического образования, признаваемая сейчас лучшей в мире, является одной из моделей международной классической системы школьного математического образования, реставрированной в 30-е гг. XX в. после многолетних бесплодных исканий” [4. С. 356].

14. Разумеется, процесс этот не протекал гладко – в начале 70-х годов по причинам идеологического характера началась атака против специализированных школ – так, в 1973 г. была закрыта известная 2-я школа г. Москвы [20. С. 19]. Правда, и эта волна впоследствии затихла.

15. Конечно, это обсуждение, как и любая сколь-нибудь заметная дискуссия, разворачивающаяся в наше время, было отягчено, а в некоторой степени даже спровоцировано сложными взаимоотношениями, сложившимися в сообществе (см. [20]).

16. Этот вопрос стал предметом специального обсуждения на Ученом совете Математического института им. В.А. Стеклова 27 ноября 2001 года. В его решении, в частности, говорится: “Ослабление математического образования и математической культуры

в стране угрожает падением не только интеллектуального, но и индустриального, а впоследствии и военного уровня России” [24. С. 179].

Библиографический список

1. *Юшкевич А.П.* История математики в России до 1917 года. М.: Наука, 1968.
2. История отечественной математики. Киев: Наукова Думка, 1966–1970. Т. 1–4.
3. *Симонов Р.А.* Математическая мысль Древней Руси. М.: Наука, 1977.
4. *Полякова Т.С.* История математического образования в России. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2002.
5. *Колягин Ю.М.* Русская школа и математическое образование. М.: Просвещение, 2001.
6. *Киро С.Н.* Математика на съездах русских естествоиспытателей и врачей // Историко-математические исследования. 1958. Вып. 11. С. 133–158.
7. *Киселев А.А., Ожигова Е.П.* П.Л. Чебышев на съездах русских естествоиспытателей и врачей // Историко-математические исследования. 1963. Вып. 15. С. 291–317.
8. *Авдеев Ф.С., Авдеева Е.К.* Андрей Петрович Киселев. Орел: Изд-во Орловской телерадиовещательной компании, 2002.
9. *Андронов И.К.* Полвека развития школьного математического образования в СССР. М.: Просвещение, 1967.
10. *Ланков А.В.* К истории развития передовых идей в русской методике математики. М.: Учпедгиз, 1951.
11. *Прудников В.Е.* Русские педагоги-математики XVIII–XIX веков. М.: Учпедгиз, 1956.
12. *Шереметевский В.П.* Математика как наука и ее школьные суррогаты // Русская мысль. 1895. Кн. 5.

13. *Демидов С.С.* “Математический сборник” в 1866–1935 гг. // Историко-математические исследования. 2-я сер. 1996. Вып. 1(36). № 2. С. 127–145.
14. *Дахия С.А.* “Журнал элементарной математики” и “Вестник опытной физики и элементарной математики” // Историко-математические исследования. 1956. Вып. 9. С. 537–612.
15. Труды 1-го Всероссийского съезда преподавателей математики. СПб., 1913. Т. 1–3.
16. Доклады, читанные на 2-м Всероссийском съезде преподавателей математики в Москве. М., 1915.
17. *Саввина О.А.* Исторические очерки о преподавании высшей математики в средних учебных заведениях России. Ч. 1. М.: МПУ, ЕГУ, 2001. Ч. 2. Елец: ЕГУ, 2002.
18. Методика обучения высшей математике в средней школе России: история становления: Хрестоматия / Сост. Р.З. Гушель, В.П. Кузовлев, О.А. Саввина. Елец: ЕГУ, 2002.
19. *Гушель Р.З.* О движении за реформу математического образования в начале XX века // Историко-математические исследования. 2-я сер. 1999. Вып. 3(38). С. 168–177.
20. Абрамов А.М. О положении с математическим образованием в средней школе (1987–2003). М.: Фазис, 2003.
21. *Petrova S.* La reforme de Kolmogorov de l‘enseignement des mathematiques en Union Sovietique / B. Belhost, H. Gispert, N. Hulin (Ed.) Les sciences au lycee. Un siecle de reformes des mathematiques et de la physique en France et a l‘etranger. Paris: Vuibert-INRP. 1996.
22. История математического образования в СССР. Киев: Наукова Думка, 1975.
23. *Рыбников К.А.* Математика в СССР; образование и наука. Очерк истории. М.: Изд-во механико-математического ф-та МГУ, 2004.
24. Успехи математических наук. 2002. Т. 57. Вып. 3.
25. *Кудрявцев Л.Д.* Среднее образование. Проблемы. Раздумья. М.: МГУП, 2003.

Об академике В.И. Смирнове, ученом и человеке

Г.П. Матвиевская

В 2004 г. исполняется тридцатая годовщина смерти академика Владимира Ивановича Смирнова (1887–1974), замечательного ученого и педагога, который долгие годы находился в центре научной жизни Ленинграда и олицетворял традиции Петербургской математической школы. Он оставил после себя глубокие научные труды по теории функций комплексного переменного, математической физике, аналитической теории дифференциальных уравнений, капитальный, неоднократно переиздававшийся на разных языках "Курс высшей математики" в пяти томах [2], и многочисленных учеников, навсегда сохранивших благодарную память о нем.

В 1994 г. в академической серии "Научно-биографическая литература" была опубликована книга о В.И. Смирнове, в которую, кроме обзора жизни и деятельности ученого, включены воспоминания его сотрудников и учеников, в том числе крупных математиков, друзей и людей, хорошо его знавших [1]. Она вышла крайне малым тиражом (250 экземпляров) и сразу стала библиографической редкостью.

Ответственным редактором издания была академик О.А. Ладыженская. В написанном ею введении В.И. Смирнов показан как представитель Петербургской математической школы, развивавшейся в тесном контакте с запросами естествознания и техники. "Его научным руководителем, – пишет О.А. Ладыженская, – был академик В.А. Стеклов, отличавшийся и своими яркими, оригинальными работами в области анализа и математической физики, и своим умением заражать творческим энтузиазмом окружающих его учеников и коллег. В полной мере Владимир Иванович осознал глубину и самобытность таланта А.М. Ляпунова, лучше других знал его замечательные работы, а со временем стал и близким ему человеком. Он был хорошо знаком и с научными интересами выдающегося академика-корабела А.Н. Крылова, который нередко обращался к нему за различными математическими консультациями. Общность научных интересов, глубокое взаимное уважение и доверие связали Владимира Ивановича с его знаменитыми коллегами – Н.М. Гюнтером и С.Н. Бернштейном".

Особенно важным для творчества В.И. Смирнова было его многолетнее сотрудничество с академиком Д.С. Рождественским. Их связывала близость взглядов на развитие теоретических разделов физики и на методы преподавания математики и физики в университетах, которое было ими кардинально перестроено. Так как при этом потребовались новые учебники и учебные пособия, то, по словам О.А. Ладыженской, "Владимир Иванович взял на себя огромный труд по созданию всеобъемлющего курса математики, необходимого как студентам и преподавателям, так и научным работникам и инженерам, работающим в самых различных областях естествознания и в самой математике".

В первом разделе книги содержится биографический очерк, в составлении которого приняли участие многие авторы (О.А. Ладыженская, А.Н. Боголюбов, В.М. Урбанский, Е.П. Ожигова, С.Г. Михлин, А.В. Кольцов, Г.П. Матвиевская, Б.А. Малькевич, С.П. Луппов, Л.Ф. Николаева). Они подробно, с использованием архивных документов, осветили нелегкий жизненный путь В.И. Смирнова. Особо были отмечены некоторые важные моменты его научной биографии – создание "Курса высшей математики", творческая и организационная работа в области истории науки, сотрудничество с Библиотекой и Архивом Академии наук СССР.

Второй раздел книги посвящен математическим работам В.И. Смирнова, диапазон научных интересов которого был очень широк.

О.А. Ладыженская и И.И. Маркуш рассмотрели работы, выполненные в ранний период творчества ученого и, в частности, его магистерскую диссертацию "Задачи обращения линейного дифференциального уравнения второго порядка с четырьмя особыми точками", защищенную в 1918 г. Интересна обнаруженная в архиве рецензия на эту работу, подписанная В.И. Стекловым и Н.М. Гюнтером. И в дальнейшем В.И. Смирнов проявлял интерес к аналитической теории дифференциальных уравнений. Под его руководством в этой области в 20-е гг. работал И.А. Лаппо-Данилевский.

Статья О.А. Ладыженской посвящена работам В.И. Смирнова о граничных свойствах аналитических функций и теории приближений, написанным в 1926–1933 гг. В ней показано, что новый по тому времени подход к классическим вопросам обусловил "не только завершенность и непреходящую ценность результатов В.И. Смирнова, но и влияние его исследований на последующее развитие комплексного анализа и его проникновение в теорию операторов, теорию дифференциальных уравнений, теорию вероятностей и другие области анализа".

Анализ работ В.И. Смирнова в области аналитической теории дифференциальных уравнений дал В.А. Якубович, обративший внимание на их связь с известной проблемой Римана-Гильберта (21-я проблема Гильберта).

В статье Н.К. Никольского и В.П. Хавина рассматриваются результаты исследований В.И. Смирнова по комплексному анализу, которым он начал заниматься в 1926–1927 гг. В это время, когда, как пишут авторы, "идеи абстрактного пространства, интеграла Лебега и нарождающейся топологии изменяли и изменили лицо математики, сделав его таким, каким мы знаем его сейчас", эти идеи еще не стали достоянием массового математического сознания. Среди первых математиков, успешно работавших в этом направлении, был В.И. Смирнов. В статье показано, что задачи, которыми он занимался, и доказанные им теоремы в дальнейшем приобретали все большую актуальность и важность. Они применяются сейчас как в дисциплинах аналитического цикла, так и в спектральной теории, и во многих других разделах математики.

Статья С.Г. Михлина содержит анализ результатов В.И. Смирнова по динамической теории упругости, полученных им в 1929–1935 гг. во время работы в Сейсмологическом институте Академии наук. Некоторые его публикации по этой тематике вышли в соавторстве о его учеником С.Л. Соболевым. Выделены три группы исследований по этой тематике: 1) работы, связанные с решением задачи о действии сосредоточенной силы на упругое полупространство, в ходе которого вводится класс решений волнового уравнения, получивших название функционально-инвариантных решений и находящих широкое применение в теории упругости; 2) работы о решении задачи о колебаниях круга, сферы или внешности этих областей, в ходе которого был введен новый метод неполного разделения переменных; 3) работы, в которых была установлена связь между функционально-инвариантными решениями и теорией изотропных конгруэнций. "На примере проанализированных работ, – заключает свою статью С.Г. Михлин, – видно, что В.И. Смирнов превратил динамическую теорию упругости из небольшого собрания разрозненных фактов, не всегда достаточно надежно установленных, хотя порой и важных, в развитую ветвь механики со своими проблемами, методами и результатами". В этом направлении его исследования продолжали Н.П. Еругин, М.М. Смирнов, Г.И. Петрашень и др.

Г.И. Петрашень остановился на исследованиях В.И. Смирнова, относящихся к вопросу о распространении и дифракции нестационарных упругих волн. Он отметил, что если в 1929–1941 гг. В.И. Смирновым были получены важные, качественно новые результаты в теоретической сейсмологии, то в последующий период он активно участвовал в исследованиях, будучи "вдохновителем и консультантом работ все возрастающего числа его учеников и учеников его учеников, посвятивших свои силы исследованиям в этой области". В результате деятельности В.И. Смирнова возникла и получила всеобщее признание Ленинградская школа теории распространения и дифракции волн.

Третий раздел книги содержит воспоминания о В.И. Смирнове, звучавшие на научных заседаниях, посвященных его памяти, и написанные специально для этого издания.

Академик А.Д. Александров в своем выступлении сказал, что "от Владимира Ивановича исходило тепло доброжелательности и яркий свет искренней заинтересованности", так что "общение с ним было настоящим праздником". Его отличало сознание долга, весь его облик – это “облик человека, полного сознания долга перед делом, которому он служит”.

О том же говорил академик С.Л. Соболев, ученик В.И. Смирнова. Он вспоминал время их близкого общения в период работы в Сейсмологическом институте Академии наук, рассказал об исследованиях, которые проводил тогда В.И. Смирнов, и особо отметил необычайную многогранность его интересов: помимо науки он любил музыку, хорошо ее понимал, сам играл с листа произведения классиков, прекрасно знал историю и литературу.

О.А. Ладыженская, заметив, что жизнь В.И. Смирнова дала нам пример, достойный восхищения и подражания, остановилась на одной его характерной черте – самоотверженной помощи окружающим людям, судьба которых его всегда глубоко волновала. Это касалось и его учеников, число которых нельзя назвать даже приблизительно: “Официальное число аспирантов и докторантов Владимира Ивановича в любом случае неизмеримо меньше числа людей, которые пользовались его консультациями, советами, его обширными знаниями и пониманием важности того или иного направления”.

Член-корреспондент Академии наук Д.К. Фаддеев, сам прекрасный пианист, вспоминал о музыкальных вечерах у В.И. Смирнова, на котором они в четыре руки играли Бетховена.

Воспоминаниями о В.И. Смирнове поделились члены-корреспонденты Академии наук Украины А.Н. Боголюбов и В.Н. Кошляков, профессора В.М. Бабич, В.С. Булдырев, Е.С. Павлов, С.В. Валландер, В.А. Залгаллер, Г.П. Матвиевская, С.Г. Михлин, Г.И. Петрашень, Н.Н. Поляхов, Н.А. Сапогов, Л.А. Халфин, А.П. Юшкевич, В.Я. Якубович, друзья и родные.

Составители книги Г.П. Матвиевская и Е.П. Ожигова включили в нее список трудов В.И. Смирнова и работ, посвященных ему, основные даты его жизни и деятельности

Из-за ничтожно малого тиража книга о В.И. Смирнове оказалась практически недоступной читателю. Сейчас ведется работа над новым, дополненным изданием, в котором будут использованы материалы, появившиеся за последние десять лет. В его подготовке участвует Научно-исследовательский институт математики и механики Санкт-Петербургского университета, с 1988 года носящий имя В.И. Смирнова.

Библиографический список

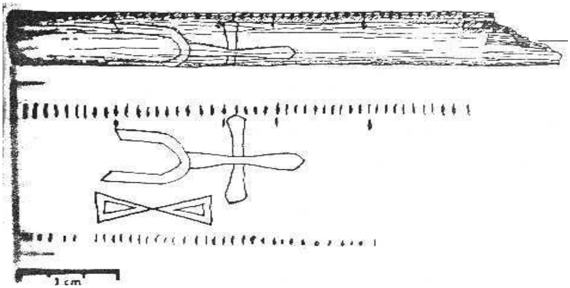
1. Владимир Иванович Смирнов / Отв. ред. О.А. Ладыженская. СПб.: Наука, 1994. 288 с.
2. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. М., 1957. Т. 1–5.

Древнейший памятник математической культуры Древней Руси 2-й половины X века

Р.А. Симонов

В 1998 г. во время археологических раскопок в Новгороде (руководитель акад. В.Л. Янин) была обнаружена деревянная счетная бирка, датируемая 2-й пол. X в. (не позже 950–990 гг.). Она содержит княжескую эмблему Ярополка Святославича, чьи чиновники распоряжались в городе в 977–980 гг., поэтому время появления памятника может быть сужено до указанных годов. Рассматриваемая бирка является своеобразным математическим документом. О ее счетном назначении свидетельствуют сделанные на ней 80 зарубок: 45 на одной стороне (с разметкой на группы по $10+10+5+10+10$ зарубок) и 35 – на другой (без разделения на группы).

На бирке также имеется своеобразный знак в виде двух треугольников, соединенных вершинами, наподобие "бантика" (см. рис.). Р.К. Ковалевым (Университет Миннесоты, США) было выдвинуто предположение о его числовом характере. Знак мог получиться в результате сближения (до соприкосновения) двух греческих "дельт", каждая из которых обозначала четверку, а вместе – восьмерку ($4+4=8$), передававшую 8 десятков, т.е. 80. Р.К. Ковалев об этом пишет так: "...Знак представляет собой два треугольника, соединенных перпендикулярно друг к другу в одном из трех углов каждого. Весьма вероятно, что эти треугольники являются двумя соединенными греческими буквами Δ (то есть “дельта”) [1. С. 37.].



Счетная бирка 2-й половины X в. (Новгород, Троицкий раскоп)

В случае правильности такого отождествления следует учитывать, что представленная на бирке древнерусская традиция использования греческой “буквенной цифры” 4 в виде “дельты” должна быть очень старой, чтобы превратиться в специфический, своего рода орнаментальный знак в виде “бантика”, цифровое происхождение которого лишь угадывается. Доказательством предшествующего, достаточно отдаленного счета у славян удвоенными сорока́ми могут служить воспроизводимые Р.К. Ковалевым слова Константина Багрянородного, сказанные в X в., но относящиеся к событиям середины IX в.: “В благодарность за эту услугу Михаил Борис (болгарский князь – Р.С.) дал им (сербам – Р.С.) большие дары, и они взамен дали ему в качестве подарка двух рабов, двух соколов, двух собак и 80 шкур меха...” [2. С. 143].

Р.К. Ковалев справедливо видит в этих словах отражение парного счета у славян за век-полтора до счетной бирки с тамгой (знаком собственности) кн. Ярополка Святославича. По указанному поводу он пишет: “Так как все подарки, присланные Михаилом Борисом сербам, были парными, становится очевидным, что указанные при перечислении даров восемьдесят шкурок представляли собой ни что иное, как два сорочка. Это свидетельство о меховых шкурках, общее количество которых кратно сорока, почти на двести лет предваряет древнерусские литературные источники, в которых непосредственно упоминается сорочок” [1. С. 44].

Впервые слово “сорочок” появляется в берестяной грамоте № 910 рубежа XI–XII вв. [3. С. 9–10, 4. С. 58–59]. Р.К. Ковалев обосновывает, что так назывался на Руси стандартный эталон упаковки мехов в связки по 40 штук [4. С. 57–71].

Сорочок мог функционировать в качестве денежного эквивалента и служить формой капитала в кредитных операциях. Такая сфера применения сорочка подтверждается текстом берестяных грамот и находками нескольких кредитных бирок-сорочков, датирующихся 2-й четв. XI–2-й четв. XII вв. [5. С. 28–35]. Кредитные бирки-сорочки, условно говоря, были своеобразными деревянными деньгами. Внешне они напоминали небольшие жезлы с зарубками, первоначально круглые в сечении, но затем раскалываемые вдоль на две части по зарубкам (одна часть находилась у кредитора, а другая – у должника). В отличие от кредитных бирок-сорочков, назначение счетных бирок-сорочков, которые не раскалывались вдоль на две части (к их числу принадлежит древнерусская счетная бирка 2-й пол. X в. с “бантиком” и тамгой кн. Ярополка Святославича), не является ясным.

Кроме зарубок, выражающих единицы (штучное количество шкурок), на некоторых бирках встречаются деления, передающие числа следующего разряда – десятков. Так, на кредитной бирке-сорочке 2-й пол. XII в. с отломанным концом, найденной на Троицком раскопе Новгорода в 1992 г., содержится 30 зарубок. На противоположной ее стороне указаны еще 4 зарубки. По мнению Р.К. Ковалева, можно с уверенностью предполагать, что они “были вырезаны для того, чтобы указать количество десятков, обозначенных на бирке” [5. С. 32]. Значит, первоначально эта бирка могла содержать 40 делений, разделенных на 4 группы (десятки), что удостоверялось на противоположной стороне четырьмя отдельными насечками.

Итак, очевидно, здесь было записано зарубками-единицами число 40 (впоследствии часть бирки с последним десятком была утрачена); на обороте сохранилась продублированная запись того же числа 40 четырьмя зарубками-десятками. Указанная реконструкция подтверждается аналогичной (сохранившейся полностью) числовой записью на счетной бирке 1-й пол. XI в. из Ростова Великого. Здесь на одной стороне насчитывается четыре десятка зарубок-единиц (точнее 39), а на противоположной стороне указаны еще четыре, выражающие 4 десятка [5. С. 31, 6. С. 139–140].

Обсуждаемая традиция дублирования чисел восходит к счетной бирке 2-й пол. X в. Первоначально она (традиция) была несколько иной: число 40 дублировалось не зарубками-десятками, а выражалось греческой “буквенной цифрой” 4 (“дельта”). Поскольку на рассматриваемой бирке записано зарубками-единицами число 80, то есть дважды 40, то оно было продублировано двумя “дельтами”. По мнению Р.К. Ковалева, “на этой бирке, очевидно, обозначены две связки по сорок меховых шкурок (или восемь десятков шкурок), мы можем полагать, что эти два треугольника были нанесены на бирку для того, чтобы зафиксировать общее количество десятков шкурок, подсчитанных на бирке. Иными словами, когда насчитывался полный сорочок, на бирке вырезали треугольник или дельту, чтобы обозначить, что эта бирка содержит такой полный сорочок (данная бирка содержала, соответственно, два сорочка)” [1. С. 38].

Такое объяснение, очевидно верное по существу, не раскрывает одного важного обстоятельства: зачем сделавшему числовую запись (зарубками) человеку дублировать ее. Вопрос несколько проясняется, если допустить, что первоначальная запись на счетной бирке дублировалась другим человеком. Тогда становится понятной определенная “разностилевость” числовых записей: первоначальной и дублетной. Первоначальные числа бесхитростны и ясны. Для их нанесения достаточно каждую шкурку сорочка отметить путем зарубки на деревянной палочке. Дублетные числа соответствуют другому, более “продвинутому” уровню математической подготовки.

Этот уровень предполагает умение обобщать числовую информацию, сводящееся к ее выражению более компактным образом. Древнерусские деревянные бирки демонстрируют несколько способов обобщения числовой информации:

– *путем использования греческой “буквенной цифры” “дельта”*

(4) *для обозначения 4 десятков;*

– посредством “укрупнения” зарубок-единиц до значения десятков.

Из этого следует, что авторам первоначальных записей на бирках зарубками-единицами и составителям числовых записей-дублетов могли быть свойственны разные функции, иной статус (общественное положение) и образовательный уровень. Вероятнее всего, числа зарубками-единицами записывали добытчики мехов, простые необразованные люди. Дублетные числовые записи могли оставить люди с положением по средневековым меркам.

Проведенный анализ, возможно, поможет выйти на решение сложной задачи о назначении счетных бирок-сорочков. Можно высказать в качестве предварительной следующую гипотезу. На счетных бирках-сорочках оставляли дублетные записи люди, которых можно условно называть “приемщиками” мехов. Меха добывались и затем поставлялись (в качестве пошлины или товара на продажу и пр.) людьми, которых также условно можно именовать “охотниками”.

По-видимому, счетная бирка-сорочок была своеобразной квитанцией, на которой “приемщик” отмечал факт поступления пошлины, товара. Этим, кстати, может объясняться несовпадение на бирке из Ростова Великого чисел “охотника” (39) и “приемщика” (4 десятка). Указанное расхождение в числах могло быть обусловлено тем, что “приемщик” считал шкурки, а не зарубки. Приняв от охотника 40 шкурок, он сделал об этом отметку на бирке, которую отдал охотнику. Для последнего она служила удостоверением об уплате пошлины или свидетельством сдачи меха торговцу для продажи. По логике такого толкования, счетных бирок на сорочок должно быть две: вторая оставалась у “приемщика”, удостоверяя факт поступления шкурок от “охотника”.

Наличие двух бирок косвенно подтверждается существованием на Западе термина zimmer/timber, выражавшего “узаконенное количество мехов в сорок меховых шкурок, упакованных между двумя деревянными досками” [7]. “Досками” на Руси с Киевского периода до начала XVI в. обычно называли бирки [8. С. 38]. По мнению Р.К. Ковалева, способ упаковки меховых шкурок сорочками могли увидеть в Новгороде варяжские дружинники, через которых он распространился на Запад, достигнув к 1150 г. Шотландии [4. С. 61].

Как думает Р.К. Ковалев, “иноземные купцы могли спрашивать у русских про “доску” того или иного меха, называя их между собой “timber” и имея при этом в виду именно сорочок мехов – иными словами, меховой сорочок стал для них понятием, синонимичным русской деревянной счетной бирке, использовавшейся для подсчета сорока меховых шкурок, и таким образом слово “timber”, означавшее “дерево”, приобрело дополнительный смысл и стало обозначать также деревянные бирки, с помощью которых насчитывались сорочки” [1. С. 55].

Относительно слов об упаковке мехов между двумя досками Р.К. Ковалев замечает: “Хотя в новое время меха упаковывались, скорее всего, именно таким образом – между двумя деревянными досками, – мы не располагаем свидетельствами о том, что так было и в более ранние времена. Кроме того, что ни в одном источнике не сообщается о том, что в средние века доски служили для упаковки мехов, представляется совершенно невероятным, чтобы купцы транспортировали меха в такой тяжелой и громоздкой упаковке – особенно на ранних стадиях развития торговли мехами в Восточной Европе, то есть в то время, когда меха начали считать по сорок штук, и именно на той территории, где эта единица стала стандартной для счета пушнины” [1. С. 51].

Аргументированный анализ Р.К. Ковалева о том, что западноевропейское zimmer/timber – “дерево” – означает деревянную бирку, дает возможность слова о двух “досках” при транспортировке мехов толковать в смысле двух бирок (по-древнерусски “досок”), прилагавшихся к упаковке шкурок в сорочки. На основе предложенного толкования можно дополнить и уточнить процесс сдачи-приема пушнины. Сдавая пушнину, “охотник” предъявлял две деревянные бирки, на которых зарубками указывалось одинаковое количество шкурок. “Приемщик” на них делал отметку о числе принятых шкурок. Одна бирка оставалась у “приемщика”, а вторая передавалась “охотнику”.

Такое объяснение делает более “документированным” сбор пошлин в Новгороде, который обрел реальный облик благодаря обнаружению деревянных цилиндров X-XII вв., истолкованных академиком В.Л. Яниным в качестве специфических “замков”, которыми “запирались” или “пломбировались” мешки с ценностями, преимущественно пушниной, собираемой в виде пошлины. На отдельных деревянных цилиндрах имелись надписи кириллицей о стоимости ценностей в мешках и эмблемы князей [9, 10].

Деревянный цилиндр-замок с тамгой кн. Ярополка Святославича и бирка 2-й пол. X в. с эмблемой того же князя были найдены в относительной для средневекового Новгорода близости друг от друга, на расстоянии около 24 метров [4. С. 60]. Можно предположить, что при сборе вир княжеские чиновники документировали процесс своей работы, используя деревянные замки и бирки. Стоимость ценностей в мешке, отмеченную на замке, можно было проверить, суммируя обобщенные данные о количестве шкурок на бирках, по-видимому, находившихся в том же мешке. Тогда понятно, почему деревянные замок и бирка одного и того же князя находились в досягаемой близости.

Рассмотренная гипотеза позволяет несколько продвинуться в вопросе о происхождении символа типа “бантика” на древнерусской счетной бирке 2-й пол. X в. как удвоенного греческого цифрового знака “дельта”. Подобные “буквенные цифры” греческого облика до сих пор не были известны в письменной практике Руси. Традиция числовых отметок с “дельтой” (4) могла быть связана с оформлением поступления русских мехов, условно говоря, “приемщиком”-греком. О наличии на территории самой Руси (или к ней примыкающей) практики ведения торгово-хозяйственных документации на основе греческих “буквенных цифр” говорят сохранившиеся от X в. так называемые “бухгалтерские” записи по разграфленной сетке на глиняных сосудах из Тмутаракани и Саркела-Белой Вежи. Этническая принадлежность составителей указанных текстов не установлена [11. С. 57].

Традиция “дельты” на счетных бирках могла возникнуть не обязательно на территории Руси. Это значит, что она (практика “дельты”) могла быть связана и с греческо-культурными (если можно так сказать) зарубежными контактами, например, в процессе торговли русских людей (с Византией, Крымом, Хазарией, на Балканах и пр.) мехами, выплат Русью пошлин (дани) или военных контрибуций соседям, имевшим письменную греческую культуру.

Счетная бирка 2-й половины X в. с тамгой князя Ярополка Святославича является уникальным математическим документом, отражающим путь проникновения греко-византийских "буквенных цифр" на Русь. Априори представлялось, что этот путь был связан с торговыми или политическими контактами Руси с греческим миром, включая страны, испытавшие греческое культурное влияние [12].

Теперь наука располагает источником, показывающим реальное осуществление такой связи. Причем традиция соответствующих контактов может уходить в дописьменный период истории Руси, то есть до кирилло-мефодиевского этапа славянской письменности. Сама возможность использования цифр до распространения, так сказать, фонетической письменности, приспособленной к языку данного народа, не отрицается в науке [13. С. 74]. Более того, косвенные данные приводили к неоднократным попыткам такого утверждения относительно культуры Древней Руси [14. С. 31–36, 15. С. 58]. Однако только сейчас появилось необходимое источниковое основание для такого суждения.

Счетная бирка 2-й пол. X в. с эмблемой кн. Ярополка Святославича является древнейшим русским математическим документом, характеризующим развитие знаний о числе на Руси. Помимо княжеской эмблемы на рассматриваемом древнейшем русском памятнике представлен не совсем понятный символ в виде "бантика". Наиболее архаичным на Руси было выражение чисел зарубками-единицами: сколько зарубок – столько единиц содержало число. В условиях военно-политических и товарно-денежных отношений, по-видимому, на Руси познакомились с греко-византийской нумерацией, что может отражать рассматриваемый "бантик". Он мог возникнуть как результат использования сдвоенной греческой "буквенной цифры" 4 в форме "дельты" для обозначения числа 80. Это знакомство с греческим числовым обозначением, получившим на Руси символическое выражение, могло произойти еще до создания в середине IX в. славянской письменности Кириллом и Мефодием.

Библиографический список

1. *Ковалев Р.К.* Бирки-сорочки: упаковка меховых шкурок в средневековом Новгороде // Новгородский исторический сборник. СПб., 2003. Вып. 9 (19).
2. *Константин Багрянородный.* Об управлении империей. М., 1991.
3. *Янин В.Л., Зализняк А.А.* Берестяные грамоты из новгородских раскопок 1999 г. // Вопросы языкознания. 2000. № 2.
4. *Ковалев Р.К.* К вопросу о происхождении сорочка: по материалам берестяных грамот // Берестяные грамоты: 50 лет открытия и изучения. М., 2003.
5. *Ковалев Р.К.* Деревянные долговые бирки-сорочки XI-XII вв. из новгородской коллекции // Новгородский исторический сборник. СПб., 2003. Вып. 9 (19).
6. *Леонтьев А.Е.* Ростов эпохи Ярослава Мудрого: по материалам археологических исследований // История-археология: Традиции и перспективы. М., 1998.
7. Zimmer // Deutsches Wörterbuch. Bd. 15. 1956. S. 1308.
8. *Ковалев Р.К.* Новгородские деревянные бирки: общие наблюдения // Российская археология. 2002. № 1.
9. *Янин В.Л.* Археологический комментарий к Русской Правде // Новгородский сборник. 50 лет раскопок Новгорода. М., 1982. С. 138–155.
10. *Янин В.Л.* У истоков новгородской государственности. Великий Новгород, 2001.
11. *Рыбаков Б.А.* Русская эпиграфика X–XIV вв. (Состояние, возможности, задачи) // История, фольклор, искусство славянских народов. М., 1963.
12. *Симонов Р.А.* О греко-византийской основе “буквенных цифр” кириллицы // Древняя Русь. Вопросы медиевистики. М., 2002. № 4 (10). С. 48–56. 2003. № 1 (11). С. 24–29.

13. *Бернал Д.* Наука в истории общества. М., 1956.
14. *Симонов Р.А.* О некоторых особенностях нумерации, употреблявшейся в кириллице // Источниковедение и история русского языка. М, 1964.
15. *Жолобов О.Ф.* Было ли в Древней Руси девятичное счисление? // Древняя Русь. Вопросы медиевистики. М., 2002. № 3 (9).

Новый список календарно-арифметического трактата о “поновлениях” с древнерусской частью 1138 года

В.В. Мильков, С.М. Полянский, Р.А. Симонов

В 1995 г. был введен в научный оборот самый древний после “Учения” Кирика Новгородца (1136 г.) древнерусский календарно-арифметический фрагмент, имеющий точную дату написания – 1138 г., сохранившийся в списке середины XV века [1]. Прошло достаточно времени, чтобы вновь вернуться к указанному произведению и его оценке. Дополнительным поводом к этому является обнаружение нового списка трактата. Он содержится в древнерусском сборнике конца XV–начала XVI вв. (Российская государственная библиотека, фонд 594 (собр. Г.В. Юдина), № 2, далее при ссылках Юдинск-2) смешанного состава, включающем “Златую цепь”, “Хронограф” особой редакции с извлечениями из “Хроники” Георгия Амартола, “Еллинского летописца” и др. произведения.

Трактат 1138 г. в Юдинск-2 входит в подборку материалов календарного и астрономического характера (лл. 289-б – 297-б), которая разбивает “Златую цепь” на две части. Начинается подборка с записи чисел “поновлений” [2. С. 167–168] и календарных циклов. Подобные числа “поновлений” встречаются в виде отдельных статей и в составе “семитысячников” [3. С. 31]. Календарные циклы солнечного и лунного “кругов”, индикта и високоса впервые на Руси достаточно подробно характеризуются в “Учении” Кирика 1136 г. [4. С. 178–185]. Далее в подборке следует известный календарный фрагмент 1362 г., содержащий описание пасхальной методики “малого года” [5]. Список фрагмента 1362 г. в Юдинск-2 один из древнейших; старше его, кажется, только текст середины XV в., выявленный А.А. Романовой [6].

Затем в подборке идут восходящие к античности астрономические сведения о размерах объектов солнечной системы, ее устройстве и временах года. Завершает астрономическую часть обоснование разницы в 11 дней между солнечным и лунным годами. После этого следует рассматриваемый календарно-арифметический трактат с древнерусской частью 1138 г. Его текст почти совпадает с изученным ранее списком из Российской национальной библиотеки (СПб.), Кирилло-Белозерское собрание, № 10/1087, лл. 327-б – 328-б [1] (далее при ссылках Кир-Бел).

Новый список трактата 1138 г. подтверждает основные выводы, полученные на предыдущем этапе исследования текста:

1. Его содержание близко типологически (но не текстуально) к “Учению” Кирика 1136 г.

2. Составитель в 1138 г. использовал несколько иную, чем Кирик, трактовку вычислений.

3. В основе памятника 1138 г. лежит византийский оригинал IX в.

4. Текст 1138 г. мог быть откликом на трактат Кирика и свидетельствует о деятельности “числолюбцев” вне “кружка” Кирика.

5. Числовые данные текста 1138 г. по списку Кир-Бел местами искажены, что, возможно, обусловлено “издержками” его копирования в течение нескольких столетий (с XII по XV вв.).

Наличие второго списка трактата 1138 г. усиливает убеждение в том, что текст привлекал к себе внимание древнерусских ученых, включался ими в подборки календарного и астрономического содержания, особенно с XV в.

Имеются замечания частного характера, вызванные разночтениями, замеченными в списках произведения. Так, новый список (Юдинск-2) имеет ряд более исправных чисел, чем Кир-Бел, подтверждающих сделанные ранее арифметические реконструкции:

1. В Юдинск-2 указано, что “от Адама до сего года [прошло лет] 166”[1] Это верно и подтверждается расчетами и “Учением” Кирика.

[1] Числа в тексте 1138 г. записаны древнерусскими “буквенными цифрами”.

Однако в списке Кир-Бел указанное число искажено и читается как 206 или 216. По данным арифметической проверки в [1], оно было заменено на верное 166. Теперь эта реконструкция подтверждается текстом нового списка памятника (Юдинск-2).

2. В Юдинск-2 указано, что небесного "4-го (т.е. 84-го – Авт.) обновления... изошло есть 6 лет". Это подтверждается расчетами для 6646/1138 г. Однако в списке Кир-Бел шестерка отсутствует (пропущена?). В [1] число 6 было восстановлено на основе арифметической проверки. Теперь указанная реконструкция подтверждается текстом нового списка памятника (Юдинск-2).

3. В Юдинск-2 говорится, что "есть обнавлений морю от Адама до сего лета – 110". Это верно и подтверждается расчетами. Однако в Кир-Бел указанное число искажено и читается как 109. По данным арифметической проверки в [1], оно было исправлено на верное 110. Теперь эта реконструкция подтверждается текстом нового списка памятника (Юдинск- 2).

4. В Юдинск-2 говорится: "есть от Адама лет водам 95". В Кир-Бел после слов "от Адама" указывается конкретный 6646/1138 г., до которого велись расчеты циклов "поновления" вод. То есть в Кир-Бел в этом месте дается точная дата написания трактата – 1138 г., а в Юдинск-2 она пропущена. Причем во фрагменте о "поновлении" земли точная датировка (6646/1138 г.) приводится в обоих списках. Итак, в Кир-Бел дата 6646/1138 г. содержится дважды ("поновления" земли и вод), а в Юдинск-2 один раз ("поновление" вод).

5. В обоих списках "поновления" вод содержат расчеты для 6666/1158 г. (а не 1138 г.). Они, по-видимому, были сделаны в общем для обоих списков текста (протографе трактата 1138 г.?). Во всяком случае, отпадает сделанное ранее на основе списка Кир-Бел предположение, что "расчеты для 1158 г. были внесены в текст позднейшим читателем, который принял запись даты 6646 (1138) г. за 6666 (1158) г." [1. С. 75].

В заключение отметим одну не решенную до конца проблему, связанную с заголовком текста 1138 г. В обоих списках трактат имеет примерно одинаковое название; "Слово о поставленьи н(е)б(е)си и земля, моря[1] и водъ” (Юдинск-2). Отпадает высказанная ранее мысль об исправлении переписчиком Кир-Бел первоначальных слов “о поновлении” на неверные “о поставлении” (“о поставленьи”), так как последние слова имеются в обоих списках. Поскольку смысл заголовка связан с правильным переводом слов “о поставлении” (“о поставленьи”), то следует уделить этому вопросу больше внимания.

Первоначально указанные слова были истолкованы как “о восстановлении”. В связи с этим для названия текста 1138 г. был предложен перевод: “Слово о восстановлении [порядка] неба и земли и моря и воды”. В таком случае заголовок показывает стремление средневекового автора изменить отраженный в нем порядок стихий на тот, который представлен в византийской преамбуле (IX в.) трактата и в древнерусском его тексте 1138 г. (земля, небо, море, вода) [1. С. 69].

Существует также другая трактовка заголовка, предложенная С.М. Полянским: “Нам кажется более оправданным перевод древнерусского **поставленіе** в нашем контексте как “состояние”, со смыслом, аналогичным латинскому status [2. С. 204]. Тогда текст 1138 г. обретает название: “Слово о состоянии неба и земли, моря и [всех] вод”.

У каждого из вариантов заголовка есть свои плюсы и минусы. Первый вариант (Р.А. Симонова) отвечает на вопрос, почему в названии стихии имеют порядок (небо, земля, море, вода), отличный от того, который используется в основном тексте (земля, небо, море, вода). Поскольку в “Учении” Кирика 1136 г. и названии текста 1138 г. порядок стихий совпадает, то смысл этого трактата может быть в “исправлении” порядка стихий Кирика на тот, с которым связано его (трактата 1138 г.) содержание. Отсюда может проистекать неслучайность его появления вскоре после “Учения” Кирика 1136 г. и того факта, что между самыми древними датированными русскими календарно-арифметическими текстами существует тесная связь. Произведение 1138 г. могло быть своеобразным откликом на трактат Кирика, а приведение в его заголовке порядка

[1] В Юдинск-2 в словах “земля”, “моря” на месте “я” стоит буква “юс малый”.

стихий, как в “Учении” 1136 г., своего рода указанием на трактат Кирика. При этом следует учитывать, что практически ни в одном тексте “о поновлениях” нет порядка стихий, как у Кирика [1. С. 76], за исключением одного, датированного XVII в. [7]. Все сказанное относится к плюсам предложенного перевода заголовка. Его минусы состоят в редкости и приблизительности исходного “стать” в смысле “возстать” как основы для перевода слова “поставление” [8. С. 374].

Второй вариант перевода заголовка (С.М. Полянского) имеет плюсом бóльшую филологическую адекватность, особенно с учетом европейской лингвистической традиции. Отрицательной стороной перевода является его нейтральность по отношению к возможности существования на Руси в 30-х гг. XII в. календарно-математического интереса, связанного с творчеством Кирика. Это усугубляется невозможностью на основе второго варианта заголовка объяснить, почему данный в нем порядок стихий отличается от излагаемого в тексте, но совпадает с кириковским. Дальнейшие исследования, возможно, решат указанную проблему перевода названия календарно-арифметического текста 1138 г.

Можно надеяться, что включение в научный оборот нового списка (Юдинск-2) трактата 1138 г. несколько проясняет его историю и некоторые стороны календарно-арифметической культуры Руси в целом.

Библиографический список

1. *Симонов Р.А.* О новом древнерусском тексте 1138 г. // Историко-математические исследования. М., 1995. Вторая сер. Вып. 1 (36). № 1. С. 55–84.
2. *Полянский С.М.* Космологические представления и естественно-научные знания в Древней Руси // Древнерусская космология. СПб., 2004. С. 154–207.
3. *Турилов А.А.* О датировке и месте создания календарно-математических текстов-“семитысячников” // Естественно-научные представления Древней Руси. М., 1988. С. 27–38.

4. *Кирик Новгородец.* Учение им же ведати человеку числа всех лет // Историко-математические исследования. М., 1953. Вып. 6. С. 174–191.
5. *Симонов Р.А.* Древнерусский календарный фрагмент 1362 года // Источниковедение и вспомогательные исторические дисциплины. Теория и методика. М., 1990. С. 147–152; Симонов Р.А. Естественно-научная мысль Древней Руси: Избр. труды. М., 2001. С. 173–178.
6. *Романова А.А.* Методика "малого года" для расчета круга солнца и луны в русской рукописи XV века // Букинистическая торговля и история книги. М., 1998. Вып. 7. С. 13–15.
7. *Симонов Р.А.* "Восьмитысячник" XVII в. как информационное расширение банка древнерусских календарно-математических текстов // III Международная конференция "Информационные технологии в печати". Москва, 21 ноября 1996 г. Тез. докл. М., 1996. С. 16–17.
8. *Преображенский А.Г.* Этимологический словарь русского языка. М., 1959. Т. 2. П–Я.

Влияние принципов профессиональной направленности на методическую систему обучения истории математики

М.Ф. Гильмуллин

В настоящее время изучены многие вопросы применения истории математики на различных ступенях образования, как школьного, так и вузовского. Накоплен огромный научно-методический материал. Большая часть из него находится в диссертационных исследованиях (В.А. Алексеева, С.В. Белобородова, В.М. Беркутов, Б.В. Болгарский, Н.А. Бурова, Х.Ж. Ганеев, В.Н. Зиновьева, Т.А. Иванова, Д.И. Икрамов, Т.А. Корешкова, Т.Ф. Никонова, Т.С. Полякова, О.А. Саввина, И.С. Сафуанов, И.М. Смирнова, А.Е. Томилова, А.Т. Умаров, А.Т. Хохлов, О.В. Шабашова, Л.Р. Шакирова и другие). Построены различные модели профессионально-направленной историко-математической подготовки учителей математики в педвузах (С.В. Белобородова, Н.А. Бурова, Т.С. Полякова, А.Е. Томилова и другие). Накоплен большой опыт проведения в рамках курса истории математики различных математических курсов, спецкурсов, работы по формированию умений, связанных с овладением методикой использования исторического материала (Т.Н. Алешкова, А.Г. Анищенко, С.В. Белобородова, Ю.А. Дробышев, О.Н. Журавлева, В.Н. Зиновьева, Н.А. Костицина, А.Е. Малых, И.В. Мусихина, А.З. Насыров, Е.С. Петрова, О.А. Саввина, М.А. Скоробогатая, Н.Л. Стефанова, Т.Т. Фискович, Е.А. Фрибус, Л.П. Шибасов и другие). Разработаны теоретические основы методической подготовки будущего учителя математики к реализации принципа историзма при обучении учащихся (С.В. Белобородова, Ю.А. Дробышев, Т.С. Полякова). Издано несколько монографий, учебных пособий, библиографических справочников, задачников, хрестоматий по истории математики и математического образования (И.И. Баврин, Р.С. Байдулатов, В.М. Беркутов, Н.А. Бурова, И.Н. Власова, Г.Д. Глейзер, Р.З. Гушель, Ю.А. Дробышев, Е.А. Зайцев, Ю.М. Колягин, Р.А. Майер, В.С. Малаховский, А.Е. Малых, С.Н. Марков, Т.С. Полякова, А.Р. Рязановский, Г.А. Свиридюк, С.Г. Смирнов, В.М. Тихомиров, Е.А. Фрибус, В.Г. Шеретов, С.Ю. Щербакова и другие). Уделяется внимание истории математики и ее методике в журналах "Математика в школе", "Квант", в газете "Математика". К сожалению, не все эти материалы доступны массе преподавателей, учителей, студентов. Таким образом, в настоящее время стоит вопрос о систематизации методов обучения истории математики и внедрения результатов историко-методических исследований в школьную и вузовскую практику. Усилий только исследователей истории математики и ее преподавателей явно недостаточно. Требуется определенное внимание к этой проблеме со стороны Министерства образования и науки, Академии повышения квалификации, всероссийских научных конференций, издателей, библиотек.

Многие исследователи профессионально-педагогическую направленность методической подготовки будущего учителя математики сводят к формированию знаний и умений по реализации принципа историзма или историко-генетического метода при обучении учащихся. Мы считаем, что все компоненты методической системы обучения истории математики испытывают влияние профессиональной направленности подготовки учителей. Даже лидирующий компонент, цели обучения, на всех уровнях учитывает влияние внешней среды [1]. В определении доминирующей основы при выборе компонентов обучения обычно опираются на принципы А.Г. Мордковича [2]. Принципы фундаментальности и ведущей идеи являются доминирующими при выборе содержания обучения, принцип бинарности – при выборе методов обучения, принцип непрерывности – при выборе форм и средств обучения. Такой подход реализован в работах С.В. Белобородовой [3] при создании методической системы историко-математической подготовки будущих учителей на основе историко-генетического метода преподавания математики в школе.

Изучение всех работ нашей тематики позволяют их объединить в одну научную область – методики обучения истории математики. Ее объектом исследования является историко-математическое образование, обучение истории математики и воспитание, а предметом – методическая система обучения истории математики. Поэтому все ее компоненты должны быть описаны намного шире. Профессионально-педагогическая направленность обучения истории математики в педвузе проявляется как составная часть во всех компонентах методической системы. Подготовка будущего учителя математики на основе профессионально-направленного курса “История математики” является только частью объекта методики обучения истории математики. Таким образом, формирование методической культуры будущего учителя математики [3] для реализации принципа историзма при обучении учащихся является только одной из целей обучения истории математики. Условия такой методической подготовки выделены Ю.А. Дробышевым [4]. Основная цель состоит в формировании у студентов знаний и умений по совершенствованию учебного процесса с историко-математических позиций. Но все же ее нельзя считать главной целью истории математики. Иначе возникает противоречие с тем, что история математики – одна из математических дисциплин. Поэтому мы должны рассматривать более широкую область – методику обучения истории математики.

Не затрагивая остальные цели обучения истории математики, рассмотрим, как реализуется цель историко-методической подготовки в различных компонентах: в содержании, методах, формах и средствах обучения. Наиболее исследованным компонентом методической системы является содержание историко-математического образования. Разные исследователи выбирают разные критерии отбора содержания курса, исходя из целей, адекватных сформулированным им концепциям историко-математической подготовки (С.В. Белобородова, Н.А. Бурова, А.Е. Томилова). Содержание образования представляется в программах курса и реализуется в планах лекций, семинарских занятий и других форм обучения. В некоторых случаях в основу обучения положен авторский учебник (Н.А. Бурова, Р.А. Майер, С.Н. Марков). В основу курса истории математики большинства авторов положен историко-хронологический метод (линейное построение курса). Этот метод является наиболее удобным для структуризации курса и отдельных его частей. Кроме того, он удобен тем, что при его использовании отдельные вопросы курса можно излагать другими методами (предметно-модульным, концептуально-логическим, историко-географическим, персонифицированным). Кроме того, именно историко-хронологический метод позволяет описать историю математики и как единый целый раздел науки, и как составную часть истории человеческого общества. Но при линейном изложении курса достаточно сложно проследить историческое развитие каждой содержательно-методической линии школьного курса математики. Это является одним из требований стандарта, а также условием системы методической подготовки. Легче проследить эти линии при тематическом построении курса, как предлагается в некоторых программах и учебных пособиях. Но у такого изложения есть свои недостатки. Поэтому наиболее удачным будет комбинированный метод построения курса. Это комбинирование происходит за счет использования различных методов, форм и средств обучения. Поясним сказанное на примерах. Линия расширения понятия числа проходит через все периоды развития математики, начиная от зарождения до периода современной математики. Поэтому описание истории понятия числа начинается фактически от определения предмета и объекта математики, то есть на первой лекции курса. На каждом этапе развития общества, начиная от первобытного, человечество приобретало новое знание о числе. В истории первобытного общества мы изучаем возникновение первичных представлений о числе. Древними цивилизациями Востока разрабатываются различные системы счисления, включая позиционную, а также дробные числа. В Древней Греции мы уже встречаемся с несоизмеримостью и иррациональными числами. С китайской математики мы начинаем историю отрицательных чисел и десятичных дробей. Индийская математика дает позиционную десятичную нумерацию. Арабская математика помогла ее проникновению в средневековую Европу. В Эпоху Возрождения все известные числовые системы получили дальнейшее развитие, кроме того, формально были введены мнимые числа. В Новое время все числа получили полное признание, хотя строгая теория действительных чисел окончательно была построена только в XIX веке. Таким образом, в лекционном курсе линию расширения понятия числа мы пересекаем постоянно. Этому же вопросу посвящается первое семинарское занятие. Здесь студентами на основе самостоятельной работы над учебными пособиями, источниками приобретаются дополнительные знания о числах разных народов в различные исторические периоды. Они учатся работать с такими пособиями для учителя, как книги Г.И. Глейзера [5]. Начинается работа со школьными учебниками, представляется фрагмент урока с подходящим историческим материалом. При подготовке к семинарскому занятию студенты встречаются с историческими задачами и начинают собирать свой собственный задачник с методическими комментариями. Часть студентов получает индивидуальные задания. Изучаются, например, такие вопросы, как история числа ноль, числа π, алфавитные нумерации, шестидесятиричные дроби, непрерывные дроби, заслуги конкретных ученых в развитии понятия числа. Составляются тематические библиографии, хронологические таблицы (В.А. Алексеева), этимологические таблицы. Как исследовательскую задачу можно предложить студентам историю гиперкомплексных чисел и их современных аналогов – поличисел вместе с приложениями в физике и геометрии. Как реферативная работа из истории различных числовых систем предлагаются исторические обзоры основных этапов развития представлений о десятичных дробях, отрицательных, иррациональных, комплексных числах, построение различных теорий действительного числа в XIX веке. Естественно, предполагается, что рефераты включают не только историю изучаемого понятия, но и ее отражение в курсе математики средней школы, методику историко-генетического обучения. Группе студентов поручается подготовить сценарий историко-математического конкурса "Путешествие в историю математики". Он будет представлен в конце семестра и засчитан взамен реферата. Все основные этапы развития представлений о числах включаются в вопросы зачета. Они отражаются также в различных промежуточных тестах. Отметим еще, что при прохождении курса истории математики мы постоянно ссылаемся на другие математические курсы, например, математический анализ, алгебру, теорию чисел, числовые системы при изучении соответствующего вопроса, связанного с числовой линией. Тем не менее, мы отразили не все возможности реализации этой методической линии. Аналогично развертываются методические линии уравнений, функций и другие.

В решении всех поставленных задач историко-методической подготовки учителей важная роль отводится комплексному учебному пособию. В нем будет отражен весь положительный опыт создания методической системы обучения истории математики.

Библиографический список

1. *Саранцев Г.И.* Методология методики обучения математике. Саранск: Тип. "Красный Октябрь", 2001. 144 с.
2. *Мордкович А.Г.* Профессионально-педагогическая направленность специальной подготовки учителя математики в педагогическом институте. Дис. ...докт. пед. наук. М., 1986. 355 с.
3. *Белобородова С.В.* Профессионально-педагогическая направленность историко-математической подготовки учителей математики в педвузах. Дис. ...канд. пед. наук. М., 1999. 163 с.

4. *Дробышев Ю.А.* Об одном из направлений профессионально-педагогической подготовки будущего учителя математики //Профессионально-педагогическая направленность математической подготовки будущих учителей математики в педвузах: прошлое, настоящее, будущее: Труды Всероссийского научного семинара преподавателей математики педвузов. М.: МГПУ, 2000. С. 143–144.
5. *Глейзер Г.И.* История математики в школе: Пособие для учителей. В 3-х кн. М.: Просвещение, 1981–1983.

Разработка словаря по истории методики обучения математике: постановка проблемы [1]

Г.Е. Сенькина, О.Н. Куприкова

Изменения, происходящие в научной и социально-экономической жизни общества, отражаются не только на структуре, но и на содержании образования. Процессы становления математического образования в России, которые тесно связаны с этапами развития математики и педагогики и влекут за собой изменения в методике обучения математике, обуславливают необходимость выявления генезиса методических понятий в форме проектирования и разработки словаря по истории методики обучения математике.

В историческом томе методического словаря по обучению математике планируется дать систематическое описание изменений каждой заготовочной единицы (термина, понятия), которые претерпевала ее форма и содержание за весь период своего функционирования, показать историографию каждого приводимого в словаре термина. Помимо этого в историческом томе необходимо рассмотреть основные события и реформы, происходящие в сфере образования, повлекшие за собой значительные изменения в системе математической подготовки. Соотнесение этапов истории математики как науки, истории математического образования в России и

[1] Работа выполнена при поддержке Российского Гуманитарного Научного фонда по проекту № 03-03-00157а.

этапов истории методики преподавания математики позволит вывести критерии отбора терминов для планируемого словаря, такие как исторические, математические и методические. В соответствии с этими критериями основными **методами разработки** исторического тома словаря должны быть: библиографический анализ (книги, монографии, статьи, программы), анализ истории математики и математического образования (с позиций общего исторического развития), статистический (частотный) метод, экспертный анализ, лексикографический (разработка словника), информационные методы (автоматизация разработки словаря, сетевые технологии).

Описание изменений математических терминов, понятий и способов изложения материала связано с изучением изменений в школьных программах, определяющих не только круг этих базовых терминов и понятий, но и количество часов, необходимых для изучения материала, а также с подробным рассмотрением изменений содержания школьных учебников, происходящих в определенный промежуток времени, начиная, например, с "Арифметики" Магницкого и заканчивая последними новинками. Обращение не только к учебникам и программам, но и к различного рода историческим документам позволит определить все **средства** разработки исторического словаря: архивные материалы, учебники, в том числе крупные вузовские, учебные пособия, мемуары, хрестоматии, различные словари по смежным дисциплинам (педагогические, психологические, исторические), журналы, монографии (диссертации), библиографические справочники. С учетом исторической специфики словаря **требования к его содержанию** будут следующими: словарь должен отражать особенности соответствующей эпохи, отражать генезис понятий, представлять исторически сложившиеся методические школы, показывать вклад той или иной исторической личности, ученого, методиста в развитие методики математики. Необходимым является также отражение роли исторических и научных событий, наличие историографии.

В связи с определением такого широкого круга рассматриваемых аспектов истории математического образования и методики обучения математике встает вопрос о структурировании содержания словаря.

Структурировать его предполагается, опираясь на выявленную логико-понятийную структуру текста, на три основных этапа:

1) этап анализа собранной информации с фильтрацией ключевых предметных понятий и формированием исходного глоссария;

2) этап рациональной классификации ключевых понятий и формирование классификационного глоссария (построенного на основе понятий, идентифицирующих полученные классы);

3) этап иерархического упорядочения понятий классификационного глоссария.

В основу подбора ключевых понятий исторического словаря по методике обучения математике может быть изначально положена система современных методических понятий, поскольку большинство современных понятий являются, по сути, обобщением исторически сложившихся методических понятий. Существуют также методические термины, которые вышли из употребления и не входят в генезис современных понятий. Предстоит определить критерии отбора таких понятий: познавательные, социальные, биографические, библиографические, статистические.

На данном этапе нами разработаны общие теоретические подходы к разработке учебных словарей по педагогическим дисциплинам; словник современного словаря по методике обучения математике; краткий словарь-справочник по базисным понятиям методики обучения математике; составлены предварительные списки персоналий, учебных пособий, учебников, монографий, отражающих развитие методики обучения математике. Отбор соответствующих им словарных статей в исторический том необходимо производить, на наш взгляд, исходя из значимости исторической личности, учебных пособий, других источников в плане развития методики обучения математике и математического образования (например, многолетнее использование в обучении).

Создание исторического словаря позволит обогатить теорию обучения математике благодаря разработке методической терминосистемы.

Библиографический список

1. *Сенькина Г.Е., Тимофеева Н.М.* Разработка методического словаря: проблемы автоматизации // Научные труды международной научно-практической конференции ученых МАДИ(ТУ), МСХА, ЛГАУ, ССХИ, 26–27 марта 2002 года. Методика и педагогика. Москва–Луганск–Смоленск: Изд-во МАДИ(ТУ), МСХА, ЛГАУ, ССХИ, 2002. С. 113–117.
2. *Сенькина Г.Е., Ассонова В.А.* Принципы разработки мультимедийного методического словаря по обучению математике // Проблема теории и практики обучения математике: Сборник научных трудов, представленных на международную научную конференцию “55-е Герценовские чтения” / Под ред. В.В. Орлова. СПб: Изд-во РГПУ им. Герцена, 2002. С. 37–40.
3. *Тимофеева Н.М., Самарина А.Е.* Словник к методическому словарю по обучению математике / Под ред. Г.Е. Сенькиной. Смоленск: СГПУ, 2003. 40 с.

“Вестник опытной физики и элементарной математики” – один из предшественников журнала “Математика в школе” [1]

Р.З. Гушель

В этом году мы отмечаем 70-летие журнала “Математика в школе”, первоначально (до 1936 года) выходившего под названием “Математика и физика в школе”. Среди периодических изданий, непосредственным “наследником” которых и в идейном, и в структурном отношении является нынешний юбиляр, одно из ведущих мест по праву занимает журнал “Вестник опытной физики и элементарной математики”, выходивший свыше тридцати лет перед революцией 1917 года [1, 2, 3].

Сто двадцать лет тому назад, в 1884 году, профессор университета Св. Владимира **Василий Петрович Ермаков** (1845–1922)

[1]Работа выполнена при поддержке Российского Гуманитарного Научного фонда по проекту № 03-03-00157а.

начал издавать в Киеве “Журнал элементарной математики”. Во вступительной статье к первому номеру редактор писал:

“Журнал предназначается для преподавателей, учеников высших классов и вообще для всех любителей математики…

…Самый важный предмет в области элементарной математики есть, бесспорно, геометрия. В геометрии самый трудный вопрос есть вопрос о решении задач на построение фигур. Мы предлагаем в ряде небольших статей выяснить методы и приемы решения геометрических задач…

Единственная наша цель – популяризация математических знаний…Мы покорнейше просим всех любителей математики и, в особенности, лиц, заботящихся о распространении математических знаний, принять участие в нашем издании присылкою таких задач и статей, которые бы по содержанию и изложению подходили к указанной нами программе…

Журнал основан еще и с тою целью, чтобы привлечь к участию в нем, главным образом, преподавателей математики, чтобы дать им и средства для обогащения, и возможность дальнейшего развития их математических знаний. Но было бы весьма желательно и полезно, чтобы в нашем издании приняли также участие и лица, известные в науке…Эти лица укажут нам направление, которому мы будем следовать далее…”

В.П. Ермаков издавал журнал в течение двух лет, а затем, из-за большой занятости, передал его одному из сотрудников редакции **Эразму Корнелиевичу Шпачинскому** (1848–1912). Новый редактор был физиком. В связи с этим изменилось и название, и направление журнала. Так появился “Вестник опытной физики и элементарной математики”, первый номер которого вышел из печати 21 августа 1886 года.

Принимая на себя издание “Вестника”, Шпачинский рассчитывал посвятить себя исключительно редакторскому делу. Но его планам не суждено было сбыться – вознаграждение редактора было столь незначительным, что ему пришлось искать работу. В 1891 году Шпачинский поступил на службу в канцелярию попечителя Одесского учебного округа, переехал в Одессу и перевел туда свой журнал. И с 1891 по 1917 год “Вестник” выходил в Одессе по 24 (в некоторые годы – по 36) номера в год.

С 1904 года и до прекращения издания в 1917 году главным редактором журнала был **Вениамин Федорович Каган** (1869–1953) – известный геометр и педагог, впоследствии – профессор Московского университета, создатель крупной научной школы в области тензорной дифференциальной геометрии.

За тридцать с лишним лет существования журнала редколлегия “Вестника” несколько раз пересматривала вопрос о том, для кого же журнал предназначен в первую очередь. В.П. Ермаков считал, что созданный им журнал нужен, в первую очередь, учителям математики. Э.К. Шпачинский же, напротив, предназначал свой журнал, в первую очередь, учащимся, хотя отводил и для преподавателей специальный педагогический отдел. Однако практика показала, что подавляющее большинство читателей журнала – учителя средних учебных заведений. Были среди читателей и учащиеся, подключавшиеся, как правило, благодаря своим педагогам и интересующиеся преимущественно отделом задач.

Несмотря на отдаленность Одессы от столиц, в журнале печатались многие видные ученые-математики и педагоги конца XIX–начала XX века. Среди публикаций по математике можно назвать следующие: **А.А. Марков**. Двухсотлетие закона больших чисел (1914, № 603); **С.Н. Бернштейн**. Задача о четырех и пяти красках (1915, № 628–629); **Б.К. Млодзеевский**. О четырехугольнике, имеющем при данных сторонах наибольшую площадь (1910, № 517); **Д.Д. Мордухай-Болтовской**. О моделях ко второй книге “Начал” Евклида (1916, № 655–656).

Укажем некоторые статьи методического характера: **М.Г. Попруженко**. Значение учебника при обучении математике (1896, № 229–230); **В. Лермантов**. Каких результатов можно требовать от преподавания элементарной алгебры и как ее следует излагать (1901, № 292, 293); **К. Лебединцев**. Понятие об иррациональном числе в курсе средней школы (1910, № 513); **Н. Извольский**. Цель обучения арифметике (1913, № 594); **К.М. Щербина**. Материалы по реформе средней школы (1916, № 669).

Мы здесь намеренно не указываем работы таких видных одесских ученых, как С.О. Шатуновский, В.Ф. Каган и И.Ю. Тимченко, которые всегда много писали для журнала.

Довольно много места в “Вестнике” традиционно уделялось трудам зарубежных ученых и педагогов. Отметим несколько опубликованных переводов: **Р. Дедекинд**. Непрерывность и иррациональные числа (1894, № 191–192); **Ф. Энриквес**. Математика и теория познания (1912, № 562); **А. Пуанкаре**. Математическое творчество (1909, № 483–484); **Дж. Юнг**. О группах и числовых системах (1911, № 551–552); **Дж. Перри**. Преподавание математики в связи с преподаванием естественных наук (1909, № 498); **Ф. Клейн**. Лекции по арифметике для учителей (1909–1910); **Э. Борель**. Как согласовать преподавание математики в средней школе с прогрессом науки (1914, № 623–624).

А в 1913 году на страницах журнала была помещена статья известного французского педагога **К. Лезана** “Что такое вектор?”. Прошло не одно десятилетие с тех пор прежде, чем векторы были включены в школьные программы по математике, а на страницах журнала этот вопрос уже обсуждался.

Конец XIX–начало XX столетия во многих странах – время активной работы по реформированию математического образования. И в России также многие педагоги поднимали вопрос о необходимости реформ. Лидером международного движения по реформе математического образования был признан замечательный немецкий математик и педагог **Феликс Клейн** (1849–1925) – создатель знаменитых Меранских программ, положенных в основу школьной реформы в Германии в начале XX века.

В 1908 году на IV Международном математическом конгрессе в Риме была создана Международная комиссия по преподаванию математики. Ее президентом стал Ф. Клейн. Программные документы комиссии, материалы, посвященные ее деятельности, а также отчеты о работе русской национальной подкомиссии регулярно помещались на страницах “Вестника”. Среди авторов публикаций этой тематики стоит особенно отметить профессора Харьковского университета **Дмитрия Матвеевича Синцова** (1867–1946).

Много писал он и о проходивших в 1911 и 1913 годах I и II Всероссийских съездах преподавателей математики. Помимо обзоров Синцова, журнал помещал и резолюции съездов (1912, № 554; 1914,

№ 602), и некоторые из прочитанных там докладов. Назовем их: **С.Н. Бернштейн**. Исторический обзор понятия о функции (1912, № 559); **А.В. Васильев**. Математическое и философское преподавание в средней школе (1912, № 554); **К.А. Поссе**. О согласовании программ в средней и высшей школе (1912, № 555); **И.И. Чистяков**. Элементы теории чисел в средней школе (1912, № 567).

Помимо съездов преподавателей математики, журнал знакомил своих читателей с работой международных математических конгрессов, съездов русских естествоиспытателей и врачей, а также с деятельностью отечественных математических обществ и кружков.

В 1907 году в реальных училищах был введен дополнительный класс, окончание которого давало реалистам право на поступление в университет. В программу по математике этого класса вошли большие разделы по анализу бесконечно малых и аналитической геометрии. Это нововведение нашло свое отражение в тематике журнальных публикаций. Отметим несколько работ: **В. Шидловский**. Заметка к курсу анализа бесконечно малых в средней школе (1913, № 597); **Е.Л. Буницкий**. К теории максимума и минимума функции одного переменного (1913, № 598–600; 1914, № 611–612); **А. Киселев**. О тех вопросах элементарной математики, которые обыкновенно решаются помощью пределов (1916, № 649); **П. Флоров**. Новый вывод разложения функции e^x по степеням переменной x (1916, № 664–665).

А статьи, посвященные коническим сечениям, помещались в “Вестнике” и раньше, так как в кадетских корпусах эти линии изучались еще с 60-х годов XIX века. Укажем некоторые работы: **В. Студенцов**. Одно из геометрических мест точек (эллипс) и прибор для его черчения (1888, № 56); **П. Свешников**. Элементарная теория эллипса (1896–1897, № 239, 240, 242–248); **С. Гирман**. Общее свойство касательных к кривым второго порядка (1897, № 257).

В упомянутом выше докладе на I Всероссийском съезде преподавателей математики профессор К.А. Поссе говорил о необходимости профильной дифференциации средней школы и изучения в старших математических классах элементов так называемой высшей математики. И в резолюциях съезда необходимость такого обновления математического образования была подтверждена.

В 1915 году при министре народного просвещения графе П.Н. Игнатьеве была предпринята попытка модернизации гимназического образования, основное направление которой было сформулировано в “Материалах по реформе средней школы”, вышедших в Петрограде отдельным изданием в том же 1915 году. В следующем году “Вестник” опубликовал большую статью **К.М. Щербины**, посвященную анализу этого проекта (№ 658–660). А еще раньше, в 1909 году, в журнале был помещен проект учебного плана по математике, разработанный Варшавским кружком преподавателей физики и математики (№ 471). Благодаря этим публикациям учительство знакомилось с передовой отечественной методической мыслью.

Из материалов, посвященных опыту зарубежной школы, отметим два: **В. Каган**. Новые программы по математике в Италии (1901, № 295); **В. Литцман**. Постановка преподавания математики в средней школе Пруссии (1911–1912, № 548–558).

Как уже отмечалось, был в “Вестнике” и отдел задач. В течение многих лет его вел приват-доцент Новороссийского университета **Е.Л. Буницкий**. В каждом номере помещалось несколько задач с указанием фамилии приславшего и места его жительства. Затем помещались решения предлагавшихся ранее задач. Здесь также отмечались фамилии и места жительства приславших свои решения читателей. По этому отделу особенно ясно видно, что “Вестник” был действительно всероссийским журналом. Например, в № 560 за 1912 год помещены задачи, присланные из Одессы, Самары и Ставрополя. Отмеченные в этом номере решения предложены читателями С.-Петербурга, Казани, Астрахани, Армавира, Лодзи, Москвы, Варшавы, Стерлитамака, Одессы. Как задачи, так и решения предложенных ранее задач нередко присылали учащиеся средних учебных заведений.

Как уже отмечалось, на страницах “Вестника” значительное место уделялось материалам по истории математики. Помимо названных выше трудов А.А. Маркова и Р. Дедекинда, отметим следующие работы: **И. Гейберг**. “Послание о методе” Архимеда (1908, № 445, 450, 451); **В.В. Бобынин**. Естественные и искусственные пути восстановления историками математики древних доказательств и выводов (1910, № 515); **Его же**. История первоначального развития счисления дробей (1911, № 535); **И.Ю. Тимченко**. Демокрит и Архимед (1913, № 598–600); **Его же**. Об аксиомах и постулатах "Начал" (1915, № 643); **В.Ф. Каган**. Исторический очерк развития учения об основаниях геометрии (1903–1905, № 380–403); Библиографический указатель литературы по "Великой" теореме Ферма (1909, № 483).

Большой интерес для современного преподавателя должны представлять рецензии на учебную и методическую литературу, регулярно помещавшиеся на страницах "Вестника". Очень много рецензий написано Д.М. Синцовым. Им опубликован ряд рецензий на учебники, составленные для дополнительного класса реальных училищ, в том числе на учебники по аналитической геометрии (В. Александрова (1909, № 479–480), К.Б. Пенионжкевича (1912, № 557–558), К.Н. Рашевского (1912, № 559)) и по элементам математического анализа (В.№ Александрова (1909, № 479–480) и А.П. Киселева (1910, № 522)). В 1909 году вышла рецензия В.Ф. Кагана на опубликованную в 1907 году книгу П.О. Сомова "Векториальный анализ и его приложения" (№ 479–480), а в 1913 году – его же рецензия на книгу Г. Ганкеля "Теория комплексных числовых систем", вышедшую в 1912 году в Казани (№ 596).

Рецензент, подписавшийся инициалами К.Л., поместил в журнале рецензии на книгу М. Симона "Дидактика и методика математики в средней школе", вышедшую в 1912 году (1912, № 555), и "Педагогику математики" В. Мрочека и Ф. Филипповича, вышедшую в 1910 году (1910, № 524).

Среди прочих отметим рецензию С. Житкова на книгу А.И. Гольденберга "Сборник арифметических упражнений для гимназий и реальных училищ" (1901, № 295), рецензию В. Шидловского на книгу С.И. Шохор-Троцкого "Геометрия в задачах. Книга для учителей" (1908, № 464), а также две рецензии Н.А. Извольского: на учебник К.Н. Рашевского по геометрии для городских училищ и женских гимназий (1910, № 528) и на двадцать первое издание учебника по геометрии А.П. Киселева (1912, № 560).

Список интересных книг, рецензии на которые были опубликованы в “Вестнике”, можно продолжить.

Все перечисленные публикации относятся к математике и вопросам ее преподавания. А ведь в журнале печатались также статьи и по физике, в том числе оригинальные труды крупных отечественных и зарубежных ученых, описания многих опытов, приборов и т.д.

До сих пор ничего не было сказано о тех публикациях, которые составляли основу математической части журнала, – о работах по элементарной математике и методике ее преподавания, написанных педагогами из разных городов России. Очень трудно выделить несколько работ из огромного их числа! Отметим некоторые: **Ф. Мацон**. Именованные величины в школьном преподавании и значение их символов (1888, № 55, 56); **Ф. Коваржик**. Построение правильных многоугольников по данной стороне (1888, № 52); **П. Флоров**. Построение корней тригонометрических уравнений (1897, № 249, 251); **К. Правдин**. Экзаменационные письменные работы по математике в выпускных классах средних учебных заведений (1898, № 267); **М. Орешников**. Несколько слов о так называемом “правиле знаков” в элементарной алгебре (1905, № 394); **С.А. Неаполитанский**. Доказательство теоремы о плоских углах трехгранного и многогранного углов (1909, № 483); **И. Гибш**. Опыт обоснования первых теорем из курса школьной геометрии (1916, № 653–654).

В “Вестнике” редко встречаются статьи, посвященные методике изучения конкретного вопроса и, тем более, по конкретному учебнику. Но это не было тогда принято – ни один из известных нам педагогических журналов так не делал. Не помещались там ни главы из новых учебников, ни тематическое планирование, ни дидактические материалы. Но ведь и в журнале “Математика в школе” публикации такого рода появились только в начале 70-х годов.

Целью данного сообщения является ознакомление участников Чтений с “Вестником опытной физики и элементарной математики”. Надеемся, нам удалось показать, что многие публикации журнала интересны и актуальны и сегодня. Богатый опыт отечественной школы может и должен стать достоянием современных педагогов. А широкая известность “Вестника” в конце XIX – начале XX века является залогом того, что в библиотеках многих губернских городов эти журналы есть и сейчас. Их публикации нужно переиздавать и тщательно изучать с тем, чтобы использовать в современной школе.

Библиографический список

1. *Дахия С.А.* “Журнал элементарной математики” и “Вестник опытной физики и элементарной математики” // Историко-математические исследования. 1956. Вып. 9. С. 537–612.
2. *Депман И.Я.* Русские математические журналы для учителя // Математика в школе. 1951. № 6. С. 9–22.
3. К 25-летию “Вестника опытной физики и элементарной математики” // ВОЭФМ. 1913. № 598–600.

Знакомство с жизнью и творчеством педагогов-математиков как средство воспитания личности будущего гражданина

О.А. Павлова

С творчеством Н.И. Лобачевского, М.В. Остроградского, В.Я. Буняковского, П.Л. Чебышева, А. Н. Колмогорова студент физико-математического факультета сталкивается на занятиях по математике. Знакомство с педагогической деятельностью этих и других педагогов-математиков на занятиях по педагогике или в рамках спецкурсов не осуществляется, хотя оно способно внести неоценимый вклад в формирование идеала учителя математики. ***Правильно сформированный идеал учителя – условие эффективности его самовоспитания***.

Имена выдающихся математиков XX века Н.Н. Лузина, Л.С. Понтрягина, П.С. Александрова, А.Я. Хинчина, А.Н. Колмогорова, Б.В. Гнеденко, С.Л. Соболева, М.А. Лаврентьева должны быть известны каждому культурному человеку. Знакомство с педагогической деятельностью этих и других педагогов-математиков также способно внести неоценимый вклад в формирование профессионального идеала учителя математики, дать стимул к самообразованию и самовоспитанию будущего учителя.

Знакомство с жизнью и творчеством выдающихся педагогов-математиков позволяет решать параллельно еще две задачи: ***формирование методической культуры будущего учителя и навыков решения им педагогических задач***.

Формирование методической культуры осуществляется за счет знакомства с основными направлениями в развитии современной математики и возможностями их обсуждения с учащимися; знакомства с методами современной математики, с методами и приемами, которые использовали знаменитые математики в учебном процессе, и возможностями их использования в работе со школьниками; раскрытия роли метафор и аллегорий при изложении сложных математических идей и формирования умений и навыков их использования в учебном процессе.

Формирование навыков решения педагогических задач (организовать продуктивную работу в классе; найти рациональный выход из сложившейся напряженной ситуации, используя ее для воспитания личности будущего гражданина; сознательно создать ситуацию, способствующую формированию интереса к математике или формированию определенных качеств личности) осуществляется в процессе знакомства с детскими годами знаменитых математиков, с тем, как они объясняли возникновение у себя интереса к математике, знакомства с педагогическими взглядами и личными качествами знаменитых ученых, особенностями решения ими различных педагогических задач и возможностями использования полученных знаний в учебно-воспитательном процессе.

Так, например, Н.Н. Лузин искусно умел использовать ***метафоры и аллегории при изложении сложных математических идей***: *"Если представить себе рациональные точки черными и непрозрачными, все другие точки – прозрачными, то мы, став против света и держа нашу прямую перед глазами, увидели бы пробивающиеся всюду бесконечно тонкие лучи света, прошедшие через иррациональные точки"*. Знакомство с его методом "расчленения трудностей" также позволит повысить методическую культуру будущего учителя.

Знакомство с качествами личности Николая Николаевича, благодаря которым он не сломился под нажимом травли и клеветы, не эмигрировал и до конца жизни продолжал плодотворные исследования в математике, способно внести неоценимый вклад в формирование личности студента и его будущих питомцев.

В истории отечественного образования имеется большое количество подобных примеров, опираясь на которые можно сформировать профессиональный идеал будущего учителя математики, повысить его математическую культуру, способствовать воспитанию его профессионального мастерства.

Б.В. Гнеденко был не только математиком, но и размышлял над тем, каким должно быть математическое образование, какую роль играет самообразование и самовоспитание в становлении учителя: "Хорошим учителем становятся не сразу, мастерство приходит в результате длительной напряженной работы над собой, над своим отношением к людям и их недостаткам, над своим характером и речью. Учитель должен воспитывать в себе умение говорить спокойно, без раздражения даже в тех случаях, когда он не только раздражен, но и разгневан. Умение поставить себя выше личных чувств ради достижения высокой цели – воспитания и образования молодого поколения – нужно считать ценным качеством учителя" [1].

Он считал, что ***идеал труда учителя*** – *"помочь найти себя, свои интересы, свои способности и увлечения каждому из учащихся".* Для этого в общении с сильным учеником необходимо дать ему почувствовать, что "ему верят, надеются на его силы и уверены в его больших внутренних способностях" не только в познании созданного, но и в создании нового. А для этого он должен тренировать себя в решении сложных задач. Слабый "должен почувствовать, что на него не махнули рукой, а в его возможности верят".

Дает Гнеденко и советы о том, как вести себя с трудными учащимися (которые грубы с учителем или же подчеркнуто любезны с ним): "Беседовать с такими трудными учащимися лучше всего с глазу на глаз и не только о их плохом поведении, но и о том, что могло бы создать им настоящий авторитет в глазах класса, упомянуть о потенциальных их возможностях и теряемых способностях".

В вопросах воспитания на уроках математики взгляды Гнеденко близки взглядам его учителя – знаменитого математика А.Я. Хинчина, который писал: "О роли и значении уроков математики в воспитании правильного и дисциплинированного мышления говорилось и писалось очень много. Напротив, о влиянии математических занятий на формирование характера и моральной личности учащегося не сказано почти ничего... По моему многолетнему опыту, *работа над усвоением математической науки неизбежно воспитывает – исподволь и весьма постепенно – в молодом человеке целый ряд черт, имеющих яркую моральную окраску и способных в дальнейшем стать важнейшими моментами в его нравственном облике*". Среди черт, которые воспитывает математика, он называет честность, правдивость, настойчивость и мужество. "Для него как для человека с математическим мышлением было органически невозможно сделать что-либо не до конца, небрежно, безответственно. Он говорил также, что он не может отстаивать нечто, имеющее множество толкований". Для учителя он считает наиболее важным максимальное использование "своих уроков в целях воспитательного воздействия в указанном направлении".

Вспоминая школьные годы, Гнеденко описывает свое увлечение историей, знание которой выходило за рамки школьной программы. Также много времени он уделял литературе, пытался писать стихи и прозаические произведения, однако нашел себя в математике, ее применении к задачам естествознания, инженерного дела и организации производства, а также в исследовании вопросов истории и философии математики. "Это совсем не означает, что мои увлечения историей и литературой пропали даром. Я убежден как раз в обратном, они внесли в формирование моего характера, так же как и музыка, много существенных черт. Точно так же *хорошо организованные и проведенные уроки по математике позволяют формировать существенные черты характера молодых людей и их моральные принципы*", – утверждает педагог. Наибольшее значение представляет математика для интернационального воспитания, "поскольку закономерности точных наук одни и те же в Москве, Лондоне и Токио". Однако "в патриотическом воспитании участвует не сама математика, а некоторые сопутствующие аспекты": рассказы учителя об успехах школьников нашей страны на международных олимпиадах, о вкладе отечественных ученых в развитие математики и ее приложений.

Далее он замечает, что "вопросы воспитания моральных ценностей и патриотизма на уроках математики разработаны еще недостаточно, но это совсем не означает, что математика полностью лишена возможностей внести свой вклад в эти важные аспекты воспитания" гражданина. В своих статьях, опубликованных в журнале "Математика в школе", Гнеденко постоянно подчеркивал роль истории математики в формировании личности будущего гражданина, а, следовательно, будущий учитель математики должен хорошо представлять себе эти возможности. Кроме того, в процессе обучения в педвузе должен сформироваться навык использования сведений из истории математики для формирования личности будущего гражданина, что возможно осуществить в рамках спецкурса историко-математической направленности.

Рассмотрим некоторые факты из истории математики, обладающие особыми возможностями для воспитания таких качеств личности, как патриотизм, интернационализм, честность, упорство, стойкость в борьбе с общественным мнением, трудолюбие.

П.Л. Чебышев является одним из величайших математиков мира. Основатель Петербургской математической школы и талантливый изобретатель много времени и сил отдавал делу народного образования. Им руководило одно стремление – улучшить преподавание математики в школах всех разрядов, начиная с воскресных и кончая университетами. Двери его дома были открыты для любого человека, желающего получить совет (от академика до школьника). Чебышев принимал участие в популяризации математических знаний через энциклопедические словари. Помощь развитию математики в нашей стране он считал своим **патриотическим долгом**.

Откладывая большую часть получаемого содержания, П.Л. Чебышев впоследствии мог уже приобретать на свои сбережения небольшие имения в разных частях России. В этих имениях он никогда не жил, а отдавал их в аренду или продавал, когда цена на землю начала возрастать. Надо заметить, что, совершая указанные покупки, Чебышев никогда не шел против своей совести.

Так, Д.Д. Оболенский в его "Набросках из воспоминаний" пишет: "В опеке оказалось, что имение малолетних Горяиновых было продано с публичных торгов за долг опекунскому совету в 238 рублей. Малолетние остались без всяких средств. Между тем, имение было в 400 десятин чернозема... Имение было куплено в 1891 году стариком академиком Чебышевым, которого я отыскал в Петербурге и которому поставил на вид положение малолетних и грозящую опекунам неприятность. П.Л. Чебышев, узнав, в чем дело, **не задумываясь (!)**, возвратил имение Горяиновым" [3].

В 30–40-е годы XX в. в Германии была развернута борьба "за чистоту арийской науки". Немецкий математик Отто Тейхмюллер, будучи членом нацистской партии, принимал активное участие в отстранении от академической деятельности Р. Куранта, Э. Ландау, Э. Нетер. Пронацистски настроенные студенты под его руководством преграждали вход в аудиторию профессору Ландау, не желая, чтобы новички "учились у еврея". Но это не помешало Тейхмюллеру в частном письме к Ландау сообщить, что он лично не прочь слушать у профессора спецкурсы. После того, как Э. Нетер была уволена из университета, Тейхмюллер обратился к ней и попросил ее вести частный семинар для него и нескольких его сокурсников... Эмми согласилась, она и тогда не верила в зло. Давид Гильберт на вопрос о том, что представляет математика в Геттингене после того, как она освободилась от еврейского влияния, ответил, что она не существует больше.

Выдающийся немецкий ученый Герман Вейль утверждал, что все успехи немецких исследователей в физике и математике были достигнуты ими благодаря сотрудничеству и обмену идеями с учеными всех стран, взаимному обмену, не знающему границ (если исключить годы войны). "Бессмысленно пытаться раздернуть единую ткань на отдельные нити и уж совсем абсурдно говорить о "немецкой математике" или "немецкой физике", как это делали нацистские фанатики. На самом деле, не может быть ничего более интернационального, чем математика и естественные науки".

Большое внимание понятиям патриотизма и чувства гражданской ответственности уделяет Ф. Араго – честный гражданин и истинный патриот Франции – в своих знаменитых "биографиях". Вот на что он счел нужным обратить внимание в биографии Гаспара Монжа.

В стенах мезьерской школы была рождена та часть математики, которую впоследствии начали называть начертательной геометрией. Мезьерская школа **дорожила** открытием Монжа; она **гордилась** тем, что в ней началась полезнейшая часть математики; но, гордясь, она не забыла и материальных выгод: новую науку покрыла тайной. Начальники школы говорили, что "не нужно помогать иностранцам, которые пусть остаются при их несчастной рутине; пусть ощупью производят свои постройки, переламывают их несколько раз, не имея возможности сообщать им надлежащей прочности; **искусство строить скоро и прочно пусть навсегда останется достоянием французских военных инженеров"** [5].

Хотя эти правила были введены исходя из чувства патриотизма, однако они напитаны непохвальной завистью и недоброжелательством к человечеству, утверждает Араго.

Учащиеся должны усвоить, что гордость, испытываемая за успешные исследования ученых-соотечественников, является естественной, однако она не должна переходить в "оплевывание" других ученых и разговоры о превосходстве "национальной науки". А.П. Чехов заметил однажды, что "национальной науки нет, как нет национальной таблицы умножения".

На примере биографии самого Араго можно продемонстрировать такое качество личности, присущее настоящему гражданину, как умение критически оценивать существующую власть, то есть умение замечать как положительные ее стороны, так и отрицательные. Араго не любил Наполеона за его деспотизм и честолюбие, но, во всяком случае, он отдавал справедливость его великому гению и его верному пониманию пользы наук в государственных делах. И те, и другие качества личности Наполеона он демонстрирует в своих "биографиях". Вот один из таких примеров. Араго был в числе воспитанников Политехнической школы, отказавшихся присоединить свои поздравления при перемене консульства на сан императора. Первой эмоцией Наполеона было выгнать их из школы, все же позднее он сказал: “Я не могу выгнать первых воспитанников, жаль, что они не последние” [5].

Знакомство с жизнью Н.И. Лобачевского позволяет продемонстрировать наличие таких качеств, как **честность, упорство, стойкость в борьбе с общественным мнением**.

Однако круг интересов Лобачевского не замыкался только на науке и университетской деятельности. Он занимал **активную гражданскую позицию** и имел разносторонние интересы. В имении, составлявшем приданое жены, он стремился вести хозяйство на научной основе, используя различные технические нововведения. Его воодушевляли мысли о необходимости всемерного развития промышленности и сельского хозяйства России. Лобачевский стал одним из инициаторов создания Казанского экономического общества и был активнейшим его членом, фактически – его руководителем. Он участвовал в изучении экономики края, в организации выставок достижений сельского хозяйства и промышленности, делал сообщения о тех или иных усовершенствованиях и новшествах. Неоднократно он высказывался о необходимости введения экономического и профессионального образования, искал пути создания ремесленных и торговых школ не только для купеческих детей, но и для детей бедноты [6].

Небольшое тематическое отступление на уроке может быть полезным для понимания серьезной проблемы. Оно может быть осуществлено в следующих формах: рассказ учителя о детских и юношеских годах того или иного ученого, о его научной и преподавательской деятельности; беседа с учащимися; решение задач с историческим содержанием; обыгрывание исторического сюжета в виде диалога его участников; чтение стихотворений, написанных математиками или о математиках.

В рамках недели математики и во внеурочной работе можно провести занятие в форме диспута, на котором будут обсуждаться нравственные вопросы с привлечением материала из биографий математиков. Можно написать сценарий и поставить спектакль историко-математического содержания; провести викторину на знание биографий ученых; провести конкурс на самое лучшее стихотворение (рисунок, поделку), позволяющие продемонстрировать личные качества данного ученого. В основе всех вышеперечисленных форм работы лежит самостоятельная работа учащихся с историко-математической литературой.

В результате такой работы учащиеся должны усвоить, что истинный патриотизм находит воплощение в делах, в отдаче, чаще всего будничной, в честном отношении к труду, в том числе к учебному. Кроме того, будущие граждане должны научиться ценить государство, в котором трудолюбивый, способный человек может достичь любых высот; приобрести умение критически оценивать существующую власть.

Чтобы воспитать в себе гражданина, учащиеся, прежде всего, должны научиться правильно оценивать свои и чужие поступки. Педагог может и должен помочь ученикам пройти эту первую ступеньку на пути к самосовершенствованию. Биографии великих математиков могут содействовать учителю математики в формировании личности человека и гражданина.

Библиографический список

1. *Гнеденко Б.В.* Математика и математическое образование в современном мире. М.: Просвещение, 1985. 192 с.
2. Концепция модернизации российского образования на период до 2010 года // Вестник образования. 2002. № 6.
3. *Прудников В.Е.* Русские педагоги-математики XVIII–XIX веков. Пособие для учителей. М., 1956. 640 с.
4. *Славутский И.Ш.* И в шутку и всерьез о математике. СПб.: Изд-во Центра профессионального обновления “Информатизация образования”, 1998. 120 с.
5. *Араго Ф.* Биографии знаменитых астрономов, физиков и геометров. Ижевск, 2000. 496 с. Т. 1.
6. *Лаптев Б.Л.* Н.И. Лобачевский и его геометрия: Пособие для учащихся. М.: Просвещение, 1976. 112 с.

К вопросу о рациональных приближениях $\sqrt{3}$ у Архимеда: новая реконструкция

А.И. Щетников

1. Постановка задачи

1.1. Архимед в “Измерении круга” пользуется для $\sqrt{3}$ двумя рациональными приближениями, одно из которых берется с недостатком, а другое с избытком:

$$\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}.$$

Эти приближения вводятся Архимедом без какого-либо комментария. Может быть, он получал их в первых предложениях своего сочинения, утраченных еще в античности (аргументы в пользу того, что начальные предложения трактата существовали и были затем утрачены, см. [1. С. 528]).

К сожалению, дошедшие до нас античные источники не содержат сведений о методе, которым были получены эти результаты. Многие историки математики пытались реконструировать этот метод, и по вопросу о “приближенных значениях $\sqrt{3}$ у Архимеда” за последние 300 лет выросла обширная литература (подробную библиографию вопроса см. [2, 6, 11, 12]).

1.2. Ряд авторов связывает метод Архимеда с теорией непрерывных дробей и лежащим в ее основе алгоритмом последовательного вычитания, употребляемым Евклидом во 2–4 предложениях X книги “Начал” для вынесения суждения о соизмеримости или несоизмеримости величин и для нахождения их общей меры в случае соизмеримости.

Отношение $\sqrt{3} : 1$ можно разложить в непрерывную дробь

$$\sqrt{3} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \ldots}}}}$$

либо алгебраически на основе тождества $(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1) = 2$, либо путем последовательного вычитания высоты равностороннего треугольника и половины его стороны (см., к примеру, [2]). Первые подходящие дроби для этого разложения равны

$$\frac{1}{1},\ \frac{2}{1},\ \underline{\frac{5}{3}},\ \frac{7}{4},\ \frac{19}{11},\ \underline{\frac{26}{15}},\ \frac{71}{41},\ \frac{97}{56},\ \underline{\frac{265}{153}},\ \frac{362}{209},\ \frac{987}{571},\ \underline{\frac{1351}{780}}\ldots. \qquad (1)$$

Нечетные и четные члены последовательности (1) дают для $\sqrt{3}$ чередующиеся приближения с недостатком и с избытком. В (1) подчеркнуты члены, номера которых кратны трем; мы видим, что архимедовы приближения суть 9-я и 12-я подходящие дроби для разложения $\sqrt{3}$ в непрерывную дробь. Отсюда возникает вопрос: если Архимед получал подходящие дроби для $\sqrt{3}$ последовательно одну за другой, почему он не взял для своих расчетов два соседних приближения из последовательности (1)? Гипотеза о применении Архимедом алгоритма последовательного вычитания ответа на этот вопрос не дает, и в этом состоит ее слабое место.

1.3. Ряд других авторов связывает архимедовы приближения для $\sqrt{3}$ с методом извлечения квадратных корней, описанным Героном Александрийским в “Метрике” и известным еще древним вавилонянам. Эту реконструкцию впервые предложил в 1883 г. К. Гунрат [10]; из нее же впоследствии исходили и другие авторы [2, 3, 7, 9]. Однако данная реконструкция содержит ряд искусственных допущений, сделанных исключительно ради получения заранее известного результата и никак не вытекающих из сути самого метода.

1.4. Тем самым возникает задача отыскания такой процедуры построения последовательных приближений, которая естественно порождала бы для $\sqrt{3}$ одну за другой подходящие дроби с номерами, кратными трем, и в которой отношения 265/153 и 1351/780 были бы последовательными членами.

Дополнительную осмысленность этой задаче придает сохранившийся отрывок из сочинения Диофанта Александрийского “Об измерении поверхностей” [5. II, 22_{16}], в котором сказано: “Архимед показал, что 30 равносторонних треугольников равны 13 квадратам". Площадь равностороннего треугольника со стороной a равна $a^2\sqrt{3}/4$. Это соотношение приводит к приближению

$$\sqrt{3} \approx \frac{4 \cdot 13}{30} = \frac{26}{15},$$

дающему шестую подходящую дробь для $\sqrt{3}$. Таким образом, с именем Архимеда совершенно определенно связываются 6-я, 9-я и 12-я подходящие дроби для $\sqrt{3}$, каковую последовательность вряд ли следует считать случайной.

1.5. Один из способов получения последовательности, содержащей каждую третью подходящую дробь для $\sqrt{3}$, состоит в том, чтобы представить $\sqrt{3}$ так:

$$\sqrt{3} = \frac{\sqrt{27}}{3} = \frac{\sqrt{5^2+2}}{3} = \frac{1}{3}\left(5 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{10 + \ldots}}}}\right).$$

Первые подходящие дроби для этого разложения равны

$$\frac{5}{3}, \quad \frac{26}{15}, \quad \frac{265}{153}, \quad \frac{1351}{780}, \quad \ldots \quad , \tag{2}$$

а это и есть нужная нам последовательность! Эту замечательную реконструкцию впервые предложил в 1881 г. Хайлерманн [8]. Ее детально анализировали также в своем обзоре Во и Максфельд [12]. Они же отметили, что на языке линейных преобразований эту реконструкцию удобно представлять формулой

$$\vec{v}_{n+1} = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \vec{v}_n,$$

где начальный вектор $\vec{v}_0 = [5, 3]$.

1.6. Впрочем, предложенное Хейлерманном решение пока еще полностью лишено геометрической интерпретации, а ведь из свидетельства Диофанта мы знаем, что Архимед увязывал свои приближения с процедурой соизмерения площадей квадрата и равностороннего треугольника с равными сторонами. Поэтому в настоящей статье делается попытка отыскать такую геометрическую конструкцию, которая порождала бы (2) в качестве последовательных приближений для $\sqrt{3}$.

2. Геометрическая реконструкция

2.1. Обозначим приближенное отношение высоты равностороннего треугольника к его стороне как $q_n : p_n$ и положим $\vec{u}_n = [q_n, p_n]$. Нетрудно показать, что тогда искомое линейное преобразование, задающее переход между двумя последовательными приближениями, должно будет задаваться формулой

$$\vec{u}_{n+1} = \begin{bmatrix} 10 & 9 \\ 12 & 10 \end{bmatrix} \vec{u}_n,$$

где $\vec{u}_0 = [5, 6]$. Геометрическую основу этой формулы мы и будем искать.

2.2. Рассмотрим сначала вспомогательный чертеж, изображенный на рис. 1. Здесь на противоположных горизонтальных сторонах KL и NM квадрата $KLMN$ построены два равносторонних треугольника KBL и NAM. Стороны этих треугольников продолжены до пересечения с противоположными сторонами квадрата в точках E, F, G, H. Через эти точки проведены вертикальные отрезки EG и FH. Через точки пересечения отрезков EG и FH со сторонами равносторонних треугольников проведены горизонтальные отрезки TU и VW. Наконец, через точки пересечения отрезков TU и VW с другими сторонами равносторонних треугольников проведены вертикальные отрезки PR и QS.

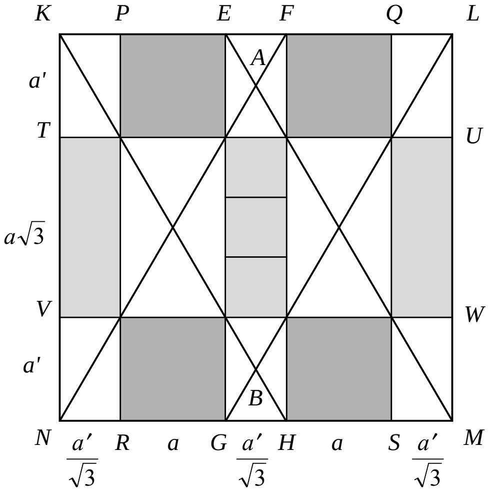


Рис. 1

Покажем, что четыре одинаковых темно-серых прямоугольника являются квадратами. Обозначим горизонтальные стороны этих прямоугольников через a, вертикальные через a'. Центральная и крайние вертикальные полосы имеют ширину $a'/\sqrt{3}$, центральная горизонтальная полоса имеет ширину $a\sqrt{3}$. Выразив через эти размеры горизонтальную и вертикальную стороны квадрата, приравняем результаты:

$$2a + 3(a'/\sqrt{3}) = 2a' + a\sqrt{3},$$

что после приведения подобных дает $a = a'$.

Отсюда следует, что три одинаковых светло-серых прямоугольника имеют соотношение сторон 3 : 1, и каждый из них можно разрезать на три квадрата. Стороны этих квадратов обозначим через $p = a/\sqrt{3}$; высоту равностороннего треугольника со стороной p обозначим через $q = a/2$. Тем самым сторона исходного квадрата $MNPQ$ равна $3p + 4q$.

2.3. Теперь перейдем к основному чертежу, изображенному на рис. 2. Здесь в квадрат $ABED$ встроен равносторонний треугольник CFG, в который вписан ромб $GQHP$, а в этот ромб, в свою очередь, вписан квадрат $KLMN$, с которым произведены описанные выше манипуляции.

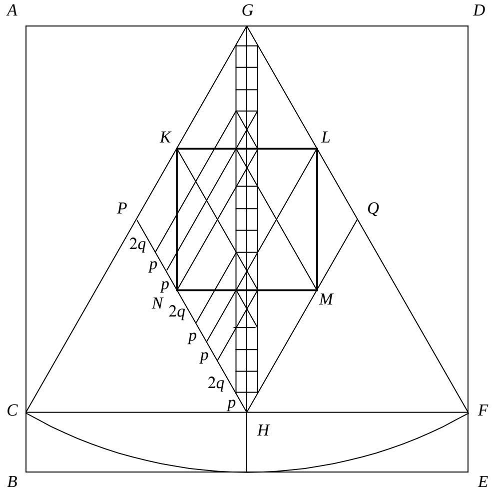


Рис. 2

Этим построением высота GH "большого" равностороннего треугольника GCF выражается через высоту q и сторону p "маленьких" равносторонних треугольников:

$$GH = 9p + 10q.$$

Сторона CF "большого" равностороннего треугольника GCF равна удвоенному отрезку PH, но $PH = 5p + 6q$ (см. рис. 2), тем самым

$$CF = 10p + 12q.$$

В результате сторона и высота "большого" равностороннего треугольника оказались выражены через сторону и высоту "маленьких" равносторонних треугольников. Представим оба этих соотношения в виде итерационной формулы

$$\begin{pmatrix} q_{n+1} \\ p_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 9 \\ 12 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_n \\ p_n \end{pmatrix}, \tag{3}$$

с помощью которой можно получать все более и более точные последовательные приближения для отношения высоты равностороннего треугольника к его стороне.

2.4. Если начальное значение этого отношения положить равным $5:6$, то следующие последовательные приближения, вычисляемые по формуле (3), будут равны

$$\frac{5}{6}, \quad \frac{13}{15}, \quad \frac{265}{306}, \quad \frac{1351}{1560}, \quad \dots \quad .$$

Увеличив в два раза знаменатель, получим последовательность приближений для отношения площади равностороннего треугольника к площади квадрата, имеющего такую же сторону:

$$\frac{5}{12}, \quad \frac{13}{30}, \quad \frac{265}{612}, \quad \frac{1351}{3120}, \quad \dots \quad .$$

(На языке Архимеда эта последовательность читается так: “5 квадратов равны 12 треугольникам, 13 квадратов равны 30 треугольникам, и т. д.”)

Напротив, увеличив в два раза числитель, получим последовательные приближения для $\sqrt{3}$, совпадающие с (2):

$$\frac{5}{3}, \quad \frac{26}{15}, \quad \frac{265}{153}, \quad \frac{1351}{780}, \quad \dots \quad .$$

2.5. Нерешенным остается вопрос, каким образом для отношения стороны и высоты равнобедренного треугольника может быть получено начальное приближение $5:6$. Одно из возможных построений для его получения показано на рис. 3. Сторона BC равнобедренного треугольника ABC разделена на три равные части точками E и F, и из этих точек восстановлены перпендикуляры EG и FH на боковые стороны. Несложно видеть, что $AG : AB = 5 : 6$. Если для высоты AD принять приближенное равенство $AD \approx AG$, это даст нам необходимое соотношение $AD : AB \approx 5 : 6$.

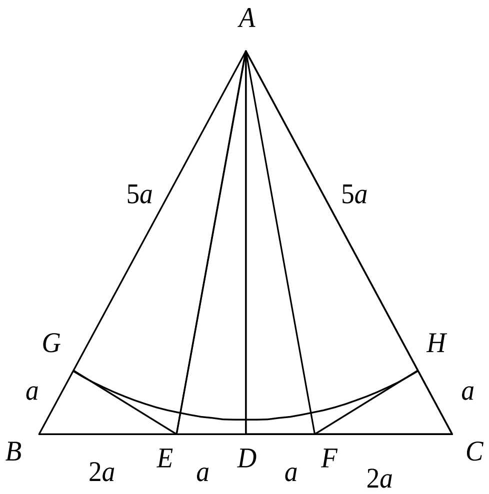


Рис. 3

2.6. Конечно, нельзя быть уверенными в том, что Архимед и его предшественники получали свои приближения для $\sqrt{3}$ с помощью построений и рассуждений, изложенных выше. Однако общий ход их рассуждения вполне мог совпадать с намеченным. Следует заметить, что рассмотренная процедура могла основываться и на других чертежах (быть может, более простых, нежели тот, который мне удалось придумать). Отметим также и то, что предложенный метод последовательных приближений в идейном плане оказался очень близким к алгоритму "семенных логосов" для вычисления "сторонних и диагональных чисел", реконструированному в работе [4].

Библиографический список

1. *Архимед.* Сочинения /Пер. и комм. И.Н. Веселовского. М.: Физматгиз, 1962.
2. *Выгодский М.Я.* Арифметика и алгебра в Древнем мире. М.: Наука, 1967.

3. *Евклид.* Начала / Пер. и комм. Д.Д. Мордухай-Болтовского при ред. участии И.Н. Веселовского и М.Я. Выгодского. М.: ГТТИ, 1948–1950. В 3 т.
4. *Щетников А.И.* Атомы Платона, алгоритм Теона и понятие “семенного логоса” // Математическое образование. 1999. № 1(8). С. 84–94.
5. *Diophantus Alexandrinus.* Opera omnia. Ed. et latine int. P. Tannery. 2 vol. Leipzig, Teubner, 1893. (Repr. Stuttgart, 1974).
6. *Günther S.* Die quadratische Irrationalitäten der Alten und ihre Entwickelungsmethoden. Abhandlungen zur Geschichte der Math., Astr. und Phys., 1882. S. 1–134.
7. *Heath T. L.* The works of Archimedes. Cambridge University Press, 1897. (Reprinted: NY, Dover, year unknown).
8. *Heilermann.* Bemerkungen zu den Archimedischen Näherungswerthen der irrationalen Quadratwurzeln. Zeitschr. f. Math. u. Phys., hist.-lit. Abt., 26, 1881. S. 121–126.
9. *Hultsch F.* Die näherungswerte irrationale Quadratwurzeln bei Archimedes. Gottingen Nachrichten, 1896. S. 385–393.
10. *Hunrath* K. *Über das Ausziehen der Quadratwurzeln bei Griechen und Indern.* Hadersleben, 1883.
11. *Knorr W.R.* Archimedes and the measurement of the circle: a new interpretation. Archive for History of Exact Sciences, 15, 1976. P. 115–140.
12. *Waugh F. V., Maxfield M. V.* Side- and diagonal numbers. Math. Magazine, 40, 1967. P. 74–83.

Глава 3

Теория и технология обучения математике в школе и вузе

Теория педагогических технологий как необходимое условие их интеграции с информационными технологиями

В.М. Монахов

Актуальность настоящего сообщения вытекает из исторически сложившейся последовательности глобальных тенденций в нашем образовании в последние двадцать лет: **информатизация, стандартизация, технологизация**. Несомненная результативность первого направления – *информатизации* – обусловлена научно-технической поддержкой. *Стандартизация* не получила сколь-нибудь существенного продвижения, и причин этого несколько: неразработанность теории стандартов, отсутствие в официальных рекомендациях адекватных стандартам технологий, что заставило Министерство образования заменить технологии всеобщим тестированием (ЕГЭ). Что касается третьего направления – технологизации, то, как отмечает профессор В.А. Еровенко-Риттер, "...уникальный случай полного отсутствия теоретического знания при вполне удовлетворительном рекламном эффекте демонстрирует новомодный термин "педагогические технологии". Позволю себе не согласиться с этим утверждением применительно к моим технологиям. Сегодня ясно, что логичнее было бы выстроить такую последовательность глобальных тенденций: *технологизация, стандартизация, информатизация.*

Два обстоятельства заставили меня взяться за исследование, связанное с педагогическими технологиями.

Первое. Двадцать пять лет я занимаюсь педагогическими технологиями, обеспечивающими проектировочную деятельность по созданию необходимых педагогических объектов с наперед заданными свойствами. Тысячи школ России, Украины, Казахстана учебный процесс проектируют и реализуют по моим технологиям. Собран гигантский фактологический материал, выступающий как предпосылка создания теории педагогических технологий (пока речь идет о моих технологиях). А. Эйнштейну и Л. Инфельду принадлежит такая интересная фраза: "...наступает такой момент, когда исследователь собрал все факты ... для некоторой фазы своей проблемы. Эти факты часто кажутся совершенно странными, непоследовательными и в целом не связанными... В данный момент он не нуждается ни в каких дальнейших розысках и **только чистое мышление приведет его к установлению связи между фактами** ... Он не только уже имеет в руках **объяснение** всех обстоятельств дела, но он уже **знает**, какие другие определенные события должны случиться. Так как он совершенно точно знает, где искать их, он может, если ему хочется, идти собирать дальнейшие подтверждения своей **теории**" ("Эволюция физики", 1965 г.). **Теория педагогических технологий** создана. И именно *теория* **педагогических технологий** может сыграть решающую роль на продуктивном этапе информатизации как общеобразовательной школы, так и высшей профессиональной. Для этого необходима интеграция педагогических и информационных технологий (отдельные аспекты интеграции рассмотрены в сообщениях Е.В. Бахусовой и О.Б. Грачева).

Второе. Могут ли традиционные дидактические принципы обеспечить элементарный уровень объективности в дидактике и частных методиках? Ответ скорее отрицательный, чем положительный. Одним из направлений преодоления этого кризиса могут стать и практически стали мои технологии. Например, технология проектирования учебного процесса позволяет параметрически сравнить проект будущего учебного процесса и параметры реального учебного процесса, уже проведенного по проекту.

Представляет интерес в контексте заявленного сообщения систематизация эволюции дидактических концепций [1, 2]:

– дидактический энциклопедизм (Я. Коменский);

– дидактический формализм (Гераклит, И. Кант, И. Песталоцци, Ф. Дистервег);

– дидактический утилитаризм (Д. Дьюи, Брамельд);
– функциональный материализм (В. Оконь);
– эссенциализм (Я. Брубахер, У. Кирпатрик);
– экземпляризм (Т. Шейерль);
– дидактическое программирование;
– дидактическая информатика;
– алгоритмическая дидактика.

Наша оценка последних трех концептуальных подходов к теории обучения следующая. *Программированное обучение* в 60-е годы ничего не дало. Почему? В масштабном эксперименте начисто отсутствовала модель учебного процесса, а это кустарщина. Так называемая *"Дидактическая информатика"*, точнее, информационные технологии обучения оказались один на один с глобальными проблемами образования, и основное внимание больше обращалось на использование компьютера, чем на методические особенности и закономерности информатизации собственно учебного процесса. Относительно "Алгоритмической дидактики" ничего нового и определенного сказать нельзя. Прежде чем перейти к изложению теории педагогических технологий, остановим внимание на двух положениях.

Первое. Чем технология отличается от методики обучения? *Методика*, в широком плане, – это предметная научная область дидактики. В узком плане – это совокупность общих и частных рекомендаций по планированию, организации и проведению учебного предмета. Принципиальные отличия технологии от методики следующие:

– гарантированность конечного результата обучения;
– наличие технологических процедур проектирования;
– возможность оптимизации логической структуры проекта.

Второе. В определенной степени можно сказать, что технология – это

– модификация допущений, а теория педагогических технологий – это систематизация допущений. Так уж сложилось, что педагогическая технология – это прежде всего живая наука, объемлющая и учитывающая современную педагогическую реальность во всем ее многообразии. Действительно, педагогические технологии есть насущная необходимость современной педагогической науки, а не просто очередное модное "поветрие". По аналогии с миром моды можно охарактеризовать педагогическую технологию весьма наглядно и образно. Как известно, в мире моды выделяют Дома, создающие одежду "от кутюр" (haute couture) – так называемую высокую моду, и существуют производители "готового платья" – "прет-а-порте" (pret-a-porter). Первые создают швейные произведения искусства, совершенно непригодные для ношения в обычной жизни, а вторые используют идеи, сгенерированные высокой модой, чтобы на их основе создать повседневную одежду – красивую и в то же время удобную. До появления педагогических технологий педагогическая наука занималась скорее высокой модой: какой бы ни была интересной генерируемая идея, "кутюрье от педагогики" не в состоянии были провести ее в жизнь с пользой для реальной и массовой педагогической практики. Поэтому, несмотря на новые идеи, педагоги по всем мире были вынуждены донашивать рубища, скроенные еще во времена Яна Амоса Коменского. Продолжая аналогию, можно утверждать, что на помощь "несчастным", значительно истрепавшим свои одежды, пришли **педагогические технологии**. Они призваны создать для педагогов новое, профессионально продуманное, методически обеспеченное – да не одно на всех, а свое индивидуализированное для каждого! С учетом индивидуальных особенностей и профессиональной стилистики, – так сказать, "инд. пошив". Правда, тут-то и выясняется еще одна интересная вещь: традиционная педагогическая наука не справляется с взятой на себя ролью генератора идей! Заменить ее на этом посту сможет лишь теория педагогических технологий. Таким образом, получается, что и "высокой педагогической моде", и "готовому платью" теперь по пути: идеи генерируются и претворяются в жизнь с применением теории педагогических технологий.

Теорию педагогических технологий (ТПТ) представим, используя структурно-системный и аксиоматический подходы. Напомним, что теория -это система обобщенного достоверного знания о том или ином "фрагменте", которая действительно описывает, объясняет и предсказывает функционирование определенной совокупности составляющих его объектов [3].

Основные педагогические объекты, которые выступают продуктами ТПТ:

– **проект траектории** образовательного процесса в образовательном учреждении (для педагогического университета – траектория профессионального становления будущего учителя);

– **проект учебного процесса по предмету** (антипод тематическому планированию);

– **методическая система обучения** (для вуза – методическая система преподавания того или иного курса);

– **виртуальные дидактические условия**, от которых зависит эффективность реализации трех вышеупомянутых объектов и комфортность профессиональной деятельности.

Наши **модельные представления** об этих объектах. Модель – это новый объект, который представляет или замещает некоторые стороны объекта или явления, наиболее существенные с точки зрения функций объекта. Более того, модель предназначается для изучения и более глубинного исследования объекта путем его упрощения, **выбора тех параметров**, которые существенны для целей изучения.

Так, учебный процесс в ТПТ представлен параметрической моделью, которая описывает любой учебный процесс пятью параметрами: **целеполагание** (система микроцелей); **диагностика** (механизм, устанавливающий факт достижения цели); **коррекция** (педагогический брак); **дозирование** (инструмент гарантированности прохождения диагностики); **логическая структура**.

Таким образом, теория педагогических технологий представляет собой, или должна представлять, теоретический фундамент, опираясь на который, можно выстроить стройное здание педагогической науки в целом и получить ответ на следующие основополагающие вопросы:

– какова природа теории педагогических технологий?

– как работает механизм функционирования теории педагогических технологий?

– какова иерархизированная структура теории педагогических технологий?

– каков должен быть язык как форма существования теории педагогических технологий?

– откуда проистекает ограниченность и неоднозначность выразительных возможностей языка теории педагогических технологий и как их преодолеть?

– в чем причина неизбежной неопределенности теории педагогических технологий?

Не менее важны принципы теории педагогических технологий, которая, как всякая полноценная теория, должна иметь свой категориальный каркас. Этот каркас могут определить следующие принципы:

1) принцип содержательности;

2) принцип свертывания (сущность технологии);

3) принцип подстановки (результат одной технологии становится исходным моментом в другой технологии);

4) принцип абстракции;

5) принцип выбора (оптимизация проекта как результата проектировочной деятельности);

6) принцип простоты и однозначной определенности;

7) принцип самоприменимости и самоконтроля;

8) принцип аксиоматичности и достаточного основания (нестандартная модель дидактической аксиоматики);

9) принцип компактности и выразительности методических подходов, используемых в теории педагогических технологий;

10) принцип перехода на технологическую документалистику.

Не отходя сейчас от основного "ствола" древа теории педагогических технологий, осветим основные исследовательские направления в теории педагогических технологий (это своеобразный "букварь" теории педагогических технологии – по важности и "основоположности", но не простоте).

- Принцип диагонализации при управленческом использовании теории педагогических технологий.

- Сравнительный анализ положений теории педагогических технологий с точки зрения дидактической аксиоматики.
- Основные принципы логики теории педагогических технологий
- Методологические принципы теории педагогических технологий.
- Регулятор сходимости теории педагогических технологий к оптимальному проекту.
- Природа технологической истины.

Теория педагогических технологий невозможна без методологии (а методология – это знания о знаниях). Методология теории педагогических технологий естественно включает следующие разделы:

1) философские проблемы: способ "бытия" теории педагогических технологий, педагогических объектов; особенности познания педагогических объектов; педагогические технологии с точки зрения теории познания;

2) теория педагогических технологий исследует самое себя (метатеория), в аспектах: историческом, прагматическом, гносеологическом;

3) теория педагогических технологий – это учение о причинах объективности педагогических технологий;

4) теория педагогических технологий – это учение о закономерностях и методах технологической деятельности и качестве результатов.

Библиографический список

1. *Никитин А.А.* Основы дидактики специализированного образования. Новосибирск: НГУ, 2001.
2. *Куприсевич Ч.* Основы общей дидактики. М., 1986.
3. Философский словарь. М., 1991.

Элементарная геометрия и школьный курс геометрии

А.Л. Вернер

В школьном курсе геометрии в ближайшие годы произойдут существенные изменения (если *модернизация* образования не будет отменена, чего, скорее всего, не случится). Эти изменения коснутся, во-первых, курса геометрии основной школы, который пополняется элементами стереометрии. Во-вторых, в двух старших классах ученику предлагаются на выбор базовый и профильный курсы, причем профильный курс пополняется планиметрическим материалом, не изучавшимся ранее в основной школе. Наконец, в-третьих, включение геометрических задач в варианты ЕГЭ будет ориентировать учителей на решение задач, сходных с задачами, предлагавшимися на ЕГЭ.

Традиционным для России был пятилетний систематический курс геометрии, в котором три года изучалась планиметрия (и ученики за эти три года теряли имевшиеся у них пространственные представления), а затем два года изучалась стереометрия (и восстановить потерянные пространственные представления в этом курсе было весьма трудно). Новые стандарты для основной школы пополнили традиционное планиметрическое содержание элементами стереометрии. Если изучать этот стереометрический материал лишь в конце курса основной школы (как это уже было в учебнике А.Н. Колмогорова и его соавторов, а также как сейчас предлагают авторы многих других учебников), то ничего нового в изучении геометрии в основной школе не произойдет: сохранится почти трехлетний курс чистой планиметрии и никакого развития у школьников пространственных представлений в это время происходить не будет. А скорее всего учителя, всегда испытывающие нехватку времени, просто не будут изучать эту тему, отложив ее на старшие классы. Поэтому стереометрический материал следует изучать параллельно с планиметрическим, распределяя его вслед за аналогичными планиметрическими темами: например, треугольник – тетраэдр, окружность и круг – сфера и шар, перпендикулярность на плоскости – перпендикулярность в пространстве, параллельность на плоскости – параллельность в пространстве и т.д. Именно так нами уже было сделано в экспериментальных учебниках [1–4], а затем в учебниках [5–7], победивших на конкурсах учебников нового поколения.

Десятилений опыт работы по этим учебникам во многих регионах России подтверждает правильность такого подхода. Так же был дополнен стереометрическим материалом учебник [8]. Для учителей, работающих по учебнику Л.С. Атанасяна и его соавторов, нами издано пособие [9], в котором реализован тот же подход.

Откуда же взять время на изучение элементов стереометрии, если его часто и на планиметрию не хватает? Время находится, если строить курс планиметрии "по Александрову". Важнейшие преимущества его таковы: существенное упрощение доказательств первых теорем о треугольниках, изучение уже в начале 8-го класса темы "Площади многоугольников" и доказательства в этой теме теоремы Пифагора, а затем изучение основ тригонометрии и доказательство теоремы синусов и теоремы косинуса. Три перечисленные теоремы дают возможность легко, чисто аналитически получать разнообразные теоремы планиметрии, в том числе и теоремы о подобии треугольников.

Отметим, что уже за первые два года изучения геометрии по учебникам [5–6] школьники знакомятся с теоретическим материалом, позволяющим решить как планиметрическую, так и стереометрическую задачи ЕГЭ из части B. А ведь впереди еще три года для тренировки в решении таких задач.

Обстоятельное изучение начал тригонометрии в рамках курса геометрии основной школы сейчас особенно важно, так как тригонометрия в основной школе сохранилась лишь в курсе геометрии. Тригонометрические функции рассматривают теперь в школьных учебниках геометрии все авторы. Сравнительно недавно это было не так: в первых изданиях учебника А.П. Киселева, который назывался "Элементарная геометрия", их не было, а появились они в этом учебнике позднее, в самом конце (п.п. 203–208) и фактически без применений (в коротком п. 208 говорится лишь о решении прямоугольных треугольников). Нет тригонометрических функций и в обширной "Элементарной геометрии" Ж. Адамара, и в "Элементарной геометрии” Б.И. Аргунова и М.Б. Балка – учебном пособии для désинститутов, изданном в 1966 году. Тригонометрия раньше и в средней школе, и в désинститутах изучалась в отдельных курсах. Теперь таких отдельных курсов нет.

Пример с тригонометрическими функциями показывает, что сейчас курс геометрии в школе не является курсом элементарной геометрии в том ее понимании, о котором говорит А.Д. Александров: “Э. г. включает те вопросы геометрии, которые в своей постановке и решении не включают общей концепции бесконечного множества, но лишь конструктивно определенные множества (геометрические места)... Соответственно предмету Э. г. ограничены и ее методы; они заведомо исключают пользование общими понятиями любой фигуры, переменной, функции, исключают ссылки на общие теоремы теории пределов и т.п.” [13. С. 645].

Выход школьного курса геометрии за рамки элементарной геометрии, приведение его в состояние, соответствующее (насколько это возможно) современной математике, были одной из целей тех реформ (модернизаций) курса геометрии, которые были предприняты в последние полвека (в том числе и реформы А.Н. Колмогорова). При этом основная теоретическая линия курса геометрии освобождалась от частностей. Такую задачу ставил перед своим учебником и А.П. Киселев. В предисловии к первому изданию своего учебника он писал: “Некоторые обыкновенно помещаемые в руководства теоремы отнесены нами к упражнениям или выпущены совсем, как не имеющие применения в логической цепи других теорем и не представляющие самостоятельного интереса.” В наших учебниках мы поступаем так же. Их содержание условно можно разбить на три части.

Обогащение школьного курса геометрии идеями и методами современной геометрии не должно привести его к отторжению от классической геометрии Евклида. Первые главы наших учебников идут от “Начал” Евклида, от его постулатов и аксиом, а иногда мы даже даем доказательства некоторых теорем, дословно цитируя евклидовские “Начала” (теоремы о сравнении сторон и углов треугольника в [1] и [2]). Девиз “Долой Евклида!” аналогичен девизу “Долой Пушкина!”. Идеи и синтетический метод классической элементарной геометрии – это первая треть наших учебников (например, [5]), в которой осуществляется *построение* важнейших фигур, изучаемых в школьном курсе геометрии. Задача построения фигур с заданными свойствами – первая из основных задач геометрии, реально решаемая в архитектуре, в технике и т.д. Их важность ясна.

Вторая треть наших курсов геометрии посвящена решению задач об измерении фигур, вычислительным задачам, "геометрии формул" (см. [6]). В этой части синтетические методы сочетаются с методами алгебры и тригонометрии. Это демонстрирует ученикам единство математики, обогащает арсенал используемых ими средств.

Наконец, последняя треть наших курсов – это идеи и методы современной геометрии – координаты и векторы, преобразования и симметрия (см. [7]). Стоит сказать, что применение этих методов позволяет многие вопросы классической элементарной геометрии решать значительно проще, чем синтетическими методами.

Такова же структура и наших учебников для старших классов, как для общеобразовательных школ [10], так и для углубленного изучения [11, 12].

Изменился язык учебника (авторы беседуют с учеником, а не поучают его), много рассказывается об истории геометрии, появились справки словесника, учебник стал красочным и интересным.

Библиографический список

1. *Александров А.Д., Вернер А.Л., Рыжик В.И.* Геометрия 7. М.: МИРОС, 1994.
2. *Александров А.Д., Вернер А.Л., Рыжик В.И.* Геометрия 7. СПб.: Спецлит, 1998.
3. *Александров А.Д., Вернер А.Л., Рыжик В.И.* Геометрия 8. М.: МИРОС, СПб.: Оракул, 1997.
4. *Александров А.Д., Вернер А.Л., Рыжик В.И.* Геометрия 9. М.: МИРОС, ЧеРо, 1997.
5. *Вернер А.Л., Рыжик В.И., Ходот Т.Г.* Геометрия 7. М.: Просвещение, 2003. Изд. 2.

6. *Вернер А.Л., Рыжик В.И., Ходот Т.Г.* Геометрия 8. М.: Просвещение, 2004. Изд. 2.
7. *Вернер А.Л., Рыжик В.И., Ходот Т.Г.* Геометрия 9. М.: Просвещение, 2001. Изд. 2.
8. *Александров А.Д., Вернер А.Л., Рыжик В.И.* Геометрия 7–9. М.: Просвещение, 2003. Изд. 2.
9. *Вернер А.Л., Ходот Т.Г.* Стереометрия 7–9. СПб.: Спецлит, 1999.
10. *Александров А.Д., Вернер А.Л., Рыжик В.И.* Геометрия 10–11. М.: Просвещение, 2002. Изд. 3.
11. *Александров А.Д., Вернер А.Л., Рыжик В.И.* Геометрия 10. М.: Просвещение, 2003. Изд. 2.
12. *Александров А.Д., Вернер А.Л., Рыжик В.И.* Геометрия 11. М.: Просвещение, 2000.
13. Большой энциклопедический словарь. Математика. М., 1998.

К вопросу о подготовке преподавателя высшей школы

В.А. Кузнецова, В.С. Сенашенко, В.С. Кузнецов

Решение проблем педагогического образования любого уровня невозможно при полной изоляции от проблем мировой образовательной системы, без анализа мирового опыта. Обзор информации о системах образования и подготовке преподавателей в четырех развитых странах: Франции, Великобритании, Германии и США – подводит к выводу о том, что, несмотря на некоторые общие черты, такие, как, например, наличие длительной педагогической стажировки, единого подхода в этом вопросе нет. Скорее, следует отметить общие трудности, аналогичные российским, и стремление трансформировать систему всего образования, в том числе – педагогического. Например, в отчете Национального Комитета Франции по оценке деятельности университетов, представленном в 1989 году, к числу важнейших приоритетных направлений отнесен вопрос о роли университетов в подготовке учителей средней школы.

В Великобритании также отмечается неудовлетворенность подготовкой педагогических кадров. Проблема повышения квалификации учителей стоит и в США. Необходимость обеспечения высокого уровня преподавателей вузов в определенной степени обозначена и в задачах Болонской декларации, одной из которых является устранение существующих препятствий для расширения мобильности студентов, исследователей и преподавателей. Из сказанного следует, что при проектировании и реализации педагогического образования в классических университетах, хотя и надо принимать во внимание зарубежный опыт, но, в первую очередь, следует учитывать отечественные традиции и существующие реалии. Последние, применительно к подготовке преподавателя высшей школы, выглядят следующим образом.

До конца 90-х годов прошлого века подготовка преподавателя высшей школы в период обучения в вузе вообще не осуществлялась, а в аспирантуре номинально выполнялась на факультативной основе. С 1997 года в магистратуре (то есть на вузовском этапе) и в аспирантуре она начала осуществляться в рамках дополнительного профессионального образования [1]. В последние годы она стала несколько привлекательнее для обучающихся, так как появилась содержательно более четко очерченная программа, сопровождаемая получением государственного диплома о дополнительной квалификации. В 2001 году Научно-методический совет по проблемам подготовки преподавателей высшей школы обновил соответствующие Государственные требования [2]. Обновленная программа сильно пересекается с основной аспирантской программой. Достаточно сказать, что она предполагает сдачу двух кандидатских экзаменов и в качестве одного из ее обязательных курсов указаны современные главы дисциплин научной отрасли. Это означает, что дополнительная педагогическая программа почти встроена в аспирантскую подготовку и не обременительна для аспирантов, но трудно выполнима для магистрантов, поскольку план магистратуры достаточно насыщен и параллельно с магистерскими экзаменами и работой над магистерской диссертацией дополнительно сдать два кандидатских экзамена (не говоря уже о других дисциплинах педагогической подготовки) практически невозможно. На математическом факультете Ярославского госуниверситета некоторые магистранты обучались по программам преподавателя высшей школы еще по варианту Гострeбований 1997 года, и наиболее способные из них успевали в магистратуре, параллельно с освоением основной магистерской программы, сдать лишь один кандидатский экзамен (по иностранному языку или философии). Заметим, что тогда еще в магистратуре не предусматривался обязательный в настоящее время государственный экзамен по направлению науки. Таким образом, при новой программе подготовка преподавателя высшей школы реально с этапа вузовского обучения вновь вернулась лишь в послевузовское образование. Однако возможность подготовки преподавателя высшей школы в магистратуре все-таки целесообразна потому, что магистрант может начать обучение по ней, а затем в аспирантуре его продолжить, хотя такой вариант и вызывает определенные организационные трудности, связанные, прежде всего, с различным расписанием занятий у аспирантов и магистрантов. Кроме того, руководитель магистранта должен быть заинтересован в дополнительном обучении ученика (что на практике наблюдается крайне редко) и должен помочь магистранту составить посильный индивидуальный план, включающий и педагогическую подготовку.

Теперь обратимся непосредственно к рассмотрению содержания дополнительной программы “Преподаватель высшей школы”. Государственные требования унифицированы для всех вузов и дифференцируются лишь в соответствии с профилем специальности в таких дисциплинах, как “История, философия и методология соответствующей области науки”, “Современные главы дисциплин научной отрасли”, в отдельных разделах “Технологий профессионально-ориентированного обучения”. А между тем педагогическая подготовка на классических университетских специальностях может отличаться от подготовки в каком-нибудь профильном (например, техническом) вузе. Действительно, в силу расслоения среднего образования и создания разноуровневых средних учебных заведений в различные колледжи, гимназии и специализированные классы часто приглашаются преподаватели университета. В таком случае преподаватель вуза должен знать хотя бы основы дидактики средней школы, которая отлична от дидактики вуза по нескольким причинам: психологическим особенностям восприятия школьников, их статусу, содержательным особенностям предметного поля и т.д. Напротив, будущий преподаватель, например, технического вуза может быть профессионально сориентирован в каком-то другом направлении. Адресность может быть достигнута двумя путями: включением в следующий вариант Государственных требований элективных курсов или выделением в них некоторого общего для всех вузов "ядра" дисциплин и далее перечня обязательных дисциплин "оболочки", соответствующих профилю вуза (или направлению). Это значит, надо определить в программе вариативную часть, связанную со спецификой обучения по классическим университетским и другим направлениям подготовки (техническим, сельскохозяйственным, медицинским и т.д.), то есть осуществить модульное "ветвление" программы блока специальных дисциплин. Первый путь нам представляется более предпочтительным и легче реализуемым. В действующем в настоящее время варианте Гостребований предполагается выбор курсов, устанавливаемых образовательным учреждением, но он касается лишь вопросов организационных основ системы образования.

Далее, в силу модульности программы и ограниченности времени, содержание материала в дисциплинах Гостребований весьма сильно сжато. Поэтому в будущих вариантах этого нормативного документа надо удалить хотя и немногочисленные, но все же имеющиеся повторы, например, тема "Систематика учебных и воспитательных задач" включена в СП. 01 и СП. 02.

Остановимся на организационных аспектах реализации программ. Здесь нельзя не сказать о трудностях, возникающих из-за недостаточного учебно-методического сопровождения программ. По существу, многие курсы – авторские, да и преподавателей соответствующего уровня для их реализации находить в вузах далеко не просто. Кроме того, в конкретном вузе или на конкретном факультете может оказаться весьма малым контингент желающих получить указанную дополнительную квалификацию, но их подготовка потребует значительных финансовых затрат. В то же время вопрос о необходимости диплома о дополнительной квалификации для человека весьма неопределен и его получение не стимулируется ни для вуза, ни для отдельного аспиранта. Вуз осуществляет подготовку преподавателей только за счет своих внутренних резервов, а отсутствие или наличие подобного диплома у молодого преподавателя никак не отражается на его тарификации. В результате вуз не имеет мотивации для реализации программы подготовки преподавателя и аспиранты не проявляют активности к ее освоению. Например, из набора аспирантов 2002 года в Ярославском госуниверситете меньше четверти изъявили желание получить дополнительную квалификацию преподавателя вуза, а стали учиться всего лишь 15 человек ($\sim 11\%$). Следовательно, значительных сдвигов в улучшении положения с подготовкой преподавателей вуза в ближайшее время, наверное, ожидать не приходится. Необходим механизм, при котором и вуз, и каждый конкретный человек станет заинтересован в дипломе о дополнительной преподавательской квалификации. Ответ, лежащий на поверхности, состоит в создании экономических рычагов. Но, возможно, существуют и другие пути. Например, в классических университетах и педагогических вузах, где на базе подготовки специалиста и в магистратуре реализуется дополнительная программа “Преподаватель” и поэтому существует ряд курсов психолого-педагогического цикла, можно уменьшить затраты на программу “Преподаватель высшей школы” за счет совместного чтения некоторых частей дисциплин, общих для обеих программ (часть собственно психолого-педагогических дисциплин, истории и методологии соответствующей области науки, информационных технологий в науке и образовании). Можно увеличить долю дисциплин, предназначенную для самостоятельного изучения. Опыт Ярославского госуниверситета показывает, что если теоретическую часть дополнительной программы реализовать в период с 10 декабря первого года обучения по 31 декабря второго года обучения аспирантуры, то, помимо философии, иностранного языка и дисциплин научной специальности, недельная нагрузка может содержать не более трех часов аудиторных занятий. Защиту выпускной квалификационной работы можно провести на втором году аспирантуры для того, чтобы третий год полностью освободить под диссертационные исследования, которые, разумеется, идут с самого начала аспирантуры.

Введение зачетных (кредитных) единиц и модульный характер дополнительных профессиональных программ позволят еще облегчить освоение программы "Преподаватель высшей школы" [3]. Для этого достаточно выразить в зачетных единицах не только целые дисциплины, но и их отдельные значительные разделы, входящие в пересечение дополнительных преподавательских программ разных уровней и основных образовательно-профессиональных программ. Например, для раздела "История математики" из соответствующей дисциплины могут быть указаны его зачетные единицы, определяющие трудоемкость и достижение определенного уровня усвоения, еще на этапе вузовского обучения. А затем в аспирантуре они могут учитываться в общей сумме зачетных единиц, которую необходимо иметь для получения дополнительной квалификации. Аналогично можно поступить и с другими дисциплинами. Система зачетных единиц может способствовать привлечению магистрантов к освоению программы "Преподаватель высшей школы", поскольку по окончании магистратуры они будут иметь количественно выраженную в зачетных единицах часть программы, которая в будущем может быть учтена в любое удобное для них время. В принципе указание для программы ее зачетных единиц позволяет расширить временные рамки для ее усвоения, введя распределенный во времени, удобный для обучающегося режим. При этом важно иметь качественную, учитывающую многие характеристики и параметры методику подсчета зачетных единиц.

Нам представляется, что в настоящее время назрела необходимость создания единых университетских преемственных структур, интегрирующих подготовку преподавателей разных уровней, переподготовку и повышение квалификации кадров региона для сферы образования (включая руководителей разных уровней в вузах). Тогда проще будут решаться организационные вопросы и вопросы содержательной преемственности программ разных уровней.

Библиографический список

1. Приказ Министерства образования России от 29.04.1997 № 826 "О введении в действие Государственных требований к мини-

муму содержания и уровню профессиональной подготовки выпускника магистратуры для получения дополнительной квалификации “Преподаватель высшей школы”.

2. Преподаватель высшей школы. Дополнительная профессиональная программа для магистратуры, аспирантуры (адъюнктуры), системы повышения квалификации и профессиональной переподготовки специалистов. Москва. Министерство образования Российской Федерации.
3. *Кузнецова В.А., Кузнецов В.С., Сенашенко В.С.* Система зачетных единиц и возможные варианты ее применения // Проблемы высшего технического образования. Опыт внедрения системы зачетных единиц в учебный процесс / Под общ. ред. А.С. Вострикова. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2004. Вып. 2(27). С. 67–73.

Мягкие модели и стратегия обучения математике

В.А. Тестов

Хотя в педагогической науке уже давно используется понятие модели, в ней до сих пор не оценено по достоинству понятие мягкой модели обучения. Впервые о двух типах моделей (жестких и мягких) громко было заявлено в 1997 г. в выступлении крупнейшего российского математика В.И. Арнольда на семинаре при Президентском совете РФ. В этом докладе он убедительно показал полезность мягких моделей, в которых присутствует неопределенность, многозначность путей развития, и опасность жестких моделей, для которых предопределен единственный путь развития. Этот доклад имеет гораздо более общее философское, методологическое значение, чем это могло показаться вначале, в том числе и для методики обучения математике.

Все сказанное В.И. Арнольдом применимо и к педагогическим моделям. В образовании также имеются жесткие и мягкие модели. Модель отражает внутреннюю, сущностную организацию педагогической системы, которая определяется, прежде всего, ее целями.

Если в жесткой модели цели ставятся весьма конкретно и должны обязательно достигаться заданным путем, то в мягкой модели цели носят более общий характер, к ним можно стремиться, не достигая их, притом разными возможными путями.

В науке долгое время, начиная с Р. Декарта и И. Ньютона, преобладала детерминированность, строгая предопределенность конструкций. Вначале эти взгляды выработались в естествознании и математике, а затем перешли и в гуманитарную область. Детерминированность, в частности, проникла в педагогику, начиная с Я.А. Коменского. Следствием такой детерминированности была попытка организовать образование как идеально функционирующую машину. Согласно доминирующим тогда представлениям, для обучения человека надо лишь научиться управлять такой машиной, т.е. превратить обучение в своего рода производственно-технологический процесс. Акцент стал делаться на стандартизированных учебных процедурах и фиксированных эталонах усвоения знаний, то есть было положено начало технологическому подходу в обучении, а тем самым преобладанию в обучении репродуктивной деятельности учащихся.

Технологический подход и возникшая на его основе классно-урочная система позволили лучше удовлетворять возросшую потребность общества в большом количестве грамотных людей. Однако при технологическом подходе обучение нацелено в основном на усвоение информационной компоненты знаний. Следует напомнить, что крупнейший отечественный психолог Л.С. Выготский не связывал высокую эффективность обучения для развития со способами обучения, или, как теперь бы мы сказали, с технологией обучения.

Большинство педагогов считают, что чем четче определена цель, тем лучше, тем эффективнее учебно-воспитательный процесс. Важнейшим современным достижением технологического подхода в обучении считается постановка четких конкретных диагностируемых целей, которые должны обязательно достигаться за определенный промежуток учебного времени. Поэтому большинство созданных за последние годы технологий обучения могут служить примерами жестких моделей обучения.

Однако всегда ли такая жесткость целей полезна? Наиболее популярной в последнее время считалась система учебных целей, разработанная Б. Блумом. Но, как отмечает член-корр. РАО Г.И. Саранцев, у Б. Блума цели обучения трансформированы в учебные действия, которые определяют уровни усвоения учебного материала, а параметры его системы в основном ориентированы на знания, а не на развитие ученика. Жесткая технология всегда предполагает соответствие результата и цели, творчество же, наоборот, предполагает рассогласование цели и результата. Тем самым однозначная постановка цели сужает возможности неожиданных (незапланированных) результатов.

Как отметил В.И. Арнольд, жесткие модели – это путь к ошибочным предсказаниям. Более того, стремление все заранее, на несколько лет вперед, распланировать может при определенных условиях привести к катастрофе. Жесткая модель образования предполагает принуждение учеников и самого учителя к достижению определенных целей. А принуждение всегда неэффективно и разрушительно.

Полезность и необходимость использования мягких моделей обучения осознается пока далеко не всеми педагогами. В процессе обучения всегда происходят незапланированные малые изменения, флуктуации различных педагогических систем. Поэтому в основе современных образовательных моделей должен лежать принцип неопределенности ряда учебных параметров и параметров управления.

В силу этого необходимо, как отмечает В.И. Арнольд, "введение обратной связи, т.е. зависимости принимаемых решений от реального состояния дел, а не только от планов". Значит, и цели обучения должны или все время меняться, или носить общий неконкретный характер с тем, чтобы к цели могли вести разные пути.

Как установлено новейшими исследованиями, цели обучения должны носить системный характер, а значит, должна соблюдаться их иерархичность. На самом верху иерархии находятся стратегические цели, цели – "векторы" самого общего характера, рассчитанные на весь период обучения. На нижних уровнях находятся тактические цели, четкие конкретные цели – "планируемые результаты" изучения отдельной темы на уроке. Четкость цели в последнем случае действительно только полезна, т.к. она отражает получение предметного знания, знания как результата. Такая постановка возможна на отдельном уроке или при изучении отдельной темы. Приобретение же личностного знания происходит, как правило, длительный промежуток времени, причем для разных учеников требуется разное время (оно может отличаться в десятки раз). Однозначное описание такого знания с помощью эталонов результата не представляется возможным. Более того, если цели обучения ставятся на длительный промежуток времени, то четко определенные, жесткие цели могут оказаться или недостижимыми, или даже вредными.

В последние десятилетия на основе открытий в естествознании (И. Пригожин, Г. Хакен и др.) произошли изменения во всем стиле мышления: произошел переход от образов порядка к образам хаоса, наука более не отождествляется с определенностью, развились синергетические идеи недетерминированности, непредсказуемости путей эволюции сложных систем. В математике также появились новые разделы (теория катастроф, геометрия фракталов, теория нечетких множеств, многозначная логика и др.), послужившие основой математической теории мягких моделей. Полезность такой математической теории была открыта сравнительно недавно, поэтому у многих ученых новое научное видение еще не сложилось.

Традиционная педагогика, основанная на жестких моделях, не понимает, что в школе должна быть определенная доля хаоса, что флуктуации на микроуровне играют существенную роль в определении наличных тенденций, целей обучения на ближайшую перспективу.

Подходы к системе образования, созвучные с синергетической картиной мира, попытки создания мягких моделей образования можно найти в трудах ряда выдающихся отечественных педагогов и педагогов-новаторов, которые предугадали этот научный подход. Синергетика теоретически обосновывает и подкрепляет природосообразные плоды их интуиции. Одним из них является значение хаоса, переосмысление его деструктивной или созидательной роли в процессе самоорганизации педагогической системы. Синергетика приходит к выводу: эффективное управление самоорганизующейся системой возможно только в случае вывода ее на собственные пути развития, а никак не навязывание жестких планов и схем, присущих жестким моделям. В этом и состоит суть подхода к построению мягких моделей в образовании, подхода, основанного на поиске и использовании внутренних тенденций развития образовательных систем, их саморазвития, самоорганизации.

Мягкие модели – это мудрость мягкого управления учебным процессом, управления через советы и рекомендации, фактически управления как самоуправления. Ведь главное – не передача знаний, а овладение способами пополнения знаний, способами поиска нужной информации, способами самообразования. В частности, при обучении математике необходимо в первую очередь развивать у учащихся математическое мышление, вовлекая их в математическую деятельность.

В мягкой модели процедура обучения, способ связи учителя и ученика – это не передача знаний как эстафетной палочки от одного человека к другому, а создание условий, при которых становятся возможными процессы приобретения знаний самим учеником в результате его активного и продуктивного творчества. Еще одним проявлением мягких моделей в обучении математике является применение эвристик. Эврика, инсайд, озарение – это типичный пример нелинейного мышления, точно планировать результат которого невозможно, можно лишь подводить к нему ученика. При использовании мягких моделей в обучении преобладающими становятся ситуации открытого диалога, прямой и обратной связи. Благодаря совместной активности в разрешении проблемных ситуаций учитель и ученик начинают функционировать с одной скоростью, жить в одном темпе. Обучение становится интерактивным.

Учитель должен научиться понимать и развивать уникальную личность ученика, организовывать его образование по его собственной траектории. В такой ситуации от учителя требуется непрерывное переопределение своих действий и позиций, для него становится привычной ситуация образовательной неопределенности. Поэтому необходимо предоставить возможность и ученику и учителю ставить собственные цели в изучении конкретной темы или раздела, выбирать формы, способы и темпы обучения.

Пример мягкой модели обучения являла собой система обучения Сократа. Путем особых вопросов и рассуждений он помогал собеседнику самостоятельно приходить к постановке или решению проблемы. Из современности ярким примером мягкой модели обучения математике является методика Р.Г. Хазанкина. Непревзойденным примером эвристического диалога при изучении математики являются "Диалоги о математике" известного венгерского математика А. Реньи. В этой книге автор не поучает читателя, не стремится вложить в него уже готовые собственные мысли, а как бы беседует с ним. В результате читатель сам становится как бы участником диалога – предмет изложения перестает быть для него чем-то навязываемым извне, и обсуждаемые проблемы воспринимаются уже как собственные.

В мягких моделях при отсутствии жестких целей определяющая роль отводится не технологии обучения, а стратегии обучения, которая определяет принципы отбора содержания, принципы его построения в соответствии с возрастными особенностями учащихся, с потребностями практики и с потребностями развития самой личности. Со стратегией обучения, с логико-психологическим обоснованием построения школьных учебных предметов теснейшим образом связаны проблемы развивающего обучения. Стратегия обучения существенным образом определяет тип сознания и мышления, который формируется у школьников при усвоении ими соответствующих знаний, умений и навыков. Поэтому все известные системы развивающего обучения в той или иной степени включают стратегию обучения. При правильно выбранной стратегии обучения уже не столь важно, какие используются формы, средства, методы обучения. Главное, чтобы они помогали выбору собственных и благоприятных для субъекта путей развития.

Категория стратегии обучения стала использоваться в теории и методике обучения сравнительно недавно. Слово "стратегия" произошло от греческого *strategia,* что в переводе значит "вести войско". Вначале этот термин использовался только в военной науке, затем стал использоваться в политике и в других областях и означал искусство планирования руководства, основанного на правильных и далеко идущих прогнозах. В теории игр стратегия – это возможный в соответствии с правилами игры способ действия игрока. Этот способ не обязательно ведет к успеху, к выигрышу, т.е. стратегия может быть как выигрышной, так и проигрышной.

В настоящее время термин “стратегия” все чаще используется и в педагогической науке. Все большее распространение этого термина в педагогике не является случайным, поскольку в системе ее научных понятий обнаружилась брешь в связи с частым употреблением понятия “технологии обучения” и забвением понятия “методика обучения”. Даже при самом широком толковании технология обучения не занимается ни отбором содержания обучения, ни исследованием проблем мотивации, ни обоснованием принципов построения школьных учебных предметов, ее цель – решение других, частных задач. Решениями же главных, стратегических задач должна заниматься какая-то другая часть педагогической науки, которую и стали часто называть стратегией образования (обучения).

Можно было бы дать следующее определение образовательной стратегии: *стратегия в образовании* – это план педагогических действий в направлении осуществления стратегических целей образования.

Но такое определение вполне соответствовало бы традиционной образовательной парадигме. В таком понимании стратегия обучения существует уже несколько столетий и присутствует во многих педагогических системах, не использовался только сам этот термин.

В настоящее время необходимо новое, более широкое понимание стратегии образования. Для стратегии вовсе не обязательно иметь какую-то определенную цель, поскольку, как вытекает из синергетических представлений, эффект самоорганизации может наступить и без постановки цели, возможно “спонтанное возникновение порядка и организации из беспорядка и хаоса” (И. Пригожин и И. Стингерс).

Поэтому стратегия образования должна заниматься, прежде всего, не построением последовательности действий педагога, а формированием мощной, насыщенной и разнообразной образовательной среды для дальнейшего использования свойств этой среды, а также формированием стиля педагогического взаимодействия. Для обучения наибольшую роль в образовательной среде играют следующие три основные компоненты:

- содержание обучения;
- сам ученик, его личность, закономерности ее развития;
- все человеческое общество с его историей, производственной и духовной культурой.

Соответственно этим трем основным компонентам среды обучения можно обозначить три основные взаимосогласованные стратегии обучения:

- стратегия отбора;
- стратегия длительного поэтапного обучения;
- стратегия обучения на социокультурном опыте.

Первая из этих стратегий позволяет производить отбор содержания обучения. Это очень важная стратегия, поскольку в школьный курс математики можно включить только небольшую часть современных знаний. Поэтому вполне понятны нескончаемые споры вокруг школьного стандарта: какие вопросы в него включать, а какие не включать. Решить эти споры можно только на основе стратегии отбора, на основе соблюдения целого ряда единых дидактических требований, среди которых одно из первых мест занимает обеспечение оптимального отбора содержания образования, построения и согласования учебных программ всех уровней.

Вторая стратегия – стратегия поэтапного длительного обучения – должна учитывать возрастные и психологические особенности учащихся, как количественные, так и качественные изменения, которые совершаются в личности учащихся. Если такие качественные изменения происходят, мы можем говорить о развивающем обучении. Таким образом, в эту стратегию должен входить принцип развивающего и воспитывающего обучения. Качественные изменения при длительном обучении совершаются скачкообразно, поэтому важно выделить этапы развития личности. При длительном обучении в процессе развития учащихся, их знаний и интеллекта необходимо соблюсти связь между явлениями, чтобы новое, снимая старое, сохраняло бы в себе некоторые его элементы. То есть в эту стратегию обязательно должен включаться принцип преемственности как один из основных принципов процесса развития.

Третьей стратегией является стратегия обучения на социокультурном опыте. Эта стратегия предполагает, что обучение должно проводиться в тесной связи с потребностями практики, науки и техники, т.е. с культурой, причем как материальной, производственной, так и духовной. Содержание любой дисциплины следует рассматривать как результат деятельности людей, их усилий в поиске истины. Эта стратегия позволяет решить, наконец, такую важнейшую для современной школы проблему, как проблему мотивации учения через дедуктивный, практический, эвристический и эстетический аспекты.

Вопросы стратегии развивающего обучения в наибольшей степени представлены в теории Д.Б. Эльконина-В.В. Давыдова, согласно которой содержанием развивающего обучения на всех его этапах должна стать система научных понятий, т.е. знания, представленные на уровне теоретического обобщения. Поэтому уже на ранних стадиях обучения математике необходимо знакомить учащихся хотя бы с некоторыми фундаментальными понятиями современной математики.

В основе обучения математике, согласно Ж. Пиаже, должны лежать основные математические структуры, которые являются фундаментальными как для здания математики, так и для механизма мышления (алгебраические, порядковые, топологические). Однако Ж. Пиаже исходит из классификации математических структур, данных Н. Бурбаки. Но эта классификация исходит только из аксиоматико-дедуктивного характера математики. Другая сторона математики, ее конструктивный характер у Н. Бурбаки отошли на задний план. Такая односторонность в подходе

Н. Бурбаки послужила причиной отсутствия в его классификации упоминания о математических структурах, являющихся основой конструктивного подхода, основой математической деятельности.

Для обеспечения математического развития у школьников должны быть сформированы не только алгебраические, порядковые и топологические структуры, которые представляют собой, прежде всего, системы хранения знаний, но и структуры, которые представляют собой определенные качества математического мышления, которые являются, прежде всего, средствами, методами познания, а значит, и средствами, методами получения математических знаний учеником. Такие структуры играют особую роль для исследовательской активности в области математики, а значит и для развивающего обучения. Для таких структур более удачным является термин "*схемы мышления*", предложенный У. Нейссером, поскольку этот термин лучше отражает суть такого вида структур.

Выделить специфические математические схемы мышления можно на основе деятельностного подхода. Основным видом математической деятельности является решение задач, и поэтому в этой деятельности проявляются эти специфические математические схемы (приемы, методы) мышления. Такими видами структур, которые в наибольшей степени способствуют развитию математического мышления, являются *логические, алгоритмические (процедурные), комбинаторные, образно-геометрические схемы,* т.е. те математические структуры, которые отвечают за установление связей между различными алгебраическими, порядковыми, топологическими и другими математическими структурами. Именно эти структуры являются в первую очередь средством познания, обеспечивают линию качественных изменений в функционировании интеллекта.

Все эти структуры обладают универсальностью (независимостью их использования от конкретного математического материала) и имеют большое значение не только для обучения, но и для математического творчества. Достаточно вспомнить широкое распространение в различных областях современной математики комбинаторных и геометрических методов. Значение каждого из отмеченных видов структур для развития математического мышления, математических способностей уже давно было замечено педагогами-математиками и подтверждено многочисленными исследованиями.

С точки зрения стратегии обучения как система Л.В. Занкова, так и система Д.Б. Эльконина-В.В. Давыдова имеют наряду с достоинствами и существенные недостатки. Так, в системе Л.В. Занкова отсутствуют какие-либо теоретически обоснованные принципы построения содержания обучения. Выдвинутая же им идея о “процессуальном”, т.е. непрерывно-поступательном характере обучения приходит в противоречие с тем, что процесс познания наряду с непрерывностью обладает и дискретностью, т.е. познание каждого элемента не может происходить все время поступательно. Такое познание идет по спирали, проходит определенные этапы, и каждый этап должен базироваться на предыдущем, характеризоваться определенной завершенностью и быть пропедевтикой следующего.

Согласно теории развивающего обучения, созданной Д.Б. Элькониным и В.В. Давыдовым, чтобы развивать у школьников теоретическое мышление, обучение каждому учебному предмету должно начинаться с наиболее общих простых образований, однако содержащих в себе все потенции перехода к развитым целостным структурам. Этот принцип формирования вначале не отдельных элементов структуры, а ее фундамента, костяка, многие называют принципом генерализации. Однако в системе В.В. Давыдова этот принцип понимается расширительно, как принцип движения “от общего к частному”, что отвергается всем опытом преподавания математики.

Таким образом, в мягких моделях обучения главная роль отводится стратегии обучения. Мягкие модели должны преобладать для решения задач развития различных качеств личности, а также при решении педагогических задач в сложных, нетипичных ситуациях.

Библиографический список

1. *Арнольд В.И.* “Жесткие” и “мягкие” математические модели. М.: МЦНМО, 2000. 32 с.

2. *Пригожин И., Стенгерс И.* Порядок из хаоса. Новый диалог человека с природой. М.: Эдиториал УРСС, 2000.
3. *Саранцев Г.И.* Общая методика преподавания математики. Саранск: Тип. "Крас. Окт.", 1999. 208 с.
4. *Тестов В.А.* Стратегия обучения математике. М., 1999.

Формирование нелинейного мышления студентов посредством визуализации самоподобных множеств

В.Н. Осташков, Е.И. Смирнов

Обучение студентов гладким математическим объектам – необходимый элемент образования: дифференцируемые функции и линейные системы дифференциальных уравнений позволили решить громадное число теоретических и прикладных задач. Но все-таки, как выяснилось в последней четверти прошлого столетия, мир, в котором мы живем, сильно нелинейный [1, 2, 4, 6], и для понимания происходящих в нем динамических процессов требуются нелинейные методы их исследования. А самое важное – необходимо формирование мышления человека с учетом того, что оно нелинейно по своей природе [7].

Нелинейные объекты и процессы изучаются в различных математических дисциплинах; например, в теории вероятностей (стохастические процессы), в геометрии (инверсия, бирациональные отображения и преобразования), в математическом анализе (канторово множество). Тем не менее, целенаправленного воспитания и формирования у студентов нелинейного мышления сегодня в вузах нет. Одна из причин такого положения дел в образовании заключается в том, что нелинейная наука сама еще находится в стадии становления и имеет возраст не более 30 лет; другая причина – малое количество учебных задач в арсенале преподавателя математики, несмотря на обширную научно-популярную литературу.

Научить мыслить нелинейно — значит научить мыслить в альтернативах, предполагая возможность смены темпа развертывания событий и качественной ломки, фазовых переходов в сложных системах. В современных условиях бурного развития математического моделирования, вычислительного эксперимента, компьютерной графики становится особо актуальным формирование нелинейного мышления на основе синтеза визуализации математических объектов и формально-логических методов.

Обратимся к классическому примеру Ван дер Вардена непрерывной на отрезке и нигде не дифференцируемой функции [8. С. 218], график которой представлен на рис. 1.

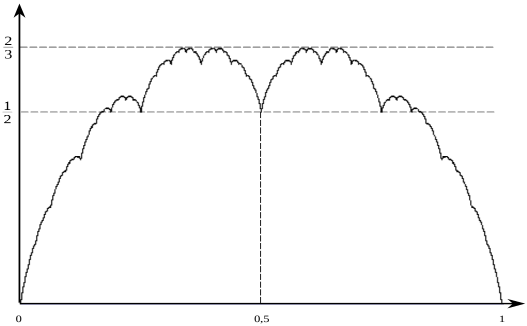


Рис. 1. Пример Ван дер Вардена всюду не дифференцируемой функции; ее графиком является аффинно самоподобная фрактальная кривая [3]

Рассмотрим для любого целого неотрицательного n функцию

$$\varphi_n(x) = \tfrac{1}{\pi 2^{n+1}} \,|\, \arcsin\ \sin 2^n \pi x \,|, \tag{1}$$

или, равносильно,

$$\varphi_n(x) = 2^{-n}(\tfrac{1}{2} - \,|\, 2^n x - [2^n x] - \tfrac{1}{2} \,|). \tag{2}$$

Выясним некоторые свойства функции

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x). \tag{3}$$

Свойство 1. *Функция* (3) *периодическая с периодом* 1. Доказательство следует из периодичности (2).

Свойство 2. $\varphi_0(2^{-n}) = 2^{-n}$ *при* $n > 0$.
Доказательство следует непосредственно из (2).

Свойство 3. $\varphi_m(2^{-n}) = \begin{cases} 2^{-n}, & m < n; \\ 0, & m \geq n. \end{cases}$
Доказательство следует непосредственно из (2).

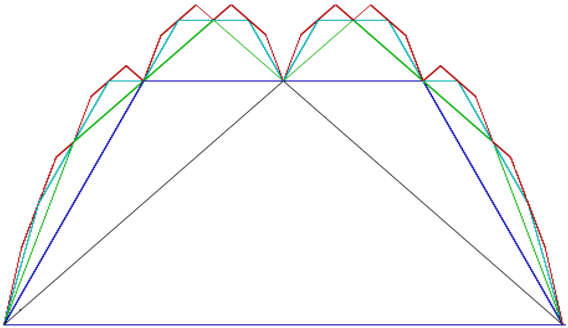


Рис. 2. Графики первых пяти частичных сумм для функции Ван дер Вардена

Свойство 4. *Если* $x = 2^{-n}$, *то*

$$f(\tfrac{x}{2}) = \tfrac{x}{2} + \tfrac{1}{2} f(x). \tag{4}$$

Доказательство. Из (3) и свойств 2 и 3 следует

$$f(2^{-n}) = \sum_{k=0}^{n-1} \varphi_k(2^{-n}) = n2^{-n}.$$

Поэтому

$$f(2^{-(n+1)}) = (n+1)2^{-(n+1)} = \tfrac{1}{2} n 2^{-n} + 2^{-(n+1)} = \tfrac{1}{2}[f(2^{-n}) + 2^{-n}].$$

Свойство 5. $f(x) = f(1-x)$.
Доказательство следует из равенства $\varphi_n(x) = \varphi_n(1-x)$.

Свойство 6. *Максимум функции* $f(x)$ *равен* $M = \frac{2}{3}$.

Доказательство. Пусть γ – график функции $f(x)$. Рассмотрим частичную сумму $f_k(x) = \sum\limits_{n=0}^{k} \varphi_n(x)$. Графиком функции $f_k(x)$ является ломаная L_k, вписанная в γ (рис. 2). При этом очевидно, что

$$\max f_{2m+1}(x) - \max f_{2m}(x) = 0,$$
$$\max f_{2m+2}(x) - \max f_{2m}(x) = 2^{-2m-3}.$$

Следовательно,

$$M = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{32} + \ \ldots\ + \tfrac{1}{2^{2n-1}} + \ \ldots = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}} = \tfrac{2}{3}.$$

Свойство 7. *Для любого* $x \in [0; \frac{1}{2}]$ *справедливо* (4).

Доказательство. Пусть в двоичном представлении

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k 2^{-k}, \quad a_k \in \{0; 1\}.$$

Тогда отсюда, из (3) и свойства 3 следует

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n\,(\sum_{k=1}^{\infty} a_k 2^{-k}) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k 2^{-k}) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k 2^{-k},$$

$$f(x/2) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x/2) = \sum_{k=1}^{\infty} (k+1) a_k 2^{-(k+1)} =$$

$$= \tfrac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (k+1) a_k 2^{-k} = \tfrac{1}{2}(\sum_{k=1}^{\infty} a_k 2^{-k} + \sum_{k=1}^{\infty} k a_k 2^{-k}) = \tfrac{x}{2} + \tfrac{1}{2} f(x).$$

Фрактальность. Хорошо известно [1], что аттрактор системы итерированных сжимающих преобразований (СИФ)[1] является фрактальным множеством, как правило, дробной размерности Минковского.

[1] СИФ – система итерированных функций. Так принято говорить и в случае системы итерированных преобразований или отображений, так как они задаются с помощью уравнений, т.е. функций.

В нашем случае, опираясь на свойство 7, легко установить, что аффинные преобразования с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

или, проще,

$$A : (x,\ y) \mapsto (\tfrac{1}{2}x,\ \tfrac{1}{2}(x+y)),$$

$$B : (x, y) \mapsto (\tfrac{1}{2}(x+1),\ \tfrac{1}{2}(-x+y+1)),$$

отображают γ на себя и составляют пару образующих группы автоморфизмов кривой γ. Кривая γ строится с помощью СИФ следующим образом.

Пусть K — единичный квадрат с вершинами (0; 0), (1; 0), (1; 1), (0; 1) (рис. 3).

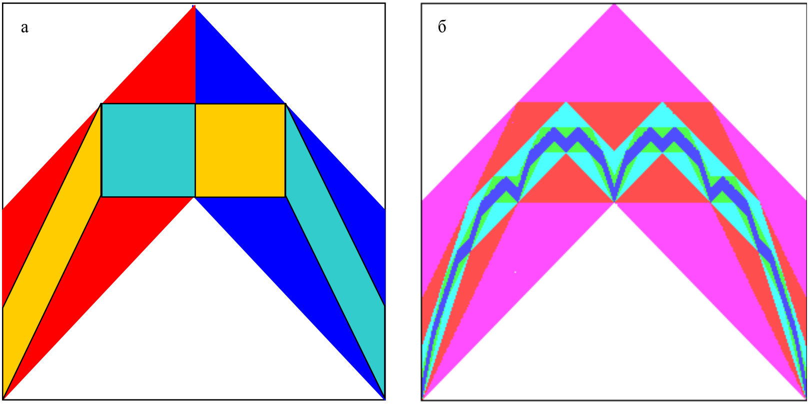


Рис. 3. Образы квадрата после нескольких итераций; а – после двух, б – после пяти итераций

Преобразования A, B отображают K на левый и правый параллелограммы соответственно. Выполняя эти отображения бесконечно много раз, мы получим последовательность:

$$T_0 = K;$$
$$T_1 = A(T_0) \cup B(T_0);$$
$$\ldots$$
$$T_n = A(T_{n-1}) \cup B(T_{n-1});$$
$$\ldots$$

Фигура $T = \lim\limits_{n\to\infty} T_n$ получена после бесконечного числа итераций и имеет нулевую площадь. Действительно, площадь фигуры T_n равна $S_n = 2^{-n}$. Следовательно, площадь фигуры равна

$$S = \lim_{n\to\infty} 2^{-n} = 0.$$

Фигура T является одним периодом кривой γ и обладает свойством аффинного самоподобия [5],[1] так как получена посредством системы итерированных аффинных преобразований A, B. Самоподобие в данном случае означает, что любой, самый малый участок фрактальной кривой T можно с помощью аффинных преобразований A, B отобразить на исходную кривую T.

Кривую γ можно получить другим способом, вполне пригодным для реализации на компьютере. Прежде всего, обозначим через R отображение плоскости на себя, которое точке M_0 – стартовой точке – ставит в соответствие точку $M_1 = R(M_0)$, причем R действует на точку M_0 либо матрицей A, либо матрицей B. Выбор матрицы A происходит в любой точке с вероятностью $p \in (0; 1)$, а матрицы B – с вероятностью $q = 1 - p$. В нашем случае разумно положить $p = q = 0,5$.

[1] Бенуа Мандельброт аффинно самоподобные множества называет самоаффинными [3, 4]. В работе [5] рассматриваются фракталы (мультифракталы), которые не являются аффинно самоподобными, но проективно самоподобными.

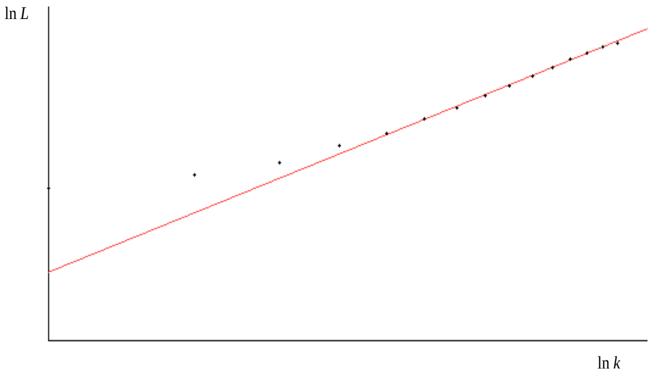


Рис. 4. Для первого и второго монстра Ван дер Вардена в двойной логарифмической системе координат точки $(\ln k; \ln L)$ ложатся на прямую с угловым коэффициентом $D = 0,35$

Важным обстоятельством здесь является нелинейность отображения R: если точки X, Y, Z коллинеарны, то, например, точки $A(X)$, $B(Y)$, $B(Z)$ не обязаны быть таковыми.

В силу того, что R – сжимающее отображение, бесконечная орбита $M_0 \mapsto M_1 \mapsto \ldots \mapsto M_n \mapsto \ldots$, где $M_n = R^{\circ n}(M_0)$ (образ стартовой точки M_0 в n-кратной итерации отображения R), после достаточно большого n приблизится к кривой γ на любую наперед заданную бесконечно малую величину. Кривая при этом называется *аттрактором* (т.е. притягивателем, притягивающим множеством). Все орбиты, независимо от стартовой точки, достаточно быстро стремятся к аттрактору [1]. Поэтому прорисовку аттрактора на мониторе лучше начать после выполнения достаточно большого числа шагов (порядка 20).

Из свойства 6 мы знаем максимум функции $f(x)$, равный $2/3$. Выясним, при каких x она принимает значение $2/3$, т.е. решим уравнение

$$f(x) = \tfrac{2}{3}.$$

[1]Если точка находится от начала координат на расстоянии r, то после $n = 1 + [\log_4 r]$ итераций она окажется в единичном квадрате K.

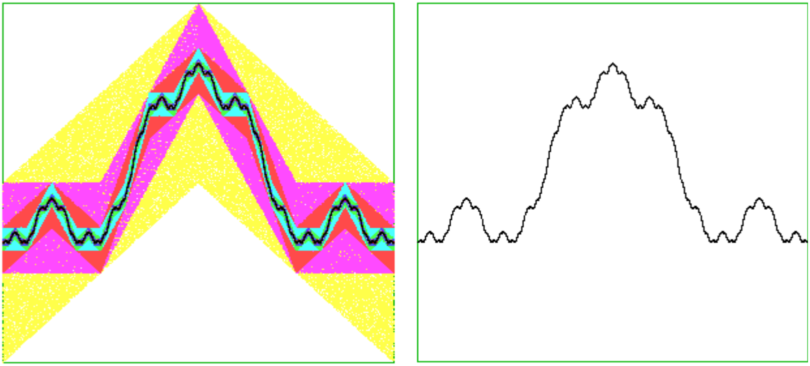


Рис. 5. Второй монстр Ван дер Вардена – аффинно самоподобная кривая

Для этого, прежде всего, заметим, что

$$\alpha = AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\beta = BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Это означает, что преобразование

$$\alpha : (x,\ y) \mapsto \left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{4},\ \frac{1}{4}y + \frac{1}{2}\right)$$

является гомотетией с центром $M_1 = \left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right)$[1] и коэффициентом $\frac{1}{4}$, а преобразование

[1]Неподвижной точкой гомотетии $x \mapsto kx + b$ служит точка $x = \frac{b}{1-k}$.

$$\beta : (x,\ y) \mapsto \left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{2},\ \frac{1}{4}y + \frac{1}{2}\right)$$

– гомотетией с центром $M_2 = (\frac{2}{3},\ \frac{2}{3})$ и тем же коэффициентом $\frac{1}{4}$. Следовательно, $x = \frac{1}{3}$, $x = \frac{2}{3}$ – решения уравнения (5). Кроме этих решений, существуют и другие решения. Множество всех решений имеет мощность континуума и всюду разрывное. Точнее, – канторово множество, которое получается следующим образом.

Разделим отрезок $I_0 = [\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}]$ на четыре равных отрезка и выберем из них два крайних. Обозначим объединение крайних отрезков через I_1. На втором шаге с каждым отрезком из I_1 поступим аналогично, получив объединение I_2 из $n_2 = 2^2$ отрезков, длина каждого из которых равна $l_2 = 3^{-1}4^{-2}$. На k-м шаге мы получим множество I_k, состоящее из объединения $n_k = 2^k$ равных отрезков длиной $l_k = 3^{-1}4^{-k}$. При бесконечном числе шагов получится цепочка вложений

$$I_0 \supset I_1 \supset\ \ldots\ \supset I_k \supset\ \ldots \supset I,$$

где $I = \lim\limits_{k\to\infty} I_k$.

Для доказательства того, что I – множество решений уравнения (5), достаточно убедиться, что I – аттрактор системы итерированных гомотетий α, β. Рекомендуем читателю доказать этот факт в качестве упражнения.

Рис. 2 подсказывает нам еще один способ построения кривой γ. Для построения кривой γ на отрезке $[0; 1]$ рассмотрим ломаную $A_0A_1A_2$, $A_0 = (0;\ 0)$, $A_1 = (\frac{1}{2},\ \frac{1}{2})$, $A_2 = (1;\ 0)$. Эта ломаная является графиком функции $f_0 = \varphi_0$. Чтобы построить график частичной суммы $f_k(x) = \sum\limits_{n=0}^{k} \varphi_n(x)$, построим последовательно графики функций $f_1,\ f_2, \ldots$

При $k = 1$ построим точки B_i как вершины треугольников $A_{i-1}B_iA_i$ такие, что медианы, проведенные из вершин B_i, являются вертикальными и равны $m_i = 2^{-2}$ $(i = 1, 2)$. Затем сделаем переобозначение:

$$\begin{array}{ccccc} A_0 & B_1 & A_1 & B_2 & A_2 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ A_0 & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \end{array}$$

и переходим к следующему значению k.

При $k = 2$ построим точки B_i как вершины треугольников $A_{i-1}B_iA_i$ такие, что медианы, проведенные из вершин B_i, являются вертикальными и равны $m_i = 2^{-3}$ $(i = 1, ..., 2^2)$. Затем сделаем сначала одно переобозначение: $A_0 \to A_0$, $A_i \to C_{2i}$, $B_i \to C_{2i-1}$, $i = 1..3$, а затем – другое: $C_j \to A_j$, $j = 0..\,6$ и т.д.

На шаге k построим точки B_i как вершины треугольников $A_{i-1}B_iA_i$ такие, что медианы, проведенные из вершин B_i, являются вертикальными и равны $m_i = 2^{-(k+1)}$ $(i = 1, ..., 2^k)$. Затем сделаем сначала одно переобозначение: $A_0 \to A_0$, $A_i \to C_{2i}$, $B_i \to C_{2i-1}$, $i = 1, ..., 2^k$, а затем – другое: $C_j \to A_j$, $j = 0, ..., 2^{k+1}$ и т.д.

В пределе при $k \to \infty$ мы получим в точности кривую как множество всех вершин ломаной $A_0A_1 \dots A_k$, число которых растет экспоненциально. Что касается длины этой ломаной, то она должна расти по степенному закону $L \sim k^D$, согласно закону Ричардсона [4, 6], где D – некоторое число, обычно дробное. После логарифмирования степенной закон принимает линейный вид $\ln L \propto D \ln k$. Из рис. 4 находим, что $D \approx 0,35$. Это означает, что размерность Минковского (или емкость) кривой γ близка к величине $D_0 = 1 + D = 1,35$. Но на самом деле мы можем оказаться далеко от истины, так как пользовались численными методами, не подкрепив их теоретическими оценками.

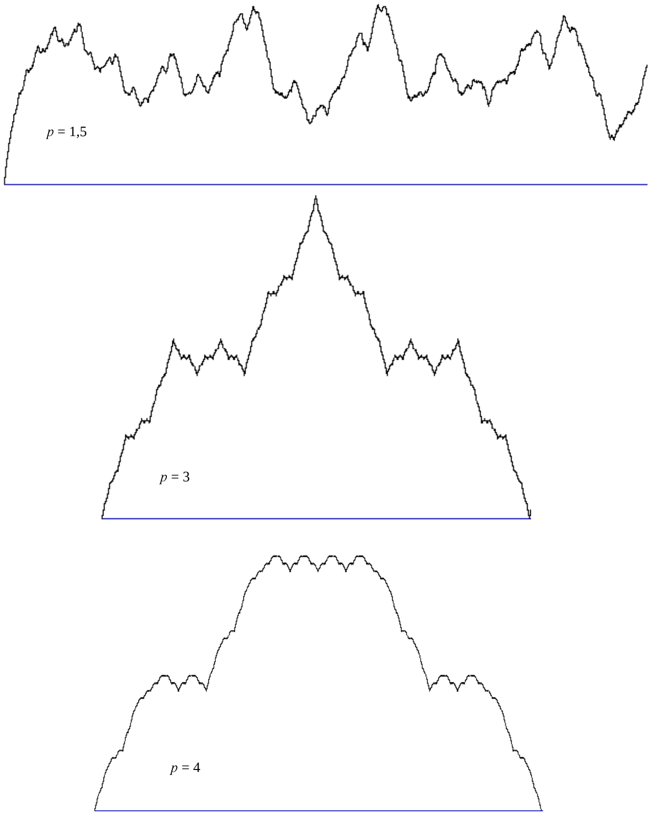


Рис. 6.

Здесь мы сталкиваемся с кризисным явлением в нелинейной науке вообще и фрактальной геометрии в частности. Суть кризиса – в отсутствии удовлетворительных методик вычисления размерности Минковского для аффинно самоподобных фракталов. Б. Мандельброт [3] предлагает некоторые подходы для вычисления емкости "самоаффинных" фракталов специального вида, которыми можно пользоваться, оставаясь в рамках конвенционализма.

В [1. С. 132] приводится теорема 5.1.3, позволяющая вычислять емкость евклидово самоподобных фракталов. Мы сейчас попытаемся синтезировать идею Мандельброта [3] и теорему 5.1.3. Приведем формулировки двух компонент, которые мы будем синтезировать.

Первая компонента. Теорема 5.1.3 гласит:[1] "Пусть A – евклидово самоподобное множество, причем $\pi_i(A)$ попарно не пересекаются. Обозначим через D единственное решение уравнения

$$k_1^D + k_2^D + \cdots + k_N^D = 1, \tag{$*$}$$

где $k_i \in (0;\ 1)$ – коэффициенты подобия. Тогда если D-мера множества A положительна, то размерность Минковского множества A равна:

$$\dim_M A = D\text{''}.$$

Вторая компонента: "Если множество A является объединением N непересекающихся подмножеств, которые равны между собой, причем каждое подмножество есть образ множества A при аффинных преобразованиях, таких, что единичный квадрат отображается на подходящий прямоугольник размером $p \times q$, то размерность Минковского находится из равенства

$$N(\sqrt{pq})^D = 1,$$

или, равносильно,

$$D = \frac{\ln N}{-\ln\sqrt{pq}}\text{''}. \tag{$**$}$$

Пусть базис B состоит из двух векторов:

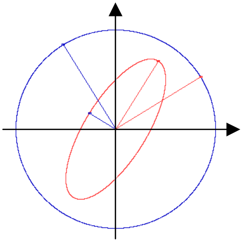
$$\vec{a} = (\tfrac{1+\sqrt{5}}{a}, \tfrac{2}{a}), \quad \vec{b} = (\tfrac{1-\sqrt{5}}{b}, \tfrac{2}{b}),$$

[1] Теореме предшествует определение: "Будем называть компактное множество [*евклидово*] *самоподобным*, если существуют такие преобразования подобия $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_N$, что имеет место представление:

$$A = \pi_1(A) \cap \pi_2(A) \cap ... U\pi_N(A),$$

причем множества $\pi_i(A)$ имеют не очень много общих точек".

где $a^2 = 10 + 2\sqrt{5}$, $b^2 = 10 - 2\sqrt{5}$.



Очевидно, $\vec{a}^2 = \vec{b}^2 = 1$, $\vec{a}\vec{b} = 0$, т.е. векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ образуют ортонормированный базис. Аффинное преобразование

$$A : (x,\ y) \mapsto (\tfrac{1}{2}x,\ \tfrac{1}{2}(x + y)),$$

переводит базис B в ортогональный. Пусть $\vec{p} = A(\vec{a})$, $\vec{q} = A(\vec{b})$. Тогда $p = |\,\vec{p}\,| = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5})}{2(5+\sqrt{5})}}$, $q = |\,\vec{q}\,| = \sqrt{\frac{5-2\sqrt{5})}{2(5-\sqrt{5})}}$. При этом преобразование A единичный квадрат переводит в прямоугольник площадью $pq = \frac{1}{4}$. Кривую γ можно разбить на две части: одна лежит в левом, другая – в правом параллелограмме. Таким образом, воспользовавшись формулой (**), мы должны положить $N = 2$. Тогда из (**) следует нелогичный результат: $D = \dfrac{\ln 2}{-\ln\sqrt{\frac{1}{4}}} = 1$. В самом деле, размерность Минковского кривой γ должна быть больше 1. Следовательно, формула Мандельброта нам не подходит, и мы вынуждены искать формулу, согласующуюся с клеточной размерностью $D_B = D_0$.[1]

Замечая, что в (**) величина $\sqrt{pq}$ является средним геометрическим, можно попытаться заменить эту среднюю на другие известные средние. Из физических и геометрических соображений на такую роль лучше всего подходит среднее квадратичное $\sqrt{\frac{p^2+q^2}{2}}$. Вычисления показывают, что в этом случае мы получаем

$$D = \frac{\ln 2}{-\ln\sqrt{\frac{1}{2}(p^2 + q^2)}} = 1,41339,$$

[1] D_B – клеточная размерность [1], D_0 – она же, называемая также емкостью.

что согласуется, хотя и плохо, с ранее найденной нами величиной $D_0 = 1,35$.

Обобщения. Теперь мы можем упомянуть вскользь о некоторых простейших обобщениях, которые оттенят прозаичность монстра Ван дер Вардена и сделают его в нашем сознании почти таким же ручным, как синусоиду или логарифмическую спираль.

1. Обратимся к рис. 3. Пусть H – группа автоморфизмов квадрата K, которая состоит, очевидно, из восьми перемещений. Тогда для любых h_1, $h_2 \in H$ преобразования $A \circ h_1$, $B \in h_2$ отображают квадрат K соответственно на красный и синий параллелограммы. Например, если $h_1 = h_2$ – центральная симметрия относительно центра квадрата, то мы получим генератор, который после СИФ-процедуры даст аттрактор в виде фрактальной кривой (рис. 5). Численный эксперимент показывает, что емкости первого и второго монстров Ван дер Вардена равны между собой.

2. Изменим (2):

$$\varphi_n(x) = p^{-n}(\tfrac{1}{2} - |\, p^n x - [p^n x] - \tfrac{1}{2}\,|), \tag{6}$$

где $p \in \mathbf{R}_+^*$ – любое положительное число. На рис. 6 приведены несколько графиков функции (3) для различных p.

Изменим (2), записав

$$\psi_n(x) = p^{-n}(1 - |\, p^n x - [p^n x] - \tfrac{1}{2}\,|),$$

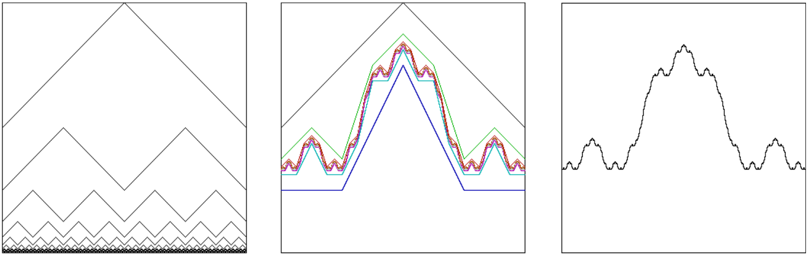
а вместо суммы (3) возьмем альтернированную сумму

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \psi_n(x),$$

положив $p = 2$. График функции $g(x)$, приведенный на рис. 5, построен на отрезке $[0; 1]$ и является аффинно самоподобной кривой. Графики функций $\psi_n(x)$ приведены на рис. 7.

Найдем значения функции в некоторых точках, опираясь на ее определение. Покажем, что $g(0) = \frac{1}{3}$. Действительно, подметив, что $\psi_n(0) = 2^{-n}$, находим:

$$g(0) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n/2^n = \frac{\frac{1}{2}}{1-(-\frac{1}{2})} = \frac{1}{3}.$$



а *б* *в*

Рис. 7. Второй монстр Ван дер Вардена: *а* – графики функций ψ_i ; *б* – первые семь частичных сумм функции g; *в* – сам монстр

Сделаем еще одно вычисление:

$$g(\tfrac{1}{2}) = 1 - \tfrac{1}{2}g(0) = \tfrac{5}{6}.$$

В силу симметрии графика функции относительно прямой $x = \frac{1}{2}$ справедливо равенство: $g(x) = g(1-x)$.

Функция $g(x)$ должна обладать свойством, аналогичным свойству 7 функции $f(x)$. Для этого заметим, что гомотетия с центром $(0, g(0))$ и коэффициентом $1/4$ отображает график $g(x)$, построенный на отрезке $[0; 1]$, на себя. Отсюда следует искомое свойство

$$g(\tfrac{x}{4}) = \tfrac{1}{4}(x + g(x)).$$

Заметим, что функции и f, и g относятся к функциям, удовлетворяющим равенству

$$x + F(x) = b^{-D}F(bx)$$

при всех x из некоторого интервала и подходящего показателя D. Если $F = f$, то $b = 2$; если $F = g$, то $b = 4$; в том и другом случае $D = 1$.

Заключение. Таким образом, попытка визуализировать в графическом изображении фрактальный объект, каковым является график функции Ван дер Вардена $f(x)$, с необходимостью приводит к нелинейным – с альтернативами – рассуждениям, к творческому осмыслению получаемых результатов. К таким результатам относятся 7 свойств функции $f(x)$; три принципиально различных способа построения кривой γ, причем два из них являются оригинальными; найдены некоторые направления обобщений функции Ван дер Вардена. С альтернативами мы познакомились при построении орбиты точки, когда на каждом следующем шаге, образно говоря, приходится бросать монету, чтобы выбрать, каким из двух (или более) отображений воздействовать на точку. При этом нужно обратить внимание на то, что прогнозировать поведение орбиты невозможно, если задать вопрос, где окажется точка орбиты через некоторое число шагов. Небольшой горизонт прогнозирования – характерное свойство динамических нелинейных систем. Тем не менее, глобальное поведение орбиты вполне понятно: орбита бесконечно близко притягивается к аттрактору и можно считать, что она после достаточно большого числа итераций практически движется по аттрактору, являющемуся, как правило, (мульти)фракталом дробной размерности.

Еще одно характерное свойство нелинейных процессов (и мышления) – это возвращаемость. Это означает, что при движении точки по аттрактору она через достаточно большое число итераций попадает в любую бесконечно малую окрестность любой наперед заданной точки. Так и в поиске решения задачи нам приходится возвращаться к одному и тому же месту в наших рассуждениях, но всякий раз с новым осмыслением пока не решенной микропроблемы. Знание законов нелинейного – в динамике – мышления, предыдущий опыт и – очень важный момент – интуиция лежат в основе творческого мышления [8], в котором человечество уже много тысячелетий тщетно надеется когда-нибудь полностью навести порядок. Если понимать под детерминированным хаосом [1, 6] в мышлении [7] турбулентность со всей ее стройной нелинейной геометрией, то это вселяет оптимизм в наши изыскания.

Библиографический список

1. *Кроновер Р.М.* Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. М.: Постмаркет, 2000. 252 с.

2. *Лихтенберг А., Либерман М.* Регулярная и стохастическая динамика. Череповец: Меркурий-ПРЕСС, 2000. 528 с.
3. *Мандельброт Б.* Самоаффинные фрактальные множества // Фракталы в физике. Труды VI международного симпозиума по фракталам в физике. М.: Мир, 1988. С. 9–47.
4. *Мандельброт Б.* Фрактальная геометрия природы. М.: Институт компьютерных исследований, 2002. 656 с.
5. *Осташков В.Н., Смовж А.И.* Самоподобные множества // Фракталы и их приложения в науке и технике. Труды Всероссийской научной конференции. Тюмень: Изд-во ТюмГНГУ, 2003. С. 38–51.
6. *Федер Е.* Фракталы. М.: Мир, 1991. 256 с.
7. *Чернавский Д.С.* Информация, самоорганизация, мышление // Синергетика. Труды семинара. Материалы круглого стола "Самоорганизация и синергетика: идеи, подходы и перспективы". М.: МГУ, 2000. Т. 3. С. 143–182.
8. Подготовка учителя математики: инновационные подходы: Учеб. пособие / Под ред. В.Д. Шадрикова. М.: Гардарики, 2002. 383 с.

О предметно-методологических знаниях будущего учителя математики

Л.П. Латышева

Общепризнанна важность формирования в ходе профессиональной подготовки в высшей школе у будущих специалистов современного научно-теоретического стиля мышления, одним из составляющих компонентов которого является комплекс так называемых предметно-методологических знаний.

Метод в самом общем значении понимается как "способ достижения цели, определенным образом упорядоченная деятельность... Методология – совокупность приемов исследования, применяемых в какой-либо науке" [7. С. 241]. В общем случае под методологией понимают учение о методах, выполняющих следующую функцию: “отражая закономерности объективной действительности и познания, ориентировать людей в процессе осуществления познавательной и практической деятельности, управлять их мышлением...” [8. С. 12]. Характерным является то, что “методология не представляет собой единой, целостной науки, а расчленяется на отдельные виды и разновидности в зависимости от того, какие – всеобщие, общенаучные или частные – методы она разрабатывает и какую науку обслуживает” [8. С. 13]. Приняв во внимание приведенные соображения, методологические знания, получаемые специалистом в период подготовки в вузе, можно охарактеризовать как знания, отражающие сущность методов познания (всеобщих, общенаучных, частных) и связанные с направляющей, организующей ролью в познавательной или практической деятельности.

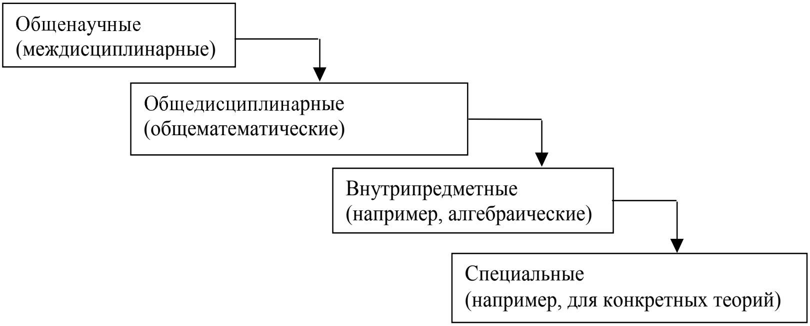
Применительно к учебному процессу полезно представлять дидактическую модель учебного предмета, например, в виде некой целостности, включающей в себя два блока. Это – “основной, куда входит в первую очередь то содержание, ради которого учебный предмет введен в учебный план, и блок средств, или процессуальный блок, обеспечивающий усвоение знаний, формирование различных умений, развитие и воспитание ...” [6. С. 195]. Второй блок среди прочих включает в себя комплекс вспомогательных знаний, к которым относят “межнаучные знания (логические, методологические, философские), историко-научные, межпредметные и оценочные знания...” [6. С. 196]. При этом под логическими знаниями понимается совокупность знаний из формальной логики, необходимых для усвоения и развития логического мышления, а под методологическими знаниями – совокупность знаний из методологии науки, которые необходимы для сознательного, системного усвоения наук и формирования мировоззрения.

Разные авторы психолого-педагогических исследований дают различные, но в определенных чертах сходные толкования важнейших составляющих элементов второго блока знаний. Они трактуются как логико-методологическая характеристика любого конкретного знания, являющаяся средством “кристаллизации” теоретического мышления, обеспечивающая его творческий компонент (А.Н. Алексеев); как важные в образовательном отношении и доступные методы науки, воплощенные в обобщенных способах выполнения заданий, приемы познавательной деятельности и методологические знания (например, понятия закона, структуры научной теории и т.д.), общие методы познания, например, дедуктивные умозаключения, мысленный эксперимент и т.д. (С.И. Высоцкая). Они представляются в виде знаний об общих методах исследования (экспериментальных и теоретических) и о методах передачи научной информации (Л.Я. Зорина); или описываются как две группы знаний: об объектах действительности, явлениях, процессах; об отношениях, о законах и способах действия в различных ситуациях (Г.А. Александров).

Как правило, в обучении предполагается "обслуживающая" функция вспомогательных знаний, признается оправданным положение, что они "являются фоном при развертывании предметных знаний и ориентиром для их понимания" [6. С. 116]. Но в настоящее время многие специалисты в области среднего и высшего образования отмечают необходимость систематического и целенаправленного формирования методологических знаний, подчеркивая, что методы научного познания должны занимать в учебном процессе ведущее место. А обучение им обычно осуществляется на разных уровнях: благодаря усвоению методов подсознательно, интуитивно; путем специального ознакомления с методами при учете специфики изучаемого материала и на основе его изучения; через овладение ими на сознательном уровне в ходе самостоятельного, активного и творческого познания.

В профессиональной подготовке учителя математики недостаточно ограничиться ориентацией на стихийное, интуитивное формирование представлений о предметно-методологических знаниях. Учитывая объективную роль, которую они играют в профессиональном образовании учителя, представляется необходимым придать обучению им организованный и целенаправленный характер. В частности, в преподавании учебных дисциплин по профилю подготовки учителя полезно использовать всякую возможность для “выделения в чистом виде” и выражения тем или иным образом структуры проводимого рассуждения: обозначения основных идей, этапов, главных (существенных) элементов и специфики рассматриваемых математических конструкций. Причем весьма желательно сделать такое выделение наглядным, поскольку “именно формирование... узловых, опорных качеств объекта восприятия (модель) и представляет собой суть процесса наглядного обучения” [1. С. 45] (см. подробнее [5]). Осуществить это можно, например, с помощью моделирования, имеющего черты построения так называемых семантических и продукционных дидактических моделей. “Семантическая модель представляет собой ориентированный граф, в котором вершины соответствуют определенным объектам или понятиям, а дуги отражают отношения между вершинами. Семантическая модель допускает циклы, разнотипность отношений между вершинами, разнообразие видов информации о математических объектах в вершинах... Продукционная модель фиксирует процедуру математических действий при решении определенных задач” [5. С. 226–227].

Способы организации научных рассуждений, относящиеся к предметно-методологическим знаниям, различаются по своей общности и роли, которая им отводится в математике. Во всем их многообразии можно выделить универсальные *общенаучные* (*междисциплинарные*) способы рассуждений, основная часть которых описана в формальной логике. Вместе с тем в ней имеется большой набор типичных для некой области знания *общедисциплинарных* и *внутрипредметных* способов рассуждений, иногда имеющих довольно сложную структуру. Наряду с этим можно указать целый ряд *специальных* (специфических) способов рассуждений, приемов анализа и преобразования информации, свойственных каким-либо частным разделам математики и ориентированных на получение узкотеоретических или практических знаний. Описанная иерархия отражена в следующем наглядном представлении:



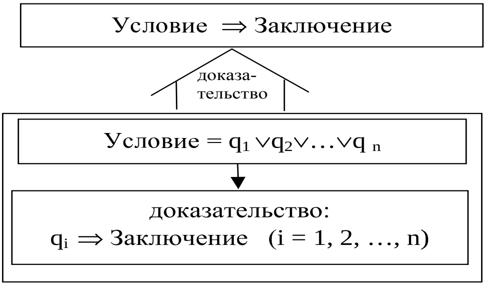
В качестве теоретической основы подхода к модельному описанию предметно-методологических знаний в профессиональной подготовке учителя математики нами используются принципы анализа и исследования сложных систем, приведенные в концепции структурно-количественного анализа [2, 3] как в содержательных терминах, так и в формализованном виде. Это – принцип выделения основной структуры системы и принцип иерархии описания структуры системы. Качественный смысл принципа выделения основной структуры системы состоит в том, что “любое исследование реальных объектов и явлений возможно лишь при специальной, целенаправленной организации выделения некой части свойств, связей или соотношений, которые рассматриваются как основные (главные) в данном исследовании” [4. С. 40]. Представление об иерархии структуры системы также связывается со способом “рассмотрения” ее исследователем. Принцип иерархии описания структуры системы предполагает, в частности, подход к анализу структурной организации системы “с позиций выделения составляющих блоков” [4. С. 44].

В терминах системного языка *общие способы научных рассуждений* можно определить как изоморфизмы систем умозаключений в рамках одной (или нескольких) научных (или учебных) дисциплин. Структура каждой из систем умозаключений в научной (или учебной) дисциплине задается конкретным рассуждением. А описание соответствующего изоморфизма может рассматриваться как семантическая или продукционная модель, называемая *структурной схемой рассуждений.* Форма этой модели может быть лингвистической, образной, символической, математической и т.п.

Проиллюстрируем обозначенную иерархию примерами схем рассуждений, весомая роль при овладении которыми в профессиональной подготовке учителя математики отводится курсу математического анализа.

К *общенаучным* схемам рассуждений относится полная индукция – способ, широко использующийся в математике, как в теории, так и на практике. Этот прием доказательства теорем часто называют разбором случаев. В приведенной ниже схеме вначале указана перефразировка формулировки теоремы, в которой выделены "Условие" и "Заключение" (то, что дано, и что требуется доказать). Затем приведены основные этапы доказательства: прежде всего – обозначение той конструкции, с помощью которой возможно будет "разбить" теорему на ряд исчерпывающих ее частных случаев. В последнем блоке выражен последовательный перебор всех выделенных частей "Условия" и получение на их основе каждый раз требуемого "Заключения" теоремы.

Эта схема реализуется, например, в доказательстве равенства $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}$, когда рассматриваются два частных случая: $x \to +0$ и $x \to -0$.



Весьма часто применяемым является *междисциплинарный* способ опровержения некого общего высказывания путем приведения какого-либо примера, противоречащего ему (контрпримера). В математике можно выделить два типичных случая его использования: при рассмотрении условий, являющихся только необходимыми (или только достаточными); при подтверждении, что без выполнения определенных условий утверждение становится неверным.

Если в "импликативной" формулировке утверждения отмечено свойство, присущее всем объектам из некоторого множества, то логическим обоснованием названного способа рассуждений служит эквивалентность:

$$\overline{((\forall\, x)(A(x) \implies B(x)))} \iff ((\exists\, x)(A(x) \wedge \overline{B(x)})).$$

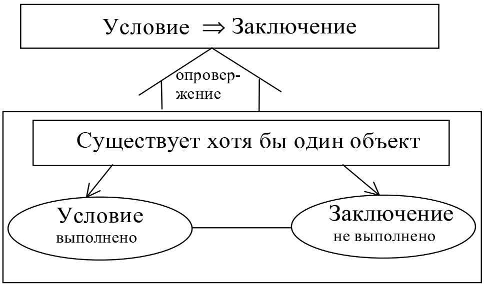
Например, чтобы показать, что условие существования конечных пределов слагаемых является существенным в теореме о пределе суммы двух последовательностей, приводится контрпример:

$$x_n = n + \frac{1}{n}, \quad y_n = -n; \quad \lim_{n\to\infty} x_n = +\infty, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = -\infty,$$

при этом

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0.$$

А структурная схема рассуждений такова:

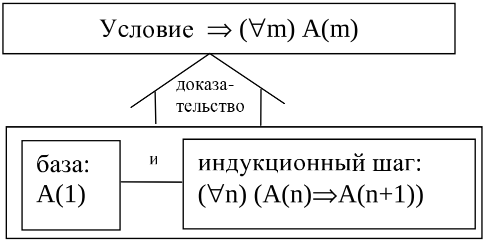


Метод математической индукции в сравнении с методом разбора случаев с позиций интуитивного понимания менее "прозрачен".

Его теоретической основой является принцип математической индукции:

$$(A(1) \wedge (\forall\, n)(A(n) \implies A(n+1))) \implies (\forall\, m)A(m).$$

Таким образом, это – *общематематический* метод доказательства предложений особого вида: $(\forall\, m)A(m)$. Часто они выступают в роли заключения теоремы. В приведенной ниже схеме метода математической индукции база – это проверка (или доказательство) утверждения при $m = 1$. В индукционном шаге на основе допущения об истинности предложения при m, равном любому натуральному n, выводится, что оно истинно при $m = n + 1$. В курсе математического анализа количество доказываемых этим методом теорем невелико. Одна из них – лемма о неравенстве Бернулли: $(1 + h)^m \geq 1 + mh$ при $h > -1$.



Важнейшей *общематематической* схемой рассуждений является процедура построения логического отрицания предложений. Она – неотъемлемая часть доказательства теорем методом “от противного” и средство анализа смысла математических формулировок. Особенность этой процедуры состоит в том, что в содержательных рассуждениях отрицание предложения необходимо в “утвердительной форме”. Простое добавление в начале исходного предложения слов “неверно, что…” не дает возможности конструктивно использовать это “отрицание”, поскольку в дальнейших рассуждениях требуются новые свойства, закономерности и т.п., по смыслу противоположные исходным.

В курсе математической логики рассматриваются строгие правила построения отрицаний высказываний. Однако формальное их применение в содержательных математических теориях для неформализованных предложений может привести к ошибкам. Это связано с тем, что в определениях понятий, формулировках свойств, отношений, теорем, выраженных в терминах естественного языка, не всегда явно представлены логические связки и кванторы. Явное их представление, соответствующее математическому смыслу предложения, позволяет создать его своеобразную формализованную модель. Такое выявление логической структуры является подготовительным этапом при построении отрицания предложения. Следующий шаг – определение в данной модели порядка выполнения логических операций и “навешивания” кванторов. Затем должны быть последовательно применены известные законы отрицания к высказываниям, связанным конкретными логическими операциями с учетом “навешанных” кванторов, начиная с самой “внешней”, до тех пор, пока не останется подлежащие отрицанию термины лишь заменить противоположными по смыслу.

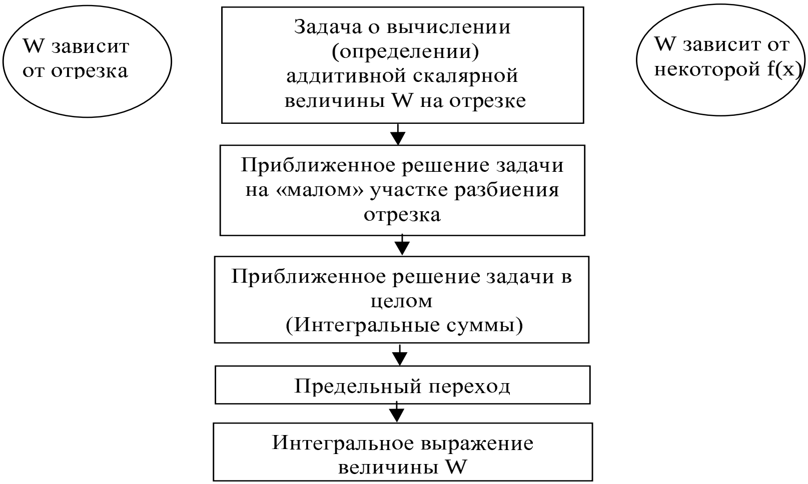
Примером служит реализация указанной выше схемы рассуждений при построении отрицания, что M – точная верхняя граница множества $\{x\}$. По определению, $M = \sup\{x\}$: M – наименьшая из верхних границ множества $\{x\}$. Точнее:

$$((\forall\, x \in \{x\})x \le M) \;\wedge\; ((\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, x \in \{x\})\; x > M - \varepsilon).$$

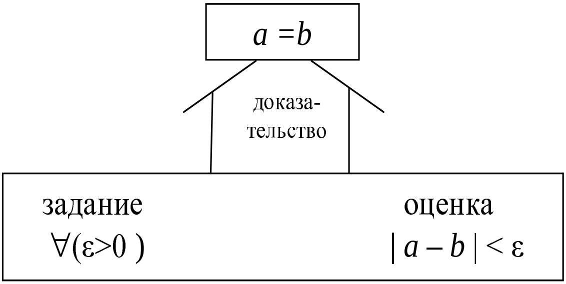
Построив вначале отрицание конъюнкции двух высказываний, приходим к необходимости трижды построить отрицание высказываний с кванторами. В итоге, заменив указанные неравенства противоположными по смыслу, получим:

$$((\exists\, x \in \{x\})\; x > M) \vee ((\exists\, \varepsilon > 0)(\forall\, x \in \{x\})\; x \le M - \varepsilon), \text{ т.е. } M \ne \sup\{x\}.$$

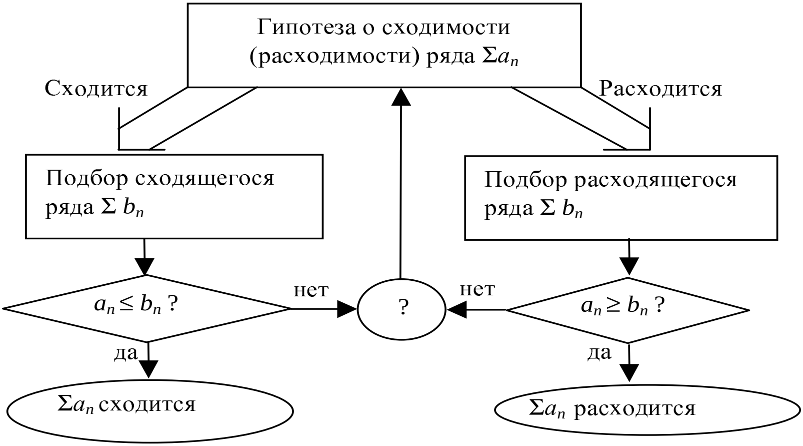
Внутрипредметной (для курса математического анализа) является общая схема применения в практических приложениях понятия определенного интеграла, основная идея которой описывается в некоторых учебных пособиях по математическому анализу. Мы считаем, что полезно дополнить подобные описания следующей схемой:



Другая *внутрипредметная* схема рассуждений – метод "ε-близости". Это – типичный для математического анализа прием доказательства равенства двух чисел, заданных некими сложными математическими конструкциями: если два (фиксированных) числа отличаются меньше, чем на любое положительное число ε, то они совпадают. Эффект применения метода связан с тем, что доказательство различия чисел (в пределах ε) можно произвести с помощью каких-то "огрубленных" оценок в конструкциях, из которых эти числа возникают. Иллюстрацией применения этой схемы может служить доказательство теоремы: "Если последовательность сходится, то она имеет только один предел".



Приведем еще одну схему рассуждений из курса математического анализа, которую можно отнести к *специальным,* поскольку она используется в теории рядов для решения задач только одного вида. Это – схема рассуждений практического характера, связанная с применением признака сравнения числовых рядов с неотрицательными членами. Особенность этой схемы в том, что известная теорема требует при ее использовании выдвижения определенной гипотезы о сходимости исследуемого ряда, влияющей на выбор ряда (сходящегося или расходящегося) для сравнения с исходным.



Библиографический список

1. *Карпова Т.Н., Смирнов Е.И.* Наглядное обучение математике в педвузе – сочетание научности и доступности: психология, интуиция, опыт // Непрерывное педагогическое образование. Вып. VIII: Наглядное обучение математике. Ярославль: ЯГПУ, 1995. С. 41–60.
2. *Пехлецкий И.Д.* Структурно-количественный анализ как аппарат дидактических исследований (педагогико-математический аспект). Дис. ...д-ра пед. наук. Л., 1987. 426 с.
3. *Пехлецкий И.Д.* О системе обучения математике: Проблемы подготовки высококвалифицированных преподавателей. Пермь, 1978. 435 с. Рукопись представлена Пермским гос. пед. ин-том. Деп. в ОНИ НИИ ПВШ 4 окт. 1978, № 97.87.
4. *Пехлецкий И.Д.* Общая теория систем и анализ процесса обучения: Учеб. пособие по спец. курсу для студентов физ.-мат. факультетов пединститутов. Пермь: ПГПУ, 1976. 120 с.
5. Подготовка учителя математики: Инновационные подходы: Учебное пособие / Под ред. В.Д. Шадрикова. М.: Гардарики, 2002. 383 с.

6. Теоретические основы содержания общего среднего образования / Под ред. В.В. Краевского, И.А. Лернера. М.: Педагогика, 1983. 352 с.
7. Философский словарь / Под ред. М.М. Розенталя. 3-е изд. М.: Политиздат, 1972. 496 с.
8. *Шептулин А.П.* Диалектический метод познания. М.: Политиздат, 1983. 320 с.

Как правильно выбрать педагогическую технологию?

Е.В. Никулина

С некоторых пор в системе педагогического образования появилось множество педагогических технологий. Как разобраться в этом множестве и выбрать именно тот его элемент, который наилучшим образом дополнит и обогатит педагогическую практику каждого конкретного педагога?

Несомненно, здесь не обойтись без *оценки и анализа* каждой из предлагаемых технологий.

Известно, что *технология* чего бы то ни было — это *know-how*, то есть знание того, *как делать*. Педагогические технологии представляют собой стратегический фактор *управляемого развития* образования. Ключевыми задачами такого управления являются следующие:

- использование стратегии технологического развития, которая должна обеспечить реализацию педагогической технологии на современном уровне;
- управление технологическими инновациями ради достижения максимального уровня реализации педагогических технологий;
- организационное обеспечение инноваций.

Поэтому для *оценки технологии* необходимо поэтапно осуществлять:

1) выявление важных для образования технологий (из множества феноменов, называемых технологиями);

2) анализ возможных изменений важных педагогических технологий;

3) анализ влияния технологий на образование вообще и дистанционное образование в частности;

4) анализ сильных и слабых сторон имеющихся технологий;

5) установление приоритетов при выборе технологий и в проведении исследовательских работ по их созданию.

Кроме того, для выбора набора наиболее эффективных технологий необходимо придерживаться определенных *принципов.* Договоримся сразу: всем известно, что функционирование любой системы зависит от известного числа условий, которые почти безразлично обозначаются то именем принципов, то – законов или правил. Говоря о *принципах,* не стоит, однако, забывать, что в образовании не может быть ничего негибкого и абсолютного; и почти никогда не приходится применять один и тот же принцип в тождественных условиях: надо учитывать различные и меняющиеся обстоятельства, различие и смену людей и много других переменных элементов. Стало быть, принципы должны быть гибки и применимы при всяких запросах, то есть универсальны. Надо уметь ими оперировать.

Число принципов для выбора набора наиболее эффективных технологий вряд ли может быть строго ограничено. Всякое правило, всякое административное средство, укрепляющее социальное образование или облегчающее его отправления, занимает свое место среди принципов, во всяком случае на все то время, пока опыт утверждает его в этом высоком звании. Изменение положения вещей может повлечь за собой изменение правил, вызванных к жизни этим положением. Поэтому перечислим *основные принципы* выбора, используемые специалистами научной школы академика В.М. Монахова, не претендуя, однако, на *всеобъемлющий охват* данного вопроса.

Принцип 1: стратегия технологического развития должна явным образом поддерживать сегодняшние и будущие требования к специалистам, выпускаемым учебным заведением.

Принцип 2: не все новации приносят пользу. Инновация – это не цель, а средство, нет нужды в новации ради новации. Эффективность нововведения – обязательный отборочный фактор.

Принцип 3: все *успешные новации* служат образованию. С данным принципом тесно связан следующий. . .

Принцип 4: успешности новации способствует защищенность ее правом собственности, то есть своеобразная "патентная защита", в результате которой технология получает название "авторской".

Принцип 5: результаты исследований не всегда можно детально предсказать. Действительно, в процессе прогнозирования можно определить основные контуры будущих результатов, однако в процессе исследования могут обнаружиться ранее не познанные закономерности, что являются своеобразным "бонусом" – дополнительным неожидаемым вознаграждением исследователя. Более того, продуктивная технология обладает исследовательскими функциями, в результате чего открываются и исследуются новые, неизвестные ранее закономерности учебного процесса. Вторым следствием появления и открытия новых закономерностей являются зачатки новой педагогики и дидактики: инструментальной, продуктивной, научно обоснованной, проверяемой, объективной.

В настоящее время идет становление новой системы образования, ориентированной на вхождение в мировое образовательное пространство. Содержание образования обогащается новыми процессуальными умениями, развитием способностей оперирования информацией, творческим решением проблем науки и рыночной практики с акцентом на индивидуализацию образовательных программ. Важнейшей составляющей педагогического процесса становится личностно-ориентированное взаимодействие учителя с учениками. Сегодня в российском образовании провозглашен принцип вариативности, дающий возможность педагогическим коллективам выбирать и конструировать педагогический процесс по любой модели, включая авторские.

В этих условиях учителю, руководителю необходимо ориентироваться в широком спектре современных инновационных технологий, идей, школ, направлений, не тратить время на открытие уже известного.

В педагогический лексикон прочно вошло понятие педагогической технологии, понимание которой авторы трактуют по-разному, что может привести к разночтениям. Так, педагогическую технологию определяют как совокупность *приемов* (Толковый словарь), как содержательную *технику* реализации учебного процесса (В.П. Беспалько), как *описание* процесса достижения планируемых результатов обучения (И.П. Волков), как *системный метод* создания, применения и определения всего процесса преподавания и усвоения знаний с учетом технических и человеческих ресурсов и их взаимодействия (ЮНЕСКО), как *содержательное обобщение* (Г.К. Селевко), как *модель* совместной педагогической деятельности по проектированию, организации и проведению учебного процесса (В.М. Монахов).

Приведем два определения *педагогической технологии*, которые были даны В.М. Монаховым.

1. “Педагогическая технология есть область исследования теории и практики (в рамках системы образования), имеющая связь со всеми сторонами организации педагогической системы для достижения специфических и потенциально воспроизводимых педагогических результатов”. В самом деле, чтобы достигнуть желаемых результатов в педагогическом процессе, надо всесторонне исследовать педагогическую систему, понять ее организацию.

2. “Под дидактической технологией мы понимаем трансформирование абстрактных теоретических постановок и обобщений дидактики и методики преподавания в практической деятельности (процедуры, операции), перед выполнением которой обязательно ставится определенная дидактическая цель, при которой решается данная дидактическая задача”. Здесь речь вновь идет о педагогической технологии, ибо дидактика – это часть педагогики, излагающая теоретические основы образования и обучения. Технологичность проявляется в переходе от абстрактных теоретических постановок к процедурам в практической деятельности. Дидактическая задача включает в себя, согласно В.П. Беспалько, цель обучения, учащегося и содержание обучения, а технология решения дидактической задачи включает учебный процесс, учителя и оргформы.

Каковы же основные качества современных педагогических технологий? Технология в максимальной степени связана с учебным процессом – деятельностью учителя и ученика, ее структурой, средствами, методами и формами. Поэтому в структуру педагогической технологии входят:

а) концептуальная основа;

б) содержательная часть обучения:

– цели обучения - общие и конкретные;

– содержание учебного материала;

в) процессуальная часть - технологический процесс;

– организация учебного процесса;

– методы и формы учебной деятельности школьников;

– методы и формы работы учителя;

– деятельность учителя по управлению процессом усвоения материала;

– диагностика учебного процесса.

Каковы же *критерии технологичности*? При проведении исследований в рамках работы научной школы академика В.М. Монахова в качестве направляющих критериев были выделены нижеследующие.

Концептуальность. Каждой педагогической технологии должна быть присуща опора на определенную научную концепцию, включающую философское, психологическое, дидактическое и социально-педагогическое обоснование достижения образовательных целей.

Системность. Педагогическая технология должна обладать логикой процесса, взаимосвязью всех его частей, целостностью.

Управляемость предполагает возможность диагностического целеполагания, планирования, проектирования процесса обучения, поэтапной диагностики, варьирования средствами и методами с целью коррекции результатов.

Эффективность. Современные педагогические технологии должны быть эффективными по результатам и оптимальными по затратам, гарантировать достижение определенного стандарта обучения.

Воспроизводимость подразумевает возможность применения педагогической технологии в других однотипных образовательных учреждениях другими субъектами.

Следует отметить, что в процессе совершенствования и вариаций педагогических технологий чаще всего варьируются процессуальные аспекты обучения, а содержание изменяется лишь по структуре, дозировке, логике. Но содержание образования во многом определяет и процессуальную часть технологии, таким образом, процессуальная и содержательная части технологии образования адекватно отражают друг друга. В последние годы в нашей стране создано большое количество вариативных учебников, что в сочетании с разнообразием выбора педагогических технологий теоретически делает возможным дальнейшее повышение качества образования.

Поскольку источниками и составными частями любой современной педагогической технологии являются социальные преобразования, новое педагогическое мышление, наука, передовой педагогический опыт, отечественный и зарубежный опыт прошлого, а также народная педагогика (этнопедагогика), закономерно возникает вопрос о возможности применения ее и гарантированности устойчивых положительных результатов. Несомненно, одна и та же технология может осуществляться различными исполнителями более или менее добросовестно, точно по инструкции или творчески, что характеризует присутствие личностной компоненты мастера, результаты тоже могут отличаться, но быть близкими к некоторому среднему значению, характерному для данной технологии. Следовательно, определяющими при освоении любой педагогической технологии являются *закономерности усвоения материала, состав и последовательность действий учащихся* [1].

Исходя из очевидного факта, что, по сути дела, педагогическая технология – это некий уровень **теоретического абстрагирования от педагогической практики** (реальности), очень важно, чтобы при этом соблюдалось дидактическое условие – **сохранение инвариантных сущностных характеристик педагогической действительности** на любых уровнях теоретического абстрагирования. К глубокому сожалению, таких *характеристик, как глу-*

бинные закономерности, известно не так уж много.

Главным результатом использования процедур научного познания к реальным педагогическим объектам является **превращение** реально существующего объекта с бесконечным множеством свойств и постоянно меняющимся состоянием (невозможно сделать "стоп-кадр" и начать изучение) в **объект, имеющий фиксированное число свойств, связей и отношений** (границы фиксирования *устанавливаются* самим исследователем или *обосновываются*, исходя из неких целей и идей). Например, модель учебного процесса В.М. Монахова – пять параметров. В.В. Краевский утверждает, что игнорирование хотя бы одной из вышеперечисленных характеристик нарушает ее целостность и лишает ее теоретического статуса.

Апеллирование к категории целостности при исследовании педагогического объекта методологически означает принципиальный переход от описания фактов к постижению собственных законов и глубинных закономерностей, то есть переход от "описательства" (характерного для подавляющего большинства педагогических теорий, изобилующих иллюзорными догмами) к конструктивной, продуктивной и прогностической научной теории.

Ориентация на переход от теоретического знания к практическому, которое находит нормальное применение, сдвинулась с мертвой точки рассмотрением в дидактических исследованиях теоретической модели (о должном) и инструментальной модели (о сущем), возможности которых могут все-таки продуктивно преобразовать педагогическую действительность.

Необходимо помнить, что теоретическое знание отражает не только сущность определенной области явлений, но и иную, более глубокую картину действительности, чем знание эмпирическое. Однако декларируемая в последнюю четверть века оптимизация учебного процесса только в условиях технологического подхода может получить инструментальную реализацию и оснащение стандартизированными процедурами организации логической структуры учебного процесса.

Итак, *проанализировать и оценить имеющиеся на настоящий момент педагогические технологии, выбрать нужную согласно* *объективным критериям – такой путь для современного педагога сейчас представляется наиболее верным и успешным.*

Библиографический список

1. *Монахов В.М.* Технологические основы проектирования и конструирования учебного процесса. Волгоград, 1995. 152 с.

Роль электронных лекториев в подготовке будущих учителей и социальных работников

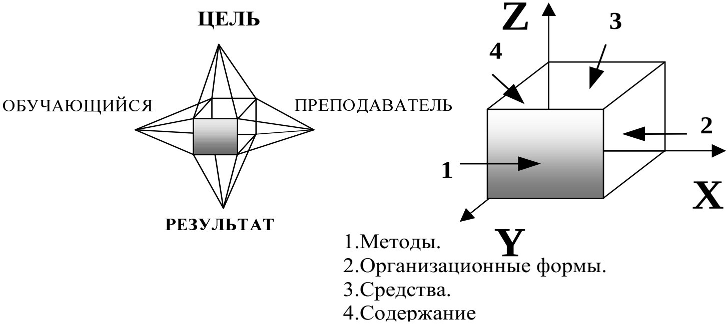
Н.В. Монахов

Ключевым моментом в воспитании и обучении ребенка является **личность самого учителя или социального работника**. Учебно-воспитательный процесс начинается с педагога, именно с педагога как человека, с его убеждениями, принципами, мироощущением, жизненными позициями. Только Личность (с большой буквы) может вдохновить, раскрыть, развить другую Личность.

У каждого человека свой путь, и каждый настоящий педагог, следуя ему, обучает по своей, уникальной, оптимальной системе обучения. Можно "взять на вооружение" близкие по духу идеи педагогического опыта, но основное будет зависеть от Личности учителя (социального педагога). Не секрет, что самые лучшие, самые эффективные методы, формы, приемы обучения можно превратить в посредственные, скучные и бездарные.

Определить учебно-воспитательный процесс можно не только как воздействие на школьника, но и как взаимодействие и сотрудничество учителя и учащихся, социального работника и воспитанников. Поэтому так важно в вузе подготовить будущего учителя или социального педагога к работе в школе, воспитать творческую Личность. При этом цель, которую ставит перед собой преподаватель высшей школы, будет ориентироваться на формирование у студента рефлекторного, творческого отношения к будущей профессии.

Педагогическое образование представляет собой целенаправленный процесс и результат взаимодействия обучающих (преподавателей) и обучающихся (студентов) между собой и со средствами обучения, которые реализуются в специфической дидактической системе, состоящей из восьми элементов: цель, содержание, методы, средства, организационные формы, обучающиеся, преподаватель, результат.



“Цель” и “Результат” по своему наполнению те же, что и в традиционном образовании (зафиксированы в государственных образовательных стандартах). Однако мы рассматриваем управление в дидактической системе как соответствие друг другу этих двух элементов.

Если дидактическая система работает нормально, то управлять ничем не требуется. Сигналом к управленческим действиям становится ситуация, при которой диагностика знаний обучающихся показывает на недостижение ими необходимого уровня знаний (Госта, переведенного на язык целей), в этом случае ситуацию надо менять, подключая управление.

“Содержание” определяется соответствующими учебными планами и программами.

Наибольшие изменения претерпевает элемент “Средства” – информационно-образовательная подсистема, где на первый план выходят Интернет, аудио- и видеосредства, программное обеспечение и т.д.

Трансформируются и “Формы”. На смену традиционным формам приходят инновационные, примером может служить электронный лекторий.

В элементе “Методы” на первое место выходят методы активного и проблемного обучения, видеометоды, исследовательские, методы контроля и самоконтроля.

В корне меняется и функция “Преподавателя” (содержит в себе не только субъект образования, но и его деятельность в образовательном процессе). Его деятельность по преподаванию сменяется на управление процессом обучения: проектирование и коррекцию индивидуальных траекторий обучения студентов [1].

Эволюционные изменения, которые произошли в элементах дидактической системы “Студент”, “Преподаватель”, есть результат постепенного накопления количественных изменений, которые привели к качественному скачку и трансформации данных элементов.

Изменился способ получения и усвоения знаний: источником информации стали базы данных; интерпретатором знаний – студент.

Кроме того, эволюционирует взаимодействие между студентом и преподавателем: от получения знаний к взаимосотрудничеству и творческому поиску.

Образовательный процесс в высшей школе – это взаимосвязанные деятельности педагога и студента (обучающегося), педагогическое управление здесь совместное типа сотрудничества и диалогового общения. Студент может быть в той же мере активным, что и преподаватель.

В условиях сложившейся дидактической системы возникла потребность в разработке учебно-методического обеспечения для подготовки будущих специалистов-педагогов, направленного на развитие их творческих способностей, которое представлено в таблице:

N	**Название электронного лектория на CD**	**Аннотация**
1.	Введение в педагогическую профессию	Данное учебно-методическое пособие является началом учебного курса “Введение в педагогическую профессию”, в котором рассматривается история возникновения профессии, требования, предъявляемые к личности учителя. Рекомендуется для преподавателей, студентов педагогических вузов и слушателей курсов повышения квалификации. Цель данного курса: – сформировать представление о педагогической профессии и личности педагога, профессиональной компетентности педагога, об общей профессиональной культуре педагога, – подготовить выпускников к будущей профессиональной деятельности, – сформировать умение самосовершенствоваться в своей профессиональной деятельности. Практические занятия проводятся с использованием аудио- и видеосредств, для некоторых рекомендовано проведение экскурсий. Вопросы предлагаемого курса тесно связаны с педагогической практикой студентов, что способствует профессиональному мастерству будущих учителей.

2.	Общая методика преподавания Частная методика преподавания	Два БЛОКА курса “Методика преподавания” являются частью системы интегрированных психолого-педагогических курсов, направленных на: – профессиональное становление педагога; – развитие образно-ассоциативного мышления будущего учителя; – проектирование студентами собственного методического стиля; – развитие творческого подхода к профессиональной деятельности. Курс теории и методики обучения в вузе – **это проекция педагогических теорий, проверенных педагогической практикой:** – профессиональная деятельность учителя с преобладающей личностной ориентацией педагогического мышления и технологий, – рабочее поле будущего учителя – это взаимодействие государственных образовательных стандартов высшего профессионального образования и школьного образования. Теория и методика преподавания – **важнейший системообразующий компонент методической системы обучения** на любом факультете педагогического университета. Являясь тем самым учебным предметом, который задает дидактические условия целостного процесса профессионального становления будущего учителя, он приобретает статус приоритетного курса этой методической системы.

		Данный курс представляет собой **интегративное – ведущее звено траектории становления будущего учителя.** В этом курсе окончательно оформляется фундаментализация профессиональной подготовки будущего учителя. Здесь понятийный аппарат, теории и методы дисциплин психолого-педагогического и предметного циклов будут генерализованы и органически интегрированы в теоретический и практический фундамент будущего специалиста. Настоящий курс по теории и методике обучения – это **поворот в сторону технологизации проектирования и методической системы обучения, и учебного процесса.** Курс теории и методики обучения открыт процессам информатизации и информационным технологиям. (Использование педагогических программных средств как формы сохранения и передачи методического опыта будущим учителям и т.д.) Настоящий курс по теории и методике обучения – **это конкретное применение психолого-педагогических теорий к обучению.**
3.	Педагогические технологии	Настоящий курс разработан для педагогических университетов и призван помочь студентам ориентироваться в новых педагогических технологиях. Курс "Педагогические технологии" содержит систему занятий, иллюстрированных видео- и аудиофрагментами.

		Отбирая содержание занятий, авторы руководствовались государственным образовательным стандартом, логикой педагогического процесса, актуальностью и практической значимостью рассматриваемых проблем.
4.	Поле битвы – урок	Данное учебно-методическое пособие, состоящее из двух частей, является разделом курса “Введение в педагогическую профессию”, в котором рассматриваются вопросы педагогической техники и методический инструментарий учителя применительно к стратегическим и оперативно-тактическим целям учебно-воспитательного процесса.
5.	Дистанционное образование	Работа имеет двойное предназначение: для преподавателей, ориентирующих свою работу на обеспечение профессионального становления будущих тьюторов, и для студентов, обучающихся в ДО.
6.	Управление педагогическими системами	Предлагаемое учебно-методическое пособие по курсу “Управление образовательными системами” – для преподавателей, ориентирующих свою работу на обеспечение профессионального становления будущих учителей, и для слушателей курсов повышения квалификации. Цель данного курса: – сформировать представление об управлении педагогическими системами, – подготовить выпускников к управлению учебно-воспитательным процессом, – сформировать умение выполнять методическую работу по совершенствованию своей профессиональной деятельности и повышению квалификации.

		Каждое семинарское занятие состоит из двух частей: теоретической (по материалам лекций и соответствующей литературы по изучаемым вопросам) и практической (отработка профессиональных умений по педагогической технике, решение педагогических задач). Практические занятия проводятся с использованием аудио- и видеосредств.
7.	ОНИР	Учебно-методическое пособие "Организация научно-исследовательской работы" посвящено вопросам методологии педагогического исследования.
8.	Педагогическое мастерство	Программное обеспечение для проведения мастер-класса "Педагогическое мастерство" носит интегративный характер и содержит: – психолого-педагогические рекомендации по решению проблемных ситуаций; – педагогические этюды и тренинги; – рекомендации по использованию современных информационных технологий для совершенствования профессионального мастерства. Цель данного курса – сформировать у будущих учителей: – умения по технике педагогического общения; – умения по различным техникам выхода из конфликтных ситуаций; – представления о подростковой субкультуре; – умение вырабатывать стратегию и тактику при работе с "трудными" подростками.

Библиографический список

1. *Монахов В.М.* Технологические основы проектирования и конструирования учебного процесса. Волгоград, 1995. 152 с.

Технология проектирования курса “Алгебра и теория чисел” для специальности 01.05.03 “Математическое моделирование и администрирование информационных систем”

Е.В. Бахусова

В сообщении рассматривается методическая идея совершенствования математической составляющей профессиональной подготовки студентов университетов (на примере курса “Алгебра и теория чисел”), необходимыми условиями реализации которой стали:

– создание последовательности моделей (теоретической и инструментальной) проектирования содержания курса “Алгебра и теория чисел” с использованием педагогических и информационных технологий;

– использование в качестве **педагогической технологии** проектирования содержания курса технологии В.М. Монахова [1];

– использование в качестве **информационной технологии** электронной энциклопедии “Линеал” В.В. Воеводина;

– представление проекта содержания курса в виде модернизированной учебной программы с соответствующим методическим обеспечением (система технологических карт);

– при несоответствии проекта содержания критериям оценки программы переход к повторному циклу.

Для реализации этой идеи были разработаны теоретическая и инструментальная модели проектирования содержания математических курсов для прикладных специальностей университетов. Основу **теоретической модели** составили:

– анализ ГОС по рассматриваемой специальности;

– анализ содержания традиционных курсов “Алгебра и теория чисел” и их логических структур;

– формирование понятийного тезауруса курса.

Основу **инструментальной модели** составила следующая последовательность технологических процедур:

– конкретизация целей обучения в виде системы микроцелей по всем учебным темам;

– построение системы диагностик для каждой микроцели;

– установление нормы дозирования самостоятельной работы студентов;

– построение логической структуры понятийного аппарата учебных тем;

– оптимизация структуры понятийного аппарата при помощи электронной энциклопедии;

– проектирование технологических карт.

Совокупность теоретической и инструментальной моделей образуют процедурную схему, с помощью которой можно проводить проектирование содержания курса “Алгебра и теория чисел” в соответствии с ГОСом, в результате которого получаем:

– тезаурус курса, понятия которого дифференцированы по трем уровням: знаниевый, операционный и прикладной;

– содержание курса “Алгебра и теория чисел”, зафиксированное в программе курса и ее методическом обеспечении;

– логическая структура модернизированной учебной программы курса, экспертно проверенная с помощью электронной энциклопедии “Линеал”;

– методическое обеспечение программы курса в форме атласа технологических карт по всем учебным темам с комментариями.

Ниже представлена теоретическая и инструментальная модели проектировочной деятельности.

Теоретическая модель	I. **Анализ ГОСа** по специальности 01.05.03 “Математическое обеспечение и администрирование информационных систем” и выявление роли и места курса для становления будущего специалиста: 1) понятие, функции и структура ГОС; 2) конкретизация содержания Государственного образовательного стандарта по специальности 01.05.03 3) анализ общих сведений о дисциплине “Алгебра и теория чисел” в примерном учебном плане по специальности 01.05.03 4) анализ роли курса “Алгебра и теория чисел” для специальности 01.05.03 II. **Анализ содержания** традиционных курсов “Алгебра и теория чисел” и логических структур тем этих курсов: 1) представление и анализ логических структур тем выбранных программ; 2) выделение только алгебраических тем; 3) конструирование осредненной логической структуры тем курса; III. **Формирование понятийного тезауруса** учебного курса “Алгебра и теория чисел”. IV. **Построение логической структуры** учебных тем курса. 1) дополнение осредненного варианта логической структуры тем курса темами из ГОС для специальности 01.05.03 2) формирование окончательного варианта логической структуры тем курса; V. **Построение краткого содержания** учебных тем курса. 1) разработка осредненного варианта краткого содержания учебных тем; 2) формирование окончательного варианта краткого содержания учебных тем.

<table>
<tr><td rowspan="2"></td><td>Инструментальная модель</td><td>VI. Построение системы микроцелей В1, В2,...Вn по всем учебным темам курса.
VII. Построение системы диагностики Д1, Д2,..., Дn для каждой микроцели.
VIII. Выбор дозирования домашних заданий, т.е. объема и содержания самостоятельной деятельности для подготовки к диагностикам.
IX. Разработка логической структуры модели учебного процесса в границах учебной темы, где по микроцелям В1, В2,..., Вn происходит дальнейшая конкретизация рабочего поля.
X. Оптимизация структуры понятийного аппарата в рамках учебной темы с использованием электронной энциклопедии “Линеал”.
XI. Проектирование ТК.</td></tr>
<tr><td colspan="2">XII. Аналитическая работа с результатами диагностик.
XIII. Создание модернизированной программы курса.
XIV. Экспертиза программы по 8 критериям.</td></tr>
</table>

Проектирование курса “Алгебра и теория чисел” согласно процедурам теоретической модели начинается сравнительным анализом учебных программ по алгебре для смежных специальностей. Понятийный тезаурус курса формирует рабочее поле проектирования содержания курса “Алгебра и теория чисел”.

После реализации переходим к оптимизации логической структуры учебного процесса, которая проводится в границах учебных тем на уровне алгебраических понятий. Выписываются алгебраические понятия темы А1, А2,...,А22. Маршруты формирования понятий фиксируются с помощью ориентированных отрезков. В электронной энциклопедии “Линеал” находится аналогичный фрагмент, где представлены задействованные в рассматриваемой теме алгебраические понятия, связанные ориентированными отрезками. Используя логику наиболее целесообразного формирования основных понятий и соответствующую понятийную область электронной энциклопедии “Линеал”, получаем новую последовательность понятий по учебной теме C1, C2, ...,C15. Параллельно предлагаются возможные логические маршруты формирования понятий.

Результатом реализации инструментальной модели проектирования содержания учебных тем курса является технологический учебник курса в виде атласа технологических карт по всем учебным темам курса.

На заключительном этапе проектирования содержания курса “Алгебра и теория чисел” разрабатывается модернизированная программа курса, которая включает пояснительную записку, таблицы распределения учебных часов по темам и видам занятий в семестрах, содержание лекционных и практических занятий, список рекомендуемой литературы по курсу “Алгебра и теория чисел”.

Основной задачей педагогического эксперимента было установление принципиальной пригодности модернизированной программы курса “Алгебра и теория чисел” и ее методического сопровождения – атласа технологических карт.

Для этого была проведена экспертиза атласа технологических карт по 8 параметрам на основе результатов диагностик:

1) совпадение числа микроцелей в проекте и в реальном учебном процессе;

2) адекватность содержания микроцели содержанию диагностики;

3) достаточность числа выделенных занятий на достижение микроцели;

4) гарантированность объема и сложности блока дозирования для успешного прохождения диагностики. Выявленные закономерности между дозированием и результатами диагностики эмпирически устанавливают такие нормы: 90–95% студентов должны выполнить диагностику на “стандарт”, 80%–85% студентов – на “хорошо” и “отлично”, 65% – на “отлично”;

5) сравнение первоначальной логической структуры содержания учебного процесса: на уровне проекта, после оптимизации и на уровне измененной логической структуры, после коррекции на базе электронной энциклопедии и после анализа самого препода-

вателя;

6) характер и общее число допущенных ошибок в диагностиках. Если при сравнении количества студентов, выполнивших различные диагностики на одну и ту же оценку, колебание показателей составляет 10–15%, то все нормально, если больше, то такая ситуация свидетельствует о наличии завышенных или заниженных диагностик, то есть необходима нормализация диагностик;

7) вычисляемость численной характеристики логической структуры содержания учебного процесса. Правильность и обоснованность проведенной нами проектировочной деятельности по конструированию учебного процесса интегративно может быть оценена с помощью всех четырех параметров технологической карты. Блок целеобразования дает нам число микроцелей. Содержание диагностики задает уровень сложности и первое приближение к числу занятий, достаточных для достижения микроцелей. Коррекция – это показатель фактического педагогического брака преподавателя; много ошибок свидетельствует о недостаточной сформированности знаний и умений. Вывод: или увеличение учебного времени, или радикальный пересмотр проекта;

8) характер взаимосвязи блока целеполагания и коррекции. Число, содержание, характер допускаемых ошибок дают информацию для изменения формулировки или сложности самой микроцели.

В эксперименте проявились мониторинговые возможности технологической диагностики, очевидная стратифицированность которой дала достаточно объективную характеристику результатов обучения (успехов студентов).

Процедурная схема проектирования математического курса “Алгебра и теория чисел” достаточно универсальна и может найти применение при создании других математических курсов, а также курсов по информатике и т.д.

Библиографический список

1. *Монахов В.М.* Технологические основы проектирования и конструирования учебного процесса. Волгоград, 1995. 152 с.

Подготовка учителя математики к обучению детей с особыми образовательными потребностями

И.К. Кондаурова

В настоящее время в образовательных учреждениях России происходит становление системы коррекционно-развивающего обучения детей, испытывающих трудности в освоении учебных программ, в адаптации к школе и социальному окружению.

По данным МО РФ среди детей, поступающих в 2002 году в первый класс, свыше 60% относятся к категории риска школьной, соматической и психофизической дезадаптации. Из них около 35% составляют те, у кого еще в младших группах детского сада были обнаружены очевидные расстройства нервно-психической сферы.

Число учащихся начальной школы, не справляющихся с требованиями стандартной школьной программы, за последние 20 лет возросло в 2–2,5 раза, достигнув 30% и более. По данным медицинской статистики, за 10 лет обучения в школе (с первого класса по девятый) количество здоровых школьников сократилось в 4–5 раз, составляя лишь 10–15% от общего числа учеников. Слабое здоровье дошкольников (в 2003 г. здоровыми были признаны лишь 10,6% детей) становится одной из причин трудностей их адаптации к школьным нагрузкам. Напряженный режим школьной жизни приводит к резкому ухудшению соматического и психоневрологического здоровья ослабленного ребенка.

Проблемой оказания помощи детям с особыми образовательными потребностями педагоги занимаются многие десятилетия, однако сегодня проблемы экологии детства объявлены глобальными проблемами современности.

К категории детей с особыми потребностями в обучении относятся дети, чья социальная, физическая или эмоциональная исключительность требует специального обращения или услуг, позволяющих им развить свой потенциал. Исключительность – термин, применяемый для обозначения заметного отклонения от средних показателей с точки зрения физического, интеллектуального или эмоционального поведения, способностей или навыков. Это двойственное понятие, поскольку оно может указывать как на заметное превосходство, так и на значимые недостатки.

В рамках данной статьи нас будут интересовать дети, испытывающие в силу различных биологических и социальных причин стойкие затруднения в усвоении образовательных программ при отсутствии грубо выраженных нарушений интеллекта, отклонений в развитии слуха, речи, двигательной сферы. Для определения категории таких детей используются понятия: дети риска школьной дезадаптации (Г.Ф. Кумарина), дети с трудностями в обучении, обусловленными задержкой психического развития (К.С. Лебединская, С.Г. Шевченко), неуспевающие дети (И.П. Подласый) и др.

Понятие “дети риска” в нормативно-методической документации, по определению Г.Ф. Кумариной, выглядит как “дети, которые не обнаруживают классических форм аномалии развития, имеют в силу различных причин биологического или социального свойства его парциальные недостатки, обуславливающие трудности обучения и воспитания в обычных условиях и провоцирующие повышенный риск школьной дезадаптации”. Основным критерием для отнесения ребенка к “группе риска” считается недостаточная готовность его к началу школьного обучения. Г.Ф. Кумарина дает педагогическую типологию детей риска (академический, социальный, риск по состоянию здоровья) и детей с комплексными проблемами.

В специальной психологии и коррекционной педагогике выделена как самостоятельная типологическая группа “дети с трудностями в обучении, обусловленными задержкой психического развития”.

Задержка психического развития (ЗПР) – это нарушение нормального темпа психического развития, в результате чего ребенок, достигший школьного возраста, продолжает оставаться в кругу дошкольных игровых интересов. При ЗПР дети не могут включиться в школьную деятельность, воспринять школьные задания и выполнять их. Они ведут себя в классе так же, как в обстановке игры в группе детского сада или в семье.

Детей с временной ЗПР нередко ошибочно считают умственно отсталыми. Отличия этих двух групп детей определяются двумя особенностями. У детей с ЗПР трудности в овладении счетом сочетаются с относительно хорошо развитой речью, значительно более высокой способностью к запоминанию стихов, сказок и с более высоким уровнем развития познавательной деятельности. Такое сочетание для умственно отсталых детей нехарактерно. Дети с временной ЗПР всегда способны использовать оказанную им в процессе работы помощь, усваивать принцип решения задания и переносить этот принцип на выполнение других сходных заданий. Это показывает, что они обладают полноценными возможностями дальнейшего развития, то есть будут способны впоследствии выполнить самостоятельно то, что в данный момент в условиях специального обучения могут выполнить с помощью педагога.

Существует несколько разных подходов к обучению детей, испытывающих трудности в традиционных условиях общеобразовательной школы. Наибольшее развитие в системе образования получили классы выравнивания для учащихся с ЗПР и классы компенсирующего обучения.

Цель организации таких классов – создание для неуспевающих детей адекватных их особенностям условий воспитания и обучения, которые позволяют предупредить дезадаптацию в образовательном учреждении. Прием детей в такие классы осуществляется по заключению психолого-медико-педагогической комиссии с согласия родителей или законных представителей ребенка. Наряду с классами выравнивания с 1994 г. в общеобразовательных школах действуют классы коррекционно-развивающего обучения (КРО). Кроме детей с ЗПР в классах КРО обучаются дети с высокой степенью педагогической запущенности, отказывающиеся посещать общеобразовательные учреждения, дети из семей беженцев, вынужденных переселенцев, а также пострадавшие от стихийных бедствий, техногенных катастроф.

Одним из важнейших условий эффективности процесса обучения математике является предупреждение и преодоление тех трудностей, которые испытывают такие школьники в учебе.

Математика как учебный предмет требует от ребенка наличия определенных способностей:

– умение анализировать и обобщать материал;

– умение мыслить отвлеченно, абстрактными категориями;

– гибкость мышления;

– наличие специфической математической памяти.

Именно эти способности, необходимые для успешного овладения математическими знаниями, у обозначенной категории детей развиты чрезвычайно слабо.

Для того, чтобы коррекционно-развивающая работа с детьми, испытывающими трудности в усвоении математики, была успешной, необходимо строить ее в соответствии со следующими основными положениями:

– восполнение пробелов математического развития детей путем обогащения чувственного опыта, организации предметно-практической деятельности;

– пропедевтический характер обучения: подбор заданий, подготавливающих учащихся к восприятию новых и трудных тем;

– дифференцированный подход к детям с учетом сформированности знаний, умений, навыков, осуществляемый при выделении следующих этапов работы: выполнение действий в материализованной форме, в речевом плане без наглядной опоры, в умственном плане;

– формирование операции обратимости и связанной с ней гибкости мышления;

– развитие общеинтеллектуальных умений и навыков, активизация познавательной деятельности, развитие зрительного и слухового восприятия, формирование мыслительных операций;

– активизация речи детей в единстве с их мышлением;

– выработка положительной учебной мотивации, формирование интереса к предмету;

– формирование навыков учебной деятельности, развитие навыков самоконтроля.

Для того, чтобы каждый проблемный ребенок в процессе обучения математике получил тот вид и тот объем педагогической помощи, в котором он нуждается, необходима специальная подготовка педагогических кадров, владеющих комплексными междисциплинарными знаниями о трудностях, возникающих у детей под влиянием неблагоприятных внутренних и внешних факторов на различных этапах взросления, способных с опорой на педагогические методы осуществлять своевременную диагностику, профилактику и коррекцию их развития.

Под системой подготовки учителя к работе в классах КРО нами понимается упорядоченная совокупность взаимосвязанных компонентов образования, обладающая структурой, технологией и управлением, реализация которых обеспечивает эффективность учебно-воспитательного процесса. Структурный компонент характеризуется целостностью знаний о личности школьника с особыми образовательными потребностями, о задачах, методах, организации и содержании обучения математике детей с учетом их психологического развития и потенциальных возможностей. Технологический компонент определяет отбор профессионально-педагогических знаний, умений и качеств, синтезирующих влияние социально-экономических, психолого-педагогических и других факторов, обеспечивающих непрерывное образование и совершенствование квалификации учителя, работающего в классах КРО. Управленческий компонент предусматривает комплекс организационно-методического и дидактического обеспечения подготовки учителя математики к работе в классах компенсации.

Очевидно, что процесс такой подготовки студентов может и должен осуществляться в ходе изучения ими различных дисциплин: психологии, педагогики, основ специальной педагогики и психологии, теории и методики обучения математике, возрастной анатомии, физиологии и гигиены, а также различных спецкурсов и спецсеминаров [1].

Центральным звеном такой подготовки в Саратовском государственном университете на механико-математическом факультете является годовой спецкурс по выбору для студентов 4–5 курсов (8–9 семестры). Объем спецкурса – 74 часа. Название – “Коррекционно-развивающее обучение математике”. Указанный спецкурс состоит из трех частей. Первая часть – психолого-педагогические аспекты коррекционно-развивающего обучения математике, где студенты знакомятся с характеристикой состояния здоровья детского населения на современном этапе развития человеческой цивилизации, с разными подходами к классификации детей с особыми потребностями в обучении, с дифференцированными типами и формами коррекционно-развивающего образовательного процесса, с нормативно-документальным обеспечением системы коррекционно-развивающего образования. Вторая часть спецкурса раскрывает общие вопросы коррекционно-развивающего обучения математике, в частности, характеризует методическую систему и цели коррекционно-развивающего обучения математике, связь обучения математике с другими учебными предметами, особенности усвоения математических знаний и умений учащихся классов КРО, методы и формы коррекционно-развивающего обучения. Третья часть спецкурса посвящена методике изучения некоторых основных математических тем в классах КРО.

Данный спецкурс направляет и организует познавательную деятельность студентов. Результаты исследований будущих учителей математики оформляются в виде курсовых и дипломных работ, докладов на студенческих и учительских конференциях. Лучшие работы используются непосредственно в школьной практике.

Библиографический список

1. *Леднев В.Х.* Содержание образования. М.: Высшая школа, 1989. 360 с.

Индивидуальный подход в процессе методической подготовки студентов-математиков

Т.В. Бурлакова

Мировой и отечественный опыт свидетельствуют, что любые изменения в образовательной системе практически не осуществимы до тех пор, пока не произойдут изменения качества профессионально-педагогической деятельности самого учителя. Некоторые специалисты в области педагогики (О.А. Абдуллина, Н.В. Кузьмина, В.А. Сластенин) высказывают неудовлетворенность тем, что система профессиональной подготовки недостаточно нацелена на формирование учителя-профессионала, способного к постоянно-му самосовершенствованию, способного быть полноценным субъектом профессиональной деятельности. Следовательно, нужны новые формы, методы и средства для обучения будущих педагогов.

В педагогической науке утверждается, что подход к подготовке специалиста в системе высшего педагогического образования должен определяться представлением о нем как о научно управляемом процессе, который связан с реализацией общих принципов развития высшего и среднего образования – демократизации, гуманизации, дифференциации. Данный подход имеет целью достижение высокого уровня готовности выпускника вуза к своей профессиональной деятельности и осуществлен на основе теории моделирования содержания структуры образовательно-профессиональных программ.

Существуют различные точки зрения на организацию методической подготовки учителя, в том числе и концепция индивидуального подхода к обучению студентов, которая предполагает, что в процессе обучения будут учитываться мотивы, склонности и способности студента, уровень его начальной подготовки, стремление самостоятельно собирать и анализировать информацию. Установлено, что индивидуальный подход должен осуществляться с целью развития у будущего педагога основ индивидуального стиля педагогической деятельности.

Традиционно индивидуальный стиль профессионально-педагогической деятельности рассматривается в связи с проблемой педагогического общения, а также с рефлексией, умениями соотносить имеющийся образец со своими собственными психологическими особенностями, интересами, опытом. Поскольку индивидуальный подход – это принцип обучения и воспитания, то его невозможно считать ни целью, ни задачей, ни содержанием учебной работы. Он также не является методом или организационной формой обучения. Реализация указанного подхода предполагает частичное, временное изменение ближайших задач и отдельных сторон содержания учебной работы, постоянное варьирование методов и организационных форм с учетом личности каждого обучаемого для обеспечения индивидуально-своеобразного ее развития. Соответственно, основу индивидуального подхода должен составлять принцип *ва-*

риативности выбора содержания и форм деятельности студентов.

Для достижения вариативности обучения возможны различные пути, в том числе достаточно традиционные, заключающиеся в индивидуальных дополнительных заданиях, дифференцированной самостоятельной работе, заданиях различной степени трудности. Поскольку цели и содержание обучения диктуются государственным стандартом и программами, то к индивидуальным особенностям студентов требуется приспосабливать методы и формы работы.

Индивидуализированные вариативные задания, применяемые в процессе подготовки студентов-математиков ШГПУ, предполагают несколько условий: сохранение единого образовательного компонента, обеспечение гарантированного уровня подготовки, предоставление студентам возможности выбора, удовлетворение их интересов.

На семинарских занятиях комбинируются фронтальная и индивидуальная формы работы, общегрупповые, групповые и индивидуальные задания. Ряд заданий, такие как изучение научно-методической литературы или сбор материалов, рассчитаны на длительное выполнение. Выполняя отсроченные задания, связанные с педагогической практикой, наблюдением, экспериментальной исследовательской работой, студенты могут реализовать свои специальные способности. Для осуществления индивидуального подхода практикуется работа как с относительно стабильными, так и с нестабильными группами.

В целях реализации индивидуального подхода автором разработаны методические рекомендации по курсу “Теория и методика обучения математике”, включающие систему учебных заданий для коллективной, групповой и индивидуальной работы студентов. Рассмотрим в качестве иллюстративного примера план семинарского занятия на тему “Математические понятия и методика их изучения”.

Список вопросов, выносимых для обсуждения, включает:

1) методическую концепцию образования математических понятий;

2) главные логические характеристики понятия; соотношение

между объемом и содержанием понятия;

3) определение понятий; способы определения понятий;

4) классификацию понятий; требования, предъявляемые к классификации понятий;

5) типичные ошибки в определении понятий;

6) методику формирования понятий.

Задания (для коллективной работы) имеют следующий вид:

1) из школьного курса математики выберите три понятия. Укажите содержание и объем выбранных понятий;

2) сформулируйте определения выбранных понятий. Выполните анализ определений;

3) из школьного курса математики приведите примеры определений, построенных способом “через ближайший род и видовое отличие”, генетических, описательных, индуктивных;

4) опишите наиболее распространенные ошибки школьников в определении понятий и работу по их устранению и предупреждению;

5) раскройте содержание этапов формирования математических понятий.

Задания (для групповой работы) представлены позициями:

1) разработайте методику введения одного из указанных понятий: неправильная дробь, окружность, параллелограмм, квадратное уравнение, перпендикулярные прямые;

2) разработайте систему упражнений на формирование одного из указанных понятий: смежные углы, линейная функция, арифметическая прогрессия, линейное уравнение, равнобедренный треугольник;

3) выполните анализ системы упражнений, содержащихся в школьных учебниках геометрии, на соответствие этапам формирования понятий: степень с натуральным показателем, вертикальные углы, правильная дробь, трапеция, геометрическая прогрессия. В случае выявления недостатков в системе устраните их, внесите недостающие упражнения.

Задания (для индивидуальной работы) предполагают следующие пункты:

1) выполните сравнительный анализ статей “Формирование ма-

тематических понятий" в учебных пособиях, написанных Г.И. Саранцевым, А.А. Столяром, Н.В. Метельским, Т.А. Ивановой;

2) сравните методику введения понятия "функция" в различных учебниках алгебры. Что общего и в чем различие? Почему? Сделайте выводы;

3) подберите материал из истории математики для мотивации введения понятий "обыкновенная дробь", "отрицательное число";

4) составьте список статей, опубликованных в журнале "Математика в школе" в 1998–2003 годах, посвященных методике изучения понятий в школьном курсе математики;

5) разработайте методику работы по систематизации материала посредством установления связей между отдельными понятиями; упорядочения материала по различным основаниям; обобщения понятия; конкретизации понятия. Проиллюстрируйте ее конкретным примером;

6) подберите занимательные задачи, соответствующие этапам формирования понятия "окружность";

7) подберите задачи повышенной трудности для закрепления понятия "биссектриса угла треугольника";

8) напишите рецензию на статью В.М. Финкельштейна "О подготовке учеников к изучению нового понятия, новой теоремы", опубликованной в журнале "Математика в школе" в 1996 году;

9) сделайте анализ книги для учителя "Дидактические игры на уроках математики" В.Г. Коваленко;

10) в период педагогической практики наблюдайте за работой учителя математики: какой методики придерживается учитель при формировании математических понятий? Опишите опыт работы учителя в "Дневнике практики".

Использование в аудиторной работе вариативных учебных заданий различного объема и сложности предоставляет студентам большую степень самостоятельности.

При выполнении заданий студентам рекомендуется учет стратегии самомотивации: 1) планирование на долгосрочную перспективу; 2) партнерство; 3) определение цели и задачи своего обучения (индивидуальное целеполагание); 4) постепенность (следует подразделять содержание обучения на легко усвояемые разделы и идти в обучении от средней трудности заданий – к трудным, а затем к легким); 5) дополнение: следует дополнять изучаемое содержание своими структурными схемами, примечаниями, оценками; 6) расширение: по отдельным интересующим проблемам необходимо больше читать и обсуждать прочитанное; 7) награда: хвалите себя, выполнив задание; 8) упражнения.

Необходимо отметить, что учет стратегии самомотивации не всегда предполагает успешность результата методической подготовки будущих учителей. Установлено, что среди факторов, определяющих продуктивность дидактического процесса, ведущее место занимают мотивация учения, интерес к учебному труду, однако не всегда они являются доминирующими. С целью выяснения мотивов выбора педагогической профессии был проведен опрос студентов третьего курса математического факультета ШГПУ, приступивших к изучению курса “Теория и методика обучения математике”. Проведенное исследование позволило выявить ряд факторов, влияющих на выбор педагогической профессии, определить их значимость и выстроить ранжированный ряд:

1) интерес к учебному предмету – 40%;
2) не поступили в другие вузы – 20%;
3) желание иметь высшее образование – 16,66%;
4) желание обучать данному предмету – 13,34%;
5) посоветовали родители – 10%.

Как можно наблюдать, большинство из опрошенных – это студенты, имеющие одноплановый мотив – любовь к предмету, поэтому в работе с ними ставится задача внесения корректив с целью удвоения мотива, т.е. сочетания любви к предмету и мотива педагогической деятельности. Вторая группа, которая требует особого внимания в работе, – это студенты, поступившие в педагогический вуз случайно, без четко осознанного мотива. В работе с ними необходим полный процесс профориентации с использованием всех дисциплин педагогического цикла и других средств приобщения их к будущей работе. Работу с такими студентами обосновано начинать с индивидуальной беседы о любимом и уважаемом учителе, затем привлекать студента к учебной работе, исключая “давление”, но используя идентификацию, опираясь на желания, интересы и склонности, поощряя желание добиться признания, одобряя успехи.

Студенты, проявившие педагогические способности, становятся помощниками преподавателя при проведении занятий, главное направление работы с ними – формирование индивидуального стиля деятельности. Студентам, стремящимся достичь вершины педагогического мастерства, рекомендуется заниматься самоанализом своих потенциальных возможностей. Схема саморефлексии может иметь следующий вид:

1) какую роль играет учительская деятельность в Вашей дальнейшей профессиональной карьере?

2) какие аспекты Вашей учительской деятельности Вы считаете позитивными и приятными? В каких случаях Вы испытываете затруднения и повышенную нагрузку? Каковы причины этих затруднений? Что Вы делаете, чтобы избежать этих затруднений?

3) в каких условиях Вы чувствуете себя в роли учителя особенно уверенно? Какие стороны Вашей учительской деятельности Вы хотели бы изменить?

4) интересно ли Вам на уроках? Увлечены ли Вы своим предметом? Любите ли Вы свою работу? Пытались ли Вы найти основные причины своих успехов и неудач? Верят ли Вам учащиеся?

Применение в процессе методической подготовки будущего учителя индивидуального подхода позволяет снять трудности учебно-интеллектуального характера (неумение мотивировать свою деятельность, внимательно воспринимать информацию, запоминать, осмысливать учебный материал, выделять главное, осуществлять самоконтроль). Кроме того, это формирует у студентов способности переносить известные знания, приемы обучения и воспитания в условия новой педагогической ситуации, находить для каждой педагогической ситуации новое решение, создавать новые элементы педагогических знаний и идей.

Библиографический список

1. *Кузьмина Н.В.* Профессионализм личности преподавателя и мастера производственного обучения. М., 1990.

2. Подготовка учителя математики: Инновационные подходы: Учеб. пособие / Под ред. В.Д. Шадрикова. М., 2002.
3. Профессиональная культура учителя / Под ред. В.А. Сластенина. М., 1993.

О подготовке будущего учителя математики к работе со способными и одаренными детьми

Т.Н. Карпова, И.Н. Мурина

В соответствии с новой концепцией школьного математического образования главной задачей обучения математике становится не изучение основ математической науки как таковой, а общеинтеллектуальное развитие – формирование у учащихся в процессе изучения математики качеств мышления, необходимых для полноценного функционирования человека в современном обществе.

Формирование условий для индивидуальной деятельности человека, основывающейся на приобретенных конкретных математических знаниях, для познания окружающего мира средствами математики остается столь же существенным компонентом школьного математического образования.

В современной образовательной практике выделяются две тенденции: усиление внимания к одаренным детям и одновременное усиление внимания к отстающим школьникам (рост числа классов коррекции, педагогической поддержки, классов здоровья и т.д.).

Обе тенденции были всегда важны, но продолжительное время преобладала вторая.

В условиях модернизации школьного образования происходит усиление внимания к развитию личности, поэтому первая тенденция приобретает особое значение.

Однако еще в 60-е годы А.Н. Колмогоров отмечал, что содействие выдвижению математически одаренной молодежи является одной из важных задач школьных уроков математики, кружков, математических олимпиад и других мероприятий по пропаганде математических знаний и распространению интереса к самостоятельным занятиям математикой.

Одаренность сейчас определяется как способность к выдающимся достижениям в любой социально значимой сфере человеческой деятельности. Ее следует рассматривать как достижения или как возможность достижений, т.е. нужно принимать во внимание и те способности, которые уже проявились, и те, которые могут проявиться.

Одаренность многообразна и проявляется на разных уровнях и во всех сферах жизнедеятельности.

По последним данным, примерно 1/5 часть детей в школьном возрасте, т.е. 20 %, может быть отнесена к одаренным. Но они, как правило, лишены необходимой поддержки, и потому всего лишь 2–5 % от общего числа детей действительно проявляют себя как одаренные.

Есть одаренные дети, у которых при высоком умственном развитии нет резкого возрастного опережения. Их одаренность видна только квалифицированным профессионалам-психологам или внимательным учителям, много и серьезно работающим с ребенком. Видимо, к этому виду принадлежал великий математик А.Н. Колмогоров.

Учитель легче всего видит и наиболее высоко оценивает так называемый **интеллектуальный** вид одаренности. Именно этих учащихся учителя называют “умными”, “талантливыми”, “сообразительными”. Они – “светлые головы” и “надежда школы”. Эти школьники, как правило, обладают весьма значительными глубокими знаниями, очень часто они умеют их самостоятельно получать, сами читают сложную литературу, могут критически отнестись к тем или иным источникам.

При **“академической”** одаренности тоже достаточно высокий интеллект, однако на первый план выходят особые способности именно к учению. Академически одаренные школьники – это всегда гении именно учения, это своего рода профессионалы школьного, потом студенческого труда, великолепные мастера быстрого, прочного и качественного усвоения.

Есть еще **художественный** вид одаренности.

Эти три вида одаренности сравнительно легко определяются учителем.

С большим трудом обнаруживается в школьной практике **творческая** одаренность. Для того, чтобы увидеть подлинные творческие способности (креативность) этих учеников, им нужно предлагать особую деятельность, предполагающую активное проявление их самобытности, необычного видения мира. Правда, и учитель, чтобы оценить оригинальность, нешаблонность этих детей, должен сам обладать если уж не собственной креативностью (творческими способностями), то хотя бы достаточной широтой взглядов, отсутствием жестких стереотипов в мышлении и работе.

Одной из особенностей одаренных детей, по словам В.Г. Белинского, является то, что они "на все смотрят как-то особенно оригинально, во всем видят именно то, что без них никто не видит, а после них все видят и удивляются, что прежде этого не видели". Развивать эту особенность, доводя ее до уровня сознательно используемой способности, школьному курсу алгебры дает возможность разнообразный задачный материал.

Просматриваются три наиболее часто встречающиеся направления работы со способными учащимися: первое – углубление и расширение знаний программного материала("обогащенная" программа), второе – "ускоренная" программа, третье – формирование познавательных и творческих способностей учащихся.

Математика практически единственный учебный предмет, в котором задачи используются как цель, средство и предмет изучения. Роль и функции задач значительно возрастают при обучении способных к математике школьников. Целенаправленное и эффективное использование задач в обучении предъявляет высокие требования к подготовке учителя.

Во время изучения в педвузе математических и методических дисциплин студент овладевает различными математическими понятиями, системой понятий и теорем, методами исследования и конкретизации как основой профессиональной готовности учителя. В процессе подготовки будущих учителей мы придерживаемся принципа бинарности: тесной связи теоретического и методического аспектов обучения студентов.

Для того, чтобы быть готовыми к работе со способными школьниками, студенты должны быть знакомы со многими приемами, позволяющими сделать решение задачи более рациональным, уметь "охватить" материал в целом, вычленить главную идею рассуждения, сопоставить изучаемое понятие с более общим, приобрести навык чтения дополнительной методической и психолого-педагогической литературы, систематизировать и подбирать задачи с "изюминкой", олимпиадные задачи.

Методика преподавания курса элементарной математики исходит из психолого-педагогических основ усвоения математических знаний и демонстрирует студентам модели и образцы современной технологии обучения математике в школе. Особая роль в формировании качеств полноценных знаний школьной математики у будущего учителя отводится разделу "Задачи, не решаемые стандартными методами". Понятно, что научить решению таких задач, только показывая образцы их решения, нельзя. Некоторые навыки исследовательского характера студенты приобретают в результате подбора и составления задач по сквозным темам школьного курса.

Например:

1. Составить задачу для заданного выражения: $a^3+b^3+c^3-3abc$ $(a \geq 0,\ b \geq 0,\ c \geq 0)$.

Возможные варианты:

– разложить на множители;

– доказать неравенство $a^3+b^3+c^3 \geq 3abc$;

– доказать, что $(a^3+b^3+c^3-3abc) \vdots (a+b+c)$.

2. Решить задачу и составить подобную для разных классов функций:

Дана функция $f(x) = \log_2^2 x + \log_x 4$.

а) Решите уравнение $f(x) = 3$.

б) Решите неравенство $f(x) \geq -1$.

в) Найдите все a, при которых уравнение $f(x) = f(a)$ имеет единственное решение.

г) Определите число корней уравнения $f(x) = f(2x)$.

3. Подобрать задачи по одной теме, решаемые разными методами.

Например:

1) Найти наибольшее и наименьшее значение функции

а) $y = |x+2| + |x| + |x-1| + |x-3|$;

б) $y = 2\sin x - \cos 2x + \cos^2 x$.

2) Найти наибольшее и наименьшее значения выражения

$9x^2 - 30x + y + 40$, если $\begin{cases} 3x^2 + 42x + y \geq 110; \\ 18x^2 + 6x + y \leq 98. \end{cases}$

3) Для каждого положительного a найти наибольшее значение функции $y = \frac{1}{3}(x-a)^3 + (x-a)^2$, если $-2 \leq x \leq 0$.

4) Какая наибольшая площадь может быть у прямоугольника, две вершины которого лежат на оси абсцисс, а две другие – на графике функции $y = (x-1)(7-x)$ при $y \geq 0$?

5) Имеются три сплава. Первый содержит 45 % алюминия и 55 % магния, второй – 30 % меди и 25 % магния, третий – 60 % алюминия, 15 % меди и 25 % магния. Из них необходимо приготовить новый сплав, содержащий 25 % меди. Какое наибольшее и наименьшее процентное содержание алюминия может быть в этом сплаве?

4. Найти как можно больше способов решения задачи.

1) Найти множество значений функции:

а) $y = \frac{1}{\cos x - \frac{1}{3}}$ (4 способа), б) $y = \frac{x^2-2}{x^2+2x+4}$ (3 способа).

2) При каких значениях a уравнение $x + a - 1 = a|x-2|$ имеет единственное решение? Найдите его (3 способа).

3) Решить уравнение $\sqrt{4x + a - 4} = 2x + 1$ (5 способов).

5. Составить задания для школьного тура олимпиады.

Заключительным этапом подготовки будущих учителей математики к работе со способными детьми являются курсовые и дипломные работы, в которых систематизируются знания и совершенствуются приобретенные умения в перечисленных видах деятельности, реализуются дидактические принципы последовательности, комплексности, нестандартности и отхода от стереотипов, преемственности, активности, разнообразие приемов и методов.

Библиографический список

1. Краткое руководство для учителей по работе с одаренными детьми / Под ред. Л.В. Поповой и В.И. Панова. М.: Мол. гвардия, 1997. 137 с.
2. *Колмогоров А.Н.* Математика – наука и профессия / Сост. Г.А. Гальперин. М.: Наука, 1988. 288 с.
3. Учителю об одаренных детях (пособие для учителя) / Под ред. В.П. Лебедевой, В.И. Панова. М.: Мол. гвардия, 1997. 355 с.

Подготовка учителей к осуществлению эффективного контроля знаний по математике

О.М. Кулибаба

Кардинальные изменения, происходящие в политической, социально-экономической и культурной жизни общества, обусловили парадигмальные изменения в современной теории образования, педагогической деятельности и системе подготовки будущего учителя. В настоящее время студентов необходимо знакомить с новой методической системой “мировоззренчески направленного обучения математике в современной школе, в которой учитель и ученик выступают как главные действующие лица образовательного процесса с их личностными качествами, персональной культурой, математическим мировоззрением и функциями, образующими взаимодействующую пару” (Л. Жохов). Противоречия между сложившимися за долгие годы стереотипами мышления и новыми условиями жизни общества вызвали необходимость реализации нового содержания педагогического образования, требующей решения задач, связанных с поиском новых методов, организационных форм и технологических приемов контроля знаний учащихся. В настоящий период формируется иной тип социокультурных отношений, имеющих явно выраженную тенденцию к демократизации обучения через трансформацию отношений на всех иерархических уровнях из субъектно-объектных в субъектно-субъектные. Данные установки закреплены в Законе РФ “Об образовании”, Национальной доктрине образования в РФ, Программе развития среднего образования.

Успешность адаптации образовательной сферы к изменяющимся реалиям жизни общества в значительной степени зависит от того, как организован педагогический контроль. Однако инновационные процессы, происходящие в области педагогического контроля, до настоящего времени находились за пределами углубленного исследовательского внимания ученых, не вызывали пристального интереса методистов-практиков. Поэтому перед образовательным сообществом, в соответствии с ориентирами современного образования, стоит задача создания условий для комфортного сотрудничества всех участников педагогического процесса. Решать эту проблему можно различными путями, одним из которых является демократизация такого важного функционального элемента педагогического процесса, как контроль.

Проблема организации контроля знаний, несмотря на ее важность и актуальность, остается в настоящее время недостаточно исследованной. Существует несколько подходов к определению понятия “контроль”.

1. Информационно-констатирующий.

Этот подход представлен в работах В.С. Баймаковского, Ю.В. Васильева, Ю.А. Конаржевского, И.И. Митиной, В.С. Пикельной, М.А. Портного, И.П. Раченко, Д.И. Румянцевой. На уровне данного подхода функция контроля сводится только к получению сведений и фактов о качестве обучения.

2. Диагностико-обучающий (В.П. Борисова, М.Я. Куприна, И.К. Новикова и другие).

Авторы данного подхода акцентируют внимание на то, что именно контроль должен установить, все ли выполняется при обучении математике в образовательном учреждении в соответствии с принятыми образовательными решениями, выяснить причины несоответствия и определить пути и методы исправления выявленных недостатков.

3. Рефлексивный (П.И. Третьяков).

В отличие от активного (чаще всего командного) одностороннего преподавательского воздействия, этот подход к определению понятия "контроль" строится на принципе совместной ценностной деятельности, базирующейся на принятии индивидуальных интересов учащегося как партнера.

В последние годы сложилась общая тенденция рассматривать контроль не только как средство выявления недостатков в ходе учебно-воспитательного процесса или как канал получения обратной информации, но и как средство, позволяющее выявить достоинства и педагогическую эффективность деятельности и решить проблему непрерывного образования и творческого роста учащихся. Вместе с тем следует отметить, что существует ряд проблем в исследовании каждого из подходов.

Рассмотрим те моменты, которые мы считаем целесообразным совершенствовать:

1. Информационно-констатирующий подход в большей степени ориентирован на сам педагогический процесс, а не на его участников. Авторами почти исключена ориентация на человека, его потребности и возможности.

2. В диагностико-обучающем подходе учащийся поставлен в позицию субъектно-объектных отношений, что не позволяет приблизить его к высшей ступени саморазвития.

3. Третий подход, определяемый как рефлексивный, имеет особое значение для педагогического процесса, поскольку способен решить некоторый комплекс лично-ориентированных задач математического образования, осуществить перевод субъектно-объектных отношений в системе "преподаватель-учащийся" на субъектно-субъектные. Слабым звеном в данном подходе является недостаточное внимание исследователей к разработке способов самоконтроля. Очень многие отождествляют такие понятия, как "самооценка", "саморефлексия", "самоконтроль". На практике же все они исполь-

зуются эпизодически. В педагогике нет теории, которая бы обеспечивала в должной мере развитие самоконтроля учащихся, а если смотреть глубже – единство контроля и самоконтроля в педагогическом процессе.

Таким образом, контроль необходимо рассматривать как информационно-констатирующее, диагностико-обучающее и рефлексивное взаимодействие участников педагогического процесса, ориентированное на установление соответствия всей системы учебно-воспитательной работы учителя математики Государственным образовательным стандартам и на совершенствование педагогической деятельности. Следует акцентировать свое внимание на функционировании контроля в пределах учебно-воспитательного процесса по математике, исключительно в рамках сотворческих отношений преподаватель-ученик.

Как показал анализ ряда исследований, в современном педагогическом процессе определяются следующие функции контроля:

– изучение деятельности учащегося, накопление информации о его работе на основе аналитически обоснованных целей и хорошо продуманных программ, аргументированных передовым опытом преподавателей-новаторов и рекомендациями современной дидактики, теории воспитания, возрастной и педагогической психологии, методики обучения математике;

– оказание учащемуся конкретной и своевременной помощи, всемерное содействие росту его творческого развития;

– установление отношений сотрудничества между преподавателем и учащимся на основе внимательного отношения к его творческим изысканиям, глубокой заинтересованности в развитии индивидуального своеобразия учащегося, искренней веры в потенциальные возможности учащегося работать лучше, работать на уровне требований к обновляющейся школе;

– организация контроля с учетом мнений педагогического коллектива, выводов методических объединений преподавателей-предметников;

– согласование содержания и форм работы преподавателя непосредственно с администрацией, принимая во внимание его соображения об имеющихся трудностях и нерешенных проблемах в педагогической практике;

– безусловное сохранение за учащимся права на утверждение своего мнения и обоснование правомерности своих жизненных позиций и взглядов.

Функции школьного контроля помогают не только более детально понять сущность и специфику контроля, но и особо подчеркнуть субъектно-субъектный характер взаимоотношений преподавателя и учащихся.

Контроль исследуется в теории методики обучения математике и осуществляется на практике через большое многообразие форм и видов, которые предлагаем классифицировать следующим образом (см. табл. на с. 245).

В основу данной классификации форм контроля положен единый критерий: выделение субъектов школьного контроля. На основе данных критериев ряд ученых выделяют следующие формы контроля: преподавательский, коллективный, взаимоконтроль, самоконтроль. Виды контроля классифицируются на основе целей, времени проведения, степени охвата объекта, периодичности проведения, полноты охвата. Выделен такой вид контроля, как планируемый результат. Основанием для данного выдвижения послужили выше рассмотренные подходы к контролю (информационно-констатирующий, диагностико-обучающий, рефлексивный). Каждой форме контроля в таблице подобран определенный вид контроля. Рассматривая классификацию видов по целям, мы более четко разграничили их соответственно формам контроля. Так, при преподавательском и коллективном основными целями контроля за образовательным процессом являются: оказание оперативной помощи учащимся, подготовка к самостоятельной и контрольной работе. При взаимоконтроле цели определяются, в первую очередь, через организацию работы по оказанию своевременной помощи, повышению уровня обученности и др. Более частные цели определяются учителем на основании содержания проверки. Виды, классифицируемые по времени проведения (предварительный, текущий, итоговый), присутствуют при проведении всех форм контроля. Подобное наблюдается и при использовании видов контроля по степени охвата (общий, частичный), и по периодичности проведения (эпизодический, периодический, систематический). При рассмотрении такого вида контроля, как полнота охвата, изменения происходят при взаимоконтроле, где, как и при преподавательской и коллективной форме, присутствуют фронтальный, персональный, тематический виды, а свою необходимость теряет классно-обобщающий вид контроля.

Данный подход мы обосновываем прежде всего тем, что взаимоконтроль как форма подразумевает контроль за деятельностью учащегося, а классно-обобщающий вид направлен на деятельность учебной группы у разных преподавателей. В силу этого различимость его при взаимоконтроле теряется. Выделенный нами вид контроля по планируемым результатам (информационно-констатирующий, диагностико-обучающий, рефлексивный) присутствует в каждой форме контроля, однако следует обратить внимание, что при преподавательском и коллективном чаще всего планируется результат получения и фиксирования информации. В каждом из них присутствуют элементы диагностико-обучающего и рефлексивного вида контроля в том или ином объеме. При рассмотрении такой формы, как взаимоконтроль, в первую очередь предпочтение отдается диагностико-обучающему виду, так как учащимся удобно, работая в паре, осуществлять диагностику, оказывать помощь, обучать и т.д. Однако отдельные элементы информационно-констатирующего и рефлексивного видов контроля также могут быть частично использованы. Необходимо отметить, что в практической деятельности преподавателя могут быть использованы смешанные формы контроля.

Реализация вышеуказанных форм и видов контроля в учебно-воспитательном процессе происходит посредством методов. В предложенной классификации методы расположены по логике проведения форм контроля.

Классификация форм, видов и методов школьного контроля

Формы контроля	***Виды контроля***						***Методы контроля***
	По целям	*По степени охвата*	*По периоду проведения*	*По полноте охвата*	*По времени проведения*	*По планируемому результату*	*По логике проведения форм контроля*
Преподавательский	Оказание оперативной помощи учащимся, подготовка к с/р и к/р	Общий Частичный	Эпизодический Периодический Систематический	Фронтальный Персональный Тематический Классно – обобщающий	Предварительный Текущий Итоговый	Информационно-констатирующий; отдельные элементы диагностико-обучающего и рефлексивного	Наблюдение Анализ Анализ результатов деятельности Личный опрос Диагностические Анализ документации Беседа, деловой диалог Хронометрирование
Коллективный	Оказание оперативной помощи; проверка уровня обученности и т.д.	Общий Частичный	Эпизодический Периодический Систематический	Фронтальный Персональный Тематический Классно – обобщающий	Предварительный Текущий Итоговый	Информационно-констатирующий; отдельные элементы диагностико-обучающего и рефлексивного	Наблюдение Анализ Анализ результатов деятельности Беседа
Взаимоконтроль	Повышение уровня обученности; передача умений и навыков; оказание методической помощи	Общий Частичный	Эпизодический Периодический Систематический	Персональный Тематический	Предварительный Текущий Итоговый	Диагностико-обучающий; отдельные элементы информационно-констатирующего и рефлексивного	Деловой диалог Беседа Анализ результатов деятельности
Самоконтроль	Самооценка и самоанализ собственной деятельности; развитие способности к самосовершенствованию и саморазвитию; сопоставление достигнутых результатов с требуемыми стандартами	Общий Частичный	Систематический	Персональный	Предварительный Текущий Итоговый	Рефлексивный	Самопроверка Самоанализ Самооценка

Необходимость объединить данные категории в единую систему, представленную в таблице, вызвало то, что в исследованиях, посвященных контролю, встречаются лишь отдельные попытки авторов воедино классифицировать методы, виды и формы контроля. На практике это позволит более рационально и целенаправленно подходить к выбору и реализации их при контроле за учебно-воспитательным процессом.

Эффективная организация контроля знаний в процессе обучения математике во многом зависит от создания и реализации следующих условий:

– цели контроля должны адекватно отражать главные цели математического образования: обеспечение прочного и сознательного овладения учащимися системой математических знаний и умений, необходимых в повседневной жизни и трудовой деятельности каждому члену современного общества, достаточных для изучения смежных дисциплин и продолжения образования;

– место контроля в педагогическом процессе должно быть промежуточным между поставленной целью и достигаемыми результатами;

– механизм контроля должен предполагать активное взаимодействие субъектов педагогической деятельности;

– результаты контроля должны становиться предпосылкой мотивации к самосовершенствованию, дальнейшему изучению курса математики.

Преподавателю, осуществляющему контроль знаний в современной школе, требуется:

1) обладать высокой культурой и компетентностью, научно-теоретической и методической подготовкой, которые дают моральное право на контроль, соотносить предъявленные требования с конкретными условиями работы;

2) учитывать потенциал, уровень воспитанности, обученности и развития учащихся, своеобразия каждой творческой индивидуальности в условиях ее деятельности;

3) придать ему интеграционный характер, привлекая к проверкам представителей предметных методических объединений, лучших преподавателей;

4) рассматривать его действенность через оказание своевременной помощи тем, кто в ней нуждается, выявление и применение передового педагогического опыта через установление между субъектом и объектом отношений взаимопонимания, взаимоуважения и сотрудничества;

5) не просто контролировать состояние учебно-воспитательного процесса, а создать единую информационную систему, обеспечивающую целесообразность, объективность, гласность, планомерность, регулярность контроля и прочее;

6) устанавливать ограниченную взаимосвязь контроля с глубоким всесторонним анализом проверяемых объектов, конечной целью ставить принятие определенных педагогических решений и прогноз относительно дальнейшего развития изучаемого процесса или его компонентов, выяснить причины несоответствия и определить наиболее действенные пути и методы исправления недостатков;

7) создать комфортную вещественно-пространственную учебную среду, благоприятный психологический климат;

8) обеспечить дифференциацию через взаимозависимость уровня контроля от результатов работы всего учебного коллектива и отдельных его групп, отличающихся по уровню обученности.

Именно формирование всей гаммы требований будет способствовать выполнению на практике выделенных функций контроля. При использовании контроля любой формы и вида обязательны доказательность, конкретность и своевременность рекомендаций, соблюдение педагогического такта и прочее, что и является составными частями всей структуры выявленных требований к контролю. Контроль, существующий в настоящее время, направлен в большей степени на выявление соответствия всей системы учебно-воспитательной работы преподавателя Государственным образовательным стандартам. Для того, чтобы сделать контроль более демократично направленным, исходя из новой парадигмы образования, необходимо обеспечивать его единство с самоконтролем, который рассматривается как одна из его форм. Это позволит учащемуся не только ждать оценки со стороны, но и самому участвовать в ней, что соответствует основному закону развития личности – имманентному процессу становления человека.

Библиографический список

1. *Андреев В.И.* Педагогика творческого саморазвития. Инновационный курс. Казань: Изд-во КазГУ, 1998.
2. *Васильев Ю.В.* Педагогический контроль в школе: методология, теория, практика. М.: Педагогика, 1990.
3. *Воронов В.В.* Педагогика школы в двух словах: Конспект-пособие для студентов и преподавателей. М.: Педагогическое общество России, 1999.
4. *Полонский В.М.* Оценка знания школьников. М., 1999.
5. *Прохорова А.Н.* Повышение эффективности школьного контроля. Петрозаводск: Карельский научно-методический центр, 1994.
6. *Рогановский Г.Н.* Контроль на уроках математики. Минск, 1986.
7. *Скобелев Г.Н.* Контроль на уроках математики. Минск, 1986.
8. *Чоботарь А.В.* Демократизация школьного контроля. М.: Знание, 1991.
9. *Шамова Т.И.* Школьный контроль: вопросы теории и практика. М.: Педагогика, 1991.
10. *Шубин Н.Я.* Школьный контроль: Пособие для учителей. М.: Просвещение, 1997.

Составление учебных пособий по методическим дисциплинам в аспекте деятельностного подхода к обучению

Е.С. Петрова

Проблема составления учебных пособий по любой дисциплине требует решения следующих вопросов: обоснования необходимости создания таких пособий; выбора видов этих пособий; установления содержания каждого пособия, его структуры; выбора методов работы с обучаемыми по сообщению им новых знаний; организации решения задач, связанных с контролем учебной деятельности обучаемых; установления базы знаний, умений и навыков, с которой обучаемый начинает занятия по новому пособию; исследования возможностей реализации интегративных межпредметных связей и прикладных аспектов. Создание пособий по дисциплинам методического цикла для студентов педвуза остро необходимо уже потому, что таких пособий в достаточном количестве просто нет.

Наш гипотетический оппонент не замедлит возразить нам, ссылаясь на пособия последних лет (например, [5, 7, 11–13, 20, 21, 24]). Однако, во-первых, каждый вуз, выпускающий преподавателей средних образовательных учреждений, имеет в наше время свою неповторимую индивидуальность. Вероятно, именно поэтому уже после выхода в свет учебного пособия Г.И. Саранцева [20], выпущенного издательством "Просвещение" (т.е. издательством всероссийского масштаба), словно грибы после дождя, растут пособия, изданные отдельными не столичными педвузами.

Во-вторых, по дисциплинам методического цикла требуется в настоящее время издавать не одно отдельное учебное пособие, а целый комплект их, включающий краткое содержание лекционного курса теории и методики обучения математике (ТИМОМ), методические рекомендации по изучению курса, сборник заданий, пособия по методическим спецкурсам, тематику курсовых и дипломных работ с указанием краткого содержания каждой и библиографическим списком.

В-третьих, студенты не имеют возможности приобрести учебные пособия, изданные централизованно (имеются в виду как финансовые возможности обучаемых, так и отсутствие их информированности о выходе в свет того или иного пособия и отсутствия этих пособий в магазинах или библиотеках города).

В-четвертых, новый современный ценнейший материал по ТИМОМ, особенно касающийся технологий обучения математике, публикуется в сборниках научно-методических семинаров и конференций преподавателей педвузов и университетов, но он недоступен уже для преподавателей, не являющихся участниками этих конференций и семинаров, а для студентов – тем более. Такой материал приходится по крупицам собирать как преподавателю ТИМОМ, так и студентам из периодической печати: журналов "Математика в школе", "Педагогика", "Народное образование", газеты "Математика" и др. Но объединение и систематизация такого материала - дело, требующее неоправданно большой затраты времени.

При названных условиях представляется организационно более удобным каждому вузу издавать свои пособия нужным для этого вуза тиражом.

Методологической основой таких пособий должна стать *технология проектирования* учебника, разработанная В.М. Монаховым ([14, [15]), позволяющая создать "по любому предмету многоуровневый учебник, в котором рельефно представлены процессуальные особенности обучения с учетом методических и дидактических особенностей усвоения и формирования знаний, гарантирующий нормальную нагрузку обучаемых и комфорт преподавательской деятельности" [14. С. 161].

Чрезвычайно важна реализация *деятельностного подхода при обучении* студентов *по этим пособиям.* Имеется в виду то, что С.И. Шохор-Троцкий называл "обучением через задачи". Только там речь шла об обучении математике в результате решения учеником системы математических задач, специально подобранных автором пособия, здесь же мы будем говорить о самостоятельном решении студентами *серии методических задач* по обучению школьников математике, предлагаемых специальными учебными пособиями. Эти пособия обладают компактностью, четкостью изложения и независимостью от школьных учебников по математике разных авторов и от конъюнктуры. Они создают широкое поле самостоятельной деятельности студентов как по овладению ими теоретическими положениями ТИМОМ, так и по широкому использованию последних в школьной практике обучения математике.

Учебные пособия по методическим дисциплинам должны готовить будущих учителей математики к творческой деятельности. Это значит, что молодые педагоги-математики, выйдя из стен института, должны уметь свободно пользоваться методами научного исследования, методами эвристики, теорией укрупнения дидактических единиц, составлять системы обучающих задач по каждой теме школьного курса, разрабатывать авторские программы школьных математических кружков, факультативов, математических дисциплин в классах для углубленного изучения математики, в гуманитарных классах, классах коррекции. Они должны уметь вовремя акцентировать внимание учащихся на главном при изучении каждой темы, уметь правильно распределять время на уроке и при необходимости варьировать каждый этап урока в целях повышения его эффективности. Учитель должен уметь составлять свои дидактические материалы, конструировать средства наглядности и приборы, способствующие рационализации обучения математике. Теоретические основы подготовки будущих учителей математики к творческой деятельности разработаны С.Н. Дорофеевым [6]. Свою монографию он сопровождает обширным библиографическим списком.

Каков должен быть курс ТИМОМ по содержанию и структуре? Целесообразно ли отходить от некоторых традиций построения этого курса? Например: следует ли продолжить разделение методики обучения математике на “Общую методику” и “Частную методику”? По этим вопросам мы придерживаемся точки зрения Е.М. Вечтомова о сохранении приоритета традиций в преподавании математики. “Образование и обучение не приемлют революций, – утверждает он, – качественное обучение математике возможно только на прочном фундаменте традиций” [4. С. 10]. То же должно относиться и к преподаванию ТИМОМ. Печальный опыт пролеткультовцев показывает, к чему приводит непризнание традиций, отторжение всего, что до настоящего времени было сделано в любой области знания.

Итак, есть “Общая методика” и есть “Частная методика” преподавания математических дисциплин.

В.И. Загвязинский в книге “Теория обучения: Современная интерпретация”, рассуждая об “активных” и “пассивных” методах обучения, относит лекцию к активным методам, выявляя информационную, мотивационную, организационно-ориентационную, профессионально-воспитательную, методическую, оценочную и развивающую, наконец, просто воспитательную функцию лекции, уделяя особое внимание лекции проблемного типа. Именно на лекции излагается материал, который разбросан по разным литературным источникам, и студентам собрать его воедино просто невозможно [8. С. 144–154]. Поэтому краткое содержание лекций необходимо студентам, как нить Ариадны в лабиринте поистине необъятной ТИМОМ. И как нет конца обучения математике, так и нет конца теории и методике обучения математике. Козьма Прутков изрек: “Нельзя объять необъятное”, но это положение опровергает контрпример возможности создания учебного пособия “Краткое содержание конспектов лекций по ТИМОМ”. Сохраняя традиции, мы его составляем из трех частей: “Общая методика”, “Теория и методика обучения алгебре и началам анализа” и “Теория и методика обучения геометрии”.

Традиционность нарушается краткостью до схематичности изложения, что создает простор для самостоятельных размышлений и выводов студентов, внесения существенных дополнений на практических занятиях и при выполнении индивидуальных заданий.

Например, параграф пособия “Классификация и систематизация в обучении математике” содержит только определения этих понятий, примеры и требования, предъявляемые к систематизации и классификации. На практических занятиях студентами приводятся другие примеры, контпримеры, когда эти требования нарушаются. Но данный материал будет усвоен студентами на уровне практического применения только после того, как еще раз с несколько иных позиций он будет повторен при изучении частной методики, а затем использован в период педагогической практики для исправления ошибок учащихся.

Приведем пример. Студенты произвели классификацию четырехугольников, известных в основной школе, следующим образом.

Четырехугольники делятся на параллелограммы, трапеции и четырехугольники “произвольной формы”; параллелограммы далее подразделяются на параллелограммы “произвольной формы”, прямоугольники, ромбы; трапеции – на равнобочные и неравнобочные и т.д. При изучении темы "Четырехугольники" этот студент на практике встречается с такими "формулировками теорем": "Если диагонали параллелограмма взаимно перпендикулярны, то этот параллелограмм – ромб" и "Если диагонали четырехугольника взаимно перпендикулярны, то такой четырехугольник – ромб". Студент недоумевает(!?): первое предложение истинно, второе – ложно. Почему? Потому что было нарушено требование непрерывности, предъявляемое к классификации: "Классификация не должна пропускать никаких существующих подгрупп". Здесь при классификации четырехугольников была пропущена в неявной форме подгруппа "параллелограмм".

Можно практиковать эту ошибку иначе: нарушено одно из требований, предъявляемых к определениям понятий через род и видовое отличие: "В определении должны быть обязательно указаны *ближайший* род и видовое отличие". Учеником мысленно неправильно сформулировано определение ромба: ближайшим родовым понятием здесь будет "параллелограмм", а не "четырехугольник".

Итак, пособия по ТИМОМ должны удовлетворять требованию **преемственности**. Как реализация на практике этого требования должна быть информация об одном и том же объекте исследования: и в "общей методике", и в "частной методике", но в последней - уже с позиции изучения конкретных узловых тем школьного курса математики.

Далее: краткое содержание лекций по ТИМОМ должно выделять только основные, ведущие темы курса. Они не пересекаются между собой, и основная информация о теоретических положениях по каждой теме не должна зависеть от освещения ее в учебниках разных авторов, хотя сравнительный анализ этих учебников полезно провести, но уже на практических занятиях.

Взаимосвязь между практическими занятиями и лекционным курсом удачно показывают *практико-ориентированные учебные пособия,* методический аппарат которых включает планы лекций, содержание практических занятий, лабораторных и контрольных работ, программы зачетов и экзаменов, список рекомендуемой литературы. Первоначально в руководствах такого типа мы помещали планы лекций и содержание практических занятий изолированно друг от друга, но, как показал опыт, краткое содержание лекции по каждой теме и содержание соответствующего практического занятия целесообразно располагать рядом, чтобы показать взаимодополняемость этих форм аудиторных занятий [9].

Так, если, например, в кратком содержании лекции на тему: "Векторы на плоскости и в пространстве" записано: "...Сравнительная характеристика изложения данной темы в школьных учебниках. Координаты вектора. Алгебраические операции над векторами. Скалярное произведение векторов. Роль аппарата векторной алгебры при дальнейшем изложении школьного курса математики. Роль средств наглядности при изучении данной темы", то среди заданий на практическом занятии по этой теме предлагаются следующие.

– Продумать и изложить методику введения и закрепления одного из векторных понятий (координаты вектора, скалярное произведение векторов и т.д.).

– Рассмотреть решение какой-либо задачи по стереометрии с применением векторного метода.

– Разработать методику и подготовить материал для проведения по теме: "Векторы" а) зачета; б) контрольной работы; в) математического диктанта; г) коррекционной работы.

– Изготовить средства наглядности, необходимые для изучения темы.

Практико-ориентированные учебные пособия для студентов очного и заочного отделений ощутимо отличаются друг от друга, поскольку последнее является единственным рабочим инструментом, которым заочник пользуется в межсессионный период по данной дисциплине. Кроме того, число аудиторных часов, отведенных на изучение ТИМОМ студентам заочного отделения, гораздо меньше, чем на очном. Поэтому удобнее, когда содержание практических занятий на заочном отделении не повторяет и не дополняет лекционный курс. Это другие темы. Например, по частной методике:

Лекции	**Практические занятия**
Уравнения в основной школе и старших классах. Изучение неравенств. Функции в школе. Методика изучения тригонометрии. Элементы дифференциального и интегрального исчисления в старших классах. Логическое строение школьного курса геометрии	Изучение тождественных преобразований алгебраических выражений. Методика изучения темы: “Преобразования фигур”. Равенство фигур в основной школе. Изучение многоугольников, многогранников и тел вращений. Метод координат

Замечаем, что каждое занятие весьма объемно по числу единиц передаваемой информации и, следовательно, оно должно быть предельно компактным. В связи с необходимостью соблюдения требования *компактности* при составлении учебных пособий для студентов-заочников следует вновь обратиться к *проблеме “свертываемости передачи информации”* при изучении методического материала, о которой мы упоминали на “Колмогоровских чтениях–I” [16. С. 187]. Эта проблема по-разному решается в известных исследованиях по методике обучения математике. Так, к “свертываемости информации” ведет использование эвристических методов [3, 18, 19, 23]. Например, одним из них является проверка на частных случаях справедливости предложения, истинность которого требуется доказать, гипотезу испытать на правдоподобие. И тогда порой вместо доказательства справедливости высказанного предположения приходится его опровергать.

Реализация “свертываемости информации” четко проявляется и в теории укрупнения дидактических единиц. Примерами могут служить: обеспечение единства процессов составления и решения задач; совместное и одновременное изучение взаимосвязанных действий, операций, функций, теорем и т.п. (в частности, взаимно обратных); решение задач разными способами с выбором наиболее рационального (наиболее часто встречаются геометрический и алгебраический способы решения одной и той же задачи) и др. [26].

Итак, изложить материал компактно, передать новую информацию “в свернутой форме” мы умеем. Но как решить обратную задачу при составлении учебных пособий по ТИМОМ, особенно для заочников? Так, программа экзамена предполагает разделение каждой темы на несколько вопросов. Например, вместо вопроса “Числовые системы” предлагаются: “Натуральные числа и дроби”; “Изучение положительных и отрицательных чисел в 6 классе”; “Изучение процентов и пропорций в 5–6 классах”; “Введение понятия иррационального числа. Действительные числа. Комплексные числа в специализированных математических классах” [9. С. 23]. Студенты заочного отделения, готовясь к экзаменам, не утруждают себя полноценным решением названной проблемы. Они просто берут учебник по соответствующей школьной математической дисциплине и пересказывают его содержание. Но тогда возникает вопрос: для чего нужна дисциплина ТИМОМ (частная методика), если навыками обычного чтения учебников все студенты заочного отделения владеют в совершенстве, тем более, что это, в основном, - учителя математики?! Поэтому практико-ориентированное учебное пособие должно быть снабжено обширным библиографическим списком. Преподаватель же на лекциях, практических занятиях и консультациях рекомендует чтение названной литературы по каждому вопросу в указанном порядке, сопровождая краткую характеристику каждого источника комментариями о целесообразности ознакомления с названным материалом.

К серии пособий методического цикла относятся пособия по изучению курса “Дифференцированный подход в обучении математике”. По Г.К. Селевко, *дифференциация обучения* – это, прежде всего, создание различных условий обучения для различных школ, классов, групп с целью учета особенностей их контингента [22].

Наш курс состоит из четырех основных разделов:

1) дифференциация обучения математике как педагогическая проблема;

2) углубленное изучение математики в школе;

3) обучение математике в гуманитарных классах;

4) обучение математике в классах коррекции.

Выбор содержания этих разделов обусловлен их названием, но каждый раздел обязательно содержит *теоретические аспекты* данного *курса* и *практическую часть,* наглядно показывающую реализацию в обучении математике этих основных теоретических положений. Это ознакомление с авторскими технологиями дифференцированного обучения математике и конкретный пример разработки сообщения одной из обширных узловых тем курса математики в специализированных математических классах, в гуманитарных классах, в классах коррекции. Второй, третий и четвертый разделы начинаются с методических особенностей обучения математике в названных группах. Решаются организационно-методические вопросы. Осуществляется анализ соответствующих программ, учебников и учебных пособий [1].

В число требований, предъявляемых к преподаванию математики в специализированных математических классах, обязательно принято включать:

– строгие доказательства;

– решение задач разными способами;

– решение нестандартных задач;

– формирование стремления обучающегося к творческому саморазвитию, самообразованию, самоконтролю и прочему проявлению “самости” в учебной деятельности;

– активизация познавательной деятельности учащихся;

– использование проблемного обучения и эвристических методов.

В числе требований, предъявляемых к преподаванию математики в классах гуманитарной направленности, называют:

– изложение курса математики, в целом лишенного строгости, хотя и при наличии элементов строгих доказательств (некоторые вопросы базовой программы массовой школы исключены; многие теоремы берутся без доказательств, а формулы без вывода; иногда приводятся лишь факты, сопровождаемые примерами);

– широкое использование элементов историзма;

– реализация интеграционных связей с другими, особенно гуманитарными дисциплинами;

– объяснение происхождения математических терминов и символов;

– практические приложения изучаемых математических вопросов (особенно в искусстве, архитектуре и др.);

– использование элементов занимательности.

Вероятно, эти условия требуют некоторой коррекции.

В самом деле, где, как не в классах с математической специализацией, на исторических примерах можно показать, как делаются математические открытия? Почему "математикам" не нужно объяснение происхождения математических терминов и символов? Ведь мы неоднократно говорили о необходимости гуманитаризации математического образования не в смысле его упрощения или сокращения числа часов на математические дисциплины в средних образовательных учреждениях, а в смысле необходимости всестороннего развивающего обучения математике. Почему не нужны ученикам-"математикам" интеграционные связи с гуманитарными дисциплинами? А что касается элементов занимательности, то они всем возрастам и всем специальностям покорны.

Почему не следует акцентировать внимание будущего учителя на активизации познавательной деятельности учащихся-"гуманитариев"? Это можно сделать с помощью тех же исторических примеров или элементов занимательности (например, [17, 25]).

Приобщение учащихся гуманитарных классов к элементам математического творчества тоже возможно. Например, при изучении темы "Площади", точнее – равновеликости и равносоставленности геометрических фигур, учащиеся составляют всевозможные фигуры из некоторых простых (допустим, из двух равных прямоугольных треугольников). Недаром известной популярностью среди учащихся пользовалась в восьмидесятые-девяностые годы игра "Пифагор", доступная даже детям младшего школьного возраста. Иное дело, что для учащихся гуманитарных классов учитель должен уметь составлять соответствующую подборку задач по каждой теме математической дисциплины.

Что касается необходимости создания условий для творческого саморазвития личности в процессе преподавания любых дисциплин, – то это

– "аксиома", великолепно разъясненная В.И. Андреевым в его "Педагогике";

– учебном курсе для творческого саморазвития [2].

В целом пособия по методическим дисциплинам призваны быть не только источниками информации, но, прежде всего, руководством к действию учителя и ученика. Именно в этом реализуется деятельностный подход к обучению ТИМОМ будущих учителей математики. В противном случае данная дисциплина вообще не нужна.

Библиографический список

1. Авторские программы дисциплин, объединяемых кафедрой математики и методики ее преподавания. Саратов: Изд-во “Сигма-Плюс”, 2001.
2. *Андреев В.И.* Педагогика: Учебный курс для творческого саморазвития. Казань: Центр инновационных технологий, 2000. Изд. 2.
3. *Балк М.Б., Балк Г.Д.* Поиск решения. М.: Детская литература. 1983.
4. *Вечтомов Е.М.* Приоритет традиций в преподавании математики // Проблемы качества подготовки учителя математики и информатики: Материалы Всероссийской научно-практической конференции 3–4 декабря 2002 г. Нижний Новгород: Изд-во НГПУ, 2002. С. 10–12.
5. *Гусев В.А.* Психолого-педагогические основы обучения математике. М.: Вербум М, “Академия”, 2003.
6. *Дорофеев С.Н.* Основы подготовки будущих учителей математики к творческой деятельности: Монография. Пенза: Информационно-издательский центр Пензенского госуд. ун-та, 2002.
7. *Епишева О.Б.* Общая методика преподавания математики в средней школе: Курс лекций: Учеб. пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. ин-тов. Тобольск: Изд-во ТГПИ им. Д.И. Менделеева, 1997.

8. *Загвязинский В.И.* Теория обучения: Современная интерпретация: Учеб. пособие для студ. высш. пед. учеб. заведений. М.: Издательский центр "Академия", 2001.
9. *Кондаурова И.К., Петрова Е.С.* Методика обучения математике: Частная методика. Саратов: ЗАО "Сигма-плюс", 2001.
10. *Кондаурова И.К., Петрова Е.С.* Теория и методика обучения математике: Практико-ориентированное учебное пособие. Саратов: Научная книга, 2003.
11. *Кучугурова Н.Д.* Интенсивный курс методики преподавания математики: Учебное пособие. Ставрополь: Изд-во Ставропольского госуд. ун-та, 2001.
12. *Кучугурова Н.Д.* Сборник заданий по методике преподавания математики: Учебное пособие. Ставрополь: Изд-во Ставропольского госуд. ун-та, 2001.
13. *Манвелов С.Г.* Конструирование современного урока математики: Кн. для учителя. М.: Просвещение, 2002.
14. *Монахов В.М., Бахусова Е.В.* Новый подход к проектированию современного инструментария дидактических исследований // Труды школы-семинара по проблемам фундирования профессиональной подготовки учителя математики. Посвящается 100-летию со дня рождения академика А.Н. Колмогорова. Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2003.
15. *Монахов В.М.* Технологические основы проектирования и конструирования учебного процесса. Волгоград, 1995. С. 150–163.
16. *Петрова Е.С.* Система упражнений обучающего характера в курсе теории и методики обучения математике // Труды школы-семинара по проблемам фундирования профессиональной подготовки учителя математики. Посвящается 100-летию со дня рождения академика А.Н. Колмогорова. Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2003. С. 181–191.
17. *Позняк Т.А., Рыманова Т.Е., Саввина О.А., Симоновская Г.А.* Воспитание и развитие учащихся при обучении математике: Учебное пособие. Елец: Изд-во Елецкого госуд. ун-та им. И.А. Бунина, 2001.

18. *Пойа Д.* Математика и правдоподобные рассуждения. М.: Наука, 1975.
19. *Пойа Д.* Математическое открытие. Решение задач: основные понятия, изучение и преподавание. М.: Наука, 1970.
20. *Саранцев Г.И.* Методика обучения математике в средней школе: Учеб. пособие для студентов мат. спец. пед. вузов и ун-тов. М.: Просвещение, 2002.
21. *Саранцев Г.И.* Обучение математическим доказательствам в школе: Кн. для учителя. М.: Просвещение, 2000.
22. *Селевко Г.К.* Дифференциация учебного процесса на основе интересов детей. М.: РИПКРО, 1996.
23. *Соколов В.Н.* Педагогическая эвристика. М.: Аспект-пресс, 1995.
24. Теоретические основы обучения математике в средней школе: Учебное пособие / Т.А. Иванова, Е.Н. Перевощикова, Т.П. Григорьева, Л.И. Кузнецова; Под ред. проф. Т.А. Ивановой. Н. Новгород: Нижегородский госуд. пед. ун-т, 2003.
25. *Шуба М.Ю.* Занимательные задания в обучении математике. Кн. для учителя. М.: Просвещение, 1994.
26. *Эрдниев П.М., Эрдниев Б.П.* Укрупнение дидактических единиц в обучении математике: Кн. для учителя. М.: Просвещение, 1986.

Понятие и теория Б-равносильности уравнений в курсе элементарной математики

Э.С. Беляева, А.С. Потапов

Линия уравнений и неравенств является одной из основных логико-содержательных линий школьного курса математики.

И никогда, начиная с 50 годов XX века, эта тема не изучалась в школе так формально (на уровне рецептов), как в последние годы. Предается забвению теория при изучении алгебры, нарушается принцип сознательного усвоения основных понятий, идей и методов математики.

Анализ действующих школьных учебников показывает, что в большинстве из них практически отсутствует теория равносильности уравнений, неравенств и их систем. Выпускник школы не в состоянии обоснованно решить даже несложное уравнение, да он и не видит в этом необходимости.

В лучшем случае он ограничивается проверкой, что может “спасти”, если при решении уравнения произошло расширение области определения данного уравнения. А о какой проверке может идти речь при решении неравенств? А если при решении уравнения произошла потеря корней? Авторы пособия [5. С. 207] в этом случае категоричны: “Ясно, что при решении уравнений нельзя применять преобразования, приводящие к потере корней исходного уравнения”. Это означает, что ученик не имеет права применять, например, формулы $tg2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$, $ctg\alpha = \frac{1}{tg\alpha}$, т.к. при этом возможно сужение области определения данного уравнения.

Возникает естественный вопрос. Почему в курсе алгебры средней школы не предусмотрено формирование понятия равносильности уравнений (неравенств) и не изучается соответствующая теория равносильности? На наш взгляд, дело не только в нехватке времени, сколько в самом понятии равносильности уравнений (неравенств). Существует несколько определений равносильных уравнений. Так, С.И. Новоселов в пособии [1] рассматривает эквивалентность (равносильность) уравнений над некоторым числовым полем. Приведенные теоремы равносильности содержат столько ограничений, что затрудняется их применение, и учащимся средних школ они вряд ли доступны. В школьных учебниках наиболее распространено такое определение: “Уравнения, имеющие одни и те же корни, называются равносильными. Равносильными считаются и уравнения, каждое из которых не имеет корней” [2].

В этом определении не указывается, но мыслится, что уравнения рассматриваются над полем действительных чисел ($\mathbf{R}$).

Более перспективным является определение равносильности уравнений над некоторым множеством M [4, 5]. Но соответствующая теория равносильности тоже громоздка и страдает “рецептурностью".

Понятие равносильности уравнений тесно связано с логической равносильностью предикатов, так как уравнения можно рассматривать как предикаты, заданные на своих областях определения. Решение уравнения (неравенства) есть поиск области истинности предиката.

Определение. *Два предиката, заданные на одной и той же предметной области M, называются равносильными, если их области истинности совпадают.*

Если они определены на разных предметных областях M_1 и M_2, *то их можно сузить до множества* $M = M_1 \cap M_2$ *и ввести понятие равносильности на этом множестве.*

Известный методист П.А. Буданцев в 50-е годы XX века, учитывая связь равносильности уравнений с логической равносильностью предикатов, сумел удачно выбрать множество M, на котором рассматривается равносильность уравнений [3]. Разработанная им теория равносильности уравнений, неравенств и их систем успешно выдержала проверку многолетним преподаванием математики его соратниками и последователями.

Приведем определение равносильных уравнений, данное П.А. Буданцевым [3. С. 11].

Определение. *Два уравнения, рассматриваемые при одних и тех же допустимых значениях букв, входящих в них, называются равносильными, если они не имеют решений или имеют одни и те же решения.*

А теперь дадим определение равносильных уравнений с одним неизвестным по П.А. Буданцеву.

Определение. *Уравнение* $f_1(x) = \varphi_1(x)$ (1) *с областью определения* M_1 и $f_2(x) = \varphi_2(x)$ (2) *с областью определения* M_2 *называются равносильными на множестве* $M \subseteq M_1 \cap M_2$, *если они имеют одни и те же решения или не имеют решений на этом множестве.*

Если уравнения (1) *и* (2) *равносильны на множестве* $M = M_1 \cap M_2$, *то будем говорить просто, что они Б-равносильны:*

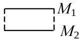
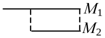
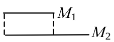
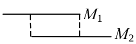
$$(f_1(x) = \varphi_1(x)) \overset{\text{Б}}{\Leftrightarrow} (f_2(x) = \varphi_2(x))\,.$$

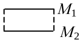
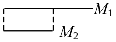
Уравнения $\sqrt{(x+1)(x-1)} = 0$ и $\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x-1} = 0$ Б-равносильны ($M = [1; +\infty)$; $x = 1$).

Эти же уравнения равносильны и на множестве $M_1 = [5; +\infty)$ (оба не имеют решений).

Легко видеть, что если уравнения Б-равносильны, то они равносильны на любом подмножестве множества M. Обратное неверно. Например, уравнение $\sqrt{x} = x - 2$ равносильно уравнению $x = (x-2)^2$ на множестве $[2;\ +\infty)$, но не равносильно на множестве $M = [0; +\infty)$ (т.е. не Б-равносильно).

Приведем теоремы равносильности уравнений, соответствующие определению равносильности уравнений по П.А. Буданцеву.

<table>
<tr>
<td colspan="2">Т.1. Пусть даны три уравнения: $f_1(x) = g_1(x)\,(1)$ с областью определения M_1; $f_2(x) = g_2(x)\,(2)$ с областью определения M_2; $f_3(x) = g_3(x)\,(3)$ с областью определения M_3. И пусть $M \subseteq M_1 \cap M_2 \cap M_3$. Тогда, если уравнение (1) равносильно уравнению (2) на множестве M, уравнение (2) равносильно уравнению (3) на множестве M, то уравнение (1) равносильно уравнению (3) на множестве M.</td>
<td>$\sqrt{2x-1} = x-2$ (1)
$2x-1 = (x-2)^2$ (2)
$x^2 - 6x + 5 = 0$ (3)
$M\ [2;\ +\infty)$
Заметим, что
$M \subset M_1 \cap M_2 \cap M_3$.</td>
</tr>
<tr>
<td rowspan="2">Т.2. Если одну или обе части данного уравнения тождественно преобразовать, то получим уравнение, Б-равносильное данному.</td>
<td>1) 
$2(x-3)+1 = 3$ (1)
$2x-5 = 3$ (2)
Б-равносильны (x =4)</td>
<td>2) 
$x = -1$ (1)
$x + \sqrt{x} - \sqrt{x} = -1$ (2)
Б-равносильны (нет решений)</td>
</tr>
<tr>
<td>3) 
$\frac{(x-1)(x-5)}{x-1} = -4$ (1)
$x-5 = -4$ (2)
Б-равносильны (решений нет)</td>
<td>4) 
$2\lg x - \lg x^2 + tg\,2x + \mathrm{ctg}x = 0$
(1)
$\frac{2tgx}{1-tg^2x} + \frac{1}{tgx} = 0$ (2)
Б-равносильны (решений нет)</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>Т.3. Если к обеим частям уравнения прибавить одно и то же математическое выражение, то получим уравнение, Б-равносильное данному.
$\left(f(x)=g(x)\right)\overset{Б}{\Leftrightarrow}\left(f(x)+\varphi(x)=f(x)+\varphi(x)\right)$</td>
<td>1) 
$x^2=4,\quad x^2+x=4+x$
Б-равносильны
$(x=2,\ x=-2)$</td>
<td>2) 
$x^2=1$ $x=1$
$x^2+\sqrt{x}=1+\sqrt{x}$
$x+\sqrt{x}=1+\sqrt{x}$
Б-равносильны $(x=1)$ Б-равносильны $(x=1)$</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">Следствие из Т.2 и Т.3. Любой член уравнения можно перенести из одной части уравнения в другую, сменив при этом его знак на противоположный.
$\left(f(x)+\varphi(x)=g(x)\right)\overset{Б}{\Leftrightarrow}\left(f(x)=g(x)-\varphi(x)\right)$.
<u>Замечание</u>. При этом область определения данного уравнения и нового совпадают.</td>
</tr>
<tr>
<td>Т.4. Уравнения $f(x)=g(x)$ (1) и $f(x)\varphi(x)=g(x)\varphi(x)$ (2), где $\varphi(x)$ не равно нулю в области определения уравнения (1), Б-равносильны.</td>
<td colspan="2">1) $\sqrt{x}=1$ и $\sqrt{x}(x+1)=x+1$ Б-равносильны $(x=1)$
2) $x=1$ и $x(x-2)=x-2$ не Б-равносильны
3) $x=2$ и $(x-2)x=2(x-2)$ Б-равносильны $(x=2)$
4) $x=-1$ и $x\sqrt{x}=-\sqrt{x}$ не Б-равносильны
5) $x=1$ и $x(x^2+1)=x^2+1$ Б-равносильны $(x=1)$</td>
</tr>
<tr>
<td>Т.5. Уравнение $f_1(x)f_2(x)\cdot\ldots\cdot f_n(x)=0$ (1) и совокупность уравнений
$\left[\begin{array}{l} f_1(x)=0,\\ f_2(x)=0,\\ \quad\ldots\\ f_n(x)=0\end{array}\right.$ (2) Б-равносильны.
<u>Замечание</u>. Областью определения совокупности уравнений будем считать множество, являющееся пересечением областей определения всех уравнений совокупности.</td>
<td colspan="2">1) $(x+2)(x+1)(2x-1)=0$ Б-равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l} x+2=0,\\ x+1=0,\\ 2x-1=0.\end{array}\right.$
$\left(x=-2,\ x=-1,\ x=\dfrac{1}{2}\right)$.
$(x-2)(1-x)\dfrac{1}{x^2-4}=0$ Б-равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l} x-2=0,\\ 1-x=0,\quad (x=1)\\ \dfrac{1}{x^2-4}=0\end{array}\right.$</td>
</tr>
</table>

Т.6(а). Уравнения $f(x)=g(x)$ (1) и (2) $f^{2n+1}(x)=g^{2n+1}(x)$, где $n\in N$, Б-равносильны.	$2x-1=x-2$ Б-равносильно уравнению $(2x-1)^3=(x-2)^3$ $(x=-1)$
Т.6(б). Уравнение $f(x)=g(x)$ (1) равносильно уравнению (2) $f^{2n}(x)=g^{2n}(x)$, где $n\in N$, на множестве решений неравенства $f(x)g(x)\ge 0$. Следствие. Уравнение $\sqrt[2n]{f(x)}=g(x)$ Б-равносильно системе $\begin{cases} f(x)=g^{2n}(x),\\ g(x)\ge 0.\end{cases}$	Уравнения $2x-1=x-2$ и $(2x-1)^2=(x-2)^2$ равносильны на множестве $\left(-\infty;\ \frac{1}{2}\right]\cup[2;\ +\infty)$, являющемся множеством решений неравенства $(2x-1)(x-2)\ge 0$.
Т.6(в). Уравнение $f^n(x)=g^n(x)$, где $n\in N$, является следствием уравнения $f(x)=g(x)$.	Уравнение $2x-1=(x-2)^2$ содержит все корни уравнения $\sqrt{2x-1}=x-2$
Т.7. Уравнение $a^{f(x)}=a^{g(x)}$, где $a>0,\ a\ne 1$, Б-равносильно уравнению $f(x)=g(x)$	$3^{x-2}=3^{x^2-4}$ и $x-2=x^2-4$ Б-равносильны $(x=2,\ x=-1)$.
Т.8. Уравнение $\log_a f(x)=\log_a g(x)$, где $a>0,\ a\ne 1$, Б-равносильно уравнению $f(x)=g(x)$. Следствие 1. Уравнение $\log_a f(x)=\log_a g(x)$, где $a>0,\ a\ne 1$, Б-равносильно каждой из систем $\begin{cases} f(x)=g(x),\\ f(x)>0\end{cases}$ и $\begin{cases} f(x)=g(x),\\ g(x)>0.\end{cases}$. Следствие 2. Уравнение $\log_a f(x)=b$, где $a>0,\ a\ne 1$. Б-равносильно уравнению $f(x)=a^b$.	1) $2x-1=x+1$ и $\log_2(2x-1)=\log_2(x+1)$ Б-равносильны ($x=2$). 2) $2x-1=x-2$ и $\lg(2x-1)=\lg(x-2)$ Б-равносильны (не имеют корней) 3) $x^2-6=-x$ и $\lg(x^2-6)=\lg(-x)$ Б-равносильны ($x=-3$) 4) $x^2=6-x$ и $\lg(x^2)=\lg(6-x)$ Б-равносильны ($x=-3,\ x=2$)

Мы видим, что теоремы почти не содержат ограничений и, как показала практика, очень удобны в применении.

В течение полутора лет (2000–2001 г.) под научным руководством Э.С. Беляевой при ВОИПКРО работали проблемные курсы по теме “Равносильность в курсе математики средней школы”, посвященные памяти П.А. Буданцева. Была изучена научно-методическая литература по проблеме исследования, начиная с 30-х годов XX в., в том числе методическое наследие П.А. Буданцева. В работе семинара принимали участие творчески работающие учителя всех видов школ г.Воронежа и Воронежской области, а также методисты ВГПУ (более 50 человек).

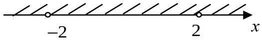
Мы пришли к единому мнению о целесообразности изучения в школе теории равносильности уравнений, неравенств и их систем по П.А. Буданцеву. Приведем примеры решения некоторых уравнений.

При оформлении решения справа от уравнения будем изображать множество, на котором оно рассматривается. Это полезно при первоначальном обосновании решения каждого из новых видов уравнений.

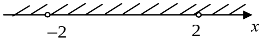
1. Решите уравнение $\frac{1}{x-2} = \frac{4}{x^2-4}$.

Решение.

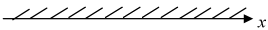
(1) $\dfrac{1}{x-2}=\dfrac{4}{x^2-4}$



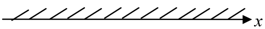
(2) $\dfrac{x^2-4}{x-2}=\dfrac{4(x^2-4)}{x^2-4}$ (т.4)



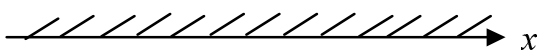
(3) $x+2=4$ (т.2)



(4) $x=4-2$ (сл.т.2; 3)



(5) $x=2$ (т.2)



(1) $\overset{Б}{\Leftrightarrow}$ (5) (по т.1) $2 \notin M_1$.

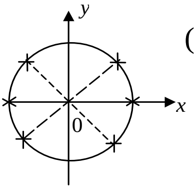
Ответ: решений нет.

2. Решите уравнение $tg2x + ctgx = 0$.

Решение.

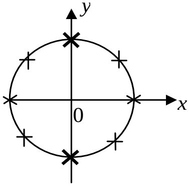
При решении уравнения используется другая модель множества действительных чисел – единичная окружность.

1) $tg2x + ctgx = 0$



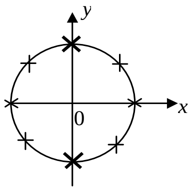
(M_1)

2) $\dfrac{2tgx}{1-tg^2x} + \dfrac{1}{tgx} = 0$ (т.2)



(M_2)

3) $\dfrac{tg^2x+1}{(1-tg^2x)tgx} = 0$ (т.2)



(M_2)

Мы видим, что уравнение (3) Б-равносильно уравнению (1) (т. 1) на множестве M_2. Они оба на множестве M_2 корней не имеют.

Остается проверить $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$, подставив в исходное уравнение.

Ответ: $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

3. Решите уравнение $\sqrt{4x-1} - \sqrt{x-2} = 3$.

Решение.

$$\sqrt{4x-1}-\sqrt{x-2}=3$$

$$\sqrt{4x-1}=3+\sqrt{x-2} \text{ (сл.т. 2; 3)}$$

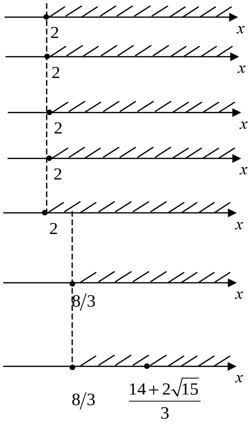
$$4x-1=9+6\sqrt{x-2}+x-2 \text{ (т. 6б)}$$

$$6\sqrt{x-2}=4x-x-1-9+2 \text{ (сл.т. 2; 3)}$$

$$6\sqrt{x-2}=3x-8 \text{ (т. 2)}$$

$$\begin{cases} x \ge \dfrac{8}{3}, \\ 36(x-2)=9x^2-48x+64. \end{cases} \text{ (т. 6б)}$$

$$\begin{cases} x \ge \dfrac{8}{3}, \\ 9x^2-84x+136=0. \end{cases} \text{ (т.2, сл.т.2; 3)}$$



$$\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{14-2\sqrt{15}}{3}, \\ x=\dfrac{14+2\sqrt{15}}{3}. \end{array}\right.$$

Ответ: $\dfrac{14+2\sqrt{15}}{3}$.

4. Решите уравнение $\log_4(x+12)\cdot\log_x 2=1$.

Решение.

$$\log_4(x+12)\cdot\log_x 2=1$$

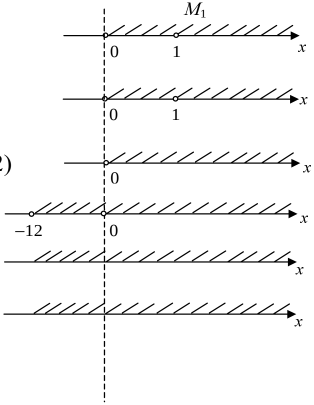
$$\frac{\log_2(x+12)}{2}\cdot\frac{1}{\log_2 x}=1 \text{ (т.2)}$$

$$\log_2(x+12)=2\log_2 x \text{ (т.4, т.2)}$$

$$\log_2(x+12)=\log_2 x^2 \text{ (т.2)}$$

$$x+12=x^2 \text{ (т.8)}$$

$$x^2-x-12=0 \text{ (сл.т.2; 3)}$$



$$\left[\begin{array}{l} x=-3, \\ x=4. \end{array}\right. \quad -3\notin M_1,\ 4\in M_1.$$

Ответ: 4.

Библиографический список

1. *Новоселов С.И.* Специальный курс элементарной алгебры. Учебник для педагогических вузов. М.: Высшая школа, 1965.
2. *Гусев В.А., Мордкович А.Г.* Математика. Справочные материалы. М.: Просвещение, 1988.
3. *Буданцев П.А., Щипакин Г.М.* Квадратные и иррациональные уравнения. М.: Учпедгиз, 1956.
4. *Болтянский В.Г., Сидоров Ю.В., Шабунин М.И.* Лекции и задачи по элементарной математике. М.: Наука, 1974.
5. *Никольский С.М., Потапов К.М., Решетников Н.Н., Шевкин А.В.* Алгебра и начала анализа. Учебник для 11 класса общеобразовательных учреждений. М.: Просвещение, 2003.
6. *Беляева Э.С., Потапов А.С.* Логическая равносильность и равносильность уравнений // Тезисы международной научной конференции "Нелинейный анализ и функционально-дифференциальные уравнения". Воронеж, 2000.

Обучение студентов работе с первоисточниками

Н.М. Епифанова

Образование опирается на фундамент культуры в самом широком смысле этого слова. И от того, насколько глубоко, основательно заложен данный фундамент, зависят размеры и прочность здания, которое можно на нем построить.

То, что в обиходе известно под не вполне строгим названием "общая культура", выступает при этом как естественная предпосылка систематического, институционально организованного обучения. Однако на характер "общей культуры" влияют и не связанные прямо с образованием факторы социальной жизни, разнообразные информационно-коммуникативные взаимодействия. При этом особой проблемой становится совмещение духовных интересов индивида с процессом освоения систематически организованных знаний.

“Взаимная интерференция таких процессов, как переход к рыночной экономике, реконструкция политической системы, “компьютерная революция ” и интеграция России в глобальную информационную инфраструктуру, создала новую культурно-историческую ситуацию, которая порождает неизвестные ранее культурные практики, интеллектуальные и эмоциональные потребности, ценностные ориентации” [2].

Что же происходит в ходе этих процессов с “культурным базисом” образования, культурной компетентностью учащейся молодежи?

Лабораторией социологических исследований было в 2000–2002 годах проведено диагностическое исследования культурных ориентаций и культурной практики студентов московских вузов.

В отчете лаборатории отмечались следующие отрадные и негативные факты [1].

1. 70% респондентов считают, что высшее образование должно обеспечивать не только чисто профессиональную подготовку и так называемые “современные” знания (иностранный язык, владеть компьютером, запас практических сведений в области экономики и т.п.), но и достаточно широкий кругозор, понимание того, что происходит в обществе.

2. Основными источниками информации для студентов являются средства массовой информации, компьютер, книги, периодическая печать.

3. 50–60% респондентов в анкетах отмечают, что помимо учебной и специальной литературы читают постоянно художественную литературу, а $\frac{1}{3}$ из них – урывками.

4. Падает интенсивность чтения: 17% респондентов в течение 3 месяцев прочитали 2–3 книги, а 70% – одну и менее книг.

5. Молодежь утрачивает вкус к “медленному” чтению и способность проникать в “диалектику души”, которые были отличительной чертой читателей предыдущих поколений. “Нарастает весьма негативная тенденция воспринимать литературу только как информацию” [1].

6. Знания истории отечественной науки у студентов явно недостаточны...

7. Падают языковая компетенция студентов и уровень их грамотности. (Многие студенты не в состоянии осуществлять смысловое структурирование текстов с большим количеством абстрактных понятий.) В речи студенческой молодежи выпадают целые семантические пласты, связанные с вероятностным мышлением; стиль коммуникаций становится однообразным; оценка – "черно-белой"; описание человеческих мотивов и действий сводится к простейшим глагольным конструкциям. Редко какой студент пишет без ошибок.

8. Идет замещение "культуры размышления" "культурой картинок"; наблюдается падение восприимчивости к специфическим качествам словесной выразительности и к слову как таковому.

Могут ли десять занятий по методике преподавания математики (МПМ) изменить данную ситуацию?

Одна из задач курса МПМ в педагогическом университете связана с формированием у студентов практических умений и навыков, составляющих основу технологии учительского труда, в том числе и навыков работы с методической и учебной литературой, с периодическими изданиями.

Данные практические умения приобретаются в результате самостоятельной работы студентов, выполняемой как при подготовке к семинарским, практическим и лабораторным занятиям по МПМ, так и в процессе активной деятельности каждого студента на занятиях.

Для организации управления самостоятельной работой студентов на кафедре разработаны методические указания к каждому занятию, включающие список литературы, цели, темы общих, групповых и индивидуальных заданий. Все предлагаемые общие задания выполняются студентами письменно.

Полученное в результате их выполнения рукописное пособие служит не только средством для подготовки студентов к курсовым и государственным экзаменам, но и основой методического комплекса начинающего учителя.

На первом, вводном занятии преподаватели кафедры довольно подробно знакомят студентов с теоретико-методической базой учителя математики, с основными видами учебно-методической литературы, используемой учителем для организации процесса обучения учащихся математике, со спецификой составления библиографических обзоров, методикой подготовки к занятиям.

На втором занятии преподаватели подробно знакомят студентов с целями и планом проведения следующего занятия – “Виды средств обучения”; обращают внимание на особенности подготовки и оформления общего и индивидуальных заданий (где можно познакомиться с литературой к занятию, какой материал и в какой форме должен быть подготовлен отвечающим, как должен быть составлен план будущего ответа, как отвечающему добиться выразительности в ознакомлении членов группы со своим индивидуальным заданием, как грамотно сделать ссылки на работы известных методистов, психологов, педагогов).

Студенты предупреждаются о том, что каждое их выступление на занятии должно заканчиваться кратким обзором публикаций журнала “Математика в школе” и газеты “Математика” по рассматриваемой проблеме за последние 5 лет.

Внимание студентов обращается и на такой факт, что выполнение некоторых заданий требует обращения к методической литературе XIX и начала XX века. Например, при подготовке ответа на вопрос “Различные виды раздаточного материала” желательно обратиться к

– материалам альманаха “Педагогический вестник московского учебного округа” № 4, 5, 8 за 1915 год (в частности, к статье сельской учительницы С. Чубуковой “Картофель как пособие для изучения дробей”);

– брошюре И. Пастухова “Опыт организации внеклассной работы в Ярославском 2-ом высшем начальном училище”, где приведен перечень из 287 наглядных пособий по трем разделам геометрии (планиметрии, стереометрии и практическому землемерению), изготовленных учащимися ярославских училищ в 1915 году;

– статье директора народных училищ Ярославской губернии

Н.Н. Духовницкого “Работы учащихся на выставке Ярославского Педагогического музея” и к изданному Педагогическим музеем “Альбому выставки работ учащихся высших начальных училищ Ярославской губернии за 1915 год”.

Проводимое на занятиях преподавателями кафедры обучение студентов работе с первоисточниками:

– способствует более серьезной и вдумчивой работе с различными видами методической литературы;

– развивает интерес к рассматриваемой на занятии проблеме;

– позволяет ознакомить студентов с опытом работы учителей предыдущих поколений;

– позволяет проследить основные этапы изучения исследователями той или иной методической проблемы;

– способствует овладению студентами некоторыми элементами лекционного метода.

Опыт работы с методической литературой, приобретенный на занятиях по методике преподавания математики, позволяет студентам хорошо подготовиться к семинарским занятиям. Например, на семинарском занятии по теме “Роль задач в обучении математике”

1) студенты не только приняли живое участие в обсуждении статьи учителя Ф. Ершова «“Русский базар” как одна из форм занятий на уроках арифметики» (журнал “Свободное воспитание”, 1911 г., № 6), но и, используя методику, предложенную автором, охотно составляли “задачи-карточки на куплю-продажу”;

2) выполняя к данному занятию методический анализ предложенного преподавателем учебного пособия, многие студенты придерживались плана, данного И. Александровым (автором многих известных школьных задачников прошлых лет), анализировавшим книгу Ю.П. Цельмса “Методы решения всех типов алгебраических задач. Руководство для учеников старших классов средних учебных заведений, репетиторов, экстернов и лиц, готовящихся к дополнительным и курсовым экзаменам. Подробный анализ, решения и объяснения, с кратким изложением теории алгебры в начале

каждого отдела" (альманах "Педагогический вестник московского учебного округа", 1915 г., № 4);

3) студенты приняли активное участие в обсуждении вопроса об оптимальной форме написания учителем конспектов уроков математики, наиболее полно отражающей требования к современному уроку (цели, содержание, методы, формы и средства обучения). Ими были проанализированы конспекты как ведущих учителей России (А. Окунева, Р. Хазанкина, Ф. Шаталова...), Ярославской области (И. Чуя, Л. Груздевой...), так и учителей прошлых лет (статья "Примерный урок по арифметике во II отделении начальной школы" (Педагогический вестник , 1914 г., № 7)).

В современных методических исследованиях, связанных с разработкой новых подходов к обучению, ориентированных на развитие личности учащегося (студента, ученика), обращается внимание на необходимость учета всех факторов, влияющих на процесс обучения и на использование всех имеющихся возможностей для повышения уровня усвоения субъектом изучаемого материала.

Опыт работы кафедры ТМОМ (теории и методики обучения математики) свидетельствует о том, что обучение студентов методике работы с первоисточниками позволяет снивелировать ряд выявленных Лабораторией социологических исследований [1] негативных факторов, имеющих место в подготовке студентов, и способствует:

– более качественному усвоению ими изучаемого предмета;

– расширению кругозора студентов;

– повышению их "культуры размышления";

– восприимчивости "к специфическим качествам словарной выразительности и, может быть, к логосу как таковому" [2].

Библиографический список

1. *Андреев А.Л.* Российский студент в пространстве культуры // Москва. 2004. № 3.
2. *Лихачев Д.С.* Раздумье о России. СПб.: Логос, 1999.

О понятии угла в курсах математики и географии базовой школы

Н.В. Малиновская

Одним из основных компонентов межпредметных связей (МПС) являются теоретические знания, общие для различных учебных дисциплин. К ним относятся понятия, законы, теории. Координация изучения учебных дисциплин на основе МПС должна обеспечить такое расположение учебных предметов в учебном плане, при котором достигалось бы непрерывное развитие теоретических знаний, интеллектуальных умений и навыков.

Рассмотрим более подробно МПС курсов математики и географии. Объектом нашего внимания будут общие для рассматриваемых дисциплин *понятия угла и его градусной меры.*

Изучение в курсе математики 5–6 классов систематических геометрических сведений является важным, но, к сожалению, чаще всего не выполняемым условием. Понятия угла, его градусной меры и ее свойств изучаются в 5-м классе и практически не рассматриваются до 7-го класса, лишь в 6-м классе они слегка затрагиваются при изучении круговых диаграмм. Тем не менее, эти понятия широко используются на уроках географии при изучении плана и карты, а именно:

- при введении понятий сторон горизонта и азимута;
- при изучении градусной сетки;
- при работе с измерительными приборами: астролябией, компасом, эклиметром.

Например, для введения понятий (основных и промежуточных) сторон горизонта производится деление на несколько частей полного угла. Далее учащиеся знакомятся с компасом, эклиметром и астролябией, при работе с которыми требуется знание градусной меры угла и умение оперировать с ней. Чрезвычайно полезными могут быть в данном случае следующие несложные задачи.

Задача 1. Угол в m° разделили на n равных углов. Какова градусная мера каждого из полученных углов?

Задача 2. Угол разделили на два угла в a градусов и e градусов. Какова градусная мера исходного угла?

При условии решения этих задач в 5-м классе учащиеся уже на первом году изучения географии смогут сами вычислить разницу в градусах между любыми двумя изучаемыми направлениями, а также величину одного румба, что позволит достаточно точно решить задачу определения направления на тот или иной объект. Или, к примеру, определив, на какой угол поворачивается Земля за 1 час, учащиеся смогут сделать вывод о корректировке направления, в котором путнику следует возвращаться с прогулки, чтобы оказаться в исходном пункте. Используются рассматриваемые понятия и при изучении азимута, причем здесь также желательно, чтобы учащимся из уроков математики 5-го класса уже была знакома $1/60$-я часть градуса – минута.

Особо следует упомянуть об изучении градусной сетки. На уроках географии в 6 классе вводится понятие координат: широты и долготы. Ребята узнают о существовании параллелей и меридианов. Но ведь учащиеся пока имеют весьма слабое представление о том, что такое окружность и ее центр, дуга окружности, длина окружности и дуги и, тем более, шар. Учителю географии приходится наспех вводить эти понятия, в результате чего достигается крайне слабое понимание материала. А ведь выход из ситуации есть! Достаточно в органической связи с понятием угла в 5-м классе ввести указанные выше понятия, рассказать о сечениях шара, и тогда учитель географии сможет не бояться того, что дети не поймут материала из-за недостатка математических знаний. Ему также может помочь глобус, разделенный на две равные части, на внутренней стороне одной из которых, имеющей форму круга, был бы отмечен центр Земли и лучи, делящие данный полный угол на 360° (рис. 1). А чтобы объяснить, что же такое параллель и широта, можно будет просто перевернуть половинку глобуса так, чтобы сечение было параллельно полу.

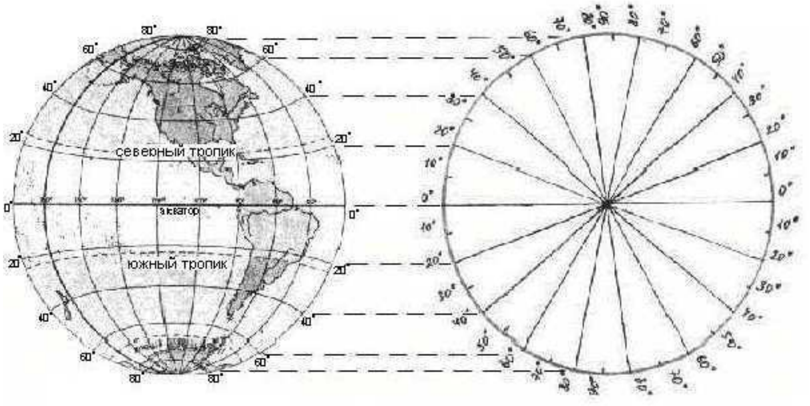


Рис. 1

Понятие угла применяется и при выполнении работ на местности, в частности, при измерении крутизны склона. При построении плана местности учащиеся, зная абсолютную высоту подошвы холма, изображают на плане холм с помощью горизонталей. Данные для выполнения построений получают с помощью эклиметра (рис. 2).

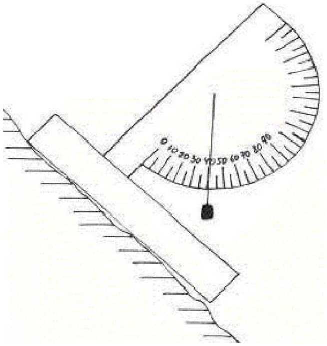


Рис. 2

Понятие угла также является необходимым при изучении темы “Атмосфера”, в процессе которого учащиеся знакомятся с понятием угла наклона солнечных лучей, необходимым им для понимания факторов, определяющих климат и температуру воздуха и земли в разное время суток и года.

С началом изучения в 7 классе курса геометрии и усложнением географического материала понятия угла и его градусной меры применяются на уроках географии все чаще. Рассмотрим некоторые темы курса географии основной школы, неразрывно связанные с указанными понятиями. Отметим, что далеко не все приведенные задачи могут быть решены на уроках географии. Здесь особенно важна четкая координация деятельности учителей рассматриваемых дисциплин, направленная, в частности, на своевременное пополнение математических знаний и умений школьников для полноценного усвоения географического материала.

1. Измерения и построения на местности

Определение размеров объектов, недоступных для непосредственного изучения.

Задача 1. Обоснуйте способ измерения больших расстояний на поверхности Земли под названием “триангуляция”: фиксируются две точки A и B, расстояние между которыми известно (рис. 3); затем фиксируется точка C, расстояние до которой из точки A или B надо найти. Измеряются углы CAB и CBA и находится неизвестное расстояние.

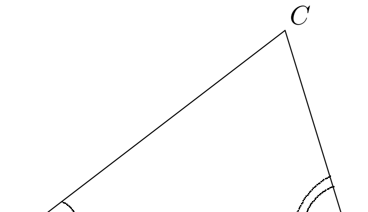


Рис. 3

Решение.

Пусть требуется найти BC.

1. $\angle C = 180^\circ - (\angle A + \angle B)$ (по теореме о сумме углов треугольника).

2. По теореме синусов:

$BC : \sin\angle A = AB : \sin\angle C$, отсюда $BC = (AB \cdot \sin\angle A) : \sin\angle C$.

Данную задачу представляется целесообразным предложить ребятам на уроке геометрии в 9 классе при закреплении пройденного по теме “Теорема синусов”, т.к. решение задачи не вызовет затруднений, в то же время сможет быть повышена мотивация учения за счет демонстрации прикладного значения изучаемого материала.

Задача № 2 (задача Потенота). Докажите справедливость метода А.П. Болотова для решения задачи Потенота. Он состоит в следующем. Для определения точки стояния по трем ориентирам на местности и карте на листе кальки прочерчивают из любой точки три луча в направлении заданных ориентиров. Полученные лучи совмещают с соответствующими на карте путем накладывания кальки на карту и определяют точку стояния.

Обоснование данного метода основывается на сведениях о геометрическом месте точек, из каждой из которых данный отрезок виден под данным углом (курс геометрии, 8 класс). Решение задачи представляет собой целое маленькое исследование, поэтому ознакомление с методом Потенота и его обоснованием наиболее целесообразно осуществлять на факультативных занятиях по математике или же при углубленном изучении геометрии. Вполне возможно также предложить решение задачи в рамках метода проектов в качестве домашнего задания с последующим ознакомлением класса с результатами исследования.

2. Климат

Задача 1. Определить угол наклона солнечных лучей к горизонту в дни солнцестояний в вашей местности.

Данная задача может быть предложена ребятам уже в восьмом классе на факультативном занятии по математике или географии. Разумеется, при изучении климата в 7 классе учитель сообщает детям необходимые данные об угле наклона солнечных лучей, но представляется полезным разобрать способ получения этих сведений. Решение задачи довольно простое и потребует от учащихся применения знаний, почерпнутых на уроках геометрии при изучении темы "Окружность".

Следующая задача подразумевает применение изложенной выше идеи базиса. Нам кажется наиболее рациональным предложить ее ребятам на уроке геометрии в 8 классе при изучении темы "Синус, косинус и тангенс острого угла прямоугольного треугольника". Разумеется, если ребята не знакомы с идеей базиса, эта задача сможет послужить великолепным примером ее применения.

Задача 2. Придумайте способ нахождения высоты нижней границы облаков.

Решение видно на рис. 4 (измерению подлежит угол CAB, длина отрезка AB известна). На основе этой идеи строится и способ измерения высоты объекта, если доступно только его основание.

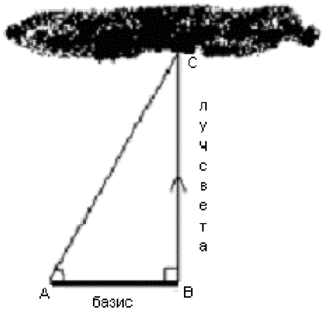


Рис. 4

Задание, предложенное ниже, состоит из двух частей. Представляется наиболее целесообразным первую часть учителю географии рассмотреть вместе с ребятами, а вторую предложить для самостоятельного выполнения в классе или дома. Ценность задания видится прежде всего в демонстрации применения математических знаний для объяснения явлений природы.

Задача 3 (мини-исследование). *Часть 1.* Поток солнечной радиации при переходе через толщу (“массу”) атмосферы постепенно ослабевает вследствие процессов поглощения и рассеяния энергии в атмосфере. Толщина атмосферного слоя, проходимого лучами, зависит от высоты Солнца над горизонтом. *Найдем формулу, выражающую эту зависимость.* Следует отметить, что эта формула рассчитана на нормальное атмосферное давление и является приближенной.

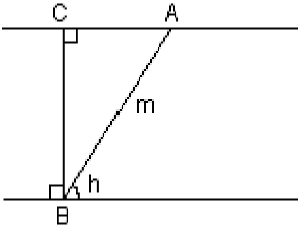


Рис. 5

На рис. 5 отрезок CB изображает вертикальный столб атмосферы с основанием площадью 1 см^2, “масса” которого условно принимается за 1 ($m = 1$). Отрезок AB изображает толщу атмосферы массы m, которую проходят лучи; h – угол падения солнечных лучей. Из треугольника ABC $\sin h = BC/AB$.

Итак, $m = 1/\sin h$.

Часть 2. На основе полученной формулы заполните таблицу:

h	90°	80°	70°	60°	50°	40°	30°	20°	10°	5°	0°
m											

Постройте на основе этой таблицы график.

Используя полученную информацию, сделайте *вывод о причинах сезонного изменения состояния природы в различных районах земного шара и о причинах изменения климата* при движении от полюсов к экватору.

3. Литосфера

Движение литосферных плит.

Как известно, литосферные плиты передвигаются относительно более глубоких недр Земли. Там, где они сходятся, одна из них (тяжелая океаническая плита) пододвигается под другую и наклонно уходит на глубину. На глубине около 200 км размягченные за счет повышенной температуры породы коры испускают флюиды, которые, поднимаясь к поверхности Земли, образуют очаги магмы. Над этими очагами наблюдается активная вулканическая деятельность.

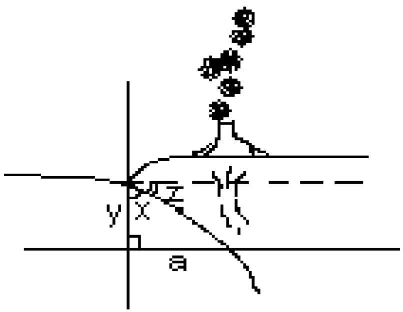


Рис. 6

Задача. На Камчатке угол наклона плиты составляет в среднем 45°, в районе Новых Гебрид – 63°, в зоне Центральных Анд – 34°. Определите приблизительное расстояние от глубоководного желоба до зоны вулканической деятельности в этих районах. Проверьте результаты по карте.

При решении задачи целесообразно использовать тригонометрические сведения. Угол x на чертеже (рис. 6) находится вычитанием из 90° угла наклона плиты z (т.к. рассматривается угол наклона плиты к горизонтальной прямой – касательной к поверхности земли). Расстояние a от желоба до зоны вулканической деятельности находится по формуле $a = y \operatorname{tg} x$.

Представляется целесообразным провести на уроке или на факультативе по математике в 8 классе практическую работу для демонстрации прикладного значения тригонометрии. Последняя из приведенных выше задач в данном случае представляет особую ценность, т.к. дает возможность непосредственного проведения измерений и проверки верности полученных результатов.

Науки математика и география находятся в тесном сотрудничестве, и это явление должно быть максимально полно отражено в учебном процессе, разумеется, с адаптацией к условиям и возможностям школы.

Библиографический список

1. География материков и океанов: Учеб. для 7 кл. общеобразоват. учреждений / В.А. Коринская, И.В. Душина, В.А. Щенев. 6-е изд. М.: Просвещение, 1998. 287 с.
2. *Герасимова Т.П. и др.* Физическая география: Нач. курс: Учеб. для 6 кл. общеобразоват. учреждений. 8-е изд. М.: Просвещение, 1999. 192 с.
3. *Зикрин О.З.* Связь преподавания математики с географией в средней школе. Павлодар, 1965. 246 с.
4. *Максимова В.Н.* Межпредметные связи в учебно-воспитательном процессе современной школы. М.: Просвещение, 1987. 160 с.
5. Соросовский образовательный журнал. 1999. № 9 (46).

Электронная энциклопедия “Информатика”. Проектирование и методические границы использования

О.Б. Грачев

Многие ученые, как в нашей стране, так и за рубежом, исследуют проблему проектирования. Развитию теории проектирования педагогических объектов и систем посвящены работы Э.Н. Гусинского, Е.С. Заир-Бека, Г.Л. Ильина, И.А. Колесниковой, В.Ф. Любичевой, В.М. Монахова, А.И. Нижникова, О.Г. Прикота, В.Е. Радионова, Т.К. Смыковской, Н.Н. Суртаевой, В. Штейнберга и других ученых. Можно констатировать, что педагогическое проектирование как научно-педагогическая область находится в процессе своего становления, обобщения эмпирических фактов и результатов исследований.

Для разработки новой модели проектировочной деятельности учителя было использовано три различных подхода. Первый этап заключается в том, что были просуммированы наиболее полные модели проектировочной деятельности из составленного ранее поля моделей. Второй этап – в попарном суммировании взаимодополняющих друг друга концепций с последующим суммированием результатов. Третий этап – в заполнении матрицы, предложенной В.М. Монаховым [1].

Данный подход к разработке первичной модели проектировочной деятельности учителя (на первом этапе) нашел отражение в следующей логике:

1 этап – **инициирующий** – диагностика текущего состояния объекта, анализ научных исследований по заданной проблеме, ресурсное обеспечение проектировщиков;

2 этап – **основополагающий** – уяснение цели проектирования, прогнозирование вариантов достижения цели, установление границ проектировочной деятельности, концептуализация проектного педагогического замысла, оформление целостной программы проектирования, планирование, определение процедур текущего контроля;

3 этап – **прагматический** – определение путей реализации проекта, апробация проекта;

4 этап – **заключительный** – самооценка полученного проекта и качественных результатов его апробации, независимая экспертная оценка эффективности проекта педагогического объекта, критическая рефлексия возникших трудностей, перепроектировка, коррекция, оптимизация проекта.

На основании моделей проектировочной деятельности и в результате их переработки нами была получена собственная модель проектирования:

I. Инициирующий:

1) осознание потребности в преобразованиях;

2) принятие решения о необходимости проектирования новой системы;

3) анализ ситуации, выявление противоречий, определение проблем для решения, диагностика проблем.

II. Основополагающий:

1) уяснение цели;

2) профессионально-деятельностное понимание заказа;

3) определение концепции образовательной деятельности, развития образовательного учреждения, концепции эксперимента;

4) анализ, диагностика и оценка текущего состояния объекта проектирования, выявление в нем имеющихся недостатков, противоречий;

5) дивергенция – расширение границ проектной ситуации с целью обеспечить достаточное пространство для поиска решения;

6) формулировка идей, создание эскиза проекта, выдвижение гипотез – прогнозирование, формулировка концепции проекта.

III. Прагматический:

1) проектирование системы контроля деятельности;

2) составление перечня заранее известных или вероятных проблем и подпроблем;

3) определение логических связей между элементами созданного таким образом поля видения и постепенное уточнение совокупности величин, характеризующих удовлетворение потребности проектирования;

4) оформление целостной программы проектирования;

5) создание рабочих проектных групп, налаживание коммуникации; обучение и инструктирование проектировщиков;

6) ресурсное обеспечение проектных групп;

7) определение путей реализации проекта;

8) фиксация возникших затруднений;

9) создание целостного проекта новой системы, его редактирование и оформление.

IV. Заключительный:

1) самооценка полученного проекта;

2) независимая экспертиза проекта системы;

3) корректировка программы (проекта) по результатам критической рефлексии;

4) апробация проекта;

5) доработка проекта системы и принятие решения о его освоении.

В рамках полученной проектировочной схемы был создан проект электронной энциклопедии “Информатика”.

Дальнейшее рассмотрение проекта мы поведем по этапам, представленным выше.

Этап I. Инициирующий

Необходимость создания электронной энциклопедии возникла в связи с открытием новой для педагогического колледжа № 6 (г. Москва) специальности “Учитель информатики”. Проблема заключалась в отсутствии учебных программ, методических пособий, учебников и прочих учебных материалов, необходимых для качественных занятий. Кроме того, никто из преподавателей не представлял себе, как учить будущих учителей. В наличии имелся лишь ГОС.

Этап II. Основополагающий

За основу мы взяли ГОС и материалы для подготовки студентов вузов по аналогичным специальностям, решив сократить, где это необходимо, и дополнить с учетом специфики учебного заведения эти материалы. Однако при проведении предварительного анализа работы оказалось, что в установленные сроки решить поставленную задачу, пользуясь традиционными методами проектировочной деятельности, не представляется возможным.

Тогда мы обратились к идее *электронной энциклопедии*. Даже еще не электронной. Мы решили отобрать необходимые понятия, через которые будут “проходить” студенты при изучении того или иного курса, и построить древо понятий, вытекающих одно из другого. При этом мы руководствовались следующими принципами:

1. **Рабочее поле определений терминов (статей)** ограничено Стандартом.

2. В поле статей есть **статьи 3-х уровней** (A, B, C) таких, что:

Уровень A: **ключевые, фундаментальные понятия**.

Уровень B: **понятия, ключевые для специалиста** в заданной области, но не являющиеся важными для неспециалиста (например, понятие “акустический монитор” для звукорежиссера, обывателю достаточно понятия “колонки” или “наушники”).

Уровень C: **понятия, важные для специалиста** в заданной области и абсолютно неважные для неспециалиста (например, понятие “анизотропная фильтрация” – большинство людей даже не догадывается о том, что это такое).

3. Статьи можно расставить в виде **иерархического древа**, такого что:

а) **во главе древа есть одно, базовое понятие,** порождающее все остальные понятия (понятие 0-го уровня);

б) **чем выше уровень значимости** понятия, тем **меньше его адрес** – уровень в древе понятий;

в) **взаимное пересечение** двух или более ветвей древа в явном виде **недопустимо** (исключается);

г) длина ветвей древа может различаться;

д) ветви древа могут быть сколь угодно длинными, но обязательно конечными (следствие из п. 1);

е) одно понятие **порождает,** вообще говоря, **несколько понятий, но порождено всегда одним.**

4. Финальные **понятия характеризуют определенную учебную тему** и не пересекаются по смыслу ни с одним другим понятием.

5. Для формирования понятия, находящегося уровнем ниже, можно использовать понятия, находящиеся уровнем не ниже формируемого понятия, но в неявном виде.

6. Внутри древа статей возможны неявные переходы от одной статьи к другой, находящейся в любой ветви древа, но на уровне не ниже исходного.

7. Существует множество вариантов расположения статей в древе; конечный вариант расположения статей зависит от тех или иных методических условий или пожеланий преподавателя.

Этап III. Прагматический

Работа по созданию электронной энциклопедии была разбита на две части: первая – создание рабочего поля терминов и вторая – на основе рабочего поля создание древа понятий.

Для первой части была сформирована научная группа студентов. Они находили необходимые термины в сети Интернет, в различных периодических околокомпьютерных изданиях, а также в книгах и учебниках, посвященных тому или иному разделу компьютерного образования. Главным критерием отбора служил ГОС.

Кроме того, была создана экспертная группа из преподавателей-предметников, осуществлявших экспертную оценку отобранных понятий, руководствуясь ГОСом.

Результатом этого этапа работы стало рабочее поле терминов.

На втором этапе работы из рабочего поля было построено иерархическое древо понятий и, таким образом, была фактически сформирована "траектория движения" студента по изучаемому материалу.

В качестве рабочей группы на этом этапе выступали преподаватели-предметники, читающие эти и смежные с ними курсы. В состав экспертной группы вошли методисты колледжа, а также преподаватели методики преподавания информатики из МГОПУ им. М.А. Шолохова.

Поскольку в иерархическое древо понятий вошло довольно много терминов (порядка 1500), работать с ним традиционными методами стало крайне неудобно. Кроме того, каждый преподаватель, в зависимости от методических условий, желал вносить в него изменения. Для решения этой проблемы нами была создана *программа – оболочка*, позволяющая значительно облегчить навигацию по древу понятий (статей), а также вносить в него необходимые изменения.

Результатом этого этапа работы стала компьютерная программа – база данных, написанная на языке Delphi. Данный язык программирования выбран не случайно. Дело в том, что, во-первых, эта среда разработки изначально была ориентирована на создание баз данных (а электронная энциклопедия и есть определенным образом структурированная база данных), а во-вторых, Delphi – проект может быть легко портирован в Linux с помощью Borland Kernul, являющийся, в свою очередь, не чем иным, как Delphi для Linux, который в настоящее время является весьма перспективной и активно развивающейся операционной системой.

Этап IV. Заключительный

Сейчас электронная энциклопедия "Информатика" находится в стадии своего дальнейшего развития. В нее добавляются и исключаются некоторые понятия, переформируется древо понятий, иными словами, она вышла на финальный уровень своего развития. Закончить окончательно этот проект невозможно. Обязательно найдется что-то, чего в ней нет, а должно быть. Изменяется Стандарт и требования к уровню подготовленности выпускников школы.

Однако электронную энциклопедию "Информатика" уже можно использовать в учебном процессе. С ее помощью нами успешно решены такие задачи, как:

– построение баз для получения новых сведений;

– формирование различных подобластей знаний;

– разработка и оптимизация "траектории движения" ученика;

– формирование методически и технологически грамотной системы упражнений;

– проектирование содержания учебных курсов в рамках предмета "Информатика" и смежных с ним;

– проектирование системы упражнений, направленных на усвоение полученных теоретических знаний;

– проектирование траектории движения ученика по учебному курсу;

– проектирование содержания специализированных курсов.

Библиографический список

1. Школьные технологии. 2003. № 5.

Использование мультимедийных возможностей компьютера при обучении высшей математике в аграрных университетах

Т.Н. Коннова

Стремительное развитие компьютерных технологий и их активное проникновение во все без исключения сферы деятельности человека (профессиональная деятельность, досуг, образование и др.) потребовало осмысления проблемы компьютера в образовательном процессе.

В зависимости от вида учебной деятельности можно использовать следующие компьютерные средства обучения:

– электронный конспект лекций (ЭКЛ);

– компьютерный практикум моделирования линейных и нелинейных процессов (обучающие программы);

– систему дидактических заданий на самостоятельную познавательную деятельность студентов;

– электронное учебное пособие;

– Web – версия конспекта лекций, включающих обзорные видеолекции и видеофрагменты;

– систему тестовых заданий для контроля уровня учебных достижений.

Чтение лекций с применением мультимедийного **электронного конспекта** осуществляется в аудитории, оснащенной лекционным компьютером, средствами видеотехники, мультимедийным проектором. Основной единицей ЭКЛ является слайд предоставления учебной информации, учитывающий эргономические требования визуального восприятия информации. Требования касаются разборчивости шрифтов обозначений и надписей, отсутствия агрессивных полей и неприятных ощущений при динамическом воспроизводстве графических материалов, правильного расположения информации в поле восприятия, отсутствия цветового дискомфорта, оптимизации яркости графиков по отношению к фону. Количество слайдов в зависимости от темы может варьироваться. Качественное улучшение лекции достигается за счет применения информационных технологий подготовки конспекта: сканирование научной и учебной графической информации, создание и редактирование фотографий и киноклипов с помощью цифровых фотоаппаратов или видеокамер (как альтернатива импорту из сети Интернет), подготовка движущихся графиков и анимационных моделей.

В зависимости от того, какие функции обучения передаются компьютеру, **обучающие программы** можно разделить на три большие группы: технологии обучения с помощью компьютера, технологии обучения под управлением компьютера, технологии обучения, обеспечивающие интеллектуальную поддержку учебного процесса.

1. Технологии обучения с помощью компьютера.
Обучение проводится в форме разъяснения (drill), практики (practice), наставления (tutorial) и имитации (simulation). Первая форма компьютерного обучения включает в себя следующие типы программ:

– игровые программы, представляющие собой динамические игры, в ходе которых учащиеся осваивают методы пользования и управления персональным компьютером (PC) и иногда решают простейшие логические задачи;

– тренировочные программы, предназначенные для формирования устойчивых навыков работы путем многократного повторения операций и упражнений;

– пошаговые обучающие программы, в которых сначала предъявляются правила решения некоторого круга задач, а затем – примеры задач, решаемых согласно этому правилу. Переход к более высокому уровню происходит с учетом индивидуальных особенностей учащихся и уровня их достижений в решении задач предыдущего уровня;

– программы-консультанты. Это программы, которые дают консультацию обучаемому, подсказывают правильные действия, находят ошибки и показывают, как их исправлять.

Исследовательские обучающие программы предусматривают, что учащийся сам будет выявлять те или иные принципы, законы и факты. Обычно это программы обучения в области естественных дисциплин, основанные на принципах математического моделирования.

2. Технологии обучения под управлением компьютера.
Технологии обеспечивают управление учебным процессом в форме рекомендаций по выбору наиболее эффективной стратегии обучения. Компьютер формирует активный и дифференцированный подход к обучению, основанный на учете индивидуальных особенностей обучающегося, уровня его подготовки и степени достижения каждой промежуточной цели обучения.

3. Технологии обучения, обеспечивающие интеллектуальную поддержку учебного процесса.
Эти технологии используют интеллектуальные обучающие системы, включающие в себя базы данных и модели поведения учащегося, идентифицирующие уровень его знаний и подготовки, а также модель всего процесса обучения для более быстрого и эффективного достижения основных образовательных и воспитательных целей обучения.

Технологии второй и третьей групп реализуются в следующих формах.

– специализированные обучающие среды, представляющие собой системы программирования, ориентированные на процесс обучения и собранные в единую программную оболочку вместе с "дружественным " интерфейсом, редактором, системой справочной информации и другим современным сервисом. Подобные среды используются главным образом для изучения точных наук: математического анализа, алгебры, геометрии, языков программирования;

– мультимедийные обучающие программы, выступающие в качестве инструмента для решения проблемных ситуаций. Эти программы предназначены для изучения и применения законов физики, химии, биологии и других наук;

– творческие компьютерные лаборатории – обучающие системы, предназначенные для создания условий для теоретических экспериментов (например, для построения и опровержения правдоподобных гипотез в курсах математического анализа, геометрии или теории вероятностей);

– моделирующие системы обучения, предназначенные для компьютерного моделирования сложных процессов. Как правило, это программы обучения в области естественно-научных дисциплин, основанные на принципах имитационного моделирования;

– интеллектуальные системы обучения, использующие компьютерные экспертные системы, способные в режиме диалога выступать в роли преподавателя при обучении (например, логике рассуждений).

Система дидактических заданий на самостоятельную познавательную деятельность студентов в зависимости от содержания материала и целей обучения может состоять из двух и более уровней. Выполнение задания предполагает знание основных понятий и алгоритмов данного уровня. При прохождении низшего уровня (выполнение комплекса заданий) предоставляется возможность для решения задач следующего (более продвинутого) уровня, и так далее. Основанием для создания системы дидактических заданий является стандарт высшего образования по той или иной дисциплине и специальности.

Web – версия конспекта лекций предполагает опубликование на Web-сайте учебного заведения конспекта лекций, которым в случае необходимости будут пользоваться учащиеся и преподаватели не только учебного заведения - создателя, но и другие желающие.

Проектирование **электронных учебных пособий** (ЭУП) базируется на логико-смысловой структурной схеме представления содержания дисциплины. В основу положена гипертекстовая технология, так как с ее помощью можно наиболее рационально организовать структуру учебника. Принцип адекватности учебного пособия в практическом плане подразумевает многоуровневую конструкцию ЭУП. Дидактическая обработка учебного материала, представленного в пособии, заключается в создании оптимальной системы гиперссылок на каждом уровне пособия. При погружении на уровень продвинутого изучения материала обучаемый сможет увидеть в подробностях те связи понятий и те детали, которые были свернуты на предыдущем уровне обобщенного рассмотрения.

Многоуровневое построение пособия с избыточной информативностью открывает вариативные пути навигации по ЭУП, в соответствии с запросами обучаемого.

Информация в электронном учебном пособии выглядит нагляднее, чем в обычном.

Представление каждого из уровней изучаемой темы многоуровневого ЭУП состоит из:

– теоретического материала;

– примеров (алгоритмов) выполнения типовых задач;

– заданий для самостоятельного выполнения;

– контрольных заданий и вопросов;

– списка литературы, предлагаемой для дополнительного изучения.

Использование электронного учебного пособия позволяет:

– быстро находить необходимую справочную информацию;

– активизировать учебно-познавательную деятельность обучаемых;

– индивидуализировать темп обучения;

– осуществлять тестовый контроль.

Многоуровневое ЭУП обладает следующими преимуществами:

– доступностью использования;

– последовательностью усложнения учебного материала и умственных усилий обучаемого;

– целостностью и полнотой учебного материала;

– построением самостоятельной траектории учения.

Целесообразность использования **системы тестовых заданий** в высшем образовании уже не является предметом дискуссии – применение таких тестов, без сомнения, оправдано. Исключение из процесса контроля уровня знаний субъективного взгляда преподавателя имеет свои плюсы и минусы. С одной стороны, присутствие экзаменатора помогает выявить с помощью дополнительных вопросов сильные и слабые стороны в подготовке студента. С другой стороны, часто преподаватель не может беспристрастно оценить ответ. В силу этих причин необходим комплексный подход к тестированию студентов. Ответы по способу их реализации можно разделить на конструируемые, выборочные и вводимые с клавиатуры. Проведение тестов предусматривается по окончанию изучения темы для проведения рубежного контроля. Каждый из тестов состоит из вопросов шести типов, которые приведены ниже. Их количество варьируется в пределах 10–20 вопросов, в зависимости от темы.

Предусмотрены шесть типа вопросов:

Первый тип – текстовый вопрос. Ответы предлагаются в виде рисунка с числом вариантов от 2 до 5. Выбор правильного ответа производится по номеру.

Второй тип – текстовый вопрос. Ответы предлагаются в виде текста с числом вариантов от 2 до 5. Выбор правильного ответа производится по номеру.

Третий тип – текстовый вопрос, предполагающий только два ответа: “да” или “нет”. Выбор правильного ответа производится по номеру.

Четвертый тип – текстовый вопрос, предполагающий ввод правильного значения. Ответ вводится с клавиатуры.

Пятый тип – логическая цепочка из 4–5 звеньев, с пропущенным звеном. Ответ вводится с клавиатуры.

Шестой тип – логическая цепочка из 4–5 звеньев, расположенных в произвольном порядке, которые необходимо расположить в правильном порядке. Порядок устанавливается с клавиатуры.

При преподавании высшей математики на современном этапе в аграрных университетах существует возможность реального использования следующих видов учебной деятельности:

– проведение теоретических занятий с применением электронного курса лекций;

– организация самостоятельной деятельности при помощи электронного учебного пособия и Web – версии конспекта лекций;

– проведение рубежного контроля уровня учебных достижений.

Создание и применение электронного курса лекций, учебного пособия и их Web аналогов, систем тестирования, хотя и трудоемкий, но выполнимый процесс, для которого необходимы знание учебного материала, психологии, навыки работы в прикладных программах (Microsoft Power Point, Word, Excel, Adobe Photoshop, Corel Draw и др.), умение пользоваться современной видео- и аудиотехникой, материальная база (компьютеры, доступ к локальной и глобальной сети, наличие Web-сайта), постоянное удовлетворительное финансирование.

В силу того, что обучающие программы должны быть высокого уровня, требуется использование компьютерных технологий обучения, обеспечивающих интеллектуальную поддержку учебного процесса.

Глава 4

Математика в ее многообразии

О сложности распознавания свойств дискретных функций[1]

В.Б. Алексеев

Обычный алгоритм умножения “в столбик” требует порядка n^2 операций над разрядами. В 1961 году был опубликован [1] результат А.А. Карацубы о том, что умножение двух n-разрядных двоичных чисел можно выполнять за $O(n^{\log_2 3})$ битовых операций. Этим открылось новое направление в проблеме построения быстрых алгоритмов. В данной работе показывается, как развитие использованной идеи приводит к методам построения быстрых алгоритмов для распознавания свойств дискретных функций.

Основная идея Карацубы состояла в рекурсивном сведении задачи умножения n-разрядных чисел к таким же задачам для $\frac{n}{2}$-разрядных (при n четном) чисел. Пусть A и B – два n-разрядных двоичных числа. Разбивая их записи на две части длины $\frac{n}{2}$, получаем

$$A \cdot B = (A_1 2^{\frac{n}{2}} + A_0)(B_1 2^{\frac{n}{2}} + B_0) = A_1 B_1 2^n + (A_1 B_0 + A_0 B_1) 2^{\frac{n}{2}} + A_0 B_0.$$

Поскольку умножение на степени двойки и сложение – быстрые операции, то проблема сводится к быстрому вычислению трех билинейных форм $C_1 = A_1 B_1$, $C_2 = A_1 B_0 + A_0 B_1$, $C_3 = A_0 B_0$. Карацуба заметил, что для этого достаточно вычислить билинейные формы C_1, C_3 и $D = (A_1 + A_0)(B_1 + B_0)$. При этом $C_2 = D - C_1 - C_3$. Таким образом, задача умножения n-разрядных двоичных чисел сводится к трем задачам умножения $\frac{n}{2}$-разрядных двоичных чисел (в D еще нужно убрать лишний разряд) и нескольким сложениям-вычитаниям не более чем n-разрядных чисел. Для максимальной

[1] Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 03-01-00783).

сложности умножения n-разрядных двоичных чисел это дает рекурсивное неравенство для четных n:

$$L(n) \leq 3L(\frac{n}{2}) + O(n),$$

из которого следует, что $L(n) = O(n^{\log_2 3})$.

Эта идея рекурсивного сведения задачи к таким же задачам в константу раз меньшего размера оказалась очень плодотворной для построения быстрых алгоритмов. В [2] она названа методом "разделяй и властвуй". Оценка сложности таких алгоритмов основана на рекурсивном неравенстве

$$L(n) \leq aL(\frac{n}{b}) + cn^{\alpha}. \tag{1}$$

Если L – монотонно не убывающая функция и неравенство (1) выполняется для всех натуральных n, делящихся на b, то из (1) следует [2], что

$$L(n) = \begin{cases} O(n^{\log_a b}), \text{ при } \alpha < \log_a b, \\ O(n^{\alpha}), \text{ при } \alpha > \log_a b, \\ O(n^{\alpha}\log n), \text{ при } \alpha = \log_a b. \end{cases}$$

Таким образом, если задачу с параметром n (при n, делящемся на b) удается свести к a таким же задачам с параметром $\frac{n}{b}$, то для сложности ее решения справедлива оценка (1), откуда следуют указанные выше верхние оценки для $L(n)$. Если при этом сложность самого сведения характеризуется малым α в (1), то оценка сложности для $L(n)$ определяется параметрами a и b.

Ниже мы покажем, как идею "разделяй и властвуй" удается использовать для построения быстрых алгоритмов распознавания свойств дискретных функций.

Пусть $E_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$ и E_k^n – множество всех наборов длины n с элементами из E_k. Через P_k обозначается множество всех функций $f(x_1, \ldots, x_n) : E_k^n \to E_k$ для любых n. Через P_k^* обозначается множество всех функций $f(x_1, \ldots, x_n) : E_k^n \to E_k \cup \{*\}$. Функции из P_k называются k-значными функциями, а функции из P_k^*

– частичными k-значными функциями ($*$ трактуется как неопределенность). Чтобы охватить оба случая, мы будем рассматривать функции $f : E_k^n \to D$, где D – произвольное конечное множество. Многие важные классы дискретных функций описываются с помощью отношений на области определения и области значений. Пусть $R(y_1, \ldots, y_m)$ – отношение на E_k и $R_1(y_1, \ldots, y_m)$ – отношение на D. Определим отношение $R^n(\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_m)$, где $\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_m$ –наборы длины n с элементами из E_k ($\tilde{y}_i = (y_i^1, y_i^2, \ldots, y_i^n)$), следующим образом

$$R^n(\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_m) \Longleftrightarrow \forall j R(y_1^j, \ldots, y_m^j).$$

Пусть $U(R, R_1)$ – класс всех функций $f(x_1, \ldots, x_n)$ для всех n, отображающих E_k^n в D, и для любых наборов $\tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_m$ длины n, удовлетворяющих условию:

$$R^n(\tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_m) \Longrightarrow R_1(f(\tilde{\alpha}_1), \ldots, f(\tilde{\alpha}_n)). \tag{2}$$

Классы $U(R, R_1)$ играют очень важную роль при изучении функциональных систем P_k и P_k^* с операцией суперпозиции.

Так как область определения функций $f(x_1, \ldots, x_n)$, которые мы рассматриваем, конечна, то, упорядочив ее каким-нибудь стандартным способом, можно задавать функцию f просто вектором ее значений $\tilde{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{k^n})$ на всех наборах из области определения.

В качестве первого примера применения общей идеи рассмотрим замкнутые классы в множестве частично определенных булевых функций P_2^*, содержащие хотя бы один из предполных классов всюду определенных булевых функций T_0, T_1, M, S, L [3].

Теорема 1. Для любого замкнутого класса H в множестве частично определенных булевых функций P_2^*, содержащего хотя бы один из предполных классов всюду определенных булевых функций T_0, T_1, M, S, существует алгоритм, отвечающий на вопрос "$f(x_1, \ldots, x_n) \in H$", с битовой сложностью $O(N \log N)$, где $N = 2^n$ – длина вектора значений функции f, задающего вход.

Доказательство. Все замкнутые классы в множестве частично определенных булевых функций P_2^*, содержащие хотя бы один из предполных классов всюду определенных булевых функций T_0, T_1, M, S, описаны в [3]. Их конечное число, и все они, кроме одного, являются классами типа $U(R, R_1)$, где R – двухместное отношение на множестве $E_2 = \{0, 1\}$.

Рассмотрим сначала класс, задаваемый трехместным отношением и обозначенный в [3] через M_3. Это класс типа $U(R, R_1)$, где R – трехместное отношение на множестве $E_2 = \{0, 1\}$ вида $R(x, y, z) = (x \le y \le z)$, то есть оно истинно только на 4 наборах (0,0,0), (0,0,1), (0,1,1), (1,1,1). Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_2^*$. Тогда высказывание "$f(x_1, \ldots, x_n) \notin M_3$" равносильно истинности формулы

$$\exists \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n), \gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$$
$$(\forall i R(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i) \& \bar{R}_1(f(\alpha), f(\beta), f(\gamma))).$$

Последняя формула равносильна следующей формуле

$$\bigvee_{(a,b,c) \notin R_1} \bigvee_{\alpha,\beta,\gamma} R(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) \cdot R(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) \cdot \ldots \cdot R(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n) \cdot$$
$$\cdot (f(\alpha) = a) \cdot f(\beta) = b) \cdot f(\gamma) = c).$$

Таким образом, для ответа на вопрос "$f(x_1, \ldots, x_n) \notin M_3$?" достаточно вычислить логическое значение последней формулы. Поскольку в ней в первой дизъюнкции конечное число слагаемых и при фиксированных a, b, c для вычисления логических значений $f(\alpha) = a$, $f(\beta) = b$, $f(\gamma) = c$ достаточно $O(N)$ операций, то для доказательства теоремы нам достаточно показать, что логическое значение выражения

$$\bigvee_{\alpha,\beta,\gamma} R(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) \cdot R(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) \cdot \ldots \cdot R(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n) \cdot u_\alpha v_\beta w_\gamma \qquad (3)$$

можно вычислить за $O(N \log N)$ операций при заданных значениях переменных $u_\alpha, v_\beta, w_\gamma$. Если обозначить $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) = p, (\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}) = q, (\gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1}) = r$, то последнее выражение можно переписать в виде

$$\bigvee_{p,q,r} \bigvee_{\alpha_n,\beta_n,\gamma_n} R(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) \cdot R(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) \cdot \ldots \cdot R(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n) \cdot u_{p,\alpha_n} v_{q,\beta_n} w_{r,\gamma_n} =$$

$$= \bigvee_{p,q,r} R(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) \cdot R(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) \cdot \ldots \cdot R(\alpha_{n-1}, \beta_{n-1}, \gamma_{n-1}) \cdot$$

$$\cdot \bigvee_{\alpha_n, \beta_n, \gamma_n} R(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n) u_{p,\alpha_n} v_{q,\beta_n} w_{r,\gamma_n} =$$

$$= \bigvee_{p,q,r} R(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) \cdot R(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) \cdot \ldots \cdot R(\alpha_{n-1}, \beta_{n-1}, \gamma_{n-1}) \cdot$$

$$\cdot (u_{p,0} v_{q,0} w_{r,0} \vee u_{p,0} v_{q,0} w_{r,1} \vee u_{p,0} v_{q,1} w_{r,1} \vee u_{p,1} v_{q,1} w_{r,1}) =$$

$$= \bigvee_{p,q,r} R(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) \cdot R(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) \cdot \ldots \cdot R(\alpha_{n-1}, \beta_{n-1}, \gamma_{n-1}) \cdot$$

$$\cdot (u_{p,0} v_{q,0} (w_{r,0} \vee w_{r,1}) \vee (u_{p,0} \vee u_{p,1}) v_{q,1} w_{r,1}) =$$

$$= \bigvee_{p,q,r} R(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) \cdot R(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) \cdot \ldots \cdot R(\alpha_{n-1}, \beta_{n-1}, \gamma_{n-1}) \cdot u_{p,0} v_{q,0} g_r \vee$$

$$\vee \bigvee_{p,q,r} R(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) \cdot R(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) \cdot \ldots \cdot R(\alpha_{n-1}, \beta_{n-1}, \gamma_{n-1}) \cdot h_p v_{q,1} w_{r,1},$$

где $g_r = w_{r,0} \vee w_{r,1}$ и $h_p = u_{p,0} \vee u_{p,1}$. Таким образом, вычисление выражения (3) с параметром n свелось к вычислению двух аналогичных выражений с параметром $n-1$. Пусть $L(N) = L'(n)$ – минимальное число битовых операций для вычисления (3). Так как для вычисления всех g_r и h_p при заданных u_α и w_γ достаточно $O(2^n) = O(N)$ битовых операций, то мы получаем рекуррентное неравенство:

$$L'(n) \leq 2L'(n-1) + O(2^n)$$

или

$$L(N) \leq 2L(\frac{N}{2}) + O(N).$$

Из последнего неравенства следует [2], что $L(N) = O(N \log N)$.

Рассмотрим теперь оставшиеся классы, удовлетворяющие условию теоремы. Как отмечено в начале доказательства, каждый из них определяется некоторым двухместным предикатом $R(y_1, y_2)$.

В этом случае мы так же, как выше, придем к вычислению выражения

$$\bigvee_{p,q} R(\alpha_1,\beta_1)\cdot R(\alpha_2,\beta_2)\cdot\ldots\cdot R(\alpha_{n-1},\beta_{n-1})\cdot$$

$$\cdot \bigvee_{\alpha_n,\beta_n} R(\alpha_n,\beta_n)u_{p,\alpha_n}v_{q,\beta_n}, \tag{4}$$

которое далее преобразуем к виду

$$\bigvee_{\alpha_n}\bigvee_{p,q} R(\alpha_1,\beta_1)\cdot R(\alpha_2,\beta_2)\cdot\ldots\cdot R(\alpha_{n-1},\beta_{n-1})\cdot$$

$$\cdot u_{p,\alpha_n}\cdot \bigvee_{\beta_n:R(\alpha_n,\beta_n)} v_{q,\beta_n} =$$

$$\bigvee_{\alpha_n}\bigvee_{p,q} R(\alpha_1,\beta_1)\cdot R(\alpha_2,\beta_2)\cdot\ldots\cdot R(\alpha_{n-1},\beta_{n-1})\cdot u_{p,\alpha_n}\cdot w_{q,\alpha_n},$$

где

$$w_{q,\alpha_n} = \bigvee_{\beta_n:R(\alpha_n,\beta_n)} v_{q,\beta_n}.$$

Так как α_n принимает только два значения, 0 и 1, то мы получаем, что выражение (4) с параметром n свелось к вычислению двух аналогичных выражений с параметром $n-1$. Отсюда так же, как выше, получаем, что выражение (4) можно вычислить с числом битовых операций $O(N\log N)$.

Теорема доказана.

В рассмотренной теореме использовался переход от логики к алгебре из двух элементов с операциями конъюнкции и дизъюнкции и последующие преобразования в этой алгебре. Можно рассмотреть более общую идею использования полуколец для поиска быстрых алгоритмов.

Напомним, что коммутативным полукольцом называется произвольное множество с двумя бинарными операциями умножения и сложения, обладающими свойствами коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности умножения относительно сложения.

Через S_2 будем обозначать полукольцо с двумя элементами 0 и 1 и операциями дизъюнкции и конъюнкции в качестве сложения и умножения.

Определение. Полукольцо A будем называть логическим полукольцом, если существует гомоморфизм этого полукольца на полукольцо S_2. Логическое полукольцо будем задавать в виде пары (A_0, A_1), где A_0 – прообраз 0 и A_1 – прообраз 1 при гомоморфизме A на S_2.

Примеры логических полуколец.

1) $(0, N)$, где N – множество натуральных чисел;

2) множество полиномов от одной переменной с целыми коэффициентами и неотрицательным свободным членом, где A_0 – множество полиномов, у которых свободный член равен 0, а A_1 – множество полиномов, у которых свободный член положителен;

3) A_0 и A_1 – любые подмножества линейно упорядоченного множества, причем любой элемент из A_0 меньше, чем любой элемент из A_1, и в качестве операций сложения и умножения рассматриваются max и min.

Общая идея использования логических полуколец для поиска быстрых алгоритмов состоит в следующем. Во многих задачах распознавания свойств дискретных объектов проблема сводится к проверке истинности некоторого высказывания, в котором кванторы существования и всеобщности берутся по конечным множествам. Заменяя кванторы дизъюнкцией и конъюнкцией, проблему можно свести к вычислению истинностного значения некоторого логического выражения T, составленного из предикатов, зависящих от входа, с помощью операций дизъюнкции и конъюнкции. Если предикаты вычисляются быстро, то проблема упирается в сложность вычисления самого логического выражения T относительно операций дизъюнкции и конъюнкции. Тогда вместо вычисления T над S_2 можно вычислить его гомомоморфный прообраз T' в некотором логическом полукольце A, а в конце гомоморфно вернуться в S_2. При этом вычисления можно производить даже не в A, а в любом его расширении, что упрощает поиск быстрого алгоритма.

Пусть зафиксированы k, область D, отношение R на E_k и

R_1 на D. Пусть на вход алгоритма поступает вектор функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, отображающей E_k^n в D, и требуется выяснить, принадлежит ли f классу $U(R, R_1)$. Покажем, как эта задача распознавания свойства может быть сведена к алгебраической вычислительной задаче и как затем можно применять метод "разделяй и властвуй". Длиной входа будем считать $N = k^n$. Предлагаемый метод включает в себя следующие шаги. Высказывание "$f(x_1, \ldots, x_n) \notin U(R, R_1)$" можно записать в виде логической формулы

$$\bigvee_{(b_1,\ldots,b_m)\notin R_1} \bigvee_{\alpha_1} \ldots \bigvee_{\alpha_m} R(\alpha_1^1, \ldots, \alpha_1^m) \cdot \ldots \cdot R(\alpha_n^1, \ldots, \alpha_n^m) \cdot$$

$$\cdot (f(\alpha_1) = b_1) \cdot \ldots \cdot (f(\alpha_m) = b_m),$$

где $\alpha_j = (\alpha_1^j, \ldots, \alpha_n^j)$ и α_i^j пробегает все значения $0, 1, \ldots, k-1$. Сложность вычисления логического значения этой формулы по порядку определяется сложностью вычисления логического значения формы

$$\phi_n = \bigvee_{\alpha_1} \ldots \bigvee_{\alpha_m} R(\alpha_1^1, \ldots, \alpha_1^m) \cdot \ldots \cdot R(\alpha_n^1, \ldots, \alpha_n^m) \cdot w_{\alpha_1}^1 \cdot \ldots \cdot w_{\alpha_m}^m$$

при заданных значениях логических переменных w_α^j.

В соответствии с общей идеей использования логических полуколец достаточно рассмотреть какое-нибудь логическое полукольцо (A_0, A_1) и заменить отношение R на функцию $t(y_1, \ldots, y_m)$, причем так, чтобы

$$t(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \quad \begin{cases} \in A_0, \text{ если } R(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \text{ ложно}, \\ \in A_1, \text{ если } R(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \text{ истинно}, \end{cases}$$

аналогично заменить логические значения w_α^j на любые соответствующие значения z_α^j из полукольца (A_0, A_1) и вычислить над полукольцом (A_0, A_1) полилинейную форму

$$\psi_n = \sum_{\alpha_1} \ldots \sum_{\alpha_m} t(\alpha_1^1, \ldots, \alpha_1^m) \cdot \ldots \cdot t(\alpha_n^1, \ldots, \alpha_n^m) \cdot z_{\alpha_1}^1 \cdot \ldots \cdot z_{\alpha_m}^m.$$

При этом вычисления можно производить в любом полукольце A, являющемся расширением полукольца (A_0, A_1). Форму ψ_n можно переписать в виде

$$\psi_n = \sum_{(\alpha_1^1,\ldots,\alpha_1^m)} t(\alpha_1^1,\ldots,\alpha_1^m)\ldots \sum_{(\alpha_n^1,\ldots,\alpha_n^m)} t(\alpha_n^1,\ldots,\alpha_n^m)\cdot z_{\alpha_1}^1\cdot\ldots\cdot z_{\alpha_m}^m.$$

Последняя запись указывает на возможность рекурсии. И действительно, можно показать [4], что вычисление ψ_n сводится (аналогично тому, как это делалось выше) к d задачам вычисления ψ_{n-1}, если форму $\sum_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)} t(\alpha_1,\ldots,\alpha_m) z_{\alpha_1}^1\cdot\ldots\cdot z_{\alpha_m}^m$ можно представить в виде

$$\sum_{r=1}^{d} L_1^r\cdot\ldots\cdot L_m^r, \tag{5}$$

где L_i^r – линейная форма от переменных $z_0^i,\ldots,z_{k-1}^i$ с коэффициентами из A. Таким образом, задача поиска быстрого алгоритма сводится к удачному подбору коэффициентов этих линейных форм. При этом от $N = k^n$ мы переходим к $k^{n-1} = \frac{N}{k}$, то есть размер входа задачи уменьшается в k раз. Следовательно, для оценки сложности получаемого алгоритма можно использовать неравенство (1) и вытекающие из него оценки для $L(n)$.

Покажем, как эта идея может быть использована для распознавания принадлежности функций некоторым замкнутым классам в частичной двузначной логике, содержащим класс линейных функций. В [3] доказано, что в P_2^* существует континуум замкнутых классов, содержащих класс всюду определенных линейных булевых функций L. Часть из этих классов представляется как $L_{2k} = U(R, R_1)$, где

$$R = R_{2k}(y_1,\ldots,y_{2k}) \equiv (y_1\oplus y_2\oplus\ldots\oplus y_{2k} = 0)$$

(здесь $\oplus$ – сложение по модулю 2).

Теорема 2. Для любого $k \geq 2$ существует алгоритм, отвечающий на вопрос “$f(x_1,\ldots,x_n)\in L_{2k}$”, с битовой сложностью

$$O(N\log^2 N\log\log N\log\log\log N),$$

где $N = 2^n$ – длина вектора значений функции f, задающего вход.

Доказательство. Рассмотрим следующую полилинейную форму:

$$S = \sum_{\forall i (y_i \in \{0,1\})} t(y_1, \ldots, y_{2k}) x^{(1)}_{y_1} \cdot x^{(2)}_{y_2} \cdot \ldots \cdot x^{(2k)}_{y_{2k}}.$$

Пусть

$$t(y_1, \ldots, y_{2k}) = \begin{cases} 0, \text{ если } R = R_{2k}(y_1, \ldots, y_{2k}) \text{ ложно,} \\ 2, \text{ если } R = R_{2k}(y_1, \ldots, y_{2k}) \text{ истинно.} \end{cases}$$

Тогда эта полилинейная форма соответствует отношению R_{2k} над логическим полукольцом $(0, N)$ и в ней 2^{2k-1} ненулевых слагаемых. Однако нетрудно представить эту форму в виде суммы двух слагаемых, каждое из которых является произведением линейных форм:

$$S = (x^{(1)}_0 + x^{(1)}_1) \cdot (x^{(2)}_0 + x^{(2)}_1) \cdot \ldots \cdot (x^{(2k)}_0 + x^{(2k)}_1) +$$

$$+ (x^{(1)}_0 - x^{(1)}_1) \cdot (x^{(2)}_0 - x^{(2)}_1) \cdot \ldots \cdot (x^{(2k)}_0 - x^{(2k)}_1).$$

Следствие 1 из теоремы 1 в [4] показывает, что, используя это представление, можно построить алгоритм для ответа на вопрос "$f(x_1, \ldots, x_n) \in L_{2k}$", с битовой сложностью

$$O(N \log^2 N \log\log N \log\log\log N).$$

Теорема доказана.

Продемонстрируем изложенный метод еще на двух семействах классов дискретных функций, играющих важную роль при изучении k-значных и частичных k-значных логик. В этих примерах используются более сложные логические полукольца.

Теорема 3. Пусть $R(y_1, \ldots, y_m)$ – отношение на E_k, которое выполняется в точности на тех наборах $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$, для которых $\alpha_1 + \ldots + \alpha_m = 0(\mathrm{mod} k)$, и $R_1(y_1, \ldots, y_m)$ – произвольное отношение на D. Тогда для распознавания принадлежности функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, заданной вектором значений, классу $U(R, R_1)$ существует алгоритм с битовой сложностью $O(N \log^3 N)$, где $N = k^n$ – длина вектора значений функции.

Замечание. Переборный алгоритм, основанный на полной проверке импликации (2) для всех наборов, имеет сложность не менее $O(N^m)$.

Доказательство. Пусть λ – комплексный корень k-й степени из 1 мультипликативного порядка k. Рассмотрим кольцо чисел вида $p+\lambda q$, где p и q – целые. Рассмотрим равенство

$$\sum_{r=0}^{k-1}\prod_{j=1}^{m}\sum_{i=0}^{k-1}\lambda^{ri}z_i^{(j)} =$$

$$= \sum_{r=0}^{k-1}\sum_{i_1=0}^{k-1}\dots\sum_{i_m=0}^{k-1}\lambda^{ri_1}z_{i_1}^{(1)}\lambda^{ri_2}z_{i_2}^{(2)}\cdot\ldots\cdot\lambda^{ri_m}z_{i_m}^{(m)} =$$

$$= \sum_{r=0}^{k-1}\sum_{i_1=0}^{k-1}\dots\sum_{i_m=0}^{k-1}\lambda^{r(i_1+i_2+\ldots+i_m)}z_{i_1}^{(1)}z_{i_2}^{(2)}\cdot\ldots\cdot z_{i_m}^{(m)} =$$

$$= \sum_{i_1=0}^{k-1}\dots\sum_{i_m=0}^{k-1}\left(\sum_{r=0}^{k-1}\lambda^{r(i_1+i_2+\ldots+i_m)}\right)z_{i_1}^{(1)}z_{i_2}^{(2)}\cdot\ldots\cdot z_{i_m}^{(m)} =$$

$$= \sum_{i_1=0}^{k-1}\dots\sum_{i_m=0}^{k-1}t_{i_1i_2\ldots i_m}z_{i_1}^{(1)}z_{i_2}^{(2)}\cdot\ldots\cdot z_{i_m}^{(m)}.$$

Здесь

$$t_{i_1i_2\ldots i_m}\quad\begin{cases} = 0, \text{ если } i_1+i_2+\ldots+i_m \neq 0 \bmod k,\\ = k, \text{ если } i_1+i_2+\ldots+i_m = 0 \bmod k,\end{cases}$$

и t соответствует отношению R над логическим полукольцом $(0,N)$. Таким образом, мы имеем для R разложение вида (5) с $d=k$. Тогда по теореме 1 из [4] получаем, что для рассматриваемой задачи имеется алгоритм с числом $O(N\log N)$ арифметических операций над элементами из кольца чисел вида $p+\lambda q$, где p и q – целые, и при этом каждая такая операция потребует не более $O(n^2)=O(\log^2 N)$ битовых операций. Теорема доказана.

Теорема 4. Пусть $R(y_1,\ldots,y_m)$ – отношение на E_k, которое выполняется в точности на тех наборах $(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)$, в которых есть хотя бы два одинаковых элемента, и $R_1(y_1, \ldots, y_m)$ – произвольное отношение на D. Тогда для распознавания принадлежности функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, заданной вектором значений, классу $U(R, R_1)$ существует алгоритм с битовой сложностью $O(N^{\log_k(k+1)} \log^3 N)$, где $N = k^n$ – длина вектора значений функции.

Доказательство. Рассмотрим выражение

$$\sum_{r=0}^{k-1} \prod_{j=1}^{m} \left(z_0^{(j)} + z_1^{(j)} + \ldots + z_{k-1}^{(j)} + \varepsilon z_r^{(j)} \right)$$

и разложим его по степеням ε. Свободный член равен

$$k \prod_{j=1}^{m} \left(z_0^{(j)} + z_1^{(j)} + \ldots + z_{k-1}^{(j)} \right).$$

Коэффициент при ε равен

$$\sum_{r=0}^{k-1} \sum_{t=1}^{m} z_r^{(t)} \prod_{j=1, j \neq t}^{m} \left(z_0^{(j)} + z_1^{(j)} + \ldots + z_{k-1}^{(j)} \right) =$$

$$= \sum_{t=1}^{m} \sum_{r=0}^{k-1} z_r^{(t)} \prod_{j=1, j \neq t}^{m} \left(z_0^{(j)} + z_1^{(j)} + \ldots + z_{k-1}^{(j)} \right) =$$

$$= m \prod_{j=1}^{m} \left(z_0^{(j)} + z_1^{(j)} + \ldots + z_{k-1}^{(j)} \right).$$

Коэффициент при ε^2 равен

$$\sum_{r=0}^{k-1} \sum_{1 \le t < l \le m} z_r^{(t)} z_r^{(l)} \prod_{j=1, j \neq t, j \neq l}^{m} \left(z_0^{(j)} + z_1^{(j)} + \ldots + z_{k-1}^{(j)} \right).$$

После раскрытия скобок в полученной сумме с положительными целыми коэффициентами будут присутствовать в точности все те слагаемые $z_{i_1}^{(1)} z_{i_2}^{(2)} \cdot \ldots \cdot z_{i_m}^{(m)}$, в которых среди индексов есть хотя бы два одинаковых. Отсюда получаем, что выражение

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{r=0}^{k-1} \prod_{j=1}^{m} \left(z_0^{(j)} + z_1^{(j)} + \ldots + z_{k-1}^{(j)} + \varepsilon z_r^{(j)} \right) -$$

$$- \frac{k + \varepsilon m}{\varepsilon^2} \prod_{j=1}^{m} \left(z_0^{(j)} + z_1^{(j)} + \ldots + z_{k-1}^{(j)} \right)$$

преобразуется к виду

$$\sum_{i_1=0}^{k-1} \cdots \sum_{i_m=0}^{k-1} t_{i_1 i_2 \ldots i_m} z_{i_1}^{(1)} z_{i_2}^{(2)} \cdot \ldots \cdot z_{i_m}^{(m)},$$

где $t_{i_1 i_2 \ldots i_m}$ – полином от ε, причем свободный член в нем равен натуральному числу, если среди индексов $i_1, i_2 \ldots, i_m$ есть одинаковые, и равен 0, если все индексы различны. Таким образом, t соответствует отношению R над логическим полукольцом из примера 2) выше, и мы имеем для R разложение вида (5) с $d = k + 1$, коэффициенты в котором берутся из кольца лорановских многочленов от ε с целыми коэффициентами. Тогда по теореме 1 из [4] получаем, что для рассматриваемой задачи имеется алгоритм с числом $O(N^{\log_k (k+1)})$ арифметических операций над элементами из этого кольца, и при этом каждая такая операция потребует не более $O(n^3) = O(\log^3 N)$ битовых операций.

Теорема доказана.

Другие примеры применения использованного метода можно найти в [4–7].

Библиографический список

1. *Карацуба А.А., Офман Ю.П.* Умножение многозначных чисел на автоматах // ДАН СССР. 1961. Т. 145, № 2. С. 293–294.
2. *Ахо А., Хопкрофт Дж., Ульман Дж.* Построение и анализ вычислительных алгоритмов. М.: Мир, 1979.

3. *Алексеев В.Б., Вороненко А.А.* О некоторых замкнутых классах в частичной двузначной логике // Дискретная математика. 1994. Т. 6. Вып. 4. С. 59–79.
4. *Алексеев В.Б.* Логические полукольца и их использование для построения быстрых алгоритмов // Вестн. Моск. ун-та. Матем., механ. 1997. № 1.
5. *Alekseev V.B.* Recognition of properties in k-valued logic and approximate algorithms // Lecture Notes in Computer Science. Springer-Verlag, 1987. T. 278. C. 10–13.
6. *Алексеев В.Б., Кривенко М.М.* О сложности распознавания полноты систем функций в классе P_3^* // Вестн. Моск. ун-та. Матем., механ. 1997. № 3.
7. *Алексеев В.Б.* Ступенчатые билинейные алгоритмы и распознавание полноты в k-значных логиках // Известия вузов. Математика. 1988. № 7. С. 19–27.

Вычисление энтропии и размерностных инвариантов динамических систем

Е.А. Тимофеев

Введение

При изучении сложных динамических систем одними из самых важных являются размерностные инварианты (метрическая энтропия, корреляционные, обобщенные и другие размерности). Поэтому сотни работ посвящены вычислению размерностных инвариантов для различных динамических систем.

Большинство этих инвариантов является характеристиками инвариантной меры рассматриваемой динамической системы. Поэтому для их вычисления нужно иметь оценки инвариантной меры. Для получения таких оценок обычно рассматривают разбиение исходного пространства и оценивают вероятность попадания в каждый элемент разбиения. Основные трудности такого подхода состоят в том, что разбиение должно быть достаточно мелким, а искомые вероятности различаются на порядки.

Оценки размерностных характеристик, предлагаемые в настоящей работе, не требуют построения разбиений и предварительных оценок инвариантной меры. Для их вычисления нужно иметь траектории, которые начинаются в n независимых точках распределенных по выбранной (не обязательно инвариантной) мере.

Основной результат настоящей работы состоит в том, что построенные статистические оценки размерностных характеристик имеют степенную точность по n. Подчеркнем, что для большинства существующих методов точность оценивается как $\mathcal{O}(1/\log n)$.

Следует отметить, что в настоящее время применение метода Монте-Карло в исследовании динамических систем пропагандируется в работах С.Смейла (см., напр., [12]).

Подход, рассматриваемый в статье, был начат в работах [5, 6]. Близкие идеи предлагались также в работе Р.Л. Добрушина [4](для энтропии) и в работе Р. Бадии и А. Полити [1] (для размерностей).

1. Постановка задачи, обозначения и основной результат

Пусть дано компактное метрическое пространство Ω с метрикой $\rho = \rho(x, y)$ и с борелевской вероятностной мерой μ. Для удобства будем считать, что $\operatorname{diam}\Omega \leqslant 1$.

1.1. Определение β-статэнтропии меры

Прежде чем приводить определение, введем две вспомогательные функции и функционал.

Через $B(x, r)$ будем обозначать открытый шар радиуса r с центром в точке x. Через $r = \nu(t, x)$ обозначим обратную функцию к функции $t = \mu(B(x, r))$ (при заданном x), положив

$$\nu(t, x) \ : \ \lambda(\{t \ : \ \nu(t, x) \leqslant r\}) = \mu(B(x, r)), \tag{1}$$

где λ – мера Лебега на $[0, 1]$. Отметим, что функция $t = \mu(B(x, r))$ может иметь участки постоянства и точки разрыва.

Пусть задан вещественный параметр β.

Для вещественных функций $u(x)$ на Ω введем функционал $N_\beta(u)$, положив

$$N_\beta(u) = \gamma^{-1}\left(\int_\Omega \gamma(|u(x)|)d\mu(x)\right), \tag{2}$$

где

$$\gamma(t) = \begin{cases} t^\beta, & \beta \neq 0; \\ -\ln t, & \beta = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Отметим, что только для функций $\gamma(t)$, равных t^β или $-\ln t$, для функционала $N_\beta(u)$ выполняется равенство [10. Гл. 3]

$$N_\beta(Cu) = |C|N_\beta(u). \tag{4}$$

Отметим также, что для любых монотонных положительных функций $\gamma(t)$ справедливо очевидное неравенство

$$N_\beta(u) \leqslant N_\beta(v), \text{ если } |u(x)| \leqslant |v(x)|. \tag{5}$$

Через $\chi(\beta, t)$ будем обозначать функцию

$$\chi(\beta, t) = N_\beta(\nu(t, \cdot)). \tag{6}$$

Нижней и верхней β-статэнтропиями меры μ относительно метрики ρ будем называть величины

$$\underline{\eta}(\beta, \mu, \rho) = \underline{\lim}_{t\to 0+}\frac{\ln t}{\ln \chi(\beta, t)}, \quad \overline{\eta}(\beta, \mu, \rho) = \overline{\lim}_{t\to 0+}\frac{\ln t}{\ln \chi(\beta, t)}. \tag{7}$$

Если $\underline{\eta}(\beta, \mu, \rho) = \overline{\eta}(\beta, \mu, \rho) = \eta(\beta, \mu, \rho)$, то величину $\eta(\beta, \mu, \rho)$ будем называть *β-статэнтропией.*

Напомним, что *нижней и верхней локальными размерностями меры μ в точке x* пространства Ω называются величины

$$\underline{d}_\mu(x) = \underline{\lim}_{u\to 0}\frac{\ln \mu(B(x, u))}{\ln u}, \quad \overline{d}_\mu(x) = \overline{\lim}_{u\to 0}\frac{\ln \mu(B(x, u))}{\ln u}. \tag{8}$$

Если $\underline{d}_\mu(x) = \overline{d}_\mu(x) = d_\mu(x)$, то величина $d_\mu(x) = d(x)$ называется *локальной размерностью меры* μ *в точке* x.

Мера μ называется *точно размерностной*, если для μ-почти всех точек $x \in \Omega$ существует и постоянна точечная размерность $d(x) = d$. Для точно размерностных мер число d совпадает с размерностью Хаусдорфа меры μ, которую будем обозначать через $\dim_H \mu$.

1.2. Постановка задачи

Пусть даны значения независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, принимающих значение в Ω и одинаково распределенных по мере μ.

Требуется найти β-статэнтропию $\eta(\beta, \mu, \rho)$.

Для нахождения $\eta(\beta, \mu, \rho)$ предлагаются две статистических оценки, описываемые в следующем подразделе.

1.3. Статистические оценки β-статэнтропии

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ – заданные точки метрического пространства Ω. Пусть k – натуральное число.

Статистические оценки $\eta_n^{(k)}(\beta, \rho)$, $\zeta_n^{(k)}(\beta, \rho)$ строятся следующими простыми вычислениями:

- находим вспомогательную случайную величину

$$r_n^{(k)}(\beta) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \gamma \left(\min_{i:i \neq j}{}^{(k)} \rho(\xi_i, \xi_j) \right), \tag{9}$$

  где $\min^{(k)}\{x_1, \ldots, x_N\} = x_k$, если $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_N$;

- полагаем первой оценкой β-статэнтропии величину

$$\zeta_n^{(k)}(\beta, \rho) = -\frac{\ln n}{\ln \gamma^{-1}(r_n^{(k)}(\beta))}; \tag{10}$$

- второй оценкой β-статэнтропии полагаем величину

$$\eta_n^{(k)}(\beta,\rho) = \begin{cases} \dfrac{\beta r_n^{(k)}(\beta)}{k(r_n^{(k+1)}(\beta) - r_n^{(k)}(\beta))}, & \beta \neq 0; \\ \\ \dfrac{1}{k(r_n^{(k)}(0) - r_n^{(k+1)}(0))}, & \beta = 0. \end{cases} \tag{11}$$

Целое число k, $1 \leqslant k \ll n$ нужно для того, чтобы обеспечить существование средних значений каждого слагаемого в сумме (9) (для $\beta < 0$). Если k достаточно большое, то далее будет показано, что обе оценки не зависят от k и являются состоятельными.

Итак, оценки β-статэнтропии $\eta_n^{(k)}(\beta,\rho)$ и $\zeta_n^{(k)}(\beta,\rho)$ строятся с использованием параметра β и метрики ρ на пространстве Ω.

Подчеркнем, что мера μ в явном виде не используется при построении оценки, а участвует только как распределение случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$.

1.4. Несмещенность и состоятельность оценок

Математическое ожидание и дисперсию вещественной случайной величины ξ будем обозначать через $\mathsf{E}\xi$ и $\mathsf{D}\xi$.

Теорема 1. Пусть для меры μ и метрики ρ существует $\eta(\beta,\mu,\rho) > 0$ и k удовлетворяет неравенству

$$k\eta(\beta,\mu,\rho) + \beta > 0, \tag{12}$$

тогда

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{E}\left[\zeta_n^{(k)}(\beta,\rho)\right]^{-1} = \eta(\beta,\mu,\rho)^{-1}. \tag{13}$$

Эта теорема, в частности, показывает, что оценка $\zeta_n(\beta,\rho)$ не зависит от параметра k (если он достаточно большой).

Теорема 2. Пусть для меры μ и метрики ρ существуют $\eta(\beta) = \eta(\beta,\mu,\rho) > 0$, $\eta(2\beta) = \eta(2\beta,\mu,\rho) > 0$ и выполнены условия

$$\exists d > 0 : \int_\Omega \mu(B(x,r))d\mu(x) = \mathcal{O}(r^d) \ \text{ при } r \to 0, \tag{14}$$

$$\exists \Delta > 0 : \forall m > 0 \int_{\Omega} \exp\left(-r^{-\Delta}\mu(B(x,r))\right) d\mu(x) = \mathcal{O}(r^m) \ \text{ при } r \to 0. \tag{15}$$

Пусть для некоторого $b > 0$ выполняется неравенство

$$\frac{\beta}{\eta(2\beta)} - \frac{\beta}{\eta(\beta)} \geqslant \frac{b-1}{2}, \tag{16}$$

и k удовлетворяет неравенству

$$\left([(k+1)/2] - 2\right)\eta(\beta) + \beta > 0, \tag{17}$$

тогда

$$\mathsf{D}r_n^{(k)}(\beta) = \mathcal{O}(n^{-c-2\beta/\eta(\beta)}),$$

где $c < \min\{1, b, d/\Delta\}$.

Условия (14)–(15) хотя и громоздки, но имеют интегральный характер. При локальной характеризации эти условия существенно упрощаются. Нетрудно проверить справедливость следующего утверждения.

Замечание 1. Пусть выполнено условие

$$\exists \overline{d} > \underline{d} > 0, C > 0 :$$

$$C^{-1}r^{\overline{d}} \leqslant \mu(B(x,r)) \leqslant Cr^{\underline{d}}, \forall r > 0, \text{ для } \mu \text{-почти всех } \ x \in \Omega, \tag{18}$$

тогда условие (14) выполнено для $d = \underline{d}$, условие (15) – для $\Delta > \overline{d}$.

Итак, оценка $\zeta_n^{(k)}(\beta, \rho)$ является состоятельной.

Наличие множителя $\ln n$ в (10) не позволяет оценить точность первой оценки $\zeta_n^{(k)}(\beta, \rho)$ лучше, чем $\mathcal{O}(1/\ln n)$. Для второй оценки $\eta_n^{(k)}(\beta, \rho)$ точность $\mathcal{O}(n^{-c})$ будет доказана при более сильных ограничениях.

Теорема 3. Пусть выполнены условия (14)–(16), k удовлетворяет неравенству (17), и существуют такие константы $\eta > 0$, $a > 0$, A (зависящие от β), что

$$\ln \chi(\beta, t) = \frac{\ln t}{\eta} + A + \mathcal{O}(t^a), \ t \to 0+, \tag{19}$$

тогда существует $\eta(\beta, \mu, \rho) = \eta$,

$$\mathsf{E}\left[\eta_n^{(k)}(\beta, \rho)^{-1} - \eta^{-1}\right]^2 = \mathcal{O}(n^{-c}), \tag{20}$$

где $c < \min\{1 - b, d/\Delta, 2a\}$.

Таким образом, оценка $\eta_n^{(k)}(\rho)$ является асимптотически несмещенной и состоятельной, а ее точность имеет степенной порядок убывания.

2. Свойства β-статэнтропии

Утверждение 1. Функция $\beta/\overline{\eta}(\beta, \mu, \rho)$ вогнута по β.

Утверждение 2. Пусть Ω_1, Ω_2 – компактные метрические пространства с метриками ρ_1 и ρ_2, пусть μ_1 – борелевская вероятностная мера на Ω_1, пусть $F : \Omega_1 \to \Omega_2$ – билипшицев гомеоморфизм и пусть существует β-статэнтропия $\eta(\beta, \mu_1, \rho_1)$ для тройки $(\Omega_1, \rho_1, \mu_1)$, тогда β-статэнтропия существует для тройки $(\Omega_2, \rho_2, \mu_2 = \mu_1 \circ F^{-1})$ и равна той же самой функции $\eta(\beta, \mu_1, \rho_1)$.

Доказанное утверждение не только переносит β-статэнтропию на другие пространства, но и показывает ее инвариантность при гладкой замене метрики.

Следствие 1. Пусть ρ_1 и ρ_2 — две метрики на Ω такие, что для некоторой константы $C > 1$

$$C^{-1}\rho_1(x, y) \leqslant \rho_2(x, y) \leqslant C\rho_1(x, y), \forall x, y \in \Omega,$$

пусть существует β-статэнтропия $\eta(\beta, \mu, \rho_1)$ для тройки (Ω, ρ_1, μ), тогда β-статэнтропия существует для тройки (Ω, ρ_2, μ) и равна той же самой функции $\eta(\beta, \mu, \rho_1)$.

Следующее предложение показывает, что инвариантность β-статэнтропии при гладкой замене меры верна только при $\beta \neq 0$.

Утверждение 3. Пусть μ, $\tilde{\mu}$ — две борелевских вероятностных меры на Ω такие, что для некоторой константы $C > 1$

$$C^{-1}\mu(S) \leqslant \tilde{\mu}(S) \leqslant C\mu(S) \quad \forall S \subset \Omega,$$

пусть $\beta \neq 0$ и пусть существует β-статэнтропия $\eta(\beta, \mu, \rho)$ для тройки (Ω, ρ, μ), тогда β-статэнтропия существует для тройки $(\Omega, \rho, \tilde{\mu})$ и равна той же самой функции $\eta(\beta, \mu, \rho)$.

Отметим, что из этого утверждения видно различие между β-статэнтропией при $\beta \neq 0$ (похожей на HP-спектр размерностей), которая не изменяется при гладкой замене меры, и β-статэнтропией с $\beta = 0$ (похожей на метрическую энтропию), которая изменяется при такой замене.

Утверждение 4. Пусть выполнено условие (18), тогда

$$\underline{d} \leqslant \underline{\eta}(\beta, \mu, \rho) \leqslant \overline{\eta}(\beta, \mu, \rho) \leqslant \overline{d}.$$

Следущее утверждение показывает, что для 0-статэнтропии $\eta(0, \mu, \rho)$ справедливо более сильное утверждение.

Утверждение 5. Справедливы неравенства

$$\left(\int_\Omega \frac{d\mu(x)}{\underline{d}(x)}\right)^{-1} \leqslant \underline{\eta}(0, \mu, \rho) \leqslant \overline{\eta}(0, \mu, \rho) \leqslant \left(\int_\Omega \frac{d\mu(x)}{\overline{d}(x)}\right)^{-1}. \qquad (21)$$

Применив теорему Янга, (см., напр., [11. С. 42]), получим

Следствие 2. Пусть μ – точно размерностная мера, тогда существует 0-статэнтропия $\eta(0, \mu, \rho)$ и $\eta(0, \mu, \rho) = \dim_H \mu$.

Отметим, что рассмотренные ниже марковские меры являются точно размерностными, а значения β-статэнтропии $\eta(\beta, \mu, \rho)$ (при различных β) заполняют целый отрезок.

3. Марковские меры

Покажем, что для марковских мер (на пространстве последовательностей) β-статэнтропия существует и выполнены все условия теорем 1–3.

Пусть задана марковская цепь с множеством состояний $S = \{0, 1, \ldots, s-1\}$, матрицей переходных вероятностей $||a_{ij}||_0^{s-1}$ и стационарным распределением $\{p_i \ : \ i \in S\}$ на S, где

$$p_j = \sum_{i=0}^{s-1} p_i a_{ij}, \quad j \in S.$$

Для простоты будем считать, что $0 < a_{ij} < 1$.

Рассмотрим пространство последовательностей $\Omega = S^{\mathbb{N}}$, где $S = \{0, 1, 2, \ldots, s-1\}$, а $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Точки пространства $S^{\mathbb{N}}$ будем обозначать через

$$x = (x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots), \ \ x_i \in S.$$

На пространстве $S^{\mathbb{N}}$ введем метрику, положив

$$\rho(x, y) = \theta^{-n}, \ \ n \ : \ x_n \neq y_n, \ x_0 = y_0, \ldots, x_{n-1} = y_{n-1}; \tag{22}$$

где $\theta > 1$ – некоторый параметр.

Через σ будем обозначать сдвиг

$$\sigma(x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots) = (x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}, \ldots).$$

Ясно, что в метрике ρ, заданной в (22), сдвиг σ является непрерывным преобразованием $(\rho(\sigma(x), \sigma(y)) = \min\{1, \theta\rho(x, y)\})$ и μ – инвариантная мера сдвига.

На пространстве $\Omega = S^{\mathbb{N}}$ определим меру μ как марковскую меру с начальным распределением p_i и матрицей переходных вероятностей a_{ij}.

Утверждение 6. Для марковской меры μ и метрики ρ 0-статэнтропия существует и

$$\eta(0, \mu, \rho) = \frac{h(\sigma)}{\ln \theta}, \tag{23}$$

где через

$$h(\sigma) = -\sum_{i=0}^{s-1}\sum_{j=0}^{s-1} p_i a_{ij} \ln a_{ij} \tag{24}$$

обозначается энтропия сдвига σ, а θ – параметр метрики (22).

Теорема 4. Для марковской меры μ и метрики ρ β-статэнтропия существует и задается уравнением

$$\eta(\beta,\mu,\rho) = \frac{\beta}{1-q(\beta)}, \tag{25}$$

где $q(\beta)$ является корнем уравнения

$$\Phi(q) = \theta^{\beta}, \tag{26}$$

а через $\Phi(q)$ обозначается спектральный радиус матрицы $||a_{ij}^q||_0^{s-1}$.

Следствие 3. Для бернуллиевской ($a_{ij} = p_j$) меры μ и метрики ρ β-статэнтропия существует и задается уравнением (25), где $q(\beta)$ является корнем уравнения

$$\sum_{i=0}^{s-1} p_i^q = \theta^{\beta}. \tag{27}$$

Из определения функции $q(\beta)$ видно, что она является убывающей от $+\infty$ до $-\infty$. Поэтому β-статэнтропия марковской меры μ совпадает с НР-спектром размерностей, построенным по параметру $q+1$.

Утверждение 7. Для марковской меры μ и метрики ρ выполнены все условия на меру и метрику в теоремах 2–3.

4. Динамические системы

Опишем применение оценок (9–11) для нахождения размерностных характеристик динамической системы.

Пусть дано компактное метрическое пространство X с метрикой d и непрерывное отображение $T : X \to X$.

Обозначим через P неизвестную инвариантную меру T и будем считать, что P является борелевской и вероятностной.

Первым необходимым условием применения оценок (9–11) для нахождения размерностных характеристик является наличие n независимых и одинаково распределенных по мере P начальных точек $x_1, \ldots, x_n$.

Для построения $x_1, \ldots, x_n$ выбираем некоторую меру P_0 на X и для n независимых и одинаково распределенных по мере P_0 начальных точек $x_1^0, \ldots, x_n^0$ и вычисляем $x_i = T^m(x_i^0)$, где параметр m выбирается достаточно большим. Мера P_0 должна быть достаточно гладкой, чтобы можно было моделировать последовательность независимых одинаково распределенных по мере P_0 начальных точек, а носитель P_0 должен лежать в окрестности аттрактора. Параметр m выбирается так, чтобы обеспечить попадание точки на аттрактор с удовлетворяющей нас точностью.

Вторым необходимым условием применения оценок (9–11) является выбор компактного метрического пространства Ω и метрики ρ. Рассмотрим более подробно два стандартных случая:

- $\Omega = X$;
- Ω – символическая динамическая система.

4.1. $\Omega = X$

В этом случае последовательность точек $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, по которой строятся оценки, совпадает с $x_1, \ldots, x_n$ и мера $\mu = P$. В качестве метрики ρ можно взять метрику d или рассмотреть семейство метрик

$$d_m(x, y) = \max_{0 \leqslant i \leqslant m} \{d(T^i(x), T^i(y))\},\ x, y \in X\}. \tag{28}$$

Напомним (см., напр., [11]) формулу Брина-Катка для энтропии эргодического преобразования T

$$h_\mu(T) = \lim_{m \to \infty, r \to 0} \frac{-\ln \mu(B_m(x, r))}{m},\ \text{для } \mu\text{-почти всех } x \in X, \tag{29}$$

где $h_\mu(T)$ – метрическая энтропия T, а $B_m(x,r)$ – шар в метрике d_m.

Применяя эту формулу и следствие 2, получаем

Утверждение 8. Пусть преобразование T является эргодическим, тогда

$$\lim_{m\to\infty} \eta(0,\mu,d_m) = h_\mu(T).$$

4.2. Символические динамические системы

Напомним (см., напр., [11]) определение символической динамической системы.

Пусть задано конечное измеримое разбиение пространства X на s подмножеств, которое будем задавать функцией $\alpha : X \to S$. Рассмотрим пространство последовательностей $S^{\mathbb{N}}$, где $S = \{0,1,2,\ldots,s-1\}$.

На пространстве $S^{\mathbb{N}}$ введем метрику (22) с параметром $\theta > 1$. Отметим, что выбор метрики ρ обусловлен следующими ее свойствами:

1) в этой метрике шары являются цилиндрами,

2) для вычисления $\rho(x,y)$ достаточно знания только конечного числа элементов последовательностей x и y.

Первое свойство существенно облегчает доказательства и вычисления. Второе свойство позволяет точно находить $\rho(x,y)$ в вычислительных экспериментах.

Инвариантная мера P преобразования T порождает инвариантную меру μ сдвига σ на Ω (см., напр., [8]). По построению мера μ является вероятностной и борелевской.

Определим *символическую динамическую систему* (Ω,σ,μ) (σ – сдвиг), построенную по динамической системе (X,T,P) и по функции $\alpha : X \to S$, положив

$$\Omega = \{\xi \ : \ \xi = (\alpha(x), \alpha(T(x)), \ldots, \alpha(T^n(x)), \ldots), \ \forall x \in X\}. \qquad (30)$$

Утверждение 9. Пусть для динамической системы (X,T,P) преобразование T является эргодическим, тогда

$$\underline{\eta}(0,\mu,\rho) = \overline{\eta}(0,\mu,\rho) = \frac{h(T,\alpha)}{\ln\theta},$$

где $h(T, \alpha)$ – энтропия на один знак разбиения α, θ – параметр метрики (22).

Итак, для того, чтобы применить оценки (9–11), выбираем вспомогательный параметр m и по заданной последовательности $x_1, \ldots, x_n$ строим последовательность точек $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \in \Omega$, полагая

$$\xi_{ij} = \alpha(T^j(x_i)),\ j = 0, 1, \ldots, m,\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Если при нахождении оценок (9–11) все расстояния $\rho(\xi_i, \xi_j)$ больше θ^{-m}, то они являются расстояниями между бесконечными последовательностями ξ_i (хотя и найдены по m первым элементам последовательностей). Если при нахождении оценок (9–11) одно из расстояний $\rho(\xi_i, \xi_j)$ равно θ^{-m}, то параметр m нужно увеличить.

Библиографический список

1. *Бадии Р., Полити А.* Численное исследование неоднородных фракталов. Фракталы в физике. М.: Наука, 1988. С. 632–637.
2. *Биллингслей П.* Эргодическая теория и информация. М.: Мир, 1969.
3. *Боуэн Р.* Методы символической динамики. М.: Мир, 1979.
4. *Добрушин Р.Л.* Упрощенный метод экспериментальной оценки энтропии стационарной последовательности // Теория вероят. и ее примен. 1958. Т. III. № 4. С. 462–464.
5. *Майоров В.В., Тимофеев Е.А.* Состоятельная оценка размерности многообразий и самоподобных фракталов // ЖВМ и МФ. 1999. Т. 39. № 10. С. 1721–1729.
6. *Майоров В.В., Тимофеев Е.А.* Статистическая оценка обобщенных размерностей // Мат. заметки. 2002. Т. 71. № 5. С. 697–712.
7. *Мартин Н., Ингленд Дж.* Математическая теория энтропии. М.: Мир, 1988.
8. *Синай Я.Г.* Введение в эргодическую теорию. Ереван : Изд-во ЕГУ, 1973.
9. *Федерер Г.* Геометрическая теория меры. М.: Наука, 1987.

10. *Харди Г., Литтлвуд Дж., Пойа Г.* Неравенства. М.: ИЛ, 1948.
11. *Pesin Ya.* Dimension Theory in Dynamical Systems: Contemporary Views and Applications. Chicago : The University of Chicago Press, 1997.
12. *Cucker F., Smale S.* On the mathematical foundation of learning // Bull of the AMS. 2001. V. 39. № .1. P. 1–49.

Экстремумы на ветвящихся процессах[1]

А.В. Лебедев

Рассмотрим ветвящийся процесс Z_n, $n \geq 0$, с одним типом частиц и дискретным временем, $Z_0 = 1$. Пусть задано также семейство независимых одинаково распределенных величин $\xi_{m,n}$. Далее будем изучать поведение максимумов

$$M_n = \bigvee_{m=1}^{Z_n} \xi_{m,n}, \quad n \geq 0.$$

Подобная модель может описывать, например, растущую популяцию живых организмов, каждый из которых обладает некоторым случайным признаком, а интерес представляет максимальное значение этого признака в поколении. В простейшей модели мы не учитываем возможной зависимости признаков у организмов, обусловленной общей наследственностью. Если ее учитывать, признаки оказываются положительно зависимы (ассоциированы), и поэтому максимумы их будут стохастически не больше, чем у независимых; таким образом, получаем оценку сверху.

Возможно также приложение в теории прочности, если прочность образца определяется набором “слабых точек”, появление которых может быть описано ветвящимся процессом (например, в результате коррозии). Предполагается, что прочность образца равна

[1]Работа выполнена при поддержке по грантам РФФИ 03-01-00724, 04-01-00700 и по гранту НШ 1758.2003.1.

минимуму из прочностей любых его частей, но от минимумов легко перейти к максимумам, взяв исходные величины с обратным знаком.

Далее мы будем предполагать, что число непосредственных потомков всегда не меньше единицы (так что процесс не вырождается) и его среднее $\mu > 1$ конечно. Обозначим производящую функцию через $f(s)$, тогда $f(0) = 0$ и $f(x) < x$ для всех $x \in (0, 1)$.

Как известно, для надкритических процессов имеет место предел

$$\frac{Z_n}{\mu^n} \xrightarrow{\cdot\cdot} W, \quad n \to \infty,$$

причем преобразование Лапласа $\varphi(t) = \mathbf{M}e^{-tW}$ однозначно определяется условиями [1. С. 31]:

$$\varphi(\mu t) = f(\varphi(t)), \quad t \geq 0; \quad \varphi'(0) = -1. \tag{1}$$

Обозначим распределение $\xi_{m,n}$ через F. Предположим, что оно принадлежит области притяжения какого-либо невырожденного закона для максимумов, т.е. существуют такие функции $a(r) > 0$, $b(r)$, $r > 0$, и невырожденное распределение G, что

$$F^r(a(r)x + b(r)) \to G(x), \quad r \to \infty. \tag{2}$$

Согласно теореме об экстремальных типах [2. С. 22], возможны лишь три предельных закона (с точностью до линейной нормировки): $G_1(x) = \exp\{-e^{-x}\}$; $G_2(x) = \exp\{-x^{-\gamma}\}$, $\gamma > 0$, $x > 0$; $G_3(x) = \exp\{-(-x)^\gamma\}$, $\gamma > 0$, $x < 0$.

Теорема 1. *Пусть выполнено* (2), *тогда*

$$\mathbf{P}(M_n \leq a(\mu^n)x + b(\mu^n)) \to \varphi(-\ln G(x)), \quad n \to \infty,$$

где φ *определяется* (1).

Пример 1. В случае геометрического распределения числа потомков получаем $\varphi(t) = 1/(1+t)$ и соответствующие предельные законы: $\Psi_1(x) = 1/(1+e^{-x})$ (логистическое распределение); $\Psi_2(x) = 1/(1+x^{-\gamma})$, $x > 0$; $\Psi_3(x) = 1/(1+(-x)^\gamma)$, $x < 0$.

На самом деле класс возможных предельных законов Ψ для M_n гораздо шире, чем возникающий из теоремы 1. Понятно, что он пополняется за счет исходных распределений F, не принадлежащих области притяжения какого-либо экстремального закона. Чтобы исследовать данный класс, нужен другой подход.

Как и в классическом случае, класс предельных распределений совпадает с классом устойчивых (относительно некоторых операций) распределений. В данном случае речь идет о взятии максимума случайного числа (потомков) от случайных величин и линейной нормировке. Получаем определяющее соотношение

$$\Psi(ax+b) = f(\Psi(x)), \quad \forall x \in \mathsf{R}, \quad a > 0. \tag{3}$$

Обозначим верхнюю и нижнюю крайние точки распределения Ψ через α и ω.

Теорема 2. *Для несобственных распределений, заданных* (3), *возможны только следующие три случая:*

1) $0 < a < 1$, $\alpha = b/(1-a)$, $\omega = +\infty$*;*

2) $a = 1$, $b < 0$, $\alpha = -\infty$, $\omega = +\infty$*;*

3) $a > 1$, $\alpha = -\infty$, $\omega = b/(1-a)$.

Теорема 3. *Для любых чисел* $c_1 < c_2$, $a > 0$ *и непрерывной справа не убывающей функции* $\psi(x)$ *на* $[c_1, c_2)$, $0 < \psi(c_1) < \psi(c_2 - 0) < 1$, *существует* Ψ, *удовлетворяющее* (3) *с заданным* a *и* $b = c_1 - ac_2$, *такое, что* $\Psi(x) = \psi(x)$ *на* $[c_1, c_2)$.

Очевидно, формула (3) позволяет просто продолжить ψ с $[c_1, c_2)$ на любой полуинтервал вида $[c_{l-1}, c_l)$, где $c_{l-1} = ac_l + b$, $l \in \mathsf{Z}$. Распределение Ψ можно сделать непрерывным, полагая $\psi(c_1) = f(\psi(c_2 - 0))$, а также добиться произвольной степени гладкости.

Пример 2. Функция распределения

$$\Psi(x) = \exp\{-\mu^{-(x+\sin x)/(2\pi)}\}$$

удовлетворяет (3) с $a = 1$, $b = -2\pi$ при $f(s) = s^\mu$, т.е. когда каждая частица имеет ровно μ потомков, $\mu \geq 2$. Таким образом, если $F = \Psi$, то

$$\mathbf{P}(M_n - 2\pi n \leq x) = \Psi(x).$$

Далее рассмотрим случай геометрического распределения F. Как известно, в классической схеме оно не принадлежит области притяжения ни одного невырожденного предельного закона для максимумов [2. С. 38]. Однако для максимумов на ветвящихся процессах можно получить невырожденные предельные законы, причем они оказываются дискретными.

Пример 3. Пусть $F(k) = 1 - \mu^{-k}$, $k \geq 0$, и каждая частица имеет ровно μ потомков, $\mu \geq 2$. Тогда

$$\mathbf{P}(M_n - n \leq k) \to \exp\{-\mu^{-k}\}, \quad n \to \infty, \quad k \in \mathsf{Z}.$$

Пример 4. Пусть $F(k) = 1 - \mu^{-k}$, $k \geq 0$, и каждая частица имеет геометрически распределенное число потомков со средним $\mu > 1$. Тогда

$$\mathbf{P}(M_n - n \leq k) \to \frac{1}{1+\mu^{-k}} \quad n \to \infty, \quad k \in \mathsf{Z}.$$

Здесь используем тот факт, что функция распределения M_n имеет вид $f^{(n)}(F(x))$, где $f^{(n)}$ — n-ая итерация f.

Библиографический список

1. *Харрис Т.* Теория ветвящихся случайных процессов. М.: Мир, 1966.
2. *Лидбеттер М., Линдгрен Г., Ротсен Х.* Экстремумы случайных последовательностей и процессов. М.: Мир, 1989.

О тождестве типа тождества Вальда для немарковского момента

М.А. Урусов

1. Свойство момента достижения максимума. Пусть $B = (B_t)_{0 \leqslant t \leqslant 1}$ — стандартное броуновское движение, выходящее из нуля, и пусть θ — момент достижения им своего максимума, т.е. $B_\theta = \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} B_t$ (такой момент θ определен п.в. однозначно). Обозначим через $(\mathcal{F}_t^B)_{0 \leqslant t \leqslant 1}$ фильтрацию, порожденную процессом B.

Лемма 1. Для любого $(\mathcal{F}_t^B)$-момента остановки τ $(0 \leqslant \tau \leqslant 1)$ имеет место равенство

$$\mathsf{E}(B_\theta - B_\tau)^2 = \mathsf{E}|\theta - \tau| + \frac{1}{2}. \tag{1}$$

Доказательство. **1)** В процессе доказательства основного результата в [1] авторы устанавливают, что

$$\mathsf{E}(B_\theta - B_\tau)^2 = 1 + \mathsf{E}\int_0^\tau \left(4\Phi\left(\frac{S_t - B_t}{\sqrt{1-t}}\right) - 3\right) dt, \tag{2}$$

где $S = (S_t)_{0 \leqslant t \leqslant 1}$ — процесс максимума для B, т.е. $S_t = \max_{0 \leqslant s \leqslant t} B_s$, а $\Phi(x)$ — функция распределения стандартной нормальной случайной величины.

Для замкнутости изложения приведем доказательство формулы (2). Имеем

$$\mathsf{E}(B_\theta - B_\tau)^2 = \mathsf{E}(S_1 - B_\tau)^2 = \mathsf{E}(S_1^2) - 2\mathsf{E}(S_1 B_\tau) + E(B_\tau^2). \tag{3}$$

Известно (см. [4. P. 93]), что случайная величина S_1 допускает интегральное представление $S_1 = \mathsf{E}S_1 + \int_0^1 H_t\, dB_t$ с $H_t = 2 - 2\Phi(\frac{S_t - B_t}{\sqrt{1-t}})$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Поэтому

$$\mathsf{E}(S_1 B_\tau) = \mathsf{E}\left[\left(\int_0^1 H_t\, dB_t\right)\left(\int_0^\tau dB_t\right)\right] = \mathsf{E}\int_0^\tau H_t\, dt. \tag{4}$$

Ясно также, что $\mathsf{E}(B_\tau^2) = \mathsf{E}\tau$. Поскольку случайная величина S_1 распределена как модуль стандартной нормальной случайной величины, то $\mathsf{E}(S_1^2) = 1$. Отсюда и из (3) и (4) вытекает (2).

2) Определим процесс $\pi_t = \mathsf{P}(\theta \leqslant t | \mathcal{F}_t^B)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Имеем

$$\pi_t = \mathsf{P}(\theta \leqslant t | \mathcal{F}_t^B) = \mathsf{P}(S_t \geqslant \max_{t \leqslant s \leqslant 1} B_s | \mathcal{F}_t^B) =$$

$$= \mathsf{P}(S_t - B_t \geqslant \max_{t \leqslant s \leqslant 1}(B_s - B_t) | \mathcal{F}_t^B).$$

Поскольку случайная величина $S_t - B_t$ $\mathcal{F}_t^B$-измерима, а $\max_{t \leqslant s \leqslant 1}(B_s - B_t)$ не зависит от σ-алгебры $\mathcal{F}_t^B$, то последняя условная вероятность равна значению функции распределения случайной величины $\max_{t \leqslant s \leqslant 1}(B_s - B_t)$ в точке $S_t - B_t$. Следовательно,

$$\pi_t = 2\Phi\left(\frac{S_t - B_t}{\sqrt{1-t}}\right) - 1, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1. \tag{5}$$

Далее,

$$|\theta - \tau| = (\tau - \theta)^+ + \theta - \tau \wedge \theta = \theta + \int_0^\tau (I(\theta \leqslant t) - I(\theta > t))\,dt =$$

$$= \theta + \int_0^\tau (2I(\theta \leqslant t) - 1)\,dt.$$

Поэтому

$$\mathsf{E}|\theta - \tau| = \frac{1}{2} + \mathsf{E}\int_0^\tau (2I(\theta \leqslant t) - 1)\,dt = \frac{1}{2} + \mathsf{E}\int_0^1 (2I(\theta \leqslant t) - 1) I(\tau > t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{2} + \mathsf{E}\int_0^1 \mathsf{E}(2I(\theta \leqslant t) - 1|\mathcal{F}_t^B) I(\tau > t)\,dt = \frac{1}{2} + \mathsf{E}\int_0^\tau (2\pi_t - 1)\,dt.$$

Согласно (5),

$$\mathsf{E}|\theta - \tau| = \frac{1}{2} + \mathsf{E}\int_0^\tau \left(4\Phi\left(\frac{S_t - B_t}{\sqrt{1-t}}\right) - 3\right)dt. \tag{6}$$

Наконец, из (2) и (6) вытекает утверждение леммы.

Замечания. (i) Обозначим через $L = (L_t)_{0 \leqslant t \leqslant 1}$ локальное время броуновского движения B в нуле и положим $g = \sup\{0 \leqslant t \leqslant 1\colon B_t = 0\}$. Тогда для любого $(\mathcal{F}_t^{|B|})$-момента остановки τ $(0 \leqslant \tau \leqslant 1)$ имеет место равенство

$$\mathsf{E}(L_g - L_\tau + |B_\tau|)^2 = \mathsf{E}|g - \tau| + \frac{1}{2}.$$

Это вытекает из леммы 1, одинаковой распределенности процессов B и $L - |B|$ и совпадения фильтраций, порожденных процессами $|B|$ и $L - |B|$ (см. [3. Ch. VI. (2.2)]).

(ii) В формуле (1) θ не является $(\mathcal{F}_t^B)$-моментом остановки. Возникает вопрос о справедливости аналогичного утверждения, в котором рассматриваются два момента остановки.

Пусть $B = (B_t)_{t\geqslant 0}$ — стандартное броуновское движение, выходящее из нуля. Тогда для любых $(\mathcal{F}_t^B)$-моментов остановки σ и τ таких, что $\mathsf{E}\sigma < \infty$ и $\mathsf{E}\tau < \infty$, имеет место равенство

$$\mathsf{E}(B_\sigma - B_\tau)^2 = \mathsf{E}|\sigma - \tau|.$$

Действительно,

$$\begin{aligned}\mathsf{E}(B_\sigma - B_\tau)^2 &= \mathsf{E}(B_\sigma^2) + \mathsf{E}(B_\tau^2) - 2\mathsf{E}\left[\left(\int_0^\sigma dB_t\right)\left(\int_0^\tau dB_t\right)\right] \\ &= \mathsf{E}\sigma + \mathsf{E}\tau - 2\mathsf{E}(\sigma\wedge\tau) = \mathsf{E}|\sigma - \tau|.\end{aligned}$$

2. Остановка броуновского движения наиболее близко к моменту достижения максимума. Рассматриваемая в этом пункте задача — найти $(\mathcal{F}_t^B)$-момент остановки τ_*, который наиболее близок к θ в некотором смысле (или такой, что B_{τ_*} наиболее близко к $B_\theta = \max_{0\leqslant t\leqslant 1} B_t$ в некотором смысле). Если процесс B описывает движение цен акций на некотором отрезке времени, то финансовая мотивация такой постановки следующая: мы хотим, последовательно наблюдая цены акций, продать акции в момент τ_*, как можно более близкий к точке максимума θ (мы не можем продать акции в момент θ, поскольку этот момент не определяется по последовательным наблюдениям за ценами).

Первый результат в этом направлении был установлен в работе Граверсена, Пешкира и Ширяева [1]. Авторы решили задачу

$$\inf_\tau \mathsf{E}(\max_{0\leqslant t\leqslant 1} B_t - B_\tau)^2, \tag{7}$$

где инфимум берется по $(\mathcal{F}_t^B)$-моментам остановки τ $(0\leqslant\tau\leqslant 1)$. Дальнейшие результаты можно найти в [2. Ch. VIII] и в [5].

Рассмотрим задачу оптимальной остановки

$$\inf_\tau \mathsf{E}|\tau - \theta|. \tag{8}$$

Ввиду леммы 1, оптимальный момент остановки в (8) совпадает с оптимальным моментом остановки в (7). Таким образом, из результатов [1] немедленно вытекает

Пример 2. В задаче (8) существует единственный оптимальный момент остановки τ_*, и он имеет следующий вид:

$$\tau_* = \inf\{0 \leqslant t \leqslant 1\colon S_t - B_t \geqslant z_*\sqrt{1-t}\},$$

где $S_t = \max_{0\leqslant s\leqslant t} B_s$, z_* — единственный положительный корень уравнения $4\Phi(z) - 2z\varphi(z) - 3 = 0$, $\varphi(z)$ и $\Phi(z)$ — соответственно плотность и функция распределения стандартной нормальной случайной величины.

Замечания. (i) Используя самоподобность броуновского движения, получаем, что оптимальный момент остановки в постановке (8), рассматриваемой на отрезке времени $[0,T]$, имеет вид

$$\tau_* = \inf\{0 \leqslant t \leqslant T\colon S_t - B_t \geqslant z_*\sqrt{T-t}\}$$

с тем же самым z_*.

(ii) Цены акций положительны, а броуновское движение принимает отрицательные значения. Поэтому если речь идет о финансовой мотивации постановки (8), то хотелось бы решить аналогичную задачу для положительного процесса X вместо броуновского движения B (например, для $X = \mathrm{e}^B$). Поскольку в (8) участвуют только моменты времени (но не значения процессов), то при $X = f(B)$, где f — непрерывная строго возрастающая функция, решение такой задачи немедленно вытекает из теоремы 2.

3. Условно экстремальная постановка. В этом пункте решены две следующие условно экстремальные задачи:

$$\inf_{\tau\in\mathfrak{M}_\alpha} \mathsf{E}(\tau-\theta)^+ \tag{9}$$

и

$$\inf_{\tau\in\mathfrak{N}_\alpha} \mathsf{E}(\tau-\theta)^-, \tag{10}$$

где классы $(\mathcal{F}_t^B)$-моментов остановки $\mathfrak{M}_\alpha$ и $\mathfrak{N}_\alpha$ определяются формулами $\mathfrak{M}_\alpha = \{0 \leqslant \tau \leqslant 1\colon \mathsf{E}(\tau-\theta)^- \leqslant \alpha\}$ и $\mathfrak{N}_\alpha = \{0 \leqslant \tau \leqslant 1\colon \mathsf{E}(\tau-\theta)^+ \leqslant \alpha\}$, $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, а также используются обозначения $x^+ = x \vee 0$ и $x^- = -(x \wedge 0)$.

Если мы выбрали правило остановки τ, а наша цель — остановиться в момент, “близкий к θ”, то $(\tau-\theta)^+$ интерпретируется как штраф за опоздание (равный времени запаздывания), а $(\tau-\theta)^-$ — как штраф за раннюю остановку (равный времени от момента ранней остановки до θ). Тогда постановка (9) означает, что мы минимизируем средний штраф за опоздание в классе правил остановки, для которых средний штраф за раннюю остановку не превосходит α. Аналогично интерпретируется постановка (10).

Пример 3. Для любого $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$ в задаче (9) существует единственный оптимальный момент остановки τ_*, и он имеет вид

$$\tau_* = \inf\{0 \leqslant t \leqslant 1 \colon S_t - B_t \geqslant z_* \sqrt{1-t}\}, \tag{11}$$

где $S_t = \max_{0 \leqslant s \leqslant t} B_s$, а положительное число z_* однозначно определяется из условия

$$\mathsf{E}(\tau_* - \theta)^- = \alpha. \tag{12}$$

(См. также замечание (i) в конце работы.)

Пример 4. Для любого $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$ в задаче (10) существует единственный оптимальный момент остановки τ_*, и он имеет вид (11), где положительное число z_* однозначно определяется из условия

$$\mathsf{E}(\tau_* - \theta)^+ = \alpha. \tag{13}$$

(См. также замечание (i) в конце работы.)

Для решения (9) и (10) используем “метод множителей Лагранжа”. Этот метод предписывает для каждого $c > 0$ решить задачу

$$\inf_\tau \mathsf{E}[(\tau-\theta)^- + c(\tau-\theta)^+], \tag{14}$$

где инфимум берется по $(\mathcal{F}_t^B)$-моментам остановки τ $(0 \leqslant \tau \leqslant 1)$. Решение (14) является предметом следующей леммы. Потом приводится доказательство теоремы 3. Теорема 4 доказывается аналогично.

Лемма 5. Для любого $c > 0$ в постановке (14) существует единственный оптимальный момент остановки τ_*, и он имеет вид

$$\tau_* = \inf\{0 \leqslant t \leqslant 1 \colon S_t - B_t \geqslant z_c \sqrt{1-t}\},$$

где z_c — единственный положительный корень уравнения

$$(2c+2)\Phi(z) - (c+1)z\varphi(z) - (c+2) = 0, \tag{15}$$

$\varphi(z)$ и $\Phi(z)$ — соответственно плотность и функция распределения стандартной нормальной случайной величины.

Доказательство. **1)** Рассуждая так же, как в части 2) леммы 1, получаем, что

$$\mathsf{E}[(\tau-\theta)^- + c(\tau-\theta)^+] = \frac{1}{2} + \mathsf{E}\int_0^\tau F\left(\frac{S_t - B_t}{\sqrt{1-t}}\right) dt,$$

где

$$F(x) = (2c+2)\Phi(x) - (c+2).$$

Известно (см. [3. Ch. VI. (2.3), (2.12)]), что процессы $S-B$ и $|B|$ одинаково распределены, а также, что фильтрации, порожденные процессами B и $S-B$, совпадают. Поэтому (14) сводится к задаче

$$\inf_\tau \mathsf{E}\int_0^\tau F\left(\frac{|B_t|}{\sqrt{1-t}}\right) dt, \tag{16}$$

где инфимум берется по $(\mathcal{F}_t^{|B|})$-моментам остановки τ $(0 \leqslant \tau \leqslant 1)$. Далее мы решим (16) в предположении, что инфимум берется по $(\mathcal{F}_t^B)$-моментам остановки. Окажется, что оптимальный момент является $(\mathcal{F}_t^{|B|})$-моментом остановки. Тем самым, задача (16) будет решена и для случая, когда инфимум берется по $(\mathcal{F}_t^{|B|})$-моментам остановки.

Рассмотрим детерминированную замену времени $\rho_s = 1 - \mathrm{e}^{-2s}$, $s \geqslant 0$, переводящую $\mathbb{R}_+$ в $[0,1)$. Положим $Z_s = \frac{B_{\rho_s}}{\sqrt{1-\rho_s}} = \mathrm{e}^s B_{\rho_s}$, $s \geqslant 0$. Очевидно, что $\mathcal{F}_s^Z = \mathcal{F}_{\rho_s}^B$, $s \geqslant 0$. Согласно формуле Ито, процесс Z удовлетворяет уравнению

$$dZ_s = Z_s\,ds + \sqrt{2}\,d\beta_s, \tag{17}$$

где $\beta_s = \int_0^s \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^u\,dB_{\rho_u}$, $s \geqslant 0$. Процесс β — $(\mathcal{F}_s^Z)$-броуновское движение, так как это непрерывный локальный мартингал, выходящий из нуля, с $\langle\beta\rangle_s = s$.

Очевидно, что σ — $(\mathcal{F}_s^Z)$-момент остановки $(0 \leqslant \sigma \leqslant \infty)$ тогда и только тогда, когда ρ_σ — $(\mathcal{F}_t^B)$-момент остановки $(0 \leqslant \rho_\sigma \leqslant 1)$. Поскольку

$$\int_0^{\rho_\sigma} F\left(\frac{|B_t|}{\sqrt{1-t}}\right) dt = 2\int_0^\sigma \mathrm{e}^{-2s} F(|Z_s|)\, ds,$$

то (16) сводится к задаче

$$\inf_\sigma \mathsf{E} \int_0^\sigma \mathrm{e}^{-2s} F(|Z_s|)\, ds, \tag{18}$$

где инфимум берется по $(\mathcal{F}_s^Z)$-моментам остановки σ $(0 \leqslant \sigma \leqslant \infty)$.

2) Рассмотрим семейство мер $(\mathsf{P}_z)_{z\in\mathbb{R}}$ такое, что относительно меры P_z процесс Z удовлетворяет уравнению (17) с начальным условием $Z_0 = z$. Положим

$$V_*(z) = \inf_\sigma \mathsf{E}_z \int_0^\sigma \mathrm{e}^{-2s} F(|Z_s|)\, ds \tag{19}$$

($V_*(0)$ отвечает интересующей нас задаче (18)). Естественно ожидать, что оптимальный момент остановки в (19) имеет вид

$$\sigma_* = \inf\{s \geqslant 0 \colon |Z_s| \geqslant z_c\}, \tag{20}$$

где z_c — некоторый положительный порог (который следует найти). Отметим, что $|Z_s| \to \infty$ при $s \to \infty$, поэтому $\sigma_* < \infty$. Для нахождения функции цены $V_*(z)$ и порога z_c сформулируем следующую задачу Стефана (см. [6. Гл. III. § 8]):

$$(L_Z - 2)V(z) = -F(|z|), \quad |z| < z_c, \tag{21}$$

$$V(\pm z_c) = 0, \tag{22}$$

$$V'(\pm z_c) = 0, \tag{23}$$

где L_Z — инфинитезимальный оператор процесса Z. Из (17) следует, что $L_Z = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + z\frac{\partial}{\partial z}$. Из (19) и (17) следует, что функция $V_*(z)$ четна. Поэтому вместо (21)–(23) будем решать задачу

$$V''(z) + zV'(z) - 2V(z) = (c+2) - (2c+2)\Phi(z), \quad z \in (0, z_c) \tag{24}$$

с граничными условиями

$$V(z_c) = V'(z_c) = V'(0) = 0.$$

Общее решение (24) дается формулой

$$V(z) = C_1(1+z^2) + C_2[z\varphi(z) + (1+z^2)\Phi(z)] + (c+1)\Phi(z) - \frac{c+2}{2},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Из условия $V'(0) = 0$ находим, что $C_2 = -\frac{c+1}{2}$. Из условия $V'(z_c) = 0$ находим, что $C_1 = \frac{c+1}{2}\Phi(z_c)$. Из условия $V(z_c) = 0$ получаем, что z_c должно удовлетворять уравнению (15). Наконец, легко проверить, что для любого $c > 0$ уравнение (15) имеет единственный положительный корень.

3) Пусть z_c — единственный положительный корень уравнения (15). Положим

$$V(z) = \\ = \begin{cases} \frac{c+1}{2}\Phi(z_c)(1+z^2) - \frac{c+1}{2}[z\varphi(z) + (1+z^2)\Phi(z)] \\ +(c+1)\Phi(z) - \frac{c+2}{2}, & \text{если } 0 \leqslant z \leqslant z_c; \\ 0, & \text{если } z > z_c, \end{cases}$$

и доопределим $V(z)$ на $\mathbb{R}$ как четную функцию. Докажем, что заданная таким образом функция $V(z)$ совпадает с функцией цены $V_*(z)$ в задаче (19), а также, что момент остановки σ_*, определенный в (20), является оптимальным в этой задаче.

Ясно, что $V \in C^1(\mathbb{R}) \cap C^2(\mathbb{R} \setminus \{-z_c, z_c\})$. По формуле Ито (относительно меры P_z)

$$e^{-2s} V(Z_s) = V(z) + \int_0^s e^{-2u}(L_Z - 2)V(Z_u)\,du + M_s,$$

где $M_s = \int_0^s e^{-2u} V'(Z_u)\sqrt{2}\,d\beta_u$ — $(\mathcal{F}_s^Z)$-локальный мартингал. Поскольку функция $V'(z)$ ограничена, то $[M]_\infty \leqslant const < \infty$. Из неравенств Буркхольдера-Дэвиса-Ганди вытекает, что M — равномерно интегрируемый мартингал, откуда $\mathsf{E} M_\sigma = 0$ для любого

$(\mathcal{F}_s^Z)$-момента остановки σ $(0 \leqslant \sigma \leqslant \infty)$. Следовательно, для любого $(\mathcal{F}_s^Z)$-момента остановки σ

$$V(z) = \mathsf{E}_z[\mathrm{e}^{-2\sigma} V(Z_\sigma)] - \mathsf{E}_z \int_0^\sigma \mathrm{e}^{-2u}(L_Z - 2)V(Z_u)\,du \leqslant$$

$$\leqslant \mathsf{E}_z \int_0^\sigma \mathrm{e}^{-2u} F(|Z_u|)\,du, \tag{25}$$

поскольку, как легко проверить, $V(z) < 0$ при $z \in (-z_c, z_c)$, а также $(L_Z - 2)V(z) \geqslant -F(|z|)$ при $z \in \mathbb{R} \setminus \{-z_c, z_c\}$. При этом единственным моментом остановки, для которого в (25) имеет место равенство, является момент σ_*, определенный в (20).

Итак, мы доказали, что функция $V(z)$ совпадает с функцией цены $V_*(z)$ в задаче (19) и что σ_* — единственный оптимальный момент остановки. Возвращаясь к исходной постановке задачи (14), получаем утверждение леммы.

Замечание. Нетрудно установить, что z_c как функция от $c \in (0, \infty)$ строго убывает, непрерывна, $\lim_{c \downarrow 0} z_c = \infty$ и $\lim_{c \to \infty} z_c = 0$.

Доказательство теоремы 3. Положим

$$\tau(z) = \inf\{0 \leqslant t \leqslant 1 \colon S_t - B_t \geqslant z\sqrt{1-t}\} \quad \text{и} \quad f(z) = \mathsf{E}(\tau(z) - \theta)^-.$$

Легко проверить, что функция $f(z)$, $z \in (0, \infty)$, не возрастает, непрерывна, $\lim_{z \downarrow 0} f(z) = \frac{1}{2}$ и $\lim_{z \to \infty} f(z) = 0$. Поэтому найдется $z_* > 0$ такое, что $f(z_*) = \alpha$. В силу свойств z_c как функции от $c \in (0, \infty)$ найдется $c_* > 0$ такое, что $z_* = z_{c_*}$. Тогда из леммы 5 следует, что $\tau(z_*)$ — единственный оптимальный момент остановки в постановке (9).

Наконец если бы нашлось $z_{**} > 0$ такое, что $f(z_{**}) = \alpha$ и $z_{**} \neq z_*$, то $\tau(z_{**})$ был бы единственным оптимальным моментом остановки в задаче (9). Это противоречит тому, что $\tau(z_*)$ — единственный оптимальный момент остановки в этой задаче. Поэтому условие (12) однозначно определяет положительное число z_*.

Замечания. (i) Для нахождения оптимальных моментов остановки в задачах (9) и (10) требуется решить относительно z_* уравнения (12) и (13). Поэтому хотелось бы найти детерминированный алгоритм вычисления функций

$$f(z) = \mathsf{E}(\tau(z) - \theta)^- \quad \text{и} \quad g(z) = \mathsf{E}(\tau(z) - \theta)^+,$$

где

$$\tau(z) = \inf\{0 \leqslant t \leqslant 1 \colon S_t - B_t \geqslant z\sqrt{1-t}\}.$$

В работе [5] доказывается, что для любого $\lambda > 0$ уравнение

$$2(\lambda+1)u\left(\Phi(u) - \frac{1}{2}\right) - [(\lambda+1)u^2+1]\varphi(u) - u = 0$$

имеет единственный положительный корень u_λ, а также, что u_λ как функция от $\lambda \in (0,\infty)$ строго убывает, непрерывна, $\lim_{\lambda\downarrow 0} u_\lambda = \infty$ и $\lim_{\lambda\to\infty} u_\lambda = 0$. Опять используя результаты [5], можно установить, что для любого $z > 0$

$$g(z) = \frac{1}{\lambda}\left[-\frac{\varphi(z)}{z} + \lambda\left(\Phi(z) - \frac{1}{2}\right) - \frac{2-2\Phi(z)}{1+z^2}\right],$$

где $\lambda > 0$ таково, что $u_\lambda = z$. В свою очередь, из доказательства леммы 5 вытекает, что для любого $z > 0$

$$f(z) = (c+1)\Phi(z) - \frac{c}{2} - 1 - cg(z),$$

где $c > 0$ таково, что $z_c = z$.

(ii) Рассмотрим “граничные” случаи $\alpha = 0$ и $\alpha = \frac{1}{2}$ в задачах (9) и (10). Нетрудно установить, что в постановке (9) при $\alpha = 0$ единственным оптимальным моментом остановки является $\tau_* \equiv 1$, а при $\alpha = \frac{1}{2}$ единственным оптимальным моментом является $\tau_* \equiv 0$. Аналогичное справедливо и для постановки (10).

Автор очень благодарен профессору А.Н. Ширяеву за постановку задач и важные обсуждения.

Библиографический список

1. *Graversen S.E., Peskir G., Shiryaev A.N.* Stopping Brownian motion without anticipation as close as possible to its ultimate maximum. Теория вероятностей и ее применения, 45 (2000). Вып. 1. С. 125–136.
2. *Pedersen J.L.* Some results on optimal stopping and Skorokhod embedding with applications. PhD-thesis, Department of Mathematical Sciences, University of Aarhus, 2000.

3. *Revuz D., Yor M.* Continuous martingales and Brownian motion. Springer, 1994.
4. *Rogers L.C.G., Williams D.* Diffusions, Markov processes, and martingales. V. 2: Ito's calculus. John Wiley & Sons, 1987.
5. *Урусов М.А.* Об оптимальном прогнозе момента достижения максимума броуновским движением // Успехи математических наук. 57 (2002). Вып. 1. С. 165–166.
6. *Ширяев А.Н.* Статистический последовательный анализ. М.: Наука, 1976.

Комплексы прямых в бифлаговом пространстве $\overline{F_3^2}$

Г.В. Киотина

Бифлаговым пространством первого вида $\overline{F_3^2}$ в [1] названо проективное 3-пространство с абсолютом, который состоит из квадрики K_2 ранга 2 и индекса 1, распадающейся на пару плоскостей P_2^1 и P_2^2, пары прямых $P_1^1 = P_2^1 \cap P_2^2$, $P_1^2 \in P_2^1$ и точек $A = P_1^1 \cap P_1^2$, $B \in P_1^1$.

Для изучения линейчатой геометрии канонический репер $(E_0E_1E_2E_3)$ пространства $\overline{F_3^2}$ выбирается следующим образом. Вершина E_3 совпадает с точкой A, квадрика K_2 задается уравнением: $-(x^0)^2+(x^1)^2 = 0$, прямая P_2^1 задается уравнениями: $x^0 = x^1 = x^2$, точка B является единичной точкой прямой P_1^1, вершины E_0 и E_1 сопряжены относительно квадрики K_2, вершина E_2 – произвольная точка прямой P_1^2. Задание такого репера зависит от 6 параметров: 5 параметров задают вершины E_0 и E_1, один параметр задает вершину E_2, единичная точка E задается однозначно как пересечение прямых P_1^2 и BM_1, где $M_1 = E_0E_1 \cap P_2^1$.

Движениями пространства $\overline{F_3^2}$ называются его проективные автоморфизмы. Всякое движение однозначно определяется заданием двух соответственных канонических реперов. Поэтому группа G движений пространства $\overline{F_3^2}$ зависит от 6 параметров, то есть имеет такую же подвижность, что и группы движений классических неевклидовых пространств. Известно, что группа движений пространства $\overline{F_3^2}$ изоморфна группе матриц вида:

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ a_4 & a_5 & a_6 & a_7 \end{pmatrix}, \qquad \begin{gathered} a^2 - b^2 = \pm 1, \\ a_1 + a_2 + a_3 = a + b, \\ a_3 = a_6 + a_7. \end{gathered} \tag{1}$$

Учитывая (1), получим уравнения структуры пространства $\overline{F_3^2}$:

$$\begin{array}{l} dE_2 = \omega_i^j E_j, \text{ где формы } \omega_i^j \text{ удовлетворяют условиям:} \\ \omega_0^0 = \omega_1^1 = \omega_3^0 = \omega_2^1 = \omega_3^1 = \omega_3^2 = 0, \\ \omega_0^1 = \omega_1^0, \\ \omega_2^2 = \omega_0^1 - \omega_0^2 - \omega_1^2, \\ \omega_3^3 = \omega_0^1 - \omega_0^2 - \omega_1^2 - \omega_2^3. \end{array} \tag{2}$$

Рассмотрим в пространстве $\overline{F_3^2}$ комплекс прямых K. Помещая вершины E_0 и E_1 канонического репера на прямую комплекса, выделим главные дифференциальные формы

$$\omega_0^2,\ \omega_1^2,\ \omega_0^3,\ \omega_1^3. \tag{3}$$

Формы (3) линейно зависимы, так как комплекс K является трехпараметрическим множеством. Исключая из рассмотрения комплексы, для которых линейно зависимы формы ω_1^2, ω_0^3, ω_1^3, запишем дифференциальное уравнение комплекса K в окрестности нулевого порядка в виде:

$$\omega_0^2 = a\omega_1^2 + b\omega_0^3 + k\omega_1^3. \tag{4}$$

Теорема 1. Для комплекса (4) при $k \neq 0$ существует репер 1 порядка, относительно которого комплекс принимает вид:

$$\omega_0^2 = k\omega_1^3. \tag{5}$$

Доказательство. Построение канонического репера $R\{E_0E_1E_2E_3\}$ комплекса K проведем из геометрических соображений с учетом специфики абсолюта пространства $\overline{F_3^2}$. Вершину E_3 канонического репера поместим в инвариантную точку A. Для фиксации вершин E_0 и E_1 рассмотрим нормальную корреляцию, при которой каждой точке M прямой u комплекса в проективном пространстве ставится в соответствие плоскость Π, касательная к конусу прямых комплекса с вершиной в точке M [2].

Плоскость Π пересекает инвариантную прямую P_1^1 в точке N. Тем самым, между точками прямых P_1^1 и u устанавливается проективное соответствие, которое будем называть, аналогично [3], нормальной коллинеацией. За вершину E_0 репера R примем точку, соответственную точке E_3 в нормальной коллинеации. За вершину E_1 возьмем на прямой u точку, сопряженную точке E_0 относительно квадрики K_2. За вершину E_2 примем точку, соответственную в нормальной коллинеации точке E_1. Принимая точку B за единичную точку прямой P_1^1, построим единичную точку E канонического репера комплекса R однозначно.

Докажем, что при таком выборе канонического репера дифференциальное уравнение (4) примет вид (5).

Действительно, если точка E_0 неподвижна, то $dE_0 = E_0$ и $dE_1 = \omega_1^0 E_0 + \omega_1^2 E_2$, то есть $\omega_0^1 = \omega_0^2 = \omega_0^3 = 0$, $\omega_1^3 = 0$. Из уравнения (4) следует, что $a\omega_1^2 = 0$. Так как формы ω_0^1, ω_0^3, ω_1^3 линейно независимы, то получим, что $a = 0$.

В силу неподвижности точки E_1, имеем: $dE_1 = 0$, $dE_0 = \omega_0^1 E_0 + \omega_0^3 E_3$, то есть $\omega_0^1 = \omega_1^2 = \omega_1^3 = \omega_0^2 = 0$. Отсюда, аналогично предыдущему, получим $b = 0$. Таким образом, уравнение (4) принимает вид (5).

Замыкая уравнение (5) и применяя лемму Картана, получим:

$$\begin{aligned} -\omega_0^1 - k\omega_2^3 &= k_1^2\omega_1^2 + k_1^2\omega_0^2 + k_1^3\omega_1^3, \\ k\omega_0^1 &= k_1^2\omega_1^2 + k_2^2\omega_0^2 + k_2^3\omega_1^3, \\ dk + k\omega_2^3 &= k_1^3\omega_1^2 + k_2^3\omega_0^2 + k_3^3\omega_1^3. \end{aligned} \tag{6}$$

Из формул (6) следует, что формы ω_0^1, ω_2^3, dk выражаются через главные формы, то есть построенный репер является каноническим репером первого порядка комплекса K.

Теорема 2. При $k = 0$, $b \neq 0$ для комплекса (4) существует канонический репер первого порядка, относительно которого комплекс принимает один из видов:

$$\omega_0^2 = \omega_1^2 + \omega_0^3, \tag{7}$$

$$\omega_0^2 = -\omega_0^3. \tag{8}$$

Доказательство. При $k = 0$, $b \neq 0$ чистое замыкание уравнения (4) имеет вид:

$$\left[da + \left(a^2 - 1\right)\omega_1^0 - ab\omega_2^3\right]\Lambda\omega_1^2 +$$

$$+\left[db + ab\omega_1^0 + b\left(1 - b\right)\omega_2^3\right]\Lambda\omega_0^3 + b\omega_0^1\Lambda\omega_1^3 = 0. \tag{9}$$

Применяя к уравнению (9) лемму Картана, получим при неподвижной прямой систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{array}{rcl} da + \left(a^2 - 1\right)\pi_1^0 - ab\pi_2^3 & = & 0, \\ db + ab\pi_1^0 + b\left(b - 1\right)\pi_2^3 & = & 0, \\ b\pi_1^0 & = & 0. \end{array} \tag{10}$$

При $b \neq 0$ из последнего уравнения следует, что $\pi_1^0 = 0$, то есть репер частично канонизирован. При неподвижной точке E_1 $dE_0 = (bE_2 + E_3)\,\omega_0^3$, откуда следует, что точка E_0 соответствует точке $bE_2 + E_3$ в нормальной коллинеации. При $b = 1$ второе уравнение системы (10) превращается в тождество, а простейшим решением первого уравнения является $a = 1$, $\pi_2^3 = 0$. Уравнение комплекса принимает вид (7).

Замыкая уравнение (7) и применяя лемму Картана, получим:

$$\begin{array}{rcl} -\omega_2^3 & = & k_1^1\omega_1^2 + k_1^2\left(\omega_0^3 + \omega_1^3\right), \\ \omega_0^1 & = & k_1^2\omega_1^2 + k_2^2\left(\omega_0^3 + \omega_1^3\right). \end{array} \tag{11}$$

Из уравнений (11) следует, что все дифференциальные формы репера становятся главными и, следовательно, репер является каноническим.

Найдем геометрический смысл его выбора. Точка E_0 соответствует в нормальной коллинеации инвариантной точке $B(0,0,1,1)$. При неподвижной точке E_0 $\omega_0^1 = \omega_0^2 = \omega_0^3 = 0$, и из уравнения (7) следует, что $\omega_1^2 = 0$, то есть точка E_1 соответствует в нормальной коллинеации точке E_3. При неподвижной точке $E_0 - E_1$ имеем $\omega_0^2 - \omega_1^2 = \omega_0^3 - \omega_1^3 = 0$. Из уравнения (7) получим $\omega_1^3 = 0$, $d\left(E_0 + E_1\right) = \omega_1^0\left(E_0 + E_1\right) + 2\omega_0^2 E_2$. Это означает, что точка E_2 соответствует в нормальной коллинеации точке $E_0 + E_1$.

При условии, что $b \neq 0; 1$, простейшим решением системы (10) является $b = 0$, $a = 0$, $\pi_1^0 = \pi_2^3 = 0$. Уравнение комплекса принимает вид (8), а чистое замыкание уравнения (8) имеет вид:

$$\left(\omega_1^2 + \omega_1^3\right) \Lambda \omega_1^0 + 2\omega_2^3 \Lambda \omega_0^3 = 0. \tag{12}$$

Применяя лемму Картана, получим:

$$\begin{array}{rcl} \omega_1^0 & = & k_1^1\left(\omega_1^2 + \omega_1^3\right) + k_1^2\omega_0^3, \\ 2\omega_2^3 & = & k_1^2\left(\omega_1^2 + \omega_1^3\right) + k\omega_0^3. \end{array} \tag{13}$$

Формы ω_1^0 и ω_2^3 выражаются через главные, следовательно, репер является каноническим. Учитывая (8), получим:

$$dE_0 = \omega_0^1 E_1 + \omega_0^2\left(E_2 - E_3\right).$$

Отсюда следует, что точка E_0 описывает поверхность V^2, касательная плоскость которой в точке E_0 содержит точку $B_1 = E_2 - E_3$. Точка E_2 находится на прямой P_1^1 как сопряженная для точки E_3 относительно точек B и B_1. Прямая E_0E_1 комплекса касается поверхности V^2 в точке E_0. Комплекс (8) является специальным.

Теорема 3. Произвол существования комплекса (5) определяется одной функцией от трех аргументов, а комплексов (7) и (8) – одной функцией от двух аргументов.

Доказательство. Чистое замыкание уравнения (5) имеет вид:

$$-\left(\omega_0^1 + k\omega_2^3\right) \Lambda \omega_1^2 + k\omega_1^0 \Lambda \omega_0^3 + (dk + k\omega_2^3)\Lambda \omega_1^3 = 0 \tag{14}$$

и является квадратным уравнением относительно трех неизвестных дифференциальных форм dk, ω_1^0, ω_2^3. Поэтому $q = 3$, $S_1 = 1$. Учитывая, что $S_1 + S_2 + S_3 = 3$ и $S_1 \geqslant S_2 \geqslant S_3$, получим, что $S_2 = S_3 = 1$, $Q = 1 + 2 + 3 = 6$.

Из уравнений (6) следует, что и число $N = 6$. Таким образом, критерий Картана выполняется. Комплекс (5) существует с произволом в одну функцию от трех аргументов.

Чистое замыкание уравнения (7) имеет вид:

$$-\omega_2^3 \Lambda \omega_1^2 + \omega_1^0 \Lambda \left(\omega_0^3 + \omega_1^3\right) = 0.$$

Решая последнее, получим $q = 2$, $S_1 = 1$, $S_2 = 1$, $Q = 1 + 2 = 3$. Из уравнений (11) имеем $N = 3$, то есть критерий Картана выполняется. Комплекс (7) существует с произволом в одну функцию от двух аргументов.

Чистое замыкание уравнения (8) имеет вид (12). Решая это уравнение, получаем $q = 2$, $S_1 = S_2 = 1$, $Q = 3$.

Из уравнений (13) следует, что $N = 3$. Комплекс (8) существует с произволом в одну функцию от двух аргументов.

Теорема 4. При $a = b = k = 0$ для комплекса (4) канонический репер первого порядка не существует.

Доказательство. При $a = b = k = 0$ уравнение комплекса (4) имеет вид:

$$\omega_0^2 = 0. \tag{15}$$

Для комплекса (15) $dE_0 = \omega_0^1 E_1 + \omega_0^3 E_3$, то есть точка E_0 описывает некоторую поверхность V^2, касательная плоскость к которой в точке E_0 проходит через инвариантную точку E_3.

Так как все касательные плоскости к поверхности V^2 проходят через одну точку E_3, то V^2 является тангенциально вырожденной поверхностью нулевого ранга, то есть конической поверхностью с вершиной в инвариантной точке E_3. Прямые комплекса касаются поверхности V^2. Комплекс (15) является специальным комплексом нулевой кривизны.

Замыкая уравнение (15), имеем: $\omega_0^1 \Lambda \omega_1^2 = 0$, откуда, по лемме Картана, следует, что форма ω_0^1 выражается через главную форму ω^2, а форма ω_2^3 через главные формы не выражается. Таким образом, канонический репер первого порядка для комплекса (15) не существует.

Произвол существования комплекса (15) в окрестности первого порядка – одна функция одного аргумента.

В отличие от евклидова пространства и классических неевклидовых пространств, в бифлаговом пространстве не всякий специальный комплекс с помощью канонизации репера может быть приведен к виду (15). Примером является комплекс (8).

Библиографический список

1. *Киотина Г.В.* Бифлаговые пространства // Украинский геометрический сборник. Харьков, 1974. С. 14–21.
2. *Кованцов Н.И.* Теория комплексов. Киев: Изд-во КГУ, 1963. С. 292.
3. *Розенфельд Б.А., Зацепина О.В., Стеганцева П.Г.* Гиперкомплексы прямых в евклидовом и неевклидовых пространствах // Известия вузов. Математика. Казань, 1990. № 3. С. 57–66.

Коэффициент сюръективности операторных уравнений

Н.А. Брагина, О.А. Неволина

Понятие коэффициента сюръективности характеризует корректную разрешимость линейных операторных уравнений и краевых задач.

Введем основные понятия. Пусть X, Y – банаховы пространства.

Точка λ называется *регулярной точкой* оператора A, если оператор $A-\lambda I$ непрерывно обратим. Совокупность регулярных точек оператора A называется *резольвентным множеством* оператора и обозначается $\rho(A)$. Линейный оператор $R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1} \in L(X)$ называется *резольвентой* оператора A.

Дополнение к $\rho(A)$ (в комплексной плоскости) называется *спектром* оператора A и обозначается $\sigma(A)$.

Пусть $A : X \to Y$ – линейный ограниченный оператор.

Через $L(X, Y)$ обозначим пространство линейных ограниченных операторов.

Определение 1. *Коэффициентом сюръективности* (КС) оператора $A : X \to Y$ называется неотрицательное число

$$q(A) = \inf_{y \neq 0} \frac{||A^* y||}{||y||},$$

где $A^* : Y^* \to X^*$ – оператор, сопряженный с A.

Для вычисления КС можно использовать и следующую формулу:

$$q(A) = \inf_{||y||=1} ||A^* y||.$$

Перечислим основные свойства КС в следующей теореме.

Теорема 1. Пусть $L, T \in L(X, Y)$ и $\lambda \in$ K – произвольное число. Тогда:

1. $0 \leqslant q(L) \leqslant ||L||$;
2. $q(\lambda L) = ||\lambda|| q(L)$;
3. $q(L + T) \leqslant q(L) + ||T||$, или $|q(L) - q(T)| \leqslant ||L - T||$.

В частности следует, что КС, как функционал, определенный на $L(X, Y)$, является непрерывным. Далее приведем дополнительные свойства КС.

Теорема 2. Пусть $L \in L(X, Y)$, $T \in L(Y, Z)$.
Тогда:

1. $q(T)q(L) \leqslant q(TL) \leqslant q(T)||L||$;
2. $q(L) \leqslant (q(L^n))^{1/n}$, если $L \in L(X,)$;
3. $q(L) = \frac{1}{||L^{-1}||}$, если L – изоморфизм.

Теорема 3. Пусть $L \in L(X, Y)$, тогда для любых x_0 и $r > 0$ выполняется включение: $U(q(L), Lx_0) \subset \overline{L(U(r, x_0))}$.

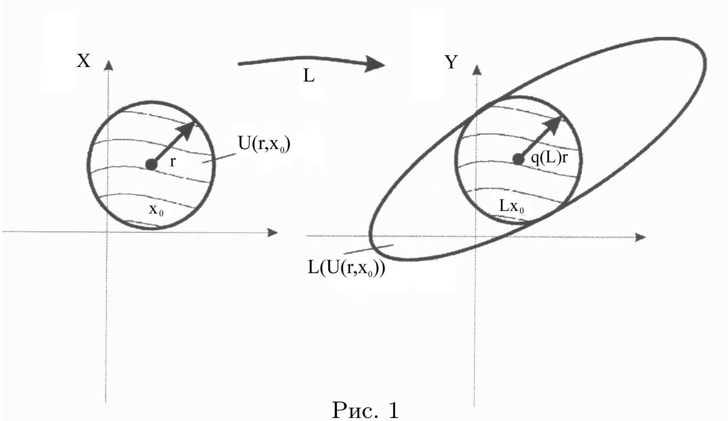


Рис. 1

Таким образом, коэффициент сюръективности характеризует геометрию образа: $q\,(L)_r$ совпадает с наибольшим радиусом шара, который входит в замыкание образа первоначального шара (рис. 1).

Далее рассмотрим формулы и примеры вычисления и оценки коэффициента сюръективности линейного оператора.

Теорема 4. Пусть X и Y – действительные гильбертовы пространства, $L : X \to Y$. Тогда

$$q\,(L) = \sqrt{\inf\,\{\lambda : \lambda \in \sigma\,(LL^*)\}},$$

где $\sigma\,(LL^*)$ – спектр оператора $LL^* : Y \to Y$.

Лемма 1. Пусть H – гильбертово пространство, оператор $A : H \to H$ удовлетворяет условию $AA^* = M_a$, где M_a – оператор умножения $M_a = aI$, $a = const$, I – единичный оператор. Тогда $q\,(A) = \sqrt{a}$.

Доказательство. Сначала покажем, что a – неотрицательная константа. Так как $AA^* \geqslant 0$, то имеем

$$(AA^*\omega, \omega) = a\,(\omega, \omega) = a||\omega||^2 \geqslant 0.$$

Спектр положительного оператора AA^* состоит из одной точки, то есть $\sigma\left(AA^*\right)=\{a\}$. Теперь используем теорему 4. Имеем

$$q\left(A\right)=\sqrt{\inf\left\{\lambda/\lambda\in\sigma\left(AA^*\right)\right\}}=\sqrt{a}.$$

Пример 1. Пусть $\left(Ay\right)\left(t\right)=\sqrt{t}y\left(t^2\right),\ A:L_2\left[0,1\right]\to L_2\left[0,1\right]$. Найдем представление сопряженного оператора:

$$\left(Ay,\omega\right)=\int\limits_0^1\sqrt{t}y\left(t^2\right)\omega\left(t\right)dt=\int\limits_0^1 s^{1/4}y\left(s\right)\omega\left(\sqrt{s}\right)\frac{1}{2\sqrt{s}}ds=\int\limits_0^1 y\left(s\right)\frac{\omega\left(\sqrt{s}\right)}{2s^{1/4}}ds.$$

Тогда сопряженный оператор имеет представление $\left(A^*\omega\right)\left(s\right)=\frac{s^{-1/4}}{2}\omega\left(\sqrt{s}\right)$. Далее

$$AA^*\omega=\sqrt{t}\frac{1}{2\sqrt{t}}\omega\left(t\right)=\frac{1}{2}\omega\left(t\right).$$

Согласно лемме 1 коэффициент сюръективности оператора A равен $q\left(A\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Пример 2. Пусть $\left(Ax\right)\left(t\right)=a(t)x\left(kt^\gamma\right),\ A:L_2\left[0,1\right]\to L_2\left[0,1\right]$, $\gamma>0$, $0<k\leqslant 1$. Найдем представление сопряженного оператора:

$$\left(Ax,\omega\right)=\int\limits_0^1 a(s)\cdot x(ks^\gamma)\cdot\omega(s)ds.$$

Введем замену переменных:

$$ks^\gamma=\tau,\quad s=0\implies\tau=0,\ s=\left(\frac{\tau}{k}\right)^\gamma,$$

$$s=1\implies\tau=k,\quad ds=\frac{1}{\gamma k^{1/\gamma}}\cdot\tau^{1/\gamma^{-1}}d\tau.$$

Тогда

$$\left(Ax,\omega\right)=\int\limits_0^1\chi_{[0;k]}\cdot a\left(\left(\frac{\tau}{k}\right)^{1/\gamma}\right)\cdot\omega\left(\left(\frac{\tau}{k}\right)^{1/\gamma}\right)\cdot\frac{\tau^{1/\gamma^{-1}}}{\gamma k^{1/\gamma}}\cdot x(\tau)d\tau$$

и сопряженный оператор имеет представление:

$$A^*\omega = \chi_{[0;k]} \cdot a\left(\left(\frac{\tau}{k}\right)^{1/\gamma}\right) \cdot \omega\left(\left(\frac{\tau}{k}\right)^{1/\gamma}\right) \cdot \frac{\tau^{1/\gamma^{-1}}}{\gamma k^{1/\gamma}}.$$

Т.к. $\tau \in [0;k]$, $kt^\gamma \in [0;1]$, то

$$AA^*\omega = A\left[\chi_{[0;k]} \cdot a\left(\left(\frac{\tau}{k}\right)^{1/\gamma}\right) \cdot \frac{\tau^{1/\gamma^{-1}}}{\gamma k^{1/\gamma}} \cdot \omega\left(\left(\frac{\tau}{k}\right)^{1/\gamma}\right)\right] =$$

$$= a(t)\cdot a\left(\left(\frac{kt^\gamma}{k}\right)^{1/\gamma}\right)\cdot\frac{1}{\gamma k^{1/\gamma}}\cdot(kt^\gamma)^{1/\gamma^{-1}}\cdot\omega(t) = \frac{a^2(t)}{\gamma k^{1/\gamma}}\cdot k^{1/\gamma^{-1}}\cdot t^{1-\gamma}\cdot\omega(t),$$

где $\chi_{[0;k]}$ – характеристическая функция: $\chi_{[0;k]} = \begin{cases} 1, & \tau \in [0;k]\,; \\ 0, & \tau \notin [0;k] \end{cases}$

Положим, например, $a^2(t) \cdot t^{1-\gamma} = \varepsilon$, тогда $a(t) = \sqrt{\varepsilon} \cdot t^{\frac{\gamma-1}{2}}$. По лемме 1 вычислим коэффициент сюръективности оператора A: $q(A) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{k\gamma}}$.

Библиографический список

1. *Пич А.* Операторные уравнения. М.: Мир, 1982. 536 с.

Ветвящееся случайное блуждание на $\mathbf{Z}^d$ с рождением и гибелью частиц в одной точке

Е.Б. Яровая

Рассматривается симметричное ветвящееся случайное блуждание с непрерывным временем на решетке $\mathbf{Z}^d$ $(d \geqslant 1)$ в предположении, что ветвление (т.е. рождение и гибель частиц) происходит в единственной точке (источнике). Пусть в начальный момент времени на решетке находилась одна частица в узле $x \in \mathbf{Z}^d$. До первого попадания в источник ветвления (например, в нуль) движение частицы описывается случайным блужданием с непрерывным временем.

Пусть $A := ||a(x,y)||_{x,y\in\mathbf{Z}^d}$ – матрица переходных интенсивностей случайного блуждания. Предполагается, что блуждание однородно ($a(x,y) = a(0,y-x)$), симметрично ($a(x,y) = a(y,x)$) и неприводимо (т.е. все точки $y \in \mathbf{Z}^d$ достижимы), причем скачки имеют конечную дисперсию. В источнике она проводит случайное время, распределенное по показательному закону с параметром 1, и затем прыгает в узел $\in \mathbf{Z}^d$ (с координатами, отличными от координат источника) или умирает, произведя перед смертью случайное число потомков. Ветвящийся процесс в источнике $x_0 = 0$ задается с помощью инфинитезимальной производящей функции $f(u) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n u^n$, где $b_n \geqslant 0$ при $n \neq 1$, $b_1 < 0$ и $\sum\limits_n b_n = 0$. Вновь родившиеся частицы эволюционируют по тому же закону, независимо от других частиц и от всей предыстории. Цель настоящей работы — анализ предельного поведения при $t \to \infty$ $\mu_t(y)$ – числа частиц в произвольном узле решетки $\in \mathbf{Z}^d$ и $\mu_t := \sum\limits_y \mu_t(y)$ – общего числа частиц на $\mathbf{Z}^d$ (размера популяции). Данная модель позволяет изучить эффекты, обусловленные неоднородностью ветвящейся среды и неограниченностью пространства, в котором происходит блуждание.[1]

Для рассматриваемого случайного блуждания переходные вероятности имеют следующую асимптотику

$$p(t,x,y) \sim \gamma_d \cdot t^{-d/2}, \quad t \to \infty.$$

Обозначим через $G_\lambda(x,y) := \int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} p(t,x,y)dt$ функцию Грина случайного блуждания, представляющую собой преобразование Лапласа переходной вероятности $p(t,x,y)$ по t. Поэтому $G_\lambda(0,0)|_{\lambda=0} < \infty$ при $d \geqslant 3$, следовательно, случайное блуждание транзиентно, если $d \geqslant 3$, и возвратно, если $d = 1,2$. Положим

$$\beta_c := 1/G_0(0,0),$$

[1]Некоторые результаты для этой модели в одном частном случае – для простого случайного блуждания с процессом чистого размножения в источнике — были получены в работе [1].

тогда

$$\beta_c = 0, \quad d = 1, 2; \quad \beta > 0, \quad d \geqslant 3.$$

Предположим, что

$$\beta_r := f^{(r)}(1) < \infty, \quad r \in \mathbf{N}, \quad \beta := \beta_1,$$

т.е. число потомков частицы имеет конечные моменты всех порядков. Точка β_c является критической в том смысле, что асимптотическое поведение процесса различается при $\beta > \beta_c$, $\beta = \beta_c$ и $\beta < \beta_c$. Асимптотическое поведение статистических моментов $m_n(t,x,y) := E_x\mu_t^n(y)$ и $m_n(t,x) := E_x\mu_t^n$ $(n \in \mathbf{N})$, где E_x обозначает математическое ожидание при условии $\mu_0(\,\cdot\,) = \delta_x(\,\cdot\,)$, исследовано в [2]. В случае $\beta > \beta_c$ при нормировке $\mathrm{e}^{-\lambda_0 t}$ (показатель экспоненты λ_0 является корнем уравнения $\beta G_\lambda(0,0) = 1$) случайные величины $\mu_t(y)$ и μ_t имеют предельное распределение при $t \to \infty$ [3].

Иная картина наблюдается в критическом случае, где имеет место нерегулярный, прогрессивный по номеру n рост моментов полного числа частиц при $t \to \infty$ (в том смысле, что $m_1^2 << m_2$, $m_2^2, , m_4$ и т.д.). Это свидетельствует о том, что поведение случайной величины μ_t не определяется поведением моментов при $t \to \infty$. По этой причине в критическом случае устанавливалось асимптотическое поведение вероятности продолжения процесса (вероятности выживания) $Q(t,x)$ и вероятности $Q(t,x,0)$ того, что число частиц в нуле в момент времени t положительно. В размерности $d = 1$ асимтотики изучены в работе [4]. Следующие результаты представлены для ветвящегося случайного блуждания, стартующего из нуля. Положим

$$Q(t,0,0) = q(t), \quad Q(t,0) = Q(t).$$

Теорема . *Если $\beta = \beta_c$, то*

$$q(t) \sim k_d u(t), \quad Q(t) \sim K_d v(t), \quad t \to \infty,$$

где k_d, K_d – положительные константы, а функции u, v имеют следующий вид:

$$\begin{array}{lll} u(t) = t^{-1/2}(\ln t)^{-1}, & v(t) = t^{-1/4}, & \text{при } d = 1; \\ u(t) = t^{-1}, & v(t) = (\ln t)^{1/2}, & \text{при } d = 2; \\ u(t) = t^{-1/2}(\ln t)^{-1}, & v(t) \equiv 1, & \text{при } d = 3; \\ u(t) = t^{-1}(\ln t), & v(t) \equiv 1, & \text{при } d = 4; \\ u(t) = t^{-1}, & v(t) \equiv 1, & \text{при } d \geqslant 5. \end{array}$$

Условная предельная теорема для общего числа частиц μ_t устанавливается с использованием асимптотического поведения вероятности выживания $Q(t, x)$.

Теорема. *Пусть $\beta = \beta_c$, тогда для любого $s \in [0, 1]$ на $\mathbf{Z}^d$*

$$\lim_{t\to\infty} E_x \left[s^{\mu(t)} | \mu(t) > 0 \right] = 1 - \sqrt{1-s}.$$

Библиографический список

1. *Яровая Е.Б.* Применение спектральных методов в изучении ветвящихся процессов с диффузией в некомпактном фазовом пространстве // Теор. и матем. физика. 1991. Т. 88. № 1. С. 25–30.
2. *Albeverio S., Bogachev L.V., Yarovaya E.B.* Asymptotics of branching symmetric random walk on the lattice with a single source. C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I, Math., 326 (1998). P. 975–980.
3. *Bogachev L.V., Yarovaya E.B.* Моментный анализ ветвящегося случайного блуждания на решетке с одним источником. ДАН, 363, № 4 (1998). P. 439–442.
4. *Topchii V.A., Vatutin V.A., Yarovaya E.B.* Catalytic branching random walk and queueing systems with random number of independent servers. Teoriya Jmovirnostej ta Matematichna Statistika. № 69, 2003. P. 158–172.

О связных компонентах множества векторных полей Морса-Смейла на двумерных многообразиях

В.Ш. Ройтенберг

Будем считать известными основные понятия теории динамических систем [1, 2]. Пусть $\mathrm{X}^r = \mathrm{X}^r(M)$ – пространство C^r-векторных полей с C^r-топологией ($r \geqslant 4$), заданных на двумерном замкнутом связном многообразии M.

Особая точка z_0 поля $X \in \mathrm{X}^r$ называется *гиперболической*, если собственные значения $dX(z_0)$ имеют ненулевые действительные части, и *квазигиперболической*, если она является седло-узлом кратности 2 или сложным фокусом кратности 1.

Замкнутая траектория L поля $X \in \mathrm{X}^r$ называется *гиперболической*, если для функции последования f в точке $z_0 \in L\, |f'(z_0)| \neq 1$, и *квазигиперболической*, если либо $f'(z_0) = 1$, $f''(z_0) \neq 0$, либо $f'(z_0) = -1$, $(f^2)''(z_0) = 0, (f^2)'''(z_0) \neq 0$.

Пусть z_1 и z_2 - особые точки типа седло или седло-узел поля X. Траектория L поля X называется *двойной сепаратрисой* (соединяющей точки z_1 и z_2), если она является сепаратрисой обеих точек. Если $z_1 = z_2$, то $\Gamma{=}L\cup\{z_1\}$ – *петля сепаратрисы.*

Векторным полем Морса-Смейла на M называется векторное поле, имеющее только гиперболические особые точки и замкнутые траектории, не имеющее двойных сепаратрис, для которого и α- и ω-предельным множеством любой траектории является либо особая точка, либо замкнутая траектория. Множество всех векторных полей Морса-Смейла из X^r обозначим $\mathrm{MS}^r = \mathrm{MS}^r(M)$. Оно является открытым множеством.

Пусть $\Lambda \subset \mathrm{X}^r$. Векторное поле X называется *грубым относительно* Λ, если $X \in \Lambda$ и для любой окрестности V тождественного отображения $id : M \to M$ в $C(M, M)$ найдется такая окрестность U поля X в X^r, что для любого поля $X \in \Lambda \cap U$ существует гомеоморфизм $h : M \to M$, $h \in V$, переводящий траектории поля Y в траектории поля X. Векторные поля, грубые относительно X^r, называются просто *грубыми.* Множество всех грубых векторных полей из X^r обозначается Σ_0^r. Множество MS^r содержится в Σ_0^r.

Если M ориентируемо или неориентируемо, но его род $g \leqslant 3$, то $\mathrm{MS}^r = \Sigma_0^r$ и всюду плотно в X^r.

Обозначим Σ_1^r – множество векторных полей $X \in \mathrm{X}^r$ со следующими свойствами: либо 1) X имеет только гиперболические особые точки и замкнутые траектории, за исключением одной квазигиперболической особой точки или замкнутой траектории и не имеет двойных сепаратрис, либо 2) X имеет только гиперболические особые точки и замкнутые траектории и единственную двойную сепаратрису, соединяющую седла (z_1 и z_2); при этом если $z_1 = z_2$, то $tr\, dX(z_1) \neq 0$; в обоих случаях α- и ω-предельным множеством любой траектории является либо особая точка, либо замкнутая траектория, либо петля сепаратрисы седла.

Связные компоненты множества MS^r описаны в работе [3]. Ранее в [4] автором настоящей работы были описаны связные компоненты C множества сохраняющих ориентацию грубых диффеоморфизмов окружности S^1 и их границы. Кроме того, в [4] вычислены гомотопические группы связных компонент: $\pi_1() = \mathbf{Z}$, $\pi_n() = 0$ ($n = 2, 3, \ldots$) и показано, что вложение $i : C \subset \mathrm{Diff}^r(\mathrm{S}^1)$ индуцирует нулевой гомоморфизм фундаментальных групп.

Для теории бифуркаций интересно описание границ $\partial C = \bar{C} \backslash C$ связных компонент множества MS^r.

Теорема 1. *Пусть M – любое замкнутое двумерное C^∞-многообразие, а C – связная компонента множества* MS^r *векторных полей Морса-Смейла на M. Тогда существует множество $K_C \subset \partial C \cap \Sigma_1^r$ со следующими свойствами.*

1. K_C – открыто и всюду плотно в C.

2. *Для любого поля $X \in K_C$ существуют его окрестность U в* X^r, *окрестность нуля D в замкнутом линейном подпространстве* X^r, *C^{r-1}-диффеоморфизм $\varphi : D \times (-1, 1) \to U$ такие, что* $\varphi(0, 0) = X$, $\varphi(D \times \{0\}) \subset K_C$, $\varphi(D \times (0, 1)) \subset C$.

3. *Любое векторное поле $X \in K_C$ грубо относительно ∂C.*

Доказательство теоремы приведено в [5].

Теорема 2. *Пусть векторное поле $X \in \mathrm{MS}^r$ инвариантно относительно C^{r+1}-диффеоморфизма $\varphi : M \to M$, изотопного тождественному и переводящего хотя бы одну особую точку или замкнутую траекторию в другую особую точку или замкну-*

тую траекторию. Тогда связная компонента множества MS^r, *содержащая* X, *имеет ненулевую фундаментальную группу.*

Доказательство. Пусть $I = [0,1]$. По условию теоремы существуют непрерывно зависящие от s$\in I C^{r+1}-$диффеоморфизмы $\varphi_s : M \to M$ такие, что $\varphi_0 = id$, $\varphi_1 = \varphi$. Пусть $d\varphi_s : TM \to TM$ – соответствующие касательные отображения. Тогда $\forall s \in I X_s := d\varphi_s \circ X \circ \varphi_s^{-1} : M \to TM$ является векторным полем из MS^r, непрерывно зависящим от s, при этом $X_0 = X_1 = X$. Таким образом, отображение $\gamma : I \to \mathrm{MS}^r$, $\gamma(s) = X_s$, является петлей в “точке” X. Покажем, что она не стягиваема в MS^r. Предположим противное, то есть существование такого непрерывного отображения $F : I \times I \to \mathrm{MS}^r$, что

$$\forall\ s,\tau \in I \quad F(s,0) = X_s, \quad F(s,1) = F(0,\tau) = F(1,\tau) = X. \tag{1}$$

По условию теоремы существуют несовпадающие особые точки (замкнутые траектории) p_0 и p_1 такие, что $\varphi(p_0) = p_1$. Рассмотрим случай, когда p_0 и p_1 – особые точки.

Поскольку в особых точках векторных полей X_s $\det dX_s(z) \neq 0$, то, используя теорему о неявной функции, аналогично доказательству теоремы о продолжении решений дифференциальных уравнений [6] получаем, что существует единственное непрерывное отображение $p : I \to M$ такое, что $\forall\, s \in I p(s)$ – особая точка поля X_s, а $p(0) = p_0$. Но тогда $\forall s \in I p(s) = \varphi_s(p_0)$. Точно так же существует единственное непрерывное отображение $P : I \times I \to M$ такое, что $\forall (s,\tau) \in I \times I P(s,\tau)$ – особая точка поля X_s, а $p(0,0) = p_0$. Ясно, что $\forall\ s \in I\ P(s,0) = p(s)$. Ввиду (1) и непрерывности $P \forall s,\tau \in I\ P(s,1) = P(0,\tau) = P(1,\tau) = p_0$. Но это противоречит тому, что $P(1,0) = p(1) = \varphi_1(p_0) = p_1$. Таким образом, петля γ не стягиваема в MS^r и потому фундаментальная группа связной компоненты множества MS^r, содержащая поле X, ненулевая.

Случай, когда p_0 и p_1 – замкнутые траектории, рассматривается аналогично.

Замечание 1. Векторное поле, удовлетворяющее условиям теоремы 2, существует на сфере. Векторное поле X на сфере $\mathrm{S}^2 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3\colon x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, зададим в сферических координатах $(\varphi, \theta), x = \cos\varphi\cos\theta, y = \sin\varphi\cos\theta,\ z = \sin\theta$, равенством

$$X(x, y, z) = v(\theta)\sin(2n\varphi)\partial/\partial\varphi + (g(\theta)(1 - v(\theta)) + \theta v(\theta))\partial/\partial\theta,$$

где $g(\theta) = \operatorname{ctg}\theta$ при $\theta \neq 0$, $g(0) = 0$, $v : \mathbf{R} \to I$ – такая $^\infty$-функция, что $v(\theta) = 1$ при $\theta \in (-\pi/4, \pi/4)$, $v(\theta) = 0$ при $\theta \notin (-\pi/3, \pi/3)$, $n \in \mathbf{N}$. Поле $X \in$MS^r при всех $r \geqslant 1$ и инвариантно относительно C^∞-диффеоморфизма $(\varphi, \theta) \to (\varphi + \pi/n, \theta)$.

Замечание 2. Приведем пример векторного поля X на торе $\mathbf{T}^2 = \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$, удовлетворяющего условиям теоремы: поле $X \in$MS^r при всех $r \geqslant 1$, заданное в циклических координатах (x, y) равенством $X(x, y) = \partial/\partial x + \sin(2ny)\partial/\partial y$, инвариантно относительно C^∞-диффеоморфизма $(x, y) \to (x, y + \pi/n)$.

Теорема 3. *На любом замкнутом двумерном C^∞-многообразии существует векторное поле $X \in \Sigma_1^r$ и его окрестность U в* X^r *такая, что $U\backslash\Sigma_1^r$ принадлежит одной связной компоненте множества* MS^r.

Доказательство. На любом замкнутом двумерном многообразии M есть векторное поле X_*, имеющее устойчивую особую точку p. Из теории устойчивости следует, что мы можем выбрать на M локальную карту $(x, U), x = (x_1, x_2) : U \to \mathbf{R}^2$, так, что $x(p) = 0$, $x(U) = \mathbf{R}^2$ и в полярных координатах $(\rho, \varphi), x_1 = \rho\cos\varphi, x_2 = \rho\sin\varphi$ в $U\backslash\{p\} X_* = R_*(\rho, \varphi)\partial/\partial\rho + \Phi_*(\rho, \varphi)\partial/\partial\varphi$, где $R_*(\rho, \varphi) < 0$.

Пусть α, β, γ и δ – такие $^\infty$-функции, определенные на $\mathbf{R}$ со значениями в $[0; 1]$, что $\alpha(s) = 0$ при $s \leqslant 0,5$, $\alpha(s) = 1$ при $s \geqslant 0,6$; $\beta(s) = 0$ при $s \leqslant 4$, $\beta(s) = 1$ при $s \geqslant 5$; $\gamma(s) = 0$ при $s \leqslant 2,4$, $\gamma(s) = 1$ при $s \geqslant 2,5$; $\delta(s) > 0$ при $s \in (-0,1; 0,1)$, $\delta(s) = 0$ при $s \notin (-0,1; 0,1)$, $\delta(0) = 1$. Зададим на M векторные поля X_ε, $\varepsilon \in (-1; 1)$, положив $X_\varepsilon(p) = 0$, $X_\varepsilon(z) = X_*(z)$ при $z \in M\backslash U$, в полярных координатах (ρ, φ) в $U\backslash\{p\}$

$$X_\varepsilon = R(\rho, \varphi, \varepsilon)\partial/\partial\rho + \Phi(\rho, \varphi, \varepsilon)\partial/\partial\varphi,$$

где

$$R(\rho, \varphi, \varepsilon) = (1-\alpha(\rho))\rho + \alpha(\rho)(1-\beta(\rho))(1-\rho)(2-\rho)(3-\rho) + \beta(\rho)R_*(\rho, \varphi),$$

$$\Phi(\rho,\varphi,\varepsilon) = 1-\alpha(\rho)+\lambda\alpha(\rho)(1-\gamma(\rho))(3-2\rho)(\sin\varphi-\varepsilon\delta(1,5+\rho)\delta(\varphi))+$$
$$+\gamma(\rho)(1-\beta(\rho))+\beta(\rho)\Phi_*(\rho,\varphi).$$

Выбор числа $\lambda > 0$ уточним ниже. Ясно, что $\forall\varepsilon \in (-1;1)$ поле X_ε принадлежит X^r и непрерывно зависит от ε. Поле X_ε имеет в U пять гиперболических особых точек: неустойчивый фокус $p_1 = x^{-1}(0,0)$, устойчивый (неустойчивый) узел $p_2 = x^{-1}(-1,0)$ ($p_3 = x^{-1}(-2,0)$) с корнями характеристического уравнения -1 и $-\lambda$ (1 и λ), седла $p_4 = x^{-1}(1,0)$ и $p_5 = x^{-1}(2,0)$ и не имеет других особых точек. Выходящие (входящие) сепаратрисы седла $p_4(p_5)$ принадлежат окружности $\rho = 1$ ($\rho = 2$). Дуга $x_2 = 0$, $-2 < x_1 < -1$ – траектория, идущая из p_3 в p_2 . Кроме того, X_ε имеет в U устойчивую гиперболическую замкнутую траекторию $\rho = 3$. Все остальные траектории, начинающиеся в точках U, либо выходят из U, либо предельны к одной из точек $p_1,\ldots,p_5$ или к замкнутой траектории. При любом $\varepsilon \in (-1;1)$ дуга $\varphi = 0$, $1 < \rho < 1,4$ ($\varphi = 0$, $1,6 < \rho < 2$) принадлежит входящей (выходящей) сепаратрисе $L^+(\varepsilon)$ ($L^-(\varepsilon)$) седла $p_4(p_5)$. Сепаратриса $L^+(\varepsilon)$ пересекает дугу $\rho = 1,6$ в точке с координатой $\varphi = \varphi^*(\varepsilon)$, где $\varphi^*(\cdot) \in {}^\infty$, $\mathrm{sgn}\varphi^*(\varepsilon) = \mathrm{sgn}\varepsilon$. Поэтому при $\varepsilon \neq 0$ $L^+(\varepsilon)$ α-предельна к p_3 и $X_\varepsilon \in \mathrm{MS}^r$, $L^+(0) = L^-(0)$ и $X_0 \in \Sigma_1^r$.

Согласно [7] существует связная окрестность нуля D в замкнутом линейном подпространстве X^r коразмерности 1, окрестность V поля X_0 в X^r, число $v > 0$ и ${}^{r-1}$-диффеоморфизм $g : D\times(-v;v) \to V$ такие, что $g(D\times\{0\}) = V\cap\Sigma_0^r$, а $g(D\times(-v;0))$ и $g(D\times(0;v))$ содержатся в MS^r. При достаточно малом $|\varepsilon|$ поле $X_\varepsilon \in V$ и можно считать, что $X_\varepsilon = g(X_0,\varphi^*(\varepsilon))$. Теперь для доказательства утверждения теоремы достаточно показать, что векторные поля $X_{-v/2}$ и $X_{v/2}$ можно соединить путем в MS^r.

Будем считать, что в определении поля X_ε число λ иррационально. Тогда существуют локальные карты с центрами в точках p_3 и p_4, в которых поле X_ε линейно [6. С. 308]. Пусть $\lambda > r+1$. Тогда поле $\mathrm{X}_{\pm v/2}$ имеет инвариантную кривую, задаваемую в полярных координатах (ρ,φ) уравнением $\varphi = \varphi_\pm(\rho)$, $\rho \in (0,5;2,5)$, где $\varphi_\pm(\cdot) \in {}^{r+1}$, $\varphi_\pm(1) = 0$, $\varphi_\pm(2) = \pm\pi$, и содержащую сепаратрису $L^+(\pm v/2)$. Пусть $\mu : \mathbf{R} \to I$ – такая ${}^\infty$-функция, что

$\mu(\rho) = 1$ для $\tau \in [1;2]$, $\mu(\rho) = 0$ для $\rho \notin (0,5;2,5)$. Обозначим $\varphi_s(\rho,\varphi) = \varphi + s\mu(\rho)(\varphi_+(\rho) - \varphi_-(\rho))$. Формулы

$$\theta_s(z) = x^{-1}(\rho\cos\varphi_s(\rho,\varphi), \quad \rho\sin\varphi_s(\rho,\varphi))$$

для $z = x^{-1}(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)$, $\rho \in (0,5;2,5)$,

$$\theta_s(z) = z$$

для остальных точек $z \in M$, задают ${}^{r+1}$-диффеоморфизмы $\theta_s : M \to M$, непрерывно зависящие от $s \in I$. Зададим непрерывное отображение $\xi : I \to$MS^r, положив $\xi(s) = d\theta_s \circ X_{-v/2} \circ \theta_s^{-1}$. Ясно, что $\xi(0) = X_{-v/2}$, вне кольца $0,5 < \rho < 2,5$ векторное поле $\xi(1)$ совпадает с $X_{v/2}$, а в кольце $0,5 < \rho < 2,5$ $\xi(1) = R_1(\rho,\varphi)\partial/\partial\rho + \Phi_1(\rho,\varphi)\partial/\partial\varphi$, где $\mathrm{sgn} R_1(\rho,\varphi) = \mathrm{sgn} R(\rho,\varphi,v/2) = \mathrm{sgn}((1-\rho)(2-\rho))$, у $\xi(1)$ и $X_{v/2}$ одни и те же особые точки и выходящие (входящие) сепаратрисы седла $p_4(p_5)$, а $L^+(v/2)$ – их общая входящая сепаратриса седла p_4. Но тогда формула $\eta(s) = sX_{v/2} + (1-s)\xi(1)$ задает путь $\eta : I \to$MS^r, соединяющий $\xi(1)$ и $X_{v/2}$, а произведение путей ξ и η – путь, соединяющий $X_{-v/2}$ и $X_{v/2}$.

Библиографический список

1. *Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г.* Теория бифуркаций динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1967.
2. *Палис Ж., Мелу В.* Геометрическая теория динамических систем: Введение. М.: Мир, 1986.
3. *Gutierrez C., Melo W.* The connected components of Morse-Smale vector fields on two-manifolds // Lect. Notes Math., 1977. V. 597, P. 230–251.
4. *Ройтенберг В.Ш.* О связных компонентах множества грубых диффеоморфизмов окружности // Методы качественной теории дифференциальных уравнений. Горький, 1975. С. 129–140.
5. *Ройтенберг В.Ш.* Границы связных компонент множества векторных полей Морса-Смейла на двумерных многообразиях // Деп. в ВИНИТИ, 1995. № 2607-В 95.

6. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.

7. *Sotomayor J.* Generic one-parameter families of vector fields on two-dimensional manifolds // Publ. Math. IHES. 1974. V. 43. P. 5–46.

Специальная матричная полугруппа преобразований примитивных пар и генеалогия пифагоровых троек

В.Е. Фирстов

Рассматривается специальная матричная полугруппа SL, действующая на множестве примитивных пар P вида

$$P = \{< b; a >: \ b, a \in \mathbf{N}, \quad (b; a) = 1, \ ab \vdots 2, \ b > a\} \tag{1}$$

С примитивными парами тесно связано решение известной задачи о пифагоровых тройках, и, кроме того, множество P является подмножеством множества взаимно простых пар чисел, для отыскания которых традиционно используется процедура алгоритма Евклида.

Полугруппа SL определяется с помощью линейных преобразований вида:

$$\forall\, g \in SL, \ \forall \ < b; a > \in P : \ g < b; a > = < B; A > \Leftrightarrow \begin{cases} B = m_1 b + n_1 a; \\ A = m_2 b + n_2 a; \end{cases} \tag{2}$$

с дополнительным условием монотонности

$$3 \leqslant b + a < B + A. \tag{3}$$

В связи с определениями (1)–(3), элементы полугруппы SL должны удовлетворять следующим требованиям:

1) $\forall\, g \in SL : \ |detg| = |\Delta| = 2^s, \ s \geqslant 0, \ s \in \mathbf{Z}$;

2) компоненты пар $< m_1; m_2 >, < n_1; n_2 >$ – целые числа разной четности;

3) $m_1 > m_2 \geqslant 0$ при $\Delta > 0$ и $m_1 > m_2 > 0$ при $\Delta < 0$;

4) в матрице любого преобразования (2), (3) содержится не более одного нулевого элемента;

5) четные и нечетные элементы в матрицах данных преобразований располагаются либо в шахматном порядке при $|\Delta| = 1$, либо одна строка содержит четные числа, а другая – нечетные при $|\Delta| > 1$;

6) матричные элементы преобразований (2), (3) удовлетворяют неравенствам

$$\begin{cases} m_1 + n_1 \geqslant m_2 + n_2 \geqslant 0; \\ m_1 + n_1 + m_2 + n_2 \geqslant 2. \end{cases}$$

Полугруппа SL характеризуется следующими общими алгебраическими свойствами:

7) полугруппа SL является полугруппой с сокращением;

8) в полугруппе SL отсутствуют идемпотенты, поэтому любая ее моногенная подполугруппа изоморфна $(\mathbf{N}; +)$;

9) $SL = SL_1 \cup SL_2$, где SL_1 – простая подполугруппа преобразований с $|\Delta| = 1$; SL_2 – подполугруппа преобразований с $|\Delta| = 2^s$; $s \in \mathbf{N}$, являющаяся идеалом в SL, так, что имеет место композиционный ряд:

$$SL \supset SL_2 \supset SL_4 \supset SL_8 \supset \ldots;$$

10) полугруппа SL имеет представления в виде $(\mathbf{N}; +)$, двухэлементной булевой полурешетки или группы $\mathbf{Z}_2$;

11) в связи со свойством 5) имеет место представление в виде 4-элементной полугруппы, содержащей 2-элементную подгруппу, изоморфную $\mathbf{Z}_2$ (образ SL_1), и 2-элементную подполугруппу (образ SL_2).

Строение полугруппы SL характеризуется следующими основными свойствами:

12) полугруппа SL имеет бесконечную счетную систему образующих, в связи с чем имеет место представление вида $(\mathbf{N}; \cdot)$;

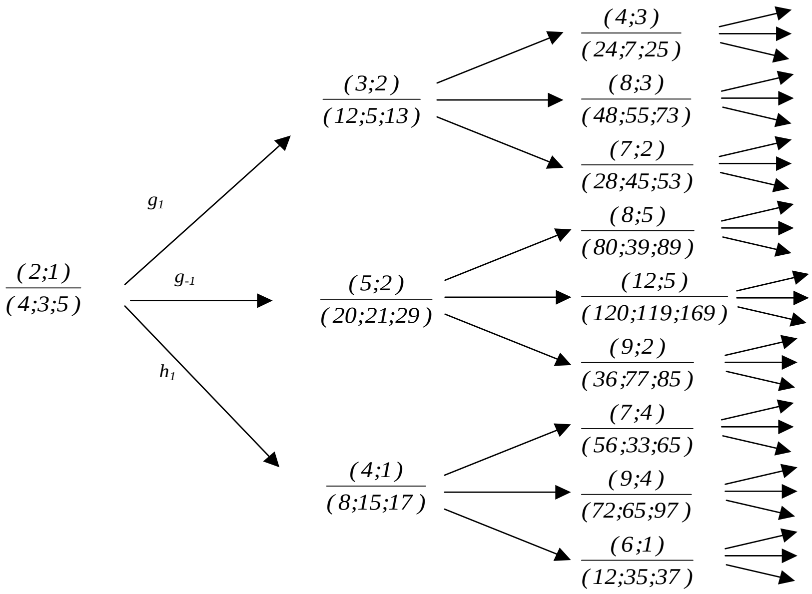
13) в полугруппе SL выделяется конечно порожденная подполугруппа $< g_1; g_{-1}; h_1; h_2; g_{-2} >$, где $g_1 \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $g_{-1} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $h_1 \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $h_2 \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; $g_{-2} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$;

14) в $< g_1; g_{-1}; h_1; h_2; g_{-2} >$ выделяется три свободные подполугруппы вида:

$$SL_1 =< g_1; g_{-1}; h_1 >\cong< g_1h_2; g_{-2}; h_2 >\cong< g_1; g_{-2}; h_2h_1 > .$$

Если действие полугруппы SL на множестве P интерпретировать в виде графа, то последнее свойство означает, что из этого графа можно выделить три различных трихотомических остовных дерева, которые начинаются от вершины $< 2; 1 >$ и каждое полностью охватывает всевозможные примитивные пары. В результате получается весьма изящное представление решения задачи о пифагоровых тройках.

Для иллюстрации на рис. 1 представлено дерево решений задачи Пифагора, построенное с помощью свободной подполугруппы SL_1, где в вершинах указаны примитивные пары, под которыми приведены соответствующие пифагоровы тройки:



Библиографический список

1. *Hall A.* Genealogy of Pythagorean Triads //Mathematical Gazette, 1970. V. 54. P. 377–379.
2. *Selmer E.S.* Organisering av Pytagoreiske tallsett. Nordisk Matematisk Tidsskrift, 1978. Bd. 26. S. 139–149.

О некоторых геометрических приложениях свойств тензоров

Т.Б. Таперо, И.И. Швецова

"...Хорошая идея - большое счастье, вдохновение, дар судьбы".

Д. Пойа "Как решать задачу"

§1 Вводные понятия, определения

Определение 1. [2] Линейным функционалом на векторном пространстве $V(K)$ называется скалярная функция y, определенная для любого вектора $\vec{x} \in V(K)$, удовлетворяющая аксиоме $y(\alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2) = \alpha_1 y(\vec{x}_1) + \alpha_2 y(\vec{x}_2)$, $\alpha_1, \alpha_2 \in K$, K – поле.

Следствия

1. Многообразие функционалов образует линейное пространство V', сопряженное к V, $\dim V = \dim V' = n$ при $n < \infty$.

2. Если $\vec{e}_i$, $i = \overline{1,n}$ – базис в пространстве V, $\vec{x} = x^i\vec{e}_i$, то $y(\vec{x}) = \alpha_i x^i$, $\alpha_i = y(\vec{e}_i)$.

Числа α_i однозначно задают линейный функционал в базисе $\vec{e}_i$, $i = \overline{1,n}$.

3. В дальнейшем перспективна запись значений функционала $y = y(\vec{x})$ с помощью скобок Халмоша [3]: $y(\vec{x}) \overset{def}{=} [\vec{x}, y]$. Скобки являются билинейным функционалом, где $\vec{x} \in V$, $y \in V'$ и элементы из V называются ковекторами.

4. Если в форме $[\vec{x}, y]$ $\vec{x}$ – фиксированный вектор, а $y \in V'$, то скобки задают новый элемент $z \in V''$. С точностью до определенного естественного изоморфизма [2] $z \cong \vec{x}$ и $V'' \cong V$. Тогда говорят,

что V рефлексивно; в конечномерном случае это истинный факт. В более общих случаях $V'' \supset V$, однако, например, гильбертово пространство рефлексивно [1].

Определение 2. [2] Тензором называется полилинейная [3] скалярная или векторная функция $l\,(\vec{x}, \vec{y}, ..., \vec{z}, f, g, ..., h)$, зависящая от векторов $\vec{x}, \vec{y}, ..., \vec{z}$ из V и q ковекторов $f, g, ..., h$ из V'. Скалярная функция l называется тензором ранга, или валентности $+q$, структуры $(, q)$.

Следствие определения 2. [2] Векторная функция $\vec{l}$ задает тензор валентности $p+q+1$ структуры $(\,+1, q)$.

По определению 2, вектор, линейный функционал, линейный оператор суть тензоры простейшего вида. Так, вектор – одновалентный контрвариантный тензор структуры $(1, 0)$ в силу рефлексивности V.

Определение 3. Тензор называется симметрическим по всем аргументам или по их группе, если при любой их перестановке функция l не меняет значения [3].

Операция симметрирования и понятие симметричности имеют смысл только для аргументов одного вида: из пространства V либо из V'.

Определение 4. Форма $l(\underbrace{\vec{x}, \vec{x}, ..., \vec{x}}_{k})$ называется k-кратной [3] формой, порожденной симметрическим тензором $l\,(\vec{x}, \vec{y}, ..., \vec{z})$ валентности k.

§2 Теорема Менелая (доказательство авторское)

Сама теорема известна из глубокой древности, но мы докажем ее на новой основе, отличной от классических методов. Это придаст старинной теореме "второе дыхание", возможность получать содержательные обобщения **в единой схеме**. Рассмотрим треугольник ABC на расширенной плоскости, являющейся моделью проективной плоскости P_2. Прямая w не проходит через вершины A, B, C. По аксиоме Паша в аксиоматике Гильберта, она пересечет только две стороны треугольника. Пусть числа λ_1, λ_2, λ_3 являются отношениями, в которых точки M_i делят стороны треугольника внутренним или внешним образом. Из центра O в аффинном пространстве $A_3(R)$ спроецируем конфигурацию, получим связку прямых, которая тоже является моделью проективной плоскости P_2. В пространстве переносов $V_3 \backslash \{0\}$ выберем базис: $\vec{r}_1 = \overrightarrow{OA}$, $\vec{r}_2 = \overrightarrow{OB}, \vec{r}_3 = \overrightarrow{OC}$.

Ковектор $w \in V_3'$ отличен от нуля и по следствию 2 определения 1 однозначно задается тройкой чисел

$$w_i = [\vec{r}_i, w], \quad i = 1,2,3, \quad \text{притом} \quad \{w_1, w_2, w_3\} \neq \{0,0,0\}. \qquad (1)$$

Рассмотрим скаляры

$$m_i \, |[\vec{m}_i, w] = m_i, \quad i = 1,2,3. \qquad (2)$$

В условии (2) векторы $\vec{m}_i = \overrightarrow{OM}, \quad i = 1,2,3$.

Теорема Менелая истинна тогда и только тогда, когда векторы $\vec{m}_i$ в связке прямых компланарны.

$$\vec{m}_1 = \frac{\vec{r}_1 + \lambda_1 \vec{r}_2}{1+\lambda_1}, \quad \vec{m}_2 = \frac{\vec{r}_2 + \lambda_2 \vec{r}_3}{1+\lambda_2}, \quad \vec{m}_3 = \frac{\vec{r}_3 + \lambda_3 \vec{r}_1}{1+\lambda_3}. \qquad (3)$$

Так как $1+\lambda_i \neq 0$ и векторы прямых связки однородны, получение результата теоремы сводится к решению однородной системы относительно w_i:

$$\begin{cases} m_1 = w_1 + \lambda_1 w_2 = 0; \\ m_2 = w_2 + \lambda_2 w_3 = 0; \\ m_3 = w_3 + \lambda_3 w_1 = 0. \end{cases} \qquad (4)$$

В силу условия (1),

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = -1. \qquad (5)$$

Перепишем (5) в виде:

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = (-1)^{1 \cdot 1} = -1. \qquad (6)$$

В (6) в показателе степени первый множитель указывает, сколько точек прямой w лежит на каждой прямой: AB, BC, CA, а второй – равен порядку прямой w как простейшей алгебраической кривой линии, то есть 1.

§3 Обобщения теоремы Менелая

I. Пусть треугольник ABC лежит на проективной плоскости P_2 и его пересекает проективная кривая второго порядка, не проходящая через вершины A, B, C.

Известно, что проективная кривая однозначно задается пятью точками общего положения (никакие три из них не коллинеарны). Чтобы и шестая точка лежала на этой кривой, необходимо и достаточно существование оси Паскаля, которая является конструктивным эквивалентом уравнения квадрики на плоскости P_2 в проективных координатах.

Теорема 1. Чтобы шесть точек M_i принадлежали проективной кривой второго порядка и лежали бы на сторонах треугольника ABC (или на их продолжениях), необходимы и достаточны следующие условия: $\varphi\left(\vec{m}_i, \vec{m}_i\right) = 0$, где $\vec{m}_i = \overrightarrow{OM}_i$, φ – двухкратная форма (определение 4), $\prod\limits_{i=1}^{6} \lambda_i = 1$, λ_i имеют тот же смысл, что и выше ($i = \overline{1,6}$).

Доказательство. Так как никакие три точки невырожденной квадрики на плоскости P_2 не коллинеарны, а вершины A, B, C по условию ей не принадлежат, то на каждой прямой AB, BC, CA лежит по две точки из шести. За базис в пространстве $V_3(R)\backslash\{0\}$ выберем, как и выше, векторы $\vec{r}_1 = \overrightarrow{OA}, \vec{r}_1 = \overrightarrow{OB}, \vec{r}_1 = \overrightarrow{OC}$.

Вычислим векторы $\vec{m}_i = \overrightarrow{OM}_i$, точка O – центр связки прямых в пространстве $A_3(R)$:

$$\vec{m}_1 = \frac{\vec{r}_1 + \lambda_1 \vec{r}_2}{1+\lambda_1},\ \ \vec{m}_2 = \frac{\vec{r}_1 + \lambda_2 \vec{r}_2}{1+\lambda_2},\ \ \vec{m}_3 = \frac{\vec{r}_2 + \lambda_3 \vec{r}_3}{1+\lambda_3},\ \ \vec{m}_4 = \frac{\vec{r}_2 + \lambda_4 \vec{r}_3}{1+\lambda_4},$$

$$\vec{m}_5 = \frac{\vec{r}_3 + \lambda_5 \vec{r}_1}{1+\lambda_5},\quad \vec{m}_6 = \frac{\vec{r}_3 + \lambda_6 \vec{r}_1}{1+\lambda_6},\quad 1+\lambda_i \neq 0.$$

Двухкратная форма $\varphi\left(\vec{x}, \vec{x}\right)$ порождена двухвалентным дважды ковариантным симметрическим тензором $\varphi\left(\vec{x}, \vec{y}\right) = \varphi\left(\vec{y}, \vec{x}\right)$ [3], а уравнение $\varphi\left(\vec{x}, \vec{x}\right) = 0$ в связке прямых задает коническую поверхность второго порядка с вершиной . Этот конус проецирует на плоскость P_2 овальную квадрику, алгебраическую кривую второго порядка. Но все кривые второго порядка – суть конические сечения. Таким образом, векторы $\vec{m}_i = \overrightarrow{OM}_i$ должны удовлетворять системе: $\varphi\left(\vec{m}_i, \vec{m}_i\right)$, $i = \overline{1,6}$ как образующие конуса. В силу однородности векторов связки прямых с центром O получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} a_{11} + 2a_{12}\lambda_1 + a_{22}\lambda_1^2 = 0; & a_{11} + 2a_{12}\lambda_2 + a_{22}\lambda_2^2 = 0; \\ a_{22} + 2a_{23}\lambda_3 + a_{33}\lambda_3^2 = 0; & a_{22} + 2a_{23}\lambda_4 + a_{33}\lambda_4^2 = 0; \\ a_{33} + 2a_{23}\lambda_5 + a_{11}\lambda_5^2 = 0; & a_{33} + 2a_{23}\lambda_6 + a_{11}\lambda_6^2 = 0; \end{cases} \tag{7}$$

где $a_{ij} = a_{ji} = \varphi\left(\vec{r}_i, \vec{r}_j\right)$. Система (7) естественным образом распалась на три подсистемы, каждая из них характеризует, по сути дела, квадратное уравнение с простыми корнями (λ_1, λ_2), (λ_3, λ_4) и (λ_5, λ_6) соответственно.

Двухкратные формы : $\varphi\left(\vec{m}_i, \vec{m}_i\right)$, $i = \overline{1,6}$ – невырожденные, потому $a_{11} \neq 0$; $a_{22} \neq 0$; $a_{33} \neq 0$.

К каждой подсистеме из (7) применим теорему Виета и получим, что

$$\lambda_1\lambda_2 = \frac{a_{11}}{a_{22}}, \quad \lambda_3\lambda_4 = \frac{a_{22}}{a_{33}}, \quad \lambda_5\lambda_6 = \frac{a_{33}}{a_{11}},$$

отсюда

$$\prod_{i=1}^{6} \lambda_i = \frac{a_{11}a_{22}a_{33}}{a_{22}a_{33}a_{11}} = 1. \tag{8}$$

Перепишем (8) в виде:

$$\prod_{i=1}^{6} \lambda_i = (-1)^{2\cdot 2} = 1. \tag{9}$$

II. Пусть, как и выше, треугольник ABC расположен на проективной плоскости P_2. Пусть, далее, его пересекает алгебраическая кривая порядка n, не проходящая через точки A, B, C. Введем ряд ограничений:

1. рассматриваем плоские действительные алгебраические кривые (п.д.а.к.) (Р. Декарт [4]),
2. нераспадающиеся;
3. не имеющие особых точек;
4. порядок п.д.а.к. совпадает с ее классом.

Известно, что п.д.а.к. однозначно задается $\frac{n(n+3)}{2}$ точками. Две п.д.а.к. порядков m и n при наших ограничениях пересекаются в mn точках.

В данной задаче прямые AB, BC, CA являются п.д.а.к. порядка один, значит, на каждой стороне треугольника как на прямой лежит по n точек данной п.д.а.к.

Теорема 2. Чтобы $\frac{n(n+3)}{2}+1$ точек M_i принадлежали п.д.а.к. порядка n и при этом лежали бы на сторонах треугольника или на их продолжениях, необходимы и достаточны условия:

а) $\varphi\left(\vec{m}_i, \vec{m}_i, ..., \vec{m}_i\right)=0$, где φ – n-кратная форма [3], $\vec{m}_i=\overrightarrow{OM}_i$, – центр связки прямых, $i=\overline{1,3n}$.

б) $\prod\limits_{i=1}^{s}\lambda_i=\pm 1$. $\Pi=1$ при четном n, $\Pi=-1$ при нечетном n.

Доказательство. Не нарушая общности рассуждений, докажем теорему для п.д.а.к. при $n=3$ (для понимания единой схемы обобщений). По-прежнему векторы $\vec{m}_i=\overrightarrow{OM}_i$, $i=\overline{1,9}$. Как в теореме 1, получение результатов сводится к решению системы, аналогичной (7), которая распадется на три подсистемы кубических уравнений с простыми корнями (над алгебраически замкнутым полем). В самом деле, если $\vec{r_1}=\overrightarrow{OA}, \vec{r}_1=\overrightarrow{OB}, \vec{r}_1=\overrightarrow{OC}$ – базис в $V_3\backslash\{0\}$, то вычислим векторы $\vec{m}_i$:

$$i=1,2,3: \quad \vec{m}_i=\frac{\vec{r}_1+\lambda_i\vec{r}_2}{1+\lambda_i}; \quad i=4,5,6: \quad \vec{m}_i=\frac{\vec{r}_2+\lambda_i\vec{r}_3}{1+\lambda_i};$$

$$i=7,8,9: \quad \vec{m}_i=\frac{\vec{r}_3+\lambda_i\vec{r}_1}{1+\lambda_i}, \quad 1+\lambda_i\neq 0.$$

Далее, в однородных координатах на плоскости P_2 п.д.а.к. характеризуется уравнением $a_{ijk}x^ix^jx^k=0$, $i,j,k=1,2,3$, где система чисел a_{ijk} – трехвалентный трижды ковариантный симметрический тензор, соответствующий 3-кратной форме $\varphi\left(\vec{x},\vec{x},\vec{x}\right)$. Таким образом, в связке прямых с направлениями, являющимися однородными векторами, точки M_i, $i=\overline{1,9}$, принадлежат п.д.а.к. тогда и только тогда, когда $\varphi\left(\vec{m_1},\vec{m_1},\vec{m_1}\right)=0$. Подставим выражения

$\vec{m}_i$, учитывая их однородность, и получим:

$$\begin{cases} i = 1;2;3 \;\Rightarrow\; a_{111} + 2a_{112}\lambda_i + 3a_{221}\lambda_1^2 + a_{222}\lambda_i^3 = 0; \\ i = 4;5;6 \;\Rightarrow\; a_{222} + 3a_{223}\lambda_i + 3a_{233}\lambda_i^2 + a_{333}\lambda_i^3 = 0; \\ i = 7;8;9 \;\Rightarrow\; a_{333} + 3a_{311}\lambda_i + 3a_{233}\lambda_i^2 + a_{111}\lambda_i^3 = 0. \end{cases} \tag{10}$$

Таким образом, в (10) участвуют 3-кратные формы трехвалентных симметрических ковариантных тензоров. Так же, как в п. 1, система (10), по сути дела, представлена в виде трех подсистем кубических уравнений с простыми корнями над алгебраически замкнутым полем: $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, $(\lambda_4, \lambda_5, \lambda_6)$ и $(\lambda_7, \lambda_8, \lambda_9)$ соответственно и по теореме Виета $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = (-1)^3 \cdot \frac{a_{111}}{a_{222}}$, $\lambda_4 \cdot \lambda_5 \cdot \lambda_6 = (-1)^3 \cdot \frac{a_{222}}{a_{333}}$ и $\lambda_7 \cdot \lambda_8 \cdot \lambda_9 = (-1)^3 \cdot \frac{a_{333}}{a_{111}}$

3-кратные формы не вырождены, потому

$$\prod_{i=1}^{9} = (-1)^9 \cdot 1 = -1. \tag{11}$$

Перепишем (11) в виде, аналогичном условию (9):

$$\prod_{i=1}^{9} \lambda_i = (-1)^{3\cdot 3}. \tag{12}$$

Доказательство теоремы 2 в общем случае для п.д.а.к. порядка n технологически мало чем отличается от случая $n = 3$, но зато проясняет данную схему получения всех результатов статьи. В самом деле, для п.д.а.к. порядка n придем к системе уравнений, аналогичной (10), которая распадается на три подсистемы n уравнений степени n с простыми корнями над алгебраически замкнутым полем. В самом деле, на каждой прямой AB, BC, CA лежит по n точек этой кривой (при наших ограничениях). Система возникает из процессов вычисления и выражения в явном виде n-кратных невырожденных форм [3], порожденных ковариантными симметрическими тензорами структуры $(n, 0)$. Вычисления коэффициентов n-кратных форм связано с биномиальными законами, и тогда получим, что

$$\varphi\left(\vec{m}_i, \vec{m}_i, ..., \vec{m}_i\right) = 0, \quad i = \overline{1, 3n}. \tag{13}$$

$$\prod_{i=1}^{3n} \lambda_i = \pm 1 \text{ при четном } n \text{ и } \Pi = 1 \text{ при нечетном } n. \qquad (14)$$

$$\prod_{i=1}^{3n} \lambda_i = (-1)^{n \cdot n}, \quad \text{где} \quad s = 3n. \qquad (15)$$

Теорема 2 доказана. Соотношение (14) говорит о том, что $\Pi = 1$ при четном n и $\Pi = -1$ при нечетном n. Равенство (15) резюмирует характер общей схемы всех результатов, если вспомнить об условиях (6), (9) и (12).

Библиографический список

1. *Ахиезер Н.И., Глазман И.М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1966. 543 с.
2. *Таперо Т.Б., Швецова И.И.* Линейная алгебра и функциональный анализ в задачах: Учебное пособие для студентов магистратуры и студентов математических специальностей. Брянск: Изд-во БГУ, 2002. 124 с.
3. *Халмош П.Р.* Конечные векторные пространства. М.: ГИЗ физ.-мат. литературы, 1963. 264 с.
4. Математический энциклопедический словарь. М.: Советская энциклопедия, 1988. 848 с.

Нетрадиционные геометрические интерпретации пифагоровых троек

В.Е. Фирстов

1. Пифагоровы тройки и клинопись Древнего Вавилона

Задача Пифагора, как известно, состоит в определении троек $(x; y; z)$ натуральных решений уравнения

$$x^2 + y^2 = z^2. \qquad (1)$$

Задача Пифагора, возможно, явилась предтечей теоремы Пифагора, поскольку связь между ними очевидна, и поэтому натуральные решения уравнения (1) часто называют пифагоровыми тройками. К этой задаче можно прийти, если допустить, например, следующие соображения. На глиняных табличках вавилонян встречаются такие тройки, как $(4961; 6480; 8161)$ или $(12709; 13500; 18541)$, которые маловероятно найти эмпирически, путем перебора, откуда естественно возникает мысль о существовании общего способа нахождения пифагоровых троек, и тогда становится естественной постановка задачи Пифагора.

В дошедших до нас текстах мы находим следующее решение задачи Пифагора

$$x = 2n + 1; \quad y = 2n(n+1); \quad z = 2n(n+1) + 1; \quad n \in \mathbf{N}, \qquad (2)$$

которое приписывают самим пифагорейцам, и есть основания полагать [1–3], что это решение найдено из геометрических соображений, например, с помощью построения, показанного на рис. 1.

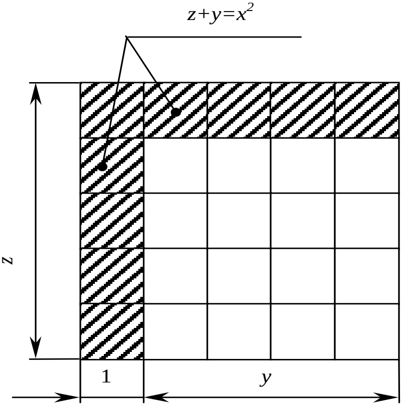


Рис. 1

Спустя примерно полтора столетия решение пифагорейцев (2) было несколько улучшено Платоном (427–347 гг. до н.э.), которому приписывают следующее решение задачи Пифагора [1–3] в случае $z - y = 2$:

$$x = 2n, \quad y = n^2 - 1, \quad z = n^2 + 1, \quad n \in \mathbf{N}, \ n > 1. \tag{3}$$

Легко видеть, что решение Платона (3) при $n = 2k + 1$ после сокращения на 2 дает решение пифагорейцев (2). Однако, в силу ограничения $z - y = 2$, решение (3) также не является общим решением задачи (1), а дает лишь некоторый класс таких решений. Поэтому, к примеру, тройка $(56; 33; 65)$, удовлетворяя уравнению (1), в то же время решением (3) не описывается.

Тем не менее, решения пифагорейцев (2) и Платона (3) подсказывают путь к отысканию общего решения задачи Пифагора (1). Для этого заметим, что решения (2), (3) получены из соотношения, которое в общем случае следует записать в виде

$$z - y = m, \quad m \in \mathbf{N}. \tag{4}$$

Тогда получаем общее решение задачи Пифагора в виде

$$\begin{cases} x = 2dab; \\ z - y = 2da^2; \\ z + y = 2db^2; \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 2dab; \\ y = d\left(b^2 - a^2\right); \\ z = d\left(b^2 + a^2\right); \end{cases} \tag{5}$$

где $a, b, d \in \mathbf{N}$, $b > a$.

Общее решение (1) можно найти в “Началах” Евклида (около 340–287 гг. до н.э.) [4], что, в общем-то, соответствует логике происходящего – Евклид, как известно [1], во многом следовал канонам геометрической школы Платона. Однако Варден [1], в связи с решением (1), все-таки отстаивает приоритет вавилонян, приводя при этом некоторые аргументы, вытекающие из анализа древневавилонских клинописных таблиц.

2. Пифагоровы тройки и пифагоровы сети на конусе

Задаче Пифагора (1) можно придать несколько иное звучание, если уравнение (1) рассматривать как коническую поверхность 2-го порядка вида

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0, \tag{6}$$

на которой определяются точки с целыми координатами (т.е. пифагоровы тройки).

Вернемся теперь к общему решению (5) задачи Пифагора (1). Геометрически это решение можно представить множеством точек, координаты которых определяются пересечением следующих двух семейств линий:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 0; \\ z - y = 2da^2; \end{cases} \tag{7}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 0; \\ z + y = 2db^2. \end{cases} \tag{8}$$

Можно видеть, что семейства (7), (8) порождаются в сечениях конуса (6) плоскостями, параллельными соответствующей образующей в уравнении конуса (6). Следовательно, мы имеем дело с двумя семействами парабол (7), (8) на рассматриваемом конусе, причем секущие плоскости семейства (7) перпендикулярны секущим плоскостям семейства (8).

Семейства (7), (8) на конусе (6) образуют некоторую сеть, узлы которой определяются пересечением парабол этих семейств. Эту сеть назовем пифагоровой сетью – ее узлы определяют множество точек с целыми координатами на конической поверхности (6). Таким образом, задаче Пифагора дана интересная геометрическая интерпретация в пространстве.

Не вдаваясь в подробное изучение пифагоровой сети (7), (8), легко показать, что эта сеть не является ортогональной.

Таким образом, общее решение задачи Пифагора геометрически интерпретируется узлами пары сопряженных пифагоровых сетей.

3. Примитивные пифагоровы тройки и примитивные пары

Пифагорову тройку $(x; y; z)$ называют примитивной, если НОД$(x; y; z) = 1$.

Пусть π – множество всех примитивных пифагоровых троек. Важно отметить, что определение множества π эквивалентно решению задачи Пифагора, поскольку любая тройка $(x; y; z) \in \pi$ порождает класс пифагоровых троек $(kx; ky; kz)$, $k \in \mathbf{N}$ и объединение всех таких классов дает множество всех пифагоровых троек.

Примитивные пифагоровы тройки обладают следующими свойствами:

1) НОД$(x;y)$ =НОД$(x;z)$ =НОД$(y;z) = 1,$ (9)
т.е. элементы любой примитивной пифагоровой тройки $(x;y;z)$ попарно взаимно просты;

2) у любой примитивной пифагоровой тройки $(x;y;z)$ числа x, y имеют разную четность;

3) у любой примитивной пифагоровой тройки $(x;y;z)$ число z нечетно.

Пусть P – бинарное отношение на $\mathbf{N}$, заданное следующим образом:

$$P = \{(b;a): \text{ НОД}(a;b) = 1,\ b - a = 2k - 1,\ a,\ b,\ k \in \mathbf{N}\}. \qquad (10)$$

Отношение P антирефлексивно и определяет на $\mathbf{N}$ пары $(b;a)$, $b > a$ взаимно простых чисел разной четности, которые называют примитивными парами.

4. Построение пифагоровых троек геометрическим преобразованием примитивных пар

Теорема 1. Отображение $P \to \pi$ по правилу

$$x = 2ab, \quad y = b^2 - a^2, \quad z = b^2 + a^2, \qquad (11)$$

где $(b;a) \in P$, $(x;y;z) \in \pi$ является взаимно однозначным соответствием.

Доказательство. Пусть $(b;a) \in P$, после чего в комплексной плоскости рассматривается следующая цепочка соотношений:

$$\frac{b + ai}{a + bi} = \frac{2ab - (b^2 - a^2)i}{b^2 + a^2} = \frac{x - yi}{z}, \qquad (12)$$

где $x;y;z$ – связаны соотношениями (11). Поскольку $b, a \in \mathbf{N}$ и $b > a$, то между парами $(b;a)$ и тройками $(x;y;z)$ с помощью (11), (12) устанавливается взаимно однозначное соответствие. Нетрудно видеть, что НОД$(x;y;z) = 1$, т.к. в противном случае получается НОД$(a;b) > 1$, что противоречит $(b;a) \in P$. Поэтому осталось показать, что тройка $(x;y;z)$ в (12) является пифагоровой.

Для этого замечаем, что

$$\left|\frac{b+ai}{a+bi}\right| = 1 \ \Rightarrow\ \left|\frac{x-yi}{z}\right| = 1 \ \Rightarrow\ x^2+y^2=z^2, \tag{13}$$

и, таким образом, теорема полностью доказана.

Доказательство теоремы 1, предложенное в [5], указывает геометрический способ решения задачи Пифагора, состоящий в следующем. Пусть $(b;a) \in P$ и эта примитивная пара изображается точкой $P_1(b;a)$ на координатной плоскости (рис. 2), где для определенности принято $b=2$, $a=1$. Точка P_1 преобразуется в точку $P_2(a;b)$ так, что точки P_1 и P_2 лежат на окружности радиуса $OP_1 = OP_2 = \sqrt{a^2+b^2}$ и располагаются симметрично OK – биссектрисы 1-го координатного угла. Далее производится поворот $R_O(\angle P_2OP_1) = \angle P_2'OP_1'$ и определяется точка M как пересечение OP_1' с единичной окружностью с центром в точке O.

Теорема 2. Построенная точка M имеет координаты $\left(\frac{x}{z}; -\frac{y}{z}\right)$ так, что $(x;y;z)$ – примитивная пифагорова тройка и данное построение (рис. 2) реализует обратимое точечное преобразование.

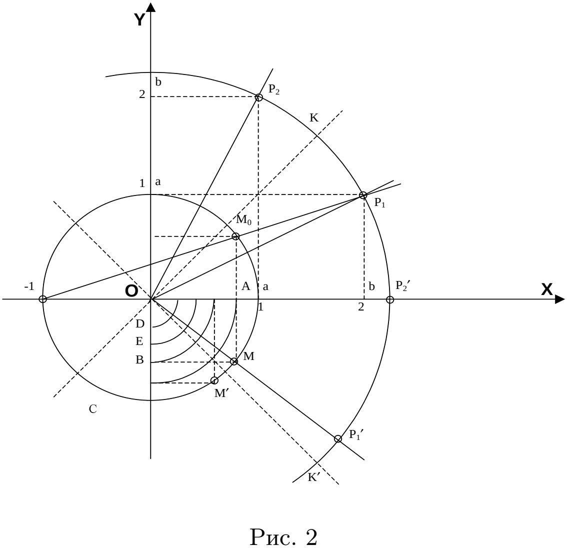


Рис. 2

Доказательство. По построению, точкам $P_1(b;a)$ и $P_2(a;b)$ взаимно однозначно соответствуют комплексные числа $u_1 = b + ai$ и $u_2 = a + bi$, так, что $|u_1| = |u_2|$. Тогда $\angle P_1OX = arg\, u_1 = \varphi_1$, $\angle P_2OX = arg u_2 = \varphi_2$, причем $\varphi_1 < \varphi_2$, так как $a < b$, по определению (10). Отсюда получается $u = \frac{u_1}{u_2} = \frac{b+ai}{a+bi} = \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2) = \cos(\varphi_2 - \varphi_1) - i\sin(\varphi_2 - \varphi_1)$, что, учитывая (12), дает $\frac{x}{z} = \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$, $\frac{y}{z} = \sin(\varphi_2 - \varphi_1)$. Так как $|u| = 1$, то можно считать $|u| = OM$, и, по построению, $\angle P_2OP_1 = \angle P_2'OP_1' = \varphi_2 - \varphi_1$, что дает $\frac{x}{z} = \frac{OA}{OM}$, $\frac{y}{z} = \frac{OB}{OM}$ (рис. 2).

Таким образом, построенная точка M с координатами $\left(\frac{x}{z};\ -\frac{y}{z}\right)$ взаимно однозначно связана с комплексным числом $u = \frac{1}{z}(x - yi)$, фигурирующим в теореме 1, и, следовательно, $(x;y;z)$ – примитивная пифагорова тройка, соответствующая примитивной паре $(b;a)$.

Данное построение (рис. 2) предусматривает последовательное точечное преобразование $P_1 \to P_2 \to M$, которое является обратимым, так как точки P_1 и P_2 взаимно однозначно связаны осевой симметрией относительно биссектрисы OK, а с поворотом $R_O(\angle P_2OP_1) = \angle P_2'OP_1'$ связано обратное преобразование $R_O^{-1}(\angle P_2'OM) = \angle P_2OP_1$, поскольку луч OK должен быть биссектрисой $\angle P_2OP_1 = \angle P_2'OM$. Поэтому точки M и P_1 связаны взаимно однозначным соответствием. Теорема 2 полностью доказана.

Определяя теперь общую меру отрезков OA, OB, OM геометрическим построением по алгоритму Евклида (рис. 2), получаем $OA = 4$, $OB = 3$, $OM = 5$, т.е. данное построение реализует преобразование примитивной пары $(2;1)$ в пифагорову тройку $(4;3;5)$.

Библиографический список

1. *Ван дер Варден Б.Л.* Пробуждающаяся наука. Математика древнего Египта, Вавилона и Греции. М.: Физматгиз, 1959. 459 с.
2. *Волошинов А.В.* Пифагор. М.: Просвещение, 1993. 224 с.
3. *Кольман Э.* История математики в древности. М.: Физматгиз, 1961. 235 с.

4. *Евклид.* Начала / Перевод и комментарии Д.Д. Мордухай-Болтовского, при редакционном участии И.Н. Веселовского. М.-Л., 1948-1950. Т. I-III.
5. *Hancock S.F.* Pythagorean Triples // Mathematical Gazette. 1970. V. 54. P. 289.

Сведения об авторах

1. Алексеев Валерий Борисович – доктор физико-математических наук, профессор МГУ, Москва.
2. Бахусова Елена Васильевна – директор Центра педагогических технологий ТНУ, доцент, Тольятти.
3. Беляева Эмма Степановна – кандидат педагогических наук, доцент Воронежского государственного педагогического университета, Воронеж.
4. Брагина Наталья Анатольевна – кандидат физико-математических наук, старший преподаватель Пермского государственного технического университета, Пермь.
5. Бурлакова Татьяна Вячеславовна – кандидат педагогических наук, доцент Шуйского государственного педагогического университета, Шуя.
6. Бычков Сергей Николаевич – кандидат физико-математических наук, доцент МГУ, Москва.
7. Вавилов Валерий Васильевич – кандидат физико-математических наук, доцент Специализированного учебно-научного центра МГУ, Москва.
8. Вернер Алексей Леонидович – доктор физико-математических наук, профессор РГПУ, Санкт-Петербург.
9. Гильмуллин Мансур Файзрахманович – старший преподаватель Елабужского государственного педагогического института, Елабуга.
10. Грачев Олег Борисович – старший преподаватель МГОПУ, Москва.
11. Гушель Ревекка Залмановна – старший преподаватель ЯГПУ, Ярославль.

12. Демидов Сергей Сергеевич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий сектором Института истории естествознания и техники РАН, Москва.
13. Епифанова Нина Михайловна – кандидат педагогических наук, доцент ЯГПУ, Ярославль.
14. Карпова Татьяна Николаевна – кандидат педагогических наук, доцент ЯГПУ, Ярославль.
15. Киотина Галина Васильевна – кандидат физико-математических наук, профессор Рязанского государственного педагогического университета, Рязань.
16. Кондаурова Инесса Константиновна – кандидат педагогических наук, доцент Саратовского государственного университета, Саратов.
17. Кузнецов Владимир Степанович – кандидат физико-математических наук, доцент ЯрГУ, Ярославль.
18. Кузнецова Валентина Анатольевна – доктор педагогических наук, профессор ЯрГУ, Ярославль.
19. Кулибаба Ольга Михайловна – аспирантка Саратовского государственного университета, Саратов.
20. Куприкова Ольга Николаевна – аспирантка Смоленского государственного педагогического университета, Смоленск.
21. Латышева Любовь Павловна – кандидат педагогических наук, доцент Пермского государственного педагогического университета, Пермь.
22. Лебедев Алексей Викторович – кандидат физико-математических наук, доцент МГУ, Москва.
23. Малиновская Наталья Викторовна – аспирантка МПГУ, Москва.

24. Матвиевская Галина Павловна – доктор физико-математических наук, профессор Оренбургского государственного педагогического университета, Оренбург.

25. Меньшикова Наталия Аркадьевна – кандидат педагогических наук, старший преподаватель ЯГПУ, Ярославль.

26. Мильков Владимир Владимирович – доктор исторических наук, ведущий научный сотрудник Института философии РАН, Москва.

27. Монахов Вадим Макариевич – чл.-корр. РАО, доктор педагогических наук, МГОПУ, Москва.

28. Монахов Никита Вадимович – кандидат педагогических наук, доцент, Москва.

29. Мурина Ирина Николаевна – кандидат педагогических наук, доцент ЯГПУ, Ярославль.

30. Неволина Ольга Анатольевна – ассистент Пермского государственного педагогического университета, Пермь.

31. Никулина Екатерина Валерьевна – доцент МГОПУ, Москва.

32. Осташков Владимир Николаевич – кандидат физико-математических наук, доцент Тюменского института нефти и газа, Тюмень.

33. Павлова Оксана Алексеевна – аспирантка Калужского государственного педагогического университета, Калуга.

34. Перминов Василий Яковлевич – доктор философских наук, профессор МГУ, Москва.

35. Петрова Елена Степановна – доктор педагогических наук, профессор Саратовского государственного университета, Саратов.

36. Петрова Светлана Сергеевна – кандидат физико-математических наук, доцент МГУ, Москва.

37. Полянский Сергей Михайлович – кандидат философских наук, настоятель Троицкой церкви с. Захарово, Клинский район, Московская область.

38. Потапов Александр Сергеевич – кандидат физико-математических наук, профессор Воронежского государственного педагогического университета, Воронеж.

39. Ройтенберг Владимир Шлеймович – кандидат физико-математических наук, доцент ЯГТУ, Ярославль.

40. Сенькина Гульжан Ержановна – доктор педагогических наук, профессор Смоленского государственного педагогического университета, Смоленск.

41. Симонов Рэм Александрович – доктор исторических наук, профессор Российской государственной Академии печати, Москва.

42. Сенашенко Василий Савельевич – доктор физико-математических наук, профессор РУДН, Москва.

43. Смирнов Евгений Иванович – доктор педагогических наук, профессор ЯГПУ, Ярославль.

44. Таперо Татьяна Борисовна – старший преподаватель Брянского государственного университета, Брянск.

45. Тестов Владимир Афанасьевич – доктор педагогических наук, профессор Вологодского государственного педагогического университета, Вологда.

46. Тимофеев Евгений Александрович – доктор физико-математических наук, профессор ЯрГУ, Ярославль.

47. Урусов Михаил Александрович – кандидат физико-математических наук, ассистент МГУ, Москва.

48. Фирстов Виктор Егорович – кандидат физико-математических наук, доцент Саратовского государственного университета, Саратов.

49. Швецова Ирина Ивановна – кандидат физико-математических наук, доцент Читинского государственного университета, Чита.

50. Щетников Андрей Иванович – координатор Виртуальной лаборатории теоретической и прикладной эпистемологии, Новосибирск.

51. Яровая Елена Борисовна – кандидат физико-математических наук, доцент МГУ, Москва.

Труды вторых Колмогоровских чтений

Редактор *Л.К.Шереметьева*
Компьютерная подготовка оригинал-макета *Т.Л.Трошиной*

Подписано в печать 15.12.2004. Формат 60×90 1/16. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 24. Заказ 610 Тираж 200.

Редакционно-издательский отдел Ярославского государственного педагогического университета имени К.Д.Ушинского
150000, Ярославль, Республиканская ул., 108

Типография ЯГПУ
150000, Ярославль, Которосльная наб., 44