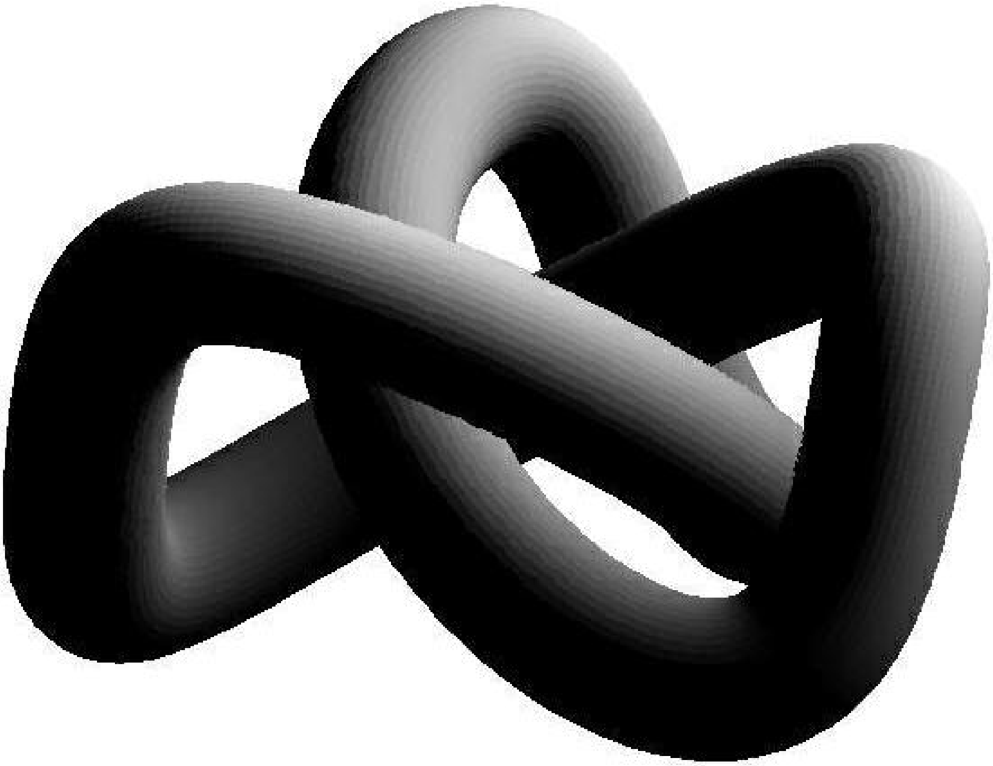
Höhere Mathematik



Formelsammlung

Bruno Gnörich
19. August 2001

Inhaltsverzeichnis

Verzeichnis der Abbildungen und Tabellen

Abbildungen

Tabellen

Titelgrafik erstellt mit Maple V Release 4 von Waterloo Maple Inc.

Funktion: $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} -10 \cdot \cos(t) - 2 \cdot \cos(5t) + 15 \cdot \sin(2t) \\ 10 \cdot \sin(t) - 2 \cdot \sin(5t) - 15 \cdot \sin(2t) \\ 10 \cdot \cos(3t) \end{pmatrix}$

So kann also die Mathematik definiert werden
als diejenige Wissenschaft, in der wir niemals das kennen,
worüber wir sprechen, und niemals wissen, ob das,
was wir sagen, wahr ist. **Bertrand Russell**

Bruno Gnörich
formelsammlung@gnoerich.de

Diese Formelsammlung ist auch im Internet abrufbar. Es stehen die Formate HTML (Hyper Text Markup Language) und PDF (Portable Document Format) zur Verfügung. Besuchen Sie hierfür http://www.gnoerich.de/formelsammlung/formelsammlung.html.

1. Zahlbereiche und ihre Eigenschaften

1.1 Natürliche Zahlen:

Symbol: $\mathbb{N} = \{0,1,2,3,4,...\}$

1.2 Ganze Zahlen:

Symbol: $\mathbb{Z} = \{...,-2,-1,0,1,2,...\}$

1.3 Rationale Zahlen:

Symbol: $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \middle| p,q \in \lesseqgtr \text{ und } q \neq 0 \right\}$

1.4 Reelle Zahlen:

Symbol: $\mathbb{R}$

1.4.1 Axiome der Addition:

1.4.1.1 $a + b = b + a$
1.4.1.2 $(a + b) + c = a + (b + c)$
1.4.1.3 Die Gleichung $a + x = b$ ist <u>immer eindeutig lösbar</u>.
1.4.1.4 $-(-a) = a$

1.4.2 Axiome der Multiplikation:

1.4.2.1 $a \times b = b \times a$
1.4.2.2 $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$
1.4.2.3 $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$
1.4.2.4 Die Gleichung $a \times x = b$ ist für alle $a \neq 0$ eindeutig lösbar.

1.4.3 Axiome der Ordnung:

1.4.3.1 $a < b$ und $b < c \Rightarrow a < c$
1.4.3.2 $a < b$; c beliebig $\Rightarrow a + c < b + c$
1.4.3.3 $a < b$; $c > 0 \Rightarrow a \times c < b \times c$

1.4.4 Archimedisches Axiom:

Zu jeder reellen Zahl x gibt es eine natürliche Zahl n, für die gilt: $n > |x|$
Zu jeder reellen Zahl $x > 0$ gibt es eine natürliche Zahl n, für die gilt: $n^{-1} < x$

1.4.5 Axiom der Vollständigkeit:

Jede Verknüpfung zweier reeller Zahlen gemäß dieser Axiome ergibt wieder eine reelle Zahl.

1.4.6 Bemerkung:

Dreiecksungleichung: $\big||a| - |b|\big| \leq |a + b| \leq |a| + |b|$

1.5 Komplexe Zahlen:

Symbol: $\mathbb{C} = \{ z | z = (x, y) \text{ mit } x, y \in \mathbb{R} \}$

Die Menge der komplexen Zahlen ist ein algebraischer Körper bezüglich Addition und Multiplikation.
Imaginäre Einheit: $i^2 = -1$

1.5.1 Schreibweisen:

Schreibweise einer komplexen Zahl z:

$$z = x + i \cdot y$$

$$\text{Mit } r = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ und } j = \arctan \frac{y}{x} \text{ wird daraus:}$$

$$\begin{aligned} z &= r \cdot [\cos(j) + i \cdot \sin(j)] \\ &= r \cdot cis(j) \\ &= r \cdot e^{i \cdot j} \end{aligned}$$

Es gilt die Dreiecksungleichung.

1.5.2 Die Moivre'sche Formel:

$$\begin{aligned} z^n &= [r \cdot cis(j)]^n \\ &= r^n \cdot cis(n \cdot j) \\ &= r^n \cdot e^{i \cdot n \cdot j} \end{aligned}$$

Die Exponentialschreibweise von z wird als **Polarform von z** bezeichnet.

1.6 Das Prinzip der vollständigen Induktion

Es sei n_0 eine natürliche Zahl und A(n) für alle natürlichen Zahlen $n \geq n_0$ eine Aussage. Es gelte:

1.6.1 Induktionsanfang:

A(n_0) ist eine wahre Aussage.

1.6.2 Induktionsvoraussetzung:

Die Annahme der Gültigkeit dieser Aussage für alle $n \geq n_0$

1.6.3 Induktionsschluß:

[A(n) $\Rightarrow$ A(n+1)] ist wahr für alle $n \geq n_0$

Damit ist die Gültigkeit der Aussage A(n) bewiesen.

1.6.4 Beispiel: Bernoullische Ungleichung:

Es sei x eine reelle Zahl mit $-1 \leq x$. Ferner sei n eine natürliche Zahl. Dann gilt für alle n die Bernoullische Ungleichung: $A(n)\colon\ 1 + n \cdot x \leq (1 + x)^n$

Beweis unter Verwendung vollständiger Induktion:

Induktionsanfang: $n_0 = 1\colon\ 1 + x \leq (1 + x)^1 = 1 + x$ (gilt insbesondere für $-1 \leq x$)

Induktionsannahme: Die Behauptung gelte für ein $n \in \mathbb{Z}$, also $1 + n \cdot x \leq (1 + x)^n$.

Induktionsschluß: Zu zeigen ist, daß die Behauptung dann auch für $n + 1$ gilt, also $1+(n+1)\cdot x \le (1+x)^{n+1}$. Außerdem gilt: Da $-1 \le x$ ist, ist $1+x \ge 0$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n \cdot (1+x)\\ &\ge (1+n\cdot x)\cdot(1+x)\\ &= 1+(n+1)\cdot x + n\cdot x^2\\ &\ge 1+(n+1)\cdot x\end{aligned}$$

Damit ist die Gültigkeit der Bernoullischen Ungleichung bewiesen.

1.7 Fakultät, Binomialkoeffizient, Binomischer Lehrsatz

1.7.1 Die Fakultät:

$$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n = \prod_{k=1}^{n} k$$

1.7.2 Der Binomialkoeffizient:

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \dfrac{n!}{k!\cdot(n-k)!} & \text{wenn } 0 \le k \le n \\ 0 & \text{wenn k > n}\end{cases}$$

1.7.3 Der Binomische Lehrsatz:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k \qquad \text{(siehe Pascalsches Dreieck)}$$

Der binomische Lehrsatz kann mittels vollständiger Induktion bewiesen werden.

1.7.4 Pascal'sches Dreieck:

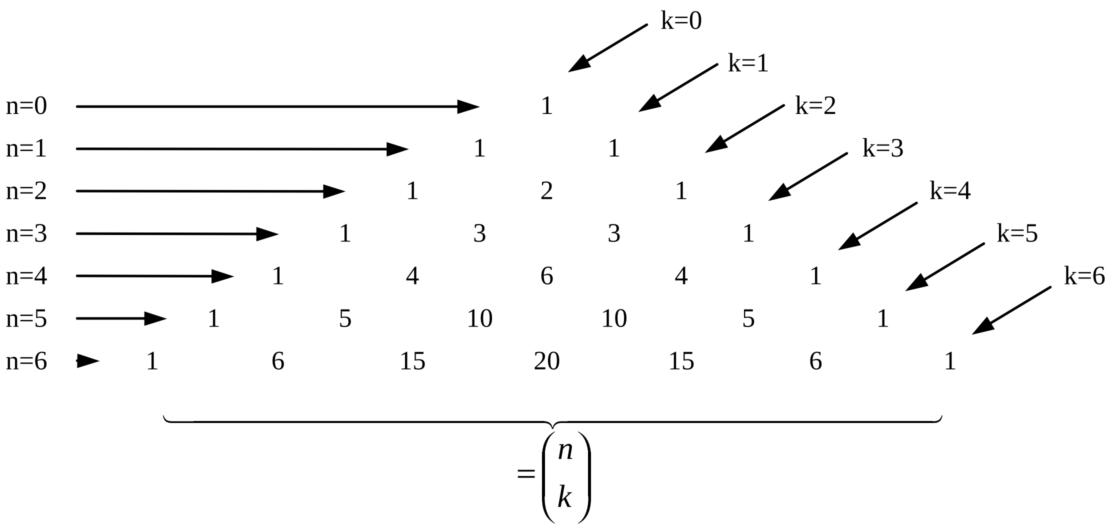


Abbildung 1: Pascal'sches Dreieck

1.8 Der Fundamentalsatz der Algebra

Ein Polynom n-ten Grades kann immer folgendermaßen umgeformt werden:

$$P(z) = a_0 + a_1 \cdot z + ... + a_n \cdot z^n$$
$$= a_n \cdot (z - z_1) \cdot (z - z_2) \cdot ... \cdot (z - z_n)$$

Mit $a_n \neq 0 \wedge a_i \in \mathbb{C}$

Die Zahlen z_i heißen **Nullstellen des Polynoms P**.
Jedes Polynom ungeraden Grades mit reellen Koeffizienten hat mindestens eine reelle Nullstelle.

2. Vektorrechnung, analytische Geometrie, lineare Gleichungssysteme

2.1 Vektorrechnung, analytische Geometrie

2.1.1 Vektorielle Addition:

$$\underline{a}+\underline{b}=\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ \vdots \\ a_n+b_n \end{pmatrix}$$

2.1.2 Skalarprodukt:

$$\underline{a}\cdot\underline{b}=a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2+\ldots+a_n\cdot b_n=\sum_{j=1}^{n}a_j\cdot b_j\in\mathbb{R}$$

Zusätzlich gilt: $\underline{a}\cdot\underline{b}=0 \;\Leftrightarrow\; \underline{a}\perp\underline{b}$

2.1.3 Länge des Vektors $\underline{a}$:

$$\|\underline{a}\|=\sqrt{\underline{a}\cdot\underline{a}}=\sqrt{\underline{a}^2}$$

2.1.4 Schwarzsche Ungleichung:

$$|\underline{a}\cdot\underline{b}|\leq\|\underline{a}\|\cdot\|\underline{b}\|$$

Ferner gilt die Dreiecksungleichung

2.1.5 Orthogonale Projektion von $\underline{a}$ auf $\underline{b}$:

$$\mathrm{Proj}_{\underline{b}}\,\underline{a}=\frac{\underline{a}\cdot\underline{b}}{\|\underline{b}\|^2}\cdot\underline{b}=\lambda\cdot\underline{b}$$

2.1.6 Winkel zwischen zwei Vektoren $\underline{a}$ und $\underline{b}$:

$$\cos\alpha=\frac{\underline{a}\cdot\underline{b}}{\|\underline{a}\|\cdot\|\underline{b}\|}$$

2.1.7 Raumprodukt (Spatprodukt):

$$\langle\underline{a},\underline{b},\underline{c}\rangle=(\underline{a}\times\underline{b})\cdot\underline{c}$$

Es erzeugt es ein ***Rechtssystem***, falls es positiv ist, und ein ***Linkssystem***, falls es negativ ist.
Das Vektortripel heißt ***ausgeartet (linear abhängig)***, falls das Spatprodukt null ist.

2.1.8 Vektorprodukt (Kreuzprodukt):

$$\underline{a}\times\underline{b}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_2\cdot b_3-a_3\cdot b_2\\a_3\cdot b_1-a_1\cdot b_3\\a_1\cdot b_2-a_2\cdot b_1\end{pmatrix}$$

Ist das Kreuzprodukt null, so sind die beiden Vektoren ***linear abhängig***.

2.1.9 Vektorielle Darstellung einer Gerade in Punkt-Richtungsform:

$$g\colon\ \vec{x}=\vec{p}+t\cdot\underline{a}$$

2.1.10 Vektorielle Darstellung einer Gerade in Hesseform:

$$g\colon\ \vec{x}\cdot\underline{\eta}=d$$

2.1.11 Vektorielle Darstellung einer Gerade in Hesse-Normalenform:

$$g\colon\ \frac{1}{\|\underline{\eta}\|}\cdot\vec{x}\cdot\underline{\eta}=\frac{d}{\|\underline{\eta}\|}$$

Die Darstellungsarten in Hesseform sind nur im zweidimensionalen Vektorraum möglich, im dreidimensionalen Raum repräsentieren sie Ebenen.

2.1.12 Plückerform einer Gerade im dreidimensionalen Vektorraum:

$$g:\vec{x}\times\underline{a}=\underline{m}$$

2.1.13 Darstellung einer Ebene in Punkt-Richtungsform:

$$E:\vec{x}=\vec{p}+l\cdot\underline{a}_1+m\cdot\underline{a}_2$$

2.1.14 Darstellung einer Ebene in Hesseform:

$$E:\cdot\ \vec{x}\cdot\underline{h}=d$$

2.1.15 Darstellung einer Ebene in Hesse-Normalenform:

$$E\colon\ \frac{1}{\|\underline{\eta}\|}\cdot\vec{x}\cdot\underline{\eta}=\frac{d}{\|\underline{\eta}\|}$$

2.1.16 Umrechnungsformeln der Ebenenformen:

$$\underline{\eta}=\underline{a}_1\times\underline{a}_2$$
$$d=\vec{p}\cdot\underline{h}=\vec{p}\cdot\left(\underline{a}_1\times\underline{a}_2\right)$$

2.1.17 Identität von Lagrange:

$$(\underline{a}\times\underline{b})\cdot(\underline{c}\times\underline{d})=(\underline{a}\cdot\underline{c})\cdot(\underline{b}\cdot\underline{d})-(\underline{a}\cdot\underline{d})\cdot(\underline{b}\cdot\underline{c})$$

2.2 Lineare Gleichungssysteme

Eine Linearkombination aus n Vektoren des Grades n bildet ein lineares Gleichungssystem, wenn ein bestimmter Vektor als Ergebnis der Linearkombination gefordert wird. Ist dieser Vektor der Nullvektor, so spricht man von einem ***homogenen Gleichungssystem***, andernfalls von einem ***inhomogenen Gleichungssystem***.

$$x_1 \cdot \underline{a}_1 + x_2 \cdot \underline{a}_2 + x_3 \cdot \underline{a}_3 + \ldots + x_n \cdot \underline{a}_n = \underline{b}$$
$$\Leftrightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot \underline{a}_j = \underline{b}$$

Ein LGS ist **lösbar**, falls genügend linear unabhängige Gleichungen vorhanden sind. Sind bei einem LGS vom **Rang *n*** (d.h. mit *n* Unbekannten) nur r linear unabhängige Gleichungen gegeben, so beträgt der **Defekt *d*** des Gleichungssystems: $d = n - r$.

2.2.1 Allgemeines Lösungsverfahren:

Zunächst wird die Hauptdeterminante D berechnet, was bis Rang $n = 3$ ohne weitere Umformungen möglich ist. Ist der Rang $n > 3$, ist meistens der Gauß'sche Algorithmus am günstigsten.

1. Fall: $D = 0$: keine eindeutige Lösung $\Rightarrow$ Gauß'scher Algorithmus (Lösungsmenge ist eine Ebene oder eine Gerade)
2. Fall: $D \neq 0$: eindeutige Lösung $\Rightarrow$ Cramer'sche Regel (Determinantenverfahren)

Zum Schluß wird die Lösungsmenge als Vektor oder Zahlentupel aufgeschrieben.

2.2.2 Der Gauß'sche Algorithmus:

Das Prinzip besteht darin, eine Gleichung dazu zu benutzen, aus den restlichen eine Unbekannte zu eliminieren. Dies wird dann so lange fortgesetzt, bis nur noch eine Gleichung mit einer Unbekannten vorhanden ist. Danach wird rückwärts in alle Gleichungen eingesetzt, womit man alle Unbekannten erhält und das LGS löst.

Die folgenden zwei Beispiele zeigen ein eindeutig lösbares und ein nicht eindeutig lösbares LGS.

<u>1. Beispiel</u>:
Folgendes LGS ist gegeben. Gesucht ist dessen Lösungsmenge.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= -2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 &= 2 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 &= 2 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= -2 \end{aligned}$$

Durch rückwärtiges Lösen der Gleichungen XVI bis XIII erhält man:

$$x_1 = 0$$
$$x_2 = 1$$
$$x_3 = 0$$
$$x_4 = -1$$

Die Probe durch Einsetzen bestätigt dieses Ergebnis.

	x_1	x_2	x_3	x_4		Operation
I	1	2	3	4	-2	
II	2	3	4	1	2	
III	3	4	1	2	2	
IV	4	1	2	3	-2	
V	1	2	3	4	-2	
VI	0	-1	-2	-7	6	=II-2I
VII	0	-2	-8	-10	8	=III-3I
VIII	0	-7	-10	-13	6	=IV-4I
IX	1	2	3	4	-2	
X	0	-1	-2	-7	6	
XI	0	0	-4	4	-4	=VII-2VI
XII	0	0	4	36	-36	=VIII-7VI
XIII	1	2	3	4	-2	
XIV	0	-1	-2	-7	6	
XV	0	0	-4	4	-4	
XVI	0	0	0	40	-40	=XI+XII

<u>2. Beispiel</u>:

Folgendes LGS ist gegeben. Es enthält mehr Gleichungen als Unbekannte.

$$\begin{aligned} -x_1 - 3x_2 - 12x_3 &= -5 \\ -x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= 2 \\ 5x_2 + 17x_3 &= 7 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 7x_1 - 4x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

	x_1	x_2	x_3		Operation
I	-1	-3	-12	-5	
II	-1	2	5	2	
III	0	5	17	7	
IV	3	-1	2	1	
V	7	-4	-1	0	
VI	-1	-3	-12	-5	
VII	0	-5	-17	-7	=I-II
VIII	0	5	17	7	=III
IX	0	-10	-34	-14	=3I+IV
X	0	-25	-85	-35	=7I+V
XI	-1	-3	-12	-5	
XII	0	-5	-17	-7	
XIII	0	0	0	0	
XIV	0	0	0	0	
XV	0	0	0	0	

Eine Lösung existiert, sie ist aber nicht eindeutig. Es kann eine Unbekannte als Parameter wählen, z.B. x_3.

Die Lösung lautet dann:

$$t \in (-\infty;\infty)$$
$$x_1 = \frac{4}{5} - \frac{9}{5}t$$
$$x_2 = \frac{7}{5} - \frac{17}{5}t$$
$$x_3 = t$$

Die geometrische Deutung der Lösungsmenge eines LGS mit drei Unbekannten ist die Bestimmung der Schnittmenge der durch die drei Gleichungen des LGS gegebenen Ebenen. In diesem Beispiel ist die Lösungsmenge eine Gerade:

$$g:\ \vec{x} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{5}t\begin{pmatrix} -9 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

2.2.3 Die Cramer'sche Regel:

Ist die Determinante der Koeffizientenmatrix eines LGS nicht null, dann lassen sich die Unbekannten x_k sofort berechnen. Man berechnet dabei zur Bestimmung z.B. der Unbekannten x_3 Die Determinante D_3, die sich durch Vertauschen des 3.Spaltenvektors der Koeffizientendeterminan-te mit dem Vektor der absoluten Glieder ergibt. Aus diesen beiden Determinanten berechnet sich die Unbekannte x_3 als deren Quotient.

Allgemein: $x_n = \frac{D_n}{D}$

Die mit der Cramer'schen Regel berechneten Lösungen sind immer eindeutig.

3. Matrizen, Matrixalgebra

3.1 Beispiele für (m,n)-Matrizen

3.1.1 (*n*,*n*)-Einheitsmatrix:

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

3.1.2 (*m*,*n*)-Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Der erste Index bei den Einträgen a_{ij} heißt ***Zeilenindex*** und gibt die Zeile an, in der der Eintrag steht, der zweite ist der ***Spaltenindex*** und gibt die Spalte der Matrix an, in der der Eintrag steht.

3.2 Rechnen mit Matrizen

3.2.1 Addition zweier (*m*,*n*)-Matrizen *A* und *B*, Multiplikation mit einer Konstanten *k*:

Alle Einträge werden einzeln addiert, d.h. $C = A + B$ bzw. $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Alle Einträge werden einzeln mit k multipliziert. $C = kB$ bzw. $c_{ij} = kb_{ij}$

3.2.2 Transponieren einer (*m*,*n*)-Matrix *A*:

Es entsteht eine ***(n,m)-Matrix A^T***, für deren Einträge a_{jiA^T} gilt: $a_{jiA^T} = a_{ijA}$

3.2.2.1 Zusatzeigenschaften bei (*n*,*n*)-Matrizen:

Eine (*n*,*n*)-Matrix *A* heißt ***symmetrisch***, wenn gilt: $A^T = A$

Eine (*n*,*n*)-Matrix *A* heißt ***antisymmetrisch***, wenn gilt: $A^T = -A$

Beispiel: Gegeben sind die Matrizen *A* und *B*.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & -7+2 \\ 3+2 & 2+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$$

$$5 \cdot B = 5 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\cdot 0 & 5\cdot 2 \\ 5\cdot 2 & 5\cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 10 \\ 10 & 30 \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B^T = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = B$$

3.2.3 Verkettung von Matrizen, Matrixmultiplikation:

Generell ist dies nur möglich, wenn die erste Matrix (*m*,*n*) diesselbe Anzahl von Spalten hat wie die zweite Matrix (*p*,*q*) Zeilen, d.h. wenn ***n* = *p***.
Es entsteht eine (*m*,*q*)-Matrix.

Deren Einträge lauten dann allgemein: $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}$

Beispiel: Gegeben seien die beiden Matrizen *A* und *B*: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

Wird *A* mit *B* verkettet, so entsteht eine (*2*,*2*)-Matrix: $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Umgekehrt entsteht eine (*3*,*3*)-Matrix: $BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Daraus folgt: ***Matrixmultiplikation ist nicht kommutativ.***
Aber: *Multiplikation von (n,n)-Matrizen ist assoziativ, es gilt auch das Distributivgesetz.*

3.2.3.1 Dyadisches Produkt:

So heißt das Produkt einer (*n*,1)-Matrix mit einer (1,*n*)-Matrix. Es ensteht eine (*n*,*n*)-Matrix.

3.2.4 Matrixinversion quadratischer Matrizen:

Es gilt für die zu *A* inverse Matrix A^{-1}: $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$
Bedingung für Invertierbarkeit: $\det(A) \neq 0$

3.2.5 Rang einer Matrix:

Unter dem Rang $r(A)$ der (*m*,*n*)-Matrix *A* versteht man Folgendes: Die Maximalanzahl linear unabhängiger Zeilenvektoren (Spaltenvektoren) heißt Zeilenrang (Spaltenrang) der Matrix *A*. *Zeilenregulär* ist die Matrix *A*, wenn $r(A) = m$, *spaltenregulär*, wenn $r(A) = n$.

Eine (*n*,*n*)-Matrix heißt *regulär*, wenn $r(A) = n$ und *singulär*, wenn $r(A) < n$.

Die Existenz der Inversen A^{-1} und die Regularität von A sind *äquivalent*.

Zur Berechnung des Ranges einer (*m*,*n*)-Matrix werden die größtmöglichen Unterdeterminanten gebildet. Ist eine von ihnen nicht null, so ist der Rang gleich der Ordnung (Anzahl der Spaltenvektoren) dieser Unterdeterminante. Gegebenenfalls muß die Ordnung der Unterdeterminante verringert werden, bis eine von ihnen ungleich null ist.

3.2.6 Lösung einfacher Matrixgleichungen:

Die Gleichung $A \cdot X = B$ hat die Lösung $X = B \cdot A^{-1}$.
Dies setzt die Existens der inversen Matrix A^{-1} voraus.

3.2.7 Rechenregeln für Determinanten:

$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$ (Produktregel)
$\det(A^T) = \det(A)$
$\det(E_n) = 1$
$\det(c \cdot A) = c^n \cdot \det(A)$ für (*n*,*n*)-Matrizen

3.3 Eigenwerte und Eigenvektoren

Gegeben sei eine lineare Abbildung $\underline{x} \mapsto f(\underline{x}) = A \cdot \underline{x}$

Unter den **Eigenwerten** l und den **Eigenvektoren** $\underline{n}$ der Matrix A versteht man alle diejenigen Konstanten bzw. Vektoren, für die gilt:

$$A \cdot \underline{\nu} = \lambda \cdot \underline{\nu}$$

Aus dieser Definition folgt:

$$A \cdot \underline{n} = l \cdot \underline{n} \Leftrightarrow (A - l \cdot E)\underline{n} = \underline{0}$$

$$\text{für } \underline{n} \neq \underline{0}\ (\text{Nullvektor}) \text{ folgt sofort :}$$

$$\det(A - l \cdot E) = 0$$

In Determinantenschreibweise:

$$\det(A - l \cdot E) = \det \begin{pmatrix} a_{11} - l & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - l & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - l & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} - l \end{pmatrix} = 0$$

<u>Beispiel</u>: Gesucht sind alle Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix A:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ -5 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - l \cdot E) = \begin{vmatrix} 2 - l & -3 & 1 \\ 3 & 1 - l & 3 \\ -5 & 2 & -4 - l \end{vmatrix} = -l^3 - l^2 + 2l = 0$$

$$\Leftrightarrow l_1 = 0;\ l_2 = 1;\ l_3 = -2$$

Die einzelnen Eigenwerte werden in das jeweilige (überbestimmte) homogene Gleichungssystem eingesetzt und dessen Lösungsmenge nach bekannten Verfahren bestimmt. Diese ist dann der zum einzelnen Eigenwert gehörende Eigenvektor. In der Regel werden die Eigenvektoren auf den Betrag 1 normiert.

Ein Spezialfall ergibt sich, wenn außer der Hauptdiagonalen der Matrix nur Nullen in ihr stehen. Die Zahlen in der Hauptdiagonalen sind dann zugleich die Eigenwerte der Matrix.

$$B = \begin{pmatrix} l_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & l_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & l_n \end{pmatrix}$$

4. Folgen und Reihen

4.1 Folgen

4.1.1 Teilfolge:

Unter einer Teilfolge versteht man eine Folge, die durch Wegstreichen von bestimmten Gliedern aus einer anderen Folge, aber ohne Veränderung der Reihenfolge, aus jener Folge entsteht.

4.1.2 Konvergenz:

Eine Folge oder Reihe konvergiert, wenn die Differenz zwischen einem Folgenglied (bzw. die Folge der Partialsummen der Reihe) und dem zugehörigen Grenzwert jeden beliebigen reellen Wert unterschreiten kann:

$$|a_k - a| \leq \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{k \to \infty} a_k = a$$

4.1.3 Divergenz:

Eine nicht konvergente Folge (oder Reihe) heißt divergent. Sie heißt *bestimmt divergent*, wenn gilt:

$$\lim_{k \to \infty} |a_k| = \infty$$

4.1.4 Beschränkte Folgen:

Eine Folge heißt beschränkt, wenn es eine positive reelle Zahl gibt, die gegenüber dem einzelnen Absolutbetrag jedes einzelnen Folgengliedes immer größer (oder gleich) ist. Sie ist nach ***unten beschränkt***, wenn der Absolutbetrag $|a| = -a$ ist und nach ***oben beschränkt***, wenn $|a| = a$ ist. Eine Vektorfolge heißt beschränkt, wenn der Betrag der Folgenvektoren beschränkt ist. Dies wiederum ist der Fall, wenn jede Kompnentenfolge beschränkt ist.

4.1.5 Monotonie:

Wenn alle $k \in \mathbb{N}$ sind, kann für Folgen formuliert werden:

Monoton wachsend: $a_{k+1} \geq a_k$

Streng monoton wachsend: $a_{k+1} > a_k$

Monoton fallend: $a_{k+1} \leq a_k$

Streng monoton fallend: $a_{k+1} < a_k$

4.1.6 Eulersche Zahl:

Die Eulersche Zahl e ist der Grenzwert einer Folge:

$$e = \lim_{k \to \infty} a_k = \lim_{k \to \infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k \approx 2{,}71828...$$

4.1.7 Konvergenzkriterium von Cauchy:

<u>Satz und Definition</u>*:* Eine reelle oder komplexe Folge bzw. Vektorfolge ist genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchy-Folge ist, d.h. es gibt zum $e > 0$ eine Zahl $N(e)$, für die existiert

$$|a_n - a_m| \leq e \qquad n, m \geq N(e)$$

4.1.8 Rekursiv definierte Folgen:
Die Folgenglieder werden mit Hilfe des vorherigen bestimmt, z.B.:

$$a_1 = 1 \ , \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n + \frac{1}{a_n}} \ , \quad n \in \mathbb{N}$$

4.1.9 Regeln bei Grenzwertbestimmungen:

Seien gegeben : $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = a \qquad \lim\limits_{k\to\infty} b_k = b \qquad \lim\limits_{k\to\infty} a_k = \infty \qquad \lim\limits_{k\to\infty} b_k = \infty$

Daraus folgt : $\lim\limits_{k\to\infty}(a_k + b_k) = a + b$

$$\lim_{k\to\infty}(a_k + b_k) = \infty$$

$$\lim_{k\to\infty}(b_k + b_k) = \infty$$

$$\lim_{k\to\infty}(c \cdot b_k) = c \cdot \lim_{k\to\infty}(b_k) = c \cdot b$$

$$\lim_{k\to\infty}(c \cdot b_k) = c \cdot \lim_{k\to\infty}(b_k) = \begin{cases} \infty & \text{wenn } c > 0 \\ -\infty & \text{wenn } c < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{k\to\infty}(a_k \cdot b_k) = a \cdot b$$

$$\lim_{k\to\infty}(a_k \cdot b_k) = \infty$$

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{a_k}{b_k}\right) = \frac{a}{b} \quad \text{wenn } b_k \neq 0 \ \forall \ k \in [1, \infty)$$

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{a_k}{b_k}\right) = 0 \quad \text{wenn } b_k \neq 0 \ \forall \ k \in [1, \infty)$$

4.1.10 Alternierende Folgen:
Folgen, die mit jedem Folgenglied zwischen positiven und negativen Werten schwanken, heißen alternierende Folgen.
Beispiel: $a_k = (-1)^{k-5}$

4.2 Unendliche Reihen

Wird einer unendlichen Folge von Zahlen eine Summe zugeordnet, die als Summanden die Folgenglieder haben, so heißt diese Summe ***unendliche Reihe***. Werden nur die Folgenglieder bis zur Stelle k addiert, so spricht man von der ***k-ten Partialsumme*** der Reihe. Die Konvergenz, Divergenz und Monotonie wird definiert wie bei Folgen.

4.2.1 Cauchy-Kriterium für Reihen:
Es besagt analog zum Cauchy-Kriterium für Folgen, daß es zu jeder Differenz zweier Partialsummen m und n, welche kleiner als ein $e > 0$ ist, ein $N(e)$ gibt, für das gilt: $m \geq n \geq N(e)$. Allgemein muß gelten, daß die Folge der Partialsummen konvergiert.

Beispiel: Die ***harmonische Reihe*** $\sum \frac{1}{k}$ ***ist divergent***.

Erfüllt eine Reihe das Cauchy-Kriterium, so gilt: $\sum a_k$ konvergent $\Leftrightarrow \lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$

4.2.2 Majoranten- und Minorantenkriterium:

Mit der Reihe $\sum a_k, \quad a_k \in \mathbb{C}$, läßt sich sagen:

4.2.2.1 Die konvergente Reihe $\sum b_k, \quad b_k \in \mathbb{R}_+$ heißt ***Majorantenreihe*** von $\sum a_k$, wenn ab einer bestimmten Stelle N_0 das Reihenglied b_k ständig größer ist als $|a_k|$. Dann ist die Reihe $\sum a_k$ absolut konvergent.

4.2.2.2 Die divergente Reihe $\sum c_k, \quad c_k \in \mathbb{R}_+$ heißt ***Minorantenreihe*** von $\sum |a_k|$, wenn ab einer bestimmten Stelle N_0 das Reihenglied c_k ständig kleiner ist als $|a_k|$. Dann ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ divergent (die Reihe $\sum a_k$ nicht <u>absolut</u> konvergent).

4.2.3 Die geometrische Reihe:

Allgemein lautet sie: $\sum_{k=0}^{\infty} q^k, \quad q \in \mathbb{C}$

Bedingung für Konvergenz: $|q| < 1$: $\quad \lim_{p\to\infty} \sum_{k=0}^{p} q^k = \frac{1}{1-q}$

Bedingung für Divergenz: $|q| \geq 1$: $\quad \lim_{p\to\infty} \sum_{k=0}^{p} q^k = \infty$

4.2.4 Das Quotientenkriterium:

Es sei $\sum a_k, \quad a_k \in \mathbb{C}$ eine beliebige Reihe. Es gilt für diese Reihe:

Für $g = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|$ gilt:

$g < 1 \Rightarrow \sum a_k$ konvergiert absolut

$g > 1 \Rightarrow \sum a_k$ divergiert

$g = 1 \Rightarrow$ keine Aussage über das Konvergenzverhalten möglich

4.2.5 Wurzelkriterium:

Die Reihe $\sum a_k, \quad a_k \in \mathbb{C}$ ist gegeben.

Für $g = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$ gilt:

$g < 1 \Rightarrow \sum a_k$ konvergiert absolut

$g > 1 \Rightarrow \sum a_k$ divergiert

$g = 1 \Rightarrow$ keine allgemeine Aussage über das Konvergenzverhalten möglich

4.2.6 Konvergenzkriterium von Leibniz für alternierende Reihen:

Ist die Folge der Reihenglieder monoton fallend und deren Grenzwert null, so ist die Reihe konvergent.

4.2.7 Cauchy-Produkt, Satz von Mertens:

Das *Cauchy-Produkt* zweier Reihen wird definiert als:

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \quad \text{mit} \quad c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k}$$

Satz von Mertens: Konvergiert eine Reihe gegen *A* und eine andere gegen *B*, so konvergiert ihr Cauchy-Produkt gegen *AB*.

5. Funktionen, Grenzwerte und Stetigkeit

5.0.1 *n*-dimensionale Funktionen:
Eine Funktion mit n reellwertigen Veränderlichen erzeugt einen Graphen der Dimension $n+1$.

5.0.2 Darstellung einer *n*-dimensionalen Funktion:

$$f : z \mapsto f(z) \qquad z \in A \subseteq \mathbb{R}^n$$
$$G_f = \left\{ f(z) \in \mathbb{R}^{n+1} \middle| z = (x_1, x_2, \ldots, x_n, f(x_1, x_2, \ldots, x_n)) \right\}$$

5.1 Grenzwerte

5.1.1 Übertragungsprinzip für Grenzwerte von Funktionen:
Der Limes einer Funktion f($\underline{x}$) an der Stelle $\underline{x}_0$ lautet analog zum Grenzwert von Folgen und Reihen:

$$\lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} f(\underline{x}) = \underline{a}$$
$$\Leftrightarrow \text{für ein } e > 0 \text{ existiert ein } d(e, \underline{x}_0) \text{, für das gilt :}$$
$$\| f(\underline{x}) - \underline{a} \| \leq e \quad \text{falls} \quad \| \underline{x} - \underline{x}_0 \| \leq d(e, \underline{x}_0)$$

5.1.2 Linksseitiger Grenzwert, rechtsseitiger Grenzwert:
Man unterscheidet die Grenzwerte, die ermittelt werden, wenn man sich von links oder von rechts an die Stelle $\underline{x}_0$ nähert, denn bei vielen Funktionen sind sie an bestimmten Stellen unterschiedlich.

5.1.3 Uneigentlicher Grenzwert:
Als uneigentlichen Grenzwert bezeichnet man den Grenzwert $\lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} f(\underline{x}) = \pm\infty$.

5.1.4 Stetigkeit von Funktionen:
Eine Funktion heißt stetig in $\underline{x}_0$, wenn ihr rechts- und linksseitiger Grenzwert (und gegebenenfalls der Funktionswert) bei $\underline{x}_0$ gleich sind.

5.2 Eigenschaften stetiger Funktionen

5.2.1 Extremwertsatz von Weierstraß:
Gilt für ein gegebenes Intervall [a,b] für ein x aus diesem Intervall

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$$
$$f(x_2) = \sup\left\{ f(x) \middle| x \in [a,b] \right\}$$
$$f(x_1) = \inf\left\{ f(x) \middle| x \in [a,b] \right\}$$

so, heißt x_1 **Minimum von *f* auf [*a*,*b*]** und x_2 **Maximum von *f* auf [*a*,*b*]**.

5.2.2 Monotonie stetiger Funktionen:
Die Monotoniebegriffe werden ebenso definiert wie für Folgen und Reihen.

6. Differentialrechnung

6.0.1 Tangente:
Die Tangente einer Funktion *f* an der Stelle *x* ist eine Gerade, die die Funktion *f* an der Stelle *x* berührt bzw. unter dem Winkel α = 0 schneidet.

6.0.2 Limes des Differenzenquotienten, Ableitung der Funktion *f* an der Stelle *x*:

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{df}{dx}(x_0) = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0} = Df(x_0)$$

6.0.3 Differenzierbarkeit:
Die Differenzierbarkeit kann eingeschränkt sein (s. Stetigkeit). Man unterscheidet deshalb linksseitige und rechtsseitige Differenzierbarkeit.

6.1 Ableitungsregeln

6.1.1 Faktorsatz:
$(c \cdot f)'(x) = c \cdot f'(x)$

6.1.2 Summenregel:
$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$

6.1.3 Produktregel:
$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

6.1.4 Quotientenregel:
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

6.1.5 Kettenregel:
$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

Ist die Ableitung an der Stelle *x* positiv, so ist die Funktion dort monoton steigend, ist die Ableitung negativ, so ist sie dort monoton fallend. Ist sie null, so liegt ein **Extrempunkt oder Terrassenpunkt** vor.

6.2 Ableitungen von reellwertigen Funktionen mehrerer Veränderlicher und von vektorwertigen Funktionen

6.2.1 Vektorwertige Funktionen und deren Ableitung:

Funktion $\underline{f} : D \mapsto \mathbb{R}^m$: $\underline{f}(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix}$

Ableitung $\underline{f}'(x)$ von $\underline{f}(x)$: $\underline{f}'(x) = \begin{pmatrix} f_1'(x) \\ f_2'(x) \\ \vdots \\ f_m'(x) \end{pmatrix}$

$\underline{f}'(x)$ ist der Richtungsvektor der Tangente an die Kurve $\underline{f}$ im Punkt $(x, \underline{f}(x))$.

6.2.2 Partielle Ableitung einer reellwertigen Funktion *f*:

Die partielle Ableitung einer Funktion $f(\underline{x})$ nach x_j in x_0 lautet:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\underline{x}_0)=\left.\frac{\partial f}{\partial x_j}\right|_{\underline{x}=\underline{x}_0} = f_{x_j}(\underline{x}_0)$$

Dabei werden außer x_j alle Veränderlichen als Konstanten angenommen und entsprechend behandelt.

6.2.3 Totale Ableitung bei einer Funktion f(*x*,*y*,*z*) im $\mathbb{R}^3$:

Geometrisch stellt die totale Ableitung $f'(\underline{x})$ in $\mathbb{R}^3$ die Tangentialebene an $f(\underline{x})$ in $\underline{x}_0$ dar.

$$E_T:\quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ f(x_0,y_0) \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,f(x_0,y_0)) \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,f(x_0,y_0)) \end{pmatrix}$$

$$\text{bzw. } E_T:\quad \begin{pmatrix} -\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,f(x_0,y_0)) \\ -\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,f(x_0,y_0)) \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,f(x_0,y_0)) \\ -\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,f(x_0,y_0)) \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ f(x_0,y_0) \end{pmatrix}$$

6.2.4 Gradient:

Als **Gradient der Funktion *f* in $\underline{x}_0$** wird dieser (transponierte)Vektor $\underline{a}$ bezeichnet:

$$\underline{a} = (\text{grad } f)(\underline{x}_0) = (\nabla f)(\underline{x}_0) = \left(f'(\underline{x}_0)\right)^T$$

Hierbei ist ∇ der Nabla-Operator, der in Kapitel 16.3 näher beschrieben wird.

Als **Gradient oder Gradientenfeld von *f*** bezeichnet man: $\quad \text{grad } f = \nabla f = f_{\underline{x}}^T = (f')^T$

6.2.5 Partielle Ableitung einer vektorwertigen Funktion:

Die partiellen Ableitungen einer solchen Funktion werden nur komponentenweise erklärt. Es gilt:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\underline{f}(\underline{x}) = \frac{\partial}{\partial x_j}\begin{pmatrix} f_1(\underline{x}) \\ f_2(\underline{x}) \\ \vdots \\ f_n(\underline{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_j} f_1(\underline{x}) \\ \frac{\partial}{\partial x_j} f_2(\underline{x}) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_j} f_n(\underline{x}) \end{pmatrix}$$

Die totale Ableitung an einer Stelle $\underline{x}_0$ ergibt eine Matrix. Für sie gilt:

$$A = \underline{f}_{\underline{x}}(\underline{x}_0) = \underline{f}'(\underline{x}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\underline{x}_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\underline{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\underline{x}_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\underline{x}_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\underline{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\underline{x}_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\underline{x}_0) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\underline{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\underline{x}_0) \end{pmatrix}$$

Dies ist eine (m,n)-Matrix.

Wird ein weiteres Mal abgeleitet, so entsteht die sogenannte *Hessesche Matrix*.

Beispiel zu vektorwertigen Funktionen:

Gegeben als Funktion ist das Vektorprodukt. Gesucht ist die erste Ableitung.

$$\underline{f}(\underline{x}) = \underline{a} \times \underline{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 x_3 - a_3 x_2 \\ a_3 x_1 - a_1 x_3 \\ a_1 x_2 - a_2 x_1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{f}'(\underline{x}) = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}$$

6.2.6 Ableitungsregeln für vektorwertige Funktionen:

Analog zu reellwertigen Funktionen einer Veränderlichen gelten der *Faktorsatz* und die *Summenregel*.

Die *Produktregel* für $m = 1$: $$\nabla(f \cdot g) = \begin{pmatrix} (f \cdot g)_{x_1} \\ \vdots \\ (f \cdot g)_{x_n} \end{pmatrix} = g \cdot \nabla f + f \cdot \nabla g$$

Es handelt sich also um eine $(n,1)$-Matrix.
Für weiteres zum Nabla-Operator ∇ siehe Kapitel 16.3 .

Die *Kettenregel* mit $\underline{y}_0 = \underline{f}(\underline{x}_0)$: $$(\underline{g} \circ \underline{f})_{\underline{x}}(\underline{x}_0) = \underline{g}_{\underline{y}}(\underline{f}(\underline{x}_0)) \cdot \underline{f}_{\underline{x}}(\underline{x}_0)$$

7. Potenzreihen und elementare Funktionen

7.1 Exponentialfunktion und Logarithmus

7.1.1 (Komplexe) Exponentialfunktion:

Sie lautet: $\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$

7.1.2 Reelle Exponentialfunktion:

Sie lautet: $\exp(x) = e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$

7.1.3 Umkehrfunktion ln(*x*):

Sie heißt **natürlicher Logarithmus**. $e^{\ln(x)} = x$

7.1.4 Reelle Exponentialfunktion zur Basis *a*:

Sie lautet: $a^x = e^{x \cdot \ln(a)}$

7.1.5 Logarithmus zur Basis *a*:

Er lautet: $\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$

7.1.6 Ableitungen von Exponentialfunktionen:

$$(e^x)' = e^x$$
$$(a^x)' = a^x \cdot \ln(a)$$

7.1.7 Ableitungen von Logarithmusfunktionen:

$$(\ln(x))' = \frac{1}{x}$$
$$(\log_a(x))' = \frac{1}{\ln(a) \cdot x}$$

7.1.8 Wichtige Eigenschaften der Exponentialfunktion:

Für $a > 0$ gilt:

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$
$$a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1 + x_2}$$
$$(a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 \cdot x_2} = (a^{x_2})^{x_1}$$
$$(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$$
$$a^0 = 1$$

7.1.9 Wichtige Eigenschaften der Logarithmusfunktion:

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a\left(x^y\right) = y \cdot \log_a x$$

$$1 - \frac{1}{x} \leq \ln x \leq x - 1$$

alles gültig für $a > 0$, $a \neq 1$ und $x, y > 0$

7.1.10 Die Graphen von e^x und $\ln(x)$:

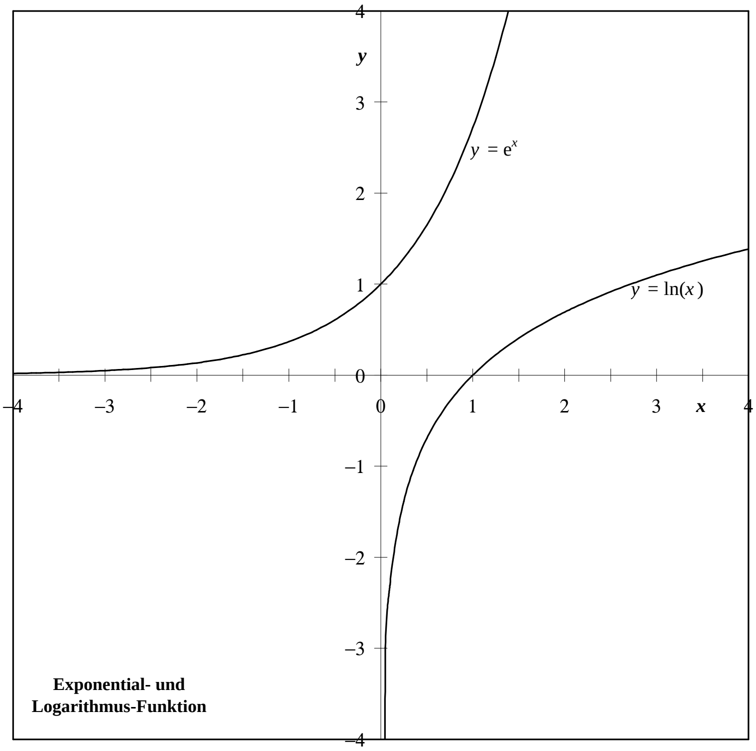


Abbildung 2: Die Graphen von e^x und $\ln(x)$

7.2 Trigonometrische Funktionen

7.2.1 Sinusfunktion:

$$\sin(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot z^{2k+1}$$

7.2.2 Cosinusfunktion:

$$\cos(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \cdot z^{2k}$$

7.2.3 Wichtige Eigenschaften der Sinus- und Cosinus-Funktionen:

7.2.3.1 Symmetrie:

$$\cos(-z) = \cos(z)$$
$$\sin(-z) = -\sin(z)$$

7.2.3.2 Eulersche Formeln:

$$\sin(z) = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)$$
$$\cos(z) = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)$$

7.2.3.3 Pythagoras: $\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1$

7.2.3.4 Additionstheoreme:

$$\sin(z+w) = \sin(z)\cdot\cos(w) + \cos(z)\cdot\sin(w)$$
$$\cos(z+w) = \cos(z)\cdot\cos(w) - \sin(z)\cdot\sin(w)$$

7.2.3.5 Periodizität:

$$\sin\left(z + \frac{p}{2}\right) = \cos(z)$$
$$\cos\left(z + \frac{p}{2}\right) = -\sin(z)$$
$$\sin(z + p) = -\sin(z)$$
$$\cos(z + p) = -\cos(z)$$
$$\sin(z + 2p) = \sin(z)$$
$$\cos(z + 2p) = \cos(z)$$

7.2.3.6 Ableitungen der reellwertigen Funktionen:

$$\sin'(x) = \cos(x)$$
$$\cos'(x) = -\sin(x)$$

7.2.4 Die Graphen von sin(*x*), cos(*x*), Arcsin(*x*) und Arccos(*x*)[1]:

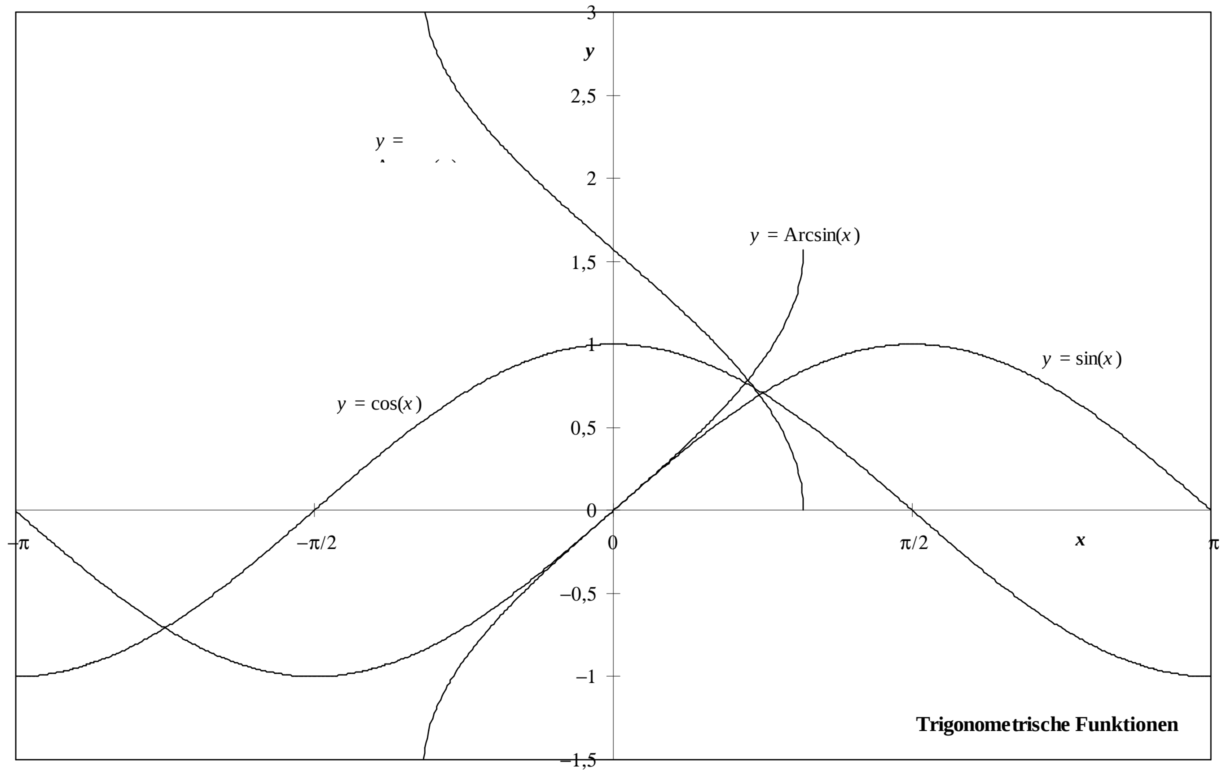


Abbildung 3: Die Graphen von sin(*x*), cos(*x*), Arcsin(*x*) und Arccos(*x*)

7.2.5 Reelle Tangensfunktion, reelle Cotangensfunktion:

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

7.2.5.1 Wichtige Grenzwerte:

$$\lim_{x \to -\frac{p}{2}+} (\tan(x)) = -\infty$$

$$\lim_{x \to \frac{p}{2}-} (\tan(x)) = \infty$$

$$\lim_{x \to 0+} (\cot(x)) = \infty$$

$$\lim_{x \to p-} (\cot(x)) = -\infty$$

[1] Umkehrfunktionen siehe Kapitel 7.2.7

7.2.5.2 Periodizität:

$$\tan\left(x+\frac{p}{2}\right)=-\cot(x) \qquad x\neq np$$
$$\cot\left(x+\frac{p}{2}\right)=-\tan(x) \qquad x\neq \frac{2n+1}{2}p$$

7.2.5.3 Additionstheoreme:

$$\tan(x+y)=\frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\cdot\tan(y)} \qquad y\neq -x+\frac{2n+1}{2}p$$
$$\cot(x+y)=\frac{\cot(x)\cdot\cot(y)-1}{\cot(x)+\cot(y)} \qquad y\neq -x+np$$

7.2.5.4 Ableitungen:

$$\tan'(x)=\frac{1}{\cos^2(x)} \qquad \mathrm{x}\neq \frac{2n+1}{2}p$$
$$\cot'(x)=-\frac{1}{\sin^2(x)} \qquad \mathrm{x}\neq np$$

7.2.6 Die Graphen von tan(*x*), cot(*x*), Arctan(*x*) und Arccot(*x*)[1]:

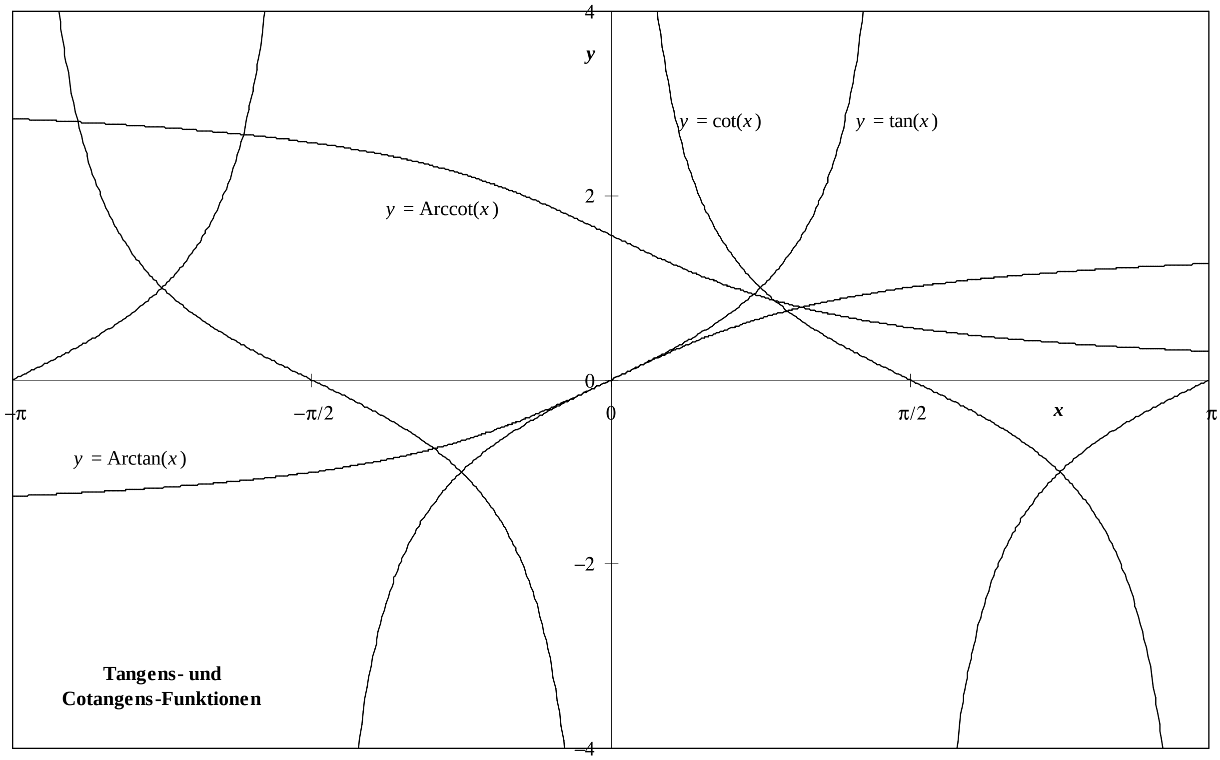


Abbildung 4: Die Graphen von tan(*x*), cot(*x*), Arctan(*x*) und Arccot(*x*)

[1] Umkehrfunktionen siehe Kapitel 7.2.7

7.2.7 Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen:

Weil bei trigonometrischen Funktionen immer nur ein Intervall von einer halben Periode eineindeutig ist, werden die Umkehrfunktionen für einzelne Intervalle definiert. Diese tragen einen Index *n*, der besagt, an der wievielten Periode die jeweilige Funktion umgekehrt wurde.

$$\operatorname{arcsin}_n : \quad [-1{,}1] \to \left[\frac{2n-1}{2}p , \frac{2n+1}{2}p\right]$$

$$\operatorname{arccos}_n : \quad [-1{,}1] \to [np , (n+1)p]$$

$$\operatorname{arctan}_n : \quad [-\infty, \infty] \to \left[\frac{2n-1}{2}p , \frac{2n+1}{2}p\right]$$

$$\operatorname{arccot}_n : \quad [-\infty, \infty] \to [np , (n+1)p]$$

$n = 0$ beschreibt die **Hauptzweige der Umkehrfunktionen**:

$$\operatorname{arcsin}_0(x) = \operatorname{Arcsin}(x)$$

$$\operatorname{arccos}_0(x) = \operatorname{Arccos}(x)$$

$$\operatorname{arctan}_0(x) = \operatorname{Arctan}(x)$$

$$\operatorname{arccot}_0(x) = \operatorname{Arccot}(x)$$

7.2.7.1 Symmetrie-Eigenschaften:

Mit $x \in (-\infty, \infty)$ gilt:

$$\operatorname{arctan}_n(x) = \operatorname{Arctan}(x) + np$$

$$\operatorname{arccot}_n(x) = \operatorname{Arccot}(x) + np$$

Mit $x \in [-1,1]$ gilt:

$$\operatorname{Arcsin}(x) = -\operatorname{Arcsin}(-x)$$

$$\operatorname{arcsin}_{2n}(x) = \operatorname{Arcsin}(x) + 2n \cdot p$$

$$\operatorname{arcsin}_{2n+1}(x) = -\operatorname{Arcsin}(x) + (2n+1) \cdot p$$

$$\operatorname{Arcsin}(x) = \frac{p}{2} - \operatorname{Arccos}(x)$$

$$\operatorname{arccos}_n(x) = \operatorname{arcsin}_{n+1}(x) - \frac{p}{2}$$

7.2.7.2 Ableitungen:

Mit $x \in [-1,1]$ gilt:

$$\operatorname{arcsin}_n{}'(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\operatorname{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\operatorname{arccos}_n{}'(x) = -\frac{(-1)^n}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\operatorname{Arccos}'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Mit $x \in (-\infty, \infty)$ gilt:

$$\arctan_n{}'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\operatorname{arccot}_n{}'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$$

Allgemein läßt sich über diese Umkehrfunktionen sagen, daß sie durch Spiegelung der ursprünglichen Funktion an der Geraden $y = x$ erzeugt werden.

7.3 Hyperbolische Funktionen

7.3.1 Sinus hyperbolicus:

$$\sinh(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

7.3.2 Cosinus hyperbolicus:

$$\cosh(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!}$$

7.3.3 Schreibweise mit Exponentialfunktionen:

$$\sinh(z) = \frac{1}{2} \cdot \left(e^z - e^{-z}\right)$$

$$\cosh(z) = \frac{1}{2} \cdot \left(e^z + e^{-z}\right)$$

$$\Rightarrow \cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1$$

7.3.4 Symmetrie-Eigenschaften:

$$\sinh(-z) = -\sinh(z)$$

$$\cosh(-z) = \cosh(z)$$

7.3.5 Additionstheoreme:

$$\sinh(z+w) = \sinh z \cdot \cosh w + \sinh w \cdot \cosh z$$

$$\cosh(z+w) = \sinh z \cdot \sinh w + \cosh z \cdot \cosh w$$

7.3.6 Zusammenhang mit der sin- bzw. cos-Funktion:

$$\sin(iz) = i \cdot \sinh z$$

$$\sinh(iz) = i \cdot \sin z$$

$$\cos(iz) = \cosh z$$

$$\cosh(iz) = \cos z$$

7.3.7 Moivresche Formel:

$$(\cosh z + \sinh z)^n = \cosh(nz) + \sinh(nz)$$

7.3.8 Ableitungen:

$$(\sinh z)' = \cosh z$$
$$(\cosh z)' = \sinh z$$

7.3.9 Grenzwerte:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \sinh x = \pm\infty$$
$$\lim_{x\to\pm\infty} \cosh x = \infty$$

7.3.10 Umkehrfunktionen:

7.3.10.1 Area sinus hyperbolicus:

$$\operatorname{arsinh}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow \quad \operatorname{arsinh}(\sinh x) = x$$
$$\sinh(\operatorname{arsinh} y) = y$$

7.3.10.2 Area cosinus hyperbolicus:

$$\operatorname{arcosh}_+ : \ [1,\infty) \to [0,\infty)$$
$$\operatorname{arcosh}_- : \ [1,\infty) \to (-\infty,0]$$

7.3.10.3 Schreibweise mit natürlichem Logarithmus:

$$\text{Für } x \in \mathbb{R} \text{ gilt:} \qquad \operatorname{arsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$
$$\text{Für } x \in [1,\infty) \text{ gilt:} \quad \operatorname{arcosh}_\pm x = \ln\left(x \pm \sqrt{x^2-1}\right)$$

7.3.10.4 Ableitungen der Umkehrfunktionen:

$$(\operatorname{arsinh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$
$$(\operatorname{arcosh}_\pm x)' = \frac{1}{\pm\sqrt{x^2-1}} \quad \text{für alle } x \in (1,\infty)$$

7.3.11 Die Graphen von sinh(x), cosh(x), arsinh(x) und arcosh(x):

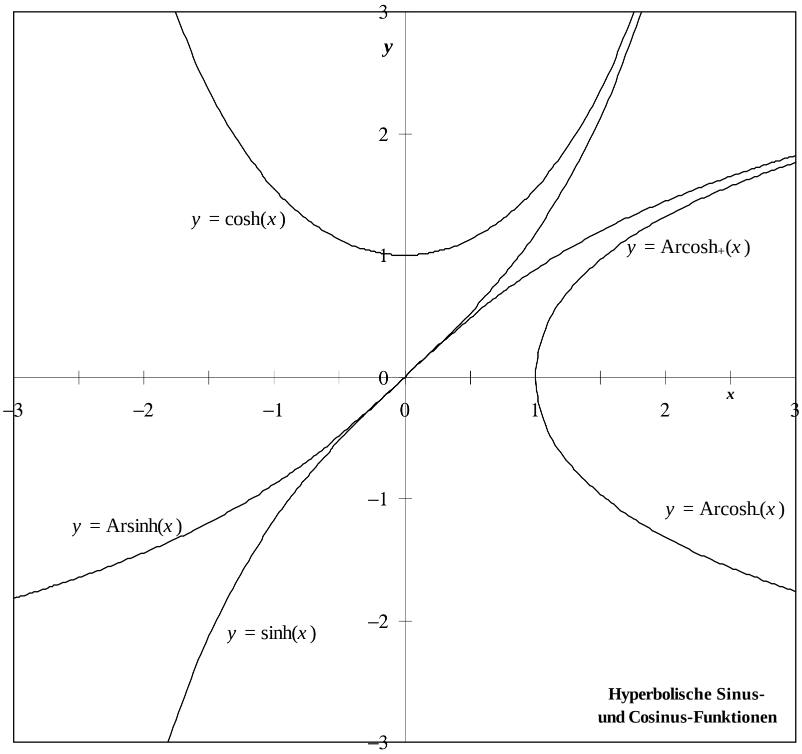


Abbildung 5: Die Graphen von sinh(x), cosh(x), arsinh(x) und arcosh(x)

7.3.12 Reeller Tangens hyperbolicus und Cotangens hyperbolicus:

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} \qquad \text{für } x \neq 0$$

7.3.12.1 Additionstheoreme:

$$\tanh(x_1 + x_2) = \frac{\tanh x_1 + \tanh x_2}{1 + \tanh x_1 \cdot \tanh x_2}$$

$$\coth(x_1 + x_2) = \frac{1 + \coth x_1 \cdot \coth x_2}{\coth x_1 + \coth x_2} \qquad \text{für } x_1 \neq 0,\ x_2 \neq 0,\ x_1 + x_2 \neq 0$$

7.3.12.2 Grenzwerte:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \tanh x = \pm 1$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \coth x = \pm 1$$

$$\lim_{x \to 0\pm} \coth x = \pm \infty$$

7.3.12.3 Ableitungen:

$$(\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

$$(\coth x)' = \frac{1}{\sinh^2 x} \qquad x \neq 0$$

7.3.13 Umkehrfunktionen:
Area tangens hyperbolicus und **Area cotangens hyperbolicus:**

$$\text{artanh}: \quad (-1,1) \to \mathbb{R}$$

$$\text{arcoth}: \{x \mid x \in [-1,1], x \in \mathbb{R}\} \to \{x \mid x \neq 0, x \in \mathbb{R}\}$$

Ferner gilt:

$$\tanh(\text{artanh } y) = y \quad \text{für } y \in [-1,1]$$

$$\text{artanh}(\tanh x) = x \quad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

$$\coth(\text{arcoth } y) = y \quad \text{für } y \notin [-1,1]$$

$$\text{arcoth}(\coth x) = x \quad \text{für } x \neq 0$$

7.3.13.1 Schreibweise mit natürlichem Logarithmus:

$$\text{artanh } x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad \text{für } x \in (-1,1)$$

$$\text{arcoth } x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad \text{für } x \notin (-1,1)$$

7.3.13.2 Ableitungen:

$$(\text{artanh } x)' = \frac{1}{1-x^2} \quad \text{für } x \in (-1,1)$$

$$(\text{arcoth } x)' = \frac{1}{1-x^2} \quad \text{für } x \notin (-1,1)$$

7.3.14 Die Graphen von tanh(x), coth(x), artanh(x) und arcoth(x):

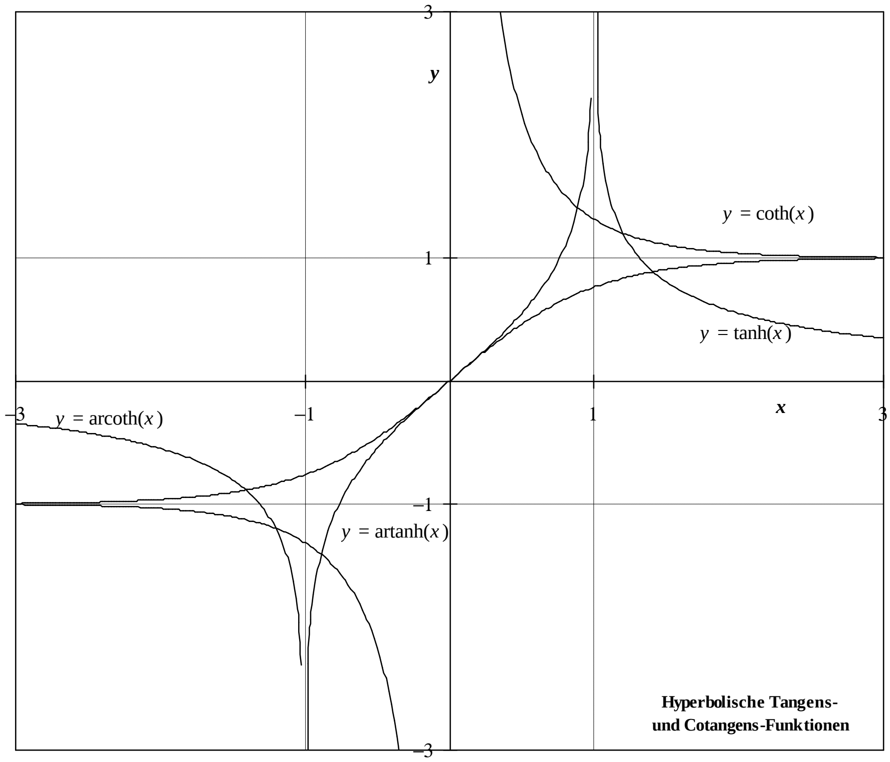


Abbildung 6: Die Graphen von tanh(x), coth(x), artanh(x) und arcoth(x)

8. Anwendung der Differentialrechnung

8.1 Der Mittelwertsatz und einfache Anwendungen

8.1.1 Satz von Rolle:
Ist eine stetige Funktion *f(x)* an den Rändern eines Intervalls [a,b] null (d.h. *f(a)=0* und *f(b)=0*) und innerhalb dieses Intervalls differenzierbar, so hat diese Funktion innnerhalb dieses Intervalls mindestens ein Extremum mit *f'(x)=0*.

8.1.2 Erster Mittelwertsatz der Differentialrechnung:
Im Intervall [a,b] sei *f(x)* stetig und differenzierbar. Dann gibt es in [a,b] mindestens ein *x*, für das gilt:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(x)$$

8.1.3 Addition einer Konstanten:
Sind die Funktionen *f* und *g* differenzierbar im Intervall [a,b] und gilt *f'(x) = g'(x)* für alle *x* dieses Intervalls, so gibt es eine Konstante *C*, für die gilt: *f = g + C*.

8.1.4 Regel von l'Hospital für den Fall $\frac{0}{0}$:

Wenn $\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} g(x)=0$ und $g'(x)\neq 0$ ist, dann gilt :

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

8.1.5 Regel von l'Hospital für den Fall $\frac{\infty}{\infty}$:

Wenn $\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} g(x)=\infty$ und $g'(x)\neq 0$ ist, dann gilt :

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Ggf. betrachtet man $-\frac{f}{-g}$.

8.1.6 Grenzwerte anderer Formen:
Grenzwerte der Formen $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 0^0, 1^∞ und ∞^0 können auf die Fälle $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ zurückgeführt werden.

8.2 Taylorformel und Taylorreihe bei Funktionen einer Veränderlichen

Jede Funktion *f*(*x*) läßt durch ein Polynom $T_n(x)$, für das gilt: $f(x)=T_n(x)+R_n(x)$. Hierbei ist $R_n(x)$ ein Restglied ist, das den vorhandenen Fehler ausgleicht.

8.2.1 Taylorformel:

Ist die Funktion $f(x)$ $(n+1)$-fach differenzierbar, so gilt für deren Taylorpolynom:

$$f(x) = \overbrace{f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}\cdot(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x-x_0)^n}^{=T_n(x,x_0)\ \text{Taylorpolynom n-ten Grades}} + \underbrace{R_n(x,x_0)}_{\text{Lagrangesches Restglied}}$$

$$R_n(x,x_0) = \frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!}\cdot(x-x_0)^{n+1} \qquad \text{mit } x \in [x, x_0]$$

<u>Beispiel</u>: Taylorformel um $x_0 = 0$ für die Funktion $f(x) = e^x$ innerhalb des Intervalls $[-1,1]$.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{120} + d \qquad |d| < \frac{1}{120}$$

$$T2(x) = 1 + x$$

$$T4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$$

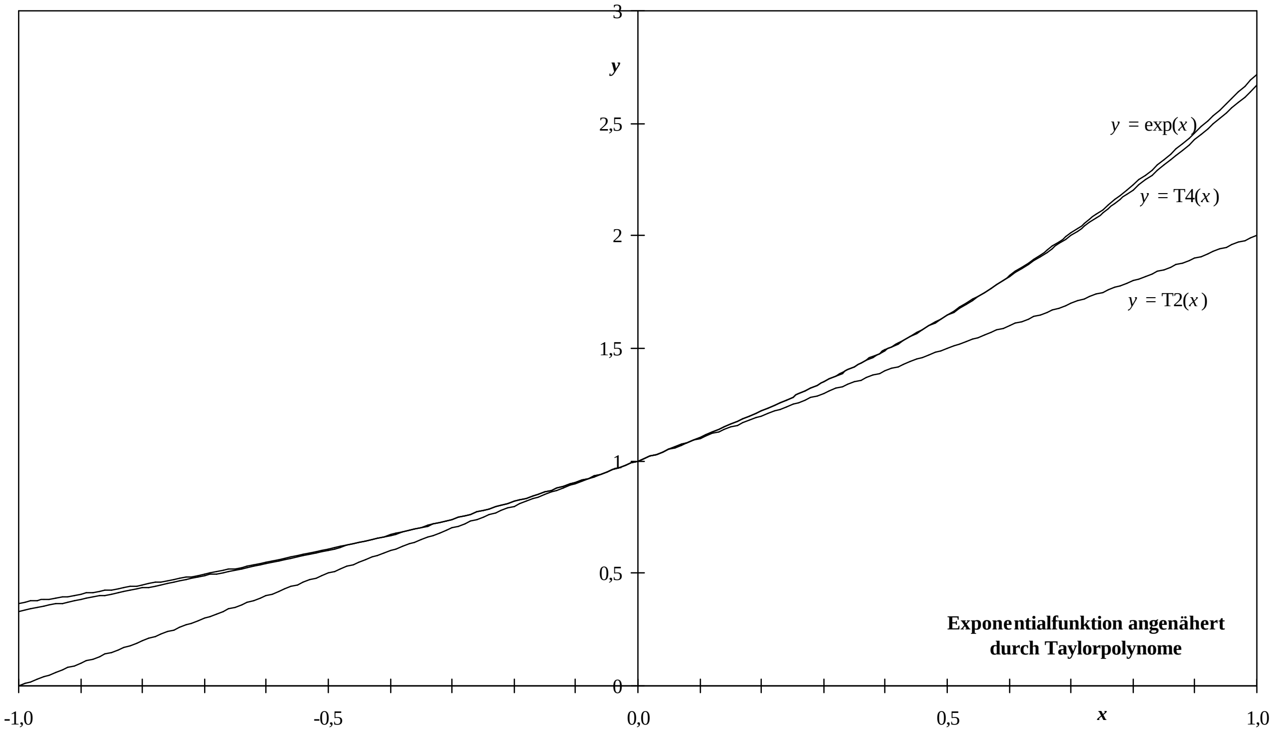


Abbildung 7: Exponentialfunktion angenähert durch Taylorpolynome

8.2.2 Taylorreihe, MacLaurin-Reihe:

Ist die Funktion $f(x)$ beliebig oft differenzierbar, so konvergiert deren <u>Taylorreihe</u>, welche folgendermaßen lautet:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\cdot(x-x_0)^k$$

Für $x_0 = 0$ heißt sie <u>MacLaurin-Reihe</u>.

Beispiel: Die MacLaurin-Reihenentwicklung der folgenden Funktion $f(x)$:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= (1+x)^a \\
&= 1 + a \cdot x + \frac{a \cdot (a-1)}{2!} \cdot x^2 + \ldots + \frac{a \cdot (a-1) \cdot (a-2) \cdots (a-k+1)}{k!} x^k + \ldots \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{a \cdot (a-1) \cdot (a-2) \cdots (a-k+1)}{k!} x^k + R_n(x) \\
&= \sum_{k=0}^{a} \binom{a}{k} x^k
\end{aligned}
$$

8.3 Kurvendiskussion

Vorgehensweise:

Erstens:	Bestimmung des Definitionsbereiches
Zweitens:	Bestimmung der Nullstellen (mit der x-Achse)
Drittens:	Bestimmung der Unstetigkeitsstellen bzw. der Grenzwerte der Funktion (falls möglich) an den Rändern des Definitionsbereiches
Viertens:	Bestimmung der Ableitung an den Rändern des Definitionsbereiches
Fünftens:	Bestimmung des qualitativen Verlaufs des Graphen mit relativen Extremwerten (Nullstellenmenge von $f'(x)$)
Sechstens:	Bestimmung der Wendepunkte (Nullstellenmenge von $f''(x)$)
Siebtens:	Bestimmung von Monotonieintervallen (einheitlich in den Bereichen zwischen den Nullstellen von $f'(x)$)
Achtens:	Bestimmung von Konvexitäts- und Konkavitätsbereichen

8.3.1 Asymptote:

Eine Asymptote an eine Funktion $f(x)$ ist diejenige Gerade $g(x) = ax + b$, für die gilt:

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - g(x)] = 0$$

Bestimmung von $g(x)$:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - ax] = b$$

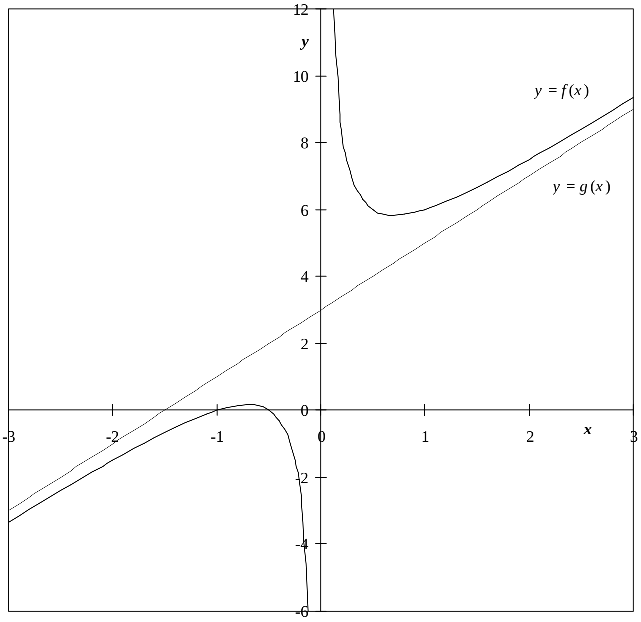
Die Funktion $f(x)$ hat eine senkrechte Asymptote an der Stelle x_0, falls sie dort einen uneigentlichen Grenzwert besitzt.

Beispiel: (Graph s. rechts) Asymptoten an die Funktion *f(x)*:

$$f(x) = 2x + \frac{1}{x} + 3$$

$$g(x) = 2x + 3 \qquad \text{(schräge Asymptote)}$$

$$x_0 = 0 \qquad \text{(senkrechte Asymptote)}$$



8.3.2 Konvexität, Konkavität:

8.3.2.1 *Konvexitätskriterium*: Ist die erste Ableitung $f'(x)$ einer Funktion $f(x)$ in einem Intervall $[a,b]$ monoton steigend, d.h. die zweite Ableitung $f''(x) > 0$, so heißt die Funktion $f(x)$ **konvex auf [*a*,*b*]**.

8.3.2.2 *Konkavität*: Eine Funktion $f(x)$ heißt **konkav auf [*a*,*b*]**, wenn $-f(x)$ dort konvex ist.

Beispiel: Graph der Funktion $f(x) = \sin(x) + 0{,}5$

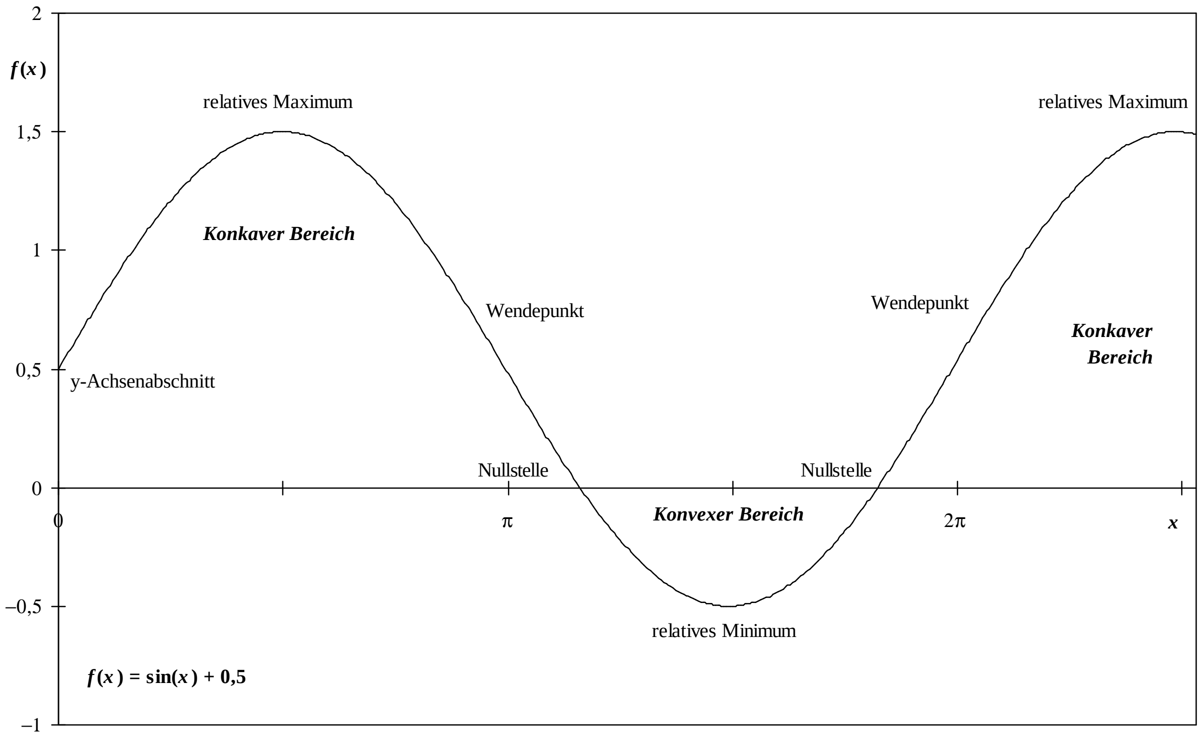


Abbildung 8: Bezeichnungen am Funktionsgraphen

8.4 Satz von Taylor für Funktionen mehrerer Veränderlicher, Anwendungen auf Extremwertaufgaben

8.4.1 Taylorsche Reihe für Funktionen zweier Veränderlicher:

8.4.1.1 Erste Form der Darstellung:

$$f(x,y) = f(a,b) + \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{(x,y)=(a,b)}(x-a) + \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{(x,y)=(a,b)}(y-b) +$$

$$+\frac{1}{2}\left\{\left.\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial^2 x}\right|_{(x,y)=(a,b)}(x-a)^2 + 2\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x \partial y}\right|_{(x,y)=(a,b)}(x-a)(y-b) + \left.\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial^2 y}\right|_{(x,y)=(a,b)}(x-b)^2\right\} +$$

$$+\frac{1}{6}\{\ldots\} + \ldots + \frac{1}{n!}\{\ldots\} + R_n$$

8.4.1.2 Zweite Form der Darstellung:

$$f(x+h,y+k) = f(x,y) + \frac{1}{1!}\left(\frac{\partial}{\partial x}h + \frac{\partial}{\partial y}k\right)f(x,y) + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial}{\partial x}h + \frac{\partial}{\partial y}k\right)^2 f(x,y) +$$

$$+\frac{1}{3!}\left(\frac{\partial}{\partial x}h + \frac{\partial}{\partial y}k\right)^3 f(x,y) + \ldots + \frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial x}h + \frac{\partial}{\partial y}k\right)^n f(x,y) + R_n$$

8.4.1.3 Das Restglied lautet:

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{\partial}{\partial x}h + \frac{\partial}{\partial y}k\right)^{n+1} f(x+\Theta h, y+\Theta k) \qquad (0<\Theta<1)$$

8.4.2 Taylorsche Reihe für Funktionen von *m* Veränderlichen:

Die Darstellung erfolgt analog mit Differentialoperatoren.

8.4.2.1 Taylor-Reihe:

$$f(x_1+h_1, x_2+h_2, \ldots, x_m+h_m) = f(x_1, x_2, \ldots, x_m) +$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i!}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}h_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}h_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_m}h_m\right)^i f(x_1, x_2, \ldots, x_m) +$$

$$+R_n$$

8.4.2.2 Restglied:

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}h_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}h_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_m}h_m\right)^{n+1} f(x_1+\Theta_1 h_1, x_2+\Theta_2 h_2, \ldots, x_m+\Theta_m h_m)$$

$$(0<\Theta_i<1)$$

8.4.3 Relative und absolute Extrema:

8.4.3.1 Eine Funktion *f* besitzt im Punkt $\underline{x}_0$ ein ***strenges relatives Maximum***, wenn die Funktionswerte der Punkte des nächsten Umkreises ($\delta > 0$) um $f(\underline{x}_0)$ vom Betrag kleiner sind als $f(\underline{x}_0)$. Bei ***relativen Maxima*** ist die Gleichheit der Funktionswerte zugelassen. $f(\underline{x}_0)$ ist ein entsprechendes Minimum, wenn $-f(\underline{x}_0)$ ein entsprechendes Maximum ist.

8.4.3.2 Eine Funktion *f* besitzt im Punkt $\underline{x}_0$ ein ***strenges absolutes Maximum***, wenn die Funktionswerte aller anderen Punkte im Definitionsbereich von *f* vom Betrag kleiner sind als $f(\underline{x}_0)$. Bei ***absoluten Maxima*** ist die Gleichheit der Funktionswerte zugelassen. $f(\underline{x}_0)$ ist ein entsprechendes Minimum, wenn $-f(\underline{x}_0)$ ein entsprechendes Maximum ist.

8.4.3.3 Ein ***Sattelpunkt*** liegt vor, wenn eine Funktion *f* an der Stelle $\underline{x}_0$ zwar nur Ableitungen vom Betrag Null hat, die obenstehenden Bedingungen aber nicht erfüllt sind.

Beispiel: Der Punkt (0,0) der folgenden Funktion ist ein Sattelpunkt.

$$f(x,y) = x^2 - y^2$$

$$f_x = 2x, \quad f_y = -2y, \quad f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$$

8.4.4 Hinreichende Bedingung für strenge relative Extrema:

Eine Funktion *f* sei im Intervall $I = (a,b) \times (c,d)$ 2-fach differenzierbar und bilde $\mathbb{R}^2$ auf $\mathbb{R}$ ab. Es sei der Vektor $(x_0, y_0) \in I$.

8.4.4.1 *Strenge relative Maxima*:

Wenn nun $f_x(x_0,y_0) = f_y(x_0,y_0) = 0$ und $f_{xx}(x_0,y_0) \cdot f_{yy}(x_0,y_0) - f_{xy}^2(x_0,y_0) > 0$ während $f_{yy}(x_0,y_0) < 0$ ist, dann liegt in (x_0,y_0) ein strenges relatives Maximum vor.

8.4.4.2 *Strenge relative Minima*:

Wenn nun $f_x(x_0,y_0) = f_y(x_0,y_0) = 0$ und $f_{xx}(x_0,y_0) \cdot f_{yy}(x_0,y_0) - f_{xy}^2(x_0,y_0) > 0$ während $f_{yy}(x_0,y_0) > 0$ ist, dann liegt in (x_0,y_0) ein strenges relatives Minimum vor.

8.4.5 Satz über implizite Funktionen:

Es sei $n,m \in \mathbb{N}$ mit $n>m$ und $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-m} \times \mathbb{R}^m = \left\{(\underline{x},\underline{y}) \middle| \underline{x} \in \mathbb{R}^{n-m}, \underline{y} \in \mathbb{R}^m\right\}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $(\underline{x}_0, \underline{y}_0) \in D$, es gelte ferner:

1.) $\underline{F} : D \to \mathbb{R}^m$ ist *k*-fach stetig partiell differenzierbar,

2.) $\underline{F}(\underline{x}_0, \underline{y}_0) = \underline{0}$ und

3.) $D_{\underline{y}} \underline{F}(\underline{x}_0, \underline{y}_0)$ ist *nichtsingulär*, der Betrag der Determinante der Ableitungmatrix also ungleich Null.

Dann gibt es eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^{n-m}$ von $\underline{x}_0$ und eine offene Umgebung $V \subset \mathbb{R}^m$ von $\underline{y}_0$ mit $U \times V \subset D$ und es existiert eine *k*-fach partiell differenzierbare ***implizite Funktion*** $\underline{f} : U \to V$. Sie hat folgende Eigenschaften:

a) $\underline{F}(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{0} \Leftrightarrow \underline{y} = \underline{f}(\underline{x})$, für alle $\underline{x} \in U$ und für alle $\underline{y} \in V$
Insbesondere: $\underline{y}_0 = \underline{f}(\underline{x}_0)$.

b) $D_{\underline{x}} \underline{F}(\underline{x}, \underline{f}(\underline{x})) + D_{\underline{y}} \underline{F}(\underline{x}, \underline{f}(\underline{x})) \cdot D\underline{f}(\underline{x}) = 0$, für alle $\underline{x} \in U$
Insbesondere: $D\underline{f}(\underline{x}_0) = -\left[D_{\underline{y}} \underline{F}(\underline{x}_0, \underline{y}_0)\right]^{-1} \cdot D_{\underline{x}} \underline{F}(\underline{x}_0, \underline{y}_0)$.

Angewendet werden kann dieser Satz beispielsweise auf nichtlineare Gleichungssysteme, deren Variablen in Abhängigkeit einer anderen dargestellt werden sollen.

Beispiel:
Gegeben ist das folgende nichtlinare Gleichungssystem:

$$\begin{cases} e^x \cdot \cos(y) \cdot \sin(z) + y^2 = 0 \\ 2x \cdot \cos(y^2 z) + \sin(y + x^2) = 0 \end{cases}$$

Geschrieben im Format nach dem Satz über impliziten Funktionen:

$$\underline{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} F_1(x,y,z) \\ F_2(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x \cdot \cos(y) \cdot \sin(z) + y^2 \\ 2x \cdot \cos(y^2 z) + \sin(y + x^2) \end{pmatrix}$$

$$\text{Es ist } \underline{F}(0,0,0) = \underline{0}.$$

Gesucht sind nun $y(x)$ und $z(x)$.

Die Voraussetzungen 1.) bis 3.) sind erfüllt. Es ist

$$D\underline{F} = \begin{pmatrix} DF_1 \\ DF_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{1x} & F_{1y} & F_{1z} \\ F_{2x} & F_{2y} & F_{2z} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^x \cdot \cos(y) \cdot \sin(z) & -e^x \cdot \sin(y) \cdot \sin(z) + 2y & e^x \cdot \cos(y) \cdot \cos(z) \\ 2 \cdot \cos(y^2 z) + \cos(y + x^2) \cdot 2x & 2x \cdot (-\sin(y^2 z)) \cdot 2yz + \cos(y + x^2) & 2x \cdot (-\sin(y^2 z)) \cdot y^2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow D\underline{F}(0,0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow D_{(y,z)^T} \underline{F}(0,0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow D_{(x,z)^T} \underline{F}(0,0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow D_{(x,y)^T} \underline{F}(0,0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Aus den Beträgen der jeweiligen Determinanten wird sofort ersichtlich, daß nach $y(x)$ und $z(x)$ sowie nach $x(y)$ und $z(y)$ aufgelöst werden kann. Dagegen ist für die Auflösung nach $x(z)$ und $y(z)$ die Anwendung des Satzes über Implizite Funktionen für die nicht möglich.

8.4.6 Die Lagrangesche Multiplikatorregel:

8.4.6.1 Es seien die Funktionen $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig partiell differenzierbar. Ferner liege an der Stelle $\underline{x}^0$ ein relatives Extremum von f *eingeschränkt* auf die Menge $\{\underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid g(\underline{x}) = 0\}$ vor. Außerdem gelte $Dg(\underline{x}^0) \neq \underline{0}$. Dann gibt es ein $l \in \mathbb{R}$ mit $Df(\underline{x}^0) = l \cdot Dg(\underline{x}^0)$.

8.4.6.2 ***Lagrangesche Funktion L***: $L(\underline{x}) = f(\underline{x}) - l \cdot g(\underline{x})$

8.4.6.3 ***Lagrangescher Multiplikator*** λ: $l = \dfrac{f_{x_n}(\underline{x}^0)}{g_{x_n}(\underline{x}^0)}$

Beispiel:

Gesucht werden die Scheitelpunkte der Ellipse gegeben durch $x^2+xy+y^2-3=0$.

Formuliert man die Aufgabenstellung gemäß der Lagrangeschen Multiplikatorregel um, so ergibt sich $f(x,y)=x^2+y^2$ (Kreisgleichung) unter der Bedingung, daß $g(x,y)=x^2+xy+y^2-3=0$.

Die entsprechende Lagrangesche Funktion lautet dann:

$$DL(x,y)=0 \Leftrightarrow D[f(x,y)-l\cdot g(x,y)]=0$$

$$\begin{cases} f_x - l\cdot g_x = 2x - l\cdot(2x+y)=0 \\ f_y - l\cdot g_y = 2y - l\cdot(2y+x)=0 \end{cases}$$

$$\text{Mit } \ l=\frac{2x}{2x+y}, \quad 2x+y\neq 0$$

Daraus folgt dann

$$x=\pm y$$

$$\Rightarrow g(\pm y,y)=y^2\pm y^2+y^2-3=\begin{cases} 3y^2-3=0 \\ y^2-3=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_{1,2}=\pm 1$$

$$y_{3,4}=\pm\sqrt{3}$$

$$\text{Extremstellen:}$$

$$(1,1) \qquad (-1,-1) \qquad (\sqrt{3},-\sqrt{3}) \qquad (-\sqrt{3},\sqrt{3})$$

8.5 Fehler- und Ausgleichungsrechnung

Physikalisch ermittelte (gemessene) Zusammenhänge und deren entsprechend beschreibende Funktion stimmen nie genau überein. Es bleibt immer eine Differenz zwischen der Folge der gemessenen Werte und der eigentlichen Funktion. Man kann diese Funktion den gemessenen Werten anpassen, indem sie so zwischen die Folge der Meßwerte gelegt wird, daß die Summe der Quadrate der jeweiligen Differenz minimal wird.

Geht man aus von der Funktion

$$f:\ \mathbb{R}^{n+1}\to\mathbb{R}$$

$$(x,a_1,a_2,\ldots,a_n)\mapsto f(x,a_1,a_2,\ldots,a_n),$$

bei der a_i ***Parameter*** sind, die bei einer Vorgabe von k Meßpunkten $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\ldots,(x_k,y_k)$ so bestimmt werden sollen, daß die ***quadratische Fehler-Funktion*** Φ: $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ definiert durch

$$\Phi(a_1,\ldots,a_n)=\sum_{i=1}^{k}[y_i-f(x_i,a_1,\ldots,a_n)]^2$$

in $(a_1^0,\ldots,a_n^0)$ ein Minimum hat. Im linearen Fall bestimmt man anhand der Meßpunkte die ***Ausgleichsgerade*** $f(x,a,b)=ax+b$.

8.5.1 Das Fehlerfortpflanzungsgesetz:

8.5.1.1 *Systematische Fehler* entstehen durch meßtechnische Mängel und können nur durch Verbesserung der jeweiligen Meßapparatur minimiert werden.

8.5.1.2 *Statistische Fehler* sind auf Meßungenauigkeit beeinträchtigende Vorkommnisse zurückzuführen, wie beispielsweise Ablesefehler, Luftfeuchtigkeit,... Verbessert werden sie durch häufige Wiederholung derselben Messung.

8.5.2 Arithmetischer Mittelwert, Streuung:

Für sie gilt:

Arithmetischer Mittelwert: $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

Streuung: $s = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}$

9. Integralrechnung

9.1 Definition der Stammfunktion

9.1.1 Stammfunktion *F*(*x*) einer Funktion *f*(*x*):

Es gilt Folgendes:

$$F(x) = \int f(x) \cdot dx$$

bzw. $$F'(x) = f(x)$$

Wenn eine solche Funktion $F(x)$ existiert, so heißt $f(x)$ integrierbar und $\int_a^b f(x) \cdot dx$ das ***(bestimmte) Riemann - Integral von f*** in den Grenzen $x_1 = a$ (***untere Grenze***) und $x_2 = b$ (***obere Grenze***).

9.1.2 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

Eine im Intervall $[a,b]$ stetige Funktion $f(x)$ mit der Stammfunktion $F(x)$ schließt mit der x-Achse die Fläche $\int_a^b f(x) \cdot dx = F(b) - F(a)$ ein.

9.2 Eigenschaften und Anwendungen von Integralen

9.2.1 Bogenlänge einer Raumkurve *K* im Intervall [*a*,*b*]:

Für sie gilt allgemein:

$$l(K) = \int_a^b \sqrt{f_1'(x)^2 + f_2'(x)^2 + f_3'(x)^2} \cdot dx = \int_a^b \left|\underline{f}'(x)\right| \cdot dx$$

Der letzte Term gilt auch für Kurven im $\mathbb{R}^n$.

9.2.2 Wichtige Eigenschaften von Riemann-Integralen:

$$\int_a^b f(x)\cdot dx = -\int_b^a f(x)\cdot dx$$

$$\int_a^a f(x)\cdot dx = 0$$

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]\cdot dx = \int_a^b f(x)\cdot dx + \int_a^b g(x)\cdot dx$$

$$\int_a^b g\cdot f(x)\cdot dx = g\cdot\int_a^b f(x)\cdot dx$$

$$\int_a^b f(x)\cdot dx = \int_a^c f(x)\cdot dx + \int_c^b f(x)\cdot dx \qquad \text{mit } c\in[a,b]$$

$$\left|\int_a^b f(x)\cdot dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\cdot dx$$

9.3 Integrationsmethoden

Prinzip: Im Allgemeinen eine ***Umformung und Rückfühung*** von Integralen ***auf Grundintegrale.***

9.3.1 Addition der Null:

<u>Beispiel</u>: $\int \frac{x^2}{1+x^2}\cdot dx = \int \frac{1+x^2-1}{1+x^2}\cdot dx = \int 1\cdot dx - \int \frac{1}{1+x^2}\cdot dx = x - \arctan x$

9.3.2 Die Ableitung der Funktion tritt im Integranden auf:

<u>1. Beispiel</u>: $\int f^n\cdot f'\cdot dx = \frac{f^{n+1}}{n+1}$ $\qquad n\neq -1$ und rational

<u>2. Beispiel</u>: $\int \frac{f'}{f}\cdot dx = \ln|f|$ $\qquad$ für Intervalle mit $f\neq 0$

$$\int \tanh x\cdot dx = \int \frac{\sinh x}{\cosh x}\cdot dx = \int \frac{(\cosh x)'}{\cosh x}\cdot dx = \ln|\cosh x| = \ln\cosh x$$

9.3.3 Die Substitutionsmethode:

Allgemein gilt: $\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) \cdot dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y) \cdot dy$

<u>1. Beispiel</u>:

$$\int_0^1 \underbrace{(x+2)}_{g'(x)} \cdot \underbrace{\sin(\overbrace{x^2+4x-6}^{g(x)})}_{f(g(x))} \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot \int_{g(0)}^{g(1)} \sin y \cdot dy = -\frac{1}{2} \cdot \cos y\Big|_{g(0)}^{g(1)} = -\frac{1}{2}[\cos(-1) - \cos(-6)]$$

<u>2. Beispiel</u>:

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} \cdot dx = \int_a^b \overbrace{\frac{1}{2}}^{g'(x)} \cdot \overbrace{\frac{1}{\sqrt{1-\Bigg(\underbrace{\frac{x}{2}}_{g(x)}\Bigg)^2}}}^{f(g(x))} \cdot dx = \int_{\frac{a}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \cdot dy = \arcsin y\Big|_{\frac{a}{2}}^{\frac{b}{2}} = \arcsin\left(\frac{b}{2}\right) - \arcsin\left(\frac{a}{2}\right)$$

9.3.4 Partielle Integration:

Allgemein gilt: $\int_a^b f' \cdot g \cdot dx = f \cdot g\Big|_a^b - \int_a^b f \cdot g' \cdot dx$

<u>1. Beispiel</u>: $\int_1^4 \ln x \cdot dx = \int_1^4 1 \cdot \ln x \cdot dx = x \cdot \ln x\Big|_1^4 - \int_1^4 \frac{x}{x} \cdot dx = (x \ln x - x)\Big|_1^4 = 8 \cdot \ln 2 - 3$

<u>2. Beispiel</u>:

$$I = \int_{-p}^{p} \cos ax \cdot \cos bx \cdot dx = \frac{1}{a} \cdot \sin ax \cdot \cos bx\Big|_{-p}^{p} - \frac{b}{a} \int_{-p}^{p} \sin ax \cdot \sin bx \cdot dx$$

$$= \frac{1}{a} \cdot \sin ax \cdot \cos bx\Big|_{-p}^{p} - \frac{b}{a}\left[-\frac{1}{a} \cdot \cos ax \cdot \sin bx\Big|_{-p}^{p} + \frac{b}{a} \int_{-p}^{p} \cos ax \cdot \cos bx \cdot dx\right]$$

$$\Leftrightarrow \quad I\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) = \frac{1}{a} \cdot \sin ax \cdot \cos bx\Big|_{-p}^{p} - \frac{b}{a^2} \cdot \cos ax \cdot \sin bx\Big|_{-p}^{p}$$

Für $a, b \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\int_{-p}^{p} \cos ax \cdot \cos bx \cdot dx = \begin{cases} 0 & \text{falls } a \neq b \\ p & \text{falls } a = b \end{cases}$$

$$\int_{-p}^{p} \sin ax \cdot \sin bx \cdot dx = \begin{cases} 0 & \text{falls } a \neq b \\ p & \text{falls } a = b \end{cases}$$

$$\int_{-p}^{p} \sin ax \cdot \cos bx \cdot dx = 0$$

Hieraus folgt dann: $I = 0$.

9.3.5 Integration rationaler Funktionen (Partialbruchzerlegung):

9.3.5.1 Integrale der Form $\int_a^b \frac{P(x)}{Q(x)} \cdot dx$ mit Grad(P) > Grad(Q) werden mit Hilfe von ***Polynomdivision*** vereinfacht und - wenn kein Rest bleibt - sofort integriert. Andernfalls benötigt man die Methode der Partialbruchzerlegung.

9.3.5.2 Bei der Betrachtung von Integralen der Form $\int_a^b \frac{R(x)}{Q(x)} \cdot dx$ mit Grad (R) < Grad(Q) kommt der Fundamentalsatz der Algebra zur Anwendung (s. S. 3; 1.8). Dabei wird $Q(x)$ in Faktoren reeller Nullstellen und ggf. Polynome der nicht-reellen Nullstellen zerlegt.

$$Q(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = C \cdot (x - z_1) \cdot (x - z_2) \cdot \ldots \cdot (x - z_n)$$

Nicht-reelle Nullstellen treten als $(x - z_j) \cdot (x - \overline{z_j}) = \left(x^2 - 2x \cdot \operatorname{Re} z_j + |z_j|^2\right)$ auf.

Im weiteren Lösungsverlauf werden auch die Vielfachheiten k_n der reellen Nullstellen x_n und die Vielfachheiten l_t der nicht-reellen Nullstellen z_t berücksichtigt.

Die Partialbruchzerlegung von $\frac{R}{Q}$ ist dann eindeutig bestimmt durch:

$$\begin{aligned}
\frac{R}{Q} = {} & \frac{A_{11}}{x - x_1} + \frac{A_{12}}{(x - x_1)^2} + \ldots + \frac{A_{1k_1}}{(x - x_1)^{k_1}} + \\
& + \frac{A_{21}}{x - x_2} + \frac{A_{22}}{(x - x_2)^2} + \ldots + \frac{A_{2k_2}}{(x - x_2)^{k_2}} + \\
& \ldots \\
& + \frac{A_{n1}}{x - x_n} + \frac{A_{n2}}{(x - x_n)^2} + \ldots + \frac{A_{nk_n}}{(x - x_n)^{k_n}} + \\
& + \frac{B_{11}x + C_{11}}{x^2 + b_1 x + g_1} + \frac{B_{12}x + C_{12}}{(x^2 + b_1 x + g_1)^2} + \ldots + \frac{B_{1l_1}x + C_{1l_1}}{(x^2 + b_1 x + g_1)^{l_1}} + \\
& \ldots \\
& + \frac{B_{t1}x + C_{t1}}{x^2 + b_t x + g_t} + \frac{B_{t2}x + C_{t2}}{(x^2 + b_t x + g_t)^2} + \ldots + \frac{B_{tl_t}x + C_{tl_t}}{(x^2 + b_t x + g_t)^{l_t}}
\end{aligned}$$

Es gibt dann die Möglichkeit, für die Lösung einen ***Koeffizientenvergleich*** mit der ursprünglichen Funktion durchzuführen, indem man beide Seiten der obenstehenden Gleichung mit $Q(x)$ multipliziert und das dann aus der Gleichheit der Koeffizienten erhaltene lineare Gleichungssystem nach den unbekannten Koeffizienten auflöst und integriert.

Eine andere Möglichkeit ist das ***„Zuhalte-Verfahren“*** (Zitat eines Mathematikers) zur Bestimmung eines Koeffizienten A_{pq}: In Gedanken wird die Gleichung auf beiden Seiten mit Nenner des Bruchs bei A_{pq} erweitert und die Nullstelle x_p des ursprünglichen Integranden eingesetzt. Für die Bestimmung der anderen Koeffizienten wird dieses Verfahren wiederholt, unter Umständen muß man die dann vorliegende Gleichung mit Polynomdivision vereinfachen, bevor man fortfährt.

<u>Beispiel</u>: Gesucht ist das unbestimmte Integral der folgenden Funktion:

$$f(x)=\frac{x^5+3x^4+5x^3+8x^2+4x+3}{\left(x^2+1\right)^2\cdot\underbrace{\left(x^2+2x+1\right)}_{=(x+1)^2}}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{\left(x^2+1\right)^2}+\frac{E}{x+1}+\frac{F}{(x+1)^2}$$

Zuhalte-Verfahren zur Bestimmung von *F*: Mit $(x+1)^2$ multiplizieren und dann $x=-1$ einsetzen:

$$\left(\text{Lösung}: F=1\right) \quad \Rightarrow \frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{\left(x^2+1\right)^2}+\frac{E}{x+1}$$

$$=f(x)-\frac{1}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{x^5+3x^4+5x^3+8x^2+4x+3-\left(x^2+1\right)^2}{\left(x^2+1\right)^2(x+1)^2}$$

$$\left(\text{Polynomdivision}\right)$$

$$=\frac{x^4+x^3+4x^2+2x+2}{\left(x^2+1\right)^2(x+1)}$$

$$\left(\text{Zuhalte-Verfahren für E liefert } E=1\right)$$

$$\Rightarrow \frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$=\frac{x^4+x^3+4x^2+2x+2}{\left(x^2+1\right)^2(x+1)}-\frac{1}{x+1}$$

$$\left(\text{Vereinfachung und Polynomdivision}\right)$$

$$=\frac{x^2+x+1}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$\left(\text{Koeffizientenvergleich liefert } A=0, B=1, C=1, D=0\right)$$

$$\text{Lösung}: \quad f(x)=\frac{1}{x^2+1}+\frac{x}{\left(x^2+1\right)^2}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}$$

Für das Integral ergibt sich dann Folgendes:

$$\int f(x)\cdot dx=\int\left[\frac{1}{x^2+1}+\frac{x}{\left(x^2+1\right)^2}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}\right]\cdot dx$$

$$=\arctan x-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1}+\ln|x+1|-\frac{1}{x+1}$$

9.3.6 Integration rationaler Funktionen von *sin* und *cos*:
Zunächst wird substituiert:

$$y = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \qquad \Rightarrow \sin x = 2 \cdot \frac{y}{1+y^2}$$

$$\cos x = \frac{1-y^2}{1+y^2}$$

$$dx = \frac{2}{1+y^2} \cdot dy$$

Danach wird integriert, ggf. muß noch eine Partialbruchzerlegung durchgeführt werden.

9.3.7 Integration rationaler Funktionen von *sinh* und *cosh*:
Substitution:

$$y = \tanh\left(\frac{x}{2}\right) \qquad \Rightarrow \sinh x = 2 \cdot \frac{y}{1-y^2}$$

$$\cosh x = \frac{1+y^2}{1-y^2}$$

$$dx = \frac{2}{1-y^2} \cdot dy$$

9.3.8 Integration von Potenzreihen:

Es gilt: $$\int \left[\sum_{k=0}^{\infty} \left(a_k \cdot (x - x_0)^k \right) \right] \cdot dx = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\int \left(a_k \cdot (x - x_0)^k \right) \cdot dx \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{a_k}{k+1} \cdot (x - x_0)^{k+1} \right]$$

9.3.9 Rotationskörper:
Für das Volumen V eines um die x-Achse rotationssymmetrischen Körpers mit $f(x)$ als Funktion der Berandung gilt im Intervall $[a,b]$:

$$V = p \cdot \int_a^b [f(x)]^2 \cdot dx$$

9.4 Integrale bei Funktionen mehrerer Veränderlicher

9.4.1 Zweidimensionale Integrale:
Das Volumen V zwischen der Funktion $f(x,y)$ und der x-y-Ebene im Bereich $x \times y \to [a,b] \times [c,d]$ beträgt:

$$V = \iint_A f(x,y) \cdot dA = \iint_A f(x,y) \cdot dx \cdot dy = \int_x \left(\int_y f(x,y) \cdot dy \right) \cdot dx$$

Beispiel: Gesucht ist das Volumen des Tetraeders, dessen Ecken in $(0,0,0)$, $(a,0,0)$, $(0,b,0)$ und $(0,0,c)$ sind. Die Gleichung der entsprechenden Ebene liefert den gesuchten Inhalt:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \Leftrightarrow z = f(x,y) = c \cdot \left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right)$$

$$V=\iint_A f(x,y)\cdot dA=\int_{x=0}^{x=a}\left[\int_{y=0}^{y=b\left(1-\frac{x}{a}\right)} c\cdot\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)\cdot dy\right]\cdot dx=\int_{x=0}^{x=a} c\cdot\left[\left(1-\frac{x}{a}\right)\cdot y-\frac{y^2}{2b}\right]_{y=0}^{y=b\left(1-\frac{x}{a}\right)}\cdot dx$$

$$=\frac{bc}{2}\int_0^a\left(1-\frac{x}{a}\right)^2\cdot dx=\frac{abc}{6}$$

9.4.2 Dreidimensionale Integrale:
Analog zu zweidimensionalen Integralen gilt:

$$I=\iiint_{Q=[x\times y\times z]} f(x,y,z)\cdot dx\cdot dy\cdot dz=\int_x\left[\int_y\left[\int_z f(x,y,z)\cdot dz\right]\cdot dy\right]\cdot dx$$

Beispiel: Gesucht ist das Volumen V einer (zentrosymmetrischen) Kugel mit Radius R.

$$x^2+y^2+z^2=R^2\Rightarrow z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$$

Es gilt gemäß der obenstehenden Gleichung:

$$\frac{1}{8}\cdot V=\int_0^R\left[\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}\left(\int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dz\right)\cdot dy\right]\cdot dx$$

$$=\int_0^R\left[\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}\sqrt{R^2-x^2-y^2}\cdot dy\right]\cdot dx$$

$$=\int_0^R\left[\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}\sqrt{a^2-y^2}\cdot dy\right]\cdot dx \qquad (\text{Substitution}: R^2-x^2=a^2)$$

$$=\int_0^R\left[-a^2\int_{\frac{p}{2}}^{0}\sin^2 u\cdot du\right]\cdot dx \qquad (\text{Substitution}: y=a\cdot\cos u,\ dy=-a\cdot\sin u\cdot du)$$

$$=\int_0^R\left[\frac{p}{4}\cdot\left(R^2-x^2\right)\right]\cdot dx \qquad (\text{Resubstitution})$$

$$=\frac{R^3\cdot p}{6}$$

Das Kugelvolumen beträgt dann $V=\frac{4\cdot\pi\cdot R^3}{3}$.

9.4.3 Masse *m* und Schwerpunkt eines Körpers:

Für sie gilt:

$$m = \iiint_{[x \times y \times z]} r(x,y,z) \cdot d(x,y,z)$$

$$x_s = \iiint_{[x \times y \times z]} x \cdot d(x,y,z)$$

$$y_s = \iiint_{[x \times y \times z]} y \cdot d(x,y,z)$$

$$z_s = \iiint_{[x \times y \times z]} z \cdot d(x,y,z)$$

9.5 Uneigentliche Integrale

9.5.1 Konvergentes uneigentliches Integral:

1. Bedingung: Für alle reellen α,β aus dem Definitionsbereich (*a*,*b*) [z.B. $(-\infty,\infty)$] der gegebenen Funktion *f* ist *f* integrierbar.

2. Bedingung: Es gibt ein c aus (*a*,*b*), so daß folgende Integrale <u>existieren</u>:

$$I_1 = \lim_{\substack{y \to a+ \\ (y \to -\infty)}} \int_y^c f \cdot dx \qquad I_2 = \lim_{\substack{y \to b- \\ (y \to \infty)}} \int_c^y f \cdot dx$$

Uneigentliches Integral: $I = I_1 + I_2 = \lim_{\substack{y \to a+ \\ (y \to -\infty)}} \int_y^c f \cdot dx + \lim_{\substack{y \to b- \\ (y \to \infty)}} \int_c^y f \cdot dx$

9.5.2 Vergleichskriterium für uneigentliche Integrale:

9.5.2.1 Konvergiert $\int_a^b g(x) \cdot dx$ und ist $|f(x)| \le g(x)$, so konvergiert auch $\int_a^b f(x) \cdot dx$.

9.5.2.2 Divergiert $\int_a^b g(x) \cdot dx$, während $0 \le g(x) \le f(x)$ ist, so divergiert auch $\int_a^b f(x) \cdot dx$.

9.5.3 Integralkriterium:

Ist die Funktion $f(x): [n_0, \infty) \to \mathbb{R}$ monoton fallend und gilt ständig $f(x) \ge 0$, so kann man sagen:

Es konvergiert $\sum_{n=n_0}^{\infty} f(n)$, wenn $\int_{n_0}^{\infty} f(x) \cdot dx$ konvergiert.

9.6 Parameterabhängige Integrale

9.6.1 Stetigkeit von Parameterintegralen:
Das folgende Parameterintegral ist im Definitionsbereich von $f(x,t)$ stetig:

$$F(t) = \int_{j(t)}^{y(t)} f(x,t) \cdot dx$$

9.6.2 Leibniz-Regel:
Ist im Parameterintegral auch $f_t(x,t)$ stetig, dann gilt für die Ableitung $F'(t)$:

$$F'(t) = \int_{j(t)}^{y(t)} f_t(x,t) \cdot dx + f(y(t),t) \cdot y'(t) - f(j(t),t) \cdot j'(t)$$

9.7 Integration durch Reihenentwicklung, spezielle nichtelementare Funktionen

9.7.1 Die Gammafunktion $\Gamma(x)$ oder das Eulersches Integral zweiter Gattung:
Als Gammafunktion wird folgendes uneigentliche Integral definiert:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} \cdot t^{x-1} \cdot dt \qquad x > 0$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^x \cdot n!}{\prod_{k=0}^{n} (x+k)}$$

Die Gammafunktion hat folgende Eigenschaften:

$$\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$$

$$\Gamma(x) \cdot \Gamma(1-x) = \frac{p}{\sin(px)}$$

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)! \cdot \sqrt{p}}{n! \cdot 2^{2n}}$$

$$\Gamma(n+1) = n!$$

Letztere Eigenschaft erlaubt die Erweiterung des Begriffs der Fakultät auf beliebige reelle Zahlen:

$$p(x) = x! = \Gamma(x+1)$$

z.B. $x = \frac{1}{2} \Rightarrow p\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)! = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{p}}{2}$

$x = -\frac{1}{2} \Rightarrow p\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)! = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{p}$

9.7.2 Eulersche Konstante *C*:

Sie wird definiert als: $C = -\int_0^\infty e^{-t} \cdot \ln t \cdot dt = 0{,}577215665$

9.7.3 Integralsinus:

Für $|x| < \infty$ gilt: $\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} \cdot dt = \frac{p}{2} - \int_x^\infty \frac{\sin t}{t} \cdot dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)\cdot(2n+1)!}$

9.7.4 Integralcosinus:

Für $0 < x < \infty$ gilt: $\mathrm{Ci}(x) = \int_x^\infty \frac{\cos t}{t} \cdot dt = C + \ln x - \int_0^x \frac{1-\cos t}{t} \cdot dt = C + \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{2n \cdot (2n)!}$

9.7.5 Integralexponentialfunktion:

Für $-\infty < x < 0$ und $0 < x < \infty$ gilt: $\mathrm{Ei}(x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^t}{t} \cdot dt = C + \ln|x| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot n!}$

Ist $0 < x < \infty$, so spricht man vom *Cauchyschen Hauptwert*.

9.7.6 Integrallogarithmus:

Für $0 < x < 1$ und $1 < x < \infty$ gilt: $\mathrm{Li}(x) = \int_0^x \frac{dt}{\ln t} = C + \ln|\ln x| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln x)^n}{n \cdot n!} = \mathrm{Ei}(\ln x)$

Ist $1 < x < \infty$, so spricht man vom *Cauchyschen Hauptwert*.

9.7.7 Gauß'sches Fehlerintegral:

Für $|x| < \infty$ gilt: $\mathrm{erf}(x) = \Phi\left(\sqrt{2} \cdot x\right) = \frac{2}{\sqrt{p}} \cdot \int_0^x e^{-t^2} \cdot dt = \frac{2}{\sqrt{p}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{n! \cdot (2n+1)}$

Eigenschaften:

$$\lim_{x\to\infty} \mathrm{erf}(x) = 1$$

$$\int_0^x \mathrm{erf}(t) \cdot dt = x \cdot \mathrm{erf}(x) + \frac{1}{\sqrt{p}} \cdot \left(e^{-x^2} - 1\right)$$

$$\frac{d\,\mathrm{erf}(x)}{dx} = j(x) = \frac{2}{\sqrt{p}} \cdot e^{-x^2}$$

10. Tensoren, Quadratische Formen

10.0 Allgemeine Grundlagen

10.0.1 Linearitätseigenschaft einer Abbildung:
Gegeben seien V^n als ein n-dimensionaler Raum sowie die Abbildung A: $V^n \rightarrow V^n$.
A heißt ***lineare Abbildung***, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:

$$A(\underline{a}+\underline{b}) = A(\underline{a}) + A(\underline{b}) \qquad \underline{a},\underline{b} \in V^n$$

$$A(\lambda \cdot \underline{a}) = \lambda \cdot A(\underline{a}) \qquad \lambda \in \mathbb{R},\ \ \underline{a} \in V^n$$

10.0.2 Eigenwerte und Eigenvektoren:
Allgemeine Definition siehe Kapitel 3.3.

<u>Beispiel</u>: Gesucht werden die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix A:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda \cdot E) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & -1 \\ 1 & 4-\lambda & -1 \\ -1 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 10\lambda^2 - 32\lambda + 32 = 0$$

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 4$$

Die Eigenvektoren werden dann nach bekanntem Prinzip berechnet:

$$\underline{\nu}_1 = C_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \underline{\nu}_2 = C_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \underline{\nu}_3 = C_3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Es sei bemerkt, daß die ***Eigenvektoren einer Matrix eine Orthogonalbasis*** darstellen, ***falls die Matrix symmetrisch*** ist. Es gilt dann:

$$\underline{v}_3 = \underline{v}_1 \times \underline{v}_2$$

<u>2. Beispiel</u>: Eigenvektoren als Orthogonalbasis zur folgenden Matrix A

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \det(A - \lambda E) = -\lambda \cdot (3-\lambda)^2 + \lambda = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 = 0 \quad \lambda_1 = 2 \quad \lambda_3 = 4$$

$$\Rightarrow \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \underline{v}_3 = \underline{v}_1 \times \underline{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Bei der Aufstellung einer solchen Basis ist allerdings darauf zu achten, daß $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ ist.

10.1 Tensoren, Koordinatendarstellungen

10.1.1 Geometrischer Tensor:

Als erste Etappe zur Definition allgemeiner Tensoren werden an dieser Stelle Tensoren als geometrische Objekte eingeführt. Gilt beispielsweise für die Verzerrung *f* der vier Punkte *P*, *Q*, *R*, *S* eines Parallelogramms die Vorschrift

$$f\left(\vec{PQ}+\vec{PR}\right)=f\left(\vec{PQ}\right)+f\left(\vec{PR}\right)$$
$$f\left(l\cdot\vec{PQ}\right)=l\cdot f\left(\vec{PQ}\right)$$

so spricht man bei *f* von einem ***geometrischen Tensor 2. Stufe***.

10.1.2 Tensor:

Ist eine allgemeine Abbildung A aus V^n linear, so spricht man von einem ***Tensor 2. Stufe***.

10.1.3 Vektorprodukt:

Vektor $\underline{a}\in V^3$ fest:

$$A(\underline{n})=\underline{a}\times\underline{n}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-a_3&a_2\\a_3&0&-a_1\\-a_2&a_1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix}$$

10.1.4 Projektionstensor:

Der Vektor $\underline{b}\in V^n$ sei fest. Dann ist die Projektionsabbildung ein Tensor:

$$\text{Projektionsabbildung}: \quad P(\underline{x})=\mathrm{Proj}_{\underline{b}}\,\underline{x}=\frac{\underline{x}\cdot\underline{b}}{\|\underline{b}\|^2}\cdot\underline{b}$$

$$\text{Koordinatendarstellung von P}: \quad P_{ji}=P(\underline{e}_i)\cdot\underline{e}_j=\frac{\underline{e}_i\cdot\underline{b}}{\|\underline{b}\|^2}\cdot\underline{b}\cdot\underline{e}_j=\frac{b_i\cdot b_j}{\|\underline{b}\|^2}$$

10.1.5 Dyadisches Produkt zweier Vektoren:

Die Vektoren $\underline{u},\underline{v}\in V^n$ seien fest. Dann ist folgende Abbildung *D* ein Tensor:

$$D(\underline{w})=D_{\underline{u}\underline{v}}(\underline{w})=\underline{u}\cdot(\underline{v}\cdot\underline{w}) \qquad \underline{w}\in V^n$$

$$\text{Koordinatendarstellung}: \quad d_{ij}=D(\underline{e}_i)\cdot\underline{e}_j=u_j\cdot v_i$$

$$\Rightarrow D=\begin{pmatrix}u_1v_1&u_1v_2&\cdots&u_1v_n\\u_2v_1&u_2v_2&\cdots&u_2v_n\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\u_nv_1&u_nv_2&\cdots&u_nv_n\end{pmatrix}=\underline{u}\cdot\underline{v}^T$$

10.1.6 Spiegelungstensor:

Es sei der Vektor $\underline{u}\in V^n$ mit $\|\underline{u}\|=1$. Dann stellt $S_{\underline{u}}=1-2D_{\underline{u}\underline{u}}(\underline{x})$ (siehe oben) eine Spiegelung an der Ebene E: $\underline{u}\cdot\underline{x}=0$ dar. S_u heißt Spiegelungstensor.

Die Koordinatendarstellung dieser Spiegelung lautet:

$$S_{\underline{u}} = E - 2 \cdot \underline{u} \cdot \underline{u}^T = \begin{pmatrix} 1-2u_1^2 & u_1u_2 & \cdots & u_1u_n \\ u_2u_1 & 1-2u_2^2 & \cdots & u_2u_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_nu_1 & u_nu_2 & \cdots & 1-2u_n^2 \end{pmatrix}$$

Es folgt daraus:
1. S_u ist eine symmetrische Matrix.
2. S_u ist orthogonal.
3. S_u ist zu sich selbst invers: $S_{\underline{u}}^2 = E$

10.1.7 Drehtensor (Drehung im Raum $\mathbb{R}^3$ um eine feste Drehachse):

Es sei der Vektor $\underline{a} \neq \underline{0} \in V^3$, (Voraussetzung: $\|\underline{a}\|=1$).

Die Drehung $D_a(\varphi)$ aller Vektoren um den Winkel φ gegen den Uhrzeigersinn um eine Drehachse der Richtung $\underline{a}$ ist ein Tensor. Es gilt:

$$D_{\underline{a}}(j) = \cos j \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + (1-\cos j) \cdot \begin{pmatrix} a_1^2 & a_1a_2 & a_1a_3 \\ a_2a_1 & a_2^2 & a_2a_3 \\ a_3a_1 & a_3a_2 & a_3^2 \end{pmatrix} + \sin j \cdot \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Determinante $\det(D)$ eines Drehtensors beträgt immer +1.

10.1.8 Eulersche Drehmatrizen:

Die drei Spezialfälle der allgemeinen Dretensoren ergeben sich durch Einsetzen der drei Basisvektoren $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$ und $\underline{e}_3$ für $\underline{a}$. Es enstehen dabei Drehtensoren um die drei Achsen des Koordinatensystems.

Drehung um die $\underline{e}_3$-Achse (z-Achse): $$E_3(j) = D_{\underline{e}_3}(j) = \begin{pmatrix} \cos j & -\sin j & 0 \\ \sin j & \cos j & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Drehung um die $\underline{e}_2$-Achse (y-Achse): $$E_2(j) = D_{\underline{e}_2}(j) = \begin{pmatrix} \cos j & 0 & \sin j \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin j & 0 & \cos j \end{pmatrix}$$

Drehung um die $\underline{e}_1$-Achse (x-Achse): $$E_1(j) = D_{\underline{e}_1}(j) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos j & -\sin j \\ 0 & \sin j & \cos j \end{pmatrix}$$

10.1.9 Verkettung der Eulerschen Drehmatrizen:

Ist D eine Drehmatrix, dann gibt es drei Winkel α, β, γ, so daß Folgendes gilt:

$$D = E_1(a) \cdot E_2(b) \cdot E_3(g)$$

Allgemein ausgedrückt lautet diese Drehmatrix so:

$$D = E_1(a)\cdot E_2(b)\cdot E_3(g)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos a & -\sin a \\ 0 & \sin a & \cos a \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \cos b & 0 & \sin b \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin b & 0 & \cos b \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \cos g & -\sin g & 0 \\ \sin g & \cos g & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos g\cdot\cos a - \sin g\cdot\sin a\cdot\cos b & -\sin g\cdot\cos a - \cos g\cdot\sin a\cdot\cos b & \sin a\cdot\sin b \\ \cos g\cdot\sin a - \sin g\cdot\cos a\cdot\cos b & -\sin g\cdot\sin a - \cos g\cdot\cos a\cdot\cos b & -\cos a\cdot\sin b \\ \sin g\cdot\sin b & \cos g\cdot\sin b & \cos b \end{pmatrix}$$

10.1.10 Beispiele für Tensoren in Physik und Technik:

Dielektrischer Tensor, Polarisationstensor, Trägheitstensor, Deformationstensor, Spannungstensor,...

10.1.11 Koordinatendarstellung der Translation von Vektoren:

Es sei der Vektor $\underline{a}\in V^3$ ein fester Vektor. Dann ist die Abbildung $\tilde{T}$: $\underline{x}\mapsto\underline{x}-\underline{a}$, $\underline{x}\in V^3$ eine Translation (<u>kein Tensor</u>). Ist nun T die Koordinatendarstellung eines Tensors in der Basis ($\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$) und T' die Koordinatendarstellung desselben Tensors in der Basis ($\underline{e}_1'$, $\underline{e}_2'$, $\underline{e}_3'$), so gilt $T = T'$. Dies liegt an der Invarianz der Basisvektoren bei Translation.

10.1.12 Orthogonale Transformationen:

Es sei P eine orthogonale Transformation des $\mathbb{R}^3$. Aus dem Basisvektor $\underline{e}_j$ wird damit der Basisvektor $\underline{e}_j'$:

$$P:\ (\underline{e}_1,\underline{e}_2,\underline{e}_3)\mapsto(\underline{e}_1',\underline{e}_2',\underline{e}_3')$$

$$\underline{e}_j' = P\cdot\underline{e}_j$$

Das entstehende Koordinatensystem ist wieder orthogonal. Es gilt des weiteren:

$$P^T P = E \quad\Rightarrow\quad P^T\underline{e}_j' = P^T P\underline{e}_j = \underline{e}_j$$

Wenn $\det(P) = +1$ (d.h. Drehung), dann ist ($\underline{e}_1'$, $\underline{e}_2'$, $\underline{e}_3'$) wieder ein Rechtssystem.

10.1.12.1 Transformationsverhalten eines Vektors:

Der Vektor $\underline{a}$ bezüglich der ursprünglichen Basis ($\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$) wird nach der Transformation P zu

$$\underline{a}' = P\cdot\underline{a}$$

$$\Leftrightarrow a_j' = \sum_{i=1}^{3} a_i p_{ij}$$

Hierbei ist p_{ij} eine Komponente der Transformationmatrix P.

10.1.12.2 Transformationsverhalten von Tensoren:

Ist T ein Tensor mit den Matrixkomponenten t_{ji} und P eine orthogonale Transformation des $\mathbb{R}^3$ (siehe oben), ergibt sich Folgendes:

$$\text{Matrixkomponente von } T':\quad t_{ji}' = T(\underline{e}_i')\cdot\underline{e}_j' = \sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3} p_{lj}\,p_{ki}\,t_{lk}$$

$$\text{Matrix } T':\quad T' = P^{-1}\cdot T\cdot P = P^T\cdot T\cdot P$$

Erzeugt der Basiswechsel nicht-orthogonale Basisvektoren, so werden die Transformationsformeln „etwas“ komplizierter. ;-)

10.2 Das Normalformenproblem von Bilinearformen

10.2.1 Hyperfläche 2. Grades oder Quadrik:

Man definiert folgende Funktion $Q(\underline{x}): \quad \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$:

$$Q(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_i x_k + 2 \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k x_k + c \qquad a_{ik}, b_k, c \in \mathbb{R}$$
$$= \underline{x}^T A \underline{x} + 2\underline{b}^T \underline{x} + c$$

Die hier auftretende <u>Matrix *A*</u> muß <u>symmetrisch</u> sein.

Die Menge der Punkte *P* mit $\vec{OP} = \underline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$, welche die Gleichung $Q(\underline{x}) = 0$ erfüllt, heißt ***Hyperfläche 2. Grades*** oder eine ***Quadrik*** im $\mathbb{R}^n$.

<u>Beispiel</u>:

$$36x_1^2 - 24x_1 x_2 + 29x_2^2 + 96x_1 - 22x_2 - 115 = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad A = \begin{pmatrix} 36 & -12 \\ -12 & 29 \end{pmatrix}, \quad \underline{b} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 96 \\ -22 \end{pmatrix}, \quad c = -115$$

10.2.2 Mittelpunkt einer Quadrik:

Betrachtet man die Translation $\underline{x} = \underline{x}' + \underline{p}$ der Quadrik um $\underline{p}$, so gilt:

$$Q(\underline{x}' + \underline{p}) = \underline{x}'^T A \underline{x}' + 2(\underline{p}^T A + \underline{b}^T)\underline{x}' + Q(\underline{p})$$

Ist nun die Gleichung $A\underline{p} = -\underline{b}$ lösbar, so besitzt $Q(\underline{x})$ ein Zentrum, für das gilt:

$$Z = \{\underline{p} \mid A\underline{p} = -\underline{b}\} \underset{\substack{\text{(falls ein-} \\ \text{deutig lösbar)}}}{=} \{\underline{m}\}$$

$\underline{m}$ heißt ***Mittelpunkt der Quadrik***.

10.2.3 Normalform einer Quadrik:

Mit Hilfe geeigneter Koordinatentransformationen läßt sich jede Quadrik auf eine der beiden folgenden ***Normalformen*** bringen:

1. Fall: $\quad Z \neq \emptyset: \quad l_1 y_1^2 + l_2 y_2^2 + \ldots + l_r y_r^2 + g = 0$

mit $r = \text{Rang}(A)$,
$l_1, l_2, l_3, \ldots, l_r$ Eigenwerte von *A*, die ungleich Null sind.

2. Fall: $\quad Z = \emptyset: \quad l_1 y_1^2 + l_2 y_2^2 + \ldots + l_r y_r^2 + 2g \cdot y_n = 0$

mit $r = \text{Rang}(A) < n$,
$\gamma > 0$,
$l_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ für i = 1, ..., *r*

10.2.4 Allgemeine Vorgehensweise bei der Klassifikation von Quadriken:

10.2.4.1 Umformungen zu $Q(\underline{x})$:

Gegeben:

$$Q(\underline{x}) = \underline{x}^T A \underline{x} + 2\underline{b}^T \underline{x} + c$$

Umformungen:

$$Q(\underline{x} + \underline{m}) = \underline{x}^T A \underline{x} + 2(A\underline{m} + \underline{x})^T \underline{x} + Q(\underline{m})$$

$$Q(\underline{m}) = \underline{b}^T \underline{m} + c$$

$$P^T A P = \begin{pmatrix} l_{A1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & l_{A2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & l_{An} \end{pmatrix}$$

$$Q(P\underline{x}) = \underline{x}^T P^T A P \underline{x} + \underline{b}^T P \underline{x} + c$$

$$Q(P\underline{x} + \underline{m}) = \underline{x}^T P^T A P \underline{x} + 2(A\underline{m} + \underline{b})^T P \underline{x} + Q(\underline{m})$$

10.2.4.2 Vorgehensweise:

1. Fall: $A\underline{m} = -\underline{b}$ ist lösbar. Es liegt eine **Zentrumsquadrik** vor.

1.) Bestimmen von $\underline{m}$ und $Q(\underline{m})$.
2.) Bestimmen der Eigenwerte und Eigenvektoren von A. (u.U. Bestimmung des Typs)
3.) Bestimmen der Drehmatrix P aus den Eigenvektoren von A.
4.) Setze die neuen Koordinaten: $\underline{u} = P^T(\underline{x} - \underline{m}) \Leftrightarrow \underline{x} = P\underline{u} + \underline{m}$

Daraus folgt $Q(\underline{x}) = \underline{u}^T \begin{pmatrix} l_{A1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & l_{An} \end{pmatrix} \underline{u} + Q(\underline{m})$

5.) Normalform (im $\mathbb{R}^3$): $l_1 \cdot u_1^2 + l_2 \cdot u_2^2 + l_3 \cdot u_3^2 + g = 0$

Typ: siehe Tabelle 1

Lage: Koordinatentransformation: $\underline{u} = P^T(\underline{x} - \underline{m})$

λ_1	λ_2	λ_3	γ	Typ
+	+	+	–	Ellipsoid
+	+	–	+	zweischaliges Hyperboloid
+	+	–	–	einschaliges Hyperboloid
+	+	–	0	Kegel mit Spitze in $\underline{m}$
+	+	0	–	elliptischer Zylinder
+	–	0	±	hyperbolischer Zylinder
+	+	0	0	1 Gerade
+	–	0	0	2 Ebenen mit Schnitt
+	0	0	–	2 parallele Ebenen
+	0	0	0	Doppelebene

Tabelle 1: Klassifikation von Zentrumsquadriken

2. Fall: $A\underline{m} = -\underline{b}$ ist nicht lösbar. Es liegt **keine Zentrumsquadrik** vor.

Es folgt daraus, daß 0 ein Eigenwert von A ist, denn $\det(A) = \det(A - 0 \cdot E) = 0$

1.) Bestimmen der Eigenwerte von A.

2.) Bestimmen der Eigenvektoren $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_r$ zu den $\lambda_i \neq 0$

3.) Bestimmen der Eigenvektoren $\underline{v}_i$ zu den $\lambda_{r+1}, \ldots, \lambda_{n-1} = 0$ mit $\underline{n}_i \perp \underline{b}$

4.) Bestimmen von $\underline{v}_n$

5.) Quadratische Ergänzung

6.) Normalform (im $\mathbb{R}^3$): $l_1 u_1^2 + l_2 u_2^2 + 2gu_3 = 0$
Typ: siehe Tabelle 2

λ_1	λ_2	λ_3	γ	Typ
+	+	0	±	elliptisches Paraboloid
+	–	0	±	hyperbolisches Paraboloid
+	0	0	±	parabolischer Zylinder

Tabelle 2: Klassifikation von Quadriken mit leerem Zentrum

10.2.4.3 Darstellung:

Die folgenden Abbildungen zeigen nur die ersten sechs Typen von Zentrumsquadriken aus der Tabelle 1 und die Typen von Quadriken mit leerem Zentrum aus der Tabelle 2.

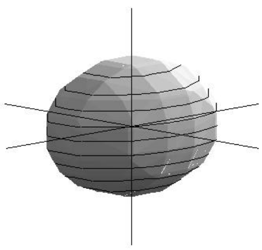


Abbildung 9: Ellipsoid

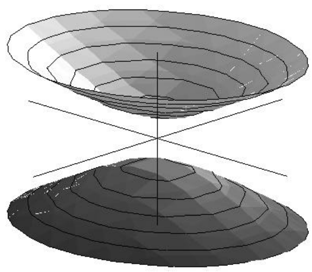


Abbildung 10: Zweischaliges Hyperboloid

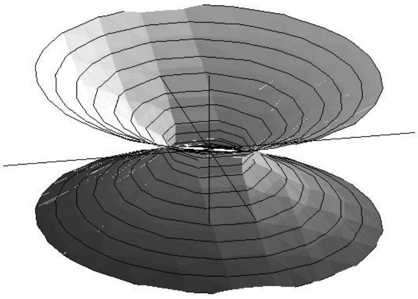


Abbildung 11: Einschaliges Hyperboloid

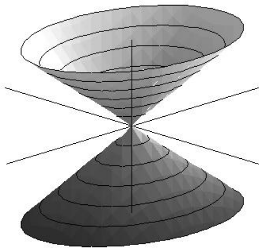


Abbildung 12: Kegel mit Spitze in <u>m</u>

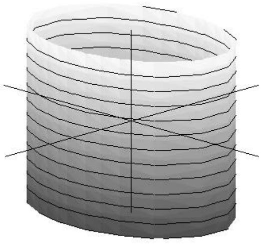


Abbildung 13: Elliptischer Zylinder

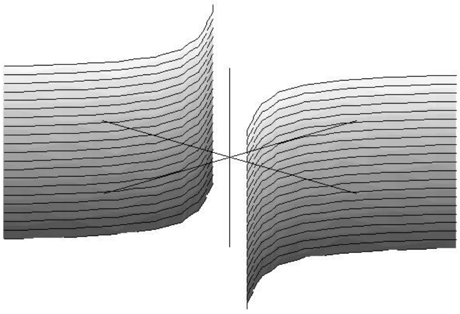


Abbildung 14: Hyperbolischer Zylinder

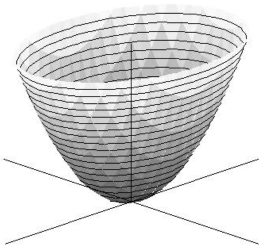


Abbildung 15: Elliptisches Paraboloid

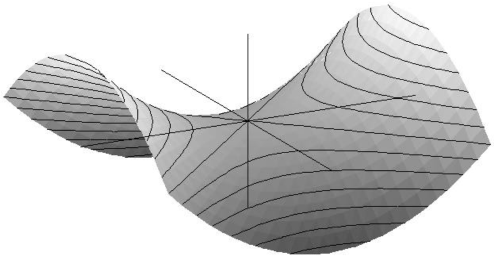


Abbildung 16: Hyperbolisches Paraboloid

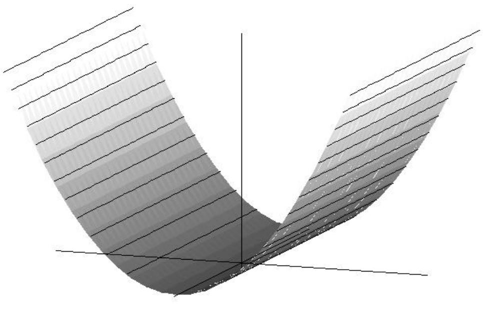


Abbildung 17: Parabolischer Zylinder

<u>Beispiel</u>: Gesucht wird die Normalform der folgenden Quadrik.

$$x^2 + 2xy + y^2 - x + y + 4 = 0$$
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{b} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c = 4$$

Die Eigenwerte, die normierten Eigenvektoren und der Rang von A ergeben sich zu:

$$l_1 = 2, \quad l_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad r = 1$$
$$\Rightarrow \text{Eigenvektoren:}$$
$$\underline{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Normierte Matrix P:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \qquad \det(P) = 1$$

Die Gleichung $\underline{x}^T A\underline{x} + 2\underline{b}^T \underline{x} + 4 = 0$ wird mit $\underline{x} = P\underline{u}$ zu

$$2u_1^2 + 2\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + 4 = 0$$
$$\Leftrightarrow 2u_1^2 + \sqrt{2}\cdot u_2 + 4 = 0$$

und nach Resubstitution $y_1 = u_1, \quad y_2 = u_2 + \sqrt{8}$ ergibt sich die gesuchte Normalform der Quadrik zu $2\cdot y_1^2 + \sqrt{2}\cdot y_2 = 0$, was eine Parabel ist.

11. Krummlinige Koordinaten, Transformationsformel

11.1 Krummlinige Koordinaten, Jacobideterminante

11.1.1 Krummlinige Koordinaten:

Gegeben seien drei Eckpunkte eines zu den Koordinatenachsen parallelen Rechtecks im $\mathbb{R}^2$ durch deren Ortvektoren:

$$\underline{x}_0, \quad \underline{x}_1 = \underline{x}_0 + \Delta x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{x}_2 = \underline{x}_0 + \Delta x_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Verzerrung des Rechtecks mit dem Flächeninhalt $F_Q = |\Delta x_1 \cdot \Delta x_2|$ in ein Parallelogramm, dargestellt durch die neuen Eckpunkte

$$\underline{f}(\underline{x}_0), \quad \underline{f}(\underline{x}_1), \quad \underline{f}(\underline{x}_2),$$

mit der Funktion $\underline{f}$ ergibt für den Grenzwert der Verhältnisse zwischen dem ursprünglichen Flächeninhalt F_Q und dem neuen Flächeninhalt F_P Folgendes:

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{F_P}{F_Q} = \left|\det\left(D\underline{f}(\underline{x}_0)\right)\right|$$

Diese ***Flächenverzerrung im zweidimensionalen Raum*** läßt sich analog übertragen auf Gebilde im $\mathbb{R}^3$. Dort stellt sie die ***Volumenverzerrung im dreidimensionalen Raum*** dar.

11.1.1.1 Wird bei solchen Verzerrungen kein begrenztes Objekt betrachtet, sondern eine offene Menge U in eine offene Menge V verzerrt, so spricht man bei $\underline{f}$ von der ***Koordinatentransformation von U auf V***.

11.1.1.2 Zur Umkehrung einer solchen Koordinatentransformation läßt sich unter der Voraussetzung, daß $\underline{x} \in U$ und $\underline{y} = \underline{f}(\underline{x})$, Folgendes sagen:

$$\det\left(D\underline{f}^{-1}(\underline{y})\right) = \frac{1}{\det\left(D\underline{f}(\underline{x})\right)}$$

11.1.2 Jacobideterminante:

In diesem Zusammenhang wird der Begriff der *Funktionaldeterminante* oder *Jacobideterminante* eingeführt.

$$J_{\underline{f}}(\underline{x}) = \det\left(D\underline{f}(\underline{x})\right)$$

11.2 Transformationsformeln

11.2.1 Polarkoordinaten:

Koordinatentransformation:

$$\underline{f} : \begin{pmatrix} r \\ j \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r\cos j \\ r\sin j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(r,j) \\ f_2(r,j) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\underline{f}^{-1} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \sqrt{x^2+y^2} \\ \arctan\frac{y}{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1^{-1}(x,y) \\ f_2^{-1}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ j \end{pmatrix}$$

Jacobideterminante von $\underline{f}$:

$$\det\left(D\underline{f}(r,j)\right) = r\cos^2 j + r\sin^2 j = r$$

11.2.2 Zylinderkoordinaten:

Koordinatentransformation:

$$\underline{f}: \begin{pmatrix} r \\ j \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r\cos j \\ r\sin j \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(r,j,z) \\ f_2(r,j,z) \\ f_3(r,j,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\underline{f}^{-1}: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \arctan\frac{y}{x} \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x,y,z) \\ f_2(x,y,z) \\ f_3(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ j \\ z \end{pmatrix}$$

Jacobideterminante von $\underline{f}$:

$$\det\left(D\underline{f}(r,j,z)\right) = 1\cdot\left(r\cos^2 j + r\sin^2 j\right) = r$$

11.2.3 Kugelkoordinaten:

Koordinatentransformation:

$$\underline{f}: \begin{pmatrix} r \\ j \\ q \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r\cos j \sin q \\ r\sin j \sin q \\ r\cos q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(r,j,q) \\ f_2(r,j,q) \\ f_3(r,j,q) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\underline{f}^{-1}: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \arctan\frac{y}{x} \\ \arctan\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x,y,z) \\ f_2(x,y,z) \\ f_3(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ j \\ q \end{pmatrix}$$

Hierbei liegt der Winkel φ zwischen der x-Achse und dem in die x-y-Ebene projizierten Ortsvektor des Punktes. Der Winkel θ liegt zwischen der z-Achse und dem Ortsvektor des Punktes.

Jacobideterminante von $\underline{f}$:

$$\det\left(D\underline{f}(r,j,q)\right) = r^2\sin q \cdot\left(\cos^2 q + \sin^2 q\right) = r^2 \sin q$$

11.2.4 Laplace-Operator D:

Für eine zweifach differenzierbare Funktion $g: (x,y,z) \mapsto g(x,y,z)$ von ℝ³ auf ℝ läßt sich der sog. Laplace-Operator Δ definieren: $\Delta g = g_{xx} + g_{yy} + g_{zz}$

11.2.5 Transformationsformel:

Bei Koordinatentransformationen $\Phi: \overline{U} \mapsto \overline{V}$ zwischen offenen, nichtleeren Mengen U und V, mit meßbarem $\overline{U}$ und stetigem $g: \overline{V} \mapsto \mathbb{R}$ gilt die Transformationsformel.

$$\int\limits_V \cdots \int g(\underline{x})\cdot dx_1 \cdots dx_n = \int\limits_U \cdots \int g(\Phi(\underline{u}))\cdot \left|\det(D\Phi(\underline{u}))\right| \cdot du_1 \cdots du_n$$

Beispiel: Gesucht wird das neue Volumen Vol(B) eines Parallelepipeds B, das durch eine affin-lineare Abbildung $\underline{u} = A\underline{x} + \underline{b}$ eines Einheitswürfels W entstanden ist.

Aus $\Phi : \underline{u} \mapsto \underline{x} = A^{-1}\underline{u} - A^{-1}\underline{b}$, $\det\left(D\Phi\left(\underline{u}\right)\right) = \dfrac{1}{\det\left(A\right)}$ und der Transformationsformel

$$\underbrace{\int\limits_W \cdots \int 1 \cdot dx_1 \cdots dx_n}_{=\mathrm{Vol}(W)=1} = \int\limits_B \cdots \int 1 \cdot \left|\det\left(D\Phi\left(\underline{u}\right)\right)\right| \cdot du_1 \cdots du_n = \frac{1}{\det\left(A\right)} \overbrace{\int\limits_B \cdots \int \cdot \, du_1 \cdots du_n}^{=\mathrm{Vol}(B)}$$

folgt dann:

$$\mathrm{Vol}\left(B\right) = \left|\det\left(A\right)\right|$$

12. Gewöhnliche Differentialgleichungen

12.1 Bezeichnungen, Richtungsfeld

12.1.1 Gewöhnliche Differentialgleichung:

F sei eine Funktion der Form $F : \mathbb{R}^{n+2} \mapsto \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$. Dann heißt

$$F\left(x, y(x), \ldots, y^{(n)}(x)\right) = 0$$

gewöhnliche Differentialgleichung.

12.1.2 Richtungsfeld, Isokline:

Wenn durch den Punkt M die Lösungskurve $y=\phi(x)$ der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ geht, so kann die Richtung der Tangente in diesem Punkt unmittelbar ermittelt werden. Damit definiert die Differentialgleichung in jedem Punkt eine Richtung der Tangente an eine Lösungskurve. Die Gesamtheit dieser Richtungen bildet das **Richtungsfeld**. Verbindungslinien von Punkten gleicher Richtung der Tangente heißen **Isoklinen**.

12.1.3 Lösungen:

Die Lösungen von gewöhnlichen Differentialgleichung mit einer Anfangsbedingung setzen sich in der Regel aus der Summe von mindestens zwei Einzellösungen zusammen. Die Lösung einer allgemeinen Differentialgleichung ist dann die Summe der ***homogenen Löung*** und der ***inhomogenen oder partikulären Lösung***.

Erhält man aus einer Differentialgleichung eine Lösungsmenge, so ist jede Linearkombination von Einzellösungen wieder eine Lösung. Dies ist mit dem Faktorsatz und der Summenregel aus der Differentialrechnung erklärbar (s. Kapitel 6.1).

12.1.4 Anfangswertproblem (AWP):

Als Anfangswertproblem bezeichnet man eine Differentialgleichung zusammen mit ihren zugehörigen Anfangsbedingungen.

12.1.5 Satz von Picard-Lindelöf:

Es sei ein Anfangswertproblem $y' = f(x, y)$, $y_0 = y(x_0)$ gegeben. Ferner sei ein Rechteck

$$R = \left\{(x, y) \middle| |x - x_0| \le a; |y - y_0| \le b\right\}$$

gegeben, auf dem die Funktion $f(x,y)$ stetig und partiell nach y differenzierbar sei.

Eine Zahl ε sei durch $e = \min\left\{a, \frac{b}{\max\{f(x, y)\}}\right\}$ bestimmt.

Es gibt dann im Abstand ε von x_0 genau eine Lösung zum gegebenen Anfangswertproblem.

12.2 Differentialgleichungen erster Ordnung

12.2.1 Form, Anfangsbedingung:

Differentialgleichungen erster Ordnung besitzen die **Form** $y'(x) = A(x) + B(x) \cdot y(x)$.

Es seien hier $A(x)$ und $B(x)$ im Intervall $[a,b]$ stetig. Des weiteren sollen ein x_0 aus dem gegebenen Intervall und ein (reelles) y_0 existieren, die die **Anfangsbedingung** $y(x_0)=y_0$ bilden.

12.2.2 Homogene Differentialgleichung:

Ist $A(x)$=0, also $y'(x) = B(x) \cdot y(x)$, so hat diese als *homogen* bezeichnete Differentialgleichung genau eine Lösung der allgemeinen Form

$$y_1(x) = y_0 \cdot e^{\int_{x_0}^{x} B(t)dt} .$$

Diese Lösungsfunktion ist immer positiv.

12.2.3 Inhomogene Differentialgleichung:

Differentialgleichungen erster Ordnung in der allgemeinen Form und allgemeinen Anfangsbedingungen (s.o., 12.2.1) haben die partikuläre Lösung in der Form

$$y_2(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{A(t)}{y_1^*(t)} dt \cdot e^{\int_{x_0}^{x} B(t)dt} \qquad \text{mit} \quad y_1^*(t) = \frac{y_1(t)}{y_0} .$$

12.2.4 Allgemeine Lösung:

Die allgemeine Lösung lautet: $y(x) = y_1 + y_2 = \left[y_0 + \int_{x_0}^{x} \frac{A(t)}{y_1^*(t)} dt \right] \cdot e^{\int_{x_0}^{x} B(t)dt}$

12.2.5 Trennung der Variablen:

Ein wichtiges Verfahren zur Lösung von Differentialgleichungen erster Ordnung ist das der Trennung der Variablen. Dabei wird die Differentialgleichung auf eine Form gebracht, bei der die Variablen x und y nur noch in voneinander getrennten Termen auftreten. Die entstehende Gleichung kann dann sofort integriert werden.

$$M(x) \cdot N(y) \cdot dx + P(x) \cdot Q(y) \cdot dy = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{M(x)}{P(x)} \cdot dx + \frac{Q(y)}{N(y)} \cdot dy = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \int \frac{M(x)}{P(x)} \cdot dx + \int \frac{Q(y)}{N(y)} \cdot dy = C$$

<u>Beispiel</u>:

$$x \cdot dy + y \cdot dx = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \int \frac{1}{y} \cdot dy + \int \frac{1}{x} \cdot dx = C = \ln c$$

$$\Leftrightarrow \quad x \cdot y = c$$

12.3 Bernoulli'sche Differentialgleichungen

12.3.1 Form:
Bernoulli'sche Differentialgleichungen haben die Form

$$y'(x) = A(x) \cdot y(x) + B(x) \cdot [y(x)]^a \qquad a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad y(x) \geq 0 .$$

12.3.2 Lösungsansatz:
Ziel dieses Ansatzes ist die ***Rückführung*** der Differentialgleichung ***auf eine Differentialgleichung erster Ordnung***. Es wird zunächst durch durch $[y(x)]^a$ geteilt.

$$y'(x) \cdot [y(x)]^{-a} = A(x) \cdot [y(x)]^{1-a} + B(x)$$

Danach wird die neue Variable $z(x) = [y(x)]^{1-a}$ eingeführt.

Deren Ableitung lautet $z'(x) = (1-a) \cdot [y(x)]^{-a} \cdot y'(x)$. Es ergibt sich daraus eine Differentialleichung erster Ordnung für $z(x)$:

$$z'(x) = (1-a) \cdot A(x) \cdot z(x) + (1-a) \cdot B(x)$$

Diese DGL läßt sich mit dem in Kapitel 12.2 beschriebenen Verfahren lösen. Anschließend wird mit $y(x) = [z(x)]^{\frac{1}{1-a}}$ resubstituiert.

<u>Beispiel</u>: Gesucht wird die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichung.

$$y' = \frac{4y}{x} + x\sqrt{y}$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow z = \sqrt{y}$$

$$z' = \frac{2z}{x} + \frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow z = x^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\ln x + C\right) \quad \Rightarrow y = x^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\ln x + C\right)^2$$

12.4 Differentialgleichungen *n*-ter Ordnung und Systeme erster Ordnung

12.4.1 Form von Systemen von Differentialgleichungen erster Ordnung:

Komponentenschreibweise:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1(x), \ldots, y_n(x)) \\ y_2' = f_2(x, y_1(x), \ldots, y_n(x)) \\ \quad \vdots \\ y_n' = f_n(x, y_1(x), \ldots, y_n(x)) \end{cases}$$

Vektorschreibweise: $\underline{y}'(x) = \underline{f}(x, \underline{y})$

Anfangswertproblem: $\underline{y}'(x) = \underline{f}(x, \underline{y}), \qquad \underline{y}(x_0) = \underline{y}_0$

12.4.2 Form von Differentialgleichungen *n*-ter Ordnung:
Differentialgleichungen *n*-ter Ordnung werden geschrieben in der Form

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right).$$

12.4.3 Lösungsansatz:

Es wird eine Substitution durchgeführt.

$$
\begin{aligned}
&y_1 \gtrsim y\\
&y_2 \gtrsim y'\\
&\vdots\\
&y_{n-1} \gtrsim y^{(n-2)}\\
y_n \gtrsim y^{(n-1)} \qquad \Rightarrow \quad &y^{(n)} = y_n' = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)
\end{aligned}
$$

Daraus folgen das neue System von Differentialgleichungen und die neuen Anfangsbedingungen.

$$
\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \\ f(x, y_1, \ldots, y_n) \end{pmatrix}
$$

$$
\underline{y}_0 = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_0' \\ \vdots \\ y_0^{(n-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{0,1} \\ y_{0,2} \\ \vdots \\ y_{0,n} \end{pmatrix}
$$

12.4.4 Allgemeine Lösung:

Die allgemeine Lösung einer Differentialgleichung der Form $y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)$ enthält *n* unabhängige willkürliche Konstanten.

$$
y = y(x, C_1, \ldots, C_n)
$$

Das gleiche gilt für die allgemeine Lösung von Systemen von *n* Differentialgleichungen.

$$
\begin{cases}
y_1 = F_1(x, C_1, \ldots, C_n)\\
y_2 = F_2(x, C_1, \ldots, C_n)\\
\qquad\vdots\\
y_n = F_n(x, C_1, \ldots, C_n)
\end{cases}
$$

Das Lösungsprinzip beruht darauf, daß versucht wird, die Ordnung mittels Substitution der Variablen zu verringern, um einfachere Differentialgleichungen zu erhalten. Das Auffinden passender Substitutionen wird erleichtert durch die ***Unterscheidung verschiedener Fälle:***

1. Die unabhängige Variable *x* ist nicht explizit in der Differentialgleichung enthalten.

Die Substitution lautet dann $\dfrac{dy}{dx} = p \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{d^2y}{dx^2} = p \cdot \dfrac{dp}{dy}$.

Damit wird die Ordnung von *n* auf (*n*–1) verringert.

2. Die abhängige Variable y ist nicht explizit in der Differentialgleichung enthalten.
Die Substitution lautet $y^{(k)} = p$ für die k-te als niedrigste in der Differentialgleichung vorkommende Ableitung von y. Die Ordnung der DGL wird damit um eins verringert.

3. Die Differentialgleichung $f\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$ ist eine homogene Funktion[1] in $y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$.
Die Substitution lautet $z = \frac{y'}{y}$, d.h. $y = e^{\int z \cdot dx}$.
Die Ordnung wird um eins verringert.

4. Die Differentialgleichung ist eine Funktion nur von x.
Die allgemeine Lösung lautet dann folgendermaßen:

$$y = C_{1+} + C_2 x + C_3 x^2 + \ldots + C_n x^{n-1} + y\,(x)$$

$$\text{mit} \quad y\,(x) = \iint \cdots \int f\,(x)(dx)^n = \frac{1}{(n-1)!} \cdot \int_{x_0}^{x} f\,(t)(x-t)^{n-1}\,dt$$

$$\text{und} \qquad C_k = \frac{1}{(k-1)!} \cdot y(x_0)^{k-1}$$

Hilfreich kann bei der Lösung solcher Differentialgleichungen auch die folgende Beziehung sein:

$$\frac{1}{2} \cdot \left(y'^2\right)' = y'' \cdot y'$$

12.5 Lineare Differentialgleichungs-Systeme erster Ordnung

Mit Ausnahme der Unterpunkte 12.5.1 bis 12.5.3 sollen nur DGL-Systeme mit konstanten Matrizen behandelt werden.

12.5.1 Lineares Differentialgleichungs-System erster Ordnung:

Es hat die folgende Form:

$$\underline{y}' = A(x) \cdot y + \underline{f}$$

$$\text{mit} \quad \underline{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}, \quad \underline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}$$

Ist $f \equiv \underline{0}$, so heißt das System *homogen*, sonst *inhomogen*.
Ist ***A* *eine konstante Matrix***, so spricht man von einem ***System mit konstanten Koeffizienten***.

12.5.1.1 Lösbarkeit:

Sind die Elemente $a_{ik}(x)$ der Matrix und die Funktion f stetig in einem gegebenen Intervall, so hat das DGL-System genau eine Lösung in diesem Intervall.

[1] Eine Funktion heißt ***homogen*** mit dem Homogenitätsgrad m, wenn sie die folgende Bedingung für beliebige λ erfüllt: $f\left(lx_1, lx_2, \ldots, lx_n\right) = l^m \cdot f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$

12.5.1.2 Linearkombinationen von Lösungen eines homogenen linearen DGL-Systems:

Sind $\underline{y}_1,\ldots,\underline{y}_k$ Lösungen eines homogenen linearen DGL-Systems, dann ist auch jede beliebige Linearkombination $\underline{y} = c_1 \cdot \underline{y}_1 + \ldots + c_k \cdot \underline{y}_k$ mit $c_1,\ldots,c_k \in \mathbb{R}$ von Lösungen wieder eine neue Lösung.

12.5.2 Lineare Abhängigkeit, lineare Unabhängigkeit von Lösungen:

Die Funktionen $\underline{y}_1,\ldots,\underline{y}_k$ nennt man auf einem Intervall ***linear unabhängig***, falls für alle x aus diesem Intervall aus $a_1 \cdot \underline{y}_1(x) + \ldots + a_k \cdot \underline{y}_k(x) = \underline{0}$ $\quad a_1 = \ldots = a_k = 0$ folgt.

Andernfalls heißen $\underline{y}_1,\ldots,\underline{y}_k$ ***linear abhängig***.

12.5.3 Anzahl linear unabhängiger Lösungen:

Ist die Matrix $A(x) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ stetig in einem Intervall für x, dann hat das System $\underline{y}' = A(x) \cdot \underline{y}$ genau ***n linear unabhängige Lösungen*** in diesem Intervall.

12.5.4 Fundamentalsystem (FS), Fundamentalmatrix, Übertragungsmatrix:

12.5.4.1 Fundamentalsystem:

Ein System $\underline{y}_1,\ldots,\underline{y}_n$ linear unabhängiger Lösungen von $\underline{y}' = A \cdot \underline{y}$ heißt ***Fundamentalsystem***.

12.5.4.2 Fundamentalmatrix:

Als Fundamentalmatrix bezeichnet man die Matrix $Y(x) = \left(\underline{y}_1, \ldots, \underline{y}_n\right)$.

Die reell gewählte Fundamentalmatrix ermöglicht später die direkte Berechnung eines homogenen Lösungsanteils: $\underline{y}_H(x) = Y(x) \cdot \underline{c}$ $\quad$ mit $\underline{c} \in \mathbb{C}^n$

Eigenschaften der Fundamentalmatrix:

1. $Y'(x) = A \cdot Y(x)$
2. $\underline{c} = Y(0)^{-1} \cdot \underline{x}_0$

12.5.4.3 Übertragungsmatrix oder normierte Matrix:

Die (stets reelle) Übertragungsmatrix lautet: $\quad \hat{Y}(x) = Y(x) \cdot Y(0)^{-1}$

Homogener Lösungsanteil des DGL-Systems, berechnet mit der Übertragungsmatrix:

$$\underline{y}_H(x) = \hat{Y}(x) \cdot \underline{x}_0 \qquad \text{mit } \underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$$

Eigenschaften der Übertragungsmatrix:

1. $\hat{Y}'(x) = A \cdot \hat{Y}(x)$
2. $\hat{Y}(0) = E$
3. $\hat{Y}(x_1 + x_2) = \hat{Y}(x_1) \cdot \hat{Y}(x_2)$
4. $\hat{Y}(-x) = \hat{Y}(x)^{-1}$

12.5.5 Wronski-Determinante eines homogenen linearen DGL-Systems:

Haben die Lösungen $\underline{y}_1,\ldots,\underline{y}_n$ die Dimension n, so wird

$$W(x) \gtrsim \det \underbrace{\left(\underline{y}_1, \underline{y}_2, \ldots, \underline{y}_n\right)}_{(n\times n)\text{-Matrix}}$$

Wronski-Determinante genannt.

Ist die Wronski-Determinante $W(x) \neq 0$ für alle x, so bilden die Lösungen $\underline{y}_1,\ldots,\underline{y}_n$ ein Fundamental-system. Für lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung wird die Wronski-Determinante etwas anders definiert.

12.5.6 Lösungsverfahren für lineare Differentialgleichungs-Systeme erster Ordnung:

Die allgemeine Lösung setzt sich zusammen aus einem homogenen Lösungsanteil und einem partikulären Lösungsanteil.

$$\underline{y} = \underline{y}_H + \underline{y}_P$$

12.5.6.1 <u>Bestimmung des homogenen Lösungsanteils</u>:

1. Schritt: Die homogenen linearen DGL-Systeme $\underline{y}' = A \cdot \underline{y}$ werden mit Hilfe der Eigenvektoren und der Eigenwerte der Matrix *A* gelöst. Aus der ***Charakteristischen Gleichung***

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

erhält man ein vollständiges System von (komplexen) Wurzeln λ_1, λ_2, ..., λ_n (Eigenwerte von *A*).

2. Schritt: Danach sind zwei Fälle zu unterscheiden.

<u>1. Fall</u>: **Verschiedene Wurzeln** λ_i

Mit der Gleichung

$$(A - \lambda_i E) \cdot \underline{\nu} = \underline{0}$$

erhält man für jede der Wurzeln λ_i je einen Lösungsvektor $\underline{\nu}_i$, der *nicht* normiert werden muß.

Das (komplexe) Fundamentalsystem ergibt sich dann zu Folgendem:

$$\textbf{FS:} \begin{cases} \underline{y}_1 = \underline{\nu}_1 \cdot e^{\lambda_1 x} \\ \underline{y}_2 = \underline{\nu}_2 \cdot e^{\lambda_2 x} \\ \quad \vdots \\ \underline{y}_n = \underline{\nu}_n \cdot e^{\lambda_n x} \end{cases}$$

Tritt in dem vollständigen System der Wurzeln eine komplexe Wurzel auf (z.B. $\lambda_1 = \alpha + i \cdot \beta$), dann kommt in dem System auch die konjugiert-komplexe Wurzel $\lambda_2 = \overline{\lambda}_1 = \alpha - i \cdot \beta$ vor.

Daraus folgt dann, daß auch die zugehörigen Lösungsvektoren konjugiert-komplex sind.

$$\overline{\underline{y}}_1 = \underline{y}_2 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{\underline{\nu}_1 \cdot e^{\lambda_1 x}} = \underline{\nu}_2 \cdot e^{\lambda_2 x}$$

Diese beiden komplexen Lösungen können durch zwei reelle Lösungsvektoren ersetzt werden. Sie lauten folgendermaßen:

$$\tilde{\underline{y}}_1 = \mathrm{Re}(\underline{y}_1) = \frac{\underline{y}_1 + \underline{y}_2}{2}$$

$$\tilde{\underline{y}}_2 = \mathrm{Im}(\underline{y}_1) = \frac{\underline{y}_1 - \underline{y}_2}{2i}$$

Die beiden Vektoren entsprechen dem Real- bzw. dem Imaginärteil von $\underline{y}_1$.

<u>Beispiel</u>: Gesucht wird die allgemeine Lösung des folgenden DGL-Systems.

$$\underline{y}' = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underline{y}$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-l & 1 \\ -2 & -1-l \end{vmatrix} = l^2 + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad l_{1,2} = \pm i$$

$$(A - l_1 E)\cdot \underline{n}_1 = \underline{0} \quad \text{bzw.} \quad (A - l_2 E)\cdot \underline{n}_2 = \underline{0} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{n}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1+i \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{n}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1-i \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{y}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1+i \end{pmatrix} \cdot e^{ix} \quad \text{und} \quad \underline{y}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1-i \end{pmatrix} \cdot e^{-ix}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\tilde{y}}_1 = \operatorname{Re}(\underline{y}_1) = \begin{pmatrix} \cos x \\ -\cos x - \sin x \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{\tilde{y}}_2 = \operatorname{Im}(\underline{y}_1) = \begin{pmatrix} \sin x \\ -\sin x + \cos x \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\cos x - \sin x & -\sin x + \cos x \end{vmatrix} = 1$$

$$\Rightarrow \underline{y}(x) = C_1 \cdot \begin{pmatrix} \cos x \\ -\cos x - \sin x \end{pmatrix} + C_2 \cdot \begin{pmatrix} \sin x \\ -\sin x + \cos x \end{pmatrix}$$

<u>2. Fall</u>: **Mehrfache Wurzeln** λ_i

Die Wurzel λ_i trete r-mal auf. Die Lösungen, die der r-fachen Wurzel λ_i im Fundamentalsystem entsprechen, erhält man mit dem Ansatz

$$\underline{y}_i = \left(\underline{u}_0 + \underline{u}_1 x + \ldots + \underline{u}_{r-1} x^{r-1}\right) \cdot e^{l_i x} \quad .$$

Das auftretende Polynom ist vom Grad r–1. Die Vektoren $\underline{u}_i$ sind unbestimmt. Setzt man nun $\underline{y}_i$ in das DGL-System ein, so entsteht ein lineares Gleichungssystem für die Vektorkoordinaten, von denen r entsprechend der Vielfachheiten der Wurzel λ_i beliebig wählbar sind.

<u>Beispiel</u>: Gesucht wird die allgemeine Lösung des folgenden DGL-Systems.

$$\underline{y}' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underline{y}$$

$$\Rightarrow |A - lE| = -l \cdot (l-1)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad l_1 = 0, \; l_{2,3} = 1$$

Der einfachen Wurzel $\lambda_1 = 0$ entspricht der Lösungsansatz: $\underline{y}_1 = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$.

Einsetzen in das DGL-System ergibt $\underline{y}_1 = \begin{pmatrix} c_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Die Vielfachheit der Wurzel $\lambda_{2,3}$ ist zwei, der zu benutzende Ansatz lautet dann:

$$\underline{y}_{2,3} = \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \cdot x \right) \cdot e^x$$

Einsetzen in das DGL-System und Auflösen des linearen Gleichungssystems führt auf:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = b_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Fundamentallösungen zu $\lambda_{2,3} = 1$ lauten dann:

$$\underline{y}_2(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^x, \qquad \underline{y}_3(x) = \begin{pmatrix} -1+x \\ x \\ 1+x \end{pmatrix} \cdot e^x$$

Sie bilden zusammen mit $\underline{y}_1$ ein Fundamentalsystem. Die allgemeine Lösung lautet:

$$\underline{y}(x) = C_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^x + C_3 \cdot \begin{pmatrix} -1+x \\ x \\ 1+x \end{pmatrix} \cdot e^x$$

Im allgemeinen Fall, d.h. unabhängig von der Vielfachheit der Eigenwerte der Matrix A ist das folgende Lösungsprinzip anwendbar. Es ist dem hier schon beschriebenen Verfahren äquivalent.

Lösungsprinzip unter Verwendung der Übertragungsmatrix:

Nach der Bestimmung der Übertragungsmatrix aus dem Fundamentalsystem gemäß der Formel

$$\hat{Y}(x) = Y(x) \cdot Y(0)^{-1}$$

ergibt sich die homogene, reelle Lösung des vorgegebenen Anfangswertproblems zu Folgendem:

$$\underline{y}_H(x) = \hat{Y}(x) \cdot \underline{x}_0 \qquad \text{mit } \underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$$

Mehr zu den Eigenschaften der Übertragungsmatrix befindet sich unter Punkt 12.5.4.3 .

12.5.6.2 __Bestimmung des partikulären Lösungsanteils__:

1. **Schritt:** Für das Störglied $\underline{f}(x)$ des DGL-Systems $\underline{y}' = A \cdot \underline{y} + \underline{f}(x)$ wird folgender Ansatz gemacht:

$$\underline{f}(x) = e^{bx} \cdot \left[\underline{q}_1(x) \cdot \cos(\Omega \cdot x) - \underline{q}_2(x) \cdot \sin(\Omega \cdot x) \right]$$

Die Zahlen β und Ω müssen reell sein, $\mathbf{m} = \mathbf{b} + \boldsymbol{i}\,\mathbf{W}$ darf kein Eigenwert von A sein.
$\underline{q}_1(x)$ und $\underline{q}_2(x)$ sind reelle Vektorpolynome.
Ist μ ein Eigenwert, so wird im 3. Schritt eine kleine Änderung vorgenommen.

2. Schritt: Man bildet dann die sogenannte *komplexe Störfunktion*:

$$\underline{\tilde{f}}(x) = \underline{q}(x) \cdot e^{mx} \qquad \text{mit} \quad \underline{q}(x) = \underline{q}_1(x) + i \cdot \underline{q}_2(x)$$

3. Schritt: Der nächste Ansatz lautet:

$$\underline{\tilde{y}}_P(x) = \underline{p}(x) \cdot e^{mx} \qquad \text{mit} \quad grad\left(\underline{p}\right) = grad\left(\underline{q}\right)$$

Falls μ ein Eigenwert ist, so wird dieser Ansatz gemacht:

$$\underline{\tilde{y}}_P(x) = \underline{p}(x) \cdot e^{mx} \qquad \text{mit} \qquad grad\left(\underline{p}\right) = grad\left(\underline{q}\right) + 2$$

Dies erzeugt zwar später ein Gleichungssystem höherer Ordnung, sonst müßte aber eine Fallunterscheidung für die Funktionswerte von μ im charakteristischen Polynom vorgenommen werden, die etwas mehr Zeit beansprucht.

4. Schritt: Dieser Ansatz für die partikuläre Lösung wird in das DGL-System eingesetzt.

$$A \cdot \underline{\tilde{y}}_P(x) + \underline{\tilde{f}}(x) = \underline{\tilde{y}}_P{}'(x) = m \cdot e^{mx} \cdot \underline{p}(x) + e^{mx} \cdot \underline{p}'(x)$$

$$\Rightarrow \qquad \underline{q}(x) = \underline{p}'(x) - (A - m \cdot E) \cdot \underline{p}(x)$$

Die letzte Gleichung lassen sich die Koeffizienten von $\underline{p}(x)$ ermitteln.
Damit erhält man die partikuläre Lösung $\qquad \underline{\tilde{y}}_P(x) = \underline{p}(x) \cdot e^{mx}$.

<u>Beispiel</u>: Gesucht ist eine partikuläre Lösung des folgenden DGL-Systems.

$$\underline{\dot{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \underline{x}(t) + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{-t}$$

Nach dem ersten Ansatz folgt:

$$\left.\begin{array}{r} b = -1 \\ \Omega = 0 \\ \left.\begin{array}{l} \underline{q}_1(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \underline{q}_2(t) = \underline{0} \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{q}(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} m = -1 \\ \underline{p}(t) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_1 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{x}_P(t) = \underline{p}(t) \cdot e^{mt} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_1 \end{pmatrix} \cdot e^{-t}$$

Im nächsten Schritt wird nun dieser Lösungsansatz in das DGL-System eingesetzt und die unbekannten Koeffizienten ermittelt.

$$\underline{\dot{x}}_P(t) = A \cdot \underline{x}_P(t) + \underline{f}(t)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{-t} = \left[-\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \right] \cdot e^{-t}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -a_1 + 2a_2 = 3 \\ -2a_1 - a_2 = 1 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \underline{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{x}_P(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{-t}$$

Lösungsprinzip unter Verwendung der Übertragungsmatrix:

Auch die partikuläre Lösung läßt sich mit Hilfe der Übertragungsmatrix ermitteln. Sie lautet allgemein:

$$\underline{y}_P(x) = \hat{Y}(x) \cdot \underline{c}(x)$$

$$\text{mit} \qquad \underline{c}(x) = \int^x \hat{Y}(-s) \cdot \underline{f}(s) \cdot ds$$

Zur Berechnung des Vektors $\underline{c}(x)$ sind in der Regel etwas ausgefallenere Integrale zu lösen.

Beispiel: Gesucht wird eine partikuläre Lösung zum folgenden DGL-System, dessen Übertragungsmatrix bereits bestimmt wurde.

$$\underline{\dot{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \underline{x}(t) + \begin{pmatrix} \sin t \\ e^{-t} \end{pmatrix} \qquad \hat{Y}(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

Nach der obenstehenden Formel ergibt sich dann:

$$\underline{c}(t) = \int^t \hat{Y}(s) \cdot \underline{f}(s) \cdot ds = \int^t \begin{pmatrix} \cos(-s) & \sin(-s) \\ -\sin(-s) & \cos(-s) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin s \\ e^{-s} \end{pmatrix} \cdot ds$$

$$= \int^t \begin{pmatrix} \cos s & -\sin s \\ \sin s & \cos s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin s \\ e^{-s} \end{pmatrix} \cdot ds = \int^t \begin{pmatrix} \cos s \cdot \sin s - e^{-s} \cdot \sin s \\ \sin^2 s + e^{-s} \cdot \cos s \end{pmatrix} \cdot ds$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot \sin^2 t + \frac{1}{2} \cdot e^{-t} \cdot (\sin t + \cos t) \\ \frac{1}{2} \cdot (t - \sin t \cdot \cos t) + \frac{1}{2} \cdot e^{-t} \cdot (-\cos t + \sin t) \end{pmatrix}$$

Die partikuläre Lösung lautet:

$$\underline{x}_P(t) = \hat{Y}(t) \cdot \underline{c}(t) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} e^{-t} + t \cdot \sin t \\ -\sin t - e^{-t} + t \cdot \cos t \end{pmatrix}$$

12.5.7 Allgemeine Lösung eines gegebenen Anfangswertproblems:

Faßt man alle bis hierher gewonnenen Erkenntnisse zusammen, so ergibt sich folgende Formel:

$$\underline{y}(x) = Y(x) \cdot \underline{c} + Y(x) \int_{x_0}^{x} Y(e) \cdot \underline{f}(e) \cdot de$$

Ausgedrückt mit der Übertragungmatrix:

$$\underline{y}(x) = \hat{Y}(x - x_0) \cdot \underline{y}_0 + \int_{x_0}^{x} \hat{Y}(x - e) \cdot \underline{f}(e) \cdot de$$

12.6 Lineare Differentialgleichungen *n*-ter Ordnung

12.6.1 Lineare Differentialgleichung *n*-ter Ordnung:

Unter einer linearen Differentialgleichung n-ter Ordnung versteht man eine Differentialgleichung der Form

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x) \cdot y^{(n-1)} + a_{n-2}(x) \cdot y^{(n-2)} + \ldots + a_1(x) \cdot y' + a_0(x) \cdot y = f(x) \ .$$

Diese heißt ***homogen***, falls $f(x) = 0$ ist, sie heißt ***inhomogen***, falls $f(x) \neq 0$ ist.

12.6.1.1 Lösbarkeit:

Sind die Koeffizienten $a_k(x)$ und $f(x)$ stetig in einem gegebenen Intervall, so hat für ein x_0 aus diesem Intervall das Anfangswertproblem

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x) \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_0(x) \cdot y = f(x)$$
$$y(x_0) = y_1$$
$$y'(x_0) = y_2$$
$$\vdots$$
$$y^{(n-1)}(x_0) = y_n$$

mit reellen y_k genau eine Lösung im gegebenen Intervall.

Im Folgenden sollen nur Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten betrachtet werden.

12.5.1.2 Linearkombinationen von Lösungen einer linearen DGL n-ter Ordnung:

Sind $y_1,\ldots,y_k$ Lösungen einer homogenen linearen DGL n-ter Ordnung, dann ist auch jede beliebige Linearkombination $y = c_1 \cdot y_1 + \ldots + c_k \cdot y_k$ mit $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$ von Lösungen wieder eine neue Lösung.

12.6.2 Umformung in DGL-System erster Ordnung:

Es werden Substitutionen durchgeführt:

$$\left.\begin{matrix} y_1 = y \\ y_2 = y' \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n = y^{(n-1)} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_3 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix}}_{\substack{=A \\ (n \times n)-\text{Matrix}}} \cdot \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ f(x) \end{pmatrix}$$

12.6.3 Fundamentalsystem:

Die Darstellung des Fundamentalsystems von Lösungen sieht folgendermaßen aus:

$$\underline{y}_1(x) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_1' \\ \vdots \\ y_1^{(n-1)} \end{pmatrix}, \ \ldots \ , \underline{y}_n(x) = \begin{pmatrix} y_n \\ y_n' \\ \vdots \\ y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

12.6.4 Aufstellen eines Fundamentalsystems:

Gegeben ist die homogene lineare DGL n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

$$y^{(n)} + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + a_{n-2} \cdot y^{(n-2)} + \ldots + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = 0$$

Man erhält ein Fundamentalsystem, wenn man zu jeder *r*-fachen Nullstelle λ_k die r_k Lösungen

$$e^{l_k x},\ x \cdot e^{l_k x}, \ldots, x^{r-1} \cdot e^{l_k x}$$

und zu jedem Paar konjugiert-komplexer Nullstellen $l_k, \overline{l_k}$ (*r*-fach) die 2*r* Lösungen

$$e^{s_k x} \cdot \cos(t_k x),\ \ldots\ , x^{r-1} \cdot e^{s_k x} \cdot \cos(t_k x)$$

$$e^{s_k x} \cdot \sin(t_k x),\ \ldots\ , x^{r-1} \cdot e^{s_k x} \cdot \sin(t_k x) \qquad \text{mit } s_k = \mathrm{Re}(l_k) \text{ und } t_k = \mathrm{Im}(l_k)$$

zusammenfaßt.

12.6.5 Fundamentalmatrix, Übertragungsmatrix:

Sie wird ebenso aufgestellt wie bei normalen DGL-Systemen:

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_1 & y_1 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

Sie besitzt alle bereits bei DGL-Systemen beschriebenen Eigenschaften (s. Punkt 12.5.4.3).
Das Aufstellen der Übertragungsmatrix erfolgt entsprechend.

12.6.6 Wronski-Determinante:

Analog zu DGL-Systemen lautet sie:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_1 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Ist der Betrag der Wronski-Determinante nicht null, so bilden die Spaltenvektoren ein Fundamentalsystem zur gegebenen Differentialgleichung.

12.6.7 Allgemeines Lösungsverfahren:

12.6.7.1 Charakteristisches Polynom:

Zur Differentialgleichung $y^{(n)} + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + a_{n-2} \cdot y^{(n-2)} + \ldots + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = f(x)$ wird das *charakteristische Polynom* oder *charakteristische Gleichung* folgendermaßen definiert:

$$P(l) = l^n + a_{n-1} \cdot l^{n-1} + a_{n-2} \cdot l^{n-2} + \ldots + a_1 \cdot l + a_0$$

12.6.7.2 Bestimmung des homogenen Lösungsanteils:

1.Schritt: Zuerst werden die Nullstellen der ***charakteristischen Gleichung*** ermittelt.
2. Schritt: Danach wird das ***reelle Fundamentalsystem*** aufgestellt.
3. Schritt: Die Lösung des homogenen DGL-Anteils lautet dann:

$$y_H(x) = c_1 \cdot y_1(x) + c_2 \cdot y_2(x) + \ldots + c_n \cdot y_n(x)$$

*12.6.7.3 **Bestimmung des partikulären Lösungsanteils**:*

<u>1. Schritt</u>: Für das Störglied $f(x)$ der DGL wird folgender Ansatz gemacht:

$$f(x) = e^{bx} \cdot [q_1(x) \cdot \cos(\Omega \cdot x) - q_2(x) \cdot \sin(\Omega \cdot x)]$$

Die Zahlen β und Ω müssen reell sein. $q_1(x)$ und $q_2(x)$ sind reelle Polynome.

<u>2. Schritt</u>: Man bildet dann die sogenannte *komplexe Störfunktion*:

$$\tilde{f}(x) = q(x) \cdot e^{mx} \qquad \text{mit} \quad q(x) = q_1(x) + i \cdot q_2(x)$$
$$\text{und} \quad m = b + i \cdot \Omega$$

<u>3. Schritt</u>: Der nächste Ansatz lautet:

$$j(x) = (u_0 + u_1 x + \ldots + u_r x^r) \qquad \text{mit} \quad grad\,(j) = grad\,(q) + 2$$

Die partikuläre (komplexe) Lösung wird wie folgt angesetzt:

$$\tilde{y}_P(x) = j(x) \cdot e^{mx}$$

Daraus folgt dann: $q(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot P^{(k)}(m) \cdot j^{(k)}(x)$

Im Falle, daß die Differentialgleichung zweiter Ordnung ist, gilt vereinfacht:

$$j''(x) + P'(m) \cdot j'(x) + P(m) \cdot j(x) = q(x) \qquad \text{mit} \quad m = b + i \cdot \Omega$$

<u>4. Schritt</u>: Aus der obenstehenden Formel werden schrittweise alle Koeffizienten bestimmt. Dazu kann der Koeffizientenvergleich — d.h. Vergleich von Real- bzw. Imaginärteilen auf beiden Seiten der Gleichung — angewandt werden.

$$j_1(x) = \operatorname{Re}[j(x)]$$
$$j_2(x) = \operatorname{Im}[j(x)]$$

Daraus folgt schließlich für die partikuläre Lösung:

$$y_P(x) = \operatorname{Re}[\tilde{y}_P(x)] = e^{bx} \cdot [j_1(x) \cdot \cos(\Omega \cdot x) - j_2(x) \cdot \sin(\Omega \cdot x)]$$

<u>Beispiel</u>: Gesucht wird die allgemeine Lösung der folgenden linearen Differentialgleichung.

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = \underbrace{5t - 13}_{f_1(t)} \underbrace{+\, 4e^{-2t} \cdot \sin t}_{f_2(t)}$$

Eine solche Aufteilung des Störgliedes in zwei (oder mehr) Teile wird dann notwendig, wenn es offensichtlich nicht die allgemeine Form $f(x) = e^{bx} \cdot [q_1(x) \cdot \cos(\Omega \cdot x) - q_2(x) \cdot \sin(\Omega \cdot x)]$ von Störgliedern besitzt.

Homogene Lösung:

Es werden die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $P(\lambda)$ bestimmt.

$$l^2 + 2l + 5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad l_1 = -1 + 2i \qquad l_2 = -1 - 2i$$

Die allgemeine, reelle Lösung der homogenen Differentialgleichung lautet dann:

$$x_H(t) = e^{-t} \cdot (c_1 \cdot \cos 2t + c_2 \cdot \sin 2t)$$

Partikuläre Lösung:

Zu $f_1(t)$:

$$\tilde{f}_1(t) = 5t - 13 = f_1(t)$$

$$x_{P1}(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$$

Koeffizentenvergleich liefert: $x_{P1}(t) = t - 3$

Zu $f_2(t)$:

$$\tilde{f}_2(t) = 4e^{-2t} \cdot \sin t = e^{bt} \cdot [q_1(t) \cdot \cos(\Omega t) - q_2(t) \cdot \sin(\Omega t)]$$

$$\text{mit} \quad b = -2 \quad \Omega = 1 \quad q_1(t) = 0 \quad q_2(t) = -4$$

$$\Rightarrow \quad m = -2 + i \quad q(t) = -4i$$

$$\Rightarrow \tilde{x}_{P2}(t) = e^{mt} \cdot j(t) = e^{(-2+i)t} \cdot \left(a_0 + a_1 t + a_2 t^2\right)$$

Als nächstes wird der Ansatz $j''(t) + P'(m) \cdot j'(t) + P(m) \cdot j(t) = q(t)$ benutzt, um die unbekannten Koeffizienten von $\varphi(t)$ zu bestimmen. Diese ergeben sich zu Folgendem:

$$a_2 = a_1 = 0\,, \quad a_0 = \frac{2}{5} - \frac{4}{5} i$$

Die allgemeine Lösung des zweiten Teils vom Störglied lautet dann:

$$x_{P2}(t) = \mathrm{Re}[\tilde{x}_{P2}(t)] = \mathrm{Re}\left[e^{(-2+i)t} \cdot \left(\frac{2}{5} - \frac{4}{5} i\right)\right] = e^{-2t} \cdot \left(\frac{2}{5} \cos t + \frac{4}{5} \sin t\right)$$

Die allgemeine Lösung der gesamten Differentialgleichung ergibt sich somit zu:

$$x(t) = x_H(t) + x_{P1}(t) + x_{P2}(t)$$

$$= e^{-t} \cdot (c_1 \cdot \cos 2t + c_2 \cdot \sin 2t) + \frac{2}{5} \cdot e^{-2t} \cdot (2 \cdot \sin t + \cos t) + t - 3$$

12.6.8 Tabelle zur Lösungsbasis von linearen homogenen Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

Die homogene Lösung lautet $y_H(x) = c_1 \cdot y_1(x) + c_2 \cdot y_2(x)$ mit $y_1(x)$ und $y_2(x)$ aus der untenstehenden Tabelle.

Nullstellen von $P(l)$	**Lösungsbasis der Differentialgleichung**
$l_1, l_2 \in \mathbb{R}, \quad l_1 \neq l_2$	$y_1(x) = e^{l_1 x}$ $y_2(x) = e^{l_2 x}$
$l_1 = l_2$	$y_1(x) = e^{l_1 x}$ $y_2(x) = x \cdot e^{l_1 x}$
$l_{1,2} = a \pm i \cdot w \quad$ mit $w > 0$	$y_1(x) = e^{a \cdot x} \cdot \cos(w \cdot x)$ $y_2(x) = e^{a \cdot x} \cdot \sin(w \cdot x)$

Tabelle 3: Lösungsbasis von linearen homogenen Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

12.7 Eulersche Differentialgleichungen

12.7.1 Form Eulerscher Differentialgleichungen

Allgemein sehen diese Differentialgleichung folgendermaßen aus:

$$(bx+c)^n \cdot y^{(n)}(x) + a_{n-1} \cdot (bx+c)^{n-1} \cdot y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1 \cdot (bx+c) \cdot y'(x) + a_0 \cdot y(x) = F(x) \qquad a_k, b, c \in \mathbb{R}$$

12.7.2 Allgemeines Löungsverfahren:

Es wird eine Substitution durchgeführt, die aus dieser speziellen Differentialgleichung eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten macht.

$$bx + c = e^u \quad \Rightarrow \quad \tilde{y}^{(k)}(u) = \underbrace{y^{(k)}(e^u)}_{\substack{\text{mit Ketten- und} \\ \text{Produktregel zu berechnen}}}$$

Die Resubstitution lautet dann: $u = \ln(bx + c)$

12.7.3 Spezielle Eulersche Differentialgleichung zweiter Ordnung:

In der Form

$$x^2 \cdot y''(x) + a \cdot x \cdot y'(x) + b \cdot y(x) = F(x) \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

vereinfacht sich die Substitution auf

$$x = e^u \qquad \Leftrightarrow \qquad u = \ln x$$

und die neue Differentialgleichung lautet:

$$\tilde{y}''(u) + (a-1) \cdot \tilde{y}'(u) + b \cdot \tilde{y}(u) = F(e^u) \qquad \text{mit} \qquad \tilde{y}(u) = y(e^u)$$

12.8 Rand- und Eigenwertprobleme

12.8.1 Begriff des Randwertproblems (RWP):

Unter Randwertproblemen versteht man Probleme, bei denen die gesuchte Lösung einer Differentialgleichung (eines DGL-Systems) in den Endpunkten eines Intervalls der unabhänigen Variable(n) bei vorgegebenen Bedingungen genügen muß. Randwertprobleme treten in der Pysik sehr häufig auf.

Gegeben sei $L[y] = f(x)$, eine lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung mit auf $[a,b]$ stetigen Koeffizienten. $f(x)$ sei ebenfalls stetig. Die Randbedingungen seien

$$U_m[y] = \sum_{n=0}^{n-1} \left(a_{m,n} \cdot y^{(n)}(a) + b_{m,n} \cdot y^{(n)}(b) \right) \qquad m = 1, \ldots, m$$

und $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ reell.

Dann bestimmen die Gleichungen

$$L[y] = f(x)$$
$$U_m[y] = g_m \qquad m = 1, \ldots, m$$

ein **Randwertproblem (RWP)**.

12.8.2 Begriff des Eigenwertproblems bei Differentialgleichungen:

Analog zur Definition des Eigenwertproblems bei Matrizen wird festgelegt:

$$L[y] = l \cdot y$$

heißt Eigenwertproblem der Differentialgleichung $L[y]$. λ heißt ***Eigenwert*** zur ***Eigenfunktion*** y, die diese Gleichung unter gegebenen Randbedingungen erfüllt.

In den meisten Fällen muß für λ eine Fallunterscheidung durchgeführt werden.

Beispiel: Bestimmt werden sollen die Eigenwerte und die Eigenfunktionen des Randwert-problems

$$w''(x) = l \cdot w(x) \qquad \text{für} \quad 0 \le x \le p$$
$$l \in \mathbb{R}$$
$$w''(0) = w''(p) = 0$$

1. Fall: λ > 0: Die allgemeine Lösung der DGL lautet dann $w(x) = c_1 \cdot e^{\sqrt{l}\cdot x} + c_2 \cdot e^{-\sqrt{l}\cdot x}$.

Koeffizientenvergleich nach Einsetzen in die DGL liefert:

$$0 \overset{!}{=} w''(0) = l \cdot (c_1 + c_2) \qquad \Rightarrow c_1 = -c_2$$
$$0 \overset{!}{=} w''(p) = l \cdot c_1 \cdot \underbrace{\left(e^{\sqrt{l}\cdot p} - e^{-\sqrt{l}\cdot p}\right)}_{\neq 0} \qquad \Rightarrow c_1 = 0 \qquad \Rightarrow c_2 = 0$$

Die erhaltene Lösung für λ > 0 ist also die triviale Lösung $w(x) \equiv 0$.

2. Fall: λ = 0: Die Lösung der entstehenden DGL $w''(x) = 0$ lautet $w(x) = c_1 x + c_2$,
d.h., Eigenfunktionen zum Eigenwert λ = 0 sind $w(x) = x$ und $w(x) = 1$.

3. Fall: λ < 0: In diesem Fall lautet die allgemeine Lösung:

$$w(x) = c_1 \cdot \sin\left(\sqrt{-l} \cdot x\right) + c_2 \cdot \cos\left(\sqrt{-l} \cdot x\right)$$
$$w''(x) = l \cdot c_1 \cdot \sin\left(\sqrt{-l} \cdot x\right) + l \cdot c_2 \cdot \cos\left(\sqrt{-l} \cdot x\right)$$

Durch Koeffizientenvergleich ergibt sich:

$$0 \overset{!}{=} w''(0) = l \cdot c_2 \qquad \Rightarrow c_2 = 0$$
$$0 \overset{!}{=} w''(p) = l \cdot c_1 \cdot \sin\left(\sqrt{-l} \cdot p\right)$$

Da λ ≠ 0 ist, muß entweder $c_1 = 0$ (triviale Lösung) oder $\lambda = -n^2$ sein (n ganzzahlig). Zugehörige Eigenfunktionen sind $w_n(x) = c_1 \cdot \sin(nx)$ für $n \in \mathbb{N}$.

12.9 Autonome Differentialgleichungen 2. Ordnung

12.9.1 Form, Anfangswerte:

In der allgemeinen Form lauten sie:

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x})$$

Die unabhängige Variable t kommt nicht explizit vor.
Anfangswerte: $x(t_0) = x_0, \quad \dot{x}(t_0) = p_0 \neq 0$

12.9.2 Äquivalentes DGL-System erster Ordnung:

Es wird geschieben in der Form:

$$\dot{x} = p$$
$$\dot{p} = f(x, p)$$

Die Anfangswerte lauten dann: $x(t_0) = x_0, \quad p(t_0) = p_0 \neq 0$

In Anlehnung an die Physik wird p als Impuls bezeichnet, f sei ein Kraftfeld in einem bestimmten Gebiet der ***(x,p)*-Phasenebene** (Orts-Impuls-Ebene).

12.9.3 Singuläre Punkte:

(x_s,p_s) heißt ***singulärer Punkt (SP)*** der Differentialgleichung $\ddot{x} = f(x,\dot{x})$, wenn folgendes gilt:

$$p_s = 0 \quad \text{und} \quad f(x_s, 0) = 0$$

Die singulären Punkte liegen auf der x-Achse. Andere Bezeichnungen für singuläre Punkte sind Gleichgewichtslage oder Ruhelage der Differentialgleichung.

12.9.4 Phasenkurve (PK):

Eine orientierte Kurve Γ in der (x,p)-Ebene heißt ***Phasenkurve (PK)*** der Differentialgleichung $\ddot{x} = f(x,\dot{x})$, wenn es eine Lösung

$$t \mapsto \underline{x}(t) = [x(t), p(t)]^T = \begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix}$$

gibt, die eine *Parameterdarstellung (PD)* von Γ ist.

<u>Merkregel für die Pfeilrichtung in Phasenkurven</u>:

Die Pfeile weisen nach rechts, wenn p positiv ist. Wenn p negativ ist, weisen die Pfeile nach links.

12.9.5 Bestimmung der Phasenkurve, Lösen von Anfangswertproblemen:

Die Bestimmung erfolgt in mehreren Schritten.

<u>1. Schritt</u>: Ansatz für Γ mit $(x_0,p_0) \in \Gamma$:

$$p = \varphi(x)$$
$$p_0 = \varphi(x_0)$$

Gesucht ist $\varphi(x)$.

Nach einigen Umformungen und Substitutionen ergibt sich:

$$\varphi' = \frac{1}{\varphi} \cdot f(x, \varphi)$$

$$\text{und} \quad \varphi(x_0) = p_0 \neq 0$$

Dies ist eine Differentialgleichung erster Ordnung für $\varphi(x)$.

<u>2. Schritt</u>: $\varphi(x)$ wird berechnet.

Man löst eine Differentialgleichung erster Ordnung für $x(t)$, indem man

$$\frac{dx}{\varphi(x)} = dt$$

einsetzt. Es ergibt sich das Folgende:

$$t - t_0 = \int_{x_0}^{x} \frac{ds}{\varphi(s)}$$

Daraus erhält man t als Funktion von x. Aufgelöst nach $x(t)$ hat man dann die Parameterdarstellung der Phasenkurve durch (x_0,p_0).

Beispiel: Gesucht ist die Lösung des folgenden Anfangswertproblems:

$$\ddot{x} = \frac{2x\dot{x}^2}{3+x^2} - \frac{\dot{x}\left(3+x^2\right)}{2x^2} \quad \text{mit} \quad x(0) = 1\ ,\ \dot{x}(0) = 2 \quad \text{und} \quad x > 0$$

Substitution ergibt:

$$\left.\begin{aligned} &\dot{x} = p \\ &\dot{p} = \frac{2xp^2}{3+x^2} - \frac{p\left(3+x^2\right)}{2x^2} \\ &\Leftrightarrow \quad p = j(x) \\ &\qquad \dot{p} = j'(x)\cdot p = \frac{2xp^2}{3+x^2} - \frac{p\left(3+x^2\right)}{2x^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ j'(x) = \frac{2x}{3+x^2}\, j(x) - \frac{3+x^2}{2x^2} \ \Rightarrow \ j'(x) - \frac{2x}{3+x^2}\, j(x) + \frac{3+x^2}{2x^2} = 0$$

Nach Lösungsformel für Differentialgleichungen erster Ordnung ergibt sich:

$$j(x) = e^{\int_{x_0}^{x} \overbrace{B(s)}^{=-\frac{2s}{3+s^2}} ds} \cdot \left[\underbrace{j_0}_{=p_0=2} - \int_{x_0}^{x} \underbrace{A(t)}_{=\frac{3+t^2}{2t^2}} \cdot e^{\int_{x_0}^{x} B(s)ds} dt \right] = \frac{3+x^2}{2x} \overset{!}{=} p$$

Damit ist die Phasenkurve bestimmt. Weiter kann berechnet werden:

$$t - \underbrace{t_0}_{=0} = \int_{x_0=1}^{x} \frac{ds}{j(s)} = \left[\ln\left|3+s^2\right|\right]_1^x = \ln\frac{3+x^2}{4}$$

$$\Rightarrow x(t) = +\sqrt{4e^t - 3} \qquad \text{mit} \quad t > \ln\frac{3}{4}$$

Dies ist die Lösung des angegebenen Anfangswertproblems.

12.9.6 Spezielle autonome Differentialgleichungen 2. Ordnung:

Wenn sich die Differentialgleichung schreiben läßt als

$$\ddot{x} = f(x),$$

dann lassen sich ein ***Potential (potentielle Energie)***, ***kinetische Energie*** und ***Gesamtenergie*** einer Masse $m = 1$ definieren.

12.9.6.1 Potential (potentielle Energie):

Eine Funktion $U(x)$ heißt Potential oder potentielle Energie, wenn $U'(x) = -f(x)$ gilt.

$$U(x) = -\int_{x_0}^{x} f(e)de$$

12.9.6.2 Kinetische Energie:

Sie wird definiert als $E_{kin}(p) = \frac{1}{2}\dot{x}^2 = \frac{1}{2}p^2$.

12.9.6.3 Gesamtenergie:

Die Gesamte Energie eines Massenpunktes im Kraftfeld f am Ort x mit dem Impuls p ist die Summe von kinetischer und potentieller Energie:

$$E(x, p) = \frac{1}{2}p^2 + U(x)$$

12.9.6.4 Energiesatz:

Für alle Punkte (x,p) einer Phasenkurve gilt der Energiesatz:

$$E(x,p) = E_0 = \text{konst.}$$

$$\Rightarrow U(x) \leq E_0$$

Die *Phasenkurven sind Niveaulinien der Energiefunktion* bzw. Teile davon.

12.9.7 Lösungsverfahren der speziellen Differentialgleichung:

Es entfallen einige bei der allgemeinen autonomen Differentialgleichung notwendige Annahmen bzw. Schritte. Es darf nun $p_0 = 0$ sein.

<u>1. Schritt</u>: Das Potential wird aus $U(x) = -\int_{x_0}^{x} f(e)de$ berechnet.

Die Phasenkurve folgt dann aus dem Energiesatz.

<u>2. Schritt</u>: Der Impuls läßt sich berechnen mit

$$p = j(x) = \pm\sqrt{2 \cdot (E_0 - U(x))}$$

$$E_0 = E(x_0, p_0)$$

<u>3. Schritt</u>: Man gewinnt die Lösung mit der schon angegebenen Formel $t - t_0 = \int_{x_0}^{x} \frac{ds}{j(s)}$.

12.9.8 Autonome Differentialgleichungs-Systeme:

Das allgemeine System lautet: $\dot{\underline{x}} = \underline{v}(\underline{x})$

Ein singulärer Punkt sei $\underline{x}_S = \begin{pmatrix} x_{1,s} \\ x_{2,s} \end{pmatrix}$ mit $\underline{v}(\underline{x}_S) = \underline{0}$.

12.9.8.1 Linearisiertes System:

Ist $\underline{v}(\underline{x})$ in eine Taylorreihe entwickelbar, so heißt das System

$$\dot{\underline{x}} = A \cdot (\underline{x} - \underline{x}_S) \quad \text{mit} \quad A = \underline{v}_{\underline{x}}\Big|_{\underline{x}=\underline{x}_s} = \begin{pmatrix} \left.\frac{\P v_1}{\P x_1}\right|_{\underline{x}_S} & \left.\frac{\P v_1}{\P x_2}\right|_{\underline{x}_S} \\ \left.\frac{\P v_2}{\P x_1}\right|_{\underline{x}_S} & \left.\frac{\P v_2}{\P x_2}\right|_{\underline{x}_S} \end{pmatrix}$$

linearisiertes System.

Ermittelt man für das linearisierte System einen singulären Punkt eines bestimmten Typs, so ist er auch ein singulärer Punkt gleichen Typs für das nicht-linearisierte System.

12.9.9 Klassifizierung von singulären Punkten, Phasenportraits:

12.9.9.1 Knotenpunkt:

Ein Knotenpunkt liegt vor, wenn die ***Wurzeln der charakteristischen Gleichung reell*** sind ***und gleiches Vorzeichen*** besitzen. In der Umgebung des singulären Punktes verlaufen alle Phasenkurven durch ihn hindurch und haben hier, falls keine Doppelwurzel vorliegt, eine gemeinsame Tangente. Im Falle einer Doppelwurzel haben die Phasenkurven entweder eine gemeinsame Tangente, oder durch den singulären Punkt verläuft in jeder Richtung eine eindeutige Kurve.

Handelt es sich um ein lineares autonomes DGL-System, so werden noch Knotenpunkte 1. Art und Knotenpunkte 2. Art unterschieden.

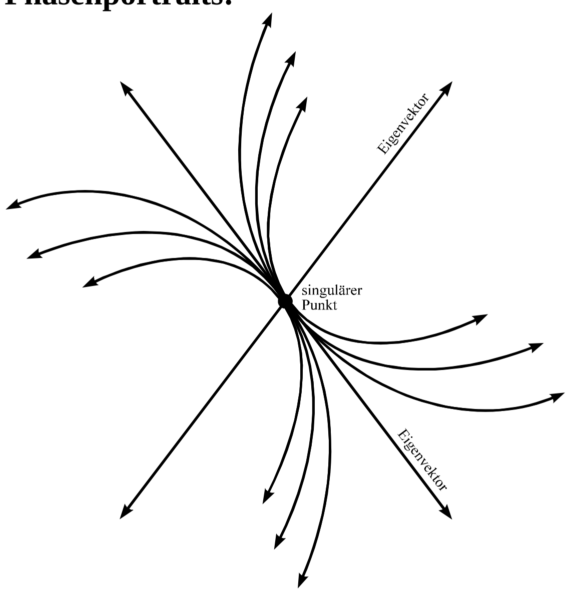


Abbildung 18: Knoten 1. Art

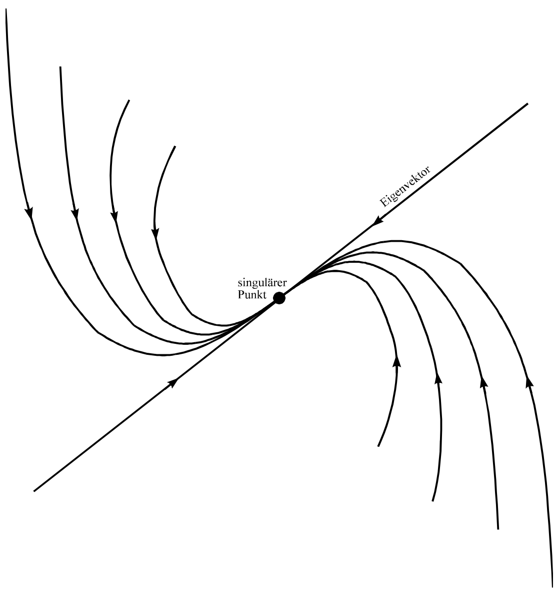


Abbildung 19: Knoten 2. Art

12.9.9.2 Strahlpunkt / Sternpunkt:

Als Strahlpunkt bezeichnet man einen Knotenpunkt, durch den ***Phasenkurven der Form*** $\boldsymbol{y = C \cdot x}$ gehen.

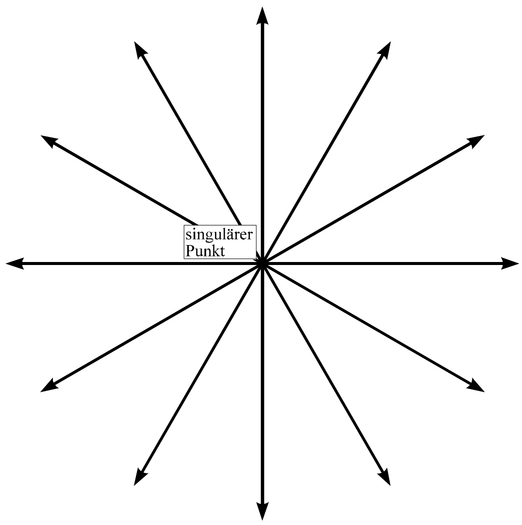


Abbildung 20: Sternpunkt

12.9.9.3 Sattelpunkt:

Als Sattelpunkt bezeichnet man einen singulären Punkt, durch den genau zwei Phasenkurven verlaufen. Die ***Wurzeln der charakteristischen Gleichung*** sind dann ***reell*** und besitzen ***verschiedenes Vorzeichen***. Sattelpunkte sind immer instabil.

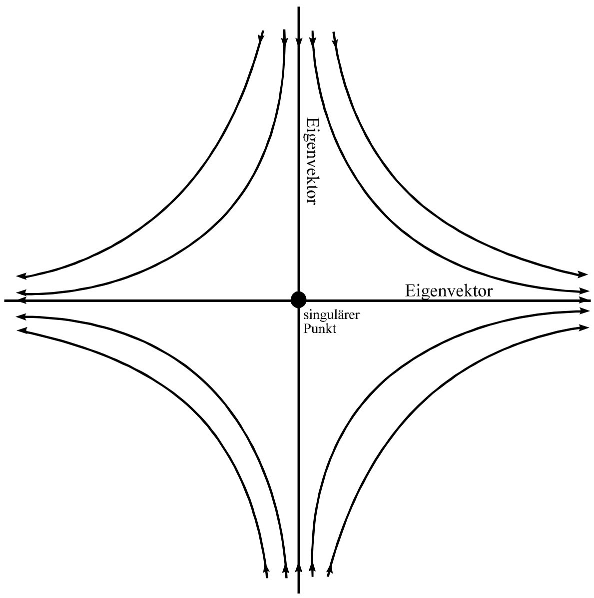


Abbildung 21: Sattelpunkt

12.9.9.4 Strudelpunkt:

Sind die ***Wurzeln der charakteristischen Gleichung konjugiert-komplex***, dann ist der singuläre Punkt ein Strudelunkt, auf den sich die Phasenkurven in unendlich vielen Windungen aufwinden.

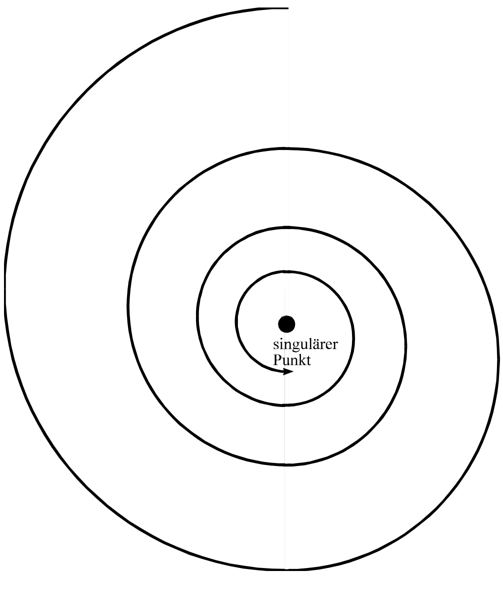


Abbildung 22: Strudelpunkt

12.9.9.5 Wirbelpunkt:

Ein singulärer Punkt, in dessen Umgebung ausschließlich geschlossene Phasenkurven liegen, heißt Wirbelpunkt. Die charakteristische Gleichung muß ***rein imaginäre Wurzeln*** haben.

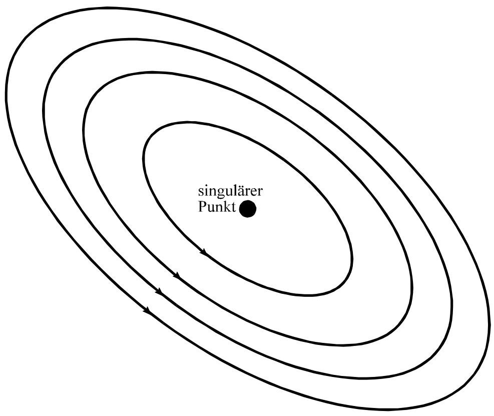


Abbildung 23: Wirbelpunkt

12.9.9.6 Stabilität von singulären Punkten:

Gilt für einen singulären Punkt $(x_0,0)$, daß zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, wobei für eine Wahl des Anfangspunktes (x_1^0, x_2^0) mit dem Abstand $\delta_1 < \delta$ zum singulären Punkt die zugehörige Phasenkurve einen Abstand $\delta_2 < \varepsilon$ zum singulären Punkt hat, dann heißt der singuläre Punkt stabil. Die Pfeilrichtung der Phasenkurve weist auf den singulären Punkt.

Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so heißt der singuläre Punkt instabil.

12.9.9.7 Stabilitätskarte für lineare autonome DGL-Systeme im ℝ²:

DGL-System: $\underline{\dot{x}} = A \cdot \underline{x}$

Bezeichnungen:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{a} = \frac{1}{2} \cdot \text{Spur } A = \frac{1}{2} \cdot (a + d)$$

$$g = \det A$$

$$\boldsymbol{b} = \sqrt{\left|\boldsymbol{a}^2 - g\right|}$$

$$\boldsymbol{l}_1, \boldsymbol{l}_2 : \text{ Eigenwerte von A}$$

Es treten dann verschiedene Fälle auf:

<u>1. Fall</u>: *Sattelpunkt*: $g < 0 \Rightarrow \boldsymbol{b} > |\boldsymbol{a}|$. Die Eigenwerte haben verschiedenes Vorzeichen.

<u>2. Fall</u>: *Gerade von singulären Punkten*: $g = 0$ und $\boldsymbol{a} \neq 0 \Rightarrow \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}|$.
Ein Eigenwert ist null, der andere nicht.

<u>3. Fall</u>: *Knoten 1. Art*: $0 < g < \boldsymbol{a}^2 \Rightarrow \boldsymbol{b} < |\boldsymbol{a}|$. Die Eigenwerte haben gleiches Vorzeichen.

<u>4. Fall</u>: $g = \boldsymbol{a}^2 \Leftrightarrow \boldsymbol{b} = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{l}_1 = \boldsymbol{l}_2 = \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$. Es gibt nur einen Eigenwert.
<u>4.1</u>: *Sternpunkt*: Die Eigenvektoren spannen den ℝ² auf.
<u>4.2</u>: *Knoten 2. Art*: Die Eigenvektoren spannen den ℝ² nicht auf.

<u>5. Fall</u>: *Strudelpunkt*: $g > \boldsymbol{a}^2 \Leftrightarrow \boldsymbol{l}_1, \boldsymbol{l}_1 \notin \mathbb{R}$ Die Eigenwerte sind konjugiert-komplex.

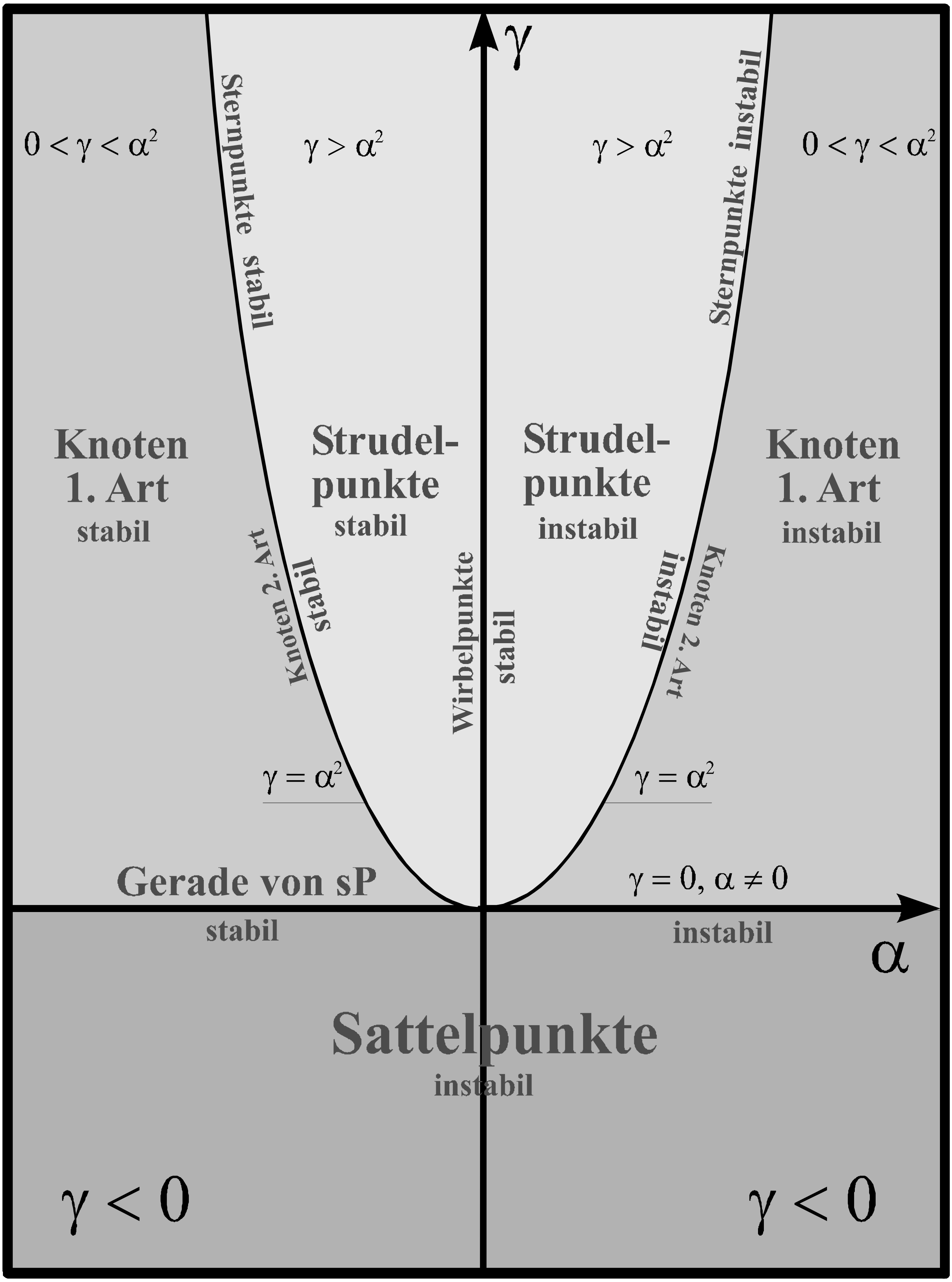


Abbildung 24: Stabilitätskarte für lineare autonome DGL-Systeme im $\mathbb{R}^2$

13. Fourierreihen

13.1 Trigonometrische Polynome und minimale Integralmittel

13.1.1 Periodizität:

Eine skalare Funktion $f(x)$ heißt periodisch mit der Periode $T > 0$ oder auch T-periodisch, falls $f(x) = f(x + T)$ für alle reellen x gilt.

Ist eine solche Funktion f T-periodisch, so ist

$$g(x) = f\left(\frac{x \cdot T}{2p}\right)$$

2π-periodisch. Die folgenden Betrachtungen beziehen sich ausschließlich auf 2π-periodische Funktionen.

13.1.2 Trigonometrisches Polynom *n*-ten Grades:

So bezeichnet man folgendes Polynom:

$$T_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cdot \cos kx + b_k \cdot \sin kx) \quad \text{mit} \quad a_k, b_k \in \mathbb{R}$$

13.1.3 Primäre Problemstellung:

Gegeben sei eine 2π-periodische Funktion f.

13.1.3.1 Kann f durch ein bestimmtes trigonometrisches Polynom besonders gut angenähert werden ?

13.1.3.2 Was heißt „gute Annäherung“ überhaupt, wo f doch nicht einmal stetig sein muß, aber jedes T_n stetig ist ?

13.1.3.3 Welche zusätzlichen Forderungen sind an f bzw. an die Koeffizienten a_k, b_k zu stellen so daß die formale Reihe

$$S_f(x) = \lim_{k \to \infty} T_k(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cdot \cos kx + b_k \cdot \sin kx)$$

konvergiert ?

13.1.3.4 Wenn $S_f(x)$ für ein reelles x existiert, gilt dann $f(x) = S_f(x)$?

13.1.4 Integralmittel:

Als Maß der Annäherung wählt man das sogenannte Integralmittel:

$$e_n = e_n(a_0, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n) = \int_{-p}^{p} [f(x) - T_n(x)]^2 \cdot dx$$

13.1.5 Fourierkoeffizienten (FK):

Minimiert man das Integralmittel, so ergibt sich Folgendes:

$$a_0 = \frac{1}{2p} \cdot \int_{-p}^{p} f(x) \cdot dx$$

$$a_k = \frac{1}{p} \cdot \int_{-p}^{p} f(x) \cdot \cos kx \cdot dx$$

$$b_k = \frac{1}{p} \cdot \int_{-p}^{p} f(x) \cdot \sin kx \cdot dx$$

Existieren diese Integrale, so heißen die Terme Fourierkoeffizienten (FK) von f.

13.1.6 Unterscheidung bei geraden und ungeraden Funktionen:

Sei eine 2π-periodische Funktion $f(x)$ gegeben, deren Fourierkoeffizienten für alle k existieren. Dann gilt:

f ist eine gerade Funktion:

$$a_0 = \frac{1}{p} \cdot \int_0^p f(x) \cdot dx$$

$$a_k = \frac{2}{p} \cdot \int_0^p f(x) \cdot \cos kx \cdot dx$$

$$b_k = 0$$

f ist eine ungerade Funktion:

$$a_0 = a_k = 0$$

$$b_k = \frac{2}{p} \cdot \int_0^p f(x) \cdot \sin kx \cdot dx$$

13.1.7 Konvergenz:

Ist f stetig im Intervall [−π,π] und 2π-periodisch, dann gilt:

$$\infty > \frac{1}{p} \cdot \int_{-p}^{p} f(x)^2 \cdot dx \geq 2a_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k^2 + b_k^2\right)$$

Die Fourierkoeffizienten streben gegen null, wenn k gegen unendlich geht.

13.1.8 Fourierreihe:

Ist f stetig und stückweise glatt im Intervall [−π,π] sowie 2π-periodisch, dann konvergiert die Fourierreihe gleichmäßig und absolut, und es gilt:

$$S_f(x) = \frac{1}{2} \cdot \left[\lim_{e \to x+} f(x) + \lim_{e \to x-} f(x)\right]$$

Betrachtet man eine allgemeine $2L$-periodische Funktion f, so gilt für die Fourierreihe:

$$S(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cdot \cos\left(\frac{np}{L} x\right) + b_n \cdot \sin\left(\frac{np}{L} x\right)\right)$$

mit

$$a_n = \frac{1}{L} \cdot \int_{-L}^{L} f(x) \cdot \cos\left(\frac{np}{L} x\right) \cdot dx$$

$$b_n = \frac{1}{L} \cdot \int_{-L}^{L} f(x) \cdot \sin\left(\frac{np}{L} x\right) \cdot dx \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

13.1.9 Dirichlet-Term:

Dieser wird aus dem trigonometrischen Polynom gewonnen.

$$T_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cdot \cos kx + b_k \cdot \sin kx\right)$$

$$= \frac{1}{p} \cdot \left[\int_{-p}^{p} f(t) \cdot \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\left(\cos kt \cdot \cos kx + \sin kt \cdot \sin kx\right)}_{=\cos[k \cdot (x-t)]} \right] \cdot dt \right]$$

$$= \frac{1}{p} \cdot \int_{-p}^{p} f(t) \cdot \underbrace{\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos[k \cdot (x-t)] \right]}_{=D_n(x-t)} \cdot dt$$

Der Dirichlet-Term hat folgende Eigenschaften:

$$D_n(u) = \frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\cdot u\right]}{2\cdot\sin\frac{u}{2}}$$

$$\frac{1}{p}\cdot\int_{-p}^{p} D_n(u)\cdot du = 1$$

Daraus folgt für das trigonometrische Polynom:

$$T_n(x) = \frac{1}{p}\cdot\int_{-p}^{p} f(x-u)\cdot D_n(u)\cdot du$$

13.1.10 Fourierreihenentwicklungen einiger 2p-periodischer Funktionen:

Funktion	**Fourierreihe**
$f(x) = \lvert\sin x\rvert = \begin{cases} -\sin x & -p \le x \le 0 \\ \sin x & 0 \le x \le p \end{cases}$	$f(x) = \frac{2}{p} - \frac{4}{p}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2nx)}{4n^2-1}$ $= \frac{2}{p} - \frac{4}{p}\cdot\left(\frac{\cos(2x)}{1\cdot 3}+\frac{\cos(4x)}{3\cdot 5}+\frac{\cos(6x)}{5\cdot 7}+\ldots\right)$
$f(x) = \begin{cases} -x & -p \le x \le 0 \\ x & 0 \le x \le p \end{cases}$	$f(x) = \frac{p}{2} - \frac{4}{p}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos[(2n-1)x]}{(2n-1)^2}$ $= \frac{p}{2} - \frac{4}{p}\cdot\left(\cos x+\frac{\cos(3x)}{3^2}+\frac{\cos(5x)}{5^2}+\ldots\right)$
$f(x) = \begin{cases} -1 & -p < x < 0 \\ 1 & 0 \le x \le p \end{cases}$	$f(x) = \frac{4}{p}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin[(2n-1)x]}{2n-1}$ $= \frac{4}{p}\cdot\left(\sin x+\frac{\sin(3x)}{3}+\frac{\sin(5x)}{5}+\ldots\right) \quad x \ne np$
$f(x) = x^2 \quad -p \le x \le p$	$f(x) = \frac{p^2}{3} + 4\cdot\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{\cos(nx)}{n^2}$ $= \frac{p^2}{3} - 4\cdot\left(\cos x-\frac{\cos(2x)}{2^2}+\frac{\cos(3x)}{3^2}-+\ldots\right)$
$f(x) = \begin{cases} x & 0 \le x < 2p \\ 0 & x = 2p \end{cases}$	$f(x) = p - 2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n} \quad x \ne 2np$ $= p - 2\cdot\left(\sin x+\frac{\sin(2x)}{2}+\frac{\sin(3x)}{3}+\ldots\right)$

Tabelle 4: Fourierreihenentwicklungen einiger 2p-periodischer Funktionen

13.2 Eine Anwendung auf die Saitenschwingung

Gegeben sei eine Saite der Länge π, die an beiden Enden eingespannt sei und auf die keine äußeren Kräfte einwirke.

13.2.1 Zugehöriges Randwertproblem:

$$y(0,t) = y(p,t) = 0 \quad \text{für alle } t$$
$$y(x,0) = f(x)$$
$$y_t(x,0) = g(x)$$

$$y(x,t) = X(x) \cdot T(t)$$

13.2.2 Separierte Differentialgleichungen:

Man erhält als Ansatz:

$$\ddot{T}(t) - l \cdot T(t) = 0$$
$$X''(x) - \frac{l}{c^2} \cdot X(x) = 0$$

13.2.3 Ermittlung der Eigenfunktionen:

Unter Berücksichtigung der Anfangs- und Randwerte ergibt sich:

$$X_k(x) = C \cdot \sin(k \cdot x)$$
$$T_k(t) = d_{1,k} \cdot \cos(c \cdot k \cdot t) + d_{2,k} \cdot \sin(c \cdot k \cdot t)$$

13.2.4 Lösung der Differentialgleichung:

$$y_k(x,t) = X_k(x) \cdot T_k(t)$$
$$\sum_{k=1}^{n} y_k(x,t) \qquad n \in \mathbb{N}$$

13.2.5 Fourierreihen von *f* bzw. *g*:

Falls $\sum_{k=1}^{n} y_k(x,t)$ existiert und Differentiation und Summation vertauschbar sind, so folgt:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} d_{1,k} \cdot \sin(k \cdot x)$$
$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} d_{2,k} \cdot c \cdot k \cdot \sin(k \cdot x)$$

Dies sind die Fourierreihen von *f* bzw. *g*.

14. Kurven und Flächen

14.1 Kurven im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$

14.1.1 Parameterdarstellung eines Kurvenbogens, Parametertransformation:

$$\underline{x}: \quad [a,b] \mapsto \mathbb{R}^n, \quad n \in \{2,3\}$$

heißt Parameterdarstellung eines Kurvenbogens, wenn $\underline{x}(t)$ stetig und differenzierbar ist, sowie die Ableitung nach t im Intervall $[a,b]$ nicht null ist.

Eine Parametertransformation heißt „zulässig“, wenn sie bijektiv und stetig ist, sowie überall eine positive Ableitung besitzt. Bei zulässigen Parametertransformationen ändert sich die Richtung einer Tangente nicht.

14.1.2 Spezielle zulässige Parametertransformation auf „Bogenlänge“:

Die Länge einer allgemeinen Kurve lautet:

$$l(K) = \int_a^b \sqrt{|\underline{\dot{x}}(t)|^2} \cdot dt$$

$$s(t) = \int_a^t \sqrt{|\underline{\dot{x}}(t)|^2} \cdot dt$$

Dies ist eine zulässige Parametertransformation.

14.1.3 Tangentenvektor, Normalenvektor und Krümmung einer Kurve im $\mathbb{R}^2$:

Tangentenvektor: $\underline{t}(t) = \dfrac{1}{\sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_1^2}} \cdot \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix}$

Normalenvektor: $\underline{n}(t) = \dfrac{1}{\sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_1^2}} \cdot \begin{pmatrix} -\dot{x}_2 \\ \dot{x}_1 \end{pmatrix}$

Krümmung: $k(t) = \dfrac{\underline{\dot{x}}^{\perp} \cdot \underline{\ddot{x}}}{|\underline{\dot{x}}|^3}$ mit $\underline{\dot{x}}^{\perp} = \begin{pmatrix} -\dot{x}_2 \\ \dot{x}_1 \end{pmatrix}$

14.1.4 Begleitendes Dreibein einer Kurve im $\mathbb{R}^3$:

Sei $\underline{x}(s)$ eine Parameterdarstellung einer Kurve im $\mathbb{R}^3$ parametrisiert nach der Bogenlänge.

Dann heißen $\underline{t}(s) = \underline{x}'(s)$ Tangentenvektor,

$\underline{n}(s) = \dfrac{\underline{t}'(s)}{|\underline{t}'(s)|}$ für $\underline{t}'(s) \neq \underline{0}$ Hauptnormalenvektor

und $\underline{b}(s) = \underline{t}(s) \times \underline{n}(s)$ Binormalenvektor.

$\{\underline{t}(s), \underline{n}(s), \underline{b}(s)\}$ heißt *begleitendes Dreibein* der Kurve. Es bildet eine Orthogonalbasis des $\mathbb{R}^3$.

14.1.5 Frenetsche Formeln:

Sei $\underline{x}(s)$ eine Parameterdarstellung einer Kurve im ℝ³ parametrisiert nach der Bogenlänge. $\{\underline{t}(s), \underline{n}(s), \underline{b}(s)\}$ sei das begleitende Dreibein.

Man nennt dann $k(s) = \left|\underline{t}'(s)\right|$ ***Krümmung*** und

$t(s) = -\underline{b}'(s) \cdot \underline{n}(s)$ ***Torsion*** oder ***Windung***.

Daraus folgt dieses Differentialgleichungs-System:

$$\underline{t}' = k \cdot \underline{n}$$
$$\underline{n}' = -k \cdot \underline{t}' + t \cdot \underline{b}$$
$$\underline{b}' = -t \cdot \underline{n}$$

Mit $\underline{x}' = \underline{t}$ ist $\underline{x}(s)$ dann bis auf eine Translation eindeutig bestimmt.

14.1.6 Bezüglich der Zeit parametrisierte Kurven im ℝ³:

Tangentenvektor: $\underline{t} = \dfrac{\dot{\underline{x}}}{\left|\dot{\underline{x}}\right|}$

Binormalenvektor: $\underline{b} = \dfrac{\dot{\underline{x}} \times \ddot{\underline{x}}}{\left|\dot{\underline{x}} \times \ddot{\underline{x}}\right|}$

Hauptnormalenvektor: $\underline{n} = \underline{b} \times \underline{t}$

Krümmung: $k = \dfrac{\left|\dot{\underline{x}} \times \ddot{\underline{x}}\right|}{\left|\dot{\underline{x}}\right|^3}$

Torsion / Windung: $t = \dfrac{(\dot{\underline{x}} \times \ddot{\underline{x}}) \cdot \dddot{\underline{x}}}{(\dot{\underline{x}} \times \ddot{\underline{x}})^2}$

14.2 Einführung in die lokale Theorie der Flächen im ℝ³

14.2.1 Parameterdarstellung eines Flächenstückes, Parametertransformation:

$\underline{x} : \underbrace{G \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^3}_{(u,v) \mapsto \underline{x}(u,v)}$ heißt Parameterdarstellung eines Flächenstücks $x(G)$ im ℝ³, falls x in G stetig differenzierbar ist und für alle (u,v) aus G gilt: $\underline{x}_u \times \underline{x}_v \neq 0$

Eine Parametertransformation $\underline{f} : \underbrace{G \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \tilde{G} \subset \mathbb{R}^2}_{(u,v) \mapsto \underline{f}(u,v) = \begin{pmatrix} f_1(u,v) \\ f_2(u,v) \end{pmatrix}}$ heißt zulässig, falls $\underline{f}$ bijektiv und stetig differenzierbar ist. Darüber hinaus muß die Jacobideterminante positiv sein. $J_{\underline{f}}(u,v) > 0$ für alle (u,v) aus G.

Ist $\underline{f}$ eine zulässige Parametertransformation, dann ändert sich die Richtung von $\underline{x}_u \times \underline{x}_v$ unter $\underline{f}$ nicht.

Normalenvektor der Fläche x(G): $\quad \underline{n} = \dfrac{\underline{x}_u \times \underline{x}_v}{\left|\underline{x}_u \times \underline{x}_v\right|}$

14.2.2 Kurven auf Flächen:

Sei $\underline{g} : [a,b] \subset \mathbb{R} \mapsto G \subset \mathbb{R}^2$ die Parameterdarstellung einer ebenen Kurve in G. Dann ist $\underline{x} \circ \underline{g} : [a,b] \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^3$ die Parameterdarstellung einer Kurve auf der Fläche $\underline{x}(G)$.

Deren Tangentenvektor ist gegeben durch: $\quad \dfrac{d}{dt}\left(\underline{x} \circ \underline{g}\right) = \underline{x}_u\left(\underline{g}(t)\right) \cdot \underline{\dot{u}}(t) + \underline{x}_v\left(\underline{g}(t)\right) \cdot \underline{\dot{v}}(t)$

Die Tangente liegt in der von $\underline{x}_u$ und $\underline{x}_v$ aufgespannten Ebene. $\quad \dfrac{d}{dt}\left(\underline{x} \circ \underline{g}\right) \perp \left(\underline{x}_u \times \underline{x}_v\right)$

14.2.3 Koeffizienten der 1. Fundamentalform:

Die Bogenlänge wird bestimmt durch

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left|\frac{d}{dt}\left(\underline{x} \circ \underline{g}\right)\right|^2 = \left|\underline{x}_u \dot{u} + \underline{x}_v \dot{v}\right|^2$$
$$= \underbrace{\underline{x}_u \underline{x}_u}_{E} \dot{u}^2 + 2\underbrace{\underline{x}_u \underline{x}_v}_{F} \dot{u}\dot{v} + \underbrace{\underline{x}_v \underline{x}_v}_{G} \dot{v}^2$$

E, *F*, *G* heißen Koeffizienten der 1. Fundamentalform.

Schreibweise: $\quad ds^2 = E \cdot du^2 + 2F \cdot du \cdot dv + G \cdot dv^2$

14.2.4 Eigenschaften, Anwendungen:

Sei $\underline{x} : \underbrace{G \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^3}_{(u,v) \mapsto \underline{x}(u,v)}$ die Parameterdarstellung der Fläche $\underline{x}(G)$ und *E*, *F*, *G* die Koeffizienten der 1. Fundamentalform. Dann kann Folgendes formuliert werden:

14.2.4.1 Ist $t \mapsto \underline{g}(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$ die Parameterdarstellung einer Kurve in G, und die Verkettung von $\underline{x}$ und $\underline{\gamma}$ verbinde auf *G* die Punkte *a* und *b*. Dann gilt für die Bogenlänge *s* der Flächenkurve:

$$s = \int_a^b \sqrt{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2} \cdot dt$$

14.2.4.2 Seien $\underline{\gamma}_1$ und $\underline{\gamma}_2$ die Parameterdarstellungen zweier Kurven in *G*, die sich für ein *t* schneiden. Dann schneiden sie sich unter dem Winkel α mit

$$\cos a = \frac{E\dot{u}_1\dot{u}_2 + F\left(\dot{u}_1\dot{v}_2 + \dot{u}_2\dot{v}_1\right) + G\dot{v}_1\dot{v}_2}{\left|E\dot{u}_1\dot{u}_2 + F\left(\dot{u}_1\dot{v}_2 + \dot{u}_2\dot{v}_1\right) + G\dot{v}_1\dot{v}_2\right|}$$

14.2.4.3 Durch $\left|\underline{x}_u \times \underline{x}_v\right| = \sqrt{EG - F^2}$ wird der Flächeninhalt des von $\underline{x}_u$ und $\underline{x}_v$ aufgespannten Parallelogramms bestimmt.

14.2.5 Flächen in expliziter Form:
Es gilt allgemein:

$$\underline{x}(u,v)=\begin{pmatrix} u \\ v \\ f(u,v) \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \underline{x}_u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_u \end{pmatrix} \\ \underline{x}_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_v \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E = 1 + f_u^2 \\ F = f_u \cdot f_v \\ G = 1 + f_v^2 \end{cases}$$

Normalenvektor auf die Tangentialebene: $\underline{n} = \underline{x}_u \times \underline{x}_u = \begin{pmatrix} -f_u \\ -f_v \\ 1 \end{pmatrix}$

15. Kurven- und Oberflächenintegrale

15.1 Orientierte und nicht orientierte Kurvenintegrale

15.1.1 Orientiertes Kurvenintegral:

Sei $\underline{x}:\ [a,b]\mapsto G\subset\mathbb{R}^2\ \left(\mathbb{R}^3\right)$ eine Parameterdarstellung der Kurve C. Es sei $\underline{f}:G\mapsto\mathbb{R}^2\left(\mathbb{R}^3\right)$ eine stetige Funktion. Dann heißt

$$\int_C \underline{f}\cdot d\underline{x}=\int_C\left(\underline{f}\left(\underline{x}(t)\right)\cdot\underline{\dot{x}}(t)\right)\cdot dt$$

orientiertes Kurvenintegral von $\underline{f}$ längs C.

Andere Schreibweise:

$$\int_C \underline{f}\cdot d\underline{x}=\int_C f_1\cdot dx_1+f_2\cdot dx_2+f_3\cdot dx_3$$

bzw. $$\int_C \underline{f}\cdot\underline{n}\cdot ds=\int_C\underline{f}\cdot d\underline{x}^{\perp}=\int_a^b\underline{f}\left(\underline{x}(t)\right)\cdot\underline{\dot{x}}^{\perp}\cdot dt$$

15.1.2 Nicht orientiertes Kurvenintegral:

Ist $j\ :\ G\mapsto\mathbb{R}$ stetig, so heißt

$$\int_C j\ \cdot\left|d\underline{x}\right|=\int_C j\ \cdot ds=\int_a^b j\ \left(\underline{x}(t)\right)\cdot\left|\underline{\dot{x}}(t)\right|\cdot dt$$

nicht orientiertes Kurvenintegral von φ längs C.

15.1.3 Eigenschaften von Kurvenintegralen, Rechenregeln:

15.1.3.1 Bei zulässigen Parametertransformationen verändern orientierte und nicht orientierte Kurvenintegrale ihren Wert nicht.

15.1.3.2 Für reelle a, b , stetige Skalarfelder φ, ψ , und stetige Vektorfelder $\underline{f}$, $\underline{g}$ gilt:

$$\int_C\left(a\cdot\underline{f}+b\cdot\underline{g}\right)\cdot d\underline{x}=a\cdot\int_C\underline{f}\cdot d\underline{x}+b\cdot\int_C\underline{g}\cdot d\underline{x}$$

$$\int_C\left(a\cdot j\ +b\cdot y\ \right)\cdot\left|d\underline{x}\right|=a\cdot\int_C j\ \cdot\left|d\underline{x}\right|+b\cdot\int_C y\ \cdot\left|d\underline{x}\right|$$

15.1.3.3 Weitere Eigenschaften sind:

$$\int_{-C}\underline{f}\cdot d\underline{x}=-\int_C\underline{f}\cdot d\underline{x}$$

$$\int_{-C}j\ \cdot\left|d\underline{x}\right|=\int_C j\ \cdot\left|d\underline{x}\right|$$

$$\int_{C_1+C_2}\underline{f}\cdot d\underline{x}=\int_{C_1}\underline{f}\cdot d\underline{x}+\int_{C_2}\underline{f}\cdot d\underline{x}$$

$$\int_{C_1+C_2}j\ \cdot\left|d\underline{x}\right|=\int_{C_1}j\ \cdot\left|d\underline{x}\right|+\int_{C_2}j\ \cdot\left|d\underline{x}\right|$$

15.1.3.4 Es gelten folgende Abschätzungen:

$$\left|\int_C \underline{f} \cdot d\underline{x}\right| \leq \int_C \left|\underline{f}\right| \cdot \left|d\underline{x}\right|$$

$$\left|\int_C j \cdot \left|d\underline{x}\right|\right| \leq \int_C \left|j\right| \cdot \left|d\underline{x}\right|$$

15.1.4 Potential eines Vektorfeldes:

Ist *C* eine geschlossene Kurve innerhalb eines sternförmigen Gebietes, und existiert ein skalares Feld φ, so daß

$$\text{grad}\, j = \underline{f}$$

ist, dann gilt immer $\int_C \underline{f} \cdot d\underline{x} = 0$

φ heißt Potential des Vektorfeldes $\underline{f}$.

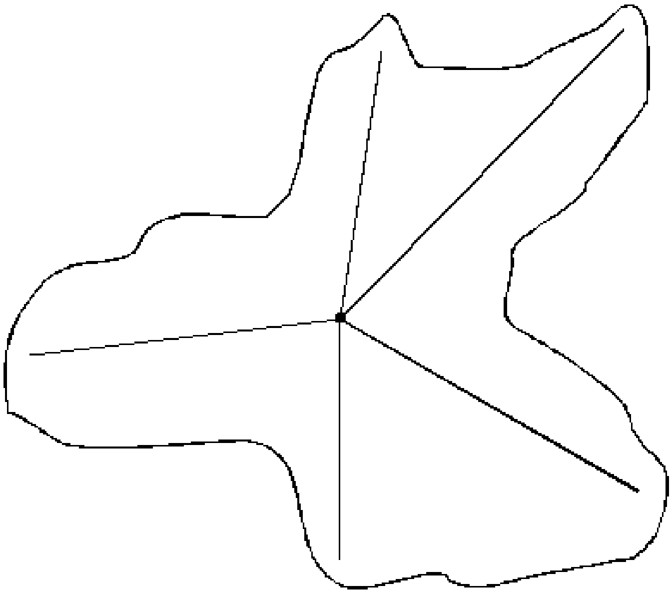


Abbildung 25: Sternförmiges Gebiet

15.1.5 Sternformiges Gebiet:

Unter einem sternförmigen Gebiet versteht man ein Gebiet im ℝ³, in dem es mindestens einen Punkt gibt, von dem aus es Geraden zu jedem anderen Punkt in dem Gebiet geben kann, die die Grenzlinien des Gebietes nicht überschneiden. Von diesem Punkt ausgehende Strahlen durchschneiden die Grenzlinien des Gebietes demnach genau einmal.

15.2 Orientierte und nicht orientierte Oberflächenintegrale

Allgemein betrachtet man Oberflächenintegrale ebenso wie Kurvenintegrale.

15.2.1 Orientiertes Oberflächenintegral:

Sei $\underline{x}:\ G \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^3$ eine Parameterdarstellung des Flächenstückes *F*. Es sei $\underline{f}:\ D \mapsto \mathbb{R}^3\ \left(F \subset D \subset \mathbb{R}^3\right)$ ein stetiges Vektorfeld. Dann heißt

$$\int_F \underline{f} \cdot d\underline{o} = \iint_G \left[\underline{f} \cdot \left(\underline{x}_u \times \underline{x}_v\right)\right] \cdot d(u,v)$$

orientiertes Oberflächenintegral von $\underline{f}$ auf *F*.

Ähnlich setzt man das komponentenweise zu berechnende Integral

$$\int_F \underline{f} \times d\underline{o} = \iint_G \left[\underline{f} \times \left(\underline{x}_u \times \underline{x}_v\right)\right] \cdot d(u,v).$$

15.2.2 Nicht orientiertes Oberflächenintegral:

Ist $\varphi : D \mapsto \mathbb{R} \quad \left(F \subset D \subset \mathbb{R}^3\right)$ eine stetige skalare Funktion so heißt

$$\int_F \varphi \cdot do = \iint_G \varphi\left(\underline{x}(u,v)\right) \cdot \left|\underline{x}_u \times \underline{x}_v\right| \cdot d(u,v)$$

nicht orientiertes Oberflächenintegral von φ auf *F*.

15.2.3 Rechenregeln:

15.2.3.1 Oberflächenintegrale verändern ihren Wert nicht, falls eine zulässige Parametertransformation durchgeführt wird.

15.2.3.2 Für reelle *a*, *b* , stetige Funktionen φ, ψ , und stetige Vektorfelder $\underline{f}$, $\underline{g}$ gilt:

$$\int_F \left(a \cdot \underline{f} + b \cdot \underline{g}\right) \cdot d\underline{o} = a \cdot \int_F \underline{f} \cdot d\underline{o} + b \cdot \int_F \underline{g} \cdot d\underline{o}$$

$$\int_F \left(a \cdot \varphi + b \cdot \psi\right) \cdot do = a \cdot \int_F \varphi \cdot do + b \cdot \int_F \psi \cdot do$$

15.2.3.3 Weitere Eigenschaften sind:

$$\int_{-F} \underline{f} \cdot d\underline{o} = -\int_F \underline{f} \cdot d\underline{o}$$

$$\int_{-F} \varphi \cdot do = \int_F \varphi \cdot do$$

$$\int_{F_1+F_2} \underline{f} \cdot d\underline{o} = \int_{F_1} \underline{f} \cdot d\underline{o} + \int_{F_2} \underline{f} \cdot d\underline{o}$$

$$\int_{F_1+F_2} \varphi \cdot do = \int_{F_1} \varphi \cdot do + \int_{F_2} \varphi \cdot do$$

15.2.3.4 Es gelten folgende Abschätzungen:

$$\left|\int_F \underline{f} \cdot d\underline{o}\right| \le \int_F \left|\underline{f}\right| \cdot \left|d\underline{o}\right|$$

$$\left|\int_F \varphi \cdot do\right| \le \int_F \left|\varphi\right| \cdot do$$

15.3.3 Explizit gegebene Funktionen:

Ist *F* explizit gegeben durch eine Funktion *z* = *f*(*x*,*y*), dann läßt sich sagen:

$$\underline{X}(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x,y) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{X}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x \end{pmatrix}, \ \underline{X}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \underline{X}_x \times \underline{X}_y = \begin{pmatrix} -f_x \\ -f_y \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$do = \left|\underline{X}_x \times \underline{X}_y\right| \cdot d(x,y) = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} \cdot d(x,y)$$

16. Integralsätze und Vektoranalysis

16.1 Satz von Gauß in Ebene und Raum

16.1.1 Divergenz eines Vektorfeldes:
Es gilt (übertragbar in Ebene und Raum):

$$\operatorname{div} \underline{v} = \operatorname{div} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = u_x + v_y + w_z$$

16.1.2 Satz von Gauß in der Ebene:
Sei G ein geeignetes Gebiet des $\mathbb{R}^2$ (sternförmig). Sei weiter die Randkurve ∂G so parametrisiert, daß G „links“ von ∂G liegt. Es sei $\underline{v}$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann gilt:

$$\int_{\P G} \underline{v} \cdot d\underline{x}^{\perp} = -\iint_G \operatorname{div} \underline{v}(\underline{x}) \cdot d(x, y)$$

$$\text{Mit } \underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q \\ -P \end{pmatrix} \text{ folgt :}$$

$$\int_{\P G} P \cdot dx + Q \cdot dy = \iint_G \left(Q_x - P_y\right) \cdot d(x, y)$$

16.1.3 Satz von Gauß im Raum:
Sei G ein geeignetes Gebiet des $\mathbb{R}^3$ (sternförmig). Die Randfläche sei durch $\underline{x}(u,v)$ so parametrisiert, daß $\underline{x}_u \times \underline{x}_v$ nach „außen“ zeigt. Es sei $\underline{v}$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann gilt:

$$\int_{\P G} \underline{v} \cdot d\underline{o} = \iiint_G \operatorname{div} \underline{v}(\underline{x}) \cdot d(x, y, z)$$

16.1.4 Fluß von $\underline{v}$ durch ¶G:
Als Fluß von $\underline{v}$ durch ∂G wird das Integral $\iint_{\P G} (\underline{v} \cdot \underline{n}) \cdot do$ bezeichnet.

16.1.5 Zirkulation von Vektorfeldern:
Sie ist für alle geschlossenen C definiert als

$$\int_C \underline{f} \cdot d\underline{x} = Z\ .$$

Ist $Z = 0$ bzw. $\operatorname{grad} j = \underline{f}$,
dann heißt das Vektorfeld $\underline{v}$ zirkulationsfrei.

16.2 Satz von Stokes

16.2.1 Rotation eines Vektorfeldes:
Die Rotation **rot $\underline{v}$** ist definiert als:

$$\operatorname{rot}\underline{v} = \operatorname{rot}\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_y - v_z \\ u_z - w_x \\ v_x - u_y \end{pmatrix}$$

Ist rot $\underline{v}$ = $\underline{0}$, so handelt es sich um ein wirbelfreies Feld. $\underline{v}$ ist dann ein Potentialfeld im entsprechenden Gebiet.

16.2.2 Satz von Stokes:
Es sei F ein Flächenstück definiert auf einem Parameterbereich $\overline{G} \subset \mathbb{R}^2$. Dieser sei so beschaffen, daß der Satz von Gauß anwendbar ist.

Außerdem sei die Abbildung $\underline{x}\colon \overline{G} \mapsto \mathbb{R}^2$, die F bestimmt, zweimal stetig differenzierbar. Ist nun das Vektorfeld $\underline{v}$ auf einem Gebiet, das F enthält, stetig differenzierbar, so gilt der

Satz von Stokes:

$$\int_F \operatorname{rot}\underline{v}\cdot d\underline{o} = \int_{\partial F} \underline{v}\cdot d\underline{x}$$

16.2.3 Vektorpotential:
Es sei $\underline{v}\colon \overline{G} \mapsto \mathbb{R}^3$ stetig differenzierbar und G sternförmig. Es existiert ein „Vektorpotential" a als ein in $\overline{G}$ stetig differenzierbares Feld mit $\operatorname{rot}\underline{a} = \underline{v} \Leftrightarrow \nabla \times \underline{a} = \underline{v}$, wenn in $\overline{G}$ folgendes gilt:

$$\operatorname{div}\underline{v} = u_x + v_y + w_z = 0$$

16.3 ∇-Rechnung (Nablarechnung)

16.3.1 ∇-Operator:
Er wird folgendermaßen definiert:

$$\nabla = \sum_{k=1}^{n} \underline{e}_k \cdot \frac{\partial}{\partial x_k} \qquad \text{im } \mathbb{R}^n$$

16.3.2 Rechenregeln:

Für skalare Felder φ, ψ und für Vektorfelder *f*, *g* gilt:

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot (j + y) &= \nabla \cdot j + \nabla \cdot y \\
\nabla \cdot (\underline{f} + \underline{g}) &= \nabla \cdot \underline{f} + \nabla \cdot \underline{g} \\
\nabla \times (\underline{f} + \underline{g}) &= \nabla \times \underline{f} + \nabla \times \underline{g} \\
\nabla \cdot (j\, y) &= j \cdot \nabla \cdot y + y \cdot \nabla \cdot j \\
\nabla \cdot (j \cdot \underline{f}) &= \underline{f} \cdot \nabla \cdot j + j \cdot \nabla \cdot \underline{f} = \underline{f} \cdot \operatorname{grad} j + j \cdot \operatorname{div} \underline{f} \\
\nabla \cdot (j \cdot \underline{f}) &= -\underline{f} \times \nabla \cdot j + j \cdot \nabla \times \underline{f} \\
\nabla \cdot (\underline{f} \times \underline{g}) &= \underline{g} \cdot (\nabla \times \underline{f}) - \underline{f} \cdot (\nabla \times \underline{g}) \\
\nabla \times (\underline{f} \times \underline{g}) &= \underbrace{\underline{f}_{\underline{x}}}_{\text{Matrix}} \cdot \underline{g} - \underline{g} \cdot (\nabla \cdot \underline{f}) + \underline{f} \cdot (\nabla \cdot \underline{g}) - \underbrace{\underline{g}_{\underline{x}}}_{\text{Matrix}} \cdot \underline{f} \\
\nabla \cdot (\nabla \cdot j) &= \Delta j = j_{xx} + j_{yy} + j_{zz} \\
\nabla \cdot (\nabla \times \underline{f}) &= 0 \\
\nabla \times (\nabla \cdot j) &= 0 \\
\nabla \times (\nabla \times \underline{f}) &= \nabla \cdot (\nabla \cdot \underline{f}) - \Delta \underline{f} = \nabla \cdot (\nabla \cdot \underline{f}) - (\underline{f}_{xx} + \underline{f}_{yy} + \underline{f}_{zz})
\end{aligned}
$$

16.4 Der Green'sche Integralsatz

16.4.1 Green'scher Integralsatz:

Es sei $\overline{G}$ ein Gebiet im ℝ³, so daß der Satz von Gauß gilt. Sind *u*, *v* auf zweimal stetig differenzierbar, dann gilt mit dem nach außen gerichteten Normaleneinheitsvektor $\underline{n}$ von ∂*G*:

$$\iiint_G (v \cdot \Delta u - u \Delta v) \cdot d(x, y, z) = \iint_{\P G} \left(v \cdot \frac{\P u}{\P \underline{n}} - u \cdot \frac{\P v}{\P \underline{n}} \right) \cdot \underline{n} \cdot do$$

Hierbei ist Δ der Laplace-Operator.

16.4.2 Anwendung:

Es sei *G* ein Gebiet, so daß der Satz von Gauß gilt, und es sei *U* zweimal stetig differenzierbar in $\overline{G} = G \cup \P G$. Gilt $\Delta u = 0$ auf *G*, so ist für $\underline{x}_0$ aus *G*:

$$U(\underline{x}_0) = \frac{1}{4p} \cdot \iint_{\P G} \left[\frac{1}{|\underline{x} - \underline{x}_0|} \cdot \frac{\P u}{\P \underline{n}} + \frac{(\underline{x} - \underline{x}_0) \cdot \underline{n}}{|\underline{x} - \underline{x}_0|^2} \cdot u \right] \cdot do$$

16.5 Exakte Differentialgleichungen

16.5.1 Exakte Differentialgleichungnen:
Eine Differentialgleichung der Form

$$P(x,y)+Q(x,y)\cdot y'=0$$

mit stetigen Funktionen $P,Q:\ G\mapsto\mathbb{R}$ heißt in G exakt, wenn es eine stetig differenzierbare Funktion *F* gibt die die folgende Bedingung erfüllt:

$$\operatorname{grad} F=\begin{pmatrix}P\\Q\end{pmatrix}$$

F muß also das Potential des Vektorfeldes $\begin{pmatrix}P\\Q\end{pmatrix}$ sein.

Häufig schreibt man exakte Differentialgleichung in der Form

$$P\cdot dx+Q\cdot dy=0\Leftrightarrow\begin{pmatrix}P\\Q\end{pmatrix}\cdot d\underline{x}=0\,.$$

Für das Potential *F* gilt: $F(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}P\cdot dx+Q\cdot dy$

16.5.2 Exakte Differentialgleichungen in sternförmigen Gebieten:
In sternförmigen Gebieten mit stetigen Funktionen $P,Q:\ G\mapsto\mathbb{R}$ gilt Folgendes:

$$P(x,y)+Q(x,y)\cdot y'=0$$

ist genau dann exakt, wenn

$$Q_x=P_y$$

gilt. Diese Bedingung heißt ***Integrabilitätsbedingung***.

16.5.3 Spezielle Vektorpotentiale:
Hat das Potential *F* die Form

$$F(x,f(x))=c\ \left[=F(x_0,y_0)\right],$$

dann ist *f*(*x*) Lösung der Differentialgleichung $P(x,y)+Q(x,y)\cdot y'=0$.

16.5.4 Singuläre Punkte von exakten Differentialgleichungen:
Diese ergeben sich aus diesem Gleichungssystem:

$$P(x_0,y_0)=0$$
$$Q(x_0,y_0)=0$$

16.5.5 Integrierender Faktor *m*(*x,y*):
Als integrierenden Faktor bezeichnet man den zweimal stetig differenzierbaren Term ***m*(*x,y*)**, der nicht null ist, welcher sich aus dieser Bedingung ergibt.

$$\frac{P\cdot m_x-Q\cdot m_y}{m}=Q_x-P_y$$

Damit werden nicht exakte Differentialgleichungen zu exakten Differentialgleichungen.

$$m\cdot P+m\cdot Q\cdot y'=0$$

Die Lösung erhält man dann wieder aus $F(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}m\cdot P\cdot dx+m\cdot Q\cdot dy$.

16.5.6 Bestimmung von integrierenden Faktoren für bestimmte Differentialgleichungen:

16.5.6.1 Stellt $j\left(x\right)=\dfrac{P_y-Q_x}{Q}$ eine nur von x abhängige Funktion dar, dann ist:

$$m(x)=e^{\int_{x_0}^{x} j\left(t\right)\cdot dt}$$

16.5.6.2 Stellt $y\left(y\right)=\dfrac{Q_x-P_y}{P}$ eine nur von y abhängige Funktion dar, dann ist:

$$m(y)=e^{\int_{y_0}^{y} y\left(t\right)\cdot dt}$$

16.5.7 Implizite Lösungen von nicht exakten Differentialgleichungen:

16.5.7.1 Wesentlich verschieden heißen zwei integrierende Faktoren *m* und *n*, wenn es keine reelle

Zahl λ gibt, so daß $m=l\cdot n$

16.5.7.2 Implizite Lösung: $\dfrac{m(x,y)}{n(x,y)}=c\,,\quad c\in\mathbb{R}$

A. Anhang: Tabellen und Kurzreferenzen

A.1 Trigonometrische Funktionswerte an besonderen Winkeln

α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$
0	0	1	0	$\pm\infty$
$\frac{p}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{p}{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1	1
$\frac{p}{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$
$\frac{p}{2}$	1	0	$\pm\infty$	0
π	0	-1	0	$\pm\infty$
$\frac{3p}{2}$	-1	0	$\pm\infty$	0
2π	0	1	0	$\pm\infty$

Tabelle 5: Trigonometrische Funktionswerte an besonderen Winkeln

A.2 Zusammenhänge der trigonometrischen Funktionen

	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$
$\sin\alpha =$		$\sqrt{1-\cos^2 a}$	$\frac{\tan a}{\sqrt{1+\tan^2 a}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2 a}}$
$\cos\alpha =$	$\sqrt{1-\sin^2 a}$		$\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 a}}$	$\frac{\cot a}{\sqrt{1+\cot^2 a}}$
$\tan\alpha =$	$\frac{\sin a}{\sqrt{1-\sin^2 a}}$	$\frac{\sqrt{1-\cos^2 a}}{\cos a}$		$\frac{1}{\cot a}$
$\cot\alpha =$	$\frac{\sqrt{1-\sin^2 a}}{\sin a}$	$\frac{\cos a}{\sqrt{1-\cos^2 a}}$	$\frac{1}{\tan a}$	

Tabelle 6: Zusammenhänge der trigonometrischen Funktionen

Hierbei liegt α im 1. Quadranten.

A.3 Additionstheoreme der trigonometrischen Funktionen

A.3.1 Summe und Differenz:

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cdot \cos b \pm \cos a \cdot \sin b$$
$$\cos(a \pm b) = \cos a \cdot \cos b \mp \sin a \cdot \sin b$$
$$\tan(a \pm b) = \frac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a \cdot \tan b}$$
$$\cot(a \pm b) = \frac{\cot a \cdot \cot b \mp 1}{\cot a \pm \cot b}$$

A.3.2 Vielfache:

$$\sin 2a = 2 \cdot \sin a \cdot \cos a$$
$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$$
$$\tan 2a = \frac{2 \cdot \tan a}{1 - \tan^2 a}$$
$$\cot 2a = \frac{\cot^2 a - 1}{2 \cdot \cot a}$$

$$\sin 3a = 3 \cdot \sin a - 4 \cdot \sin^3 a$$
$$\cos 3a = 4 \cdot \cos^3 a - 3 \cdot \cos a$$

$$\sin 4a = 8 \cdot \sin a \cdot \cos^3 a - 4 \cdot \sin a \cdot \cos a$$
$$\cos 4a = 8 \cdot \cos^4 a - 8 \cdot \cos^2 a + 1$$

A.3.3 Potenzen:

$$\sin^2 a = \frac{1}{2} \cdot (1 - \cos 2a)$$
$$\cos^2 a = \frac{1}{2} \cdot (1 + \cos 2a)$$

$$\sin^3 a = \frac{1}{4} \cdot (3 \cdot \sin a - \sin 3a)$$
$$\cos^3 a = \frac{1}{4} \cdot (3 \cdot \cos a + \cos 3a)$$

A.4 Einheitskreis

Am Einheitskreis lassen sich für einen gegebenen Winkel die trigonometrischen Funktionen ablesen.

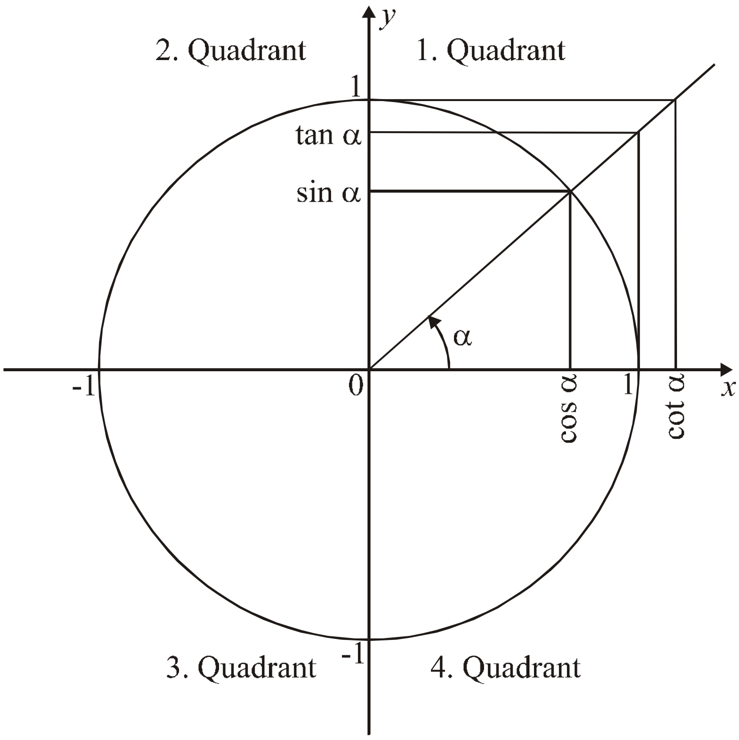


Abbildung 26: Einheitskreis