Франсуа Люка

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ РАЗВЛЕЧЕНИЯ

Мир
вокруг
нас

Франсуа
Люка

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ РАЗВЛЕЧЕНИЯ

(приложения арифметики, геометрии и алгебры к различного рода запутанным вопросам, забавам и играм)

МОСКВА — САНКТ-ПЕТЕРБУРГ 2010
КНИГОВЕК™
КНИЖНЫЙ КЛУБ | BOOK CLUB

УДК 51
ББК 22.10
Л94

Разработка оформления серии художника
Е. Березиной
Литературная обработка *А. Лидина*

Люка Ф.

Л94 Математические развлечения: приложения арифметики, геометрии и алгебры к различного рода запутанным вопросам, забавам и играм / Пер. с фр. Ю. Гончарова. — М.: Книжный Клуб Книговек; СПб.: Северо-Запад, 2010. — 256 с. — (Мир вокруг нас).

ISBN 978-5-4224-0066-9

Книга французского математика профессора Франсуа Люка (1842—1891) объясняет, каким образом можно использовать арифметику, геометрию и алгебру в решении различного рода задач, учит с пользой для ума проводить свой досуг и отчасти дополняет «Научные развлечения» Гастона Тиссандье, уже выходившие в данной серии. В книге подробно рассматриваются такие классические математические игры, как «Солитер», «Меледа» и «Такеан».

Автор, известный математик, первым описал свойства чисел, впоследствии названных его именем — числами Люка. Он также много внимания уделял популяризации математических знаний, придумал ряд интересных задач, в том числе известную головоломку «Ханойская башня».

УДК 51
ББК 22.10

ISBN 978-5-4224-0066-9

ПРЕДИСЛОВИЕ

> Человек так жалок, что способен скучать даже без всякой причины, единственно в силу своей организации, и так легкомыслен, что, имея тысячи причин к скуке, находит развлечение даже в катании шаров по бильярду.
>
> — С какой же это целью? — спросите вы. — Да просто с той, чтобы завтра похвастаться перед своими друзьями, что он играет лучше других. Точно так же есть люди, ломающие себе головы в тиши кабинетов, из желания показать ученому миру, что они нашли до сих пор еще не найденное решение какой-нибудь алгебраической задачи.
>
> *Паскаль*

В обществе не принято говорить о себе или о своих близких. В предисловии к книге, это, напротив, считается обязательным. Сколько бы ни восставали, из приличия, против такого правила, — оно слишком заманчиво для тщеславия авторов, чтобы когда-нибудь выйти из употребления. Поэтому и я позволю себе сказать несколько слов о своей книге.

Она была задумана двадцать лет тому назад, когда я мечтал также издать разбросанные в различных журналах статьи Ферма[1], одного из величайших гениев человечества. Его глубокомысленные исследования должны были представлять в то время немало трудностей, особенно у нас, во Франции, где высшая арифметика находится в пренебрежении у математиков и не пользуется правом гражданства в официальных школах[2]. На этих исследованиях я обосновал большую часть своих собственных работ и личных выводов.

Кроме того, так как сочинения Ферма возбуждали множество библиографических вопросов, разрешенных мной лишь в недавнее время, то мне пришлось разыскивать манускрипты и заниматься изысканиями, которые, надеюсь, вскоре увенчаются полным успехом. Словом, работы по изданию мешали составлению книги; книга, в свою очередь, мешала изданию, а им обоим — мои профессиональные занятия. Может быть, некоторую роль играл в этом случае и тот закон природы, в силу которого произведения человеческого ума, точно так же, как появляющиеся на свет дети, должны быть зачаты в наслаждении, выношены в страданиях и рождены в муках.

Читатель, пожалуй, удивится, что меня занимали такие, в сущности, «пустяки», и спросит: «Для какой цели служит эта книга?» На этот вопрос мне хотелось бы ответить несколько сентиментальными объяснениями Баше[3], а именно: «*Книги — это дети нашего ума, и не говоря уже о том, что отцы вообще склонны любить своих детей, они с особенной нежностью относятся к своим первенцам; поэтому, выпуская свою первую книгу, я, конечно, очень дорожу этим первен-*

цем своего ума и, не довольствуясь одним только произведением его на свет, хочу еще обеспечить ему долговечность».

Баше приводит еще один более солидный аргумент, и я воспользуюсь им также в свое оправдание. *«Кроме того, я не думаю, говорит он, чтобы читатель, ознакомившись хоть немного с содержанием моей книги, нашел ее такой же ничтожной, как и взглянув на одно только ее заглавие. Правда, в ней нет ничего, кроме игр, имеющих главной целью дать обществу благородное развлечение и приятное занятие, но чтобы придать этим играм занимательность, потребовалось немало остроумия и нужно было обладать недюжинными познаниями в науке о числах для придумывания доказательств, и нескольких новых интересных задач, приведенных мной в книге».*

Впрочем, чего только не отрицали под предлогом бесполезности? Когда в присутствии Малерба[4] хвалили комментарии Баше к Диофанту[5], тот спросил:

— А разве от этого уменьшатся цены на хлеб?

В золотой век трагедий Роберваль[6], выходя из театра, высказал фразу, ставшую впоследствии классической:

— К чему все это?

Всегда были и будут ученые, относящиеся с пренебрежением к фантазии, поэты, отрицающие пользу науки, и практические люди, склонные смотреть с безграничным презрением на поэтов и ученых, считая их идеалистами и отвлеченными мыслителями. И во всем этом нет ничего прискорбного. Разве разделение труда, это достижение новейшей цивилизации, и развитие преобладающих склонностей, основное требование современной эстетики, не предполагают в личности уничтожение некоторых способностей и не производят в мозгу человека какую-то пустоту, вроде не занятой кубиком клетки *такена* (игра в пятнадцать)? Пустота эта необходима для течения и группировки идей, и без нее вся прелесть систематизирования, вся энергия отрицания, все тайны специальностей слились бы в синкретизме глупца и в апатии животного.

Знание есть сила. Это изречение справедливо относительно каждой области деятельности. Воплотить в музыкальной фразе или в стихе никогда не слыханный и незабываемый ритм, воспроизвести на полотне невиданные краски, олицетворить в мраморе прелесть и безобразие формы — разве это не сила, если только под силой разуметь способность создавать целый мир идей и ощущений! Собрать с благоговением неофита остатки прошлого и придать им новое обаяние посредством изящного стиля — разве это не сила, если под силой разуметь способность воскрешать умерших деятелей! Парить мыслью в пространстве, во времени и в движении, без всякого другого ограничения, кроме мощи собственного полета, — разве это не сила, если называть силой способность открывать новые явления природы, «повелевать громами», вызывать исчезнувшие миры, соединять при помощи нескольких цифр планеты, обреченные на вечную неизвестность одна для другой! Насколько эти слова Бэкона справедливы для артиста, ученого, химика, физика, астронома, настолько же они справедливы и для математика. Расчленяя результаты вычисления, создавая абстракции, комбинируя, преобразовывая, варьируя их, математик укрепляет способность мышления и приобретает бесконечную власть над этим универсальным орудием всякого творчества.

Кто-то уподоблял составление книги беседе с неизвестными друзьями. Та часть моего труда, которая была помещена в «Revue scientifique»[7], обеспечила мне не только симпатизирующих читателей, но и помощников. Мне часто придется упоминать впоследствии о прелестных сообщениях, остроумных заметках, изящных решениях задач многими лицами, имена которых я назову в свое время. Здесь же я желаю только выразить мою искреннюю благодарность Карлу Генри, молодому человеку, помогавшему мне довольно продолжительное время и с дружеским усердием взявшему на себя труд по библиографическим изысканиям и чтению корректуры.

В заключение скажу еще, что сочту себя вполне удовлетворенным, если эти страницы понравятся нескольким ученым, если они заинтересуют вообще хотя бы немногих образованных читателей и если пробудят в некоторых молодых умах склонность к рассуждению и любовь к умственным наслаждениям.

ГЛАВА 1. ПЕРЕПРАВЫ В ЛОДКЕ

Главный недостаток многих ученых состоит в том, что они находят удовольствие лишь в туманных и напыщенных рассуждениях; между тем как для упражнения их ума представляется столько важных по своему значению реальных предметов, которые могли бы быть разработаны с пользой для общества. Охота, рыбная ловля, торговля, морские путешествия и даже игры, как требующие ловкости, так и основанные на случайности, дают громадный материал для научных занятий. Мало того, самые обыкновенные детские забавы могли бы привлечь внимание величайшего математика.

Лейбниц[8]

ИСТОРИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ. БИОГРАФИЯ БАШЕ

В первой главе мы разместили несколько исправленных и обобщенных задач, известных еще в древности и относящихся к геометрии порядка (de l'ordre) и положения (de la situation).

Происхождение этих задач нам неизвестно.

Представить себе наглядно переправу через реку можно при помощи колоды карт, но это лишь в том случае, когда в задаче говорится только о трех или четырех семьях, если же их больше, то берут несколько колод. Игральные карты можно также заменить нумерованными жетонами белого и красного цвета или двух каких-нибудь других цветов. Внимательно прочитав объяснение задачи, приводимой ниже, по тексту самого Баше, легко освоиться с приемами решения. Баше, один из первых французских математиков, коснулся в своих сочинениях арифметики и геометрии положений.

Клод Гаспар де Баше де Мезирьяк, родившийся в Бурк-ан-Бресс[9] в 1581 году и умерший в 1638 году, был известным математиком и литератором. После путешествия в Италию вместе с грамматиком Вожлà[10] ему было предложено преподавать математику Людовику XIII[11]. Однако Баше не отличался тщеславием и потому не только не принял это предложение, но поспешил даже уехать из столицы в страшном испуге, уверяя, что он никогда еще не испытывал такого беспокойства, и что при одной только мысли занять это место ему уже казалось, будто на его плечах лежит тяжелое бремя королевства. Вернувшись на родину, он женился, по-видимому, сделав хороший выбор, поскольку сам считал свое супружество чрезвычайно счастливым. Окруженный спокойствием домашней жизни, он открыл решение неопределенного уравнения первой степени в целых числах, напечатал несколько работ, в том числе и свои знаменитые комментарии к Арифметике Диофанта (Paris, 1621 год).

ПЕРЕПРАВА РОТЫ СОЛДАТ В ЧЕЛНОКЕ

Рота пехотинцев подходит к берегу реки, но оказывается, что мост сломан и перейти реку вброд невозможно. Командир замечает у берега двоих детей, играющих в челноке, до того маленьком, что в нем может поместиться лишь один солдат. Как поступит командир, чтобы перевезти через реку всех солдат своей роты?

Дети переезжают вместе на противоположный берег; один из них там и остается, а другой возвращается с лодкой. Потом переезжает через реку солдат, а мальчик, оставшийся на противоположном берегу, приводит лодку обратно.

Таким образом, при двух переправах взад и вперед переезжает один солдат; и это продолжается до тех пор, пока не будет перевезена вся рота, а также ее командир и остальные офицеры.

ЗАТРУДНИТЕЛЬНЫЙ СЛУЧАЙ ПЕРЕПРАВЫ

Требуется доставить на противоположный берег реки волка, козу и кочан капусты в такой маленькой лодочке, которая может поднять только лодочника и одного из этих своеобразных пассажиров, причем необходимо устроить переправу так, чтобы в отсутствие лодочника волк не съел козу, а коза — капусту.

Лодочник перевезет прежде всего козу, потом вернется за волком и, переправив его на противоположную сторону, возьмет козу с собой обратно, оставит ее на берегу, отвезет капусту и, наконец, переправит и козу. Благодаря таким предосторожностям, волк не останется в компании с козой, а коза — в соседстве с капустой.

ПЕРЕПРАВА ТРЕХ СЕМЕЙ

Три ревнивых мужа желают переехать со своими женами через реку и думают воспользоваться для этого лодкой, которая так мала, что в ней могут поместиться только двое. Спрашивается, как им переправиться при том условии, чтобы ни одна женщина не оставалась в обществе мужчин в отсутствие своего мужа?

Вот как решается эта задача: назовем ревнивых мужей большими буквами A, B, C, а их жен — соответствующими малыми a, b, c. Тогда, до переправы, будем иметь:

Правый берег			Левый берег		
C	B	A			
c	b	a			

И решение задачи представится в таком виде:

1. Прежде всего переезжают две женщины.

Правый берег			Левый берег		
C	B	A			
c				b	a

2. Одна женщина возвращается и увозит третью.

Правый берег			Левый берег		
C	B	A			
			c	b	a

3. Одна женщина возвращается и остается со своим мужем, а двое других мужчин переезжают.

Правый берег			Левый берег		
C				B	A
c				b	a

4. Один муж возвращается со своей женой, которую он оставляет на правом берегу, а сам переправляет мужа другой женщины.

Правый берег			Левый берег		
			C	B	A
c	b				a

5. Женщина возвращается и перевозит одну из своих подруг, остававшихся на правом берегу.

Правый берег			Левый берег		
			C	B	A
c				b	a

6. Одна из переехавших женщин возвращается за последней из своих подруг.

Правый берег			Левый берег		
			C	B	A
			c	b	a

При помощи наглядного представления этой задачи, посредством карт или жетонов, легко понять приводимое нами здесь рассуждение Баше:

«С первого взгляда, — говорит он, — может показаться, что эта задача не имеет решения, но условие, требующее, чтобы ни одна женщина не оставалась с другими мужчинами в отсутствие своего мужа, должно помочь нам в отыскании посредством логических умозаключений ответа на предложенный вопрос. И действительно, если переезжать могут не более как попарно, то необходимо, чтобы это сделали или двое мужчин вместе, или две женщины, или мужчина и женщина. Но в первую переправу нельзя отпустить двоих мужчин (потому что тогда, вопреки условию, один мужчина остался бы с тремя женщинами), следовательно, необходимо, чтобы переехали или две женщины, или муж с женой, что, в сущности, безразлично, так как если переедут две женщины, то одна из них должна вернуться с лодкой, а другая останется на берегу, а если переедет муж с женой, то опять-таки останется жена, а муж поведет лодку обратно (женщине нельзя ее вести, так как она очутится тогда в обществе двух мужчин без своего мужа).

При второй переправе двое мужчин не могут переехать вместе, потому что в таком случае один из них оставил бы свою жену в обществе другого мужчины. Мужу с женой точно так же нельзя переправиться, потому что на противоположном берегу он оказался бы с двумя женщинами; следовательно, необходимо, чтобы переехали две женщины, после чего одна из них возвратится с лодкой. Затем, при третьей переправе, когда на правом берегу находятся трое мужчин и одна женщина, очевидно, что две женщины не могут переехать, так как и оставалась там лишь одна. Для мужа с женой это оказывается тоже невозможным, потому что тогда мужчина был бы с тремя женщинами.

Следовательно, необходимо переехать двоим мужчинам и присоединиться, таким образом, к своим женам, оставив третью семью на правом берегу. Но кто поведет лодку обратно?

Мужчина этого не может сделать, потому что он оставил бы свою жену в обществе другого мужчины, для женщины это также невозможно, потому что она очутилась бы в обществе двух мужчин без своего мужа. Отводить лодку двоим мужчинам нет расчета — они вернулись бы только на прежнее место; следовательно, остается одно средство, а именно: чтобы лодку отвели муж с женой.

При четвертой переправе, когда приходится переезжать двум семьям, муж с женой, очевидно, не могут ехать, потому что это значило бы вернуться к прежнему распределению; две женщины тоже не должны переезжать, так как три женщины были бы тогда в обществе одного мужчины. Следовательно, необходимо переправиться двоим мужчинам. После этого для возвращения лодки нельзя употребить двоих мужчин, потому что это значило бы вернуть их на прежнее место; одному мужчине также нельзя этого сделать, так как он очутился бы в обществе двух женщин. Следовательно, нужно, чтобы женщина отправилась дважды за обеими своими подругами, оставшимися на правом берегу, что составит пятую и шестую переправы. Таким образом, в шесть раз все три семьи будут перевезены без нарушения условия».

Это рассуждение доказывает, что предложенная задача допускает только одно решение — именно в шесть переправ — ни больше ни меньше.

ОШИБКА ТАРТАЛЬИ[12]

Тарталья, знаменитый итальянский математик, родился в Брешии[13] ок. 1499 года и умер в 1557 году. Он раньше Паскаля создал теорию арифметического треугольника и прежде Кардано[14] – способ решения уравнений 3-й степени. В своем «Trité d'Arithmetique»[15] Тарталья задумал решить задачу относительно переправы четырех семей, сохраняя все прежние условия. Но это была ошибка со стороны великого ученого. Указав на нее, Баше нашел, что решение такой задачи невозможно, хотя и не подтвердил своего мнения доказательством.

Вот как объясняется невозможность решения этой задачи, когда условие требует, чтобы переезжали не более двух человека за раз. Прежде всего должно заметить, что от одной переправы до другой число перевезенных если и увеличивается, то не больше как на единицу. Предположим теперь, что перевезены сначала двое, потом трое, затем четверо, с соблюдением требуемых условий, и посмотрим, возможно ли перевезти пятого. Эти пять человек могли бы быть перевезены только одним из следующих четырех способов.

4 женщины	3 женщины	2 женщины	1 женщина
1 мужчина	2 мужчин	3 мужчин	4 мужчин

Но первые два случая невозможны по условию задачи, потому что тогда на левом берегу женщины оказались бы в большинстве. Точно так же невозможен и третий случай, так как женщин было бы при этом больше, чем мужчин на правом берегу.

Что же касается последнего случая, то он был бы возможен лишь при том условии, если бы в предыдущую переправу переехали или двое мужчин, или муж с женой. Но этого нельзя допустить, потому что тогда на правом берегу оказалось бы или двое мужчин и три женщины, то есть то же, что и во втором случае, или один мужчина и четыре женщины, то есть то же, что и в первом случае. Следовательно, пятая переправа является при этих условиях задачи невыполнимой.

ПЕРЕПРАВА ЧЕТЫРЕХ СЕМЕЙ

Впрочем, если лодка поднимает троих, задача, как это доказал Лабон[16], может быть решена при соблюдении всех остальных условий. Назовем четырех мужчин, или при наглядном способе решения задачи королей различной масти из колоды карт, большими буквами A, B, C, D, а четырех женщин, или дам, соответствующими малыми буквами a, b, c, d.

До переправы у нас будет:

Правый берег				Левый берег			
D	C	B	A				
d	c	b	a				

Допустив, что лодка поднимает троих, мы станем поступать следующим образом:

1. Сначала перевезем трех дам.

Правый берег				Левый берег			
D	C	B	A				
d					c	b	a

2. Одна дама или две вернутся и перевезут четвертую.

Правый берег				Левый берег			
D	C	B	A				
				d	c	b	a

3. Одна дама возвратится, останется со своим мужем, прочие же короли переедут.

Правый берег				Левый берег			
D					C	B	A
				d	c	b	a

4. Один король возвратится со своей женой и увезет последнего короля.

Правый берег				Левый берег			
				D	C	B	A
d					c	b	a

5. Король возвратится за своей женой.

Правый берег				Левый берег			
				D	C	B	A
				d	c	b	a

ОБЩАЯ ЗАДАЧА НА ПЕРЕПРАВЫ

Основываясь на этом частном примере, можно обобщить задачу и выразить ее таким образом:

Некоторое число n *семей желают переправиться через реку в лодке, поднимающей* (n–1) *человек. Спрашивается, как должны переправляться эти 2n человек при том условии, чтобы ни одна женщина не оставалась в обществе мужчин без своего мужа?*

Для решения этой задачи мы предположим число семей больше четырех и назовем:

мужей — буквами M, L, B, A,
их жен — буквами m, l, b, a.

До переправы у нас будет:

Правый берег							Левый берег						
M	L				B	A							
m	l				b	a							

Теперь станем поступать следующим образом:

1. Прежде всего переезжают (n — 1) женщин.

Правый берег							Левый берег						
M	L				B	A							
m								l				b	a

2. Одна из женщин возвращается за своей оставшейся подругой.

Правый берег							Левый берег						
M	L				B	A							
							m	l				b	a

3. Одна женщина возвращается и остается со своим мужем, другие мужья переезжают.

Правый берег							Левый берег						
M								L				B	A
m								l				b	a

4. Одна пара возвращается на правый берег и перевозить оставшуюся.

Правый берег							Левый берег						
							M	L				B	A
							m	l				b	a

Переправа совершилась в четыре приема, между тем как для четырех семей нужно было сделать пять поездок. Но мы видели, что последняя поездка производилась два раза, так как после третьей на правом берегу оставалось еще четыре человека, а перевезти можно было только троих.

ДРУГОЕ ОБОБЩЕНИЕ ЗАДАЧИ

Изложение предыдущей задачи в общем виде было предложено Лабоном, который дал и решение, хотя оно далеко не так просто, как только что приведенное нами. Прежде всего мы замечаем, что обобщение Лабона как будто не отличается законченностью. Оно не вполне согласуется с идеей, заключающейся в изложении задачи о трех ревнивых мужьях. Из предыдущей схемы видно, что возможно перевезти девять семей в лодке, поднимающей, по крайней мере, восемь человек. Однако легко убедиться, что эта переправа осуществима и в лодке, поднимающей шесть человек. В самом деле, при решении задачи о трех семьях можно ввести такое условие, что каждая семья состоит из трех человек и переправа совершится согласно приведенной нами первой схеме в том предположении, что посредством Aa, Bb, Cc обозначены семьи из трех членов.

Следовательно, общее изложение задачи о переправе n семей представится в таком виде:

Некоторое число n *мужчин желают переправиться со своими женами через реку. Спрашивается, какое наименьшее число* x *человек должна поднимать лодка, чтобы совершить эту переправу без перевозчика и при* *том условии, чтобы ни одна женщина не оставалась ни в лодке, ни на берегу без своего мужа в обществе мужчин.*

Решение этой задачи мы приводим в Примечании 1, помещенном в конце книги.

ПЕРЕПРАВА С ОСТАНОВКОЙ НА ОСТРОВЕ

В заключение этой серии развлечений мы прибавим, что есть еще способ обобщить задачу о ревнивых мужьях посредством весьма простого и остроумного метода, идею которого дал нам в 1879 году на *конгрессе французского общества наук*, в Монпелье[17], юный воспитанник местного лицея Каде де Фонтене. В самом деле, достаточно предположить, что во время переправы через реку можно предварительно высаживаться на остров, и тогда, при сохранении всех условий первой задачи, легко перевезти сколько угодно семей в лодке, поднимающей только двоих пассажиров. Таким образом мы дадим полное решение следующего вопроса: *Как перевезти через реку, на которой есть остров, где можно остановиться, известное число семей, в лодке, поднимающей только двоих, и при том условии, чтобы ни одна женщина не оставалась ни на берегу, ни в лодке, ни на острове в обществе мужчин без своего мужа?*

Мы предположим сначала число семей равным, по крайней мере, четырем. Тогда переправа должна выразиться в трех различных фазах.

Начальная фаза переправы. Тут прежде всего необходимо перевезти одну семью на левый берег и другую на остров. Это достигается посредством пяти переездов. Причем после каждого из них лодка причаливает к острову.

Правый берег				Остров				Левый берег			
D	C	B	A								
d	c	b	a								

1. Две женщины переезжают на остров.

Правый берег				Остров				Левый берег			
D	C	B	A								
d	c					b	a				

2. Одна из них возвращается за третьей.

Правый берег				Остров				Левый берег			
D	C	B	A								
d					c	b	a				

3. Одна женщина возвращается и остается со своим мужем, а двое мужей присоединяются к своим женам.

Правый берег				Остров				Левый берег			
D	C					B	A				
d	c					b	a				

4. Обе женщины переезжают с острова на левый берег реки и одна из них возвращается на остров.

Правый берег				Остров				Левый берег			
D	C					B	A				
d	c					b					a

5. Мужчины с острова переправляются на левый берег и один из них возвращается на остров к своей жене.

Правый берег				Остров				Левый берег			
D	C					B					A
d	c					b					a

Промежуточная фаза. Теперь нужно:

— во-первых, перевезти с правого берега одну из оставшихся там пар на остров;

— во-вторых — переправить одну пару с острова на левый берег, для чего требуется четыре переезда, и после каждого из них лодка должна по-прежнему приставать к острову.

1. Один мужчина переезжает на правый берег с острова, а две женщины отправляются туда.

Правый берег				Остров				Левый берег			
D	C	B									A
				d	c	b					a

2. Одна женщина возвращается с острова и остается со своим мужем, а двое других мужчин отправляются к своим женам на остров.

Правый берег				Остров				Левый берег			
D					C	B					A
d					c	b					a

3. Двое мужчин переезжают на левый берег, а жена одного из них отправляется на остров.

Правый берег				Остров				Левый берег			
D									C	B	A
d					c	b	a				

4. Две женщины переезжают на левый берег с острова, после чего один из мужчин возвращается туда.

Правый берег				Остров				Левый берег			
D					C					B	A
d					c					b	a

Эти переезды следует повторять до тех пор, пока на правом берегу и на острове не останется по одной семье. *Заключительная фаза.* Теперь приходится переправить на левый берег две семьи — одну с правого берега, другую — с острова; для этого потребуются три переезда, причем последний хотя и совершается дважды, но может приниматься за один.

1. Мужчина с острова возвращается на правый берег за последним из оставшихся там своих товарищей.

Правый берег				Остров				Левый берег			
					D	C				B	A
d						c				b	a

2. Мужчины с острова переезжают на левый берег, откуда одна из женщин возвращается на остров.

Правый берег				Остров				Левый берег			
								D	C	B	A
d					c	b	a				

3. Обе женщины с острова переправляются на левый берег, после чего одна из них перевозит туда же и свою подругу, остававшуюся на правом берегу.

Правый берег				Остров				Левый берег			
								D	C	B	A
								d	c	b	a

Следовательно, при четырех семьях переправа происходит в двенадцать переездов, а если бы семей было **n**, то она совершилась бы, самое большее, **в 4 (n – 1)** переездов.

ГЛАВА 2. МОСТЫ И ОСТРОВА

> Бывают умы различного склада, точно так же, как различные характеры и выражения лиц. То, что у одних людей вызывает полнейшее равнодушие, у других вызывает восторг. В этом-то и состоит гармония Вселенной.
>
> *Озанам*[18]

> Пока не перейдешь моста, не смейся над его владельцем.
>
> *Средневековая пословица*

В числе работ различных математиков, занимавшихся той ветвью математики, которую принято называть геометрией положения (geometrie de situation), мы прежде всего встречаем знаменитые мемуары Эйлера[19], известные под названием «Задачи о *кенигсбергских мостах*».

МЕМУАРЫ ЭЙЛЕРА

1. Кроме той отрасли геометрии, в которой рассматриваются величины и способы измерения и ко-

торая тщательно разрабатывалась еще в глубокой древности, Лейбниц первый упомянул о другой ветви этой науки, до сих пор пока очень мало известной и названной им geometria situs (геометрия положения). По его мнению, эта часть геометрии исключительно занимается порядком и относительным положением тел между собой независимо от их величины. Какие же задачи принадлежат этой науке, какие методы должны употребляться для их разрешения? Вот вопросы, которые не были еще определены с достаточной ясностью. Недавно мне пришлось слышать об одной задаче, по-видимому, относящейся к геометрии положений, так как в ее условиях заключаются требования только относительно порядка, но не измерения, и я решился изложить здесь, в виде образца, найденный мной способ решения этой задачи.

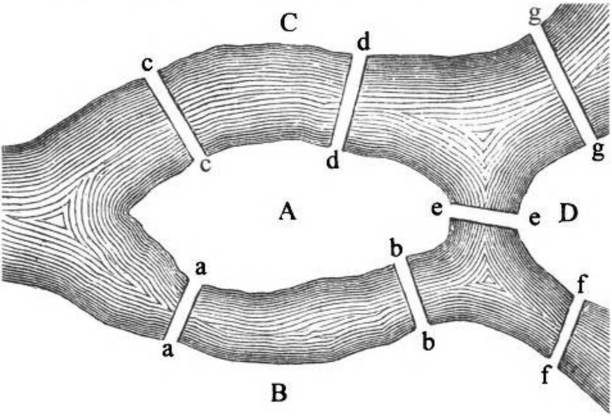


Рис. 1. Кенигсбергские мосты в 1759 году

2. В Кенигсберге есть остров, называемый Кнейпгоф. Омывающая его река делится на два рукава (рис. 1), через которые перекинуто семь мостов a, b, c, d, e, f, g. Возможно ли при таких условиях обойти все мосты, не побывав ни на одном из них по два раза? Некоторые говорят, что это, по-видимому, возможно; другие, напротив, находят такое требование неосуществимым. Однако никто не убежден в справедливости своего мнения. Поэтому я предложил себе следующую задачу, выразив ее в общем виде:

При каком угодно очертании реки, разделении ее на рукава и числе образуемых ею островов, а также при каком угодно количестве перекинутых через нее мостов определить: возможно ли обойти их всех, не побывав ни на одном из них по два раза?

3. Что касается частного примера задачи о семи кенигсбергских мостах, то, очевидно, она была бы разрешена, если бы перечислить все возможные случаи переходов, и тогда, смотря по характеру составленных комбинаций, мы получили бы ответ на предложенный вопрос. Но вследствие значительного числа перестановок способ этот, медленный и затруднительный даже в частном случае, оказался бы положительно неприменимым при большем количестве мостов. С другой стороны, многие из этих перестановок окажутся настолько бесполезными, что по окончании операции может встретиться масса результатов, вовсе не относящихся к делу. Вот в чем, без сомнения, и состоит громадная трудность задачи[20]. Поэтому, оставив в стороне подобные соображения, я задался мыслью, нельзя ли придумать такой способ решения, который

позволял бы с первого же раза судить о возможности или невозможности задачи, и мне казалось, что такой способ должен быть гораздо проще[21].

4. Основываясь на этом, нетрудно убедиться, что весь метод решения задачи зиждется на том, как обозначить различные пути наиболее подходящим образом. С этой целью буквами A, B, C, D я называю различные местности, отделенные рукавами реки; тогда переход из A в B (все равно, будет ли он совершен через мост a или через мост b) выразится комбинацией AB, где первая буква показывает место отправления, а вторая — место прибытия. Точно так же переход из B в D, например через мост f, изобразится комбинацией BD, а оба последовательных перехода вместе — через ABD. Таким образом, промежуточная буква B показывает в одно и то же время место прибытия после первого перехода и место отправления при втором.

5. В следующем переходе из D в C через мост g выражаю все три последовательных перехода комбинацией ABDC из четырех букв, причем обозначение это показывает, что переход из A в C совершился путем предварительного прохождения через места B и D. Но так как эти четыре места отделены одно от другого рукавами реки, то на пути должны были встретиться три моста. Подобным же образом переход через четыре моста выразится пятью буквами, а переход через n мостов формулой (n+1) буквами. Следовательно, в задаче о семи кенигсбергских мостах переход через них должен быть обозначен восемью буквами.

6. Заметим, что в этом обозначении не принято в расчет указание мостов, по которым совершается

переход, потому что мосты, соединяющие одни и те же местности, очевидно, могут быть заменены, при каждом переходе одни другими. Таким образом, в задаче о семи мостах полный обход изображается восемью буквами; но эти восемь букв должны быть расположены таким образом, чтобы A и B, непосредственно следуя одно за другим в порядке AB или AB, встречались два раза, так как местности A и B соединяются двумя мостами. Подобным же образом и комбинация букв A и C должна входить два раза, а совокупность B и D или C и D – только по одному разу.

7. Задача в ее частном случае сводится, следовательно, к тому, чтобы при помощи четырех букв A, B, C, D составить ряд из восьми букв, в котором все вышеприведенные комбинации встречались бы необходимое число раз. Но прежде чем сделать это, нужно спросить себя, осуществимо ли такое требование, и если окажется (что, собственно, и имеет место в данном случае), что подобное соединение букв невозможно, то бесполезно и трудиться над решением предложенной задачи. И вот я нашел правило, позволяющее во всяком конкретном случае безошибочно ответить на вопрос о возможности решения задачи относительно мостов.

8. С этой целью я рассматриваю исключительно одну только местность A, соединенную с другим некоторым количеством мостов a, b, c, d, e и так далее. Начнем с моста a. Прежде всего я замечаю, что путешественник, прошедший по этому мосту, должен был находиться в A или до своего перехода, или после него. Следовательно, в каком бы направлении он ни

сделал это, буква A появится в принятом обозначении только один раз. Предположим теперь, что три моста a, b c ведут к местности A. Если путешественник перейдет их все, то буква A в комбинации, изображающей эти переходы, встретится два раза, все равно, выйдет ли путешественник из этой местности или из какой-нибудь другой. В первом случае — ABAC, во втором — CABA или BACA, смотря по тому, соединено ли место A двумя мостами с B или с C. Точно так же, если пять мостов ведут в A, то буква A встретится в обозначении перехода через все эти мосты три раза. Вообще, если число мостов, соединяющих берега данного места A с его окрестностями, нечетное, то означающая его буква встретится в символическом изображении полного перехода такое число раз, которое равняется половине количества всех мостов, увеличенной на единицу. Другими словами, если число мостов равно 2n+1, то буква A войдет в формулу (2n+2) : 2 или n+1 раз.

9. В кенигсбергской задаче из семи мостов пять примыкают к острову A и по три — к каждой из остальных местностей B, C и D, так что в формуле для полного перехода буква A должна встретиться три раза, а B, C и D — по два раза; следовательно, эта формула должна бы была содержать в себе 9 букв, а не 8, как это мы и нашли раньше при помощи других соображений. Отсюда можно заключить, что задача перейти через все кенигсбергские мосты по одному разу — неразрешима.

10. То же самое рассуждение применяется ко всем частным примерам, в которых число мостов, примыкающих к различным местностям, будет дано нечет-

ное; оно же указывает возможность определить и случаи неосуществимости перехода. В самом деле, если окажется, что общее число всех букв в формуле не равно числу всех мостов, увеличенному на единицу, то задача неразрешима.

Кстати заметим, что правило, данное нами для определения числа повторений буквы А при нечетном количестве мостов известной местности, применимо во всяком случае: будет ли соединен берег А мостами с одной местностью В или с каким угодно их числом.

11. Но когда количество мостов, идущих от А, четное, то необходимо различать два случая, смотря по тому, отправляется ли путешественник из А или из какого-нибудь другого места. Действительно, если из А ведут два моста и если путешественник отсюда же и вышел, то буква А должна быть повторена два раза (АВА): первый раз, чтобы обозначить отправление через один из мостов, а второй, чтобы выразить возвращение по другому мосту. Но если путешественник начал свою экскурсию из другого места, то буква А встретится в формуле только один раз (ВАВ) и будет обозначать, согласно условиям, как прибытие в А по одному из мостов, так и отправление оттуда по другому.

12. Предположим, что четыре моста ведут в местность А и что путешествие начинается с нее же. Тогда формула перехода будет содержать три раза букву А, в том случае, если все мосты пройдены только по одному разу (АВАВА). Но если путешествие предпринято из другой местности, то буква А встретится лишь

два раза (ВАВАВ). Точно так же, когда шесть мостов примыкают к местности А, формула перехода будет содержать букву А или четыре (АВАВАВА), или три раза (ВАВАВАВ), смотря по тому, начат ли обход из места А или из какого-нибудь другого. Вообще, когда число мостов какого-нибудь берега четное, то буква, означающая эту местность, войдет в формулу полного обхода столько раз, сколько единиц содержится в половине числа всех мостов, если обход начат не из места А, и она войдет одним разом больше в том случае, когда обход начат из места А.

13. Но для всякого очевидно, что при полном обходе мы можем начинать его каждый раз только с одной какой-нибудь местности. Вследствие этого для места с четным числом мостов я буду брать всегда число повторений буквы равным половине количества мостов, а для места с нечетным их числом — половину того же количества, увеличенную на единицу. Таким образом, нам придется разобрать два случая, смотря по тому, начинается ли обход из местности с четным количеством мостов, или наоборот.

В первом из них задача окажется невозможной, если сумма повторений букв не превышает на единицу общее количество мостов, а во втором — если число этих повторений не равно последнему, потому что, выйдя из местности с четным количеством мостов, нужно будет увеличить на единицу число повторений буквы, обозначающей эту местность.

14. Чтобы судить, осуществим или нет полный обход всех мостов данной местности, поступают следующим образом.

1) Обозначают каждую из отдельных ее частей буквами A, B, C, D и так далее.

2) Количество всех мостов пишут в заголовок приводимой ниже таблицы.

3) В первой вертикальной колонке ставят буквы A, B, C, D, а во второй — число мостов, соответствующее каждой местности.

4) Отмечают звездочкой места с четным числом мостов.

5) В третьей вертикальной колонке пишут половины чисел второй колонки, если они четные, и половины этих чисел, увеличенных на единицу, когда они нечетные.

6) Определяют сумму чисел последней колонки. Если эта сумма равна числу всех мостов или меньше на единицу, то полный обход возможен, иначе задача неразрешима. Впрочем, следует заметить, что в первом случае обход должен начинаться с местности, имеющей четное число мостов и отмеченной звездочкой, а во втором — с местности, где число мостов нечетное. Таким образом, для кенигсбергской задачи мы получим следующую таблицу.

Число мостов 7		
A	5	3
B	3	2
C	3	2
D	3	2
Сумма 9		

Так как сумма больше 8 или 7+1, то задача неразрешима.

15. Рассмотрим чертеж, представляющий два острова A и B, соединенных между собой и с берегами реки пятнадцатью мостами, как это представлено на рис. 2.

Спрашивается, возможно ли обойти все эти мосты, не побывав ни на одном из них два раза? Прежде всего я обозначаю шесть отдельных частей данной местности буквами A, B, C, D, E, F, потом составляю таблицу согласно приведенному выше объяснению.

Число мостов 15		
A	8	4
B	4	2
C	4	2
D	3	2
E	5	3
F	6	3
Сумма 16		

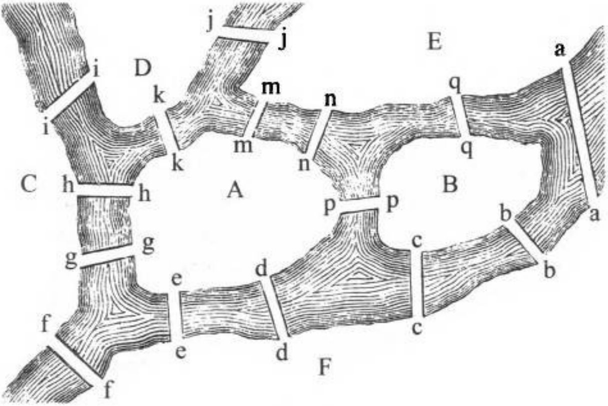


Рис. 2

В данном примере решение задачи возможно, если только начать обход с D и закончить его в E, или наоборот, это может быть сделано таким образом: Ea Fb Bc Fd Ae Ff Cg Ah Ci Dk Am En Ap Bq El D, или в обратном направлении, начиная с D. В этой формуле мы вставили между большими буквами, обозначающими местности, 15 малых букв для обозначения мостов.

16. Чтобы судить о невозможности задачи, мы укажем кроме вышеприведенного способа другой, более простой и требующий меньше времени. Заметим, прежде всего, что сумма чисел второй вертикальной колонки в нашей таблице строго равна двойному числу мостов; это зависит от того, что мы считали каждый мост два раза, так как он примыкает к двум соседним местностям.

17. Отсюда, очевидно, следует, что сумма чисел, находящихся во второй вертикальной колонке, есть число четное, так как половина ее представляет количество мостов, т. е. число целое.

Поэтому невозможно, чтобы число местностей с нечетным количеством мостов было 1, 3, 5 и т. д.; таким образом, во всякой таблице вторая колонка содержит всегда парное число нечетных величин; другими словами, число местностей с непарным количеством мостов будет всегда или равно нулю, или какому-нибудь четному числу, что мы и нашли в частном случае для кенигсбергской задачи, а также для задачи параграфа 15.

18. Отсюда следует, что задача возможна, когда все местности имеют четное количество мостов. В этом случае все числа второй вертикальной колон-

ки будут парные, сумма чисел третьей колонки равна числу мостов, и задача окажется всегда разрешимой — с какой бы местности ни начинался обход.

Если бы в кенигсбергской задаче мы условились переходить каждый мост по два раза, то решение ее было бы возможно. В самом деле, в этом случае каждый из мостов считается за два, а потому все местности имеют как бы четное их количество, и полный переход выражается комбинацией:

a b a b c d c d e f f g g e[22].

19. Предположим еще, что нечетное число мостов находится только в двух местностях, а в остальных — четное. В этом случае сумма чисел третьей колонки на единицу больше числа мостов. Легко убедиться, что и такая задача возможна, при том условии, чтобы обход начинался или заканчивался в одной из местностей с непарным количеством мостов; но если бы количество таких местностей было 4, 6, 8, то сумма чисел третьей колонки превышала бы 2, 3, 4 единицами общее число всех мостов, и, следовательно, задача сделалась бы невозможной.

20. Из всего сказанного вытекает, что каково бы ни было расположение частей данной местности, всегда легко узнать, возможно или нет перейти все мосты по одному разу. Задача неразрешима лишь в том случае, когда отдельных местностей с нечетными мостами больше двух. Осуществима же она, во-первых, когда все местности обладают четным количеством мостов, причем начать обход можно откуда угодно; во-вторых, когда местностей с нечетным числом мостов только

две и когда обход начинается с одной из них и заканчивается на другой.

21. Убедившись в возможности задачи, остается еще решить вопрос о том, в каком направлении делать обход. Для этой цели я пользуюсь следующим правилом: *«Я исключаю мысленно в каждой местности возможно большее четное число мостов, вследствие чего количество их значительно уменьшается, затем по оставшимся начинаю обход и после ввожу в него исключенные мосты. При некотором внимании это настолько легкий способ, что я считаю лишним распространяться о нем»*.

На этом заканчиваются мемуары Эйлера. Знаменитый математик, по-видимому, занимался преимущественно вопросом о невозможности. В Примечании, помещенном в конце книги, читатели найдут теорию возможности решать задачи, составляющие как бы продолжение мемуаров Эйлера.

ПАРИЖСКИЕ МОСТЫ В 1880 ГОДУ

Мы применим теперь правило Эйлера к следующей задаче. Возможно ли обойти последовательно все парижские мосты, не побывав ни на одном из них по два раза?

В предлагаемой задаче мы будем иметь в виду одни только мосты через Сену, не принимая в расчет каналы. По течению этой реки в районе Парижа встречаются три острова, а именно: Сен-Луи, Сите и Лебяжий; следовательно, мы будем иметь дело с пятью различными местностями: двумя берегами и тремя островами.

В числе их острова Лебяжий и Сите имеют четное число мостов. К первому примыкают два разветвления Гренельского моста, а ко второму — десять мостов: на юге — Архиепископский, Дублинский, Малый, Сен-Мишель и южная часть Нового моста, на севере — Сен- Луи, Аркольский, Нотр-Дам, Биржевой и северная часть Нового моста. К острову Сен-Луи ведут семь мостов. На юге — южная часть моста Сюлли, мост Турнеля и Сен-Луи; на севере — северная часть моста Сюлли, мост Мари и Людовика Филлиппа; сюда же мы прибавим еще Эстакаду, деревянный мост, примыкающий к правому берегу реки. Что же касается обоих берегов Сены, то нет никакой нужды перечислять все принадлежащие им мосты, так как легко убедиться, что на одном берегу число их четное, а на другом — нечетное. Действительно, в параграфе 17 было доказано, что число местностей с нечетным количеством мостов бывает всегда парное. А так как в данном случае из пяти рассматриваемых местностей два острова имеют парное количество мостов, а третий — непарное, то по необходимости у одного из берегов реки будет также непарное число мостов.

С другой стороны, так как местностей с непарным количеством мостов только две, то, значит, решение задачи возможно. Другими словами, путешественник может сделать обход таким образом, что побывает по одному — и только по одному разу на всех мостах, примыкающих к островам Сите и Сен-Луи, и мостах, непосредственно соединяющих оба берега Сены, но при этом ему всегда придется, или начинать, или заканчивать свою прогулку островом Сен-Луи.

Следует, впрочем, заметить, что если не принимать в расчет Эстакаду, то задача решается чрезвычайно просто.

ФИГУРЫ, ОЧЕРЧИВАЕМЫЕ ОДНИМ РОСЧЕРКОМ. ПОДПИСЬ МАГОМЕТА

Есть задача, в которой требуется очертить одним росчерком фигуру, составленную из четырех сторон прямоугольника и двух его диагоналей. Эта задача похожа на кенигсбергскую. Назовем вершины углов прямоугольника A, B, C, D, а точку пересечения диагоналей – E. Все пять точек A, B, C, D, E можно рассматривать как центры пяти местностей, соединенных между собой мостами. Так как первые четыре A, B, C, D имеют непарное их количество, то задача оказывается неразрешимой. Но, проводя каждую линию по два раза, начертить предложенную фигуру возможно.

Эти соображения применяются к очерчиванию одним росчерком всех геометрических фигур, образующихся из прямых или кривых линий на пло-

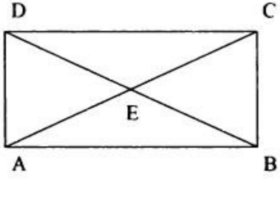


Рис. 3

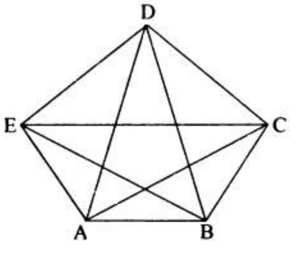


Рис. 4

скости или в пространстве. Весьма легко доказать, например, что возможно описать одним росчерком фигуру, образуемую сторонами и всеми диагоналями многоугольника с выходящими углами и с нечетным числом сторон, но для многоугольников с четным числом сторон, как, например, квадрат, шестиугольник и так далее, задача неразрешима. Точно так же можно очертить одним росчерком совокупность всех ребер правильного октаэдра, между тем как этого сделать нельзя относительно четырех других правильных многогранников с выходящими углами.

Я слышал, что Магомет чертил одним росчерком острия палаша свою подпись, представляющую два скрещенных полумесяца, как это показано на рис. 5. В самом деле, так как на этой фигуре встречаются лишь точки, в которых пересекается четное число линий, то выполнение одним росчерком не представляет никаких затруднений

Фигура на рис. 6 заключает в себе только две точки A и Z с непарным числом пересекающихся в них линий. Следовательно, ее можно описать одним росчерком, идя от A к Z или наоборот. Начертив эту

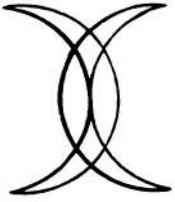


Рис. 5

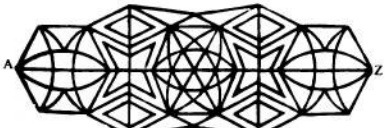


Рис. 6

фигуру на большом листе картона, легко устроить отличную игру, состоящую в том, чтобы найти путь, следуя которому можно взять один за другим все маленькие жетоны, положенные в середине каждой линии, соединяющей две соседние точки.

Фигура на рис. 7 представляет собой восемь точек с нечетным числом пересекающихся в них линий и может быть очерчена только четырьмя непрерывными линиями.

Фигура на рис. 8 представляет часть каменной стены и заключает в себе двенадцать точек с нечетным числом линий, вследствие чего ее нельзя описать иначе как шестью непрерывными чертами.

Точно так же фигура обыкновенной шахматной доски, содержащая 64 клетки и 28 точек с нечетным числом пересекающихся в них линий, может быть описана только четырнадцатью непрерывными линиями, а для шахматной доски в 100 клеток их необходимо 18.

Если разделить стороны треугольника на n частей и соединить потом соответствующие точки деления линиями, параллельными сторонам, то получится фигура, заключающая в себе одни лишь точки с четным числом пересекающихся в них линий, которую, следовательно, можно начертить одним росчерком, и так далее.

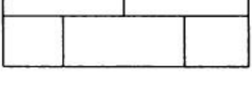


Рис. 7

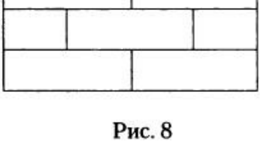


Рис. 8

СТРАНСТВОВАНИЯ КОНТРАБАНДИСТА

К задаче о кенигсбергских мостах можно подвести и еще такой случай, как если бы, например, контрабандист задался целью последовательно перейти все смежные границы различных стран какого-нибудь континента непременно по одному разу. Очевидно, что при этом страны и границы между ними вполне соответствуют местностям и рукавам реки, через которые перекинуто по одному мосту для каждой пограничной черты, общей для двух соседних стран. Так как у Швеции, Испании и Дании число границ нечетное, то для европейского континента намерение контрабандиста оказывается неосуществимым.

Рассматривая эту задачу применительно к геометрическим фигурам, взятым на плоскости или в пространстве, мы найдем, что непрерывным движением по поверхности можно очертить с одного раза все ребра куба, но это оказывается невыполнимым для других правильных многоугольников с исходящими углами.

ГЛАВА 3. ЛАБИРИНТЫ

Не все математики обладают остроумием, и не все остроумные люди бывают математиками.

Паскаль

Философский ум должен господствовать повсюду; он служит ариадниной нитью во всех лабиринтах.

Вольтер

Умные люди не редки, но редки математики.

Казанова де Сенгалль

МАЛЬЧИК С ПАЛЬЧИК. НИТЬ АРИАДНЫ

Вообразите, что вы заблудились в переходах лабиринта, в подземных галереях рудника, в мрачных коридорах катакомб или сбились с дороги в темном лесу. Не имея в руках *нити Ариадны,* вы очутились бы тогда в том же положении, в какое попал *Мальчик с пальчик* после того, как птицы склевали разбросанные им по дороге крошки хлеба. Что делать, как найти выход из лабиринта, шахту, ведущую из рудника, выход из катакомб или хижину дровосека? Из этой главы вам будет ясно, что, сбившись с пути, всегда легко отыскать дорогу.

ЕГИПЕТСКИЕ И ГРЕЧЕСКИЕ ЛАБИРИНТЫ

Древние писатели считали, что из лабиринта выбраться невозможно. Да и в настоящее время, пожалуй, этот предрассудок разделяется еще многими. Лабиринтом называется постройка, состоящая из коридоров и галерей, бесчисленные разветвления которых отнимали у попавшего в них всякую возможность найти выход. Сочинения древних авторов наполнены описанием этих удивительных памятников, служивших гробницами, от которых в настоящее время не осталось и следа. В Египте было два таких лабиринта: лабиринт Мендеса, расположенный на Мерсидском озере, и лабиринт двенадцати фараонов, построенный на юго-западном берегу того же озера Псамметихом[23], приблизительно в седьмом столетии до нашей эры, по словам Плиния, посвященный Солнцу. Он состоял из множества расположенных в ряд или один над другим храмов и, занимая огромное пространство, представлял такую запутанную сеть поворотов и разветвлений, что выход из него казался невозможным.

Ни одному из памятников не посвящали древние поэты столько описаний, сколько лабиринту, находящемуся на острове Крит и построенному по приказу царя Миноса[24] с целью заключить туда Минотавра.

Выстроив дом лабиринтом с глухими стенами и крышей,
Дедал, тогда замечательный гений в строительном деле,
Здание вывел, в котором особых примет не имелось,
Длинный же ряд коридоров кривых в направлениях разных,
Цепью тянувшихся, только лишь путал пытливые взоры.
Будто фригийский Меандр[25], протекавший по
пожитьям тучным,
В беге своем то метнется вперед, то назад обратится;
Весело светлой волною играя и вдаль убегая,
Снова встречаешь свои же навстречу бегущие воды,
Иль бесприютный помчится к пространному синему морю,
Или к реке подплывает, как будто бы хочет с ней слиться,
Также и Дедал пути без числа в своем зданьи устроил,
Так что и сам затруднялся пробраться к наружному входу!

Овидий[26], *Метаморфозы, кн. VIII.*

Этот отрывок из Овидия дает достаточно ясное понятие о безвыходности лабиринта и о множестве заключавшихся в нем перепутанных между собой коридоров. Ту же мысль мы находим и у Демутье[27] в «Письмах к Эмиллии»:

«Это громадное здание состояло из бесчисленного множества поворотов, устроенных с коварным искусством. Увы! оно походило на сердце изменника, извороты которого неведомы чистой душе. С доверием отдается она этому сердцу и погибает в нем безвозвратно, как в лабиринте».

Может быть, в сущности, все это не что иное, как поэтическая легенда, так как никто из древних авторов не говорит, что сам видел этот лабиринт, тем более, что во времена Диодора[28] и Плиния от него уже не оставалось никаких следов на поверхности земли. Однако же на острове Крит существует еще и до сих пор несколько пещер с крытыми коридорами, и кандиоты[29], не колеблясь, признают их за остатки лабиринта, куда зашла прекрасная Ариадна[30], дочь Миноса.

ТУРНЕФОР[31] В ПЕЩЕРЕ

Знаменитый ботаник Турнефор посетил примерно в 1702 году одну из таких пещер, вырытую у подножия горы Иды[32]. В своих письмах к министру Поншартрену[33], изданных под заглавием «Путешествие в Левант[34]», Турнефор рассказывает, что, пробродив некоторое время со своими спутниками по целой сети подземных коридоров, они подошли к длинной и широкой галерее, которая привела их в прекрасную залу, находившуюся в глубине лабиринта.

«Мы сделали в продолжение получаса 1460 шагов по этой главной галерее, не уклоняясь ни вправо, ни влево. Вышиною она семи футов, проложена в скале и совершенно горизонтальна, как и вообще все напластования этой местности. Идя по ней, мы должны были кое-где нагибать головы, а в одном месте, почти посредине пути, пришлось, как говорится, ползти на четвереньках. Ширина галереи большей частью настолько значительна, что позволяет пройти двоим или троим в ряд; пол ровный; ни подъемов, ни спусков делать не приходилось; стены высечены отвесно или сложены из добытых тут же камней и притом с довольно большим искусством, вроде того, как обыкновенно выводятся каменные постройки без употребления цемента. По обе стороны от этой галереи тянется столько коридоров, что в них непременно запутаешься, если

не принять необходимых предосторожностей; а так как у нас было сильное желание выбраться из этого лабиринта, то мы и позаботились обеспечить себе обратный путь. Во-первых, мы оставили одного из наших проводников у входа в пещеру и велели ему тотчас же собрать людей из соседней деревни для нашего освобождения в случае, если бы мы к ночи не вернулись; во-вторых, у каждого из нас было в руках по зажженному факелу; в-третьих, на всех поворотах, которые нам казалось затруднительным отыскать впоследствии, мы прикрепляли справа к стенам нумерованные бумажки, и в-четвертых, один из наших проводников клал по левую сторону заготовленные им заранее маленькие пучки терновника, а другой посыпал дорогу рубленой соломой, которую он все время нес с собою в мешке».

ДРУГИЕ ЛАБИРИНТЫ

Существуют еще развалины нескольких лабиринтов на Лемносе[35], в Агридженто[36], Клузиуме[37]. Относительно последнего, служившего гробницей Порсенны[38], мы имеем свидетельство Марка Варрона[39], приводимое Плинием:

«Нижний этаж постройки представлял собою в высшей степени запутанный лабиринт; кто раз попадал в него без клубка ниток, тот не мог уже найти выхода. Это здание, прибавляет Плиний, служило памятником человеческого безумия и тщеславия».

В средние века лабиринт встречается только на рисунках на каменном полу готических церквей. Рисунки эти представляют собой извилистые линии, образуемые своеобразным распределением камней различной формы и цвета. Изгибаясь по всевозможным направлениям, такие линии ведут к нескольким главным святыням храма и сходятся перед изображением Голгофы. Из наиболее знаменитых лабиринтов такого рода, по которым в средние века совершались, в миниатюре, религиозные путешествия, следует указать на лабиринты в соборах: аминском, сенском, реймском, шартрском, беезском. Два последних сохранились еще и до сих пор, точно так же, как и лабиринт Сен-Квинтенской церкви.

Не говоря уже о запутанности улиц, бульваров и сточных канав Парижа, представляющих своего рода лабиринты, в нем существуют теперь два настоящих лабиринта – один в старинных каменоломнях под левым берегом Сены, а другой – в Жарден-де-Плант[40]. По особому дозволению можно посещать ту часть первого, где сложены остатки костей, собранных с древних кладбищ.

Заблудиться там нельзя, потому что посетители, впускаемые и выпускаемые счетом, идут один за другим, образуя непрерывную цепь и руководствуясь при этом своего рода ариадниной нитью – широкой черной полосой копоти, оставшейся на потолке каменоломни от восковых свеч. Что же касается лабиринта в Жарден-де-Плант, то в солнечные дни он служит любимым местом пребывания детей, которые бегают и прячутся в его извилистых аллеях, окаймленных елями и искусственными гротами в тени громадных кедров.

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ЛАБИРИНТАХ

Мы можем рассматривать перекрестки лабиринта как геометрические точки, а коридоры, аллеи, улицы и галереи — как линии, прямые или кривые, соединяющие их попарно. Мы условимся называть лабиринтом всякую сеть, составленную из геометрических линий, когда движущаяся точка, помещенная на одной из них, может дойти до какого угодно перекрестка, не сходя с линии системы. Допустив это, мы докажем, что такая движущаяся точка может последовательно описать все линии сети, без перерывов и не проходя ни по одной более двух раз, другими словами, что из всякого лабиринта есть выход.

Возьмем лист белой бумаги и обозначим на нем произвольное число точек, потом соединим их между собой как угодно — прямыми или кривыми линиями, но с тем условием, чтобы ни одна из этих точек не была изолирована от других. Тогда у нас получится геометрический лабиринт. Для примера можно начертить сеть метро[41] в большом городе, сеть железных дорог в каком-нибудь государстве или просто систему рек и каналов, прибавив к ним какие угодно боковые разветвления и преграды.

Начерченный таким образом рисунок накрывают листом картона, чтобы не видеть общего плана лабиринта. В картоне прорезывается отверстие или так называемый окуляр, дающий возможность видеть только небольшую часть сети, причем этот картон кладут таким образом, чтобы окуляр приходился на какой-нибудь перекресток. Требуется провести окуляр через все линии сети непрерывно по два раза и вернуться, в конце концов, к исходному пункту. Чтобы отметить пути, по которым проходил окуляр, на каждой пройденной им линии будем проводить маленькую поперечную черту всякий раз при входе на перекресток и при выходе из него. Следовательно, по окончании путешествия оба конца каждого пути окажутся отмеченными два раза, но не более.

В настоящем лабиринте или в галереях рудника посетитель точно так же отмечает свой путь; так, например, при входе на перекресток и выходе из него он кладет в каждой галерее, по которой проходит, по камешку или что-нибудь в этом роде.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ЛАБИРИНТЕ, ПРЕДЛОЖЕННОЕ ТРЕМО[42]

Из числа различных решений только что приведенной нами интересной задачи, относящейся к геометрии положения, мы выбрали, как наиболее изящное и простое, то, которое было любезно предложено нам Тремо, бывшим воспитанником политехнической школы, телеграфным инженером. Только мы несколько изменили его доказательство.

Первое правило. Выйдя из первого перекрестка, следуют по какому-нибудь пути до тех пор, пока не достигнут или глухой, или открытой его ветви. В первом случае, конечно, надо вернуться назад и тогда путь по этой линии нужно считать не имеющим никакого значения, так как его уже прошли два раза;

а во втором идут дальше по какому-нибудь произвольно взятому направлению, отмечая всякий раз поперечной чертой вступление на перекресток — по направлению стрелки и выход из него — по направлению стрелки g (рис. 9). Так как вынуждены проходить по каждому разветвлению по два раза, новые отметки, в отличие от прежних, следует обозначать крестиками, как это показано на относящихся к задаче фигурах.

Первое правило применяют всякий раз, когда на пути встречается неизвестный перекресток. Но, очевидно, после нескольких переходов должен будет встретиться снова такой перекресток, через который уже проходили. Последний случай распадается на два, смотря по тому, подходим ли мы к перекрестку по уже пройденному пути, или же идем к нему по новому пути, и сообразно с этим применяется одно из нижеследующих правил.

Второе правило. Приблизившись к пройденному уже перекрестку по новому пути, следует вернуться назад, отметив прибытие на перекресток и выход из него двумя чертами, как это показано на рис. 10.

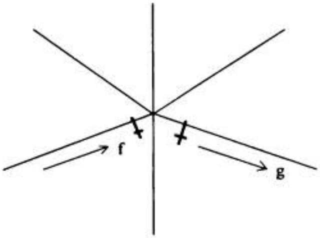


Рис. 9

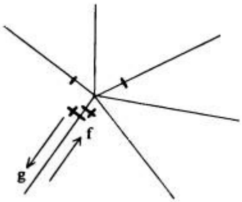


Рис. 10

Третье правило. Когда мы подойдем к знакомому перекрестку путем, уже пройденным, следует направиться по новому пути, если он существует, а если его нет, то по пути, пройденному только один раз. Оба эти случая изображены на рис. 11 и 12.

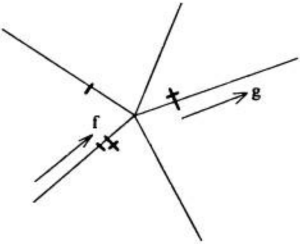


Рис. 11

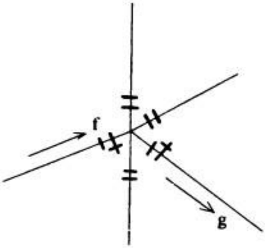


Рис. 12

Доказательство. Строго придерживаясь трех этих правил, можно обойти в два раза все линии сети. Но предварительно необходимо сделать следующие оговорки:

1. При выходе из начального перекрестка нужно ставить одну черточку.

2. Проходя через перекресток, согласно одному из только что указанных правил, надо ставить на линиях, к нему примыкающих, две черточки.

3. Во время исследования лабиринта число отметок до перекрестка или после него должно быть нечетныем — для начального и четным — для всех остальных перекрестков.

4. В каждый момент исследования лабиринта — до перехода через перекресток или после него — дол-

жен вести к начальному перекрестку только один отмеченный чертой путь, а ко всем другим — по два таких пути.

5. По окончании исследования лабиринта все перекрестки должны иметь по две отметки на каждом пути, что требуется и самим условием задачи.

Установив эти правила, легко убедиться, что когда путешественник прибыл на перекресток M, более или менее удаленный от начального перекрестка A, то продолжение обхода не представляло для него никаких затруднений. В самом деле на перекресток он может прийти и по новому пути или по пути, хотя бы раз уже пройденному. В первом случае применяется то или другое из двух первых правил, а во втором, поскольку выход на перекресток дал бы нечетное число отметок, то согласно пункту 3, приходится за неимением нового выхода идти по линии, только что пройденной.

Таким образом, двойной обход лабиринта может быть завершен не иначе как возвращением к начальному перекрестку A. Предположим, что ZA представляет собой единственный путь, ведущий от перекрестка Z к неизбежному концу путешествия. Путь из Z, очевидно, был пройден один раз, потому что в противном случае обход можно было бы и продолжить. А если он пройден, то на перекрестке Z не существует уже ни одного свободного пути, иначе это доказывало бы, что мы забыли применить третье правило. Притом из всех путей, сходящихся в Z, должен существовать только один ZA, пройденный раз согласно пункту 4. Следовательно, в момент остановки в A все пути перекрестка Z будут пройдены по два раза. В том же самом можно убедиться и относительно предыдущего перекрестка Y, а также и всех остальных перекрестков. Что и требовалось доказать.

Примечание. Когда вопрос касается перекрестка с одним или несколькими пройденными путями, второе правило заменяется следующим:

Придя по новому пути к встречавшемуся уже перекрестку, можно отправиться дальше по другому, тоже новому пути, но с тем условием, чтобы к двум чертам, которыми отмечены оба выполненных уже перехода, прибавить соответствующие знаки a и a'. Тогда, возвращаясь на перекресток по одному из этих путей, необходимо пойти по другому. Это, в сущности, равносильно тому, как если бы мы перекинули над перекрестком мост aa'. Приведенное правило указано нам Морисом – бывшим воспитанником политехнической школы.

ТЕОРИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ДЕРЕВЬЕВ

Мы видели, что, применяя второе правило, необходимо возвращаться назад, придя по новому пути к уже исследованному перекрестку, то есть к такому, от которого нет больше непройденных путей. Предположим теперь, что мы уничтожили в сети одно из звеньев пути, примыкающего к этому перекрестку, и применили то же самое во всех местах, где приходится возвращаться назад. Сеть превратится тогда в другую геометрическую фигуру, называемую деревом или разветвлением. Причем дороги получат название ветвей, а перекрестки – название сучьев или узлов. Подобные фигуры изучали Жордан[43], Сильвестр[44] и другие.

Геометрическим деревом обыкновенно называют такую фигуру, из каждого узла которой, следуя вдоль примыкающих к нему ветвей, можно прийти ко всякому узлу, но по одному только пути. Теорию геометрических деревьев значительно упростил Полиньяк[45], посредством одного основного правила, которое вытекает из следующего соображения: всякое разветвление может быть очерчено некоторым числом непрерывных линий, без повторения их и без скачков. То есть, выйдя из оконечности какой-нибудь ветви, мы всегда достигнем начала другой, новой или уже пройденной. Заметим при этом, что проходимый таким образом путь должен пересекать другой, уже пройденный, а не сливаться с ним. Определим эти общие условия и перейдем к правилу Полиньяка.

ОСНОВНОЕ ПРАВИЛО

Каким бы способом ни очерчивать геометрическое дерево без повторения пути и скачков, число проводимых при этом непрерывных линий будет величиной постоянной.

В самом деле, разрежем все ветви, соединяющие между собой узлы, тогда разветвления превратятся в ряд *звезд*, соединяя которые, снова получим прежнюю фигуру. Таким образом, для каждой звезды, взятой отдельно, приведенное основное правило очевидно. Обозначим через N_1, N_2, N_3, ..., N_P числа лучей каждой звезды, где p — число узлов или самих звезд. Если мы соединим теперь две первые звезды, то потеряем одну непрерывную черту из суммы всех черт, образующих каждую фигуру. Соединив вторую звезду с третьей, мы потеряем еще одну черту: следовательно, обозначив через N число всех непрерывных линий, которыми очерчивается дерево, получим:

$$N = N_1+N_2+N_3+ \dots +N_p - (p-1).$$

Числа N_1, N_2, N_3 ... N_p, а следовательно, и само число N можно выразить в порядке узлов или звезд, то есть соответственно количеству примыкающих к ним свободных ветвей или лучей. Самый простой узел есть тройной или узел третьего порядка. Назовем через mg порядок какого-нибудь узла, тогда m, по меньшей мере, будет равно 3, а число N_q равно $m_q/3$, если m_q — четное, или m_q+1, когда оно нечетное. Это значит, что наибольшее число линий, позволяющих очертить звезду, во всяком случае, будет превышать дроби $(m_q + 1)/2$. Это число и выражается таким образом:

$$(M_q +1)/2.$$

Следовательно, предыдущая формула может быть записана в виде:

$$N = (m_1 +1)/2 + (m_2 +1)/2 + (m_q +1)/2 + \dots + (m_q +1)/2 - \\ - (p - 1).$$

Зная число и порядок узлов, разветвление всего дерева можно определить следующим образом.

Обозначим число свободных концов ветвей буквой l и предположим, что дерево имеет узлы только третьего порядка. Тогда каково бы ни было их число, мы получим формулу:

$$N = l - 1.$$

Эта формула очевидна для звезды с тремя лучами. Если мы присоединим узел третьего порядка к свободному концу какой-нибудь ветви, то она заменится двумя другими, вследствие чего получится одной ветвью больше. Когда на ветви образуется новый узел третьего порядка, присоединим к ней другую ветвь. Тогда все разветвления увеличатся на одну непрерывную черту и на один свободный конец. В том и другом случае оба члена предыдущей формулы увеличатся на единицу. Следовательно, эта формула имеет общее значение.

Назовем через p_k число узлов порядка $_k$. Тогда для двух отдельных узлов четвертого порядка p'_4 и p''_4, не связанных вместе, будем иметь:

$$N' = l' - 1 - p'_4, \quad N'' = l'' - 1 - p''_4.$$

В самом деле, соединяя два свободных луча пары звезд четвертого порядка, мы увидим, что общее количество непрерывных черт уменьшится на единицу и в то же время исчезнут два луча. Тогда получим:

$$N + 1 = N' + N''; \; l' + l'' = l + 2; \; p'_4 + p''_4 = p_4.$$

Следовательно, для разветвления обоих узлов четвертого порядка у нас получится:

$$N = l - 1 - p_4.$$

Эта формула применима для разветвления, составленного из какого угодно числа узлов четвертого порядка.

Точно так же можно доказать, что и разветвление, содержащее только узлы пятого порядка, в количестве p выражается формулой:

$$N = l - 1 - p_5.$$

В более общем виде, когда разветвление заключает в себе только узлы порядка 2μ, мы будем иметь:

$$N = l - 1 - (\mu - 1)p_{2\mu}.$$

А когда оно содержит только узлы порядка $2\mu + 1$, то получается

$$N = l - 1 - (\mu - 1)p_{2\mu} + 1.$$

Соединяя несколько разветвлений двумя свободными концами, мы получим общую формулу:

$$N = l - 1 - (p_4 + p_5) - 2(p_6 + p_7) - 3(p_8 + p_9) - 4(p_{10} + p_{11}) - \ldots$$

В Примечании 3, помещенном в конце этой книги, мы укажем на сближение, которое можно установить между теорией геометрических деревьев и задачей относительно мостов и островов.

ГЛАВА 4. ЗАДАЧА НА ВОСЕМЬ КОРОЛЕВ (ИЗ ШАХМАТНОЙ ИГРЫ)

Что сказать о требованиях игры?
Как их определить?

Нужно ли отличаться предусмотрительностью, остроумием, находчивостью, чтобы играть в ломбер или в шахматы? А если это необходимо, то почему же мы видим столько глупцов, в совершенстве знающих эти игры, и замечательных гениев, никогда не приближавшихся в этом отношении даже к посредственности?

аль-Бируни[46]

Если можно быть умным человеком и замечательным шахматным игроком, как Легаль, то не менее возможно также быть замечательным шахматным игроком и глупцом, как Фубер или Меио.

Дидро[47]

Предлагается задача: *Определить все способы размещения восьми королев на обыкновенной шахматной доске, состоящей из 64 клеток, таким образом, чтобы ни одна королева не могла быть взята другой, то есть* *расставить в 8 клетках шахматной доски столько же королев так, чтобы они не встречались попарно ни на одной линии, параллельной краям доски или одной из ее диагоналей.*

ИСТОРИЧЕСКИЕ ДАННЫЕ

Только что приведенная задача была предложена в первый раз знаменитому Гауссу[48]. По этому поводу между Гауссом и астрономом Шумахером[49] завязалась переписка. Найдя сначала 72, а потом 76 решений, Гаусс отыскал наконец 92, что и было признано безусловно точным числом решений. Доктор Гюнтер, член Берлинского парламента, опубликовал несколько лет тому назад интересную историю этой знаменитой задачи. Вместе с тем он указал новый способ исследования решения этой задачи, введя условие, чтобы шахматная доска из 64 клеток была заменена квадратной доской с каким угодно их числом, и сам применил это условие к решению задачи с четырьмя-пятью королевами на доске из 16 и 25 клеток. Кроме того, способ Гюнтера был распространен профессором Кембриджского университета Глешером на задачи с шестью и семью королевами при квадратных досках в 36 и 49 клеток.

Раньше о том же предмете писал Беллявитис, который тоже отыскал 92 решения. Впоследствии ту же задачу предложил Лионне. В 1867 году один шахматный игрок, предполагавший, что задача о восьми королевах допускает лишь небольшое число решений, заинтересовал ею двух инженеров — Пармантье и Ла-Ное. Найдя наугад несколько решений, они начали систематически исследовать всевозможные случаи этой задачи, не подозревая, что она давно уже исследована и решена. Ниже мы опишем в нескольких словах способ Гюнтера, а также рассмотрим подробнее исследование этой задачи, сделанное Ла-Ное и любезно сообщенное нам генералом Пармантье на конгрессе французского общества развития наук в Монпелье в августе 1879 года.

СПОСОБ ОБОЗНАЧЕНИЯ И УСЛОВИЯ

Черными клетками мы обозначаем положение восьми королев на шахматной доске и даем на фигуре 13-й одно из решений задачи. Мы выражаем ее восемью цифрами – 68241753. Первая из них – 6 – указывает высоту положения королевы в первой колонке шахматной доски слева. Вторая цифра – 8 – показывает положение королевы вверху шахматной доски во второй колонке и так далее. Впоследствии мы будем

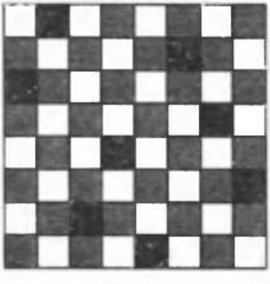


Рис. 13. Положение 1

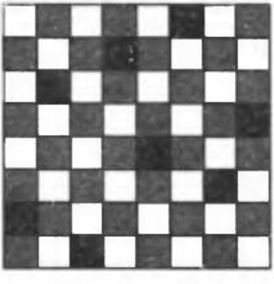


Рис. 14. Положение 2

называть вертикальные ряды клеток колонками, а горизонтальные — строками. Первые будем считать от 1 до 8 слева направо, а вторые точно так же от 1 до 8 снизу вверх. Таким образом решение задачи на рис. 13 можно представить следующим образом:

(A)	Строки	6	8	2	4	1	7	5	3
	Колонки	1	2	3	4	5	6	7	8

Для краткости мы выразили решение задачи рядом цифр 68241753, находящихся в первой строке приведенной выше таблицы.

СМЕЖНЫЕ РЕШЕНИЯ

На рис. 14 представлено первое смежное решение, полученное из того, которое выражено на рис. 13. Мы нашли его посредством поворота шахматной доски на четверть оборота по направлению движения часовой стрелки. Численное выражение этого решения получится, если в верхнему ряду таблицы (B) расположить колонки таблицы (A) в убывающем порядке, а именно:

(B)	Строки	8	7	6	5	4	3	2	1
	Колонки	2	6	1	7	4	8	3	5

Краткое выражение второго решения получится из нижнего ряда таблицы (B) и будет 26174835.

Фигуры на рис. 15 и 16 представляют второе и третье смежные решения, получаемые из рис. 13, для чего нужно снова повернуть шахматную доску сначала

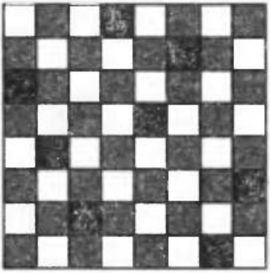


Рис. 15

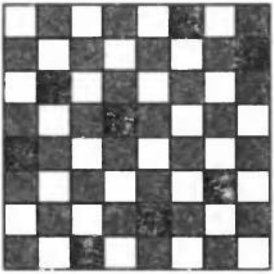


Рис. 16

на одну, а потом на другую четверть полного оборота в определенном направлении. Численное выражение результата решения задачи, представленное на рис. 15, можно вывести из положения второго, а четвертое положение, в свою очередь, из третьего — тем же способом, который мы применили в первом случае. Но третье положение из первого и четвертое из второго легко получить еще и другим способом. Решения, представленные на рис. 13 и 14, выражены числами:

68241753 и 26174835.

Напишем цифры обоих рядов в обратном порядке:

35714286 и 53847162.

Каждую из цифр вычитаем из 9, после чего получится

64285713 и 46152837,

числовое выражение рис. 15 и 16.

НЕПРАВИЛЬНЫЕ И ПОЛУПРАВИЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ

Итак, всякое вообще решение задачи о королевах на квадратной шахматной доске дает четыре смежных решения. Мы сказали, что это имеет место в общем случае, но следует заметить, что это решение неправильное.

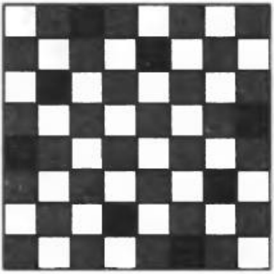


Рис. 17

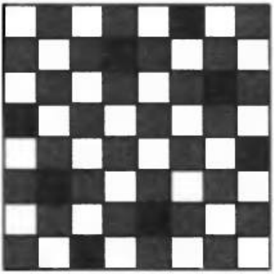


Рис. 18

На рис. 17 мы приводим полуправильное решение задачи о восьми королевах, которое допускает только одно смежное решение. И действительно, если повернуть доску на пол-оборота, то получится то же самое размещение королев, как и при первом положении доски. Ряд цифр 46827135, представляющий это решение, отличается таким свойством, что сумма каждого из входящих в него элементов с элементами того же решения, но взятыми в обратном порядке, даст 99999999.

ПРАВИЛЬНЫF РЕШЕНИЯ

Может случиться, хотя и не на шахматной доске с 64 клетками, что какое-нибудь решение задачи о королевах, при повороте доски на одну или несколько четвертей, не даст тех смежных решений, о которых мы говорили раньше. Прежде всего заметим, что принятое нами обозначение применимо ко всякой шахматной доске, при том условии, чтобы каждая цифра его не превышала количества клеток, расположенных вдоль края доски. Нетрудно убедиться, что решение, о котором идет речь и которое мы называем правильным, представляется в одном и том же виде, с какой бы стороны мы ни смотрели на шахматную доску; но это встречается лишь в том случае, когда число боковых клеток — кратное 4, то есть равно 4, 8, 12, 16 (хотя такое расположение королев и не имеет места в шахматной доске с 64 клетками), или когда число клеток, кратное 4, увеличенным на единицу.

Таковы, например, решения: 2413 – для доски с 16-ю клетками и 25314 для доски с 25-ю клетками. Полуправильные решения мы будем отмечать одной звездочкой, а правильные – двумя. например:

46827135*, 2413**, 25314**.

ПЕРЕВЕРНУТЫЕ РЕШЕНИЯ

Возьмем какое-нибудь из найденных уже решений задачи о королевах и изменим на рисунке порядок строк или колонок. Другими словами, напишем в обратном порядке численное выражение результата решения задачи. Тогда у нас получится перевернутое решение, отличающееся, как это легко доказать, от какого-либо из смежных. Геометрически получить его очень легко, достаточно лишь взглянуть на шахматную доску в зеркало или перевернуть ее. Из рассмотренных смежных и перевернутых отношений, очевидно, следует, что:

1) Каждое неправильное решение дает четыре смежных и четыре перевернутых, в общей сложности *восемь решений*.

2) Каждое полуправильное простое решение дает два смежных и два перевернутых — всего *четыре*.

3) Каждое правильное простое решение дает только одно перевернутое, то есть в общем итоге *два*.

Впрочем, из этой классификации следует исключить единственное решение задачи о королевах, когда шахматная доска состоит из одной только клетки.

ТУРЫ ИЛИ БАШНИ

Ходы *королевы* в шахматной игре, как известно, состоят из *ходов туры* и *офицера*. В самом деле, если бы мы поставили на шахматной доске только одну туру, то перемещение ее возможно на какую угодно клетку, расположенную в одном и том же ряду, или колонке, параллельным краю доски; подобным же образом перемещение офицера возможно лишь по линиям, параллельным ее диагоналям.

Отсюда, очевидно, следует, что решение задачи о восьми королевах нужно искать между решениями задач о восьми турах или восьми офицерах, при условии размещения этих фигур так, чтобы они не могли взять одна другую. Решение задачи о восьми турах на обыкновенной шахматной доске или о девяти, десяти, одиннадцати и т. д. турах на досках в 81, 100, 121 и т. д. клеток хорошо известно в форме чисто арифметической. Для этого достаточно взять обыкновенную шахматную доску и, пользуясь цифровым обозначением, принятым в задаче о королевах, составить из восьми первых чисел всевозможные перестановки.

ПРЯМОЛИНЕЙНЫЕ ПЕРЕСТАНОВКИ

Для шахматной доски из двух клеток в ряд с каждой стороны мы получим два решения:

12 и 21.

Для доски из трех клеток достаточно поставить цифру 3 впереди или позади одной из цифр двух предыдущих комбинаций; тогда будем иметь шесть решений:

312, 132, 123 и 321, 231, 213.

Точно так же для доски из четырех клеток в ряд нужно поставить 4 на всевозможных местах только что полученных комбинаций из цифр 1, 2, 3, причем каждая комбинация даст четыре перестановки, что в целом составит двадцать четыре решения задачи о четырех турах на доске из 16 клеток.

Далее, чтобы узнать число решений задачи о пяти турах на доске из двадцати пяти клеток, нужно помножить на 5 число решений предыдущей задачи и так далее. Так что, например, число решений задачи о восьми турах на обыкновенной доске равняется произведению восьми первых чисел

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 40320.$$

А на шахматной доске из 100 клеток число отдельных решений задачи о десяти турах равняется 3628800.

АНАГРАММА ПАСКАЛЯ

Когда перестановка букв в одном слове или в целой фразе дает новое слово или новую фразу, то ее называют анаграммой, как, например, слова: *нива* — *вина* — *иван*, составленные из одних и тех же букв, размещенных в различном порядке. Из французских анаграмм некоторые приобрели большую известность, например, выражение FRERE JAQUE CLEMENT (брат Яков Клеман) превращается при соответствующей перестановке букв в другое — C'EST L'ENFER QUI M'A CRÈÈ (меня создал ад); REVOLUTION FRANCAISE (французская революция) — в фразу UN VETO CORSE LA FINIRA (корсиканское VETO ее погубит). Но самая интересная из всех анаграмм дана Паскалем. Разгадка ее, найденная лишь недавно, стоила ученым немало времени и труда. В его *Pensées* мы находим следующее место: «Стиль Эпиктета, Монтеня и Соломона де Тюльти самый употребительный, самый простой, лучше всего запоминаемый и чаще всего цитируемый, потому что им выражаются мысли, касающиеся обычных явлений жизни».

Комментатор сочинений Паскаля прибавляет в примечании: «Соломон де Тюльти — лицо вымышленное, это, очевидно, придуманный Паскалем псевдоним».

Но, изменив порядок букв в словах Salomon de Tultie, мы найдем Louis de Montalte — тот самый псевдоним, которым изобретатель теории комбинаций подписывал свои работы.

ОФИЦЕРЫ

Задача об офицерах представляет гораздо большее число решений и несравненно труднее предыдущих. Действительно, на шахматной доске размещаются не только восемь, а даже четырнадцать офицеров при том условии, чтобы они не могли взять один другого, например, восемь — в 1-й колонке и шесть — в последней, то есть за исключением двух крайних клеток. Поэтому мы возвратимся к различным решениям задачи о турах и воспользуемся из них теми, которые относятся к задаче о королевах.

С арифметической точки зрения, задача о восьми турах заключается, как мы видели, в составлении всевозможных перестановок из восьми первых цифр. Задача же о королевах сводится к выбору из этих перестановок тех, в которых абсолютная разность каких-нибудь двух цифр не равняется разности порядков занимаемых ими мест.

Это новое условие, очевидно, соответствует совместным ходам офицера и туры, из которых составляются ходы королевы.

Следовательно, решить задачу о восьми королевах — значит, найти все комбинации из восьми цифр, в которых разность между какими-нибудь двумя элементами равна разности между порядками занимаемых ими мест.

СПОСОБ ГЮНТЕРА

Этот способ, в сущности, мало отличается от арифметического, о котором только что было сказано. Мы объясним его на шахматной доске из 25 клеток, предлагаемой нами здесь в таком виде:

a_1	f_2	g_3	h_4	i_5
b_2	a_3	f_4	g_5	h_6
c_3	b_4	a_5	f_6	g_7
d_4	c_5	b_6	a_7	f_8
e_5	d_6	c_7	b_8	a_9

Каждая клетка представлена здесь элементом, состоящим из буквы и указателя. Элементы с одинаковыми буквами размещены параллельно какой-нибудь диагонали доски и соответствуют одному из направлений хода офицера. Элементы, имеющие одинаковые показатели, расположены параллельно другой диагонали и соответствуют направлению хода другого офицера. Предположим теперь, что мы написали в каком-нибудь порядке все комбинации из пяти элементов, но таким образом, чтобы они не заключали в себе два элемента, принадлежащие одной и той же строке или одной и той же *колонке*. И мы получим тогда все 120 решений задачи о пяти турах. Теперь исключим из них те, в которых два элемента содержат одинаковую букву или одинаковый указатель, и тогда останутся только комбинации, соответствующие задаче о пяти королевах.

Нет никакой необходимости выписывать все решения задачи о пяти турах, составленные при помощи решения задачи о четырех турах, как мы это объяснили раньше. Применяя способ Гюнтера, можно значительно упростить решение, пользуясь теорией детерминантов. Однако, несмотря на все искусство, выказанное Гюнтером и Глешером в этом вопросе, задача о девяти или десяти королевах на доске из 81 или 100 клеток оказывается почти неразрешимой посредством этого способа.

СПОСОБ ЛА-НОЕ

Этот способ состоит в разделении шахматной доски на концентрические полосы или квадраты. *Первый* из них составляет внутренний квадрат в 4 клетки, одну из которых мы называем *а*; *вторая полоса* образуется 12 клетками, окружающими первый квадрат; третья состоит из 20 клеток, окружающих вторую полосу; четвертая — из 28 клеток, расположенных вокруг третьей, и так далее для шахматной доски какой угодно величины, с тем лишь условием, чтобы в ней было четное число клеток с каждой стороны. В такой шахматной доске каждая новая полоса увеличивается на 8 клеток, по сравнению с предыдущей.

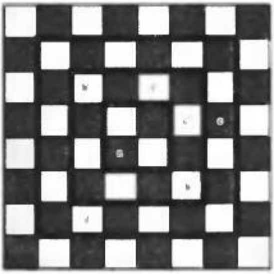


Рис. 19

В доске же с нечетным их числом первая полоса будет состоять из 1 квадрата, вторая из 8, а следующие из 16, 24, 32 и т. д. квадратов.

Начнем с первой полосы и поставим королеву в *a*. Мы замечаем, что отсюда королева господствует над 28 клетками шахматной доски, то есть можно занимать любую из них сообразно с правилами своих ходов. Во второй полосе королева господствует над 26 клетками, в третьей — над 24, в четвертой над 22. Теперь постараемся разместить на второй полосе различными способами наибольшее число королев. Очевидно, что здесь можно поставить только две королевы или в *b* и *c* , или в *b'* и *c'*, причем пока нет никакой нужды заботиться о симметричном расположении. Ограничиваясь шахматной доской в 16 клеток, мы увидим, что первое размещение *ab* будет 0241, обратное же ему — 1420, а повернув доску на три четверти оборота, получим 4203, то есть то же самое, что и *b'ac'*.

Согласно расположению abc нужно теперь поставить наибольшее число королев в третьей полосе, например в *d* и *c*. Тогда останется разместить трех королев в наружной полосе. Но легко видеть, что это невозможно; следовательно, размещениями королев в *abcde* решение задачи не достигнуто. После этого мы попробуем оставить на третьей полосе одну королеву или в *d*, или в *c*, и найдем, что этот прием так же не ведет к решению. Вообще, пять королев на одной полосе разместить нельзя. Следовательно, первоначальное распределение в abc не приводит к желаемому результату.

Оставив королеву *ba*, а также *b* или *c* на прежних клетках, попробуем разместить шесть прочих королев на двух последних полосах, но и тогда не получится никакого решения, из чего мы заключаем, что две первые полосы не могут быть одновременно занимаемы королевами. Это свойство Пармантье заметил на шахматных досках разной величины, даже на досках в 64 клетки, но относительно доски в 100 клеток не существует.

Оставив опять королеву *ba*, постараемся разместить наибольшее число королев на третьей полосе, где их можно поставить три: потом, исключив смежные и перевернутые решения, поместим четыре королевы на четвертой полосе, причем у нас получатся четыре простых неправильных решения:

35841726,
46152837,
48157263,
42751863,

соответствующих типу 1934. Цифры этого типа представляют в последовательном порядке число королев, помещенных в каждой полосе. Сняв королеву с *a*, поместим на второй полосе сначала три, потом две и, наконец, одну королеву, тогда найдем следующие простые неправильные решения:

72631485	для типа	0314
57263148, 16837425		0233
61528374, 57263184, 51468273		0224
58417263		0134.

Наконец, если на двух первых полосах не ставить ни одной королевы, то получится полуправильное решение, представленное на фигуре 6-й и принадлежащее к типу 0044. Таким образом, в общей сложности, задача о восьми королевах представляет *двенадцать* простых решений, из которых *одиннадцать* неправильных и одно — полуправильное; всего же — *девяносто два* отдельных решения.

В заключение этого способа мы приводим таблицу двенадцати простых решений в последовательном порядке.

ТАБЛИЦА ПРОСТЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ
О ВОСЬМИ КОРОЛЕВАХ

Нумерация решения	Решение	Типы
1	72631485	0314
2	61528374	0224
3	58417263	0134
4	35841726	1034
5	46152837	1034
6	57263148	0233

Нумерация решения	Решение	Типы
7	15837425	0233
8	57263184	0224
9	48157263	1034
10	51468273	0224
11	42751863	1034
12	35281746	0044

МНЕМОНИЧЕСКИЙ СПОСОБ

Первое решение, из которого правильно вытекают шесть последующих, можно удержать в памяти с помощью такой мнемонической фразы:

Семь-два-шесть-три-один-четыре-восемь-пять.

Отсюда уже можно вывести второе и третье решения, помещая семь королев на один ряд ниже и перенося на верх доски восьмую, которая стояла на первой линии. Решение 4, 5 и 6 получается из 3, 2 и 1 перемещением королев на одну клетку вправо и перестановкой в первую колонку тех, которые стояли в восьмой. Наконец, седьмое решение выводится из шестого, если всех королев перенести на один ряд вверх и на одну колонку вправо.

Можно использовать и такой прием: предположим, что шахматная доска окружена восемью другими, которые мы наложим, потом, на первую с помещенными на них королевами. Рисунок 20-й представляет два *ряда ходов конем*, причем за исходную точку, обозначенную буквой А, принята одна из нумерованных

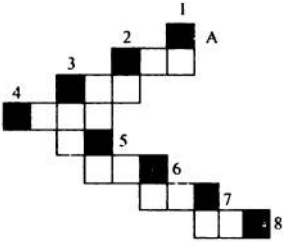


Рис. 20

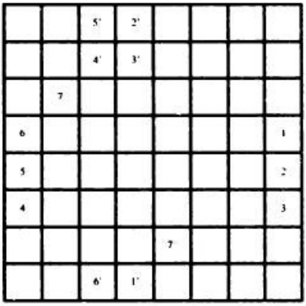


Рис. 21

клеток рисунка 21. Номера 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 дают семь первых решений, а номера 1', 2', 3', 4', 5', 6', 7' — перевернутые решения.

Для пяти остальных поступают следующим образом: восьмое решение получают из шестого посредством перемены места двух последних королев так, чтобы стоящая в четвертом ряду заняла место в восьмом, а стоящая в восьмом перешла в четвертый ряд одной и той же колонки.

Девятое решение можно получить из восьмого, если передвинуть всех королев через две клетки вправо и потом королеву первой колонки переместить в тот ряд, где находится королева третьей колонки, а эту последнюю туда, где стояла первая, не меняя колонок.

Десятое решение выводится из девятого, если подвинуть на одну клетку кверху всех королев, стоящих выше третьего ряда, и затем переместить королеву третьей колонки из первой клетки в четвертую.

Одиннадцатое решение можно также получить из девятого, оставив на своих местах королев, занимающих четыре средних ряда, и переместив четырех прочих королев симметрично по отношению к четвертой вертикальной колонке.

Что же касается двенадцатого решения, то оно симметрично и выводится легко.

СЛУЧАЙ С МЕНЬШИМ ЧИСЛОМ КОРОЛЕВ

Применяя предыдущий способ к шахматным доскам с числом клеток, меньшим 64, Пармантье получил результаты, выраженные в следующей таблице.

Таблица простых решений задачи с четырьмя, пятью, шестью и семью королевами:

n	N	Сумма	Тип	Решение
4	16	2	04	2413
5	25	10	104	25314
			023	53142
6	36	4	024	246135
7	49	40	0124	6357142
			1024	5724613
				3724615
			0214	4613572
			0133	1357246
				3572461

Здесь в столбце n показано число клеток с каждой стороны доски, а в столбце N — общее количество всех ее клеток, следовательно,

$$N = n^2.$$

В третьем столбце помещена сумма всех различных между собой решений, в четвертом – их типы, а в пятом – цифровое выражение простых решений. Для шахматных досок с четырьмя и девятью клетками нет ни одного решения.

Таким образом, здесь собраны все решения.

92 ПОЛОЖЕНИЯ ВОСЬМИ КОРОЛЕВ

В приводимой ниже таблице помещены все 92 возможных решения задачи о восьми королевах. Таблица эта, как мы уже сказали, должна представлять совокупность всех комбинаций, составленных из различных цифр от 1 до 8 таким образом, что разность между двумя из них никогда не равняется разности порядков занимаемых ими мест. Это – точная копия таблицы, составленной Пармантье в 1867 году.

<table>
<tr><td>4</td><td rowspan="4">Решения, начинающиеся или заканчивающиеся цифрами</td><td>1</td><td rowspan="4">или</td><td>8</td></tr>
<tr><td>8</td><td>2</td><td>7</td></tr>
<tr><td>16</td><td>3</td><td>6</td></tr>
<tr><td>18</td><td>3</td><td>5</td></tr>
</table>

Сумма цифр в каждой из восьми колонок следующей таблицы равняется 414 или 18 x 23, так как каждая содержит в себе столько же единиц, сколько восьмерок, двоек и семерок, троек и шестерок, четверок и пятерок. Это последнее замечание может служить для проверки таблицы.

ТАБЛИЦА 92 РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ О ВОСЬМИ КОРОЛЕВАХ

1	1586 3724
2	1683 7425
3	1746 8253
4	1758 2463
5	2468 3175
6	2571 3864
7	2574 1863
8	2617 4835
9	2683 1475
10	2736 8514
11	2758 1463
12	2861 3574
13	3175 8246
14	3528 1746
15	3528 6471
16	3571 4286
17	3584 1726
18	3625 8174
19	3627 1485
20	3627 5184
21	3641 8572
22	3642 8571
23	3681 4752
24	3681 5724
25	3682 4175
26	3728 5146
27	3728 6415
28	3847 1625
29	4158 2736

30	4158 6372
31	4258 6137
32	4273 6815
33	4273 6851
34	4275 1863
35	4285 7136
36	4286 1357
37	4615 2837
38	4682 7135
39	4683 1752
40	4718 5263
41	4738 2516
42	4752 6138
43	4753 1682
44	4813 6275
45	4815 7263
46	4853 1726
47	5146 8273
48	5184 2736
49	5186 3724
50	5246 8317
51	5247 3861
52	5261 7483
53	5281 4736
54	5316 8247
55	5317 2864
56	5384 7162
57	5713 8642
58	5714 2863
59	5724 8136
60	5726 3148
61	5726 3184

62	5741 3862
63	5841 3627
64	5841 7263
65	6152 8374
66	6271 3584
67	6271 4853
68	6317 5824
69	6318 4275
70	6318 5247
71	6357 1428
72	6358 1427
73	6372 4815
74	6372 8514
75	6374 1825
76	6415 8273
77	6428 5713
78	6471 3528
79	6471 8253
80	6824 1753
81	7138 6425
82	7241 8536
83	7263 1485
84	7316 8524
85	7382 5164
86	7425 8136
87	7428 6135
88	7531 6824
89	8241 7536
90	8253 1746
91	8316 2574
92	8413 6275

СПОСОБ ЛАКЬЕРА

В предыдущей таблице все решения расположены в числовом порядке, но ее можно составить также систематически, весьма простым способом, который придумал Лакьер, бывший воспитанник политехнической школы. Для этого поставим сначала одну королеву в самую нижнюю клетку первой колонки слева, затем вторую королеву — во второй колонке, по возможности, близко к первой королеве и так далее, стараясь помещать всегда следующую королеву в новой колонке справа, как можно ниже, сообразно с условиями задачи, то есть принимая в расчет положение королевы, уже стоящей с левой стороны. Когда же, наконец, достигнем того, что в колонке уже не может быть поставлена королева, то всех королев левой стороны следует подвинуть на одну, две, три и так далее клеток вверх, а направо от них разместить остальных королев согласно условию задачи. При этом каждое найденное решение записывают всегда сообразно принятому обозначению, после чего все они разместятся в систематическом порядке. Полученную таким образом таблицу можно проверить, соединив в одну группу все решения, выводимые из каждого основного посредством поворота или опрокидывания доски, как мы это уже объясняли, говоря о смежных и перевернутых решениях. При помощи такого способа один ребенок под руководством Лакьера в течение нескольких часов составил таблицу 92 решений на шахматной доске из 64 клеток. В этой легко проверяемой таблице было только три ошибки: одна вследствие недосмотра и две вследствие неправильности решения[50].

ДРУГОЕ ВЫРАЖЕНИЕ ЗАДАЧИ О КОРОЛЕВАХ

С помощью приложенной таблицы легко найти решение задачи о восьми королевах, выраженное в таком виде:

Поместив одну королеву на какой-нибудь из шестидесяти четырех клеток обыкновенной шахматной доски, определить все способы расположения семи остальных королев так, чтобы ни одна из них не могла быть взята другой.

Прежде всего следует заметить, что для полного решения этой новой задачи нет никакой необходимости рассматривать все клетки, на которые можно поставить первую королеву, но достаточно сделать это только относительно нумерованных клеток рисунка 22-й, занимающих немного более восьмой части шахматной доски. Решения, соответствующий остальным

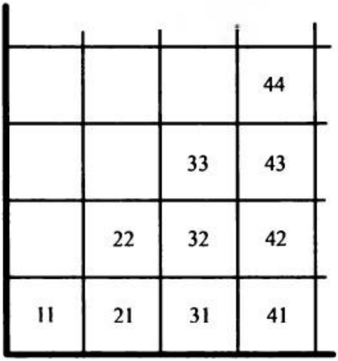


Рис. 22

клеткам, можно вывести по способу симметрии, сообразно четырем осям симметрии шахматной доски.

Для получения решения, обусловливаемого начальной клеткой № 11, достаточно взять из полной таблицы 92 решений все те, *первая* цифра которых слева — 1. Для получения решений, вытекающих из клетки № 22, послужат те, *вторая* цифра которых — 2, а чтобы получить решения, соответствующие клетке № 43, следует взять из таблицы все числа, четвертая цифра которых — 3 и так далее.

Приводимая ниже таблица разделяется на три колонки: первая указывает номер основной клетки, вторая — число возможных для этой клетки решений...

Клетки	Число	Нумерация
11	4	1, 2, 3, 4
21	8	13, 29, 30. 47, 48, 49.
31	16	8, 37, 40, 44, 45, 54, 55, 57, 58, 68, 69, 70, 76, 84, 91, 92
41	18	6,12, 16, 21, 23, 24, 52, 53, 62, 63, 64, 66, 67, 78, 79, 82, 88, 89
22	16	31, 32, 33, 34, 35, 36, 50. 51, 52, 53, 66, 67, 82, 83, 89, 90
32	14	14, 1
42	8	22, 25, 38, 42, 65, 73. 74, 85
33	4	10, 41, 81, 88
43	12	2, 9, 32, 33, 39, 43, 44, 46, 57, 83, 90, 92
44	8	7, 17. 48, 56, 58, 59, 75, 80

Рассматривая таблицу, мы видим, что наименьшее число решений этого рода задач равно 4, а наибольшее — 18, что справедливо вообще относительно всех клеток шахматной доски, принимаемых за основные.

* * *

Мы изложили почти все, что относится к задаче о королевах. Но если шахматная доска состоит из 9 или 10 клеток с каждой стороны, то задача настолько усложняется, что определение общего числа ее решений становится невозможным. Впрочем, все-таки не безынтересно будет попытаться определить число решений для досок с 81, 100, 121 и 144 клетками. Изучение таблицы числа решений задачи для всех шахматных досок, начиная с 2 и заканчивая 12 клетками с каждой стороны, могло бы, пожалуй, привести или к другим способам исследования, или к определению новых свойств целых чисел. Но громадное затруднение состоит здесь в том, что число перестановок из n элементов значительно увеличивается вместе с возрастанием n и что вследствие этого количество комбинаций несоответствующих задач с n королевами растет чрезвычайно быстро.

Для шахматной доски из 11 клеток с каждой стороны можно отыскать непосредственно несколько простых решений, которые выводятся из рассмотрения арифметической прогрессии. Обозначим число 10 через *a*, 11 — через *b* и составим приводимую ниже арифметическую прогрессию, заменяя в них все члены выше 11 разностью между ними и этим последним.

Прогрессии	1	3	5	7	9	b	2	4	6	8	A	знаменатель	2
	1	4	7	a	2	5	8	b	3	6	9		3
	1	5	9	2	6	a	3	7	b	4	8		4
	1	6	b	5	a	4	9	3	8	2	7		5
	1	7	2	8	3	9	4	a	5	b	6		6
	1	8	4	b	7	3	a	6	2	9	5		7
	1	9	6	3	b	8	5	2	a	7	4		8
	1	a	8	6	4	2	b	9	7	5	3		9

Все эти решения относятся к задаче об одиннадцати королевах. На шахматной доске они наглядно представляют то, что в ткацком искусстве называется *движением основ при ткани гладкого сатина на одиннадцати бердах.*

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ТЕОРЕМЫ

Возьмем арифметическую прогрессию, знаменатель которой равен r:

$$a, a + r, a + 2r, a + 3r.$$

Если рассмотрим остатки деления каждого из ее членов на число *p*, то увидим, что различных остатков не может быть более *p* и что они вообще повторяются периодически. Для того чтобы все остатки были различны, необходимо и достаточно, чтобы *p* и *r* были числами первыми между собой. В самом деле, назовем через r_m и r_n остатки m-го и r-го порядка, тогда будем иметь[51]:

$$r_m \equiv a + (m - 1)^r, (\text{Mod. } p);$$
$$r_n \equiv a + (r - 1)^r, (\text{Mod. } p).$$

Вычитая эти сравнения одно из другого, получим:

$$r_m - r_n = (m-n)r, (\text{Mod. } p).$$

Следовательно, если остатки r_m и r_n тождественны, то произведение $(m - n)$ r делится на p, но так как p предполагалось числом первым с r, то на него должна была бы делиться разность $m - n$, меньшая по сравнению с ним, что невозможно.

Итак:

Теорема I. Если p последовательных членов арифметической прогрессии, составленных из целых чисел, делить на p, число первое со знаменателем этой прогрессии, то все остатки от этого деления будут различны между собой.

Тогда говорят, что эти остатки образуют полную систему остатков по модулю p.

Далее предположим, что p означает первое число с разностью прогрессии и с разностью же, увеличенной или уменьшенной на единицу, тогда будем иметь следующую теорему.

Теорема II. Если p последовательных членов арифметической прогрессии со знаменателем r делить на число p, первое с каждым из чисел r, r + 1, r − 1, то абсолютная величина разности двух каких-нибудь остатков никогда не может быть равна разности занимаемых ими в прогрессии мест.

В самом деле, если предположить

$$r_m - r_n \equiv \pm (m - n) (\text{Mod. } p),$$

то на основании предыдущего

$$m - n \equiv \pm (m - n) \pmod{p},$$
$$(m - n)\, r \pm 1 \equiv v \pmod{p},$$

тогда p, число первое с $r \pm 1$, делало бы разность $m - n$, которая меньше его, что, очевидно, невозможно.

Из этих двух теорем следует, что во многих случаях можно найти значительное число решений задачи с p королевами, предположив, что p означает число нечетное, которое не делится на 3.

ГЛАВА 5. СОЛИТЕР

> Первые понятия о математике должно сообщать детям с раннего возраста. Цифры и линии говорят развивающемуся воображению больше, чем думают обыкновенно, а математика – отличное средство упражнять развивающийся разум наиболее правильным образом.
>
> *Кондорсе*[52]

> Когда молодые годы уже прошли, приходится играть в солитер.
>
> *Испанская поговорка*

Как показывает уже само название, игра в солитер предназначается для одиночного развлечения и в своем наиболее общем виде состоит в наследовании задач, относящихся к геометрии положения. Однако в солитер могут играть и несколько человек, предлагая друг другу на решение более или менее сложные задачи. Это относится, впрочем, и ко всем развлечениям, которые рассматриваются в нашей книге. Все они применимы как для одного, так и для нескольких человек.

ИСТОРИЧЕСКИЕ ДАННЫЕ

В *Методической энциклопедии* (Encyclopédie méthodique) говорится, будто бы идея и приведение в систему правил этой игры явились у одного путешествовавшего по Америке француза в то время, когда он наблюдал, как возвращающиеся с охоты дикари втыкали свои стрелы в различные отверстия, правильно расположенные на стенах их хижин. Многие связывают игру в солитер с игрой магов или магическими квадратами, не приводя, однако, никаких доказательств в пользу такого мнения. Весьма вероятно, что между обеими этими играми существует близкое родство, но решить этот интересный вопрос мы предоставляем проницательности читателей. Наконец, некоторые полагают, что солитер появился первоначально в Китае, в весьма отдаленную от нас эпоху.

Как бы то ни было, игра эта была хорошо известна уже в начале прошлого столетия. В первом томе Мемуаров Берлинской академии наук (Miscellanea Berolinensia, 1710) находятся мемуары Лейбница, где говорится: *«Игра, называемая солитером, мне очень понравилась. Но я предпочел воспользоваться ею в обратном смысле, то есть вместо того, чтобы разделывать данную фигуру, заставляя перескакивать один шарик через другой в пустую лунку и снимая этот последний, гораздо интереснее восстанавливать то, что было разделено, помещая шарик в ту лунку, через которую он перескакивает. При таком способе можно составить какую угодно из предложенных фигур, если только ее удалось предварительно разделить.*

— Но для чего все это? — спросят меня.

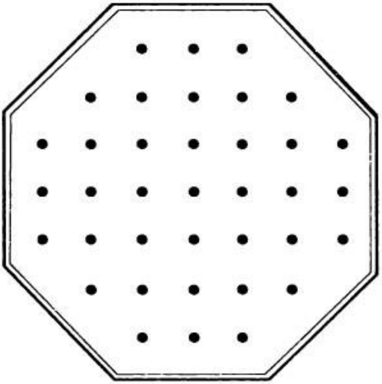
— А для того, — отвечу я, — чтобы усовершенствовать изобретательность, потому что необходимо иметь способы осуществлять на деле то, что можно найти путем размышления».

ОБЪЯСНЕНИЕ СОЛИТЕРА

Для этой игры существенно необходима доска, имеющая форму правильного восьмиугольника с проделанными в ней тридцатью семью отверстиями, как это показано на рис. 23. В каждом отверстии помещается по деревянному или костяному колку, однако в последнее время восьмиугольную доску стали заменять круглой, отверстия полукруглыми луночками, а колки — мраморными или стеклянными шариками.

Впрочем, и не имея под руками таких принадлежностей игры в солитер, легко заменить их обыкновенной шахматной доской и шашками или же просто начертить на листе картона прилагаемую ниже фигуру, поставив на соответствующих ее клетках номера. Кстати, заметим, что употребляемая нами нумерация клеток вполне согласна с правилами аналитической геометрии и была предложена для шахматной доски Вандермондом[53], знаменитым французским математиком, жившим в конце прошлого столетия и остававшимся слишком долго в забвении у французских ученых.

Рассматривая рис. 24, мы не будем пока обращать внимания на квадраты или клетки, отмеченные номерами 04, 40, 48 и 84, так как их обыкновенно не



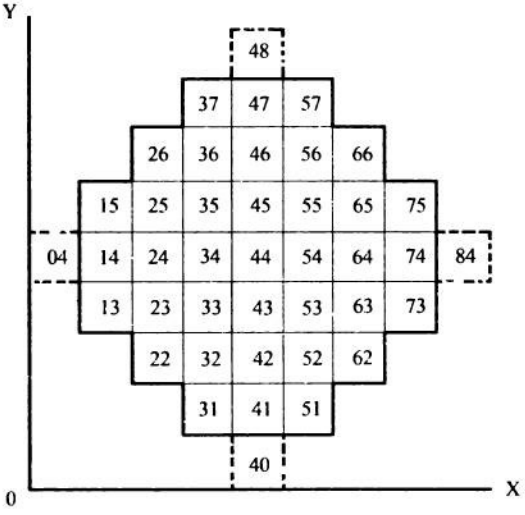

Y
48
37 47 57
26 36 46 56 66
15 25 35 45 55 65 75
04 14 24 34 44 54 64 74 84
13 23 33 43 53 63 73
22 32 42 52 62
31 41 51
40
0
X

Рис. 23, 24

помещают на солитерах, всего чаще встречающихся в продаже.

Углами солитера мы станем называть клетки с номерами 13 и 31, 15 и 51, 37 и 73, 57 и 75; серединой — пронумерованные клетки 14 и 41, 26 и 62, 47 и 74, 22 и 66; фронтами — ряды из трех смежных клеток, как, например, 13, 14 и 15, или 31, 41 и 51, или 37, 47 и 57, или 73, 74 и 75, границей или периметром — ряд клеток по краям солитера и, наконец, центром — клетку, отмеченную номером 44.

Клетки, идущие без перерыва в горизонтальной линии или в вертикальной колонке, мы будем называть последовательными. Так, клетки 32, 33, 34, 35 — последовательные относительно одной и той же колонки. В этом случае первые цифры нумерации клеток одинаковые, а вторые постепенно изменяются на единицу. Подобным же образом клетки 23, 33, 43, 53 — последовательные относительно одной и той же линии, но в них уже вторая цифра постоянная, тогда как первая постепенно изменяется на единицу. Первую цифру нумерации клеток, показывающую порядок колонки, мы будем называть *абсциссой*, а вторую, обозначающую порядок линий, условимся называть *ординатой*.

ПРАВИЛО ИГРЫ В СОЛИТЕР

Игру начинают с того, что снимают один из шариков, если солитер весь заставлен ими; если же на доске уже есть одна или несколько пустых луночек, то каким угодно шариком берут другой, смежный с ним в горизонтальном или вертикальном направлениях, при том условии, чтобы первый из них, перескочив через второй, мог быть положен в пустую луночку, соседнюю со взятым шариком. Так, например, шарик 34 может взять:

1	шарик	35	ставь на незанятую клетку	36
2		33		32
3		24		14
4		44		54

Этот ход, называемый *ходом со взяткой*, мы станем обозначать дробью, где числителем будет клетка, с которой снимается берущий шарик, а знаменателем — клетка, куда он кладется. Так, четыре только что приведенных нами хода выразятся дробями:

34/36 34/32 34/14 34/54.

Нетрудно заметить, что в каждой из них первая или последняя цифры всегда разнятся одна от другой на 2.

На солитер существует множество самых разнообразных задач; но, следуя аналитическому методу, мы начнем с простейших, из которых могут лучше выясниться правила игры.

ПЕРВОНАЧАЛЬНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

В предлагаемых упражнениях несколько клеток солитера замещаются шариками, и затем требуется, сообразно правилам игры, взять их все, кроме одного.

Читателю, желающему освоиться с этой игрой, мы советуем повторять все упражнения по нескольку раз, пока он не в состоянии будет их запомнить.

ЗАДАЧА 1. КРЕСТ ИЗ ШЕСТИ ШАРИКОВ

Шесть шариков, расположенных в клетках 35, 43, 44, 45, 46, 55, привести к одному в центре солитера.

Чтобы решить эту задачу, употребляют следующие пять ходов:

45/65 43/45 35/55 65/45 46/44.

ЗАДАЧА 2. КРЕСТ ИЗ ДЕВЯТИ ШАРИКОВ

Девять шариков в клетках 24, 34, 42—46, 54, 64 привести к одному в центре солитера.

Обозначение 42—46 показывает, что шарики помещаются последовательно в клетках 42, 43, 44, 45, 46. Мы будем держаться его и впоследствии как для горизонтальных, так и для вертикальных рядов. Способ решения задачи выражается дробями:

43/41, 45/43, 24/44, 44/42, 64/44, 41/43, 43/45, 46/44.

ЗАДАЧА 3. ТРЕУГОЛЬНИК

Девять шариков в клетках 23, 33, 34, 43—45, 53, 54, 63.

53/55, 55/35, 33/53, 44/42, 35/33, 23/43, 42/44.

ЗАДАЧА 4. КАМИН

Одиннадцать шариков в клетках 34—37, 45-47, 54—57.

45/25, 37/35, 57/37, 34/36, 37/35, 25/45, 46/66, 54/56, 66/46, 46/44.

ЗАДАЧА 5. МОГИЛА

Пятнадцать шариков в клетках 25, 31, 32, 35, 41–47, 51, 52, 55, 65.

31/33, 51/53, 43/63 , 41/43, 33/53, 63/43.

По окончании шести ходов получается крест из девяти шариков, подобный тому, который был дан в задаче 2, только он на другом месте, так как центр его приходится в клетке 45, которая должна служить конечным пунктом этой задачи.

ЗАДАЧА 6. ПИРАМИДА

Шестнадцать шариков в клетках 14, 24, 25, 34–36, 44–47, 54–56, 64, 65, 74.

55/53, 74/54, 53/55, 55/57, 57/37, 35/33, 14/34, 33/35, 36/56, 44/46, 56/36, 25/45, 37/35, 35/55, 65/45.

ЗАДАЧА 7. ДВОЙНОЙ КРЕСТ

Двадцать один шарик в клетках 14, 22, 24,26, 33–35, 41–47, 53-55, 62, 64, 66, 74.

54/52, 52/32, 22/42, 33/53, 41/43, 43/63, 74/54, 62/64, 45/65, 54/74, 66/64, 74/54, 35/33, 54/34, 33/35, 47/45, 45/25, 14/34, 26/24, 24/44.

ЗАДАЧА 8. ПЯТЬ СОЕДИНЕННЫХ МЕЖДУ СОБОЙ КРЕСТОВ

Двадцать один шарик в клетках 14, 23–25, 32, 34. 36, 41–47, 52, 54, 56, 63–65, 74.

64/62, 44/64, 74/54, 46/66, 66/64, 64/44, 44/46, 47/45. 24/26, 26/46, 46/44, 44/24, 14/34, 42/22, 22/24.

ЗАДАЧА 9. ПЯТИУГОЛЬНИК

Двадцать четыре шарика в клетках 14, 23—25, 32—36, 42—47, 52—56, 63-65, 74.

53/51, 32/52, 51/53, 44/42, 23/43, 42/44, 63/43, 25/23, 45/25, 43/45, 55/35, 35/33, 13/15, 15/35, 35/37, 37/57, 57/55, 55/53, 74/54, 53/55, 65/45, 46/44.

ЗАДАЧА 10. ПАРАЛЛЕЛОГРАММ

Двадцать четыре шарика в клетках 14, 23—25, 32—36, 41—43, 45—47, 52—56, 63—65, 74.

53/51, 51/31, 55/75, 75/73, 73/53, 64/44, 35/37, 37/57, 57/55, 55/35, 34/36, 46/26, 14/34, 26/24, 23/25, 44/24, 25/23, 32/34, 53/33, 34/32, 31/33, 23/43, 42/44.

ЗАДАЧА 11. ВОСЬМИУГОЛЬНИК

Покрыть весь солитер, кроме восьми углов

53/51, 32/52, 51/53, 54/52, 74/54, 44/42, 52/32, 22/42, 41/43, 24/22, 43/23, 22/24, 62/64, 64/44, 34/54, 14/34, 66/64, 64/44, 56/54, 35/33, 54/34, 33/35, 35/55, 47/45, 55/35, 25/45, 26/46, 46/44.

ЗАДАЧА 12. ТРОЙНОЙ КРЕСТ

Солитер покрыт весь, кроме клеток 22, 66, 26, 62 и 44.

42/62, 54/52, 51/53, 74/54, 54/52, 62/42, 73/53, 32/52, 31/51, 43/63, 51/53, 63/43, 56/54, 75/55, 54/56, 35/55, 47/45, 45/65, 57/55, 65/45, 37/35, 34, 32, 13/33, 15/13, 43/23, 13/33, 32/34, 24/26, 34/36, 26/46, 46/44.

Не мешает также упражняться в обратном решении этих задач, изменяя правила игры.

Рассмотрим три последовательные клетки (рис. 25) или в вертикальном направлении (рис. 26).

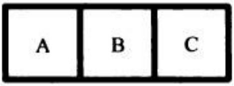


Рис. 25

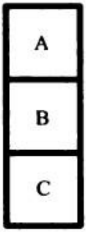


Рис. 26

Предположим, что клетки B и C не заняты, и шарик лежит только в A. Переставим его оттуда в C, поместив другой шарик в B. Тогда у нас получится так называемый *ход со ставкой*. Пользуясь этим правилом, нетрудно решать все обратные задачи. Положив шарик в клетку, которую он занял при окончательном ходе, то есть в ту, номер которой образует знаменатель последней дроби, начинаем делать ходы со ставкой. Цифровое выражение их получится из прямого решения, во-первых, перестановкой в каждой дроби его числителя и знаменателя, а во-вторых, размещением самих дробей в обратном порядке.

ЗАДАЧИ НА СОЛИТЕР, НАЧИНАЕМЫЙ ИЗ ЦЕНТРА

При решении этих задач мы возьмем за начальную фигуру солитер из 37 клеток, заставленных шариками, кроме только одной центральной — 44, и постараемся после нескольких ходов получить ту или другую фигуру, образуемую оставшимися шариками. Число и последовательность ходов со взятками мы будем обозначать по-прежнему дробями, так же, как мы это делали в предыдущих задачах.

ЗАДАЧА 13. ЧЕТКИ

64/44, 62/64, 42/62, 22/42, 24/22, 26/24, 46/26, 66/46, 64/66, 34/54, 54/52, 52/32, 32/34, 24/44.

Остаются граница и шарики 35, 43–46, 55, образующие крест из шести шариков.

ЗАДАЧА 14. ЭКВАТОР

42/44, 22/42, 24/22, 63/43, 33/53, 65/63, 62/64, 42/62, 26/24, 46/26, 34/36, 55/35, 36/34, 53/55, 56/54.

Остаются граница и горизонтальная линия от 14 до 74.

ЗАДАЧА 15. КРЕСТ

24/44, 36/34, 55/35, 25/45, 33/35, 53/33, 23/43, 56/36, 36/34, 73/53, 65/63, 53/73, 51/53, 32/52, 53/51.

Остаются граница и пять шариков в середине.

ЗАДАЧА 16. ПОЛНАЯ ЛУНА

64/44, 52/54, 33/53, 54/52, 66/64, 46/66, 44/46, 24/44, 26/24, 46/26, 14/34, 22/24, 34/14, 42/22, 62/42, 64/62.

Остаются граница и четыре шарика 42, 44, 35, 55.

ЗАДАЧА 17. МАЛЬТИЙСКИЙ КРЕСТ

24/44, 54/34, 74/54, 42/44, 44/64, 46/44, 34/54, 54/74, 62/42, 63/43, 32/34, 22/24, 25/45, 26/46, 56/54, 66/64.

Остаются шарики на фронтах и на средних — линиях и колонке, за исключением центра.

ЗАДАЧА 18. ЧЕТЫРЕ ОФИЦЕРА, ОКРУЖЕННЫЕ ШЕСТНАДЦАТЬЮ СОЛДАТАМИ

42/44, 45/43, 64/44, 43/45, 66/64, 46/66, 26/46, 46/44, 24/26, 44/24, 22/42, 24/22, 41/43, 62/42, 43/41, 64/62.

Остаются граница и четыре шарика — 33, 53, 35, 55, представляющие офицеров, которые не меняли места во время происходивших маневров.

ЗАДАЧА 19. ТРИ ОФИЦЕРА, ОКРУЖЕННЫЕ ШЕСТНАДЦАТЬЮ СОЛДАТАМИ

64/44, 34/54, 42/44, 44/64, 36/34, 56/36, 26/46, 46/44, 65/45, 24/26 и т. д.

Восемь последних ходов — те же, что и в предыдущей задаче. Остаются граница и три шарика — 33, 53, 45, представляющие офицеров.

ЗАДАЧА 20. АДАМ И ЕВА В РАЮ

46/44, 43/45, 23/43, 25/23, 45/25, 42/44, 63/43, 43/45, 65/63, 45/65, 22/42, 26/24, 66/46, 62/64, 42/62, 24/22, 46/26, 64/66.

Остаются граница и два шарика — 34 и 54, представляющие Адама и Еву, которые не двигались с места.

ЗАДАЧА 21. ПРОФЕССОР В АУДИТОРИИ

Ее начинают ходами задачи 13 и заканчивают ходами задачи 1. Остаются граница и центр.

ЗАДАЧА 22. СТРАШНЫЙ СУД

24/44, 32/34, 52/32, 35/33, 32/34, 55/35, 57/55, 65/45, 63/65, 43/63, 36/56, 35/55, 55/57, 13/33, 15/13, 33/35, 35/15, 73/53, 75/73, 53/55, 55/75.

С последним ходом останутся центральный шарик 44 и две части границы, представляющие праведников и грешников, отделенных незанятыми клетками 14 и 74.

ЗАДАЧА 23. КОТЕЛ

24/44, 32/34, 53/33, 34/32, 31/33, 52/32, 33/31, 45/43, 64/44, 43/45, 56/54, 35/55, 54/56, 66/64, 63/65, 26/24, 23/25, 37/35, 47/45, 57/55.

Остаются линяя 15—75 и часть границы 15—41 и 41—75.

ЗАДАЧА 24. ЧЕТЫРЕ ЕВАНГЕЛИСТА И ДВЕНАДЦАТЬ АПОСТОЛОВ

42/44, 62/42, 64/62, 44/64, 41/43, 74/54, 46/44, 44/64, 66/46, 64/66, 47/45, 24/44, 44/46, 26/24, 46/26, 14/34, 22/24, 24/44, 44/42, 42/22.

Остаются шарики на границе за исключением 14, 41, 47 и 74, то есть двенадцать апостолов, и, кроме того, шарики 33, 35, 53, 55, представляющие евангелистов.

ЗАДАЧА 25. ТРОИЦА И ДВЕНАДЦАТЬ АПОСТОЛОВ

42/44, 45/43, 24/44, 43/45, 64/44, 56/54, 54/34, 36/56, 34/36, 15/35, 57/55, 37/57, 35/37, 13/15, 33/13, 31/33, 51/31, 53/51, 73/53, 75/73, 55/75, 33, 31, 51, 53, 73, 75.

Остаются двенадцать шариков на границе, как в предыдущей задаче, и еще три шарика — 33, 53, 45.

ЗАДАЧА 26. ХРИСТОС И ДВЕНАДЦАТЬ АПОСТОЛОВ

42/44, 63/43, 51/53, 31/51, 33/31, 53/33, 23/43, 35/33, 33/53, 14/34, 44/24, 46/44, 26/46, 24/26, 47/45, 66/46, 54/56, 46/66, 74/54, 75/55, 45/65, 53/55, 55/75.

Остаются двенадцать шариков на границе, как в двух предыдущих задачах, и, кроме того, центральный шарик 44.

ЗАДАЧА 27. ЧАША

46/44, 65/45, 57/55, 37/57, 54/56, 57/55, 45/65, 52/54, 32/52, 34/32, 14/34, 75/55, 55/53, 74/54, 53/55, 73/53, 52/54, 32/52, 62/42.

Остаются двенадцать шариков — 26, 31, 34, 35, 41—44, 51, 54, 55 и 66.

ЗАДАЧА 28. ТРОИЦА

46/44, 25/45, 37/35, 45/25, 15/35, 34/36, 26/46, 54/34, 65/45, 57/55, 45/65, 75/55, 74/54, 54/56, 47/45, 66/46, 52/54, 32/52, 34/32, 14/34, 62/42, 42/44, 73/53, 54/52, 22/52, 22/42, 13/33, 34/32, 45/43, 31/33, 43/23, 41/43, 51/53, 43/63.

Остаются три шарика — 23, 63 и 46.

ЗАДАЧА 29. ПОЛЮСЫ

Делаются двадцать ходов, как в предыдущей задаче, а потом продолжают.

45/47, 73/53, 62/42, 54/52, 51/53, 53/33, 41/43, 22/42, 34/32, 13/33, 48/23, 31/33, 23, 43, 43/41.

Остаются два шарика 41 и 47.

ЗАДАЧА 30. КОРСАР

Весь солитер покрывают шариками, потом снимают шарик 51 и продолжают.

53/51, 73/53, 65/63, 62/64, 75/73, 54/52, 51/53, 43/63, 73/53, 23/43, 25/23, 45/25, 47/45, 31/33, 33/35, 13/33, 43/23, 22/24, 14/34, 35/33, 15/35, 45/25, 26/24, 37/35, 66/46.

Потом шарик 41, представляющий корсара, последовательно берет девять шариков (кораблей) — 42, 33, 24, 35, 55, 64, 53, 44, 46 и становится на клетку 47, откуда его самого берет шарик 57, перескакивающий на клетку 37.

БУКВЕННЫЕ ЗАДАЧИ

Таким образом, мы привели решение 30 последовательных задач игры в солитер. Когда же в «Revue Scienti-fique» печаталась моя статья о солитере, наборщику, по-видимому, очень не понравилось иметь дело с таким громадным количеством цифр и дробей, и потому он наделал массу ошибок, так что с корректурой вышло много хлопот. Но меня выручили мои дети. Младший сын Пауль, которому в то время не было и шести лет, умел весьма недурно считать и любил возиться с цифрами, так что, например, лото, как игра, основанная на случайности, уже казалась ему скучной. Он-то именно и поправлял корректуры моей статьи с помощью своей старшей сестры Маделины, девочки, не достигшей еще тогда и семилетнего возраста. Я начертил на картоне нумерованную доску солитера, объяснил детям чрезвычайно простые приемы этой игры, и дело пошло у них отлично. Один читал вслух обозначения последовательных ходов, а другая выполняла их на доске, так что мне самому пришлось откорректировать лишь небольшое число задач, с которыми они не смогли справиться.

В награду за это я обещал им придумать такие задачи для солитера, где требовалось бы составить из шариков все буквы, входящие в начертание их имен. С этой целью я скомбинировал несколько новых задач, выводимых из вполне заставленного солитера и оканчивающихся таким расположением шариков, которое по возможности близко воспроизводит буквы азбуки, входящие в имена Paul и Madeleine[54].

ЗАДАЧА НА ИМЯ PAUL

Сюда относятся четыре последовательные задачи, соответствующие буквам P, A, U, L.

ЗАДАЧА НА БУКВУ P

С покрытого шариками солитера снимают 44 и потом делают следующие три хода.

42/44, 63/43, 51/53, 43/63, 73/53, 54/52, 62/42, 41/43, 74/54, 33/53, 54/52, 22/42, 52/32, 56/54, 36/56, 34/36, 75/55, 45/65, 13/33, 14/34, 15/35, 26/46, 56/36.

Остаются тринадцать шариков — 31—37, 44, 47, 54, 57, 65, 66.

ЗАДАЧА НА БУКВУ А

С покрытого шариками солитера снимают 44 и потом делают двадцать шесть ходов.

63/44, 56/54, 35/55, 54/56, 66/64, 57/55, 47/45, 37/35, 45/65, 34/36, 26/46, 15/35, 75/55, 14/34, 74/54, 22/24, 43/23, 31/33, 23/43, 53/33, 41/43, 33/53, 63/43, 51/53, 43/63, 62/64.

Остаются десять шариков — 13, 73, 24—64, 35, 55, 46.

ЗАДАЧА НА БУКВУ U

С заставленной доски снимают шарик 64 и потом делают двадцать четыре хода.

66/61, 45/65, 57/55, 25/45, 37/35, 45/25, 47/45, 54/56, 52/54, 32/52, 34/32, 75/55, 73/53, 62/42, 54/52, 74/54, 51/53, 32/52, 13/33, 43/23, 45/43, 15/13, 13/33, 43/23.

Остаются двенадцать шариков 22—26, 31, 41, 52—56.

ЗАДАЧА НА БУКВУ L

С заставленной доски снимают шарик 33 и потом делают двадцать семь ходов.

31/33, 34/32, 51/31, 31/33, 36/34, 34/32, 56/36, 54/56, 52/54, 73/53, 54/52, 74/54, 57/55, 54/56, 66/46, 75/55, 55/35, 43/45, 36/34, 15/35, 13/15, 45/25, 15/35, 34/36, 37/35, 47/45, 45/25.

Остаются девять шариков — 22—26, 32—35.

ЗАДАЧИ НА ИМЯ MADELEINE

Так как A и L уже найдены, то остается отыскать решение для пяти букв M, D, E, I, N.

ЗАДАЧА НА БУКВУ M

С заставленного солитера снимают шарики 33 и 53 и делают двадцать два хода.

55/53, 13/33, 43/23, 63/43, 51/53, 43/63, 35/33, 23/43, 31/33, 43/23, 41/43, 15/13, 13/33, 43/23, 75/55, 73/75, 45/65, 75/55, 47/45, 45/65, 37/35, 57/55.

Остаются тринадцать шариков — 22—26, 35, 44, 55, 62—66.

ЗАДАЧА НА БУКВУ D

С заставленного солитера снимают шарик 44 и делают двадцать ходов.

42/44, 23/43, 35/33, 43/23, 54/34, 46/44, 34/54, 65/45, 63/65, 75/55, 45/65, 53/55, 55/75, 22/42, 52/32, 13/33, 14/34, 15/35, 26/46, 56/36.

Остаются шестнадцать шариков — 31—37, 41, 47, 51, 57, 62, 66, 73—75.

ЗАДАЧА НА БУКВУ E

С заставленного солитера снимают шарик 44 и делают двадцать три хода.

42/44, 62/42, 54/52, 73/53, 52/54, 41/43, 22/42, 43/41, 34/32, 54/34, 56/54, 75/55, 54/56, 74/64, 46/44, 26/46, 34/36, 13/33, 14/34, 15/35, 47/45, 66/46, 45/47.

Остаются тринадцать шариков — 31—37, 41, 44, 47, 51, 54, 57.

ЗАДАЧА НА БУКВУ I

С заставленного солитера снимают шарики 13 и 73 и делают двадцать четыре хода.

75/73, 54/74, 66/64, 74/54, 15/13, 34/14, 26/24, 14/34, 46/66, 54/56, 66/46, 52/54, 32/52, 34/32, 36/34, 13/33, 22/42, 34/32. 51/53, 32/52, 53/51, 73/53, 54/52, 62/42.

Остаются одиннадцать шариков — 31, 37, 41—47, 51, 57.

ЗАДАЧА НА БУКВУ N

С заставленного солитера снимают шарики 33 и 52 и делают двадцать два хода.

54/52, 56/54, 75/55, 54/56, 57/55, 45/65, 25/45, 37/35, 45/25, 47/45, 73/75, 75/55, 45/65, 13/33, 43/23, 15/13, 13/33, 33/35, 31/33, 41/43, 43/23, 51/53.

Остаются тринадцать шариков — 22—26, 35, 44, 53, 62—66.

ПРИВЕДЕНИЕ К ОДНОМУ ШАРИКУ НА СОЛИТЕРЕ ИЗ 37 КЛЕТОК

Самая обыкновенная из задач солитера называется приведением к одному шарику и состоит в том, что с заставленного солитера снимаются сначала один шарик, потом, путем последовательных ходов, и все остальные, за исключением одного. В этом случае мы условимся называть *начальной* клеткой первую и единственную клетку, не занятую в начале игры, и *заключительной* — последнюю и единственную, занятую по окончании игры. В задаче *Корсар* мы уже имели такой случай, причем начальной клеткой была 51, а заключительной — 37. Приведем теперь еще одно из подобных решений, приняв за начальную клетку 73. Для этого нужно будет сделать тридцать пять ходов, а именно:

53/73, 51/53, 43/63, 73/53, 23/43, 31/33, 43/23, 13/33, 45/43, 65/45, 57/55, 45/65, 75/55, 25/45, 37/35, 45/25, 15/35, 43/63, 64/44, 62/64, 74/54, 41/43, 34/36, 14/34, 47/45, 26/46, 45/47, 54/56, 66/46, 43/23, 22/24, 47/45, 45/43, 24/44, 44/42 или 43/45.

Эти ходы весьма легко запомнить, составив себе ясное представление о фигурах, образуемых солитером после 17 и 26 ходов.

Что же касается окончательного хода, то его можно сделать двумя разными способами, и в первом случае заключительной клеткой будет 42, а во втором — 45. Это замечание нам очень пригодится впоследствии.

ГОРИЗОНТАЛЬНАЯ СИММЕТРИЯ

Вместо 73 можно было бы взять за начальную клетку и всякую другую и таким образом попытаться решить задачу о приведении к одному шарику, начиная последовательно со всех клеток солитера. Но, как мы сейчас убедимся, правильная форма расположения луночек даст возможность значительно сократить число таких задач.

Взяв за начальную клетку 75, мы заметим, что клетки 73 и 75 расположены симметрично относительно средней линии 14—74, служащей осью симметрии для фигуры, образуемой клетками солитера. Заметим при этом, что вообще первые цифры обозначения двух клеток, симметричных относительно средней линии, бывают всегда одинаковы, например 73 и 75, 32 и 36 и так далее. Что же касается вторых цифр, то сумма их во всех случаях равна восьми.

Следовательно, для решения задачи о приведении к одному шарику, взяв за начальную клетку 75, можно воспользоваться схемой предыдущего решения. Для этого стоит только, сохраняя порядок и расположение дробей, оставить первые цифры в каждой из них без перемены, а вторые, как в числителе, так и в знаменателе, заменить арифметическим дополнением до восьми, например. Вместо 1 поставить 7, вместо 2—6, вместо 3—5 и так далее.

Тогда первые ходы при решении предполагаемой задачи будут:

55/75, 57/55, 45/65, 75/55 и так далее.

ВЕРТИКАЛЬНАЯ СИММЕТРИЯ

Солитер симметричен еще относительно средней колонны 14—47. Поэтому клетки 13 и 73 также симметричны между собой, но у них одинакова уже вторая цифра обозначения, а сумма двух первых всегда равна восьми. Следовательно, задачу о приведении к одному шарику с начальной клеткой 13 можно вывести на основании ее решения для клетки 73, сохранив порядок расположения дробей, обозначающих ходы, а также вторые цифры их числителей и знаменателей, и заменив каждую первую цифру этих членов арифметическим дополнением до восьми. Так, например, для начальной клетки 13 первые ходы будут:

33/13, 31/33, 43/23, 13/33 и так далее.

ЦЕНТРАЛЬНАЯ СИММЕТРИЯ

Относительно начальной клетки 15 решение той же задачи можно вывести из решений ее для начальных клеток 13 или 75, пользуясь горизонтальной или вертикальной симметрией. Но мы достигнем того же самого результата несравненно скорее, если заменим в ряду ходов, показывающих решение для начальной клетки 73, каждую цифру ее арифметическим дополнением до восьми. Это свойство солитера геометрически выражается следующей теоремой:

Если какая-нибудь фигура симметрична относительно двух перпендикулярных осей, то она симметрична также и относительно точек пересечения этих осей. Следовательно, солитер обладает центральной симметрией, то есть все клетки в нем попарно противоположны и находятся на равном расстоянии от центральной клетки 44[55]. Первые ходы в решении задачи для начальной клетки 15, выведенные на основании центральной симметрии из задачи с начальной клеткой 73, будут следующие:

35/15, 37/35, 45/25, 15/35 и так далее.

НАКЛОННАЯ СИММЕТРИЯ

Клетки восьмиугольного солитера симметричны еще относительно диагонали 22—66. Для двух симметричных таким образом клеток соответствие в цифровом обозначении состоит в том, что у одной из них оно тождественно с перевернутым обозначением другой. Следовательно, задачу о приведении всех шариков солитера к одному для клетки 37 можно получить из решения той же задачи для клетки 73, написав только цифры каждой дроби, выражающей последовательность ходов в обратном порядке. Так, например, для первых ходов рассматриваемого случая будем иметь:

35/37, 15/35, 34/36, 37/35, ...

Из всего сказанного следует, что изучение задач о приведении наполненная солитера из 37 клеток к одному шарику должно ограничиваться только одной клеткой для каждой симметричной группы. Сообразно с этим мы и распределили все клетки солитера на восемь групп, таблицу которых приводим ниже.

ТАБЛИЦА ГРУПП СИММЕТРИЧНЫХ КЛЕТОК

Группы	Клетки
I	44
II	14, 41, 47, 74
III	22, 26, 62, 66
IV	24, 42, 46, 64
V	33, 35, 53, 55
VI	34, 43, 45, 54
VII	13, 15, 31, 37, 51, 57, 73, 75
VIII	23, 25, 32, 36, 52, 56, 63, 65

Таким образом, достаточно будет изучить рассматриваемую задачу для одной какой-нибудь клетки из каждой группы. Но впоследствии в теории неразрешимых задач на обобщенном солитере мы докажем, что приведение всех шариков к одному или розыгрыш невозможен для всех клеток, принадлежащих к группам, отмеченным в таблице звездочкой. Таким образом, нам придется изучить только группы IV и VI, из которых мы возьмем по одной задаче: из первой группы — с начальной клеткой 42, а из второй — с начальной клеткой 45.

ОБЩИЙ СПОСОБ ВЗАИМНОСТИ

В приведенном нами решении задачи с начальной клеткой 73 мы получили заключительный шарик 42. Но возможно и обратное решение этой задачи, то есть заполнение всех клеток солитера шариками посредством ходов со ставкой, взяв за начальную клетку 42, причем заключительной будет 73 и останется незанятой. Чтобы представить решение такой задачи схематически, нужно, во-первых, изменить порядок дробей, и, во-вторых, перевернуть каждую из них, поставив числитель на место знаменателя.

Рассмотрим теперь два *дополнительных* солитера, в которых *заставленные* клетки одного всегда соответствуют *пустым* клеткам другого и наоборот, причем, конечно, *ходы со ставкой* на первом из них будут также соответствовать ходам *со взяткой* на другом.

Таким образом, выйдя из начальной клетки 42 и заполнив солитер посредством ходов со ставкой, за исключением лишь клетки 73, мы получим обыкновенное приведение солитера к одной пустой клетке. Если же станем действовать обратным способом, посредством ходов со взяткой на дополнительном солитере, исходя из начальной клетки 42, то в окончательном результате останется занятой клетка 73.

Чтобы непосредственно вывести решение задачи с начальной клеткой 42 и заключительным шариком 73 из решения с начальной клеткой 73 и заключительным шариком 42, достаточно в схеме решения последней задачи изменить порядок дробей, но не *перемещая* между собой ее члены. Следовательно, решение задачи с начальной клеткой 42, выведенное из решения с начальной клеткой 73, будет следующим:

44/42, 24/44, 45/43, 47/45, ..., 51/53, 53/73.

В этом и состоит способ взаимности.

ОБЩИЙ СПОСОБ ЗАМЕНЫ

Мы уже видели, что розыгрыш при начальной клетке 73 может заканчиваться безразлично заключительными клетками 42 и 45. Например, решение для начальной клетки 45 будет:

43/45, 24/44, 45/43, 47/45, ..., 51/53, 53/73.

Следовательно, оно отличается от предыдущего только первым ходом.

Чтобы выразить задачу в общем виде, назовем через a, b, c, d четыре последовательные клетки и предположим, что решение заканчивается ходом c/a. Но оно могло закончиться и ходом b/d. Точно так же, если решение начинается ходом C/A, то в ряду четырех последовательных клеток A, B, C, D можно заменить клетку A клеткой D, и решение будет отличаться от предыдущего только первым ходом B/D вместо C/A. В этом-то и состоит общий способ замены начальных или заключительных клеток.

Таким образом, рассмотрев способы симметрии, взаимности и замены, мы указали приемы для получения всех розыгрышей, возможных в солитере из 37 клеток, причем за начальную последовательно принимаются все клетки, относительно которых подобный розыгрыш осуществим.

ТРОЙНЫЕ ХОДЫ ДЛЯ СОКРАЩЕНИЯ ИГРЫ

В значительном числе случаев можно сократить решение задач посредством тройного хода. Рассмотрим рис. 27, 28, 29 и 30, образуемые тремя последовательными клетками B, C, D и двумя другими клетками A и A', из которых одна занята, а другая свободна.

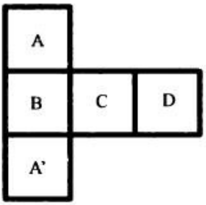


Рис. 27

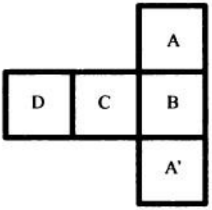


Рис. 28

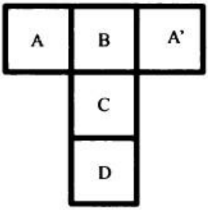


Рис. 29

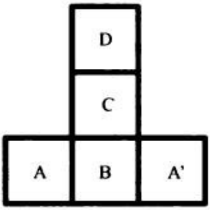


Рис. 30

Если клетка A' свободна, а четыре других заполнены, то делаются три последовательных хода:

A/A', D/B, A'/A.

Если же свободная клетка A и прочие заполнены, то ходы будут:

A/A, D/B, A/A'.

В обоих случаях три последовательных шарика B, C, D исчезли с доски, тогда как четвертый возвратился на прежнее место. То же самое можно было бы сделать, употребляя вместо трех ходов один, сняв разом три последовательных шарика B, C, D и оставив на месте A или A'. Мы станем обозначать подобный тройной ход жирными цифрами. Приведем несколько примеров.

Пример 1. Сокращенный ход в задаче профессора в аудитории

Сначала снимают с заполненной доски центральный шарик **44** и простым ходом 64/44 берут шарик **54**, потом делают шесть тройных ходов:

43/63, **45/65**, **32/52**, **36/56**, **33/35**, **23/25**.

Предлагаем читателю сравнить это решение с приведенным выше в задаче XXI.

Пример 2. Сокращенное решение задачи о двенадцати апостолах

Снимают центральный шарик **44** и делают восемь тройных ходов:

34/36, 24/26, 45/65, 46/66, 54/52, 64/62, 43/23, 42/22.

Пример 3. Квадрат из двадцати пяти шариков

На доске расположены двадцать пять шариков в виде квадрата, вершины углов которого находятся в клетках **22, 26, 62, 66.**

Эту фигуру можно привести к одному шарику в центре с помощью восьми тройных ходов:

24/26, 34/36, 46/66, 45/65, 64/62, 54/52, 42/22, 43/23.

Решение отличается от предыдущего только тем, что в нем все ходы попарно поменялись своими местами.

Пример 4. Триколет

С заставленного солитера снимают шарик **44,** потом делают последовательно четыре группы особых ходов, поворачивая каждый раз доску на четверть оборота, причем каждая группа состоит из одного тройного хода, отмеченного в нашем примере звездочкой, и двух простых.

25*/45, 47/45, 26/46, **32*/34**, 14/34, 22/24, **63*/43**, 41/43, 62/42, **56*/54**, 74/54, 66/64.

Остаются шестнадцать шариков, число которых приводится к двенадцати посредством четырех простых ходов:

45/47, 34/14, 43/41, 54/74*.

П р и м е р 5. Приведение шариков к одному на доске солитера в 41 клетку

Солитер в 41 клетку представлен на рис. 31.

Он отличается от обыкновенного только добавочными клетками **04, 40, 48** и **84**. Мы приводим схему

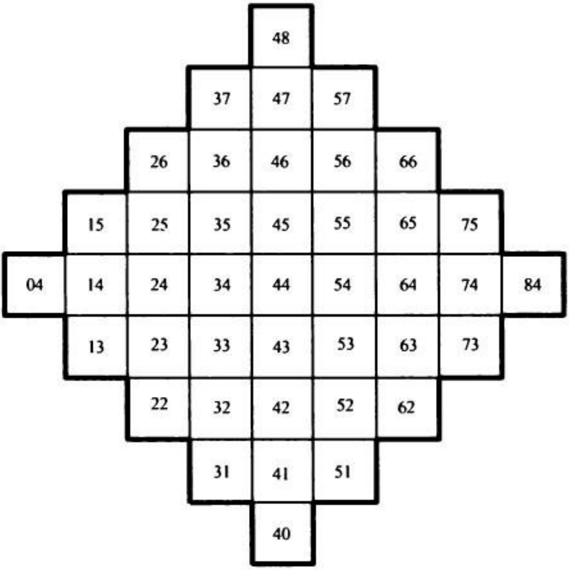


Рис. 31

ходов, которыми на нем получается розыгрыш при начальной клетке 46. Простые и тройные ходы здесь перемешаны.

66/46, 54/56, 75/55, **55/57, 46/48, 64/84**, 34/34, **15/35, 04/24**, 37/35, 45/25, 26/24, 23/25, 43/23, 22/24, 25/23, 13/33, **51/53**, 41/43, **31/33**, 73/53, 54/52, 62/42, 43/41, 40/42

Примечание. В решениях тридцати задач, приведенных ранее, встречается довольно много тройных ходов: так, в задаче 23 за первым простым ходом следуют четыре тройных.

ОБОБЩЕНИЕ СОЛИТЕРА И ПРАВИЛА ИГРЫ

Чтобы доказать невозможность некоторых решений, каковы, например, розыгрыши при известных начальных клетках, употребляется весьма остроумный способ[56]. Этот упрощенный способ состоит, во-первых, в обобщении обыкновенных правил игр и, во-вторых, в расширении границ солитера. Затем с его помощью доказывается, что если даже в общем случае решение задачи невозможно, то оно тем более невозможно для солитера с ограниченным числом клеток.

Но сформулируем новые правила в четырех постулатах.

Постулат I

Доска солитера предполагается простирающейся безгранично во все стороны.

Постулат II

Дозволяется делать ходы со ставкой и со взяткой последовательно и в каком угодно порядке.

Постулат III

Дозволяется ставить несколько шариков сразу на одну и ту же клетку с помощью ходов со ставкой.

Желающим уяснить себе сущность этих правил мы напомним, что для ознакомления с ними можно воспользоваться вместо обыкновенного солитера листом разграфленного картона и простыми шашками.

Постулат IV

В незанятую клетку дозволяется класть какое угодно число шариков. Другими словами, пустая клетка может как бы занимать шарики у прочих клеток прямо без помощи ходов со ставкой при условии возврата их по окончании партии.

Так, например, на пустую клетку можно прямо поставить шарик и продолжать ходы со ставкой или со взяткой, а потом, смотря по плану игры, взять его обратно[57].

Правило игры, которое необходимо будет рассмотреть для выяснения теории солитера, условимся называть *общим*, в отличие от обыкновенных, которые назовем *частными*.

Точно так же и решения, выведенные из первого правила, будут называться *общими* или *теоретическими*, а полученные из второго — *частными* или *практическими*.

СООТВЕТСТВЕННЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ И КЛЕТКИ

Мы называем *соответственным* такое взаимное положение двух шариков на безграничном солитере, когда один из них путем системы различных ходов, обусловливаемых употреблением общего правила, можно заменить другим, не нарушая этим порядка расположения остальных шариков. Сначала мы покажем применение общего правила на некотором числе шариков, пользуясь сокращенным ходом, подобным тройному.

Теорема I. Всегда можно снять три шарика, расположенных в трех последовательных клетках

Для доказательства этой теоремы достаточно припомнить известные нам тройные ходы. Обыкновенное правило предполагает одну из клеток А и А' или свободной, или занятой. Но вследствие постулатов III и IV эти условия становятся излишними, так как обе клетки могут быть в одно и то же время и свободными, и занятыми. Таким образом, у нас получается теоретически тройной ход.

Теорема II. Всегда можно снять или поставить два, четыре и вообще какое угодно четное число шариков на какую угодно клетку С

В самом деле, рассмотрим три последовательные клетки В, С, D. Даже когда две из них В и D не заняты. Пользуясь постулатом IV, мы можем сделать два хода со взяткой B/D и D/B. Количество шариков в клетках B и D при этом не изменилось, но клетка C имеет теперь двумя меньше. Точно так же посредством двух ходов со ставкой можно прибавить два шарика на клетку C.

Теорема III. Всегда возможно перенести шарик через две клетки в каком угодно направлении вдоль линии или колонки

Берем четыре последовательные клетки A, B, C и D, расположенные на одной линии или в одной колонке, и ставим шарик в A. Посредством хода со ставкой из A в C и хода со взяткой из B в D шарик перейдет из A в D, не изменив количества шариков в клетках B и C.

Повторяя несколько раз тот же прием, можно ставить шарик на клетках A, D и т. д., перенося его всякий раз через две. Все клетки, разделенные между собой двумя последовательными, носят название соответственных, и шарики можно переносить в любую из них[58].

ДАЛЬНЕЙШЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ ОБЩЕГО ПРАВИЛА

Припомнив обобщения, выраженные в постулатах III и IV, мы легко заметим, что согласно общему правилу всякий ход — со взяткой или со ставкой — обладает способностью изменять парность числа шариков, расположенных на трех последовательных клетках, другими словами, количество шариков, помещенных в трех последовательных клетках, увеличивается или уменьшается на единицу[59].

СООТВЕТСТВЕННЫЙ ОСТАТОК В КВАДРАТЕ ИЗ 9 КЛЕТОК

Пользуясь общим правилом, можно доказать следующую теорему, послужившую основанием теории доктора Рейса[60].

Теорема IV. Каково бы ни было положение шариков в безграничном солитере, всегда возможно соединить их всех в квадрат из 9 смежных клеток, взятый произвольно

Предположим на плоскости неопределенного солитера какой-нибудь квадрат из 9 смежных клеток; всякий шарик (теорема III) можно перемещать через две последовательные клетки в горизонтальном направлении до тех пор, пока он не встанет в колонке или в продолжении колонки избранного квадрата. Потом точно так же можно перемещать этот шарик в вертикальном направлении, пока он не достигнет одной из клеток квадрата. Легко убедиться, что каждая клетка имеет всегда ей соответственную — и только одну — на произвольно взятом квадрате из девяти клеток.

Таким образом, все шарики солитера можно перенести в квадрат из 9 клеток. Это новое размещение шариков мы будем называть *соответственным остатком.*

Из только что доказанной теоремы посредством общего правила выводится теория невозможных решений, как это и показал впервые доктор Рейс. Но еще более применимы для этой цели следующие теоремы.

Теорема V. Как бы ни были размещены шарики в безграничном солитере, размещение их всегда можно заменить соответственным, заключающимся в произвольно выбранном квадрате из 4 клеток

Возьмем квадрат из 4 клеток, как, например, на рис. 32, не обращая пока внимания на поставленные в них буквы, и окружим его 5 клетками. У нас получится, таким образом, квадрат из 9 клеток, на котором мы можем воспроизвести соответственный остаток с помощью только что доказанной теоремы IV. Назовем через a_o, b_o, c_o, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 числа шариков, находящихся в каждой из 9 клеток, тогда у нас получится следующее (рис. 32).

Далее с помощью ходов со ставками сверху вниз мы переходим к рисунку 33.

И наконец, после двух ходов со ставками справа налево получаем рис. 34.

Итак, мы заменили размещение шариков на безграничном солитере соответственным размещением в квадрате из произвольно выбранных 4 клеток.

a_2	b_2	c_2
a_1	b_1	c_1
a_0	b_0	c_0

Рис. 32

$a_1 + a_2$	$b_1 + b_2$	$c_1 + c_2$
$a_0 + a_2$	$b_0 + b_2$	$c_0 + c_2$

Рис. 33

$+a_1+a_2$ $+c_1+c_2$	$+b_1+b_2$ $+c_1+c_2$	
$+a_0+a_2$ $+c_0+c_2$	$+b_0+b_2$ $+c_0+c_2$	

Рис. 34

Но с помощью общего правила (теорема II) можно с любой клетки снять или во всякую клетку поместить четное число шариков; следовательно, на этом квадрате из 4 клеток можно продолжать приведение до тех пор, пока в каждой клетке не останется по одному шарику или их не будет вовсе. Мы получим тогда так называемый *остаток* или *заключительную группу* в данном квадрате из 4 клеток. Затем перейдем к следующей теореме:

Теорема VI. Все соответственно размещенные шарики на безграничном солитере приводятся к одной и той же заключительной группе, находящейся в квадрате из 4 клеток

В самом деле, предположим, что прежде чем воспроизвести соответственное размещение на квадрате из 9 клеток, мы сделали один ход на основании общего правила. Тогда три числа с различными указателями a_1, a_2, a_3 или три числа с одинаковыми указателями a_1, b_1, c_1 изменятся на ± 1, а сумма чисел в квадрате из 4 клеток на 0 или 2 единицы (рис. 34), и, следовательно, парность их останется прежней.

Отсюда заключаем, что сколько бы ни было сделано ходов, парность числа шариков в квадрате из 4 клеток не нарушается, а следовательно, не изменяется и вид *заключительной группы*.

ШЕСТНАДЦАТЬ ВИДОВ ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫХ ГРУПП

Полным размещением p предметов, взятых по q, называется вообще совокупность их различных комбинаций, каждая из которых содержит q предметов, взятых один или несколько раз из общего числа p всех данных предметов. Так, полное размещение двух цифр 0 и 1, взятых по 4, даст 16 следующих комбинаций:

0000100100011000001010110011101001001101010111000110111101111 11.

Подобным же образом полное размещение десяти цифр общепринятой системы нумерации по 6 дает совокупность всех чисел, выражающихся не более как шестью цифрами, т. е. 1000000 или 10^6. В общем виде число полных размещений p предметов по q равно q^p.

Таким образом, для квадрата из 4 клеток, взятого произвольно на доске солитера, заключительные группы могут выразиться в шестнадцати различных видах, представляющих собой полное размещение из двух цифр, 0 и 1, в четырех клетках квадрата. Мы распределяем их в следующей таблице:

ТАБЛИЦА ШЕСТНАДЦАТИ ВИДОВ ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫХ ГРУПП

<table>
<tr><td>1- класс</td><td colspan="6">00
00</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2-й класс</td><td>00
10</td><td>00
01</td><td>01
00</td><td colspan="3">10
00</td></tr>
<tr><td>00
11</td><td>01
01</td><td>11
00</td><td>10
10</td><td colspan="2">11
11</td></tr>
<tr><td>3-й класс</td><td>11
01</td><td>11
10</td><td>10
11</td><td>01
11</td><td>10
01</td><td>01
10</td></tr>
</table>

1-й класс заключает в себе только один вид, соответствующий двум шарикам на одной и той же клетке, или 3 шарикам в трех последовательных клетках, или, наконец, двум шарикам, разделенным 2 последовательными клетками.

2-й класс состоит из девяти видов, приводимых к одному шарику в квадрате из 9 клеток.

3-й класс содержит шесть остальных видов, которые никогда не могут быть приведены менее чем к двум шарикам, каким бы преобразованиям ни подвергалось их распределение на квадрате из 9 клеток. Эти виды всегда состоят, по крайней мере, из двух шариков, никогда не встречающихся ни на одной и той же линии, ни в одной и той же колонке.

Отсюда мы заключаем, что для определения класса (с 0, 1 или 2 шариками в остатке) нет никакой необходимости приводить розыгрыш к заключительному квадрату из 4 клеток, а достаточно пользоваться квадратом в 9 клеток. Тем не менее, как мы уже говорили, приведение солитера к заключительной группе на 4 клетках чрезвычайно полезно для ознакомления с теорией игры и в высшей степени остроумно.

Очевидно, мы можем представить себе солитер с определенными границами какой угодно формы и с каким угодно числом клеток. Легко предположить его даже неправильным, образовавшимся из обыкновенного посредством уничтожения в нем нескольких клеток в середине или по краям. Но какова бы ни была его форма, несомненно одно — всякая задача неразрешима для солитера, заключенного в определенных границах.

Докажем теперь следующую теорему, обратную предыдущей.

Теорема VII. Чтобы иметь возможность, пользуясь общим правилом, перейти от одного данного положения безграничного солитера к другому также данному, необходимо, чтобы оба эти положения имели одинаковую заключительную группу в одном и том же квадрате из 4 клеток

В самом деле, от первого положения всегда можно перейти к заключительной группе, а от нее, в свою очередь, ко второму, изменяя лишь в обратном смысле порядок и цифровое обозначение тех ходов, которые ведут к той же самой заключительной группе. Заметим, что изменением хода в обратном смысле называется замена хода со ставкой, ходом со взяткой, так что, следовательно, ход со взяткой или со ставкой A/C должен быть заменен ходом со ставкой или со взяткой C/A.

Следовательно, чтобы на обыкновенном солитере перейти от одного положения шариков к другому, необходимо прежде всего убедиться, имеют ли оба эти положения одну и ту же заключительную группу на квадрат из 4 клеток. Впрочем, этого условия все-таки недостаточно, так как при существовании его задача может оказаться неразрешимой. Отсюда мы заключаем, что приведенная нами теория требует большей проницательности со стороны самого играющего. Но она все-таки оказывает громадную услугу в том отношении, что дает возможность избежать многих бесплодных попыток, позволяя отличить задачи, не допускающие теоретического решения.

В предыдущей теореме мы рассмотрели общую задачу солитера, определяя условия возможности перехода на нем от одного данного положения к другому, тоже данному. В последующих же теоремах мы займемся только случаем розыгрыша, состоящего, как известно, в приведении данного числа и расположении шариков на солитере к одному шарику.

Возвращаясь к квадрату в 9 клеток, выведенному путем рассмотрения заключительных групп, относящихся к одному из шестнадцати классов, мы получим три следующие теоремы:

Теорема VIII. Если данное начальное расположение шариков позволяет достигнуть розыгрыша несколькими различными способами, то заключительные клетки необходимо будут соответственными

Теорема IX. Если данное начальное расположение шариков не может быть приведено к одному шарику на какой-нибудь заключительной клетке, то его нельзя *привести к одному шарику и на соответственной ей заключительной клетке*

Теорема X. Если нельзя получить розыгрыш, выходя из какой-нибудь начальной клетки, то его нельзя будет также получить и выходя из соответственной начальной клетки

Эти три теоремы представляют лишь частные случаи теоремы VII.

ВОЗМОЖНОСТЬ И НЕВОЗМОЖНОСТЬ РОЗЫГРЫШЕЙ НА СОЛИТЕРЕ ИЗ 37 КЛЕТОК

Рассмотрим сначала заключительную группировку шариков на заполненном солитере. Делаем четыре теоретических тройных хода:

13/15, 31/51, 37/57, 73/75.

Тогда у нас получится положение, образуемое квадратом из двадцати пяти шариков, которое по способу, указанному в примере 3, приводится к одному шарику в клетке **44**. Поэтому *заполненный солитер в 37 клеток дает заключительную группу 2-го класса.*

Приведенный случай чисто теоретический, потому что на практике нельзя сделать при заполненном солитере даже и одного тройного хода. Но полученный результат дает возможность определить вид заключительной группы для какой угодно начальной клетки. Действительно, мы всидели, что с теоретической точки зрения безразлично, берется ли шарик с какой-нибудь клетки или ставится на нее, так как по общему правилу дозволяется прибавлять по два шарика на одну и ту же клетку (теорема II). Следовательно, заключительная группа заполненного (кроме одной клетки) солитера сводится к двум шарикам: одному — на центральной клетке и другому — на ближайшей к ней и соответственной с начальной клеткой. Если последняя окажется одной из клеток **44, 33, 35, 53, 55,** то розыгрыш возможен, что мы и доказали раньше не примерах, пользуясь частным правилом.

Вообще на солитере в 37 клеток розыгрыш возможен, когда за начальную принимается одна из 16 клеток, совокупность которых составляет заключение задачи триколет, а именно:

13, 15, 24, 31, 34, 37, 42, 43, 45, 46, 51, 54, 57, 64, 73, 75.

Для всех остальных случаев розыгрыш невозможен.

ИССЛЕДОВАНИЕ СОЛИТЕРА В 41 КЛЕТКУ

Солитер в 41 клетку отличается от предыдущих только добавочными клетками **04, 40, 48, 84**. Переставим находящиеся в них шарики на соответствующие клетки — **34, 43, 45, 54**. Снимем, посредством тройного хода, шарики **34, 44, 54** и положим два из них в клетку **44** (теорема II), а затем с помощью тройного хода снимем шарики **43, 44, 45**. Тогда останется только один шарик **44** в центре. Следовательно, *заполненный солитер в 41 клетку дает заключительную группу 2-го класса*, как и солитер в 37 клеток, что доказывает возможность теоретического решения на нем не только задач, относящихся к последнему, но также и других, соответствующих случаев, когда за начальные клетки берутся находящиеся в вершинах квадрата *добавочные клетки.*

Что же касается практических решений, то из них в настоящее время известно лишь одно, уже приведенное нами. Оно представляет собой розыгрыш, полученный при начальной клетке **46** и заключительной **42.** Из него можно вывести, пользуясь способом взаимности и горизонтальной симметрии, обратное решение, приняв за начальную клетку **42**, причем заключительной будет **46**. Для других теоретически возможных случаев практического решения не существует, хотя это не доказано. Мы предлагаем читателю заняться изучением этого вопроса, решение которого указало бы, может быть, новые критерии относительно невозможности тех или иных розыгрышей.

ИССЛЕДОВАНИЕ СОЛИТЕРА В 33 КЛЕТКИ

Солитер в 33 клетки наиболее распространен в Германии. Он отличается от обыкновенного только тем, что в нем недостает 4 клеток — 22, 26, 62, 66 (рис. 35).

Сделав на этом солитере теоретические тройные ходы:

13/15, 23/25, 63/65, 73/75, 31/51, 32/52, 33/53, 34/54,
35/55, 36/56, 37/57,

мы увидим, что на доске не останется ни одного шарика. Следовательно, *заполненный солитер в 33 клетки*

		37	47	57		
		36	46	56		
15	25	35	45	55	65	75
14	24	34	44	54	64	74
13	23	33	43	53	63	73
		32	42	52		
		31	41	51		

Рис. 35

дает заключительную группу 1-го класса. Таким образом, теоретически розыгрыш всегда возможен; но мы сейчас увидим, что согласно мнению доктора Рейса и практическое решение задачи также осуществимо даже при том условии, *если за начальную и заключительную клетки принимать какие угодно, лишь бы они были соответственны между собой.*

Чтобы убедиться в справедливости сделанного вывода, приведем пример. Так как правила симметрии облегчают выбор начальной клетки, то мы предварительно обратимся к таблице, где приведены группы симметричных клеток для обыкновенного солитера. При этом мы, разумеется, не примем в расчет третью группу таблицы, так как заключающиеся в ней клетки не вошли в рассматриваемый нами солитер. Затем возьмем за начальную клетку какую угодно из находящихся в семи остальных группах, например:

44, 74, 54, 57, 24, 55, 52.

Из них соответственны между собой: две первые, три последующие и три последние.

Соединим теперь каждую из выбранных нами начальных клеток с соответственной как заключительной; тогда у нас получится таблица, где в первом столбце указан порядок разыгрываемых партий, во втором – начальные клетки (Н. К.), а в третьем – заключительные клетки и розыгрыш (З. К.). В этой таблице приведены 28 розыгрышей; но, приняв во внимание примечания, помещенные в четвертом столбце, следует пользоваться только розыгрышами, относительно которых нет примечаний.

ТАБЛИЦЫ ДВАДЦАТИ ВОСЬМИ РОЗЫГРЫШЕЙ В СОЛИТЕРЕ ИЗ 33 КЛЕТОК

№	Н. К.	З. К.	Примечание
1	44	44	
2		74	
3		47	Наклонно-симметричные с № 2
4		14	Вертикально-симметричные с № 2
5		41	Горизонтально-симметричные с № 3
6	74	44	Взаимные с № 2

№	Н. К.	З. К.	Примечание
7		74	
8		47	
9		14	
10		41	Горизонтально-симметричные с № 8
11	54	54	
12		57	
13		24	
14		51	Горизонтально-симметричные с № 12
15	57	54	Взаимные с № 12
16		57	
17		24	
18		51	
19	24	54	Взаимные с № 13
20		57	Взаимные с № 17
21		24	
22		51	Горизонтально-симметричные с № 20
23	55	55	
24		52	
25		25	Наклонно-симметричные с № 24
26	52	55	Взаимные с № 24
27		52	
28		25	

Теперь нам остается только рассмотреть *шестнадцать главных розыгрышей*, порядок которых мы обозначаем римскими цифрами.

ТАБЛИЦА ШЕСТНАДЦАТИ ГЛАВНЫХ РОЗЫГРЫШЕЙ В СОЛИТЕРЕ ИЗ 33 КЛЕТОК

№	с	по
I	44	44
II	44	74
III	74	74
IV	74	47
V	74	14
VI	54	54
VII	54	57
VIII	57	57
IX	54	24
X	57	24
XI	57	51
XII	24	24
XIII	55	55
XIV	55	52
XV	52	52
XVI	52	25

РОЗЫГРЫШИ, ПОЛУЧЕННЫЕ ДОКТОРОМ РЕЙСОМ

I РОЗЫГРЫШ. С 44 ПО 44

64/44, 56/54, 44/64, 52/54, 73/53, 75/73, 43/63, 73/53, 54/52, 35/55, 65/45, 15/35, 45/25, 37/35, 57/37, 34/36, 37/35, 25/45, 46/44, 23/43, 31/33, 43/23, 51/31, 52/32, 31/33, 14/34, 34/32, 13/33, 32/34, 34/54, 64/44.

Он представляет второе решение тройного креста (задача 10), независимо от солитера в 37 клеток.

II РОЗЫГРЫШ. С 44 ПО 74

Здесь следует заменить последний ход предыдущего розыгрыша ходом 54/74 согласно общему способу замены заключительных клеток.

III РОЗЫГРЫШ. С 44 ПО 74

Подобным же образом следует заменить первый ход предыдущего розыгрыша ходом 54/74 сообразно с общим способом замены начальных клеток.

IV РОЗЫГРЫШ. С 74 ПО 47

54/74, 52/54, 44/64, 73/53, 74/54, 54/52, 51/53, 31/51, 32/52, 43/63, 51/53, 63/43, 34/32, 13/33, 15/13, 43/23, 13/33, 32/34, 56/54, 75/55, 54/56, 57/37, 37/57, 36/56, 45/65, 57/55, 65/45, 24/44, 44/46, 25/45, 45/47.

В этом розыгрыше заключаются три тройных хода, с той и с другой стороны; они относятся к рядам 11, 20 и 26.

V РОЗЫГРЫШ. С 74 ПО 14

Начинают двадцатью четырьмя ходами предыдущего розыгрыша и затем продолжают:

34/36, 55/35, 57/55, 25/45, 55/35, 36/34, 34/14.

VI РОЗЫГРЫШ. С 54 ПО 54

56/54, 75/55, 54/56, 74/54, 53/55, 73/53, 43/63, 51/53, 63/43, 33/53, 41/43, 53/33, 23/43, 31/33, 43/23, 13/33, 15/13, 25/23, 34/32, 13/33, 32/34, 45/25, 37/35, 57/37, 34/36, 37/35, 25/45, 56/36, 44/46, 36/56, 56/54.

Здесь шесть тройных ходов, с той и с другой стороны, относящихся к рядам 2, 8,11, 14, 20, 29.

VII РОЗЫГРЫШ. С 54 ПО 57

Он получается заменой хода предыдущего розыгрыша ходом 55/57.

VIII РОЗЫГРЫШ. С 57 ПО 57

Первый ход предыдущего решения заменяется ходом 55/57.

IX РОЗЫГРЫШ. С 54 ПО 24

Начинается двадцатью семью первыми ходами VIII розыгрыша и затем заканчивается ходами:
56/54, 54/34, 46/44, 44/24.

X РОЗЫГРЫШ. С 57 ПО 24

В нем первый ход предыдущего решения заменяется ходом 55/57.

XI РОЗЫГРЫШ. С 57 ПО 51

Начинают шестью первыми ходами предыдущего розыгрыша; двадцать четыре следующих хода выводятся по способу горизонтальной симметрии из соответствующих ходов VI розыгрыша; заканчивают ходом 53/51.

XII РОЗЫГРЫШ. С 24 ПО 24

44/24, 36/34, 15/35, 34/36, 37/35, 57/37, 56/36, 45/25, 37/35, 25/45, 32/34, 13/33, 34/32, 31/33, 51/31, 52/32, 43/23, 31/33, 23/43, 54/56, 75/55, 73/75, 45/65, 75/55, 56/54, 64/44, 44/42, 63/43, 42/44, 14/34, 44/24.

Здесь пять тройных ходов, с той и с другой стороны; они относятся к рядам 3, 9, 12, 18, 28.

XIII РОЗЫГРЫШ. С 55 ПО 55

53/55, 73/53, 75/73, 65/63, 52/54, 73/53, 54/52, 51/53, 31/51, 32/52, 43/63, 51/53, 63/43, 45/65, 57/55, 65/45, 35/55, 47/45, 55/35, 25/45, 37/35, 45/25, 15/36, 13/15, 23/25, 34/36, 15/35, 36/34, 33/53, 34/54, 53/55.

Здесь с той и с другой стороны шесть тройных ходов, относящихся к рядам 6, 12, 15, 18, 21, 27.

XIV РОЗЫГРЫШ. С 55 ПО 52

Последний ход предыдущего решения заменяется здесь ходом 54/52.

XV РОЗЫГРЫШ. С 52 ПО 52

Первый ход предыдущего решения заменяется здесь ходом 54/52.

XVI РОЗЫГРЫШ. С 52 ПО 25

Начинается двадцатью восемью первыми ходами предыдущего розыгрыша и заканчивается ходами:

43/23, 44/24, 23/25.

Примечание. Следовало бы рассмотреть точно так же и задачи, относящиеся к солитеру в 41 клетку, но он, по-видимому, представляет гораздо больше трудностей. Существует еще и много других солитеров. Из них мы особенно рекомендуем вниманию наших читателей тот, который выводится из солитера в 41 клетку посредством уничтожения двух противоположных крайних клеток **40** и **48**. Заключительная группа его принадлежит к 1-му классу. Решения на нем интереснее, чем на солитере в 41 клетку, и возможны в большинстве случаев, если не во всех; впрочем, этот последний вопрос остается еще не выясненным.

СОЛИТЕРЫ РАЗЛИЧНЫХ ПОРЯДКОВ

Задачи, относящиеся к солитерам различного порядка, основываются на условии, в силу которого дозволяется перемещать шарик через n последовательных клеток и снимать всякий раз по шарику в каждой из них. В этом и состоит правило ходов на солитере n-го порядка.

Теория игры в подобном солитере совершенно та же, что и в обыкновенном или в солитере первого порядка. Приняв известные четыре постулата в применении к данному случаю, мы получим следующие теоремы:

Теорема XI. Всегда можно перенести какой-нибудь шарик через $n + 1$ последовательных клеток в каком-нибудь направлении, или по линии, или по колонке.

Доказательство этой теоремы сходно с доказательством теоремы III.

Теорема XII. Всегда возможно перенести два шарика из одной и той же клетки через n последовательных клеток.

В самом деле, предположим, что А и В будут две клетки, разделенные между собой n-последовательными клетками — a_1, a_2, ... a_n. Тогда, сделав из А в В сначала одним шариком ход со ставкой, а потом другим — ход со взяткой, мы докажем теорему.

Теорема XIII. Два каких угодно шарика можно перенести в какую угодно клетку.

Для этого достаточно доказать, что можно перенести два шарика из какой-нибудь клетки А в смежную с ней В. В самом деле, теорема XI позволяет переставить два шарика из клетки А через n + 1 последовательных клеток в направлении АВ, а теорема XII дает право вернуть оба шарика в В, то есть переставить их через n клеток.

Теорема XIV. Всегда можно положить два шарика одновременно на n каких-нибудь клеток или снять их с тех же клеток.

Действительно, предположив, что все n клеток последовательны, для доказательства теоремы стоит только сделать вперед и назад два хода со взяткой на n клетках.

На основании предыдущих теорем можно вывести следующие предложения относительно заключительной группы:

Если дан какой-нибудь квадрат из $(n + l)^2$ клеток, то к нему всегда можно привести заключительную группу какого угодно расположения шариков на солитере n-го порядка. Эта группа будет состоять из 0 или 1 шарика в каждой клетке квадрата и, кроме того, из некоторого числа шариков, которые могут быть *размещены где угодно при условии перемещения их парными группами. Количество таких групп равняется одному из чисел — 0, 1, 2, ... (n — 1). Следовательно, заключительная группа может принять $n(n + l)^4$ различных видов, характеризующих столько же систем таких соответственных положений, при которых нельзя перейти из одного в другое ни при каком количестве ходов.*

Теперь остается прибавить еще новый постулат, состоящий в том, что дозволяется изменять на один шарик содержимое каждой из n + 2 последовательных клеток в положительном или отрицательном смысле. В этом случае шарики, передвигаемые группами попарно, могут быть сняты, и число отдельных систем сводится к $(n+1)^4$.

Что же касается числа систем, приводимых к одному только шарику, то оно всегда равно $(n + 2)^2$.

ГЛАВА 6. БИНАРНАЯ НУМЕРАЦИЯ

> Размышление в связи с практическим приложением выделяет дельные идеи и дает возможность находить сокращенные методы, изобретение которых льстит самолюбию, удовлетворяет ум своей правильностью и дает средство производить с удовольствием работу, неприятную по своей сущности.
>
> *Жан Жак Руссо*[61]

> Случается, что истина как бы стремится навстречу тому, кто ее отыскивает; часто между желанием, ожиданием и осуществлением не бывает даже промежутка.
>
> *Монтескье*[62]

Нумерацию обыкновенно считают основным арифметическим действием, необходимым условием всякого счета; но это — крупная логическая ошибка, потому что свойство чисел существует независимо от какой бы то ни было системы нумерации.

Нумерация есть чисто условный язык, позволяющий произносить и писать одни числа при помощи нескольких других в разговоре посредством звуков, а на письме — посредством особых знаков или цифр. Основным действием арифметики служит процесс образования чисел, то есть сложение; но десятичная система нумерации представляет более сложное действие, так как она заключает в себе и сложение, и умножение вместе. Число 45, например, является в десятичной системе результатом умножения 4 единиц на 10 и прикладывания к произведению 5-ти единиц. Известно, впрочем, что десятичная система нумерации есть сравнительно позднее создания арифметики.

Понятно, что счет *десятками*, сотнями или группами из десяти десятков, тысячами или группами из десяти сотен можно было бы заменить каким угодно другим, например *парами*, *тройками* и так далее и даже *дюжинами*. Еще Аристотель заметил, что число четыре могло бы вполне заменить собой число *десять*. В 1687 году Вейгель[63] опубликовал по этому поводу план тетрактической арифметики.

Если число десять принято почти единогласно за основание системы нумерации, то это обусловливается, вероятно, устройством руки, точно так же, как большая часть единиц меры у древних народов заимствовалась обыкновенно из размеров конечностей человеческого тела: например, pied — ступня (фут), coudee — локоть и т. д. В XVII столетии Мелкиседека Тевено[64] старался отыскать универсальную единицу меры, принимая за эталон правильность и равенство сотовых ячеек.

Новейшие единицы меры установлены на более прочных основаниях и определяются геодезическими, физическими и тому подобными соотношениями, как, например, метрическая длина математического маятника.

БИНАРНАЯ СИСТЕМА

Таким образом, вообще система нумерации основывается на употреблении единиц различных порядков, из которых каждая содержит в себе предыдущую определенное число раз. Число единиц одного какого-нибудь порядка, необходимое для составления единиц следующего порядка, называется основанием системы нумерации, которое должно равняться, по крайней мере, двум. В самом деле, если взять за основание один, то единицы различных порядков оказались бы равными между собой, и тогда, в сущности, не было бы никакой системы нумерации. С бинарной арифметикой познакомил нас Лейбниц. Основанием принятой им системы служит число два, так что все числа можно писать при помощи только двух знаков — 0 и 1, с тем лишь условием, аналогичным условию десятичной нумерации, чтобы, считая от левой руки к правой, каждая последующая цифра была вдвое больше своей предыдущей. Так, по этой системе числа два, четыре, восемь, шестнадцать и так далее пишутся следующим образом —

10, 100, 1000, 10000 и так далее,

а числа три, пять, одиннадцать, двадцать девять — в виде

11, 101,1011, 11101.

ДУОДЕЦИМАЛЬНАЯ СИСТЕМА

Симон Стевин (1548–1620, нидерландский математик и инженер. – *Ред.*), некогда предлагал дуодецимальную систему нумерации, близко подходящую к нашему счету месяцев в году, часов в сутках или градусов в окружности. Но перемена теперешней системы произвела бы слишком много неудобств в сравнении с небольшими преимуществами, полученными от принятия за основание нумерации числа *двенадцать*. Позднее Огюст Конт[65] заметил, что строение нашей руки, состоящей из четырех пальцев с тремя суставами в каждом, или из двенадцати суставов, противопоставляемых большому пальцу, могло бы дать способ, прибавив два больших пальца, с двумя суставами каждый, представлять себе все числа включительно до 13 раз 12, так что со временем легко было бы приобрести привычку считать по суставам, руководствуясь дуодецимальной системой, чем по пальцам на основании децимальной системы. Однако в настоящее время от этого остроумного способа сохранилось одно только сделанное Огюстом Контом сравнение четырех пальцев и противопоставляемого им большого со взводом из четырех солдат под предводительством капрала.

ПРЕИМУЩЕСТВО БИНАРНОЙ СИСТЕМЫ

В этой системе нумерации все арифметические действия приводятся к их простейшему виду. Сложение, например, сводится к самой элементарной форме: 1 и 1 дают два, ставлю ноль и 1 удерживаю в уме.

Пифагоровой таблицы умножения здесь не существует, или, лучше сказать, от нее остается только — одиножды один — один, так что умножение производится посредством простого перемещения цифр умножаемого от правой руки к левой; при делении же не приходится отыскивать частное наугад; кроме того, эта система лучше всякой другой годилась бы для устройства арифметической машины, если бы у нас уже не было прекрасного арифметика Томаса (из Кольмара).

Кстати, я должен прибавить, что бинарная система дала мне возможность найти первые числа гораздо большей величины, нежели известные до сих пор, и что на ее основании я составил план механизма, посредством которого легко определить числа весьма значительной величины. Однако эта система неудобна вследствие громадного количества знаков, необходимых для изображения сколько-нибудь большого числа. Впрочем, Лежандр[66] в своей «Theorie des Nombres»[67] указал чрезвычайно хороший способ писать большие числа по бинарной системе. Возьмем, например, число 11183445; разделив его на 64, получаем в остатке 21 и в частном 174,741. Это последнее, будучи разделено на 64, дает в остатке 21 и в частном 2730. Наконец, разделив 2730 на 64, получим в остатке 42 и в частном 42. Но 21 выразится по бинарной системе в виде 10101, а 42 — в виде 101010, следовательно, предложенное число может быть написано таким образом:

101010101010 010101010101.

И ЦЗИН[68]

Система бинарной нумерации дает объяснение китайского символа, называемого *И цзин* (книга перемен) и приписываемого Фоги, древнейшему из китайских законодателей.

Этот символ состоит из 64 маленьких фигур; каждая фигура представляет собой шесть горизонтальных, параллельных линий, частью сплошных, частью прерывающихся посередине.

И цзин долго приводил в отчаяние китайских и европейских ученых, тщетно старавшихся объяснить его сколько-нибудь удовлетворительно, пока, наконец, знаменитый Лейбниц, сопоставив различные черточки таинственного символа с рядом чисел, написанных по бинарной системе, не догадался, что бинарная арифметика может служить ключом к разгадке, и что *И цзин* есть не что иное, как ряд шестидесяти четырех первых чисел, изображенных по системе, имеющей основанием 2, но только в обратном порядке.

В самом деле, если изобразить единицу посредством горизонтальной сплошной линии ———, а ноль — посредством пунктирной — —, если, кроме того, условиться писать единицы различных порядков не справа налево, а снизу вверх и принять во внимание свойство числа не изменяться в величине от прибавления к нему слева одного или нескольких нулей, то окажется, что китайские письмена, составленные из шести горизонтальных линий, могут быть объяснены с помощью таблицы.

Китайские знаки И цзина	Изображение их по бинарной системе	Значение их в общепринятом виде
— — — — — — — — — — — —	000000	0
— — — — — — — — — — ———	000001	1
— — — — — — — — ——— — —	000010	2
— — — — — — — — ——— ———	000011	3
— — — — — — ——— — — — —	000100	4
— — — — — — ——— — — ———	000101	5

В этой, так удачно разрешенной загадке Лейбниц усмотрел даже эмблему сотворения мира, вызванного из хаоса волей Божества, точно так же, как все числа в бинарной системе созидаются из нуля и единицы. Он до такой степени увлекся своей идеей, что советовал отцу Буве, миссионеру в Китае, развить ее перед богдыханом с целью склонить его к принятию христианства. Мы нисколько не намерены поддерживать это сомнительное применение науки к тайнам теологии и приводим его здесь лишь как любопытный факт из истории бинарной арифметики. Заметим, впрочем, что эта идея появилась у Лейбница под влиянием пифагорейской философии, и что великий ученый, без сомнения, и сам не придал бы ей большего значения, чем она того заслуживает.

КОЛЛЕКЦИЯ ГИРЬ

Прежде всего мы составим таблицу двух первых чисел, написанных по бинарной системе:

1	1
2	10
3	11
4	100
5	101
6	110
7	111
8	1000

9	1001
10	1010
11	1011
12	1100
13	1101
14	1110
15	1111
16	10000
17	10001
18	10010
19	10011
20	10100
21	10101
22	10110
23	10111
24	11000
25	11001
26	11010
27	11011
28	11100
29	11101
30	11110
31	11111
32	100000

Ее легко продолжить неопределенно, так как известно, что любая арифметическая величина может быть составлена посредством сложения чисел:

1, 2, 4, 8, 16, 32 и так далее,

представляющих, не исключая и единицы, все целые степени от *двух*. Но при этом сложении каждое число должно быть взято только один раз. Другими словами, всякое целое число есть сумма различных степеней от двух, считая единицу за нулевую степень этого числа. Такое свойство чисел можно было бы утилизировать в торговле, пользуясь для взвешивания целого числа каких-либо весовых единиц, например граммов, коллекцией гирь весом в

1 г, 2 г, 4 г, 8 г, 16 г, 32 г и так далее.

Тогда шесть гирь позволяли бы взвешивать до 63, а n гирь — до 2^n-1 граммов.

Но коллекции устраиваются совершенно другим способом и заключают в себе только гири в

<table>
<tr><td>1 г</td><td>2 г</td><td>2 г</td><td>5 г</td><td rowspan="4">даг — декаграмм (10 г)
гг — гектограмм (100 г)
кг – килограмм (1000 г)</td></tr>
<tr><td>1 даг</td><td>2 даг</td><td>2 даг</td><td>5 даг</td></tr>
<tr><td>1 гг</td><td>2 гг</td><td>2 гг</td><td>5 гг</td></tr>
<tr><td>1 кг</td><td>2 кг</td><td>2 кг</td><td>5 кг</td></tr>
</table>

В самом деле, очевидно, что из чисел 1, 2, 2, 5 можно с помощью сложения составить все величины от 1 до 10. Преимущество подобной коллекции — в более тесной связи с обыкновенной системой десятичной нумерации, и, следовательно, приемы взвешивания не требуют никакого умственного напряжения. Но при бинарной системе можно употреблять меньше гирь, чем при десятичной.

ЧИСЛА ТРОЙНОЙ ПРОГРЕССИИ

1, 3, 9, 27, 81 и так далее

отличаются подобным же свойством, которое состоит в том, что, складывая или вычитая их известным способом, легко составить всевозможные целые числа. Это замечательное свойство объясняется очень просто при помощи третичной системы нумерации, измененной введением отрицательных знаков. Так, условившись, что минус, поставленный над цифрами 1, 2, 3 и так далее, показывает, что их положительные значения следует вычесть из числа, выражающегося цифрой следующего высшего разряда; можно изобразить все числа десятичной системы пятью первыми цифрами: 1, 2, 3, 4, 5 и нулем. Например, число 6 выразится посредством 14, число 7 —посредством 13 и так далее.

Применяя это правило к третичной системе, можно написать все числа знаками 1, 1 и 0. Например, числа

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

легко представить в следующем виде:

1, 11, 10, 11, 111, 110, 111, 101, 100.

Этим свойством можно было бы воспользоваться и для взвешивания тел, распределив соответственным образом гири в 1 г, 3 г, 9 г, 27 г и так далее на обеих чашках весов, для того чтобы, употребляя возможно меньшее количество гирь различной величины, определить вес тела, выражающийся в целых числах.

Например, при помощи четырех гирь в 1 г, 3 г, 9 г, 27 г, можно будет взвесить до 40 г, а при помощи пяти гирь в 1 г, 3 г, 9 г, 27 г, 81 г – до 121 г. Вообще, посредством *n* гирь

$$1, 3, 3^2, 3^3, ..., 3^{n-1}$$

можно взвешивать до $1/2\ (3^n - 1)$ граммов. Геометрическая прогрессия со знаменателем 3 решает задачу, предложенную Лабоном, в следующей форме. *Найдите ряд гирь, посредством которых можно было бы получить вес какого угодно тела в целых числах – от единицы и до суммы всех употребляемых гирь, предполагая, что эта сумма должна быть наибольшей по сравнению с их числом.*

ТАИНСТВЕННЫЙ ВЕЕР

Возьмем снова таблицу («И цзин») и напишем одни под другими в первой колонке справа все числа, последняя цифра которых в бинарной системе будет 1, во второй колонке – все числа, вторая цифра которых, считая справа, будет единица, в третьей колонке – все числа, третья цифра которых, считая справа, будет также единица. Можно остановиться на какой угодно колонке, например на пятой, числа в которой будут доходить до 31, а вообще для пятой колонки – до $2^n - 1$.

Таблицей, составленной таким образом, пользуются для отгадывания задуманных кем-нибудь чисел. Спросив, в какой колонке задуманное число находится и в какой его нет, следует обозначить первые единицами, а вторые — нулями и написать эти цифры в порядке, соответствующем расположению в таблице колонок от правой руки к левой. Тогда в результате получится искомое число, выраженное в бинарной системе.

5	4	3	2	1
16	8	4	2	1
17	9	5	3	3
18	10	6	6	5
19	11	7	7	7
20	12	12	10	9
21	13	13	11	11
22	14	14	14	13
23	15	15	15	15
24	24	20	18	17
25	25	21	19	19
26	26	22	22	21
27	27	23	23	23
28	28	28	26	25
29	29	29	27	27
30	30	30	30	29
31	31	31	31	31
16	8	4	2	1

Для того, чтобы легче перейти от бинарной системы к десятичной, под каждой колонкой помещены соответствующие степени числа 2. Таблицу пишут обыкновенно отдельными столбцами на полосках картона, расположенных в виде *веера*. Отгадывающий показывает их одну за другой тому, кто задумал число, и спрашивает, на которой из них оно находится. Затем ему остается только сложить написанные на полосках внизу степени от двух, и их сумма даст задуманное число. Подобную же игрушку можно устроить, пользуясь также третичной системой нумерации, хотя это будет и несколько труднее.

ДВОЙНАЯ ПРОГРЕССИЯ

В следующей таблице мы приводим ряд из тридцати двух первых чисел, начиная с числа 2. Каждое из них образуется через постепенное удвоение своего предыдущего, а все вместе они составляют последовательные степени числа 2 и по бинарной системе выражаются единицей с одним, двумя, тремя, ..., шестьюдесятью четырьмя нулями; в алгебре же для изображения их служит число 2; помещенный над ним справа показатель означает, сколько раз оно должно быть взято в качестве множителя.

В приводимой ниже таблице мы находим ряд чисел, который Ферма назвал двойной прогрессией. Из нее видно, что для перемножения между собой различных степеней от двух, например девятой и одиннадцатой, достаточно только сложить показатели 9 и 11, что составит 20, и тогда мы будем иметь

$$2^9 \times 2^{11} = 2^{20}, \text{ или } 512 \times 2048 = 1048576.$$

Вообще, показатель произведения двух степеней одного и того же числа равняется сумме показателей этих степеней. Точно так же показатель частного двух степеней равен разности показателей делимого и делителя. Исследование и обобщение такого свойства степеней послужило, как известно, основанием теории логарифмов.

ТАБЛИЦА СТЕПЕНЕЙ ОТ 2

n	2n
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64
7	128
8	256
9	512
10	1 024
11	2 048
12	4 096
13	8 192
14	16 384
15	32 768
16	65 536
17	131 072
18	202 144
19	524 288
20	1 048 576
21	2 007 152
22	4 194 304
23	8 388 608
24	16 777 216
25	33 544 432
26	67 108 864
27	134 217 728
28	268 435 456
29	536 870 912
30	1 073 741 824
31	2 147 483 648
32	4 294 967 296

Нетрудно также убедиться, что для того, чтобы ускорить, например, вычисление шестьдесят четвертой степени от 2, нужно помножить на самое себя его тридцать вторую степень, причем получим —

$$2^{64} = 4294967296 \times 4294967296 = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,616.$$

Говорят, что изобретатель шахматной игры попросил дать ему в награду за это открытие одно зерно для первой клетки шахматной доски, два для второй, четыре для третьей и так далее до шестьдесят четвертой клетки, постоянно удваивая число зерен, так что для последней ему пришлось бы получить их 2^{63}. По известной формуле геометрической прогрессии, легко проверяемой с помощью вышеприведенной таблицы, мы будем иметь:

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1.$$

В предыдущем примере общее количество зерен хлеба было бы $2^n - 1$, то есть приведенное нами выше число, состоящее из двадцати цифр, без единицы.

СОВЕРШЕННЫЕ ЧИСЛА

Двойная прогрессия приводит нас к знакомству с совершенными числами, то есть такими, которые равны сумме входящих в них множителей, или, как некогда говорили, сумме своих составных частей. Последнее определение более точно, потому что исключает само число из ряда его множителей. Затем недостаточным называется всякое число, превосходящее сумму своих составных частей, а совершенным — не достигающее такой суммы. Теория совершенных нечетных чисел еще не вполне разработана; что же касается четных, то все они без исключения содержатся в общей формуле:

$$N = 2^{a-1}(2^a - 1),$$

где второй множитель ($2^a - 1$) должен быть числом первоначальным. Отсюда видно, что в этой формуле a следует давать не все значения целых чисел, но только те из них, для которых множитель $P_a = 2^a - 1$ будет числом первоначальным. Это правило было известно еще Эвклиду, но знаменитый математик был не в состоянии доказать, что таким образом можно получить все четные совершенные числа.

Легко убедиться, что P_a может быть первоначальным лишь в том случае, когда само число первоначальное; впрочем, одного этого условия еще недостаточно; необходимо также, чтобы и (2_a-1), в свою очередь, было числом первоначальным. Но теория совершенных чисел представляет столько трудностей, что при настоящем развитии науки высшая арифметика не может решить этого вопроса для указателя a, превышающего 100. До сих пор нам известны только восемь совершенных чисел, которые помещены в приводимой здесь таблице.

ТАБЛИЦА СОВЕРШЕННЫХ ЧИСЕЛ

	a	2^{a-1}	$2^a - 1$	Совершенные числа
1	2	2	3	6
2	3	4	7	28
3	5	16	31	496

	a	2^{a-1}	2^a-1	Совершенные числа
4	7	64	127	8 128
5	13	4 096	8 191	33 550 336
6	17	65 536	131 071	8 589 869 056
7	19	262 144	524 287	137 438 691 328
8	31	1 073 741 824	2 147 483 647	2 305 843 008 139 952 128

Во втором столбце таблицы для *a* не помещено значений 11, 23 и 29, так как три числа

$$2^{11}-1, 2^{23}-1, 2^{29}-1$$

не принадлежат к первоначальным, потому что соответственно делимы на 23, 47 и 233.

Здесь кстати будет заметить, что совершенные числа всегда заканчиваются цифрами 6 или 8, что зависит, с одной стороны, от периодичности последней цифры степеней от двух, а с другой стороны от того, что все *a*, кроме 2 и 3, равняются числам, кратным 6, увеличенным или уменьшенным на единицу. Таким образом, если *a* равно числу, кратному 6, уменьшенному на единицу, то последняя цифра N будет 6, если даже *a* и не было числом первоначальным. Если же *a* равно числу, кратному 6, увеличенному на единицу, то число N будет заканчиваться цифрой 8 (см. Примечание 4 в конце книги).

ГЛАВА 7. МЕЛЕДА

> Возможно ли доверять людям, которые настолько легкомысленны, что какую-нибудь меледу возводят в доктрину и нелепые предрассудки принимают за настоящую религию?
>
> *Але́н Шартье́*[69]

> Безумие до такой степени свойственно людям, что даже не быть безумцем значит быть им, но только в другом роде.
>
> *Паскаль*

> Наука еще не решила, что такое сумасшествие. Высшее ли это проявление умственных способностей или упадок их. Кто знает, может быть, почти все, что мы называем величием, глубиной, происходит от болезненного состояния мысли.
>
> *Эдгар По*

Меледой называется игрушка, состоящая из колец, надетых на челнок и удерживаемых на нем нитями. Задача состоит в том, чтобы освободить челнок от колец. Мы советуем употреблять меледу из семи, восьми или девяти колец, которую легко найти в продаже. При большем же их количестве игра становится нелепой, так как с прибавкой всякого кольца число необходимых манипуляций (чтобы снять или надеть каждое из них) увеличивается вдвое; так мы докажем впоследствии, что для освобождения челнока от 64 колец потребовались бы миллиарды лет.

ИСТОРИЧЕСКИЕ ДАННЫЕ

Игрушка эта изобретена очень давно. Едва ли не в первый раз о ней упоминается в одном из 222 трактатов Кардано, появившихся впервые в Нюрнберге в 1550 году. Кроме того было еще несколько других изданий этого сочинения: французский его перевод, сделанный Ришардом Лембланом, появился в Париже. XV книга этого сочинения, составляющего как бы энциклопедию науки и промышленности XVI столетия, посвящена играм, требующим остроумия и ловкости, и названа Кардано – «Subtilitės inutiles et incertaines»[70]. Мы приводим из нее выдержку, относящуюся к описанию меледы.

«Этот совершенно бесполезный прибор состоит из семи колец и металлической пластинки шириной

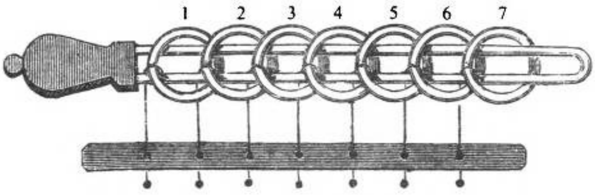


Рис. 36

не более пальца, длиной в ладонь, тонкой и гибкой. В ней на равном расстоянии друг от друга просверлены семь небольших отверстий, расположенных по всей длине пластинки, а в отверстие продето столько же тонких проволочек. Нижние концы их свободны, тогда как верхние изогнуты так, что каждая из них охватывает кольцо, не превышающее толщины пальца в диаметре, и, в свою очередь, удерживается следующим кольцом. Поэтому все кольца, за исключением первого, нанизываются друг на друга и могут быть сняты, не все разом, а через одно кольцо. Все части прибора сделаны из металла, точно так же, как и человек, изображение которого можно видеть на прилагающемся рисунке. Длина и ширина челнока бывают различными, смотря по размерам пластинки. Этот прибор представляет собой чрезвычайно замысловатую игрушку».

Описав способ снимания колец, автор добавляет в заключение: «Само по себе все это бесполезно и может быть применено только к устройству замков с секретом[71]. Меледа настолько же замысловатая игра, как и шахматы, хотя последние несравненно интереснее и требуют больше остроумия».

БИОГРАФИЯ ДЖ. КАРДАНО

По своему характеру Джероламо Кардано представляет совершенно исключительное явление в истории науки. Жизнь его — это положительное сплетение сумасбродств, противоречий, низостей и преступлений. Он не остановился даже перед убийством сплутовавшего во время игры с ним шулера. Скалигер говорит о Кардано, что он был выше всех других людей, хотя часто позволял себе чисто ребяческие поступки. Лейбниц, считавший его сумасшедшим, безумцем, тем не менее, все-таки изумлялся замечательной силе его ума.

Кардано одним из первых открыл способ решения уравнения третьей степени и вывел формулу, которая носит его имя; он предусмотрел также способ решения уравнений четвертой степени, открытый впоследствии его учеником Феррари[72]. Наконец, он же изобрел штатив, употребляемый при морских плаваниях для подвешивания буссолей, и, вероятно, также сцепление зубчатых колес, известное в механике под именем универсального сцепления.

Кардано родился в 1501 году в Павии[73], где последовательно преподавал диалектику, метафизику и математику. С 1529 по 1550 годы он занимался медициной в Милане, потом отправился путешествовать, побывал в Шотландии и Англии, Нидерландах, Германии, и снова вернулся в Милан, где прожил еще несколько лет, предаваясь то работе, то разврату, то азартным играм. Его старший сын, тоже врач, отравил свою жену и был казнен; второй вел такую беспорядочную жизнь, что отец несколько раз сажал его в тюрьму, потом отрезал ему ухо и, наконец, выгнал из дома. Последние годы своей несчастной жизни Кардано провел в Риме, существуя на пенсию, назначенную ему папой Григорием XIII. Умер он в возрасте 75 лет. Скалигер[74] и де Ту[75] предполагают, что он уморил себя голодом с целью доказать справедливость сделанного им предсказания относительно года и числа своей смерти. В Nouvelle Biographie generate[76] (Firmin Didot[77]) помещена подробная и интересная биография Кардано, написанная Викторьеном Сарду[78], из которой мы и заимствовали сообщенные нами краткие сведения об этом необыкновенном человеке.

БИОГРАФИЯ ВАЛЛИСА

Вторым ученым, описывавшим меледу, был знаменитый английский математик Валлис[79], которому принадлежит замечательная формула отношения окружности к диаметру[80]. Валлис родился в 1616 и умер в 1703 году. В течение своей долгой жизни он основательно изучал существовавшие в его время науки. «*С самого детства,* — говорит он, — *я старался проникнуть в сущность всякого знания, руководствуясь не рутиной, не желанием удовлетворить праздное любопытство, но разумным принципом, желанием развить свои способности*». В 1649 году он возглавил кафедру геометрии в Оксфордском университете, а потом, во время возвращения Стюартов, получил место придворного священника. Доказательством замечательной памяти этого знаменитого математика может служить тот факт, что однажды ночью он в уме извлек квадратный корень из числа в пятьдесят цифр и утром продиктовал решение.

Во втором томе его Алгебры есть подробное описание меледы со множеством превосходных рисунков.

«Кардано, — говорит он, — занимается в своей книге о замысловатых пустяках тем же сцеплением колец, которое намерены рассмотреть и мы. Он причисляет меледу к бесполезным играм, то есть к таким, которые не сопровождаются выигрышем и служат только для умственного упражнения, и говорит об этой игре так пространно, что незнакомому с ней раньше было бы очень трудно узнать, в чем она состоит. Мы приложили все усилия для того, чтобы объяснить эту игрушку по возможности просто, хотя с ней гораздо легче ознакомить посредством манипуляций, чем при помощи описания. Теория меледы приводит к таким замечательным выводам и так близко соприкасается с алгеброй, что несправедливо было бы не отвести ей маленького уголка в этой науке. Вся трудность игры заключается в сборке и разборке, в сцеплении и разобщении колец.

Я не имею возможности определить время появления меледы, но несомненно, что она была известна раньше Кардано, так как в своем сочинении он не приписывает себе ее изобретена».

ИЗОБРЕТЕНИЕ ПИСЦА НОТАРИАЛЬНОЙ КОНТОРЫ

Озанам не говорит ничего об игре в меледу в своих «Математических развлечениях». В «Методической энциклопедии» («Encyclopedie methodique»), а также в «Словаре игр» («Dictionnaire des jeux») хотя и упоминается о ней, но лишь после игры, известной под названием: «я люблю моего милого таким-то и таким-то...». Там мы находим описание и тех перемещений, которые нужно произвести для того, чтобы снять кольца, когда они все подняты, и для обратного нанизывания их, когда они спущены. Только в 1872 году появилась без имени автора интересная брошюра в 16 страниц под заглавием «Теория игры в меледу, составленная писцом лионской нотариальной конторы 23», о чем любезно сообщил мне генерал Пармантье. Неизвестный автор начинает свою брошюру так: «Лион привлекает теперь к себе внимание публики своей выставкой, поэтому каждый из сынов этого великого города должен употребить все усилия, чтобы угодить посетителям его своими произведениями. Эти соображения заставили скромного писца нотариальной конторы выпустить в свет свои исследования игры в меледу. Сюжет, правда, ничтожный, но теория новая и к тому же придумана в Лионе. Цель этого сочинения будет вполне достигнута, если оно докажет, что меледа — игрушка поучительная и развивающая».

Автор брошюры приводит сначала подробный этимологический разбор слова Baguenaudier, которые по-французски звучит как «меледа», причем находит, что его следует писать не через au, а через o от латинского слова nodus[81]. Потом, указав на описания меледы, существовавшие раньше, лионский писец излагает настолько же простой, насколько и изящный способ обозначения различных комбинаций этой игры, позволяющей во всякую данную минуту определить порядок перемещения колец. Мы очень сожалели, что почтенный продолжатель Кардано и Валлиса счел нужным скрыть свое имя от публики, но недавно нам удалось узнать, что это был Луи Гро, советник лионской апелляционной палаты. Предлагаемая нами ниже теория меледы составляет только развитие основной мысли, принадлежащей автору брошюры, а также наблюдений, сообщенных нам Пармантье. От себя мы прибавили лишь несколько соображений, имеющих целью показать, что этот маленький прибор, на который многие смотрят, как на простую игрушку, представляет, однако, своей постоянно изменяющейся конфигурацией наглядное изображение свойств бинарной системы нумерации и математической теории сочетаний.

УСТРОЙСТВО МЕЛЕДЫ

Меледа состоит из двух главных частей: из челнока и системы колец (рис. 36). Челнок имеет форму обыкновенной металлической шпильки, вставленной свободными концами в деревянную рукоятку, которую держат в левой руке, в то время как правой передвигают кольца. Система колец образуется:

1. Из некоторого числа одинаковой величины колец, диаметр которых почти вдвое больше ширины челнока, а толщина почти вчетверо меньше ширины его отверстия; вследствие этого челнок можно продеть через кольцо, и, в свою очередь, через него легко провести не только одно кольцо, а даже два вместе.

2. Из тонкой прямоугольной пластинки одинакового размера с челноком, по всей длине которой просверлено на равном между собой расстоянии столько отверстий, сколько в приборе колец.

3. Из такого же числа тонких проволок, связывающих кольца между собой; каждая из них одним концом проходит сквозь отверстие пластинки и удерживается в нем с помощью шарика или крючка, а другим огибает соответствующее ей кольцо.

Вся система устроена таким образом, что проволока, удерживающая свое кольцо, проходит и внутрь соседнего с ним. Так, проволока *первого* кольца проведена во *второе*, проволока *второго — в третье* и так далее; но проволока *последнего* не проходит ни в какое другое. Следовательно, существует большая разница между расположением *первого* и *последнего* кольца. Отличать кольца одно от другого мы будем цифрами 1, 2, 3, 4, условившись начинать счет справа.

Кольцо называется *надетым* или поднятым, когда соответствующая ему проволока проходит внутри челнока, а он проходит сквозь кольцо. В обратном случае кольцо называется *снятым* или *опущенным*. Сама меледа называется *собранной*, когда все ее кольца подняты, и *разобранной*, когда все они спущены и челнок находится вне системы колец.

ПЕРЕМЕЩЕНИЕ ОДНОГО КОЛЬЦА

Представим себе, что мы держим левой рукой в горизонтальном направлении челнок меледы, уже собранной, то есть в том виде, в каком она продается в магазинах. Легко убедиться, что первое кольцо может быть снято. Для этой цели его берут правой рукой, подвигают челнок влево, снимают кольцо и проводят сквозь отверстие челнока. Таким образом, первое кольцо будет опущено. Надеть же его можно, действуя обратным способом. Когда первое кольцо опущено, второе снять нельзя, третье же можно и снять, и снова надеть. Но если сняты первое и третье кольца, то уже нельзя снять ни одного другого.

Таким образом, из самого устройства меледы можно вывести заключение, что перемещение одного кольца подчиняется следующим правилам:

1. В каком бы положении ни находились кольца меледы, первое из них всегда легко снять, если оно надето, и надеть, когда оно снято.

2. Для перемещения, то есть для поднятия или опускания какого-нибудь кольца, необходимо, чтобы оно находилось непосредственно слева от надетого кольца и чтобы последнее было единственным надетым кольцом, лежащим справа от перемещаемого.

В том случае, когда перемещается только одно кольцо за один раз, ход игры называется *обыкновенным* или *простым*.

ПЕРЕМЕЩЕНИЕ ДВУХ КОЛЕЦ

Устройство меледы позволяет также снять или надеть два кольца сразу, хотя это возможно не для всех, а исключительно для двух первых колец. При использовании такого приема с двумя первыми кольцами игра идет быстрее, вследствие чего и сам ход называется *ускоренным*. Поднять или опустить их возможно при всяком положении остальных колец. Однако нужно заметить, что, когда приходится надевать оба кольца сразу, то крайнее следует потом снять. В дальнейшем изложении мы займемся сначала обыкновенным ходом игры, который удобно рассматривать с теоретической точки зрения, а затем приведем таблицу, позволяющую непосредственно вывести теорию игры при ускоренном ходе.

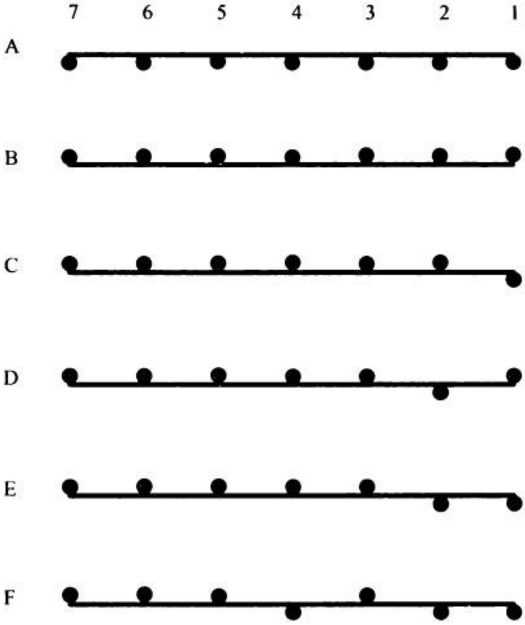


Рис. 37

Для схематического представления различных фаз игры мы станем изображать челнок в виде горизонтальной черты, надетые кольца представим посредством кружочков, помещенных в соответственном порядке над ней, а снятые — посредством кружочков, помещенных под ней (рис. 37). Так, A показывает, что меледа из 7 колец совершенно разобрана, а B — что она собрана. C или D получается из B посредством одного перемещения, а именно: опусканием первого или второго кольца. E точно так же получается из B одним перемещением, если снять два первых кольца сразу. Наконец, E из D легко получить перемещением первого кольца, остающегося всегда свободным. Но E из C непосредственно получить уже нельзя. Эти замечания имеют силу при всяком положении колец 4, 5, 6 и 7.

В положении C можно опустить только третье кольцо, а в положении E — только четвертое, если желают перейти в положение F. В этом последнем случае, когда приходится опускать 3-е кольцо, сначала следует поднять два первых, а потом снова опустить первое, чтобы затем можно было опустить третье.

ОБЩАЯ ЗАДАЧА ПРИ ИГРЕ В МЕЛЕДУ

На основании предыдущих правил предлагается следующая задача.

Даны два каких-нибудь расположения колец на челноке произвольной длины. Требуется определить порядок и число перемещений, необходимых для того, чтобы перейти от одного данного расположения к другому, причем число перемещений колец должно быть наименьшим. В частности же, требуется определить порядок и наименьшее число перемещений колец для полной сборки или разборки меледы.

Сначала рассмотрим этот вопрос при условии, позволяющем пользоваться только простым ходом, когда перемещается каждый раз лишь одно кольцо. Общую задачу этой игры можно решить непосредственно при помощи остроумного обозначения, придуманного лионским изобретателем. Все кольца от левой руки к правой он обозначил посредством характеристик 0 и 1 таким образом, что первое поднятое кольцо, начиная слева, обозначено 1, а следующие за ним вправо — попеременно 0 и 1, не принимая в расчет опущенных колец. Что же касается последних, то они обозначаются поставленным на соответствующих им местах знаком первого поднятого кольца, находящегося от них по левую сторону, и нулем, если это кольцо снято. Другими словами, если рассматривать схему от левой руки к правой, то нетрудно видеть, что всякое поднятое кольцо требует перемены знака соседнего с ним кольца по левую сторону, все равно, будет ли оно поднято или опущено, а всякое опущенное требует постоянства знака левого соседнего с ним кольца. В конце этой главы приведена таблица последовательных ходов при игре в меледу с обыкновенным, схематическим обозначением в колонке «схематическое обозначение» и с обозначением, принятым Гро, в колонке «бинарная система».

ОБЫКНОВЕННЫЕ ХОДЫ

Только что объясненное нами обозначение ходов представляет число, написанное по бинарной системе. Рассмотрим какое-нибудь расположение колец в меледе:

1101000

Из этого положения можно перейти в два других: первое из них характеризуется поднятием крайнего правого кольца, что дает схему:

1101001

второе, выражающееся опусканием четвертого кольца, имеет видь схемы:

1100

При переходе от первой схемы ко второй мы увеличили соответствующее ей бинарное обозначение на единицу, а при переходе к третьей уменьшили его на единицу.

Подобная же перемена происходит вообще при всяком расположении колец. Отсюда следует, что обыкновенный ход при игре в меледу вполне соответствует последовательному образованию чисел, написанных по бинарной системе, так что, собирая меледу, мы получаем восходящий ряд чисел, начиная с нуля, а разбирая ее — нисходящий их ряд. Заметим, что при собирании меледы необходимо начинать перемещения первого кольца с правой стороны, обозначенного

0, а при разборке — с перемещения первого кольца с правой стороны, но обозначенного **1**.

Для решения предположенной нами общей задачи, то есть для перехода от одного какого-нибудь расположения колец к другому, обозначают схемы этих расположений в бинарной системе и определяют их разность; последняя, если выразить ее в десятичной системе нумерации, и будет представлять собой наименьшее число перемещений, необходимых для перехода из одного положения в другое. Чтобы выполнить это требование практически, придется или собирать, или разбирать меледу, смотря по тому, получится ли первое число обозначения схемы больше или меньше второго.

ЧИСЛО ХОДОВ

После всего сказанного легко определить число ходов, необходимых для полной сборки или разборки меледы, состоящей из 7 колец. Когда все они надеты, то у нас получается обозначение:

$$1010101,$$

или по десятичной системе:

$$2^8 + 2^4 + 2^2 + 1 = 85.$$

Следовательно, приходится произвести 85 перемещений, чтобы собрать или разобрать меледу из 7 колец путем обыкновенных ходов. Точно так же для меледы из 10 колец нужно сделать 682 хода, и тогда у нас получится:

$$2^9 + 2^7 + 2^5 + 2^3 + 2 = 682.$$

Вообще, если назовем P_n число перемещений, необходимых для сборки или разборки меледы из n колец, то для четного n, равного 2_k, будем иметь:

$$P_{2k} = 2^{2k-1} + 2^{2k-3} + \ldots + 2^3 + 2 = (2^{2k+1} - 2)/3$$

и для n нечетного, равного $^{2k} + 1$,

$$P_{2k+1} = 2^{2k} + 2^{2k-2} + \ldots + 2^2 + 1 = (2^{2k+1} - 1)/3.$$

Таким образом, обе эти формулы показывают, что P_n всегда равно наибольшему целому числу, заключающемуся в одной трети выражения 2^{n+1}.

В таблице, приведенной в заключении этой главы, мы даем схему шестнадцати первых восходящих ходов для меледы в 5, 6 или 7 колец, причем колонка n показывает последовательность простых ходов. Кроме того, здесь также находится схема пятнадцати последних ходов для меледы в 7 колец. Относительно числа ходов необходимо заметить, что хотя меледа собирается посредством 85 перемещений, но число их может быть увеличено до 127, что мы и сделали, желая показать, каким образом следует подготовить расположение колец к снятию 8-го кольца, если бы оно входило в систему.

Именно этим различием в требованиях задачи и объясняется разногласие в счете ходов, встречающееся у трех авторов, писавших о меледе. Для получения самого сложного расположения n колец при простых ходах требуется количество перемещений, равное числу, выраженному по бинарной системе рядом n единиц, то есть количеству $2^n - 1$.

Эта формула представляет собой число сочетаний, взятых по одному, по два, ..., по n из n различных предметов, так что игра в меледу наглядно объясняет процесс образования сочетания без повторения из n предметов, а также указывает порядок, в каком эти сочетания следуют друг за другом.

СОЧЕТАНИЯ

Известно, что вообще простым сочетанием или сочетанием без повторений из n букв, взятых по p раз, называются все комбинации p букв, отличающиеся одна от другой только выбором элементов, а не порядком их размещения. Обозначив число сочетаний через $C_{n.p.}$ будем иметь:

$$1 + C_{n.1} + C_{n.2} + ... + C_{n.n} = 2^n.$$

В руководствах по алгебре эту формулу выводят из выражения $(x + 1)^n$, пользуясь биномом Ньютона и полагая x равным единице.

Но теорема относительно числа сочетаний, по-видимому, была известна гораздо раньше формулы Ньютона, так как доказательство ее, вытекающее из основного метода математики, а именно: из наблюдения и индукции, мы встречаем еще у древних представителей этой науки. Вот в чем оно состоит:

Возьмем четыре элемента a, b, c, d, составим из них все комбинации, какие только возможны, и прибавим к ним единицу, тогда у нас получится:

1,
a, b, c, d,
ab, ac, ad, bc, bd, cd,
abc, abd, acd, bcd,
abcd.

Число всех этих комбинаций равно 24. Возьмем теперь пятый элемент e и составим новые группы сочетаний, приставляя его к каждому из предыдущих сочетаний. Тогда будем иметь:

e,
ae, be, ce, de,
abe, ace, ade, bce, bde, cde,
abce, abde, acde, bcde,
abcde.

Откуда следует, что число всех возможных сочетаний из пяти элементов, увеличенное на единицу, вдвое больше того же числа из четырех элементов, то есть равно 25, и так далее.

ПРОДОЛЖИТЕЛЬНОСТЬ МАНИПУЛЯЦИЙ В МЕЛЕДЕ

После того, как наша статья о меледе появилась в «Revue Scientifique», мы получили от Гро весьма интересное письмо, из которого приводим следующий отрывок:

«Очень сожалею, что в своей теории я не указал время, необходимое для сборки или разборки меледы. Но я составил об этом краткую заметку, не появившуюся в печати. Сообщаю вам свои выводы, которыми вы можете воспользоваться, если найдете их подходящими.

В меледе всегда бывает нечетное число колец; это полезно для тех, кому известно, что для полной разборки меледы необходимо опустить сначала первое кольцо, а потом третье. Незнакомые с теорией этой игры опускают сначала два первых кольца, потом четвертое, не подозревая того, что таким образом они удаляются от цели и достигают крайнего положения, когда на челноке остается только одна проволока последнего кольца».

Сколько времени нужно для того, чтобы собрать или разобрать меледу? 64 перемещения можно без труда сделать в минуту, а если постараться, то и 80; но допустим 64, как среднее число, тогда

Число колец	Число перемещений	Необходимое время
5	21	20 сек
7	85	1 мин 20 сек
9	341	5 мин 20 сек
11	1365	21 мин 20 сек
13	5461	1 час 25 мин 20 сек

Подобным же образом для 25 колец потребовалось бы более 349500 минут, то есть чтобы разобрать меледу в 25 колец, необходимо при ежедневной 10-часовой работе более 582 дней.

УСКОРЕННЫЙ ХОД

Приведенная в конце главы таблица содержит в себе еще колонку N, показывающую число перемещений при ускоренном ходе. Из этой таблицы видно, что ускоренный ход подчиняется следующим правилам:

1) первое и второе кольца нужно поднять вместе;

2) подняв их, следует тотчас же опустить первое кольцо.

Из таблицы, кроме того, видно, что 8 последовательных ходов обыкновенного перемещения — с 1-го по 8-й, с 9-го по 16-й и так далее — соответствуют шести ходам ускорения; следовательно, если q выражает частное, а r = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 или 0 есть остаток при делении n на 8, то получим следующие выражения для N и n:

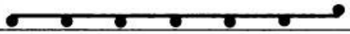
$$n = 8_q + 1, 2, \qquad N = 6_q + 1,$$
$$n = 8_q + 3, 4, 5, \qquad N = 6_q + 2, 3, 4,$$
$$n = 8_q + 6, 7, \qquad N = 6_q + 5,$$
$$n = 8_q \qquad N = 6_q$$

При ускоренном перемещении весьма легко определить число ходов, необходимых для того, чтобы перейти из одного расположения колец в другое. В частном случае, если обозначить через Q_n число перемещений при сборке меледы, то, смотря по тому, будет ли n нечетное и равное 2k+1 или четное и равное 2k, мы найдем

$$Q^{2k+1} = 2^{2k} \qquad \text{и} \qquad Q^{2k} = 2^{2k-1}-1,$$

ТАБЛИЦА ДВОЯКОГО РОДА ХОДОВ В МЕЛЕДЕ

ШЕСТНАДЦАТЬ ПЕРВЫХ ХОДОВ

№	n	Схематическое обозначение	Бинарное обозначение
1	1		0000001
	2		0000010
2	3		0000011
3	4		0000100
4	5		0000101
5	6		0000110
	7		0000111
6	8		0001000
7	9		0001001
	10		0001010
8	11		0001011
9	12		0001100
10	13		0001101
11	14		0001110
	15		0001111
12	16		0010000

Кроме того, мы найдем, что выражение

$$3.\,2^{n-2}-1$$

представляет число перемещений, соответствующих самому сложному положению меледы из n колец при ускоренном ходе.

ПЯТНАДЦАТЬ ПОСЛЕДНИХ ХОДОВ

№	n	Схематическое обозначение	Бинарное обозначение
85	113		1110001
	114		1110010
86	115		1110011
87	116		1110100
88	117		1110101
89	118		1110110
	119		1110111
90	120		1111000
91	121		1111001
	122		1111010
92	123		1111011
93	124		1111100
94	125		1111101
95	126		1111110
	127		1111111

ГЛАВА 8. ТАКЕН

> **Ага!.. И вы здесь, господин философ! Что делаете вы в обществе этих лентяев? Неужели также тратите время на передвижения деревяшек.**
>
> ***Дидро***

ИСТОРИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Игра, известная теперь под названием *такена*, или *игры в пятнадцать*, была изобретена в Америке в конце 1878 года одним глухонемым, который случайно вздумал разместить по порядку лежавшие в ящике номера, не вынимая их оттуда. Так, по крайней мере, объяснил мне происхождение этой игрушки в Реймсе, на съезде французского общества развития наук, Сильвестр, корреспондент Парижской академии наук и профессор университета Хопкинса в Балтиморе.

С самого своего появления такен вошел в моду, получив всеобщее распространение в Балтиморе, в Филадельфии и во всех крупных городах Соединенных Штатов Северной Америки. Вскоре он был привезен во Францию и использовался в виде приложения к различным иллюстрированным и политическим журналам под названием *двойного галльского кастета*. Успех его в Европе оказался еще значительнее, чем в Америке. Впрочем, во Франции не в первый раз подобные новинки производят фурор. Башомон рассказывает, что в 1746 году весь Париж приходил в восторг от движущихся с помощью шнурков полишинелей и арлекинов. Не было ни одного дома, говорит он, где бы не висели у камина такие куклы. Их дарили девушкам, женщинам и до такой степени увлекались ими, что на бульварах, кроме этих кукол, почти ничего другого и не продавали в качестве новогодних подарков.

Математическая теория этой игры была дана Вульсеем Джонсоном из Аннаполиса и обобщена В. К. Стори. В печати же появилась впервые на страницах математического журнала Сильвестра (1879). Сначала мы воспользовались заметками о такене двух вышеупомянутых авторов. Но впоследствии нам удалось упростить объяснение приемов этой игры, а также сделать в ней довольно удачные обобщения и выводы, с которыми мы и познакомим читателей в настоящей главе.

Такен не только весьма интересная игрушка, но даже прибор, с помощью которого чрезвычайно легко дать наглядное понятие об одном из важнейших разделов алгебры, а именно: о теории детерминантов, принадлежащей Лейбницу. Поэтому нельзя не согласиться с редакторами American journal[82], что теорию и практические приемы игры в такен следует считать своего рода подготовкой к изучению этой части новейшей алгебры.

ОПИСАНИЕ ТАКЕНА

На дне квадратного ящика или на шахматной доске в 16 клеток расставляют как попало столько же кубиков или шашек с номерами от 1 до 16. Потом вынимают один из кубиков, а все остальные, пользуясь пустой клеткой, передвигают до тех пор, пока не приведут их в естественный порядок, указанный на рис. 38.

Рис. 38. Основное положение

7	4	6	11
8	5		2
9	3	14	12
15	13	1	10

Рис. 39. Первоначальное положение

Предположим, что мы разместили кубики на дне ящика и сняли № 16, как это показано на рис. 39, представляющем первоначальное положение такена.

Пользуясь образовавшейся пустой клеткой, можно передвинуть только один из нумерованных кубиков 5, 6, 2 или 14, а затем снова один из следующих четырех и т. д. Начиная игру, весьма естественно спросить себя: сколько же существует первоначальных положений кубиков, нельзя ли привести их всех к основному положению и как это сделать.

Ниже мы докажем, что число первоначальных положений превышает 20 триллионов, и потому такен смело можно назвать игрой с постоянно новыми комбинациями. Точное число первоначальных положений равняется

$$20\,922\,789\,888\,000.$$

Половину их можно привести к одному из четырех прямых размещений, когда № 1 находится на том или другом конце первой диагонали квадрата (рис. 40—43).

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Рис. 40. Порядок L_1

1	5	9	13
2	6	10	14
3	7	11	15
4	8	12	16

Рис. 41. Порядок C_1

Другую же половину можно всегда привести к одному из четырех обратных размещений, в которых № 1 помещается в какой-нибудь из крайних клеток второй диагонали квадрата (рис. 44—47).

16	12	8	4
15	11	7	3
14	10	6	2
13	9	5	1

Рис. 42. Порядок C_3

16	15	14	13
12	11	10	9
8	7	6	5
4	3	2	1

Рис. 43. Порядок L_3

4	3	2	1
8	7	6	5
12	11	10	9
16	15	14	13

Рис. 44. Порядок L_2

13	9	5	1
14	10	6	2
15	11	7	3
16	12	8	4

Рис. 45. Порядок C_2

4	8	12	16
3	7	11	15
2	6	10	14
1	5	9	13

Рис. 46. Порядок C_4

13	14	15	16
9	10	11	12
5	6	7	8
1	2	3	4

Рис. 47. Порядок L_4

Другими словами, мы докажем, что всегда возможно расположить кубики обыкновенного такена, состоящего из 16 клеток, в естественном порядке номеров, поместив № 1 в один из углов квадрата.

Но прежде чем решать подобные задачи, необходимо привести несколько элементарных объяснений из теории прямолинейных и круговых перестановок.

ПРЯМОЛИНЕЙНЫЕ ПЕРЕСТАНОВКИ

Рассматривая в четвертой главе задачу о восьми королевах, мы уже привели основную формулу этой теории и доказали, что число способов, ведущих к размещению по прямой линии десяти различных элементов, равняется произведению десяти первых натуральных чисел. Обозначив вообще через n число элементов, а через N — число их прямолинейных перемещений, получим:

$$N = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n.$$

Следовательно, для семи элементов число перестановок будет равно 5040.

Первое издание курьезного сочинения о такене относится к 1692 году; в нем есть несколько ошибок, из которых мы упомянем об одной, находящейся в решении следующей задачи: «Семь человек должны были обедать вместе и заспорили о том, кому занять лучшие места (без сомнения, это происходило в каком-нибудь провинциальном городе, вдали от столицы, наивно комментирует автор). Чтобы выйти из затруднения, кто-то предложил, наконец, сесть за стол как придется, но с тем условием, чтобы продолжать эти общие обеды, меняясь каждый раз местами, до тех пор, пока не истощится весь ряд всевозможных перемещений между обедающими. Спрашивается, сколько обедов должно быть устроено для этой цели.

Число прямолинейных перемещений из 7 элементов равняется, как мы видели, 5040. Так что если считать по одному обеду в день, то для решения спора потребовалось бы около 14 лет, а будь число обедающих 13 человек, то им пришлось бы употребить на это несколько миллионов лет. Отсюда можно заключить, что не следует быть слишком щепетильным в выборе места за столом при большом числе обедающих».

КРУГОВЫЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ

Ошибка в решении этой задачи состоит в том, что Озанам рассматривает все места как совершенно различные. Но если разместить гостей за круглым столом и не принимать во внимание соседства с камином, дверью или окном, то относительное положение обедающих между собой не изменится, когда по данному знаку каждый из них пересядет на соседний стул справа. Следует ли считать эти два размещения гостей различными? Конечно нет, если стол круглый. Так как подобным образом гости могут пересаживаться шесть раз вправо, то Озанам принимал, вероятно, все такие перемещения за различные и потому нашел семь прямолинейных перемещений, тогда как в сущности получается только одно круговое. Следовательно, число обедов для семи гостей или круговых перемещений из семи элементов будет только одна седьмая 5040, или 720.

Кроме того, нужно заметить, что гости, вместо того, чтобы пересаживаться слева направо, могли бы пересесть справа налево, так, чтобы сосед, который был с правой стороны, оказался потом с левой и наоборот. Следовательно, полученное число придется уменьшить еще вдвое, что составит только 360 обедов, и гости будут удовлетворены в течение одного года.

Нам остается еще сказать несколько слов о перестановках элементов в перемещениях, после чего мы снова вернемся к такену.

ПЕРЕСТАНОВКИ

Из двух элементов, например из цифр 1 и 2, можно составить два прямолинейных перемещения:

12 и 21.

В первом из них цифры размещены в их естественном порядке, а во втором — в обратном. В этом последнем случае говорят, что перемещение заключает в себе *перестановку*, потому что цифра 2 поставлена раньше цифры 1.

Чтобы получить перемещения из трех цифр 1, 2, 3, мы приставим цифру 3 к каждому из предыдущих перемещений и тогда будем иметь:

123 и 213.

Здесь нет новой перестановки, потому что цифра **3** стоит после **1** и **2** на своем месте. Но если мы переставим эту цифру через одну влево, то есть напишем:

132 и 231,

то введем одну перестановку в первое перемещение и прибавим еще одну перестановку во втором. Передвинув цифру 3 еще через одну влево, т. е. написав:

312 и 321,

мы заметим, что в перемещении **312** заключаются уже две перестановки, а в перемещении **321** – три. Теперь значение термина выяснилось само собой, и мы видим, что перестановка является в ряду различных чисел, написанных горизонтально в каком-нибудь порядке, всякий раз, когда большее из них стоит по левую сторону меньшего. Число перестановок в данном перемещении можно определить двумя различными способами:

1) сосчитав для каждого большего элемента число меньших, находящихся от него по правую сторону, взять сумму полученных результатов;

2) сосчитав для каждого меньшего элемента число всех больших, находящихся от него по левую его сторону, точно так же взять сумму полученных результатов.

Очевидно, что оба способа одинаково ведут к цели, но пользоваться ими следует смотря по тому, который из них удобнее.

ДВА КЛАССА ПЕРЕМЕЩЕНИЯ

Перемещения из n элементов делятся на два класса: к *первому* принадлежат те, которые или вовсе не содержат перестановок, или содержат *четное* их число, а ко *второму* — все перемещения с нечетным числом перестановок. Чтобы отличить, к которому из них относится данное перемещение, мы будем обозначать перемещения первого класса знаком + , а второго — знаком — . Так, перемещение + **12** дает:

+123, – 132, + 312,

а перемещение — **21** дает:

–213,+ 231, –321.

Отсюда заключаем, что оба класса содержат одинаковое число перемещений из двух или трех чисел, и это справедливо вообще для перемещений, состоящих из какого угодно числа элементов. В самом деле, чтобы составить перемещения из четырех элементов **1, 2, 3, 4,** поставим сначала **4** в конце каждого перемещения из трех элементов, что, очевидно, не изменит класса этих перемещений. Если же мы станем переставлять цифру **4** последовательно влево, то знак перемещения будет попеременно изменяться, так, например, + **231** даст при введении в него четвертого элемента:

+ 2314, – 2341,+ 2431, – 4231.

Приводимая ниже таблица заключает в себе все перемещения из четырех элементов с обозначением класса, к которому они относятся. В первых двух строках ее обозначены два перемещения из двух элементов и шесть перемещений из трех элементов, позволяющих уяснить, так сказать, генеалогию перемещений из четырех элементов.

ТАБЛИЦА, ПОКАЗЫВАЮЩАЯ ГЕНЕАЛОГИЮ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

– 12			– 21		
+ 123	– 132	+ 312	– 213	+ 231	– 321
+ 1234	– 1324	+ 3124	– 2134	+ 2314	– 3214
– 1243	+ 3142	– 1342	+2143	– 2341	+ 3241
+ 1423	– 1432	+ 3412	– 2413	+ 2431	– 3421
– 4123	+ 4132	– 4312	+ 4213	– 4231	+ 4321

Из этой таблицы видно, что число перемещений со знаком + равно числу их со знаком –, то есть число перемещений одинаково в каждом классе. Это заключение можно обобщить и выразить в следующей теореме, принимая ноль за четное число.

Теорема I. Перемещения из n элементов разделяются на два класса с одинаковым числом членов в каждом. К первому относятся перемещения с четным числом перестановок, а ко второму — с нечетным их числом

Класс перемещения определить весьма легко, стоит лишь сосчитать, как это было объяснено раньше, содержащееся в нем число перестановок, исключая при этом из полученных результатов кратное двум как не оказывающее влияния на знак.

ОБМЕНЫ

Если в каком-нибудь перемещении мы поменяем местами два рядом стоящих элемента, то перемещение изменит свой знак, так как в этом случае мы увеличиваем или уменьшаем число перестановок на единицу. Вообще, если переставим один элемент в данном перемещении через р других элементов, то число перестановок изменится на количество одинаковой парности с р; другими словами, если переставим один элемент через 2, 4, 6, 8 ... последовательных элементов, то класс перемещения не изменится, а если тот же элемент переставим через 1, 3, 5, 7... последовательных элементов, то класс перемещения изменится. Установив это, мы будем иметь следующее предложение, известное под названием *теоремы Безу*.

Теорема II. Взаимный обмен местами двух каких-нибудь элементов в перемещении изменяет его класс, или четное число таких обменов местами нескольких элементов данного перемещения не изменяет его класс наоборот

В самом деле, чтобы убедиться в справедливости этой теоремы, достаточно доказать ее справедливость относительно обмена местами двух каких-нибудь элементов. Предположим, что в перемещении

... Rabc ... klS ...

мы обмениваем местами два элемента R и S, отстоящие один от другого на Р элементов. Тогда, переставив S через р предшествующих ему элементов, получим:

... RSabc ... kl ...

Затем, переставив R через (р + 1) следующих за ним элементов, будем иметь:

$$... Sqbc ... klR ...$$

Следовательно, число перестановок в данном случае изменилось на количество той же парности, как и (2p+l), то есть на число нечетное.

Можно еще доказать следующую теорему: общее число перестановок во всех перемещениях из n букв равно половине произведения из числа этих перемещений P_n на число сочетаний $C_{n,2}$ из тех же n букв, взятых по 2. Мы достигаем предположенной цели, пользуясь двумя способами — аналитическим и синтетическим.

АНАЛИТИЧЕСКИЙ СПОСОБ

Назовем через D_n сумму перестановок во всех перемещениях из n букв. Напишем предварительно (n—1) раз ряд перемещений из n букв, тогда общее число перестановок для них будет $(n + 1)\ D_n$; затем возьмем (n + 1) элемент и введем его в каждое из перемещений, написав в первом из них на последнем месте, во втором — на предпоследнем месте, и так далее, наконец, в предпоследнем — на втором и в последнем — на первом; тогда в каждом из этих перемещений получится:

$$0, 1, 2, \ldots, (n-1), n$$

новых перестановок, а во всех вместе $n(n + 1)/2$, так что

$$D_{n+1} = (n + 1)D_n + P_n\, n(n+1)/2).$$

Полагая $D_n = P_n, Q_n$, будем иметь:

$$Q_{n+1} = Q_n + n/2.$$

Следовательно, для n = 1, 2, 3,...

$$Q_2 = Q_1 + 1/2,\ Q_3 = Q_2 + 2/2,\ \dots,\ Q_n = Q_{n-1} + (n-1)2.$$

Сложив почленно последние равенства, получим:

$$Q_n = [1+2+ \dots + (n-1)]2 = n(n-1)/4.$$

СИНТЕТИЧЕСКИЙ СПОСОБ

Сумма перестановок в двух перемещениях, из которых одно обыкновенное, а другое — написанное в обратном порядке, равна числу сочетаний из n элементов по два, или

$$C_{n,2} = ½\, n\, (n-1).$$

Таким образом мы имеем:

$$C_{n,2} = ½\, n\, (n-1);$$
$$Q_n = n(n-1)4;$$
$$D_n = P_n Q_n.$$

откуда следует, что

$$Q_n = ½\, C_{n,2};$$
$$D_n = ½\, P_n C_{n,2}.$$

П р и м е ч а н и е. Подобным же образом можно было бы найти сумму всех чисел, образуемых перемещениями двух, трех, четырех, девяти первых цифр. Так, например, сумма чисел, образуемых перемещениями из пяти цифр 1, 2, 3, 4, 5, равняется

$$1/2 P_5 x 66666.$$

ЦИКЛЫ

Определить класс данного перемещения можно значительно скорее посредством так называемого способа циклов, принадлежащего Джонсону. Возьмем какое-нибудь перемещение:

8, 6, 12, 1, 5, 14, 2, 11, 13, 15, 4, 9, 3, 10, 7.

Напишем над этим рядом другой ряд из тех же чисел, но расположенных в естественном порядке, а именно:

числа: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15.
элементы: 8, 6, 12, 1, 5, 14, 2, 11, 13, 15, 4, 9, 3, 10, 7.

Мы замечаем, что под 1 находится 8, под 8 – 11, под 11 – 4, под 4 – 1. Из этого соответствия чисел составляется первый цикл: 1, 8, 11, 4.

Начав с 2, составим второй цикл: 2, 8, 14, 10, 15, 7.

Начав с 3 цифры, не встречающейся в предыдущих циклах, будем иметь третий цикл: 3, 12, 9, 13.

Наконец, остается еще состояние из одного только числа: четвертый цикл – 5.

Легко убедиться, что взаимный обмен местами двух каких-нибудь элементов увеличивает или уменьшает на единицу число циклов данного перемещения, смотря по тому, принадлежат ли эти элементы к одному и тому же или к двум различным циклам. Отсюда мы заключаем, что изменение числа циклов имеет одинаковую парность с числом взаимного обмена местами элементов перемещения, а это доказывает справедливость следующей теоремы.

Теорема III. Два перемещения принадлежат к одному и тому же или к двум различным классам, смотря по тому, имеют ли одинаковую парность количества их циклов или нет

При этом следует заметить, что в перемещении, состоящем из элементов, расположенных в естественном порядке, число циклов равно числу элементов[83].

УКЛОНЕНИЯ

Рассмотрим какое-нибудь перемещение из n элементов:

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_p, \dots, a_n.$$

Если назовем уклонением элемента разность между его численным значением и порядком занимаемого им места, то, обозначив это уклонение через e, будем иметь:

$$e_p = a_p - p.$$

Введя такое условие, докажем следующую теорему.

Теорема IV. Если в перемещении из ряда n натуральных чисел исключить какой-нибудь элемент, то происшедшая вследствие этого перемена в числе перестановок будет одинаковой парности к уклонениям элемента

Назовем через a_p исключаемый элемент, а через c_p и s_p числа перестановок, находящихся соответственно по правую и по левую сторону от него; тогда, очевидно, перемена в числе перестановок данного перемещения, обусловливаемая исключением a_p, будет $c_p + s_p$. Но число элементов предшествующих равно (p−1), и между ними s_p элементов больших, чем a_p, а $(p - 1 - s_p)$ меньших его. С другой стороны, число элементов, следующих за a_p и меньших его, равняется C_p. Сложив два последних выражения, находим общее число элементов, меньших ар, то есть $(a_p - 1)$, следовательно:

$$a_p - 1 = P - 1 - S_p + C_p$$

или

$$a_p - P = C_p + S_p,$$

а прибавив четное число $2S_p$, будем иметь

$$e_p = c_p + s_p.$$

ЧИСЛО ПЕРВОНАЧАЛЬНЫХ РАСПОЛОЖЕНИЙ НОМЕРОВ ТАКЕНА

Если обозначим нулем пустую клетку такена, то расположение его кубиков можно представить в порядке, указанном на фигуре 38-й; фигура же 39-я дает одно из перемещений этих шестнадцати номеров, а именно:

7, 4, 6, 11 8, 5, 0, 2 9, 3, 14, 12, 15, 13, 1, 10.

Так как пустая клетка может быть оставлена где угодно, то число первоначальных расположений кубиков такена равняется числу прямолинейных перемещений шестнадцати элементов или произведению шестнадцати первых чисел, то есть

20.922.789.888.000.

В том же случае, когда незанятой оставляют постоянно одну и ту же клетку, число первоначальных положений будет в шестнадцать раз меньше.

НЕВОЗМОЖНЫЕ РАСПОЛОЖЕНИЯ

Условимся, как и раньше, предполагать, что в каждом из начальных и заключительных положений пустая клетка замещается кубиком, который отмечен нулем. Напишем теперь все цифры начального положения кубиков в каком-нибудь определенном порядке и в том же порядке напишем цифры основного положения. Рассмотрим оба перемещения, полученных таким образом, допустив при этом, что клетки такена окрашены попеременно в черный и белый цвет, как на шахматной доске; тогда мы будем иметь следующее предложение.

Теорема V. Если допустить клетки одинакового цвета, то невозможно перейти от начального расположения к заключительному другого класса. Если же допустим клетки различных цветов, то, наоборот, невозможно перейти от начального расположения к заключительному того же класса

В самом деле, так как игра сводится к замене при каждом ходе воображаемого кубика с нулем каким-нибудь кубиком, занимающим клетку другого цвета, то в первом случае, то есть когда пустые клетки одинакового цвета, возможно перейти от начального расположения к заключительному только посредством четного числа обменов, другими словами, не изменяя класса перемещения; а во втором, то есть когда пустые клетки различного цвета, переход от одного положения к другому возможен только посредством нечетного числа обменов. Следовательно, изменяя класс перемещения, этот вывод применим ко всякому общему случаю игры.

В описанных нами рядах, выражающих последовательное расположение кубиков такена, мы, очевидно, можем исключить 0, если в обоих случаях он имеет уклонение одной и той же парности. На практике заключительное положение изображается рядом натуральных чисел, написанных в их последовательном порядке; что же касается начального положения, то в нем делают предварительно несколько ходов с целью привести кубик, означенный нулем, на то место, какое он должен занимать при заключительном положении. Тогда в перемещении 0 можно уже не принимать во внимание. В самом деле, нетрудно убедиться, что если в двух перемещениях элементы, большие или меньшие сравнительно с другими, занимают одни и те же места, то их можно исключить, не нарушая при этом парности числа перестановок обоих перемещений.

Применяя к такену шахматную доску, весьма легко расширить правила, допустив, что дозволяется снять кубик с клетки другого цвета, чем незанятая, и поставить его на нее, причем теория игры нисколько не изменится.

ПРАКТИЧЕСКИЕ ПРИЕМЫ ИГРЫ В ТАКЕН

Возьмем снова перемещение из пятнадцати чисел:

8, 6, 12, 1, 5, 14. 2, 11, 13, 15, 4, 9, 3, 10, 7 и допустим, что мы имеем право переставлять всякий номер через две клетки влево и вправо. При таком условии, очевидно, нам легко будет распределить все номера в порядке натуральных чисел, если перемещение принадлежит к первому классу. В самом деле, переставим № 1 через две цифры влево, тогда он станет на втором месте. Потом, переместив 8 через две цифры вправо, получим:

1, 6, 8, 12, 5, 14, 2, 11, 13, 15, 4, 9, 3, 10, 7.

№ 1 теперь на своем месте. Переставим точно так же № 2 два раза через две цифры влево. Тогда он будет находиться на третьем месте, а переместив 6 через две цифры вправо, получим:

1, 2, 8, 6, 12, 5, 14, 11, 13, 15, 4, 9, 3, 10, 7.

Затем мы перемещаем два раза через две цифры влево № 3, а потом точно так же № 4 , тогда у нас получится:

1, 2, 3, 4, 8, 6, 12, 5, 14, 11, 13, 15, 9, 10, 7

и так далее. Таким образом, всегда возможно разместить в естественном порядке тринадцать первых номеров. Что же касается двух последних, то они окажутся или в порядке 14, 15, если перемещение принадлежит к первому классу, или в порядке 15, 14, если оно принадлежит ко второму классу. Следовательно, этим способом можно составить двоякого рода перемещения: или

1, 2, 3, ..., 13, 14, 15,

или

1, 2, 3, ..., 13, 15, 14.

После этих двух предварительных соображений рассмотрим такен элементарной формы (рис. 48), в котором толстая черта означает перегородку, препятствующую движению кубиков. Пользуясь пустой клеткой, можно, не изменяя порядка букв в области A, H, I, P, перевести какую угодно букву на место B и пустую клетку в O. Если передвинем кубик B и O, то он переместится по окружности через две клетки влево, а при обратном движении — через две клетки вправо. Сопоставляя только что сказанное с предыдущими соображениями, мы заключаем, что всегда возможно привести *одно данное* перемещение к *другому*, если оба они одного и того же класса. Если же они различных классов, то приведение возможно лишь за *исключением* двух последних клеток.

Очевидно, впрочем, что тот же способ применим и к обыкновенному такену, при условии не переходить границ, обозначенных чертой; в этом случае клетки его образуют замкнутый путь (рис. 49).

Итак, практические приемы игры в такен сводятся к следующим правилам. Прежде всего на основании

A	B	C	D	E	F	G	H
P	O	N	M	L	K	J	I

Рис. 48. Элементарный такен

циклов следует определить класс данного начального положения и для большого удобства тотчас же поставить незанятую клетку G. Потом легко будет разместить кубики двух первых рядов или двух первых колонок в какое-нибудь из четырех прямых или обратных расположений, смотря по тому, принадлежит ли данное расположение их к первому или ко второму классу. После этого останется только разместить семь остальных кубиков согласно приемам, указанным для элементарного такена.

A	B	C	D
P	O	N	E
K	L	M	F
J	I	H	G

Рис. 49. Стесненный такен

Ту же задачу решают еще и другим способом: определяют положение циклов, к какому классу принадлежит данное расположение кубиков. Если оно первого класса, то его приводят, как было сказано выше, к расположению основному; если же второго, то в перемещении производят обмен местами двух каких-нибудь элементов, после чего полученное таким образом новое перемещение будет уже первого класса, и точно так же приводится к основному.

Взаимного обмена элементов местами можно избежать, поставив на пустую клетку кубик одинакового с ней цвета.

ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ТАКЕН

Кроме обыкновенного такена в шестнадцать клеток и квадратной формы можно рассмотреть еще такен прямоугольный, происходящий от прибавления к первому нескольких рядов или нескольких колонок новых клеток. Обозначим через l число горизонтальных линий и через c — число вертикальных колонок, приняв в то же время за основное положение следующее:

1	1	2	3	...	c	2
(L_1)	c + 1	c + 2	c + 3		2c	
	2c + 1	2c + 2	2c + 3		3c	
	...	...	...		...	
	...	...	...		...	
4	(l – 1)c + 1	(l – 1)c + 2	(l – 1)c + 3		Le	3

Расположим в каком-нибудь произвольном порядке le кубиков, пронумерованных от 1 до lc, и снимем кубик lc. Задача будет состоять в том, чтобы разместить все остальные кубики в порядке их основного расположения.

Очевидно, что различные способы доказательств, употребляемые нами до сих пор, применяются и к такому такену более общей формы. Другими словами, мы имеем и для данного случая два основных предложения.

Теорема VI. Число первоначальных расположений для такена в lc клеток равно произведению lc первых чисел

Теорема VII. Первоначальные расположения в подобном такене точно так же разделяются на два класса: все расположения первого класса могут быть приведены к основному лишь после обмена местами двух каких-нибудь номеров

При некоторых навыках легко разместить кубики во всех клетках, за исключением двух последних, в порядке основного расположения двух последних, и привести таким образом всякий прямоугольный такен к элементарному, в котором число линий или колонок равняется двум.

ЧЕТЫРЕ ЕСТЕСТВЕННЫХ ПОРЯДКА РАЗМЕЩЕНИЯ КУБИКОВ

Кубики такена могут быть расположены в числовом порядке восемью различными способами. В самом деле, обозначим через 1, 2, 3, 4 четыре угла или вершины такена, а через L — размещение номеров в последовательных рядах и колонках, начиная с каждой вершины такена, то есть назовем через

<table>
<tr><td>L_1</td><td>Слева направо и сверху вниз</td><td><table><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td></tr><tr><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td></tr><tr><td>13</td><td>14</td><td>15</td><td>16</td></tr></table></td></tr>
</table>

L_2	Справа налево и сверху вниз	4 3 2 1 8 7 6 5 12 11 10 9 16 15 14 13
L_3	Справа налево и снизу вверх	16 15 14 13 12 11 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1
L_4	Слева направо и снизу вверх	13 14 15 16 9 10 11 12 5 6 7 8 1 2 3 4

Через C – расположение в последовательных колонках, то есть:

C_1	Сверху вниз и слева направо	1 5 9 13 2 6 10 14 3 7 11 15 4 8 12 16
C_2	Сверху вниз и справа налево	13 9 5 1 14 10 6 2 15 11 7 3 16 12 8 4

C_3	Снизу вверх и справа налево	16 12 8 4 15 11 7 3 14 10 6 2 13 9 5 1
C_4	Снизу вверх и слева направо	4 8 12 16 3 7 11 15 2 6 10 14 1 5 9 13

Мы уже видели при рассмотрении обыкновенного такена, что расположение кубиков, принадлежащее к первому классу, всегда возможно привести к одному из размещений:

L1, C1, L3, C3,

а расположение кубиков, принадлежащее ко второму классу, — к одному из размещений:

L2, C2, L4, C4.

Но это соответствие является в ином виде для такенов прямоугольных, вследствие чего для каждого из них приходится определять особо — какие из естественных расположений кубиков принадлежат к первому классу L1 и какие ко второму.

Начнем с определения условий, необходимых для того, чтобы иметь возможность перейти от одного естественного расположения кубиков L_1, C_1. С этой целью мы сосчитаем по первому способу число перестановок в C1, имеющем вид:

1	1	$l + 1$	$2l + 1$	...	$(c - 1)\,l + 1$	2
(C_1)	2	$l + 2$	$2l + 2$	...	$(c - 1)\,l + 2$	
	3	$l + 3$	$2l + 3$	...	$(c - 1)\,l + 3$	
	...	...	...	...	...	
	...	...	...	...	...	
4	l	$2l$	$3l$	...	cl	3

Кубику $(l + 1)$ предшествуют кубики первой колонки, находящиеся под № 1 в количестве $(l - 1)$.

Кубику $(2l + 1)$ предшествует двойное их число $2(l - 1)$.

Кубику $(3l + 1)$ предшествует тройное их число $3(l - 1)$.

....

Кубику $[(c - 1)\,l + 1]$ $(c - 1)(l - 1)$.

Следовательно, число перестановок для первого ряда равняется $(l - 1)$, умноженному на сумму $(c - 1)$ натуральных чисел, или $c\,(c - 1)(l - 1)/2$.

Чтобы получить это число для второго ряда, достаточно в предыдущем выражении заменить l через $(l - 1)$, что даст $c\,(c - 1)(l - 2)/2$.

Для третьего — достаточно снова уменьшить число l на единицу, что дает $c\,(c - 1)(l - 3)/2$ и так далее, до предпоследнего, где число перестановок равняется $c\,(c - 1)l/2$.

Следовательно, число всех перестановок будет равно произведению количества $c(c - 1)/2$ на сумму натуральных чисел, начиная от 1 и заканчивая $(l - 1)$, или

$$1c\,(1-1)\,(c-1)/4.$$

Таким образом, естественные расположения номеров L_1 и C_1 будут одного и того же или двух различных классов, смотря по тому, принадлежит ли целое число $1/4\ lc\ (l-1)\ (c-1)$ к четным или к нечетным. Четным оно может быть в том случае, если одно из четырех чисел $l, c, l-1, c-1$ делится на 4 без остатка, и нечетным, если ни одно из них не делится без остатка на четыре.

Решая тот же вопрос с точки зрения симметрии, как мы делали это при изучении теории солитера из 37 клеток, легко видеть, что подобный результат получается для четырех углов и по симметрии горизонтальной или вертикальной. Итак, мы имеем следующую теорему:

Теорема VIII. Два порядка расположения номеров L и C, имеющие одинаковый указатель, принадлежат к одному или к двум различным классам, смотря по тому, делится ли хотя бы один из множителей $l, c, 1-1, c-1$ на 4 или нет

Определим теперь условия, при которых возможно будет изменить в обратном смысле порядок расположения номеров одного и того же ряда; тогда мы получим отношение, аналогичное существующему между L_1 и L_2, L_3 и L_4, C_1 и C_2, C_3 и C_4.

Вообще изменение порядка расположения n-последовательных номеров дает число перестановок, равное:

$$(n-1)+(n-2)+\ldots+3+2+1, \text{ или } n\,(n-1)/2.$$

Заметив это, нетрудно видеть, что при переходе от порядка расположения номеров L_1 к другому L_2 перемена последовательности этих номеров в (l − 1) первых рядах дает

$$(l-1)\,c\,(c-1)/2 \text{ перестановок,}$$

а перемена последовательности номеров после того, как взят № lc, даст

$$(c-1)\,(c-2)/\,2 \text{ перестановок.}$$

Следовательно, общее число перестановок будет равно

$$(c-1)\,[(l-1)\,c+c-2]/2, \text{ или } (c-1)\,(lc-2)/2.$$

Откуда вытекает следующая теорема.

Теорема IX. Перемена порядка номеров во всех рядах такена будет возможна или невозможна, смотря по тому, разделится ли произведение (c—1) (1c—2) на 4 без остатка или нет

Подобным же образом доказывается и приводимая ниже теорема, определяющая условия замены порядков расположения клеток такена:

$$L_1 \text{ и } L_3,\ L_2 \text{ и } L_4,\ C_1 \text{ и } C_3,\ C_2 \text{ и } C_4.$$

Теорема X. Перемена порядка номеров во всех колонках возможна или невозможна, смотря по тому, делится ли произведение (l − 1) (cl − 2) на 4 без остатка или нет

ЧЕРЕДУЮЩИЕСЯ ПОРЯДКИ

Каждому из восьми только что рассмотренных нами естественных расположений соответствуют еще восемь других, правильных, сообразно с которыми возможно разместить кубики такена. Возьмем естественное расположение номеров, размещенных последовательными рядами, и приведем в обратный порядок все парные ряды, исходя из первого, заключающего в себе номера от 1 до c. У нас получится тогда порядок, чередующийся рядами, который мы обозначим AL, так что, например, AL_1 будет обозначать такой порядок, в котором кубики расположены слева направо, начиная с вершины 1, в первом ряду, справа налево — во втором, слева направо — в третьем и так далее, попеременно.

Точно так же для каждого естественного порядка по колонкам C существует чередующийся порядок AC. Например, обозначение AC_1 указывает порядок, в котором размещаются кубики по номерам снизу вверх, начиная от вершины 1 — в первой колонке, сверху вниз — во второй, снизу вверх — в третьей и так далее попеременно.

Определим теперь, при каких условиях можно изменить расположение L на соответствующие ему AL или, вообще, перейти от одного расположения к другому, имеющему с ним одинаковый указатель. Для большей определенности мы предположим, что вопрос касается L_1 и AL_1, и рассмотрим два случая, когда l четное и когда оно нечетное.

Первый случай

Мы видели, что при перемене порядка в основном перемещении из c натуральных чисел количество получаемых перестановок равно $c(c - 1)/2$. Следовательно, если предположить l нечетным, то перемена порядках в $(l-1)/2$ рядах и число перестановок будет равно $c(c-1)(l-1)/4$. Сверх того, парность этого числа не изменяется, если его помножить на нечетное число l. Затем, если снять кубик lc с угла 3, то число перестановок останется прежним. Следовательно, для l нечетного расположения L_1 и AL_1 принадлежат к одному и тому же классу или к двум различным сообразно с тем, будет ли четной или нечетной четверть числа $lc(l-1)(c-1)$.

Второй случай

Если gl четное, то и в этом случае мы увидим, что число перестановок lc в ряду последовательно расположенных кубиков имеет одну и ту же парность с числом ¼ $lc(l-1)(c-1)$. Обменяем теперь местами кубики, находящиеся в углах 3 и 4, и снимем кубик lc. Через это мы изменим класс перемещения lc натуральных чисел посредством одного обмена. Следовательно, для l четного положения L_1 и AL_1 принадлежат к одному и тому же или к двум различным классам, смотря по тому, будет ли нечетной или четной четверть числа $lc(l-1)(c-1)$.

Сравнивая эти результаты с полученными раньше – для условий перемены расположений L и C, мы будем иметь следующие предложения.

Теорема XI. Расположения AL и C с одинаковыми указателями принадлежат к одному или к двум различным классам, смотря по тому, будет ли число рядов l четным или нечетным

Теорема XII. Расположения AC и L с одинаковыми указателями принадлежат к одному или к двум различным классам, смотря по тому, будет ли число колонок четным или нечетным

РАЗНОВИДНОСТИ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ТАКЕНА

Судя по предыдущим теоремам, свойства прямоугольного такена обусловливаются только остатками от деления на четыре числа рядов или колонок; другими словами, можно сказать, что два такена (c, l) и (c, l) измерений принадлежат к одной и той же разновидности, когда разности

$$c - c_1 \text{ и } l - l_1$$

делимы в одно и то же время на четыре. Следовательно, для классификации прямоугольных такенов относительно шестнадцати естественных и чередующихся порядков достаточно изучить всевозможные комбинации чисел

$$c = 0, 1, 2, 3 \text{ с } l = 0, 1, 2, 3 \text{ (Мод. 4)}$$

и применить к ним только что доказанные нами теоремы.

Приводимая ниже таблица заключает в первом вертикальном ряду обозначенные римскими цифрами номера разновидностей такена. В двух следующих показаны остатки деления c и l на четыре, а в четырех остальных – все расположения первого класса, то есть того же, что и L_1. Так, в вертикальном ряду, обозначенном буквой L, находятся указатели расположения кубиков по рядам одинакового класса с L и тому подобное. Расположения, не встречающиеся в этой таблице, не принадлежат к классу L_1.

ТАБЛИЦА ПОРЯДКОВ РАЗМЕЩЕНИЯ ПЕРВОГО КЛАССА

	c	l	L	C	AL	AC
I	0	0	1.3.	1.3.	.2.4	.2.4
II		1	1..4	1..4	1..4	.23.
III		2	1.3.	1.3.	.2.4	.2.4
IV		3	1.3.	1.3.	1.3.	.2.4
V	1	0	12..	12..	..34	12..
VI		1	1234	1234	1234	1234
VII		2	1234	1234	...	1234
VIII		3	12..	12..	12..	12..
IX	2	0	1.3.	1.3.	.2.4	.2.4
X		1	1234	1234	1234	...
XI		2	1.3.	.2.4	1.3.	.2.4
XII		3	1234	....	...	...
XIII	3	0	1.3.	1.3.	.2.4	1.3.
XIV		1	1..4	1..4	1..4	1..4
XV		2	1234	....	1234	1234
XVI		3	1.3.	.2.4	.2.4	1.3.

В сущности, здесь находятся только четырнадцать разновидностей, так как I, III и IX дают одинаковые решения.

Для квадратных такенов или общих для тех, в которых c — l равно числу, кратному четырем, мы имеем четыре разновидности:

ТАБЛИЦА ДЛЯ КВАДРАТНЫХ ТАКЕНОВ

c	L	C	AL	AC
0	1.3.	1.3.	.2.4	.2.4
1	1234	1234	1234	1234
2	1.3.	.2.4	1.3.	.2.4
3	1.3.	.2.4	.2.4	1.3.

Для такенов в 25 клеток порядок расположения первого класса можно привести к какому угодно из шестнадцати натуральных или чередующихся порядков, но к ним ни в каком случае нельзя привести расположение второго класса.

ОБЪЕМНЫЙ ИЛИ МНОГОЭТАЖНЫЙ ТАКЕН

Рассмотрим параллелепипед, образуемый расположенными одна над другой пустыми клетками, которые составляют c колонок, l рядов и t этажей или слоев. Если поместить в эти клетки clt подвижных кубиков, пронумерованных от 1 до ctl, и снять последний кубик clt, то все остальные можно разместить соответственно одному из натуральных расположений, исходя от какой-нибудь вершины. В этом виде, однако, задача будет довольно затруднительна, но мы облегчим себе ее решение следующим приемом: разберем *объемный такен* по составляющим его *слоям*, тогда у нас получится t прямоугольных такенов с lc клетками, содержащими lc подвижных кубиков, за исключением только одного такена, в котором одна клетка остается незанятой. На нем задача решается так же, как и на обыкновенном, после чего мы предполагаем возможным поместить в незанятую клетку соответствующий ей кубик предыдущего или последующего слоя.

Предоставляем читателю самому развить теорию и классификацию этих многоэтажных такенов.

Продолжая обобщения, мы придем к представлению *сверхобъемного такена* или *такена четырех измерений*, поместив в плоскости на t рядах и s колонках прямоугольные такены, состоящие из lc клеток, кубики в которых пронумерованы числами от 1 до cits. Задача в этом случае состоит в том, чтобы, сняв последний кубик, расположить в условленном порядке (lcts – 1) остальных, употребляя те же приемы, как в обыкновенном такене, и, кроме того, вводя в условие право ставить на пустую клетку кубик соответствующей клетки каждого из четырех смежных такенов, примыкающих к одному и тому же ряду t или к одной и той же колонке s.

Наконец, продолжая это обобщение, мы можем прийти к понятию о *многомерном (hyperspace) такене*, или *такене n измерений*.

СПИРАЛЬНЫЙ ПОРЯДОК

Возвратимся теперь к прямоугольному такену. Мы видели, что каждому из восьми порядков его натуральных расположений соответствует порядок чередующийся. Но для порядков L и C мы можем найти еще новые правильные расположения, которые назовем *спиральными* и условимся обозначать их буквой S. Чтобы получить такой порядок расположения, например SL, мы размещаем сначала с первых кубиков в ряду **12**, потом (l − 1) следующих — в колонке **23**, (c − 1) следующих — в ряду **34** и, наконец, (l − 2) — в первой колонке **41** и так далее, вращаясь всегда в одном и том же направлении. Для определения класса этого перемещения удобнее будет вычислять количество перестановок по второму способу.

Предположим такен с размещенными в спиральном порядке кубиками.

1	1	2	c	2
(SL_1)	2c + 2l − 4	...	c + 1	
	2c + 2l − 5	...	c + 2	
	...	...	...	
	2c + l − 1	...	c + 1 − 2	
4	2c + l − 2	...	c + l, c +l − 1	3

Так как верхний ряд совершенно не содержит перестановок, то определяем сумму перестановок, испытываемых членами первой колонки справа.

Член:

c + 1 испытывает число перестановок, равное 1 (c−1),
c + 2 испытывает число перестановок, равное 2 (c−1),
c + 3 испытывает число перестановок, равное 3 (c−1),

....

c + l −1 испытывает число перестановок, равное (l − 1)(c − 1);

следовательно, число перестановок, испытываемых членами всей правой колонки, равно

$$(l-1)(c-1)\,l/2.$$

Для членов нижнего ряда, начиная справа, каждый последующий член испытывает одной перестановкой меньше по сравнению со своим соседним членом, находящимся от него справа. Следовательно,

член:

$c + l$ испытывает число перестановок,
равное $(1 - 1)(c - 1) - 1$,
$c + l + 1$ испытывает число перестановок,
равное $(1 - 1)(c - 1) - 2$,

....

$2c + l - 2$ испытывает число перестановок,
равное $(l - 1)(c - 1) - (c - 1)$.

Поэтому число перестановок, испытываемых членами нижнего ряда, будет:

$$(l - 1)(c - 1)2 - c(c - 1)/2.$$

Для членов левой колонки, начиная снизу, число перестановок, испытываемых ее членами, уменьшается на $c - 1$ с каждым рядом, по направлению снизу вверх.

Члены:

$2c + l - 1$ испытывает число перестановок
$(l - 2)(c - 1) - (c - 1)$,
$2c + l$ испытывает число перестановок
$(l - 2)(c - 1) - 2(c - 1)$,

....

$2c + 2l - 4$ испытывает число перестановок
$(l - 2)(c - 1) -(l - 2)(c - 1)$;

следовательно, число перестановок, испытываемых членами левой колонки, будет:

$$(l - 2)^2 (c - 1) - \tfrac{1}{2} (l - 2)(l - 1)(c - 1).$$

Сложив полученные выражения, найдем общее число перестановок, испытываемых элементами, образующими внешнюю границу прямоугольника:

$$\frac{1}{2}(c - 1)(2l^2 + 8l + 2lc - 3c + 8).$$

Четность этого числа не изменится, если увеличим выражение, заключенное в скобки, на число, кратное четырем, поэтому, прибавив к нему

$$8l - 4lc + 4c - 8,$$

мы увидим, что число перестановок в первом обороте спирали, который обозначим через E, будет одинаковой парности с

$$\frac{1}{2}(c - 1)(2l^2 - 2lc + c);$$

откуда вытекает само собой:

$$E1 = \frac{1}{2}c(c - 1) + (l - c)(c - 1)l \qquad (\text{мод. } 2).$$

Чтобы получить подобное же сравнение по модулю 2 для числа перестановок в следующем обороте E2, достаточно заменить в предыдущей формуле l через $l - 2$ и c через $c - 2$, предполагая однако же, $l - 2$ положительным; тогда у нас получится:

$$E_2 = \frac{1}{2}(c - 2)(c - 3) + (l - c)(c - 3)(l - 2) \qquad (\text{Мод. } 2),$$

а взяв разность, будем иметь:

$$E1 = E2 + l \qquad (\text{Мод. } 2).$$

Следовательно, при переходе от одного оборота спирали к другому, внутреннему и соседнему с ним, число перестановок, испытываемых всеми членами оборота, изменяет свою парность. Для получения общего числа перестановок относительно какого угодно такена нужно полагать последовательно $l > c$, $l = c$ и $l < c$, но мы рассмотрим случай, когда $l = c$, то есть когда такен имеет квадратную форму.

Если $l = c$, то мы будем иметь:

$$E_1 = \tfrac{1}{2} c (c - 1),$$
$$E_1 = \tfrac{1}{2} c (c - 1) + 1,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$E_e = \tfrac{1}{2} c (c - 1) + (e - 1),$$

где e обозначает число последовательных оборотов, за исключением квадрата в одну клетку. Отсюда общее число перестановок

$$E = e \tfrac{1}{2} c(c - 1) + \tfrac{1}{2} e(e - 1) \qquad \text{(Мод. 2)}.$$

Когда оно *четное*, то

$$E = \tfrac{1}{2} c,$$

а когда оно *нечетное*, то

$$e = \tfrac{1}{2} (c - 1).$$

Таким образом, находим:

В первом случае:

$$E \equiv c^2 (c - 1) /4 + c (c - 2) /8 \qquad \text{(Мод. 2)}.$$

Во втором:

$$E \equiv c^2 (c - 1)^2/4 + (c - 1) (c - 2) /8 \qquad \text{(Мод. 2)}.$$

Но, умножая первое из этих выражений на нечетные числа $c - 1$ и $c - 3$, а второе — на нечетные же числа c и $c - 2$, мы увидим, что произведения не изменяют своей парности, следовательно

$$E \equiv c^2 (c - 1^2) / 4 + c (c - 1) (c - 2) (c - 3) / 8 \qquad (\text{Мод. } 2).$$

Переменим теперь местами кубик с номером c^2 и кубик, занимающий клетку угла 4, тогда парность перестановок изменится. Сняв же кубик c^2, мы не изменим числа перестановок, следовательно, у нас получится

$$SL_1 \equiv c^2 (c - 1^2) / 4 + c (c - 1) (c - 2) (c - 3) / 8 - 1 \quad (\text{Мод. } 2).$$

Раньше мы нашли

$$C1 \equiv c^2 (c - 1^2) / 4 + L \qquad (\text{Мод. } 2),$$

поэтому:

$$SL_1 \equiv C_1 + (c - 1) (c - 2) (c - 3) / 8 - 1 \qquad (\text{Мод. } 2).$$

Но для того, чтобы дробь была четной, необходимо и достаточно, чтобы одно из четырех чисел c, $c - 1$, $c - 2$, $c - 3$ делилось на 8, а это приводит к следующей теореме:

Теорема XIII. Во всяком квадратном такене порядки расположения кубиков C и SL, имеющих одну и ту же вершину, принадлежат к различным классам или к одному классу, смотря по тому, делится ли без остатка на восемь хотя бы одно из чисел c, c — 1, c — 2, c — 3 или нет

ЧЕРЕДУЮЩИЙСЯ СПИРАЛЬНЫЙ ПОРЯДОК И ПОРЯДОК МАГИЧЕСКИЙ

Существуют еще другие правильные порядки, сообразно с которыми размещаются кубики квадратного такена. Так, можно изменять направление оборотов спирали по нечетным рядам, и тогда получится *чередующийся спиральный порядок*. Можно также размещать кубики по номерам параллельно одной из диагоналей квадрата, и тогда является порядок диагональный; наконец, их можно распределить так, чтобы, после того как снятый кубик будет поставлен на свое место, сумма номеров давала бы одинаковые числа во всех рядах, во всех колонках и в обеих диагоналях такена, причем получится порядок, известный под названием *магического*. Теория его относится к другой серии развлечений, касающейся игры магов или магических квадратов, которыми мы займемся, может быть, впоследствии, а здесь укажем только способ получения магического квадрата на обыкновенном такене из шестнадцати клеток.

Возьмем основное расположение кубиков, указанное на фигуре 38-й, и поставим без изменения восемь цифр на обеих диагоналях, а все прочие поменяем местами симметрично относительно центра квадрата, то есть

2 с 15, 3 с 14, 5 с 12, 8 с 9.

Посредством этих четырех обменов мы, не изменяя класса перемещения, получаем магический квадрат (рис. 50), в котором сумма номеров каждого

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

Рис. 50. Магический порядок прямой

4	14	15	1
9	7	6	12
5	11	10	8
16	2	3	13

Рис. 51. Магический порядок обратный

ряда, каждой колонки и каждой диагонали равна 34. К такому магическому порядку может привести всякое расположение номеров первого класса. Расположение же второго класса всегда приводит к магическому порядку обратному, который получается из прямого перестановкой в обратном порядке всех его рядов и колонок (рис. 51).

СЕТЧАТЫЙ ИЛИ КОНТИНЕНТАЛЬНЫЙ ТАКЕН

Формулу такена можно разнообразить до бесконечности. Между прочим, мы рассмотрим тот из них, который образуется совокупностью нескольких квадратов, примыкающих друг к другу своими сторонами, и назовем его такеном *сетчатым* или *континентальным*. Чтобы дать понятие о разнообразии форм, какие может принимать подобная совокупность квадратов, достаточно будет сказать, что она подчиняется лишь одному требованию — образовать непрерывный ряд клеток или *континент*, внутри которого могут встречаться незанятые пространства, соответствующие *внутренним водам* или *морям*.

Такую цепь квадратов заставляют рядами кубиков, обозначенных буквами или цифрами, и снимают один из них, для того, чтобы получилась пустая клетка. Требуется, пользуясь ею, перейти из первоначального данного положения к заключительному, тоже данному, посредством передвижения всех кубиков.

Такая задача, очевидно, представляет двоякого рода невозможные случаи решения: одни из них обусловливаются несовместимостью первоначального положения с заключительным, как в обыкновенном такене, другие же зависят от самой формы сетчатого такена.

ТЕОРИЯ РАЗЪЕЗДА (GARAGE)[84]

Предположим, что сетчатый такен состоит из квадрата в четыре клетки ABCD и какой-нибудь цепи других клеток, примыкающей своими концами к двум смежным клеткам квадрата A и B (рис. 52). Обойти их всех можно или через A и B, или через A C D B. Таким образом, получаются два отдельных пути, сливающихся почти на всем своем протяжении, кроме четырех клеток A, B, C и D, которых мы и назовем разъездом (garage). Этот такен вполне походит на элементарный, и потому в нем всегда возможно изменить одно расположение на другое того же класса.

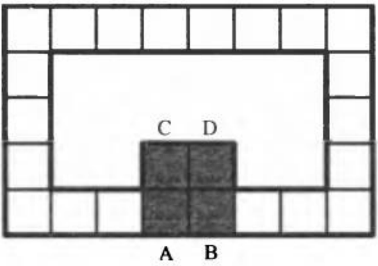


Рис. 52. Простой такен с разъездом

Рассмотрим теперь более сложный такен, состоящий из разъезда, главной линии обхода и сети разветвлений, примыкающих друг к другу или к главной линии в различных пунктах и нигде не образующих перерывов (рис. 53).

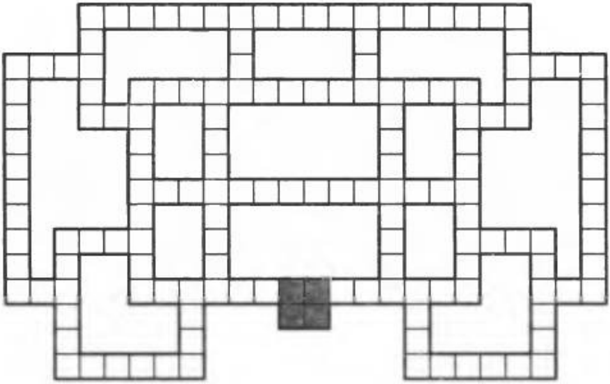


Рис. 53. Такен с разветвлениями и разрезом

Предположим, что в первоначальном размещении пустая клетка находится в одном ряду с разъездом, так что между ней и этим разъездом не встречается ни одного разветвления. Если такое расположение не дано прямо, то его необходимо достигнуть посредством нескольких ходов. Это условие нужно также иметь в виду при переходе к заключительному положению, и если оно не удовлетворено, то предварительно следует достигнуть расположения промежуточного, от которого уже нетрудно будет прийти к заключительному, то есть поставить снятый в начале игры кубик на незанятую клетку.

Легко увидеть, что возможно в какой угодно ветви переместить всякий кубик через две клетки. Для этого следует только привести его предварительно на одну линию с разъездом, а затем посредством кругового движения по замкнутой ветви и пользуясь разъездом возможно уже будет достигнуть желаемого результата.

Но если бы требовалось перевести G – через F и H, как показано на рис. 54, то этот способ оказался бы неприемлемым, потому что кубики находятся не на одной линии с разъездом. Тогда нужно переместить G – через F и E, так, чтобы E оказалось на разветвлении, после чего для получения желаемого результата придется только переставить G через E и H.

Следовательно, во всяком сетчатом такене с замкнутыми линиями можно всегда при помощи разъезда перевести один кубик через какие-нибудь два последовательных кубика, не нарушая порядка всех остальных.

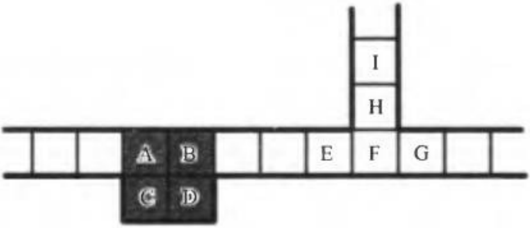


Рис. 54

Отсюда выводим следующую теорему:

Теорема XIV. В такене, состоящем из какого-нибудь числа разветвлений и разъездов, образующих замкнутую цепь, можно перейти из какого-нибудь одного положения в другое того же класса

НЕВОЗМОЖНЫЕ РЕШЕНИЯ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ФОРМЫ ТАКЕНА

Чтобы составить верное заключение о невозможности решения задачи для данного сетчатого такена, следует прежде всего определить внешнюю границу главного континента со всеми примыкающими к нему частями, затем провести границу внутреннего, не занятого клетками пространства и, выбрав место для разъезда, распределить разветвления по рядам и колонкам. После этого задача о приведении данного положения к другому того же класса может оказаться неосуществимой лишь в двух следующих случаях:

1) если такен заключает в себе полуострова, о которых мы будем говорить дальше;

2) если континент повсюду настолько узок, что на нем нельзя устроить разъезд.

ТАКЕН С ПОЛУОСТРОВОМ

Когда границы не занятых клетками пространств представляют одно из очертаний, указанных на рис. 55, это говорит о том, что такен заключает в себе полуостров. В этом виде такен является как бы разделенным на две части одной клеткой, представляющей так называемый *ортогональный* или *диагональный перешеек*.

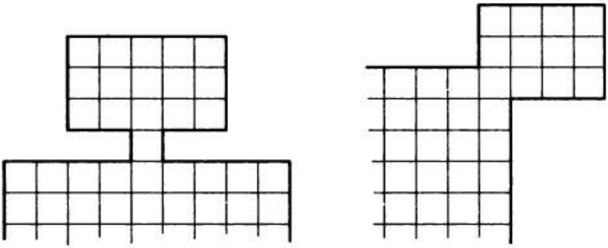


Рис. 55. Такен с полуостровом. Полуостров ортогональный. Полуостров диагональный

В общем случае решение задачи для такена подобной формы неосуществимо, потому что в перешеек, очевидно, нельзя ввести никакой другой кубик, кроме как смежный с ним. Впрочем, и здесь решение задачи все-таки будет возможно в том случае, если по условию не требуется перехода через перешеек. Тогда необходимо, чтобы континент и полуостров, взятые в отдельности, имели начальное и заключительное положение одного и того же класса и, кроме того, чтобы в обоих можно было устроить по разъезду. Наконец, если полуостров будет соединен с континентом несколькими перешейками, то получится обыкновенный сетчатый такен с внутренними пространствами из незанятых клеток и без полуострова.

ТАКЕН С ПРОИЗВОЛЬНО ВЗЯТОЙ ПУСТОЙ КЛЕТКОЙ

Существует еще другой вид игры в такен, когда играющему предоставляется право снять какой угодно номер и оставшиеся привести в естественный порядок обыкновенным способом, а в заключение игры положить снятый кубик на незанятую клетку. Задача сводится, следовательно, к определению того, какой именно кубик нужно снять, чтобы привести данное расположение остальных кубиков к заключительному.

Для решения такого рода задачи напишем в ряд одни под другими номера заключительного и начального расположения и определим число перестановок в соответствующих им перемещениях. Если оба перемещения окажутся первого класса, то нужно снять кубик четного уклонения, а если второго, то следует снять кубик нечетного уклонения.

Таким образом, вопрос состоит лишь в том, чтобы определить — при всяком ли данном начальном расположении возможно найти кубик, соответствующий требуемым условиям, или, другими словами, нет ли такого начального положения, для которого все кубики имели бы уклонение одинаковой парности? Мы сейчас укажем на случаи, когда является или полная возможность, или полная невозможность приведения данного первоначального положения к основному. В самом деле, так как заключительное положение представляет ряд номеров, написанных в порядке натуральных чисел, то каждый из его элементов имеет нулевые уклонения. Следовательно, если мы произведем здесь какое-нибудь число обменов N между кубиками одинаковой парности, то все уклонения останутся четными. Таким образом, для N нечетного перемещение, рассматриваемое после N обменов, будет второго класса, и какой бы кубик мы ни сняли, не может быть приведено к заключительному положению.

Отсюда заключаем, что существуют случаи, когда в ряде номеров данного начального расположения нельзя найти ни одного кубика, удовлетворяющего условиям осуществимости решения задачи.

С другой стороны, для N четного рассматриваемое перемещение после N обменов будет первого класса, как и заключительное; следовательно, здесь является возможным найти такой кубик, сняв который, мы придем к решению задачи.

Для такена с четным числом кубиков существует еще вторая серия первоначальных положений, при которых задача или вполне разрешима, или вполне неразрешима. В самом деле, возьмем естественный порядок перемещения *n* первых чисел, поменяем местами каждый нечетный номер со следующим за ним четным; тогда все уклонения сделаются непарными; произведем затем несколько обменов между номерами одной и той же парности, тогда у нас будут получаться перемещения обоих классов попеременно. Перемещения первого класса дадут полную невозможность решения, а перемещения второго класса — полную его возможность.

В такене с нечетным числом кубиков по необходимости всегда должен быть один номер парного уклонения; тогда вторая серия первоначальных положений будет представлять один случай неразрешимости задачи, и именно для этого кубика.

Примечание. Остроумная теория сетчатого или континентального такена и такена с произвольно взятой пустой клеткой принадлежит большей частью Гермари.

ПРИМЕЧАНИЯ К ЗАДАЧАМ

ПРИМЕЧАНИЕ 1 (К ПЕРЕПРАВАМ)

В главе «Переправа четырех семей» мы объяснили общую задачу относительно переправ. Вот еще одно весьма простое ее решение, присланное нам Деляннуа, бывшим воспитанником политехнической школы.

В этой задаче приходится рассматривать два случая, смотря по тому, поднимает ли лодка четверых или меньше. В первом перевозятся две семьи сразу, и одна из них возвращается за какой-нибудь из оставшихся. После n перевозок все семьи переправятся на противоположный берег.

Во втором случае, если лодка поднимает меньше четырех человек, то число их x будет 2 или 3. Тогда по необходимости придется сначала перевезти несколько женщин или же одну только семью, чтобы удовлетворить условию, требующему не оставлять женщину без ее мужа в присутствии других мужчин. Затем легко доказать, как это мы сделали, невозможность переправы шести семей в лодке, поднимающей менее четырех человек. Остается, следовательно, привести решение этой задачи относительно пяти семей, в том случае, когда лодка поднимает трех человек.

До переправы:

Правый берег					Левый берег				
E	D	C	B	A					
e	d	c	b	A					

1. Переезжают три женщины.

Правый берег					Левый берег				
E	D	C	B	A					
e	D						c	b	a

2. Одна или две женщины возвращаются и перевозят какую-нибудь из своих подруг.

Правый берег					Левый берег				
E	D	C	B	A					
e						d	c	b	a

3. Одна женщина возвращается, а трое мужей переезжают к своим хозяевам.

Правый берег					Левый берег				
E	D						C	B	A
e	d						c	b	a

4. Одна семья возвращается, а трое мужей переезжают на левый берег.

Правый берег					Левый берег				
					E	D	C	B	A
e	d	c						b	a

5 и 6. Одна женщина в два приема перевозит трех своих подруг, остававшихся на правом берегу.

Следовательно, обозначив через n-число семей, через x — наибольшее число пассажиров, помещающихся в лодке, и через N — число переездов, мы будем иметь следующую таблицу:

$n = 2$	$x = 2$	$N = 3$
$n = 3$	$x = 2$	$N = 6$
$n = 4$	$x = 3$	$N = 5$
$n = 5$	$x = 3$	$N = 6$
$n > 5$	$x = 4$	$N = n$

ПРИМЕЧАНИЕ 2 (К МОСТАМ И ОСТРОВАМ)

Мы видим на странице 32, что задача на мосты сводится к очерчиванию с одного или нескольких раз без перерывов и повторений всех фигур, образуемых прямыми или кривыми линиями на плоскости или в пространстве. Сущность этой задачи резюмируется в двух теоремах.

Теорема I. В каждой геометрической сети, образуемой прямыми или кривыми линиями, количество нечетных пунктов всегда равняется нулю или числу четному.

Эта теорема доказана в мемуарах Эйлера. Но ее можно доказать еще таким образом: обозначим через A, B, C, D и так далее различные станции сети, различные точки разветвления, начальные пункты переходов; пусть P и Q будут две соседние станции, то есть такие, по которым из P в Q можно было бы пройти по одному или нескольким путям, не встречая других станций сети. Если исключить один из этих путей PQ, то число путей, примыкающих к P и Q, уменьшится на единицу и изменит свою парность. Следовательно, если P и Q были нечетными пунктами, то они сделаются четными после этого исключения, и наоборот; наконец, если они были различной парности, то так и останутся пунктами различной парности. Таким образом, продолжая исключать все пути, соединяющие две соседние станции, до тех пор, пока не останется ни одного из них, мы, наконец, достигнем того, что число нечетных пунктов сделается равным нулю. А это, очевидно, может быть лишь в том случае, если и до исключения количество нечетных пунктов равнялось нулю или какому-нибудь четному числу.

Примечание. Теорема эта применяется к геодезическим сетям. В сети треугольников бывает всегда четное число вершин, где сходится нечетное число углов, приведенных к горизонту, между тем как число вершин, где сходятся углы, приведенные к горизонту в нечетном числе, может быть и четным, и нечетным.

Теорема II. Всякая геометрическая сеть, заключающая в себе 2n нечетных точек, может быть описана, по меньшей мере, n чертами без повторений. Всякая геометрическая сеть, заключающая в себе лишь четные точки, может быть описана только одной чертой без повторения

Предположим, что сеть эта непрерывная, так, что по ней можно пройти от одного какого-нибудь пункта до другого, не делая скачков; если теперь мы выйдем из какой-нибудь нечетной точки А, держась случайного пути, но, не проходя два раза по одной и той же линии, то в известный момент вынуждены будем остановиться; заметив, что во время этого пути четность станции, через которую мы проходили, не изменялась, мы делаем вывод, что пункт остановки есть нечетный пункт В. Исключив путь АВ, будем иметь рисунок с $(2n - 2)$ нечетными точками.

После n подобных переходов останется, следовательно, сеть, все станции которой четного порядка.

Теперь если мы выйдем из какого-нибудь пункта М непрерывной сети и направимся по произвольно взятому пути, то после нескольких переходов достигнем снова исходной точки М, описав таким образом замкнутую кривую. Повторив тот же прием с другой точкой, не вошедшей в предыдущий путь, затем с третьей n и так далее, мы, наконец, пройдем по всей сети. Но так как предполагаемая сеть непрерывна, то все эти замкнутые пути должны примыкать один к другому и к n путям, описанным прежде. Следовательно, сеть может быть описана самое большее и непрерывными чертами.

П р и м е ч а н и е. Фигура, все точки которой четные, может быть рассматриваема в некотором отношении как замкнутая кривая. Это замечание применимо в теории кривых, описываемых одним росчерком.

ПРИМЕЧАНИЕ 3 (К ЛАБИРИНТАМ)

Задача о лабиринтах представляет частный случай задачи на мосты и острова. В самом деле, так как каждый путь нужно проходить два раза, то вопрос сводится к описанию сети, заключающей в себе только пункты четного порядка. Но в данном случае можно описать сеть, не зная ее формы, между тем как, в общем, это не имеет места.

Теория разветвлений снова приводит нас к задаче Эйлера. Впрочем, из второй теоремы предыдущего Примечания непосредственно следует, что число N, или ствол разветвления, равняется половине числа нечетных пунктов, то есть числу l свободных концов, увеличенному количеством узлов непарного порядка. Обозначим последнее через i, а через j — число узлов четного порядка, тогда на основании формул, приведенных в главе «Лабиринты», будем иметь

$$N = ½ (l + i) \text{ и } p = i + J.$$

Комбинируя различные выражения числа N, мы получим несколько других формул.

ПРИМЕЧАНИЕ 4 (К ПЕРВОНАЧАЛЬНЫМ ЧИСЛАМ)

Мы показали, что совершенные числа происходят из чисел первоначальных, принадлежащих к типу $N = 2^n-1$. Первоначальные числа N соответствуют величинам

$$n = 1, 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127, 257,$$

и других не существует для n, меньшего 257. Из этого интересного отрывка, спасенного от забвения стараниями Женокки, видно, что Мерсене обладал весьма важным способом, относящимся к теории чисел, хотя этот способ и не сохранился до нашего времени. Занимаясь поверкой вывода Мерсене, мы пришли к следующей теореме:

Если $n = 4q + 3$ есть число первое, точно так же, как и $2n + 1$, то число $N = 2^n - 1$ делится на $2n + 1$ без остатка. Следовательно, принимая во внимание таблицу первоначальных чисел, мы заключаем из нее, что для величин n, последовательно равных

11, 23, 83, 131, 179, 191, 239, 251,

число N не принадлежит к первоначальным. Относительно других величин первоначального числа n Фермат нашел, что $2^{37}-1$ делится на 223. Плана нашел, что $2^{41}-1$ делится на 13367; Ландри нашел, что числа $2^{48}-1$, $2^{47}-1$, $2^{53}-1$, $2^{59}-1$, соответственно, делимы на 431, 2351, 6361 и 179951. Наконец, Ле-Лассер доказал, что числа $2^{78}-1$, $2^{79}-1$, $2^{118}-2$ и $2^{233}-1$, соответственно, делятся на 439, 2687, 3391 и 1399. Остается, следовательно, определить свойство чисел N для двадцати восьми показателей:

61, 67, 71, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 127, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 181, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229, 241, 257.

Мерсене говорит, что для определения предполагаемого первоначального числа $2^{257}-1$, состоящего из 78 цифр, потребовался бы при старинных способах исчисления труд всего человечества, состоящего из тысячи миллионов индивидуумов, которые должны были бы считать все вместе и непрерывно в продолжение числа веков, выражающегося двадцатью цифрами.

Хотя теория совершенных чисел сама по себе и бесполезна, однако она послужила Фермату исходной точкой в его исследованиях по высшей математике. Разложение чисел типа $2^n - 1$, а в более общем виде чисел, относящихся к типу ($a^n \pm b^n$), на простые множители привело к основным формулам теории чисел и особенно к той из них, которая была дана Ферматом и доказана Эйлером, а именно: простые множители числа ($a^n \pm b^n$) имеют линейный тип $nx + 1$. В последнее время эта теория обогатилась весьма важными формулами разложения арифметического, но не алгебраического, принадлежащими Орифейлю, бывшему воспитаннику политехнической школы, и Ле-Лассеру. Мы уже показали, что формулы выводятся из выражений, данных Гауссом и обобщенных Коши и Леженом Дирітье. С другой стороны, Генри представил на рассмотрение конгресса Французского общества развития наук интересные исторические заметки, в которых доказал, что первая из этих формул, принадлежащая Орифейлю, ускользнула от внимания Эйлера и Лежандра, но была замечена Николаем Бегелином и Софьей Жермен.

После того нам удалось вывести формулы двойного и четверного арифметического разложения для чисел типа $a^n \pm b^n$. Но здесь мы ограничимся только одним численным примером, который проверил Ле-Лассер. Если обозначим через a и b оба корня уравнения $x^2 = x-2$, то частное от деления ($a^{1269} - n^{1260}$) на (a—o) равно произведению сдедующих первоначальных чисел:

33, 53, 7, 11, 13, 17, 19, 29, 37, 41, 43, 59, 71, 83, 89, 127, 139, 167, 211, 251, 281, 419, 421, 503, 631, 701, 839, 1009, 1259, 2309, 2521, 2647, 2729, 3023, 3061, 3359, 3779, 4409, 5039, 6299, 6719, 9181, 19531, 22679, 41161, 182279, 3526741, 4835251, 125541359, 25215201901, 34449677641, 153790567559, 733268745721.

Весьма вероятно, что при дальнейшем развитии этих формул возможно будет решить, *существует ли бесчисленное множество величин x, для которых числа x и p x + q оба первоначальные*. Кроме того, теми же формулами можно воспользоваться и для решения задачи, требующей найти первоначальные числа, больше данного числа.

КОММЕНТАРИИ И ПРИМЕЧАНИЯ

[1] Пьер де Ферма (*фр.* Pierre de Fermat, 1601–1665) – французский математик, один из создателей аналитической геометрии, математического анализа, теории вероятностей и теории чисел. По профессии юрист, с 1631 года – советник парламента в Тулузе. Блестящий полиглот. Наиболее известен формулировкой Великой теоремы Ферма.

[2] Автор говорит о ситуации, существовавшей на момент написания и издания данной книги (1883 год).

[3] Клод Гаспар де Баше де Мезирьяк (*фр.* Bachet de Méziriac, 1581–1630) – французский математик. Именно сочинение Диофанта, изданное в 1621 году в переводе Клода Гаспара де Баше де Мезирьяка, дало повод Пьеру Ферма записать на полях перевода одно из самых известных замечаний в истории математики: «Невозможно разложить куб на два куба, или биквадрат на два биквадрата, или вообще степень, большую двух, на две степени с тем же самым показателем; я нашел этому поистине чудесное доказательство, однако поля слишком малы, чтобы оно здесь уместилось».

[4] Франсуа де Малерб (*фр.* François de Malherbe; 1555 год, Кан – 16 октября 1628 года, Париж) – французский поэт XVII века, чьи произведения во многом подготовили поэзию классицизма. В то же время многие сочинения Малерба тяготеют к стилю барокко.

[5] Диофант Александрийский (*др.-греч.* Διόφαντος ὁ Ἀλεξανδρεύς, *лат.* Diophantus) – древнегреческий математик, живший предположительно в III веке н. э.

[6] Жиль Роберваль (*фр.* Gilles Personne de Roberval, 8 августа 1602 года, Роберваль – 27 октября 1675 года, Париж) – выдающийся французский математик, астроном и физик. Его настоящее имя было Жиль Персонье или Персон (Giles Personier или Personne), псевдоним Роберваль происходит от названия деревни Роберваль, где родился ученый. В 1631 году Роберваль был назначен на кафедру философии в коллеже Жерве (Gervais College) в Париже. В 1634 году он перешел на кафедру математики в Коллеж-Руайяль. К занимающим эту должность предъявлялось требование: ставить математические проблемы и решать их. В том случае, если кто-либо решит поставленную проблему лучше занимающего эту должность, должность переходит к «победителю».

[7] «Научном обозрении» (*фр.*).

[8] Готфрид Вильгельм фон Лейбниц (*нем.* Gottfried Wilhelm von Leibniz, 21 июня (1 июля) 1646 года, Лейпциг, Германия – 14 ноября 1716 года, Ганновер, Германия) – немецкий (саксонский) философ, математик, юрист, дипломат.

[9] Бурк-ан-Бресс (*фр.* Bourg-en-Bresse) – город на востоке Франции, префектура департамента Эн. Расположен на реке Рессуз, к западу от горного массива Юра.

[10] Клод Фавр де Вожла (*фр.* Claude Favre de Vaugelas, 1585–1650 годы) – «член-учредитель» Французской академии, руководил составлением академического словаря, один из законодателей французского классицизма XVII века в области литературного языка. Сын Антуана Фавра.

[11] Людовик XIII Справедливый (*фр.* Louis XIII le Juste; 27 сентября 1601 года, Фонтенбло – 14 мая 1643 года, Сен-Жермен-ан-Лэ) – король Франции с 14 мая 1610 года. Из династии Бурбонов.

[12] Никколо Тарталья (*итал.* Niccolò Fontana Tartaglia, 1499–1557 годы) – итальянский математик.

[13] Б р е ш а (Брешиа) (*итал.* Brescia, на брешианском диалекте Brèhä, ломб. Brèsa, зап.-ломб. Bressa, Bruscia, *лат.* Brixia) — город на севере Италии, в Ломбардии, административный центр одноименной провинции.

[14] Д ж е р о л а м о (Джироламо, Иероним) К а р д а н о (*лат.* Hieronymus Cardanus, *итал.* Girolamo Cardano, Gerolamo Cardano; 24 сентября 1501 года, Павия — 21 сентября 1576 года, Рим) — итальянский математик, инженер, философ, медик и астролог, изобретатель карданного вала.

[15] Арифметический трактат (*итал.*).

[16] А н р и Л а б о н (Labonne, 1855–?) — натуралист. Стал доктором медицины Парижского факультета. Два раза по поручению французского правительства предпринимал экспедиции в Исландию и на Фарерские острова (1886–1887 годы), затем встал во главе общества научных изданий.

[17] М о н п е л ь е (*фр.* Montpellier, окс. Montpelhièr) — город на юге Франции, административный центр региона Лангедок-Руссильон и департамента Эро.

[18] О з а н а м, Ж а к (J. Ozanam) — французский математик (1640–1717). Происходил из еврейской семьи. Занимался преподаванием математики в Лионе, где он напечатал (в 1670 г.) свой первый ученый труд, перепечатанный потом в Париже в 1685 и 1710 годах. После 1670 года О. переселился в Париж и в 1701 году был избран в члены Парижской академии наук.

[19] Л е о н а р д Э й л е р (*нем.* Leonhard Euler; 4 (15) апреля 1707 года, Базель — 7 (18) сентября 1783 года, Санкт-Петербург) — выдающийся математик, внесший значительный вклад в развитие математики, а также механики, физики, астрономии и ряда прикладных наук. Эйлер — автор более чем 800 работ по математическому анализу, дифференциальной геометрии, теории чисел, приближенным вычислениям, небесной механике, математической физике, оптике, баллистике, кораблестроению, теории музыки и др. Многие его работы оказали значительное влияние на развитие науки.

[20] По той же причине, весьма вероятно, не найдено еще и решение задачи о королевах, когда число их больше восьми

(см. об этом 4-ю главу, где приведена задача о восьми королевах шахматной игры). Что же касается комбинаций, которые должны там встретиться, то это будут перемещения с повторениями.

[21] Это замечание Эйлера отличается чрезвычайно общим характером, хотя с первого взгляда это и незаметно. Я нашел, что во множестве задач, относящихся к геометрии положения, часто встречается большое различие в способах определения возможности и невозможности решения задачи. Вообще, последнюю заметить легче, нежели первую, в чем нетрудно убедиться в теории солитера, такена и нескольких других игр. В следующем параграфе Эйлер говорит, что весь его метод основывается на специальном обозначении, и мы покажем впоследствии, что то же самое справедливо и относительно всех подобных задач. В той главе, где говорится об игре в мелиду, читатели увидят, до какой степени упрощена эта теория посредством остроумного обозначения.

[22] Это рассуждение имеет силу для всякого распределения мостов и островов на какой угодно реке, если только дозволяется переходить дважды через каждый мост.

[23] Псамметих I (или Псамтик I, полное имя Уахибра Псамметих I) – фараон Древнего Египта (ок. 664–610 годов до н. э.), первый фараон XXVI Саисской династии.

[24] Минос, Миной (*др.-греч.* Μίνως) – мифический царь Крита, которому предание приписывает многие факты, известные древним из истории этого острова за последние два века до Троянской войны.

[25] Большой Мендерес (*др.-греч.* Μαίανδρος, прежде – Меандр) – река в западной части Малой Азии (Турция). Река Большой Мендерес очень извилистая. От ее прежнего названия (Меандр) произошло название руслового процесса, приводящего к образованию подобных форм, – меандрирование, и самих излучин – меандры речные. По ней же назван и орнамент в виде завитков.

[26] Публий Овидий Назон (*лат.* Publius Ovidius Naso, 43 год до н. э. – 17 год н. э.) – римский поэт, работавший во многих жанрах, но более всего прославившийся

любовными элегиями и двумя поэмами — «Метаморфозами» и «Искусством любви». Из-за несоответствия пропагандируемых им идеалов любви официальной политике императора Августа в отношении семьи и брака был сослан из Рима в западное Причерноморье, где провел последние десять лет жизни. Оказал огромное влияние на европейскую литературу, в том числе на Пушкина, в 1821 году посвятившего ему обширное послание в стихах.

[27] Шарль Альбер Демутье (1760–1801 годы) — французский поэт, драматург, автор «Писем к Эмилии о мифологии». Большую часть жизни провел в городке Виллер-Котре (родном городе А. Дюма) на границе Пикардии и Суассона.

[28] Диодор Сицилийский (*др.-греч.* Διόδωρος Σικελιώτης, *лат.* Diodorus Siculus, прим. 90–30 годы до н. э.) — древнегреческий историк, родом из Агириума на Сицилии.

[29] Кандиоты — греческое население Кандии — главного города (современное название Ираклион) и всего острова Крит, которые правившие городом и островом венецианцы называли Кандией.

[30] Ариадна (*др.-греч.* Ἀριάδνη) — в древнегреческой мифологии дочь критского царя Миноса и Пасифаи. Упомянута уже в «Илиаде» (XVIII 592), ее историю рассказывал Нестор в «Киприях».

Когда Тесей решился убить минотавра, которому афиняне по требованию отца Ариадны посылали ежегодно позорную дань из семи юношей и семи девушек, и таким образом избавить отечество от чудовища, он получил от любившей его Ариадны клубок ниток, выведший его из лабиринта, где обитал минотавр (нить научил ее применять Дедал). Совершив геройский подвиг, Тесей бежал с Ариадной на остров Наксос (Дия), где, по одному сказанию, Ариадна была убита стрелами Артемиды, наученной Дионисом, ибо вступила в брак с Тесеем в священной роще, по другому — покинута Тесеем и найдена Дионисом, который на ней женился.

[31] Жозеф Питтон де Турнефор (*фр.* Joseph Pitton de Tournefort, 5 июня 1656 года, Экс-ан-Прованс — 28 декабря 1708 года, Париж) — французский ботаник, профессор ботаники при Королевском саде лекарственных растений в Париже, член Парижской академии наук.

[32] Высочайшая точка острова Крит — гора Ида (2456 м над уровнем моря). Также есть и другие названия: Иди, Ита, Псилоритис. Согласно греческой мифологии, боги наблюдали с этой горы за ходом Троянской войны.

[33] Луис Филипиус Поншартрен (Louis Phelypeaux, comte de Pontchartrain, 1643–1727 годы) — канцлер и хранитель печати при Людовике XIV.

[34] Левант (от *фр.* Levant или *итал.* Levante — Восток) — общее название стран восточной части Средиземного моря (Сирии, Ливана, Израиля, Иордании, Египта, Турции и др.), в более узком смысле — Сирии, Израиля, Палестины и Ливана.

[35] Лемнос (*др.-греч.* Λήμνος) — остров в Эгейском море, принадлежит Греции. Входит в группу Северо-Восточных островов.

[36] Агриджента (*итал.* Agrigento) — город в итальянском регионе Сицилия, административный центр одноименной провинции. Древние названия города: Акрагант или Агригент (*др.-греч.* Akragas, *лат.* Agrigentum).

[37] Современный Кьюзи — городок на севере Италии.

[38] Ларс Порсенна (Порсена) (*лат.* Lars Porsenna) — этрусский царь и полководец, правитель города Клузий. В 507–508 годах до н. э. по просьбе Тарквиния Гордого воевал против Рима. По преданию, Порсенна заключил мир с Римом после того, как Муций Сцевола, который должен был убить Порсенну, доказал свою силу воли и преданность Риму, обуглив свою руку над огнем.

[39] Марк Теренций Варрон, иногда Варро (*лат.* Marcus Terentius Varro, 116–27 годы до н. э.) — римский ученый-энциклопедист и писатель. По месту рождения его иногда называют Варроном Реатинским, чтобы отличить от Варрона Атацинского. Авторитет Варрона

как ученого и оригинального писателя уже при жизни был неоспорим.

[40] Ботанический сад в Париже.

[41] В оригинале автор предлагал использовать сеть конки.

[42] Андре Мари Тремо – французский математик.

[43] Иордан Неморарий (*лат.* Jordanus Nemorarius или *лат.* Jordanus de Nemore) – математик XIII века. О личности Иордана точных сведений не имеется. Возможно, это был не кто иной, как Иордан Саксонский, генерал монашеского ордена доминиканцев, одно время живший в Париже и умерший в 1237 году.

[44] Джеймс Джозеф Сильвестр (*англ.* James Joseph Sylvester, 3 сентября 1814 года, Лондон – 15 марта, 1897 года, Оксфорд) – английский математик.

[45] Полиньяк Жюль-Огюст-Арман-Мари (граф, позже князь de Polignac, 1780–1847 годы) – французский государственный деятель.

[46] Абу Рейхан Мухаммед ибн Ахмед аль-Бируни (Кят, 4 сентября 973 года – Газни, 9 декабря 1048 года) – великий среднеазиатский ученый из Хорезма, автор многочисленных капитальных трудов по истории, географии, филологии, астрономии, математике, геодезии, минералогии, фармакологии, геологии и др. Впервые на Ср. Востоке высказал мысль о движении Земли вокруг Солнца.

[47] Дени Дидро (*фр.* Denis Diderot, 5 октября 1713 года, Лангр – 31 июля 1784 года, Париж) – французский писатель, философ-просветитель и драматург, основавший «Энциклопедию, или Толковый словарь наук, искусств и ремесел» (1751 год).

[48] Карл Фридрих Гаусс (*нем.* Johann Carl Friedrich Gauß, 30 апреля 1777 года, Брауншвейг – 23 февраля 1855 года, Геттинген) – выдающийся немецкий математик, астроном и физик.

[49] Генрих Христиан Шумахер (3 сентября 1780 года, Бад-Брамштедт – 28 декабря 1850 года, Альтона) – немецкий и датский астроном и геодезист.

[50] Применяя к своему методу теорию вероятностей, Лакьер получил следующий результат. Пусть N будет число решений и ε — вероятность ошибки в одном из них. Тогда вероятность заметить ошибку после сравнения восьми таблиц, сопоставленных из смежных и перевернутых решений таблицы, получится из формулы:

$$P = N\varepsilon 8 /(N - 1)(N - 2)...(T - 7).$$

Но N = 96, так как принято, что одно полуправильное решение даст 8. Затем в опыте, проведенном ребенком, ε = 8/96, следовательно

$$P = 38/967x95x94 ... 89 \text{ или } P < 1/3.000.000.000.$$

[51] Обозначение $a \equiv b$ (Мод. p) показывает, что a и b различаются каким-нибудь множителем p, и читается так: в сравнении с b по модулю p.

[52] Мари Жан Антуан Никола маркиз де Кондорсе (*фр.* Marie Jean Antoine Nicolas de Caritat, marquis de Condorcet, 17 сентября 1743 года — 28 марта 1794 года) — французский писатель, ученый-математик и политический деятель.

[53] Александр Теофил Вандермонд (*фр.* Alexandre-Théophile Vandermonde, 23 февраля 1735 года — 1 января 1796 года) — французский музыкант и математик, член Парижской академии наук. Известен, главным образом, благодаря работам по высшей алгебре, особенно по теории детерминантов. Родился и умер в Париже.

[54] Пауль и Маделина.

[55] Чтобы сохранить полное соответствие с положениями, установленными в аналитической геометрии, следовало бы обозначить клетку 44 через 00 и принять ее за начало координат. Тогда все клетки могли бы быть обозначены цифрами от 0 до 3, а клетки отрицательных координат, сверх того, еще и знаком минус, поставленным над цифрой, означающей отрицательную координату, подобно тому, как это делается в логарифмах для отрицательных характеристик. Отрицатель-

ные координаты можно так же обозначить цифрами, отмеченными указателем, что и принято Рейсом в его мемуарах, цитируемых им ниже. Но это обозначение несколько сбивчиво, поэтому мы сохраняем принятое нами.

[56] Мы полагаем, что этот способ принадлежит доктору Рейсу. Однако следует заметить, что теория невозможности розыгрышей в солитер появилась намного раньше. Так, в первом томе сочинений Ферюсака есть место, где упоминается о другом обозначении ходов солитера. «Если на восьмиугольном солитере в 37 клеток в начале игры оставить незанятой какую-нибудь одну, например 2, 4, 14, 22, 32, то невозможно, чтобы при заключительном ходе на доске получился только один колок».

[57] Это сводится к предположению в некоторых случаях отрицательного числа шариков или мысленному представлению безграничного кубического солитера с заставленными клетками.

[58] Если (x, y) и (x', y') обозначают координаты двух соответственных клеток, то разности x – x' и y – y' представляют собой числа, кратные трем, что арифметически выражается следующим образом:

$$x = x' \text{ (Мод. 3)},$$
$$y = y' \text{ (Мод. 3)}.$$

[59] Если (a, b, c) и (a', b', c') означают числа шариков, лежащих в трех последовательных клетках A, B и C, до или после хода со вставкой или со взяткой в области этих трех шариков, то будем иметь:

$$a = a' + 1 \text{ (Мод. 2)},$$
$$b = b' + 1 \text{ (Мод. 2)},$$
$$c = c' + 1 \text{ (Мод. 2)}.$$

[60] Филипп Рейс (Philipp Reis, 1834–1874 годы) – немецкий физик, уроженец города Гельнгаузена. Получил образование в мужском институте в Фридрихсдорфе и в начале собирался сделаться коммерсантом, но под влиянием профессора Бетгера оставил эту идею и с 1855 года пре-

дался занятиям физикой. В 1858 году Р. поступил учителем во фридрихсдорфский институт, в котором проработал всю свою жизнь. К заслугам Р. относится изобретение телефона (еще весьма несовершенного), сконструированного с учетом тонкостей органа слуха.

[61] Жан Жак Руссо (1712–1778 годы) – французский писатель и философ. Представитель сентиментализма. Своим художественным творчеством способствовал становлению психологизма в европейской литературе 19 века.

[62] Шарль Луи де Монтескье (*фр.* Charles-Louis de Seconda, Baron de La Brude e de Montesquieu, 18 января 1689 года — 10 февраля 1755 года) – французский писатель, правовед и философ, автор романа «Персидские письма», статей из «Энциклопедии, или Толкового словаря наук, искусств и ремесел». Собеседник французского исследователя спорных вопросов международного права Г. Мабли.

[63] Эрхард Вейгель (Erhard Weigel, *лат.* Weigelius, 1625–1699 годы) — немецкий математик, астроном и философ. Его именем назван кратер на карте Луны. Сейчас он известен скорее, как учитель Лейбница: их математико-философские интересы были созвучны.

[64] Мелкиседека Тевено — французский писатель, автор «Искусства плавания» (1699 год).

[65] Исидор Мари Огюст Франсуа Ксавье Конт (*фр.* Isidore Marie Auguste François Xavier Conte; 19 января, 1798 года — 5 сентября 1857 года) — французский философ и социолог. Родоначальник позитивизма. Основоположник социологии как самостоятельной науки. Основные труды: «Курс позитивной философии» (1830–1842 годы) и «Система позитивной политики» (1851–1854 годы).

[66] Адриен Мари Лежандр (*фр.* Adrien-Marie Legendre, 18 сентября 1752 года, Париж — 10 января 1833 года, там же) — французский математик.

[67] «Опыт теории чисел» — фундаментальный труд, итог арифметических достижений XVIII века. Книга выдержала три переиздания еще при жизни Лежандра. В этом труде Лежандр доказал (не вполне строго) квадратичный закон

взаимности, высказанный ранее Эйлером, причем придал ему современную формулировку и предложил «символы Лежандра». Пробелы в доказательстве позже заполнил Гаусс. Изложена полная теория непрерывных дробей и их применений для решения диофантовых уравнений. Во втором издании Лежандр предложил асимптотическую формулу для функции распределения простых чисел. В последнем издании (1830) было также доказательство Великой теоремы Ферма для $n = 5$.

[68] «И цзин», или китайская классическая «Книга перемен» — одна из книг конфуцианского канона. Китайская традиция относит ее создание к глубочайшей древности. Однако основной текст книги сформировался не ранее середины первого тысячелетия до Р. Х.

По философии «Книги перемен» все бытие представляет собой чередование ситуаций, возникающее от взаимодействия двух противоположных взаимодополняющих и переходящих друг в друга сил: ян (света, мужского начала), символизирующегося сплошной чертой, и инь (тьмы, женского начала), символизирующегося прерванной посередине чертой. Каждая ситуация обозначается знаком, именуемым в европейской литературе гексаграммой. Гексаграммы состоят из шести черт. Как нетрудно заметить, всего комбинаций из иньских и янских черт может быть 64, и вместе они описывают все вещи и явления во Вселенной. Подробнее см., например, «Иллюстрированный гадательный “И цзин”». — М., 2009.

[69] Ален Шартье (*фр.* Alain Chartier, ок. 1392 — ок. 1430 годы) — французский поэт, писатель.

[70] «Замысловатые и бесполезные мелочи» (*нем.*).

[71] Доктор Брош — председатель норвежской комиссии на всемирной выставке 1878 года — говорил мне, что у него на родине крестьяне еще и теперь пользуются мeледой для запирания своих сундуков и мешков.

[72] Лодовико Феррари (Луиджи Феррари) — итальянский математик (1522–1565 годы). В возрасте 15 лет стал учеником Кардано, бывшего в то время профессором

математики в Миланском университете. Успехи Ф. в изучении физико-математических наук были так очевидны, что в 18 лет он возглавил кафедру математики в Миланском университете.

[73] Павия (*итал.* Pavia, *лат.* Papia, Ticinum) – город в итальянском регионе Ломбардия. Северная Италия, 35 километров к югу Милана, располагается в нижнем течении реки Тичино, недалеко от ее впадения в По.

[74] Иосиф Юстус (Жозеф Жюст) Скалигер (*фр.* Joseph Juste Scaliger, *лат.* Joseph Justus Scaliger; 1540–1609 годы) – французский гуманист-филолог, историк и воин, итальянец по происхождению, один из основателей современной научной исторической хронологии, издатель и комментатор античных текстов. Сын Юлия Цезаря Скалигера, внук картографа Бенедетто Бордоне.

[75] Жак Огюст де Ту (*фр.* Jacques Auguste de Thou, 1553–1617 годы) – известный французский историк и государственный деятель. Отец де Ту Кристоф де Ту был президентом Парижского парламента, дядя, Николя де Ту, – епископом Шартра.

[76] Новеллизованая биография поколений (*фр.*).

[77] Фирмен Дидо (1764–1836 годы) – сын Франсуа Амбруаза Дидо, издатель, гравер, словолитчик, изобретатель печати со стереотипа.

[78] Викторьен Сарду (*фр.* Victorien Sardou; 5 сентября 1831 года – 8 ноября 1908 года) – французский драматург, царивший на парижской сцене периода Второй империи. Сарду принадлежит 70 пьес, многие из которых были специально написаны для модных актрис Сары Бернар и Виржини Дежазе. Его «комедия нравов» Les Pattes de mouche (1860 год) долгое время считалась образцом безупречно построенной пьесы.

[79] Джон Валлис, точнее – Уоллис (John Wallis; 23 ноября (3 декабря) 1616 года – 28 октября (8 ноября) 1703 года) – английский математик, один из предшественников математического анализа. Валлис – сын священника из Кента. Уже в молодости вызывал восхищение как феноменаль-

ный математик: как-то в уме извлек квадратный корень из 53-значного числа. По окончании Кембриджского университета (1632–1640 годы) стал священником англиканской церкви, получив степень магистра. После женитьбы (1645 год) вынужден был покинуть университет, так как от профессоров в те годы требовался обет безбрачия. В революцию прославился расшифровкой перехваченных писем сторонников короля. Однако он выступил против казни короля Карла I. Репутация выдающегося математика, заслуженная Валлисом к тому времени, привела к тому, что в 1649 году его пригласили в Оксфорд возглавить (после изгнания нескольких роялистов) кафедру геометрии. После реставрации монархии (1660 год) завоевал доверие нового короля, Карла II, который назначил его придворным священником. Валлис участвовал в создании (1660 год) Лондонского Королевского общества британской академии наук, став одним из первых его членов.

[80] Главный инспектор мостов и дорог Колиньон представил на конгрессе французского общества развития науки в Монпелье весьма интересное развитие формулы Валлиса с целью доказать неизмеримость всех степеней отношения окружности к диаметру. К числу предрассудков, разделенных многими, принадлежит и мысль о невозможности найти квадратуру круга. Известно, что числа ϖ и $\varpi2$ несоизмеримы. Но если бы возможно было доказать соизмеримость одного из чисел $\varpi4$, $\varpi8$, $\varpi16$ и так далее, то задача о квадратуре круга была бы решена. Говоря об этом, мы, впрочем, не имеем в виду привлечь кого-либо из наших читателей к такому трудному исследованию, хотя в молодые годы обыкновенно не боятся трудностей. Араго высказал как-то в Академии наук свое наблюдение, что попытки решения квадратуры круга бывают многочисленнее весной, чем в другое время года.

[81] Мы пропускаем подробную лексикологию слова Baguenaudier (дословно — сплетение колец), занимающую у Люка около трех страниц, так как это не представило бы интереса для русского читателя. Что же касается русского

названия «меледа», то оно имеет один и тот же корень со словом «медленный».

[82] Американский журнал (*англ.*).

[83] В журнале «La Nature» («Природа») от 25 сентября 1880 года помещена статья под заглавием «Последнее слово игры в такен», принадлежащая Пиарону де Мондезиру. В ней мы находим способ циклов только в несколько измененной форме. Условившись называть четное число циклов данного перемещения циклами парного порядка, а нечетное — циклами непарного порядка, будем иметь следующую теорему: перемещение принадлежит к первому классу, если число его циклов парного порядка, и ко второму — если оно порядка непарного.

[84] Гараж (*англ.*).

СОДЕРЖАНИЕ

Франсуа Люка

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ РАЗВЛЕЧЕНИЯ

Руководители проекта *И. Петрушкин, А. Тишин*
Технический редактор *А. Лидин*
Корректоры *А. Волкова, А. Сенченко*
Компьютерная верстка *Е. Посадова*
Выпускающий редактор *Е. Русанова*

Подписано в печать 12.03.10 г. Формат 70×90'/$_{32}$.
Бумага офсетная. Гарнитура «Петербург». Печать офсетная.
Усл. печ. л. 9,36. Уч.-изд. л. 9,49. Заказ № 1002450.

Книжный Клуб Книговек.
127206, Москва, Чуксин тупик. д. 9.
www.terra.su

Отпечатано в полном соответствии с качеством
предоставленного электронного оригинал-макета
в ОАО «Ярославский полиграфкомбинат»
150049, Ярославль, ул. Свободы, 97

www.terra.su
ISBN 978-5-4224-0066-9
9 785422 400669
www.soyuzkniga.ru