игры и головоломки

квант

Этот сборник составлен по циклу статей, опубликованных в журнале «КВАНТ», под рубрикой «Игры и головоломки» в конце 1980 г. и 1990г.

Январь 2016 года. **Владимир Федорченко**

Тульская область.

Рэндзю

В. А. САПРОНОВ

В детстве многие из вас, наверное, играли в «крестики-нолики» на доске 3 × 3 (рис. 1): игроки по очереди ставят «крестики» и «нолики» в свободные клетки; выигрывает тот, кто построит ряд (по вертикали, *горизонтали или диагонали*) из трех «крестиков» или, соответственно, «ноликов». Впрочем, те, кто играли в эти простейшие «крестики-нолики», быстро осознавали, что эта игра — ничейная: при правильной *игре обоих игроков* она заканчивается вничью.

	O	
	X	
	X	O

Рис. 1.

Может быть, поэтому среди студентов и старших школьников распространена игра в «крестики-нолики» на «бесконечной» (то есть неограниченной) доске. Легко видеть, что если на такой доске опять считать выигрышем «три в ряд», то начинающий легко выигрывает. Проверьте, что и в игре «четыре в ряд» начинающий довольно легко выигрывает. Обычно играют «пять в ряд». Практика показывает, что и в этом случае начинающий выигрывает (мы не располагаем доказательством указанного утверждения).

С логической точки зрения рэ́ндзю — промежуточный вариант между двумя описанными разновидностями «крестиков-ноликов». Доска — 15 × 15. Начинающий ставит «крестик» в центральную клетку. Затем второй игрок ставит «нолик» в любую из 224 свободных клеток. На третьем ходу первый игрок ставит «крестик» в любую свободную клетку, не находящуюся в центральном квадрате 5 × 5 (это е д и н с т в е н н о е ограничение призвано уравновесить шансы сторон). Потом по очереди игроки ставят «нолики» и «крестики» в любые свободные клетки. Выигрывает тот, кто построит ряд из пяти «крестиков» или, соответственно, «ноликов», причем более длинные ряды — не в счет. Вот и все правила рэндзю.

Остается только добавить, что сами рэндзисты говорят на другом — вполне эквивалентном — языке.

Игра «рэндзю» возникла в Центральной Азии более четырех тысяч лет назад. В нее играли древние римляне и инки доколумбовской Америки. В начале нашей эры рэндзю попало в Японию, где получило наибольшее распространение. В XX веке рэндзю распространилось по всему миру.

Как же играют в рэндзю? Соперники ставят свои шашки в *пункты* пересечения линий квадрата со стороной 14 клеток (рис. 2); на каждой стороне такого квадрата 15 пунктов, всего их 15 × 15. Начинающий («черные») ставит черную шашку в центральный пункт. Затем второй игрок («белые») ставит белую шашку в любой из 224 свободных пунктов. На третьем ходу черные ставят черную шашку в любой свободный пункт, лежащий за пределами центрального квадрата (на рисунках он нарисован синим цветом), содержащего 5 × 5 пунктов (это ограничение*) действует только на третьем ходу!). Потом белые и черные по очереди ставят свои шашки в любые свободные пункты. Выигрывает тот, кто построит ряд (по вертикали, горизонтали или диагонали)

*) Оно было придумано несколько лет назад у нас в стране. Шансы сторон пытаются также уравновесить и другими ограничениями (см., например, «Наука и жизнь», 1980, № 9).

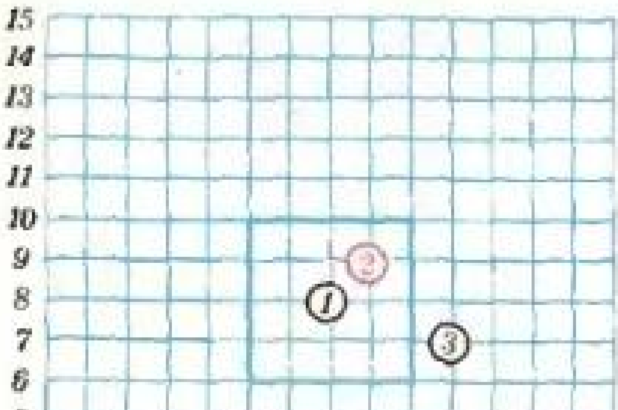


Рис. 2.

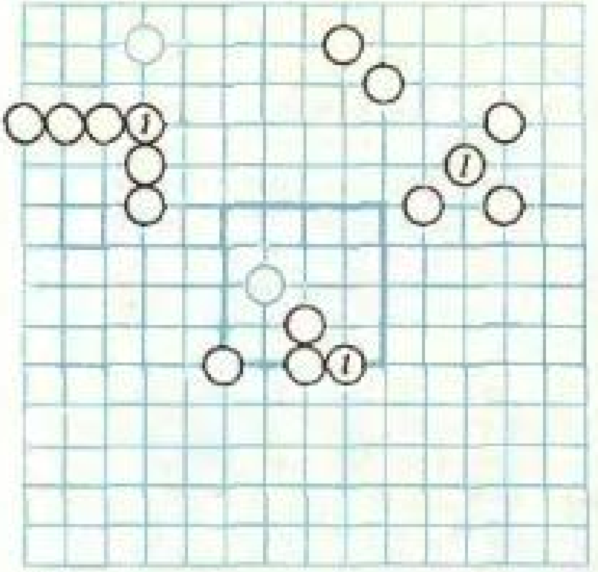


Рис. 3.

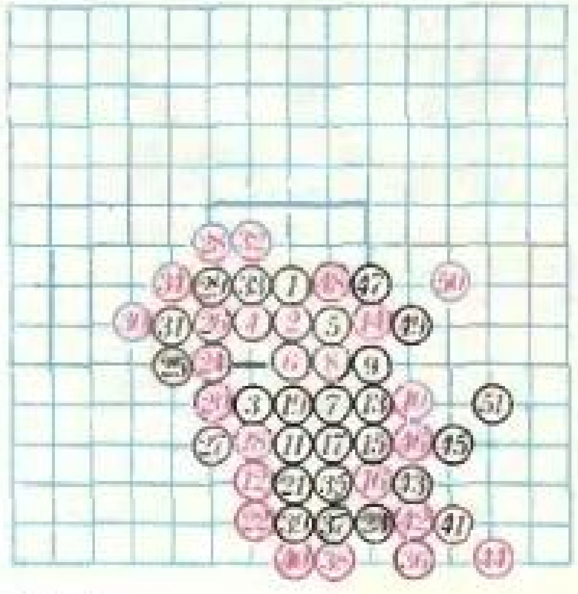


Рис. 4.

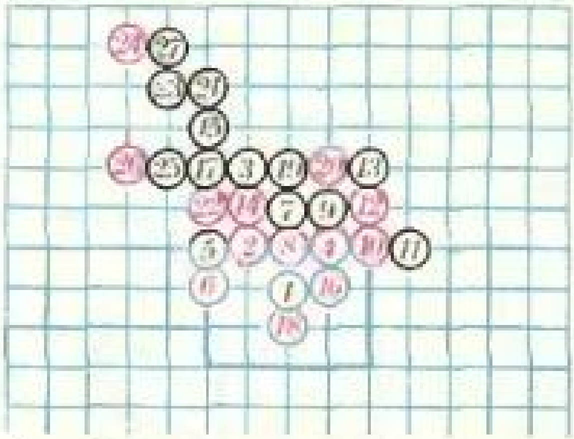


Рис. 5.

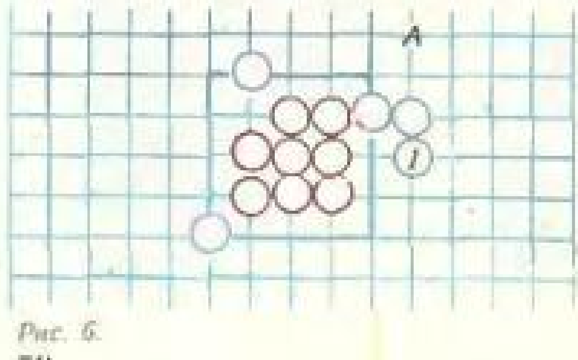


Рис. 6.

из пяти своих шашек, причем более длинные ряды — не в счет.

Вы сели за доску и тут же поняли, как непросто выиграть: соперник перекрывает все ваши попытки достичь заветной пятерки и сам угрожает выигрышем. Как одержать верх?

Начнем с конца. Все атаки, если, конечно, противник не допустил элементарного зевка, завершаются построением какой-нибудь из вилок: 4-4, 4-3 или 3-3 (рис. 3; цифрой 4 обозначены четверки — *шахи*, цифрой 3 — тройки — *полушахи*).

На рисунке 4 показана партия Макаренко — Сапронов из второго чемпионата Москвы (черные шашки здесь и дальше изображаются черными кружочками, белые шашки — красными кружочками; число внутри кружочка — номер хода; советую вам нарисовать доску и «разыграть» на ней эту партию ход за ходом). На 34-м ходу белые поставили полушах, на что черные ответили серией шахов (ходы 35, 37, 39,..., 51), закончившейся вилкой 4-3, после чего белые вынуждены были сдаться.

На рисунке 5 показана партия Янсон — Сундлинг из чемпионата Швеции. На 18-м ходу белые поставили полушах, на что черные ответили серией шахов (ходы 19, 21, ..., ..., 27), закончившейся вилкой 4-3. (На мой взгляд, 5-й ход черных — не из лучших, и белые могли это доказать, сыграв 6-м ходом в пункт 9. Более перспективным был бы для черных 5-й ход в пункт 8; если бы белые 6-м ходом пошли в пункт 7, черные 7-м ходом пошли бы в пункт 6.)

Иногда угроза вилки эффективнее серии «шах, полушах» или «полушах, шах». На рисунке 6 после хода черных в пункт 1 белые беззащитны. Нетрудно проверить, что лобовой ход в пункт *А* и лишь затем ход в пункт 1 лишали бы черных шансов на победу.

На рисунке 7, наоборот, белым следует сыграть «примитивно» в пункт 1, а затем — в пункт 3. Пойди белые сразу в пункт 3, черные без труда защитились бы.

На рисунке 8 черные ходом в пункт 1 создали исходную позицию для последующей атаки серией шахов (такой ход называется *обозначе-*

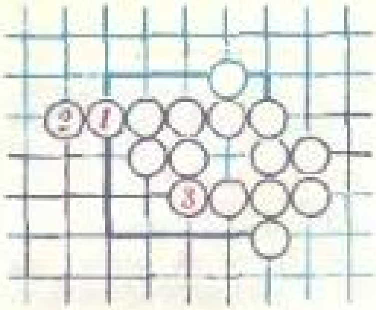


Рис. 7.

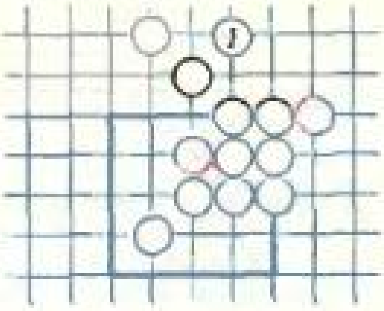


Рис. 8.

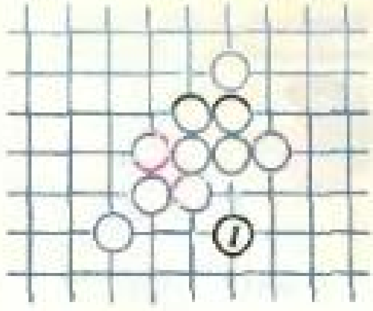


Рис. 9.

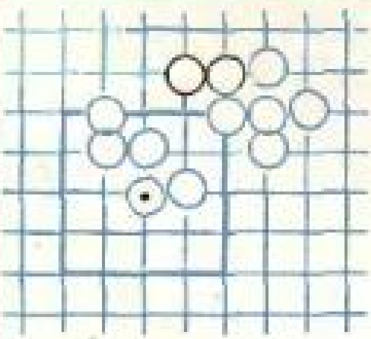
нием) и решили ход борьбы в свою пользу — белым пора сдаваться.

В этюде на рисунке 9 черные выигрывают тихим ходом — *паузой* — в пункт 1.

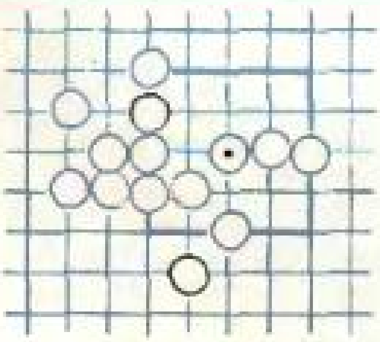
В заключение мы объявляем конкурс задач по рэндзю. Конкурс проводится в два тура. Десять победителей будут награждены призами, занявший первое место будет приглашен для участия во Всесоюзном турнире по рэндзю.

Окончание статьи и задачи второго тура — в № 10.

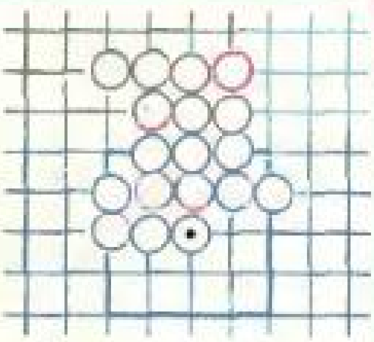
Задачи первого тура



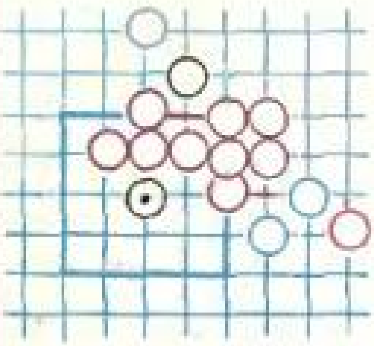
№1



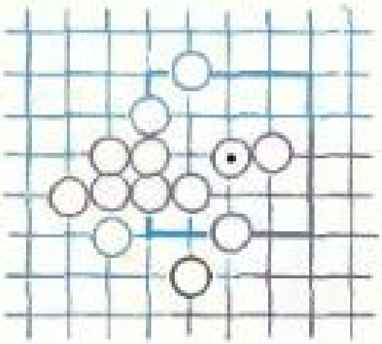
№2



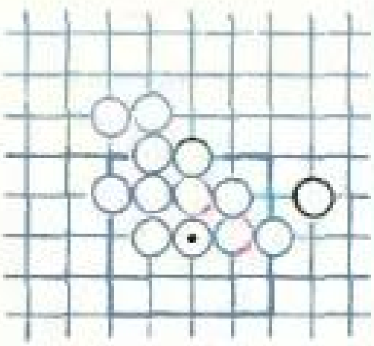
№3



№4



№5



№6

В №№ 1—3 черные начинают и выигрывают.

В №№ 4—6 белые начинают и выигрывают.

Во всех случаях требуется указать кратчайший выигрыш (до построения победной вилки) при оптимальном сопротивлении противоборствующей стороны.

Решения присылаются в виде диаграмм (решения в алгебраической нотации рассматриваться не будут). Шашки исходной позиции не нумеруются. Первый ход предлагаемого решения нумеруется числом 1. Победные серии шахов и побочные варианты допустимо обозначать буквами.

Решения задач первого тура должны быть высланы не позднее 31 октября.

Рэндзю

В. А. САПРОНОВ

Итак, вы усвоили азы атаки. Но не менее важно уметь защищаться. Лишь искусная оборона позволяет белым выстоять в начальный период партии и создать фундамент для перехода в контрнаступление.

В партии на рисунке 1 белые строят защитную *сеть* (треугольники показывают возможное развитие этой сети), так что четверки черных шашек упираются в ее «узлы». Эффективная в некоторых ситуациях, сеть все же не может стать универсальным средством обороны: во-первых, черные постараются занять какой-нибудь из опорных пунктов белых и выйти на оперативный простор; во-вторых, при таком методе защиты можно добиться только ничьей — перейти к контригре трудно.

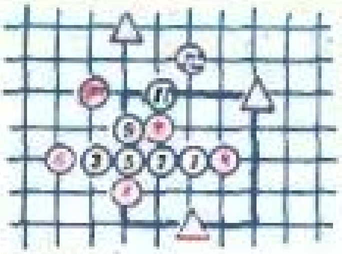


Рис. 1.

Поэтому, если это возможно, защиту следует строить на контрударах. Особенно эффективное средство — контршах. В партии Коцев — Сапронов из первого чемпионата мира по переписке (рис. 2) черные после хода в пункт 1 полагали, что имеют выигрыш в точках *А* и *В*. Однако белые пошли в пункт 2, и черные обнаружили, что атака у них срывается, а удовлетворительной защиты нет.

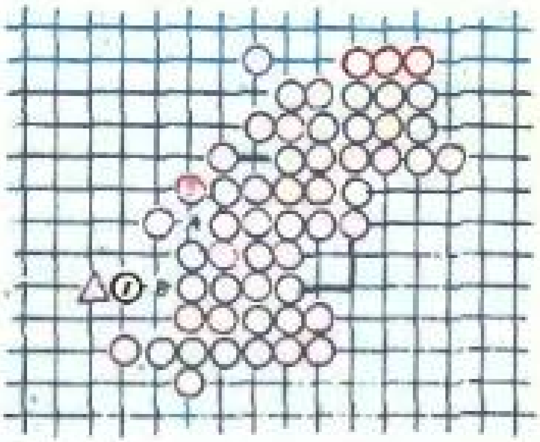


Рис. 2.

В результате швед Янсон и я набрали одинаковое количество очков; по лучшему соотношению ходов в выигранных и проигранных партиях японский судья в октябре 1982 г. объявил меня победителем. (В чемпионате участвовали еще 5 человек — по одному человеку из Болгарии, Дании и Канады и два японца.)

Наверное, вы уже обратили внимание, как дорого обходится ошибка в дебюте, особенно белым. Одна неточность — и партию не спасти.

В рэндзю дебюты классифицируются по трем первым ходам.

На втором ходу у белых, с точностью до симметрии, пять вариантов (рис. 3). Разумеется, они вправе сыграть и подальше от центра, но в таком случае их шашка может оказаться слишком далеко от «театра военных действий».

Рис. 3.

При втором ходе в пункты *А* или *В* черным целесообразно пойти в один из пунктов 1—3, 5—8.

Менее изучены последствия второго хода в пункты *С*, *D*, *Е*. Во всяком случае, черные могут пойти в пункты 1 или 2 и перевести игру в русло тех же дебютов, что и после *А* или *В*. Однако многие игроки отвечают атакой на удаленных от белой шашки пунктах. На рисунке 4 (партия Сапронов — Бирюков) после девятого хода у белых нет защиты.

На рисунке 5 (партия Бирюков — Сапронов) черные опрометчивым третьим ходом передали инициативу белым и их шашка осталась в стороне от «поля боя».

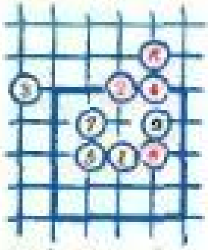


Рис. 4.

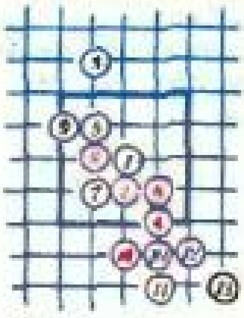


Рис. 5.

На рисунке 6 показаны типичные начала, встречающиеся в партиях рэндзистов. Дальше они распадаются на варианты в зависимости от различных ходов соперников.

Несмотря на древний возраст, рэндзю еще только вступает на путь соперничествования.

Окончание. Начало — в № 8.

Задачи второго тура

В задачах №№ 7—11 черные начинают и выигрывают. В задачах №№ 7—9 достаточно указать первый ход, обоснуйте правильность вашего выбора. В задачах №№ 10, 11 надо указать кратчайший выигрыш (до построения победной пятерки). В задаче № 12 надо указать лучший, по вашему мнению, ход черных и наметить план дальнейшей игры.

Решения высылайте до 31 декабря.

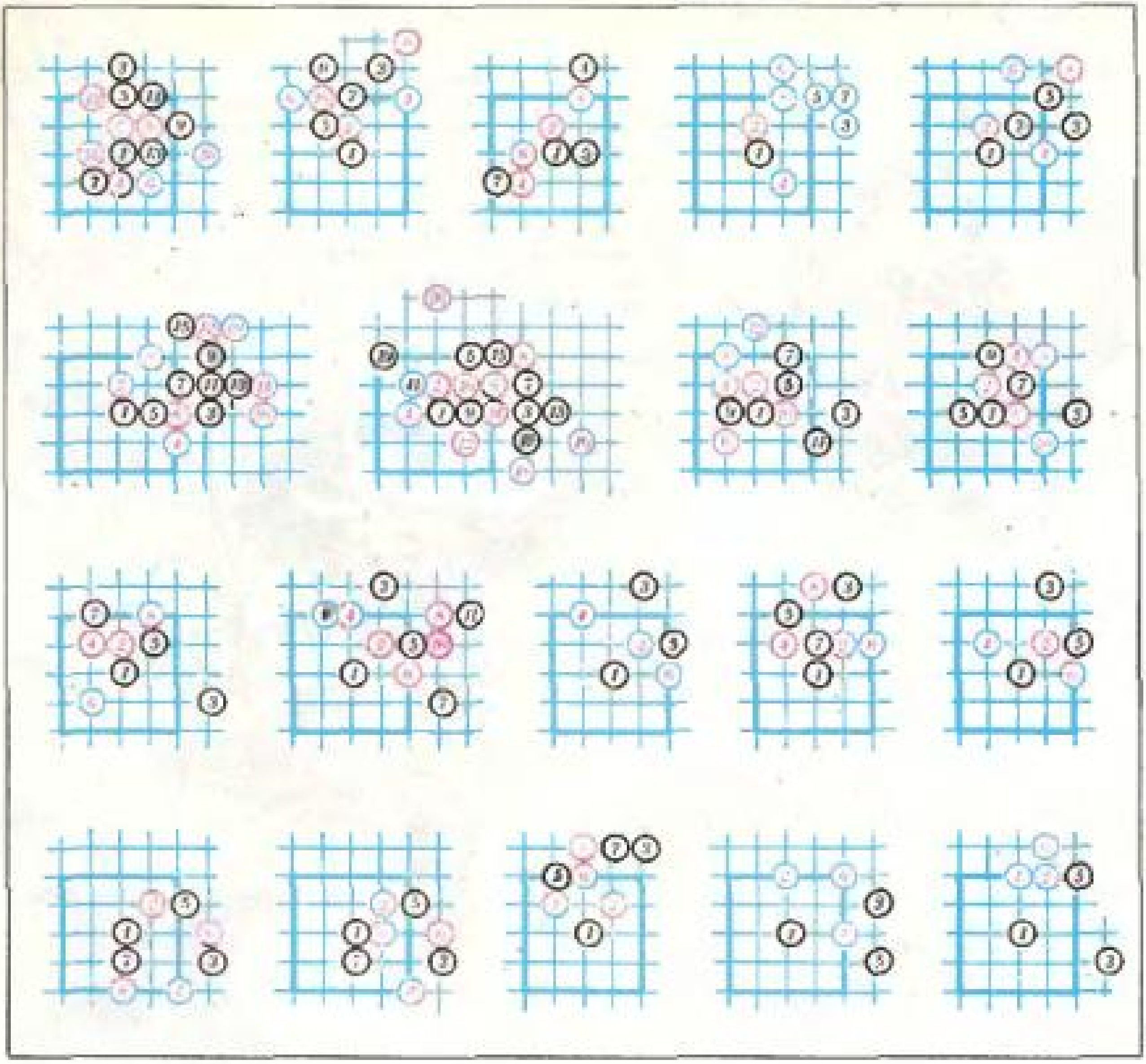
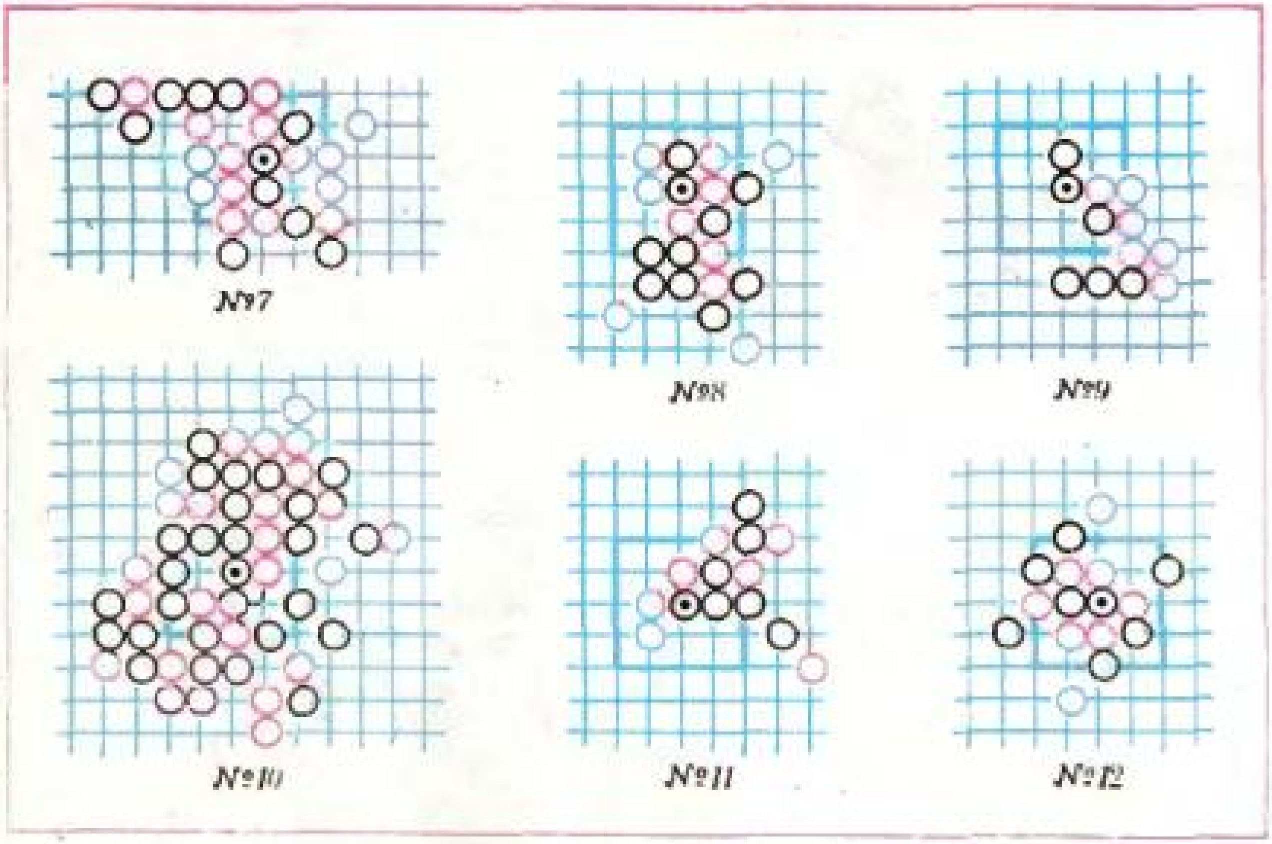
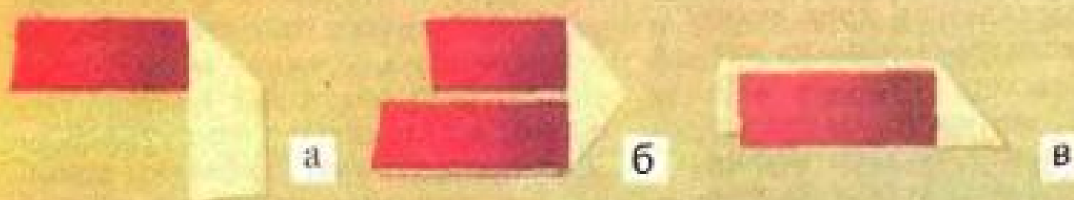


Рис. 6.

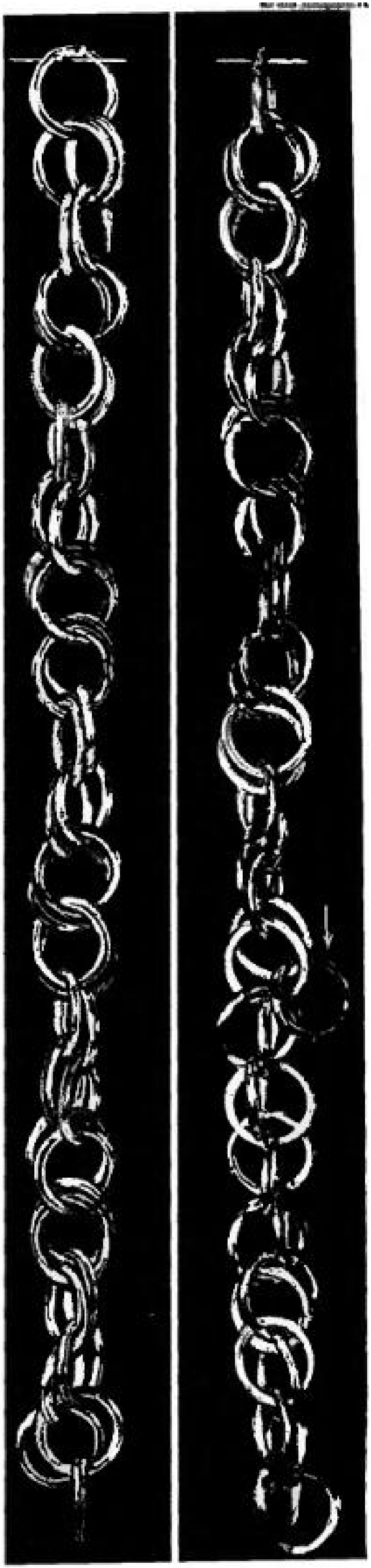


Эта серия рисунков показывает, как можно изготовить красные бумажные звездочки, приведенные на обложке «Кванта» № 5 за этот год. Для этого вам потребуется по четыре бумажные полоски 1×30 см для каждой звездочки и... немного терпения. Полоски желательно взять двухцветные (например, как здесь: красные — с одной стороны, белые — с другой). Сложив каждую из четырех полосок пополам, зацепите их так, как показано на рисунке 1. Затем последовательно заплетите их, следуя рисункам 2—8. Изготовление «белых уголков» (рис. 3) показано отдельно внизу (рисунки а — в). Имейте в виду, что на картинках для экономии места длинные свободные концы полосок, образующиеся на первых шагах, срезаны. Концовка сплетения звездочки довольно хитроумна. Желаем удачи!



Цепочка с бегущим кольцом

Кандидат физико-математических наук
А. В. БЯЛКО



У нашего друга скоро день рождения. Нелегко придумать оригинальный и недорогой подарок. Вот как, затратив всего копеек пятьдесят и полчаса времени, можно сделать вещицу, которая, несомненно, доставит удовольствие любознательному человеку и будет, на наш взгляд, замечательным подарком.

На фотографии слева — цепочка. Двойное переплетение блестящих колец создает красивую спираль. Но это не просто декоративная игрушка, у этой цепочки есть свой секрет, свое особое свойство. Внимание, фокус!

Вы держите цепочку за верхнее кольцо, перехватываете другой рукой соседнее, а верхнее кольцо отпускаете, как бы даже бросаете его вниз. И вдруг кольцо... начинает сбегать вниз. Проскальзывая по другим кольцам, оно вьется вдоль всей цепочки и, достигнув нижнего положения, останавливается. А в руках у вас точно такая же цепочка, какой она была до этого.

Ваш друг, заинтересовавшись, берет цепочку, и после нескольких неудачных попыток — не каждое из верхних колец имеет свойство проскальзывать вниз — и у него получается тот же фокус: секунда — и кольцо, просверкав, оказывается внизу. Однако как это произошло, остается загадкой — глаз не успевает проследить за перемещением кольца.

Изрядно помучившись с цепочкой, ваш приятель догадается, что сбегание кольца — это иллюзия. Все кольца продеты друг в друга, и поэтому каждое кольцо не может переместиться относительно своих соседей дальше чем на диаметр. Кажущееся сбегание кольца по цепочке на самом деле — такие (на диаметр) последовательные перемещения отдельных колец. Выше того кольца, которое в данный момент находится в движении, и ниже него цепочка неподвижна — вот и создается впечатление, что по цепочке перемещается отдельное кольцо, как бы бежит уединенная волна. Как же это происходит?

Рассмотрим внимательно соединения колец. Оказывается, наша цепочка — это две обычные одинарные цепочки, сплетенные боками — фото 1. Будем называть ветвями эти две вертикальные последовательности колец. Расположение колец на фото 1 неустойчиво — именно поэтому цепочку приходится фиксировать и сверху, и снизу. Устойчивым оно становится, когда одна из ветвей находится на одно кольцо выше другой.

Очевидно, что таких устойчивых положений у цепочки два: верхней может быть как одна, так и другая ветвь цепи. Кажущееся сбегание кольца происходит, когда вы переводите цепочку из одного положения в другое. Одинарные ветви при этом должны «поменяться местами» — верхняя ветвь станет нижней и наоборот. Это, однако, не происходит одновременно вдоль всей цепочки. Если вы взялись за верхнее кольцо той ветви, которая пока находится в нижнем положении, и отпустили кольцо другой ветви, то нижняя часть цепочки еще «не знает» о том, что наверху произошел «дворцовый переворот». Ведь положение каждого кольца цепочки определяется его соседями, и кольцо может занять правильную позицию только после того, как все расположенные над ним кольца уже находятся в новом состоянии.

Посмотрите на правую цепочку на заставке. На ней зафиксирован момент, когда правильную позицию занимает колечко, находящееся посередине цепочки (на него указывает стрелка). Когда оно займет новое положение, то «освободится» кольцо, расположенное под ним. Оно тоже под действием силы тяжести повернется и упадет вниз. И так далее. Это бегущее вниз воз-

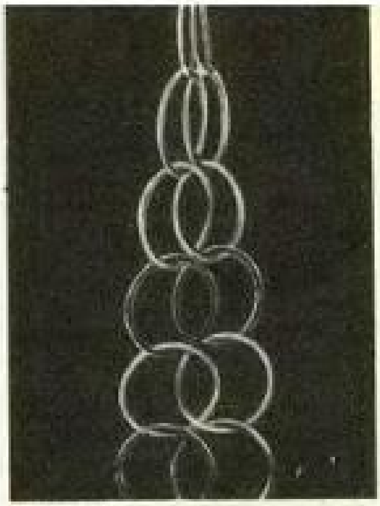


Фото 1.

мущение, подробности которого трудно уловить глазом, и создает иллюзию скольжения вдоль цепочки одного кольца.

Чем больше размер колец, тем с большей скоростью бежит по цепочке волна. Однако время, за которое каждое колечко переходит в новое правильное положение, тоже больше для крупных колец. Поэтому уследить за перемещением каждого колечка в цепочке, собранной из мелких колец, труднее — тем эффектнее и иллюзия фокуса. Напротив, для объяснения фокуса удобнее крупная цепочка.

А теперь научимся плести цепочку. Материалом для ее изготовления могут быть любые кольца: несколько их видов продается в галантерейных магазинах. Как правило, на них имеется разрез, по которому кольца нетрудно разогнуть и согнуть снова.

Можно скрупулезно скопировать соединение колец с любой из фотографий. Такой способ, однако, займет уйму времени и вызовет растущее чувство досады при почти неизбежных ошибках сборки. Но есть способ плетения цепи настолько простой и надежный, что при некоторой тренировке можно научиться собирать эту цепочку с завязанными глазами. Его мы и опишем.

Первая операция — изготовление соединения из пяти колец, изображенного на фото 2. Рисунок рядом с фотографией поясняет сборку этого звена.

Теперь нужно подвесить эти пять колец за одно из двух колец второго сверху яруса (за одно из двух красных колец на рисунке). При этом все звено окажется в таком положении, как на фото 3. В нижнем ярусе теперь два кольца.

В них нужно продеть новое разомкнутое кольцо, а в его разъем добавить еще одно неразомкнутое кольцо (эта операция изображена на рисунке рядом с фото 3 штриховыми линиями). То, что получится, показано на фото 4. Разъем соединяется — фото 5.

Внизу получившейся у нас цепочки два яруса из одиночных колец. Поменяем теперь положения ее одинарных ветвей. Для этого нужно подвесить цепочку за одно из двух колец второго сверху яруса. При этом по цепочке «пробежит» одно кольцо. В результате получится то, что показано на фото 6. Теперь внизу оказался ярус из двух колец. С ним следует повторить основную операцию сборки: снова продеть через них разомкнутое кольцо, на него надеть неразомкнутое, соединить разъем. Получится такая же цепочка, как на фото 5, но на один ярус длиннее. У этой цепочки поменяем положения одинарных ветвей, повторим основную операцию сборки — цепочка удлинится еще на один ярус. И так далее.

Таким образом собирается цепочка любой длины. Когда вы решите ее закончить, в последнее разомкнутое кольцо нового неразомкнутого уже не добавляйте.

Напоследок несколько советов. Не делайте очень длинных цепочек. При числе звеньев больше тридцати силы трения, пропорциональные весу цепочки и ее длине, становятся велики настолько, что препятствуют движению колец, и уединенная волна может застрять посреди цепочки. Для большей эффектности фокуса можно собрать цепочку из колец разного цвета в примерно равных количествах и в кажущемся беспорядке. Но наверху и внизу цепочки при этом поставить кольца таким образом, чтобы «сброс» кольца сверху приводил к появлению внизу кольца того же цвета. Это усилит впечатление проскальзывания кольца вдоль цепочки.

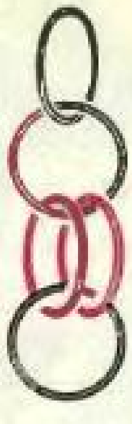
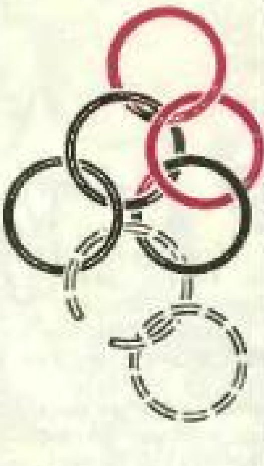


Фото 2.



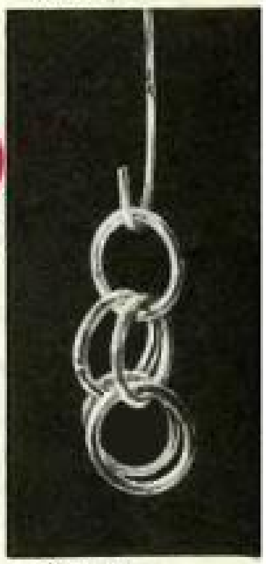


Фото 3.

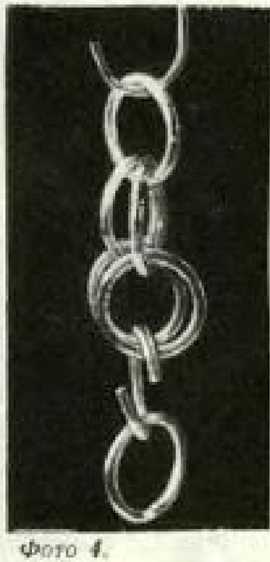
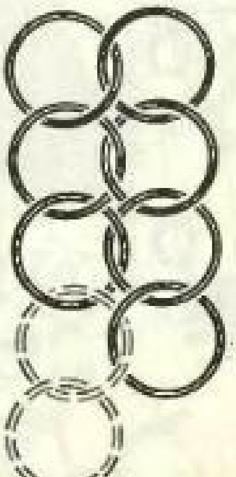
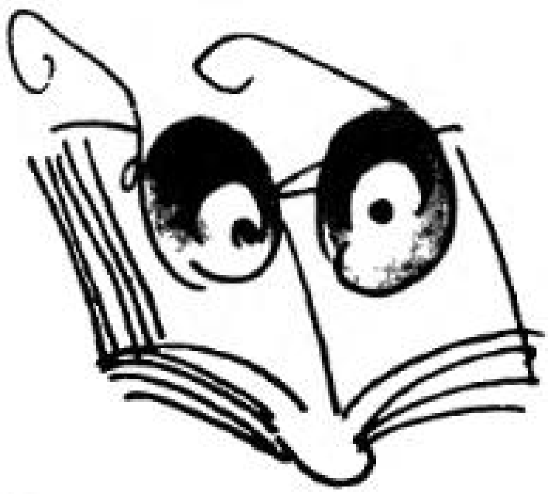


Фото 4.

Фото 5.

Фото 6.





Стереоскопические чертежи

А. И. КЛИМАНОВ

Многим школьникам плохо дается стереометрия. Это не мудрено — не так легко по *плоскому* чертежу увидеть форму *пространственного* тела. Для этого нужно иметь пространственное воображение — умение мысленно «вытолкнуть» плоский чертеж в пространство, наделить нарисованные на плоской бумаге линии объемным содержанием. Такое объемное видение плоского чертежа требует особой сноровки.

Другое дело — *стереоскопический чертеж*. На нем любой человек с нормальным зрением видит без напряжения изображаемый предмет в трех измерениях. При этом возникает *стереоэффект*: линии как бы поднимаются над листом бумаги, кажется, что смотришь не на рисунок, а на объемную модель.

Существуют разные виды стереоскопических изображений: зеркальный, линзовый, растровый и др. Мы остановимся лишь на *анаглифическом стереоизображении* — это чертеж, состоящий из двух «полукартин», исполненных взаимно-дополнительными красками, который потом рассматривается через очки-светофильтры.

Почему возникает стереоэффект?

Когда мы смотрим на какой-нибудь объемный предмет — скажем, спичечный коробок, лежащий перед нами на столе, — на сетчатке каждого глаза регистрируется плоское изображение этого предмета. В первом приближении можно считать, что происходит *центральное проецирование* коробка на плоскость сетчатки *). Но левый и правый глаз находятся на некотором расстоянии друг от друга. Стало быть, проецирование производится из двух разных центров — поэтому плоские изображения коробка *различны*, каждый глаз видит коробок в своем ракурсе. Информация с сетчатки каждого глаза передается в кору головного мозга, где она удивительно обрабатывается: мозг как бы совмещает правый и левый ракурс коробка, но что-то от каждого ракурса остается — возникает «ощущение объемности» *).

Стереоскопическое изображение искусственно создает такое же ощущение объемности, за счет тщательно продуманного «обмана мозга». С этой целью в левый глаз засылается изображение «левого ракурса» объемного предмета, в правый глаз — «правого ракурса», мозг «по привычке» совмещает эти изображения, возникает *иллюзия объемности* — стереоэффект.

Различные виды стереоизображений различаются способом засылки разных изображений в правый и левый глаз. При методе цветных стереопар, о котором здесь речь, засылка производится очень просто: на одном листе бумаги выполняются два чертежа (*полукартины*) красным и синим цветом, а цветные светофильтры очков пропускают в каждый глаз именно нужную ему полукартину.

Прежде чем заняться рисованием стереоскопических чертежей, давайте посмотрим на ту стереокартинку, которая имеется в этом номере журнала. Для этого сначала

Сделаем очки

Здесь самое сложное — раздобыть подходящие цветные пленки (нужна красная и синяя). В идеале красная пленка должна полностью поглощать красный цвет на рисунке и контрастно выделить на нем синий цвет, а синяя пленка — наоборот.

При отсутствии цветной пленки можно использовать фильтры, предназначенные для фотографических объективов, или изготовить их на ацетатной основе из обычной фотопленки. Для этого эмульсионный слой пленки смывают горячей водой, ацетатную основу просушивают, затем погружают ее в раствор красителей, растворимых в уксусе или спирте. Наиболее высококачественные цветные фильтры изготовляются на желатиновой основе (подробнее описание этого способа имеется в книге С. С. Гуревича *Объемные печатные иллюстрации*, М.: Искусство, 1959).

При наличии пленки очки делаются очень просто. Из плотной бумаги или тонкого картона по размерам, указанным на рисунке 1, вырезаем две сторонки, заднюю и переднюю, промазываем их клеем, после чего на прорези передней сторонки накладываем цветные пленки (красная слева), затем обе половины совмещаем и склеиваем. Очки готовы, давайте

Посмотрим на стереокартину

В этом номере «Кванта» на 4-й странице обложки — стереочертеж. Начнем разглядывать его через сделанные нами очки. Стереоскопический эффект появляется не сразу, он возникает спустя некоторое время после начала рассматривания. При этом нужно найти оптимальное расстояние и угол зрения, при котором получается наибольший стереоэффект. Чер-

---

*) О центральном проецировании можно прочитать на «геометрической страничке» в «Кванте», 1984, № 3.

*) Чтобы прочувствовать этот механизм, проделайте такой эксперимент: поднесите спичечный коробок поближе к лицу и посмотрите на него несколько раз каждым глазом поочередно, а затем обоими глазами сразу.

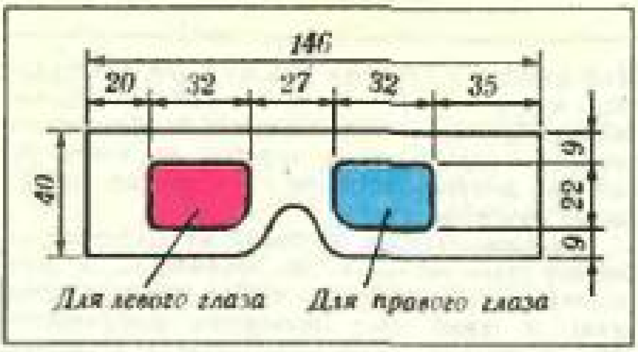


Рис. 1.

теж должен быть освещен ровным, мягким, рассеянным светом.

При рассматривании стереопары через двуцветные очки вместе с основным изображением иногда появляются добавочные бледные линии или контуры полукартин. В этом случае надо ослабить освещенность стереочертежа или сгустить плотность окраски светофильтров. Часто бывает достаточно увеличить плотность одного синего светофильтра. Если же изображение при рассматривании получается недостаточно ясным, четким, следует усилить освещение.

Приведенный здесь чертеж получен путем проецирования на горизонтальную плоскость. Поэтому его надо рассматривать, расположив горизонтально.

* * *

Для изготовления стереочертежей мы будем пользоваться специальным приспособлением, называемым *шаблоном-трафаретом*. Это приспособление многократного использования нужно изготовить заранее. Для этого, в свою очередь, нужно построить так называемый *перспективный масштаб*. С него мы и начнем.

Построение перспективного масштаба

Перспективный масштаб устанавливает соотношения между натуральными и перспективными линейными размерами изображаемого предмета в центральном проецировании на плоскость.

Построение перспективного масштаба высот показано на рисунке 2, где обозначены:

точка S — *центр проецирования*, отстоящий от своей горизонтальной проекции S_1 на высоту h=300 мм;

a — расстояние (160 мм) между горизонтальной проекцией S_1 до основания натурального масштаба O_1;

O_1N — *натуральный масштаб* высот (150 мм), разделенный на равные масштабные отрезки;

O_1N_S — *перспективный масштаб*, в котором масштабные отрезки имеют разные длины (по мере удаления от точки O_1 они увеличиваются).

D_k — *длина* произвольного перспективного масштабного отрезка. Все линейные элементы изображаемого предмета измеряются в единицах натурального масштаба.

Перспективный масштаб определяется построением или вычисляется по формуле $x_k=aK/(h-K)$. В последнем случае длины отдельных отрезков перспективного масштаба считаются от нулевой отметки O_1.

С целью упрощения построения перспективного масштаба дана таблица с вычисленными величинами отрезков перспективного масштаба для значений K от 5 до 150 мм. В случае необходимости промежуточные величины находятся вышеуказанными способами (по формуле или построением).

Таблица данных для построения перспективного масштаба.

K	x_K	K	x_K	K	x_K	K	x_K	K	x_K
5	2,71	35	21,13	65	4,25	95	74,15	125	114,28
10	5,52	40	24,61	70	48,70	100	80,00	130	122,35
15	8,42	45	28,23	75	53,33	105	86,15	135	130,91
20	11,43	50	32,00	80	58,18	110	92,64	140	140,00
25	14,54	55	35,92	85	63,25	115	99,46	145	149,68
30	17,78	60	40,00	90	68,57	120	106,67	150	160,00

Изготовим шаблон-трафарет

Шаблон-трафарет (рис. 3) служит основой способа построения двойной центральной проекции (двух полукартин) на горизонтальной плоскости. (Способ разработан Б. А. Аничкиным.)

На шаблон-трафарет размером 430×350 мм наносятся:

две горизонтальные проекции L_1 и R_1 *центров проецирования* L и R, (расстояние между центрами проецирования L и R называется *стереобазисом*; *нормальным* стереобазисом считается среднее расстояние между центрами зрачков человека, равное 65 мм;

два перспективных масштаба (левый и правый); о том, как их получить, сказано выше;

габаритный прямоугольник E (148×210 мм), на котором закрепляются сменные листы для построения эскизов стереоскопических чертежей;

кресты-метки на габаритном прямоугольнике, служащие для совмещения обеих полукартин с такими же метками на стереоскопическом чертеже;

ось симметрии построения, проходящая через центр горизонтальной проекции S_1 стереобазиса S (выполнена штрихпунктирной линией).

Как пользоваться шаблоном-трафаретом

Изображаемый объект мы считаем расположенным на габаритном прямоугольнике в его центре, так чтобы боковые проекции объекта находились на равных расстояниях от оси построения, а его ближайшая к нам граница от-

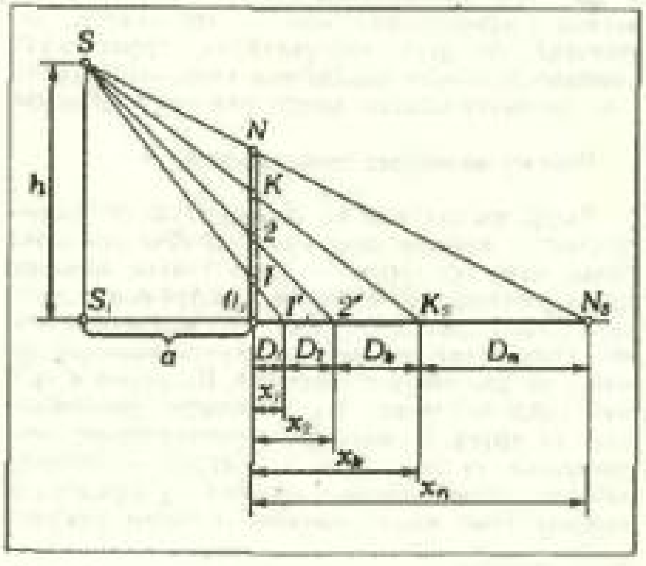


Рис. 2.

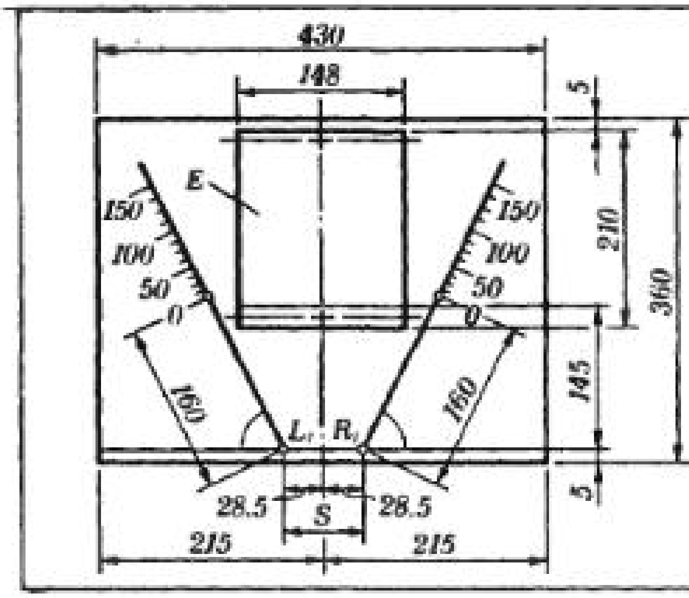


Рис. 3.

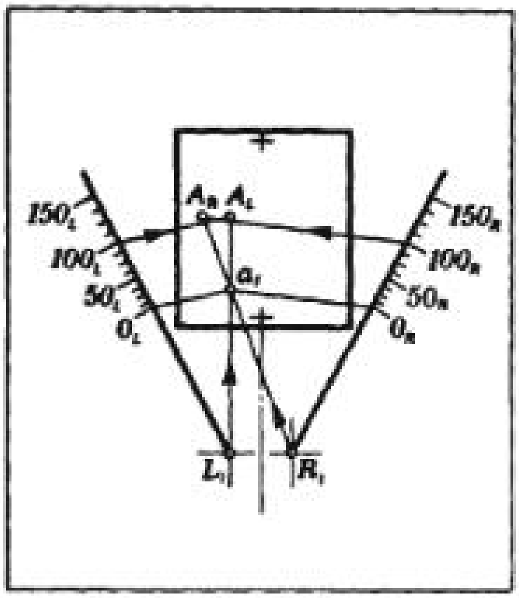


Рис. 4.

стояла не менее чем на 145 мм от горизонтальной проекции L_1 и R_1.

Рассмотрим пример построения центральной проекции точки A. Точка A, заданная своей горизонтальной проекцией a_1, отстоит от предметной плоскости на высоте $h=100$ мм (рис. 4).

Для определения центральной проекции точки A выполняют следующие построения: через точку L_1 проводят проекцию проецирующего луча LA через точку a_1, продолжая его вверх за точку a_1; нулевую отметку левого перспективного масштаба O_L соединяют с точкой a_1 отрезком прямой O_La_1; из отметки 100_L (левого перспективного масштаба) соответствующей заданной высоте изображаемой точки A над предметной плоскостью проводят прямую параллельно отрезку O_La_1 до пересечения с проекцией проецирующего луча LA.

Полученная при пересечении точка A_L является центральной проекцией точки A для левого центра проецирования. Аналогичные построения для этой же точки A выполняются для правого центра проецирования, в результате чего определяется положение точки A_R — центральной проекции точки A для правого центра проецирования.

Дальнейшее построение стереопар сводится к нахождению всех характерных точек изображаемого объекта и соединению их между собой линиями.

Для каждого центра проецирования строится отдельная полукартина. В простейших случаях изображение обеих полукартин может вычерчиваться на одном сменном листе.

На практике обычно используется стереобазис b меньше нормального ($b<65$ мм). При этом нет необходимости делать новый шаблон-трафарет. Просто на изготовленном шаблоне отмечают две точки L_1' и R_1' на отрезке L_1R_1 симметрично относительно его центра, так чтобы $|L_1'R_1'|=b$. Далее все построения выполняют точно так же, только с заменой L_1 на L_1' и R_1 на R_1'.

Изготовление стереоскопических чертежей

Оно состоит из двух этапов: построения эскизов в карандаше и изготовления стереопары в цвете.

До составления эскиза определяются: положение изображаемого предмета относительно центров проецирования и горизонтальной плоскости проекции (плоскости шаблона); высота всех характерных точек предмета, находящихся над горизонтальной плоскостью; рабочая величина стереобазиса ($b\leqslant 65$ мм).

Определение стереобазиса — дело тонкое, выбор его оптимального размера достигается методом проб и ошибок: помогает, конечно, опыт.

От стереобазиса зависит смещение одноименных точек стереопары; мы советуем выбирать его величину так, чтобы максимальное смещение (достигаемое на наиболее высоких точках) было не более 12 мм.

Для чертежа на 4-й странице обложки мы использовали стереобазис 40 мм.

Составление эскиза начинают с нахождения горизонтальной проекции изображаемого предмета. В данном случае, когда предмет располагается на той же горизонтальной плоскости, на которой строится его проекция, все горизонтальные элементы изображаемого предмета проецируются в натуральном виде без искажения, независимо от места расположения центров проецирования. Далее, пользуясь шаблоном-трафаретом, строят обе центральные проекции A_L и A_R, каждой характерной точки A предмета, как указано в предыдущем разделе, и они соединяются линиями.

Если необходимо дополнить стереочертеж буквенными или цифровыми обозначениями, нужно нанести их на обе полукартины. Каждая пара букв, обозначающих одноименные точки изображаемого предмета, располагается на одной горизонтальной прямой, расстояние между ними равняется расстоянию между одноименными точками изображения этого уровня, все вертикальные элементы букв (если начертание шрифта прямое) должны быть направлены по линиям проецирующих лучей к соответствующим центрам проецирования.

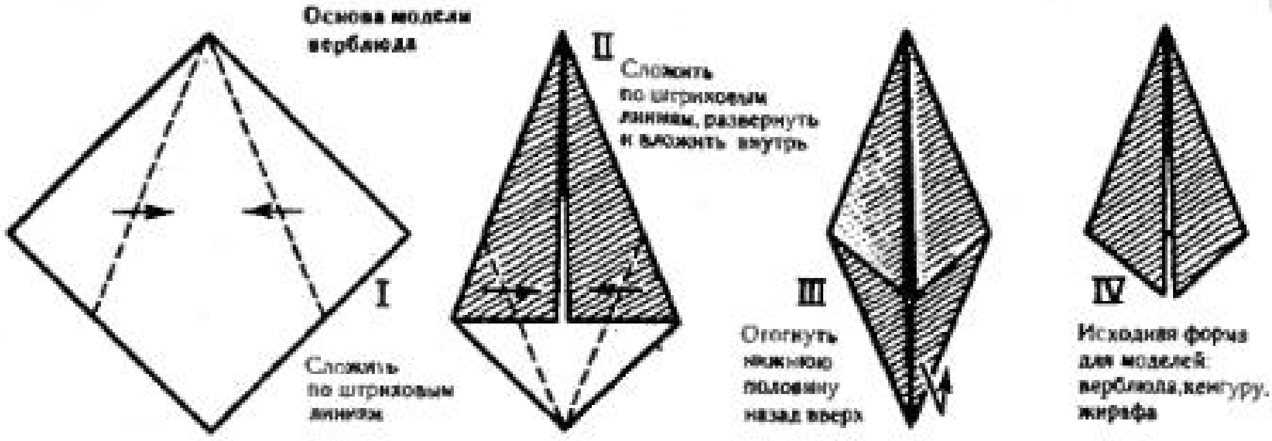
Изготовление стереопар в цвете заключается в следующем: белую бумагу окрашивают в желто-охристый цвет (для уменьшения контраста между цветами изображения и белым фоном), покрывая ее крепким настоем чая или водным раствором марганцовки. На эту бумагу переводится на просвет изображение обеих полукартин. На один и тот же лист цветными карандашами или краской, заправленной в рейсфедер, красным цветом копируется изображение, полученное из правого центра проецирования, синим цветом — изображение левой полукартины. В итоге получают цветной стереочертеж.

С готового цветного оригинала, не прибегая к помощи эскизов, можно сделать дубликат. Для этого кроющими красками, гуашью или темперой, в той же последовательности переносят на кальку изображения стереопар. Готовая копия просто накладывается на цветную бумагу подходящего тона и с помощью светофильтров проверяется качество стереоскопического изображения.

Для достижения наибольшего стереоскопического эффекта нужно правильно подобрать цвета красок и светофильтров. Практически это делается так: на белую бумагу наносят ряд цветных линий, затем их рассматривают через светофильтры,— правильно найденный цвет должен, как мы уже говорили, полностью поглощаться фильтром аналогичной окраски и контрастно выделяться фильтром противоположного цвета.

На черном же фоне — наоборот, красный светофильтр выявляет красное изображение, синий — синее, поэтому на обложке цвета полукартин — противоположные (правая — синяя, левая — красная).

Следует учесть, что фон и краски взаимовлияют друг на друга. Поэтому найденные цвета рекомендуется проверять еще раз на фоне будущего чертежа.



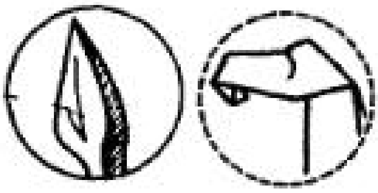
Оригами

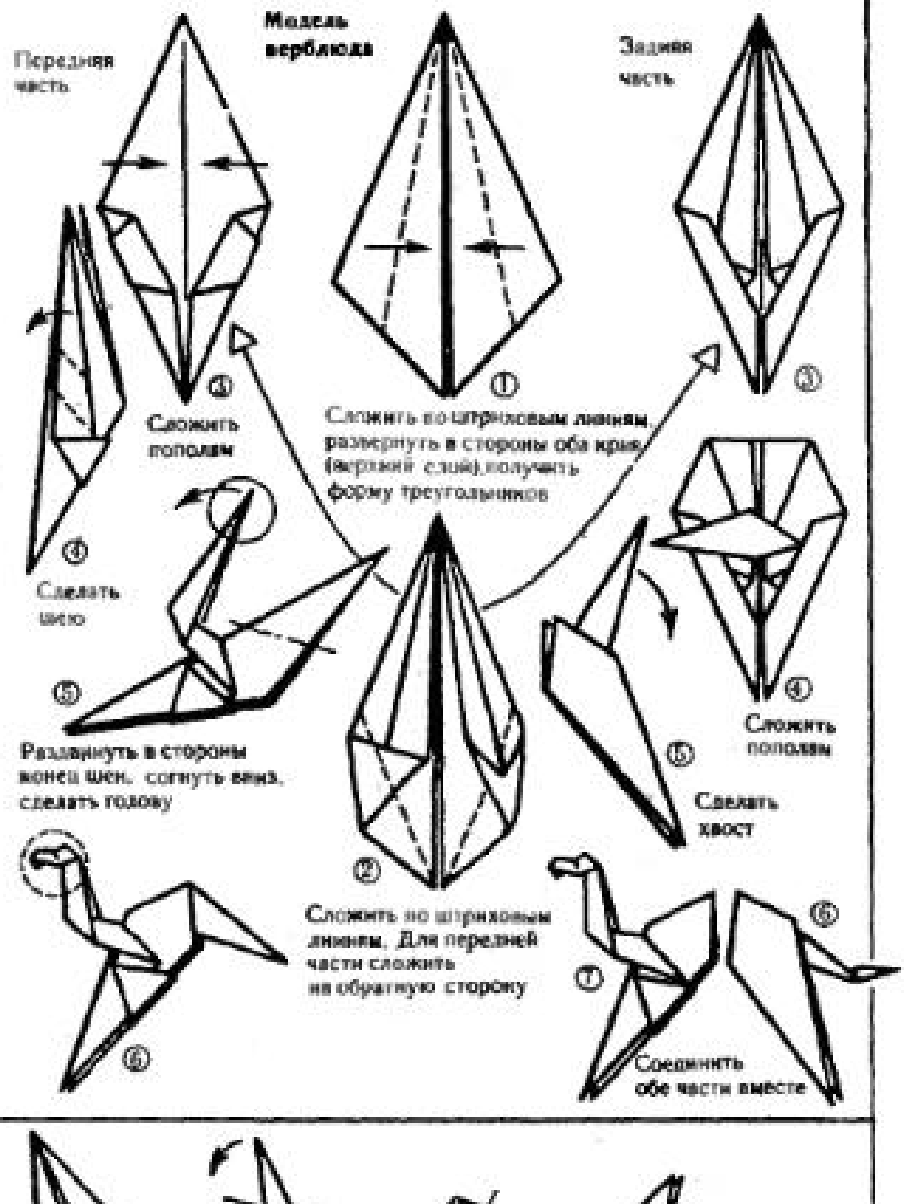
(складывание фигурок из бумаги)

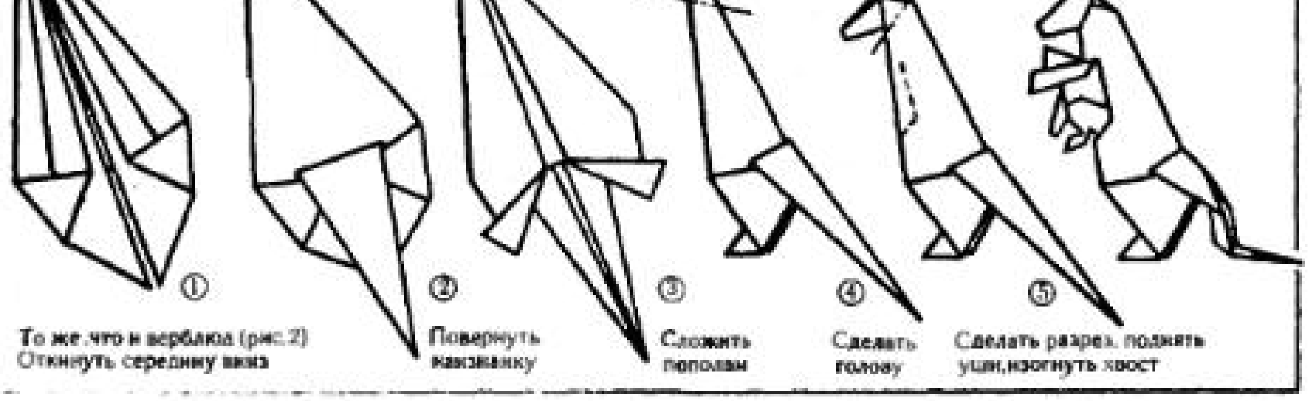
А. И. КЛИМАНОВ

Складывание фигур животных и птиц из бумаги — древнее искусство, наиболее популярное, пожалуй, в Японии, где оно называется «оригами». Все фигуры складываются из цельных прямоугольных листов бумаги (одного или двух), без помощи ножниц или клея (клей применяют разве что для скрепления «половинок» фигур, составленных из двух листов). Порядок изготовления фигурок показан на чертежах-схемах.

Начальная стадия работы над фигурами показана на чертежах, обозначенных римскими цифрами. Руководствуясь приведенными чертежами, сделайте модели животных и птиц, затем попытайтесь сложить (без чертежа) фигурку жирафа (см. фото на 4-ой с. обложки). Модели жирафа и верблюда делаются из двух одинаковых по размеру заготовок. Овладев «секретами» моделирования, вы научитесь составлять и свои композиции.

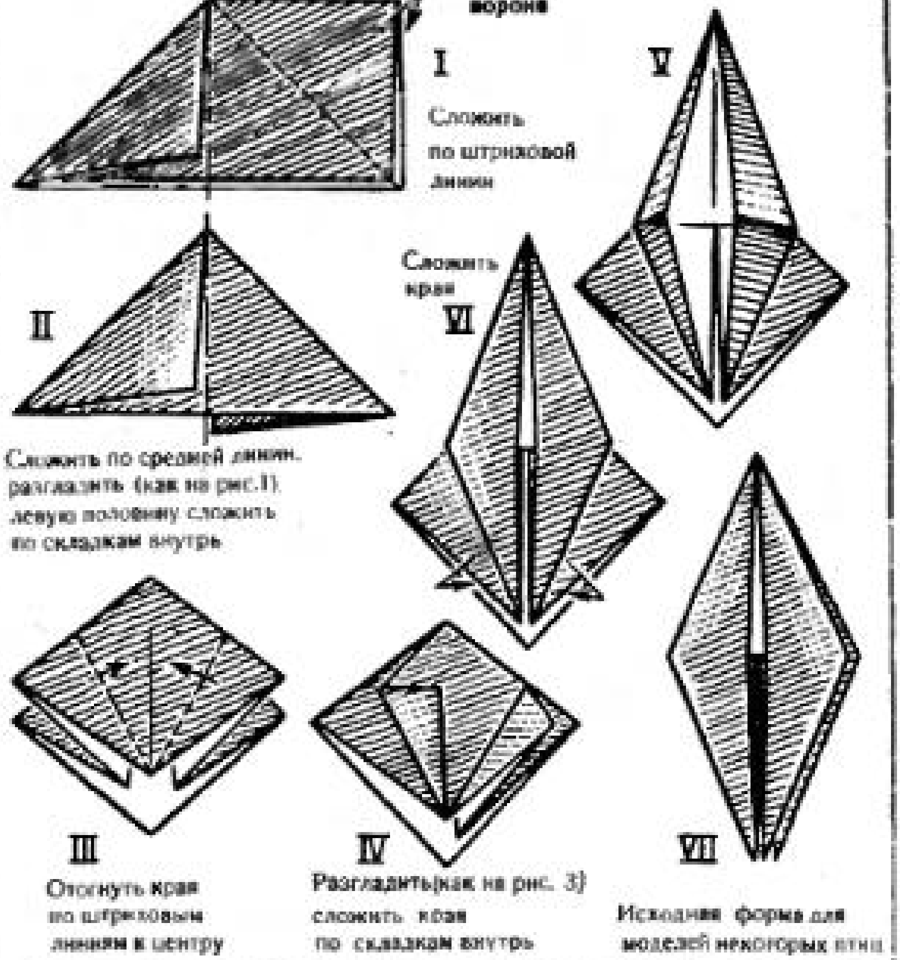




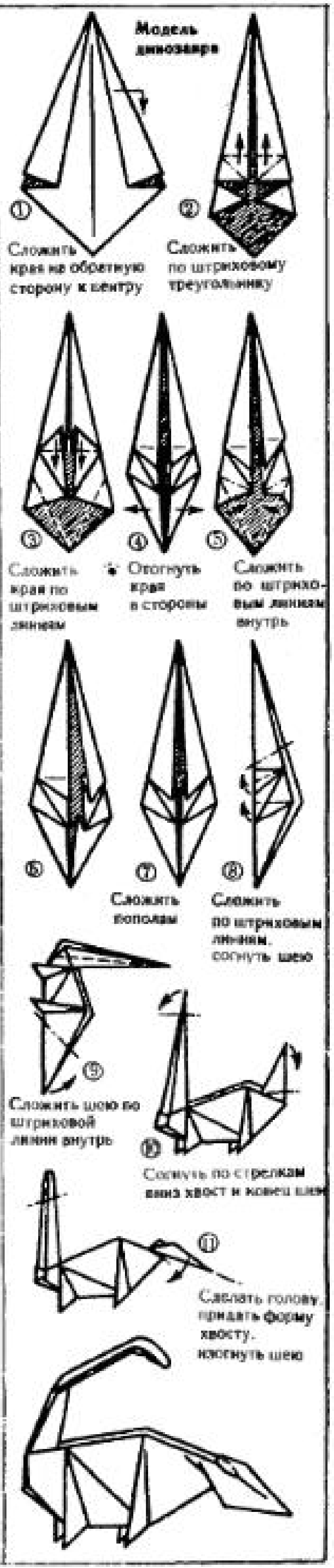


На этой фотографии представлены фигурки животных и птиц, сложенные из бумаги. При их изготовлении заготовка — прямоугольный лист бумаги — только складывается, но не разрезается и не склеивается. (Клей используется только для скрепления двух частей фигур, составленных из двух листов бумаги.) Желающие ознакомиться и приобщиться к этому увлекательному геометрическому искусству — «оригами», как называют его в Японии — могут прочитать заметку А. И. Климанова внутри номера.

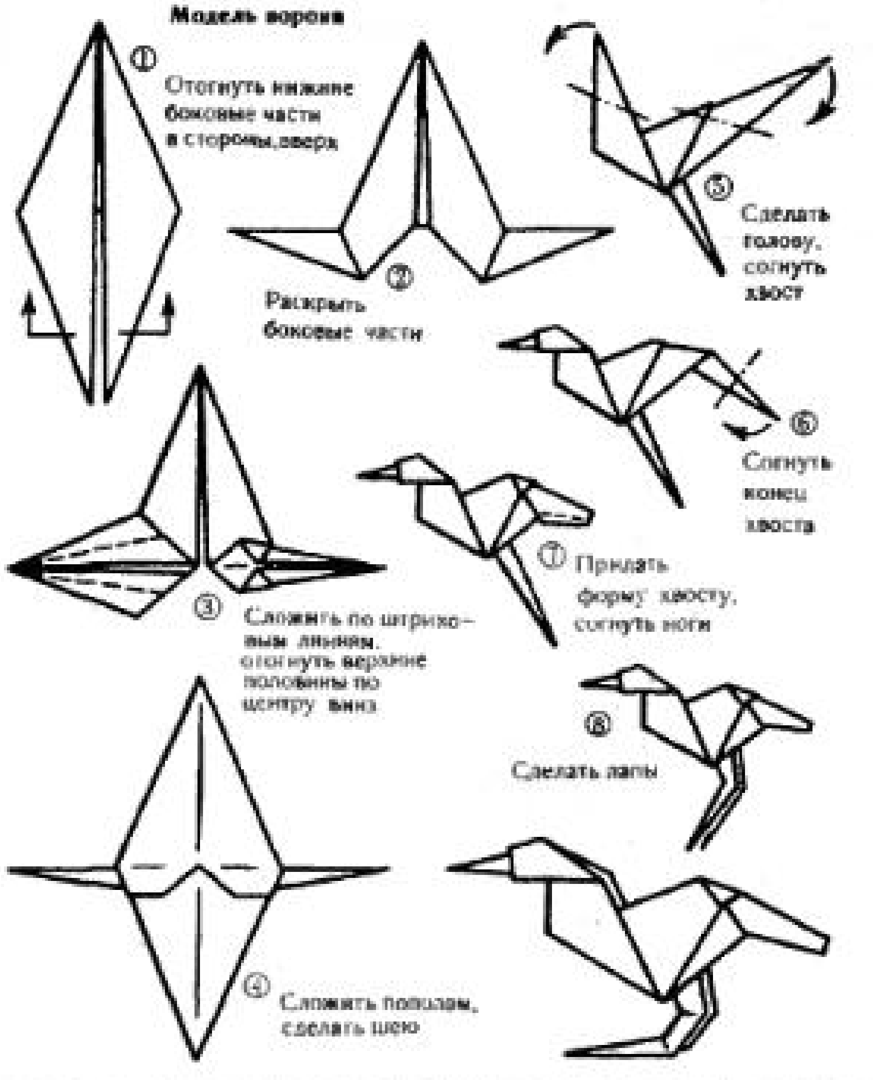
Основа модели вороны



Модель динозавра



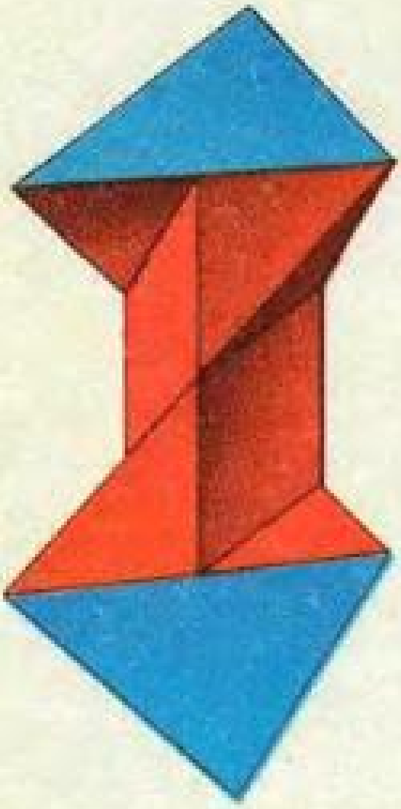
Модель вороны

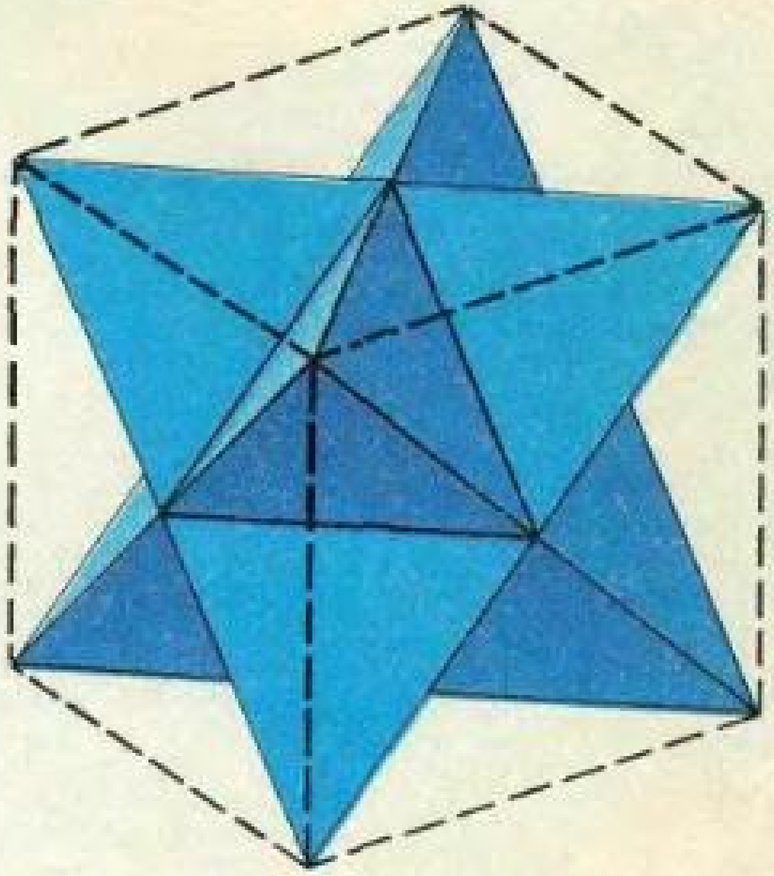


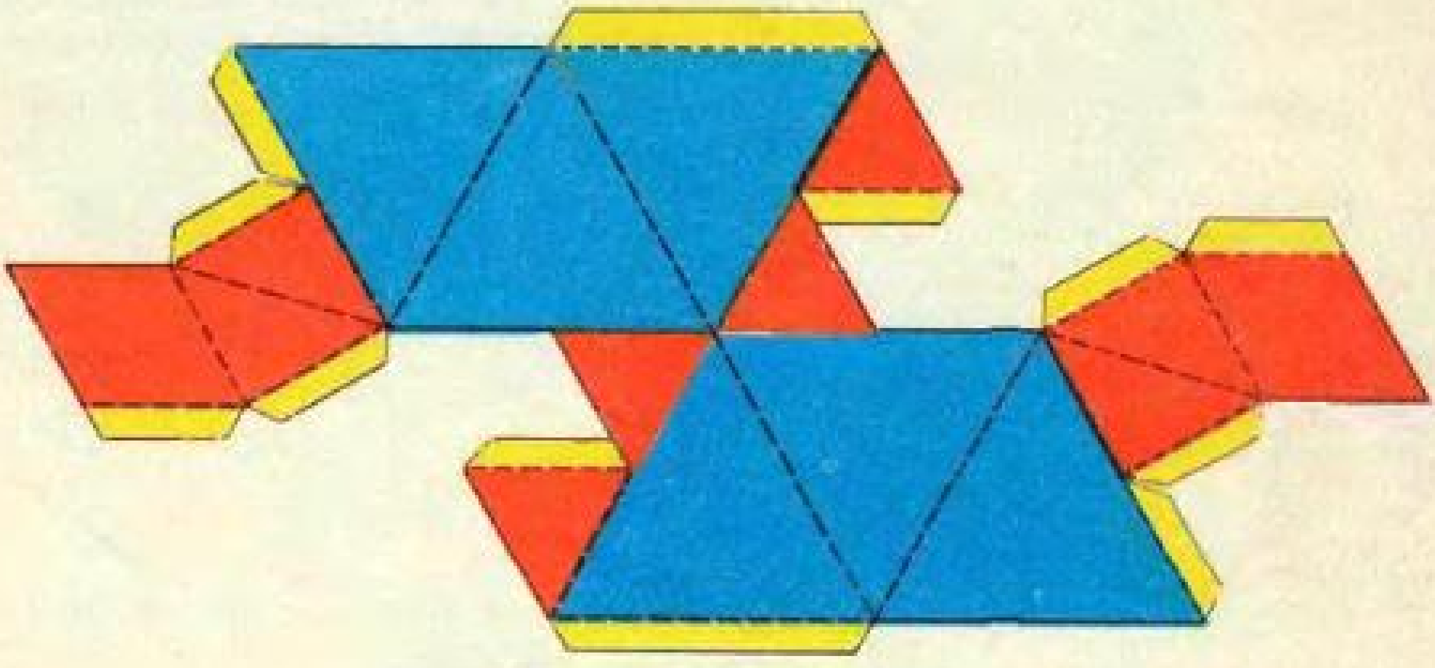
ИГРЫ И ГОЛОВОЛОМКИ

*Синий 24-х гранник, изображенный на рисунке справа, был открыт великим астрономом и математиком Иоганном Кеплером в 1619 году. Он назвал его **Stella octangula** («звезда восьмиугольная» по латыни) в связи с тем, что его 24 грани расположены на 8 плоскостях. Посмотрев на него внимательно, можно заметить, что **Stella octangula** Кеплера — объединение двух пересекающихся правильных тетраэдров, вершины которых образуют куб.*

Звездчатый многогранник Кеплера можно разрезать на четыре одинаковых части (слева на рисунке) и превратить в интересную головоломку. Каждая часть вырезается из тонкого картона или плотной бумаги по развертке, приведенной на рисунке снизу, и склеивается. Головоломка состоит в том, чтобы собрать многогранник Кеплера из четырех таких деталей. Ее прислал нам Игорь Глушков из Обнинска.







Рэндзю — итоги конкурса

Тщательно проверив почти семьсот писем с ответами на задачи по шашкам рэндзю, жюри конкурса определило победителя, нашедшего верные и наиболее короткие выигрышные варианты в большинстве задач. Им стал ученик 10 класса с. ш. № 842 г. Москвы Леонид Глуховский. Ему был вручен приз конкурса, учрежденный редакцией журнала «Квант» и президиумом ПКФР (подготовительный комитет по созданию Федерации шашек рэндзю СССР) — турнирный комплект рэндзю. В числе лучших участников конкурса оказались также: Г. Гребенюк (Уфа), М. Гуляев (Новоалтайск), А. Берсенев (Славянск), О. Большов (Московская обл.), В. Соколовский (Москва), Г. Тютюма (Киев), С. Филиппов (Москва). По результатам конкурса всем участникам был присвоен соответствующий разряд, о котором они узнают из разосланных жюри писем.

В заключение проинформируем читателей, что редакция журнала по Вашей просьбе поможет Вам связаться с одной из ближайших секций рэндзю, которые существуют уже более чем в 70 городах нашей страны.

По многочисленным просьбам читателей приведем с краткими комментариями решения задач конкурса (см. «Квант», 1983, №№ 8, 10).

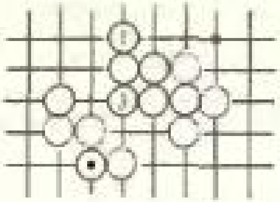


Рис. 1.

1. Самая легкая из конкурсных задач: с ней справились практически все участники.

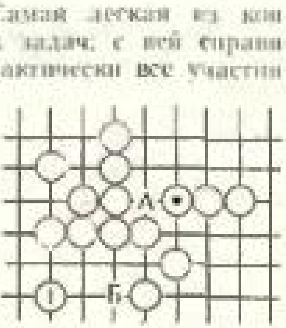


Рис. 2.

2. Приведенное на диаграмме 2 кратчайшее решение не очевидно: большинство присланных решений длиннее. Ход 1 — простейший пример одного из основных тактических приемов эндшпиля — двойное обозначение. Зачастую только таким путем можно выиграть партию. Третий ход, в зависимости от второго хода белых, черные делают в пункты А или Б.

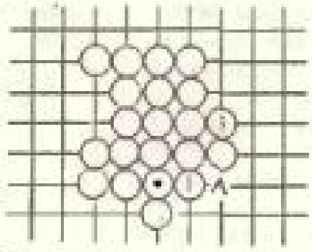


Рис. 3.

3. Черные ходом 1 создают угрозу вилки 3×3. Пятый ход — в пункт А.

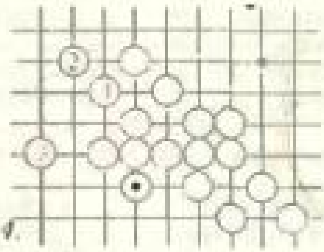


Рис. 4.

4. Исходная позиция черных в этой простой задаче служит иллюстрацией одной из заповедей рэндзиста: нельзя увлекаться атакой, а то это может привести к плачевному финалу.

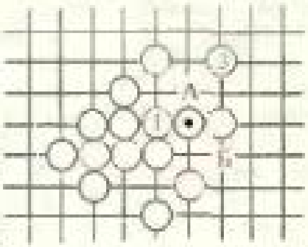


Рис. 5.

5. В атаке важен порядок наступательных ходов. Если первым ходом белые пойдут не в пункт 1, а в пункты А или 3, то черные смогут защититься, *отыграв горизонтальную четверку.*

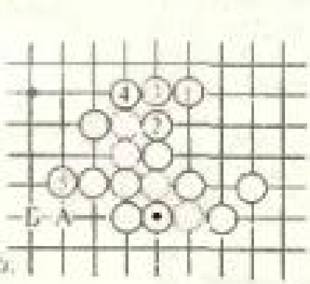


Рис. 6а.

6. Большинство участников прислали ответы, показанные на диаграмме 6а. Однако первый пришедший в

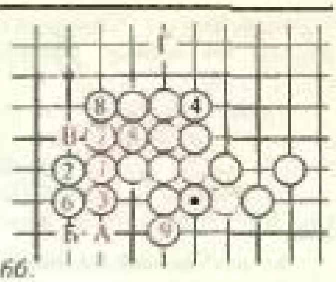


Рис. 6б.

голову маневр часто оказывается ложным, а хорошая позиция безнадежно испорченной. Если здесь черные вторым ходом пойдут в пункт А, а четвертым — в пункт Б, то они успевают перекрыть угрозу белых в пункте 3. Верное кратчайшее решение приведено на диаграмме 6б (если 8 — А, то 9 — В, 11 — Г).

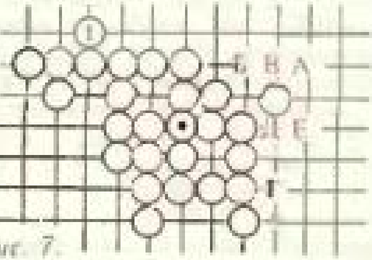


Рис. 7.

7. У белых есть выигрыш на шахах: ходы А — Е. Для защиты (а также для начала выигрышной атаки) у черных есть лишь ход 1.

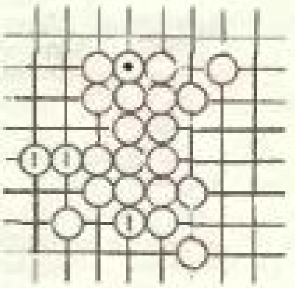


Рис. 8.

8. Неоднозначность решения безусловно сделала задачу менее привлекательной (при игре по правилам классического рэндзю, откуда заимствованы все задачи, решение — единственное). Однако и здесь для нахождения любого из показанных на диаграмме 8 выигрышных ходов нужно было продемонстрировать довольно высокий уровень понимания рэндзю.

9. Попытки выиграть «в лоб» пресекаются контригрой бе-

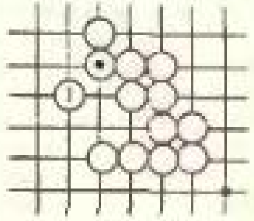


Рис. 9.

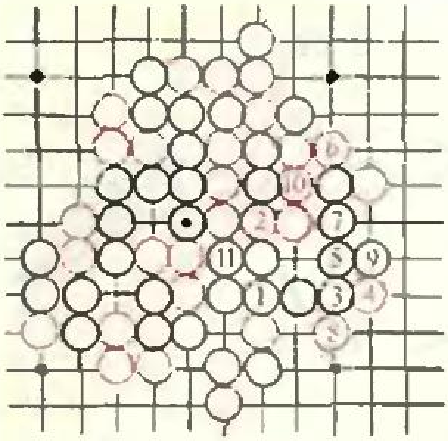


Рис. 10.

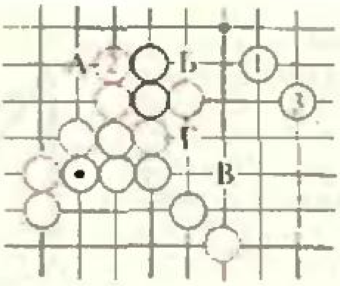


Рис. 11.

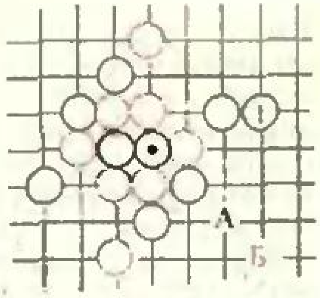


Рис. 12.

лых. К победе приводит лишь обозначение (создание угрозы 4×3) в пункте Г.

10. Самая легкая из задач второго тура.

11. Бросающийся в глаза выигрыш созданием двойного обозначения в пункт 2 (вилки 4×3 в пунктах Б и В) не проходит из-за защиты белых в пункт А. Этот красивый, и порой единственный, способ защиты называется контрпахом. Его надо иметь в виду и при атаке. Здесь кратчайший выигрыш достигается последовательными обозначениями 1 и 3. Если же белые делают второй ход в пункт Б, то черные выигрывают ходами Г и В.

12. Очень сложная задача. В этой позиции практически невозможно проследить развитие атаки до конца, и лишь хорошая интуиция, основанная на большом опыте игры, может подсказать сильный ход. Подмеченная многими участниками конкурса симметрия не является полной из-за разной удаленности краев доски. Поэтому ход 1 является единственным, который не только значительно усиливает позицию черных, но и обеспечивает им пространство для дальнейшего развития атаки. Популярный среди участников конкурса ход в пункт А опровергается защитой в пункт Б.

Н. Н. Александров, А. Г. Сокольский

Задача о доминировании ферзей

В. Г. ЧВАНОВ

В статье М. Мамикона в «Кванте» 1977 г., № 12 рассматривалась следующая до конца еще не решенная задача:

Задача о доминировании. *Какое минимальное число ферзей* $F(n)$ *можно разместить на шахматной доске* $n\times n$ *так, чтобы они атаковали все ее свободные поля?*

Числа $F(n)$ известны лишь для малых n ($n\leqslant 11$), приведенных в таблице 1.

Таблица 1

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
$F(n)$	1	2	3	3	4	5	5	5	5	?	...

На рисунке 1 приведены размещения ферзей на досках 3×3, 8×8, 11×11, для которых $F(n)$ равны соответственно 1, 5 и 5. Для больших n задача ждет своего решения.

В статье М. Мамикона приводятся следующие оценки для $F(n)$:

$$F(n)\geqslant\frac{n-1}{2}, \qquad (1)$$

$$F(n)\leqslant\frac{5}{8}n+16\sqrt{n}. \qquad (2)$$

Наша цель — указать некоторые приемы, позволяющие улучшить эти оценки и сформулировать связанные с ними задачи в надежде на то, что читатель самостоятельно продвинется в решении задачи о доминировании.

Первая геометрическая идея — пробивание каймы

Размещение ферзей на доске $n\times n$, для которых $F(n)=(n-1)/2$ (реализуется нижняя оценка М. Мамикона), назовем *идеальным*. Примерами могут служить размещения, показанные на рисунке 1 (при $n=3$ и $n=11$).

Посмотрим на *кайму* доски (совокупность из $4(n-1)$ клеток, расположенных вдоль ее края). При идеальном размещении (см. рис. 1*а*, *б*) каждый ферзь бьет ровно 8 клеток на кайме, при том никакая ее клетка не пробивается двумя ферзями, поэтому число ферзей равно $4(n-1):8=(n-1)/2$, откуда и получается нижняя оценка (1). Полное доказательство дано в статье М. Мамикона.

Задача 1 (нерешенная). Существуют ли идеальные размещения кроме двух указанных? Конечно ли число идеальных размещений? (Гипотеза: ответ на последний вопрос — положительный.)

Необходимым условием доминирования, разумеется, является доминирование на кайме. Поэтому интересно знать, для каких досок возможно доминирование на кайме $(n-1)/2$ ферзями. М. Мамикон доказал, что такими досками являются доски $n\times n$ при $n=2(k^2+l^2)+1$, где k и l — взаимно-простые числа разной четности. Но этим списком такие доски не исчерпываются. Примером может служить размещение на рисунке 2 ($n=15$); еще одно такое размещение я придумал для доски $n\times n$, $n=27$. Эти размещения примечательны тем, что в них соблюдается численное равенство фигур, расположенных лишь в противоположных квадрантах, образованных пересечением главных диагоналей.

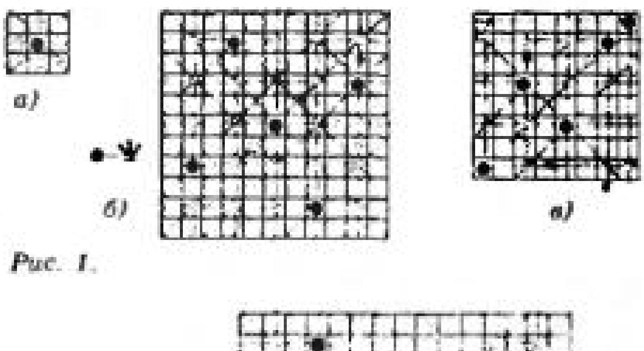


Рис. 1.

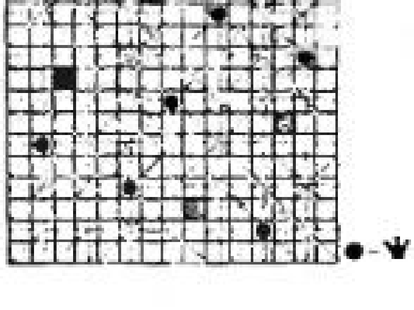


Рис. 2.

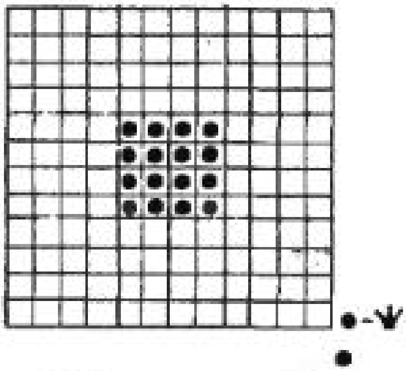
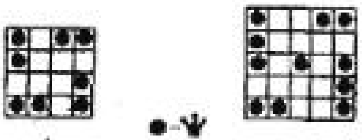


Рис. 3.



а) б)

Рис. 4.

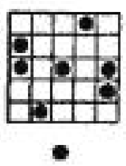


Рис. 5.

Задача 2 (нерешенная). Указать полный список досок $n\times n$, на которых возможно доминирование на кайме $(n-1)/2$ ферзями. (Гипотеза: кроме указанной выше серии, в этот список входят все доски вида $n=12k+3$ и только они.)

Вторая геометрическая идея — «комбинированный ферзь»

Эта нехитрая идея состоит в имитации идеального размещения на доске 3×3 на досках большего размера. Рассмотрим для начала доску размера $3m\times 3m$ и в центральном квадрате $m\times m$ разместим несколько ферзей так, чтобы они пробивали все диагонали, все вертикали и все горизонтали центрального квадрата; тогда очевидно, что такой «комбинированный ферзь» будет доминировать по всей доске $3m\times 3m$ (рис. 3).

Дадим теперь определение *комбинированного* ферзя (коротко — *k-ферзя*) в общем случае. Пусть на бесконечной шахматной доске выделен квадрат $m\times m$ и выбран набор ферзей, которые 1) пробивают все $2m-1$ нисходящие и все $2m-1$ восходящие диагонали выделенного квадрата; 2) пробивают все m горизонталей и все m вертикалей выделенного квадрата; такой набор ферзей мы назовем k-ферзем.

Задача 3. Для каждого m постройте k-ферзь из минимального числа ферзей, целиком расположенный внутри квадрата $m\times m$.

Решение эквивалентной задачи дано в «Кванте», 1980, № 7 (решение задачи М577). При четном m число ферзей равно $2m$, при нечетном, — оно равно $2m+1$ (рис. 4,а,б).

Таким образом, для n кратного 3, $n=3m$, мы получим оценку $F(n)\leqslant \leqslant 2n/3$ при m четном, $F(n)\leqslant \leqslant (2n/3)+1$ при n нечетном. Но мы увидим, что эту оценку можно еще улучшить, если воспользоваться еще одной геометрической идеей.

Третья геометрическая идея — вывести k-ферзя за пределы центрального квадрата

Рассмотрим k-ферзя на рисунке 4,б и заменим четыре угловых ферзя на два ферзя, лежащие за пределами центрального квадрата $m\times m$ ($m=5$), как показано на рисунке 5. Тогда мы получим k-ферзя из $2m-1$ фигур, доминирующего на доске $3m\times 3m$. Дальнейшее сокращение числа фигур невозможно, так как в квадрате $m\times m$ имеется $2m-1$ диагонали.

Однако, когда мы выносим фигуры по своим диагоналям за пределы центрального квадрата, оказывается, что можно получить k-ферзя, доминирующий на доске большего размера, чем $3m\times 3m$, за счет увеличения числа атакуемых горизонталей и вертикалей (см. рисунок на четвертой странице обложки). Естественно спросить

Задача 4. Каков максимальный размер квадрата, на котором доминирует k-ферзь из $2m-1$ фигур?

Я не знаю ответа на этот вопрос, однако, удается строить серии k-ферзей указанным приемом, которые позволяют заметно улучшить оценку сверху для $F(n)$. В частности, для любого m из серии $m=12c+9$ ($c=0, 1, 2, \ldots$) можно построить k-ферзя из $2m-1$ ферзей, который доминирует на доске $n\times n$, где $n=42c+31=(7m-1)/2$. Таким образом, для всех n из серии $n=42c+31$ ($c=0, 1, 2, \ldots$), мы получаем оценку

$$F(n)\leqslant \frac{4n-5}{7}. \qquad (3)$$

Заметим, что число вертикалей (а также — горизонталей), атакуемых таким k-ферзем, равно $l=(3m-1)/2$.

k-ферзь, изображенный на обложке, и есть один из k-ферзей этой серии (при $c=0$). Рассмотрим его подробнее. Он состоит из 3-х, обладающих определенными «конструктивными» достоинствами, групп фигур. Каждая, взятая отдельно, группа атакует во всех направлениях столько рядов, сколько содержится в ней фигур. Причем, в вертикальном и одном из диа-

Таблица 2

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$F(n)$	1	2	3	3	4	5	5	5	5	6	7				9
μ	0,33	0,5	0,6	0,5	0,57	0,62	0,55	0,5	0,45	0,5	0,54				0,53

гональных направлений ряды атакованы без разрывов, в другом — атакован каждый третий ряд, в горизонтальном — каждый второй. Крайние группы содержат $\frac{2}{3}m-1$, а средняя — по $\frac{2}{3}m$ фигур, размещенных последовательным ходом коня вдоль параллельных линий 1—1, 2—2, 3—3. Линия 1—1 проходит через центральную клетку доски. Расстояния между линиями 2—2, 3—3 и линией 1—1 выбирается так, чтобы за пределами доски $m \times m$ с 2-х ее сторон (см. рисунок на обложке) находилось по $\frac{m-1}{4}$ фигур каждой крайней группы. Но при этом часть фигур каждой группы выходит из синей зоны и в ней образуется разрыв (показано зеленым) в сплошном диагональном пробое. Фигуры, вышедшие из синей зоны, возвращают в нее параллельным переносом по своим диагоналям так, чтобы ликвидировать образовавшийся разрыв.

Улучшение нижней оценки для $F(n)$

Теперь вернемся к нижней оценке $F(n)$. Ее можно улучшить, раздельно оценивая $F(n)$ для досок $n \times n$, сравнимых по модулю 4.

Задача 5. Докажите для каждого вида досок $n \times n$ выполняемость следующих оценок $F_t(n)$:

$$n=4k \quad F(n) \geqslant \frac{n}{2}. \tag{4}$$

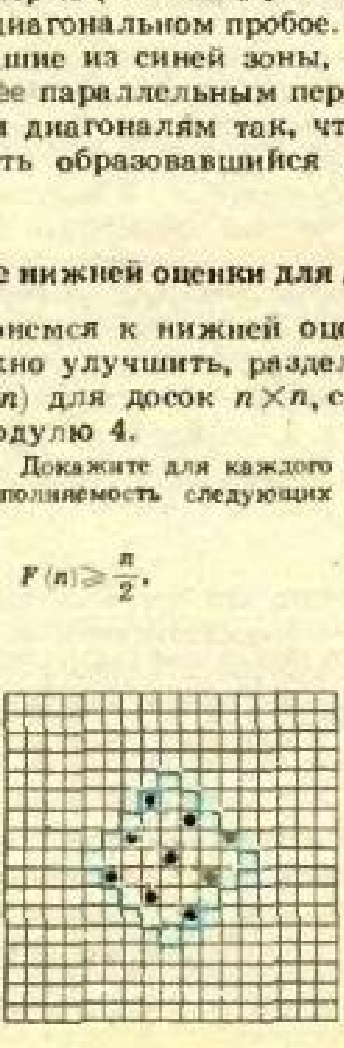


Рис. 6.

$$n=4k+1 \quad F(n) \geqslant \frac{n+1}{2}. \tag{5}$$

$$n=4k+2 \quad F(n) \geqslant \frac{n}{2}. \tag{6}$$

$$n=4k+3 \quad F(n) \geqslant \frac{n-1}{2}. \tag{7}$$

Указание. Число полей краевой каймы доски, на которой доминируют $\frac{n-1}{2}$ ферзей, кратно 8; число фигур идеальной расстановки $F(n)=2k+1$.

Задача 6. Даны по $\frac{n-1}{2}$ вертикальных, горизонтальных, восходящих и нисходящих диагональных линий. Укажите все значения n, для которых возможно этими линиями (они идут через центры клеток) зачеркнуть все клетки доски $n \times n$.

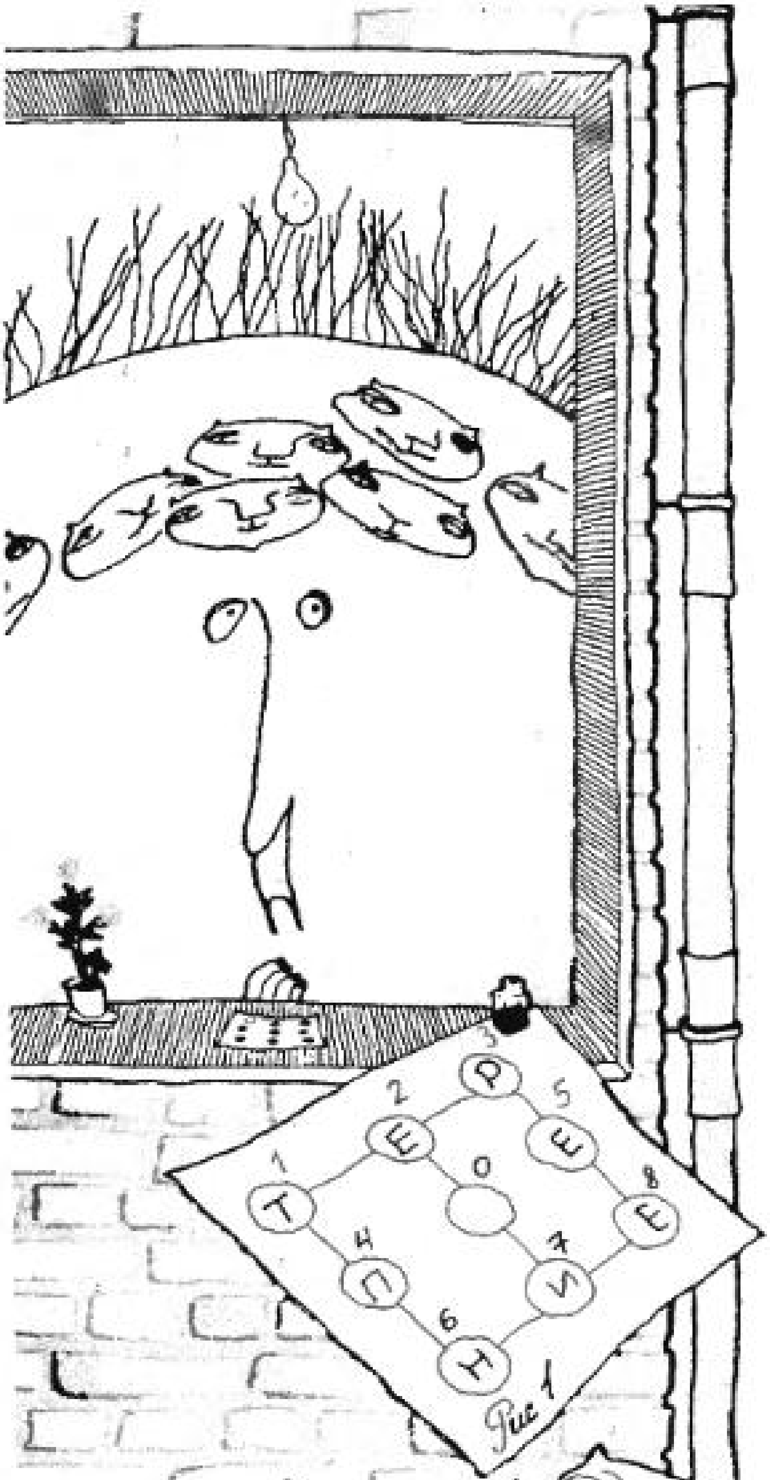
Задача 7 (нерешенная). Конечно ли число досок, для которых выполняются оценки (4), (5), (6)? Гипотеза: число таких досок конечно.

Оценки (4), (5), (6) позволяют нам расширить таблицу 1. Действительно, с их учетом можно записать, что $F(12) \geqslant 6$; $F(13) \geqslant 7$; $F(17) \geqslant 9$; $F(12)=6$ и $F(13)=7$ легко получить, достраивая размещения $F(11)=5$ (рис. 1«б») до размеров 12×12 и 13×13 с установкой дополнительной фигуры в угловой клетке доски. Размещение же $F(17)=9$ показано на рисунке 6.

«Качество» того или иного доминирующего размещения удобно оценивать отношением $\mu=\frac{F(n)}{n}$. Итак, наши результаты можно представить в виде Таблицы 2.

Таблица 2 заслуживает внимания, но ее анализ мы оставляем читателям. Отметим лишь следующее: М. Мамиконом высказывалась гипотеза о том, что доска 8×8 является наихудшей в смысле максимальности μ. Формула (6) и полученные нами значения $F(n)$ позволяют нам ответить на этот вопрос пока утвердительно.

Задача 8 (о внешнем доминировании). Какое максимальное число ферзей можно разместить на бесконечной шахматной доске так, чтобы они атаковали все поле доски $n \times n$?



Путешествия по графам

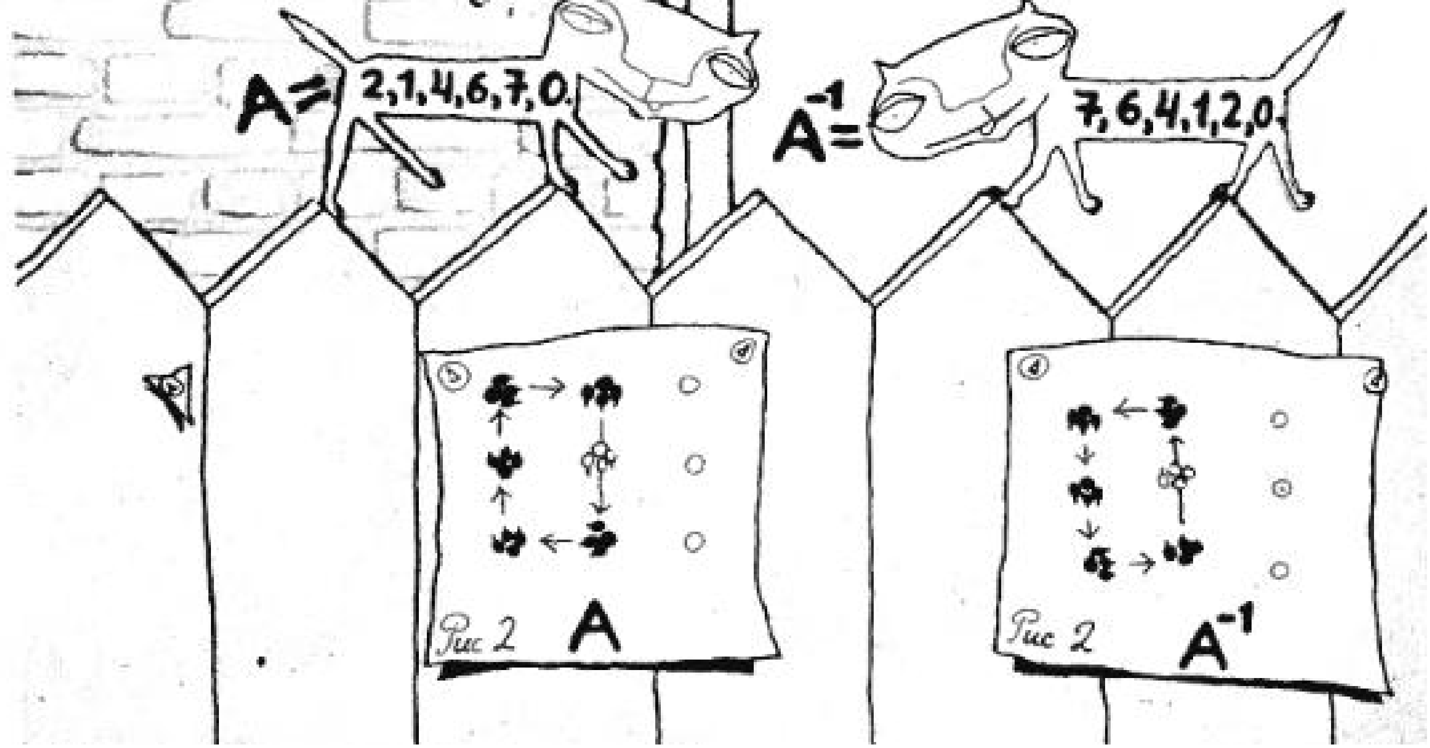
Д. И. ВАКАРЕЛОВ (НРБ)

Появление знаменитого кубика Рубика вызвало большой интерес к головоломкам и играм, основанным на перестановках каких-либо предметов. Для математика такие головоломки интересны прежде всего потому, что поиск их решения подчас представляет собой весьма непростую математическую задачу, требующую большого интеллектуального напряжения и остроумия.

Мы предлагаем вам широкий класс игр, обобщающих знаменитую игру в «пятнадцать» Сэма Ллойда. Некоторые из них по трудности не уступают кубику Рубика, причем, в отличие от него, очень просты в изготовлении, так что каждый может придумать и изготовить сколько угодно таких головоломок. Мы расскажем о двух играх этого класса, а затем дадим их общее описание.

Головоломка ТЕРПЕНИЕ

Вырежьте из картона восемь кружков с пятикопеечную монету и напишите



на каждом из них одну из букв слова ТЕРПЕНИЕ. На листе бумаги начертите схему, изображенную на рисунке 1, которую будем называть *игровым полем*. Кружки игрового поля будем называть *ячейками*, а написанные около них числа — *номерами* ячеек. Ячейки, соединенные отрезками, будем называть *соседними*. Расположите кружки-фишки в произвольном порядке в ячейках игрового поля так, чтобы центральная ячейка (№ 0) осталась свободной. Под *ходом* будем понимать перемещение некоторой фишки в соседнюю с ней свободную ячейку. Первым ходом игры может быть перемещение фишки из ячейки с номером 2 или 7 в ячейку с номером 0. Цель игры состоит в том, чтобы посредством серии ходов привести произвольно расставленные фишки в конфигурацию, показанную на рисунке 1.

А пока попробуйте, не читая статью дальше, вооружиться терпением и самостоятельно решить головоломку ТЕРПЕНИЕ. Для этого сначала решите более легкую задачу.

Задача 1. *Из произвольной конфигурации фишек на игровом поле посредством серии ходов получите конфигурацию, в которой буквы* Т, П, Н *и* И *оказываются на своем месте.*

В результате мы получим либо стандартную конфигурацию, либо одну из следующих трех:

	Т	Р	Е		Т	Е	Е		Т	Е	Е
$a=$	П		Е	$b=$	П		Р	$c=$	П		Е
	Н	И	Е		Н	И	Е		Н	И	Р

Поэтому возникает следующая задача.

Задача 2. *Найдите три последовательности ходов, X, Y и Z, которые соответственно преобразуют конфигурации a, b и c в стандартную.* Последовательность ходов будем записывать последовательностью номеров ячеек, занимаемых фишками, которыми делается очередной ход.

Вот одно из решений задачи 2, дающее вместе с решением задачи 1 алгоритм решения игры ТЕРПЕНИЕ.

$X=2,3,5,8,7,0,2,1,4,6,7,8,5,3,2,0,7,8,5,3,2,0,7,6,4,1,2,3,5,8,7,0,2,1,4,6,7,0,2,3,5,8,7,6,4,1,2,3,5,8,7,0$ (52 хода);

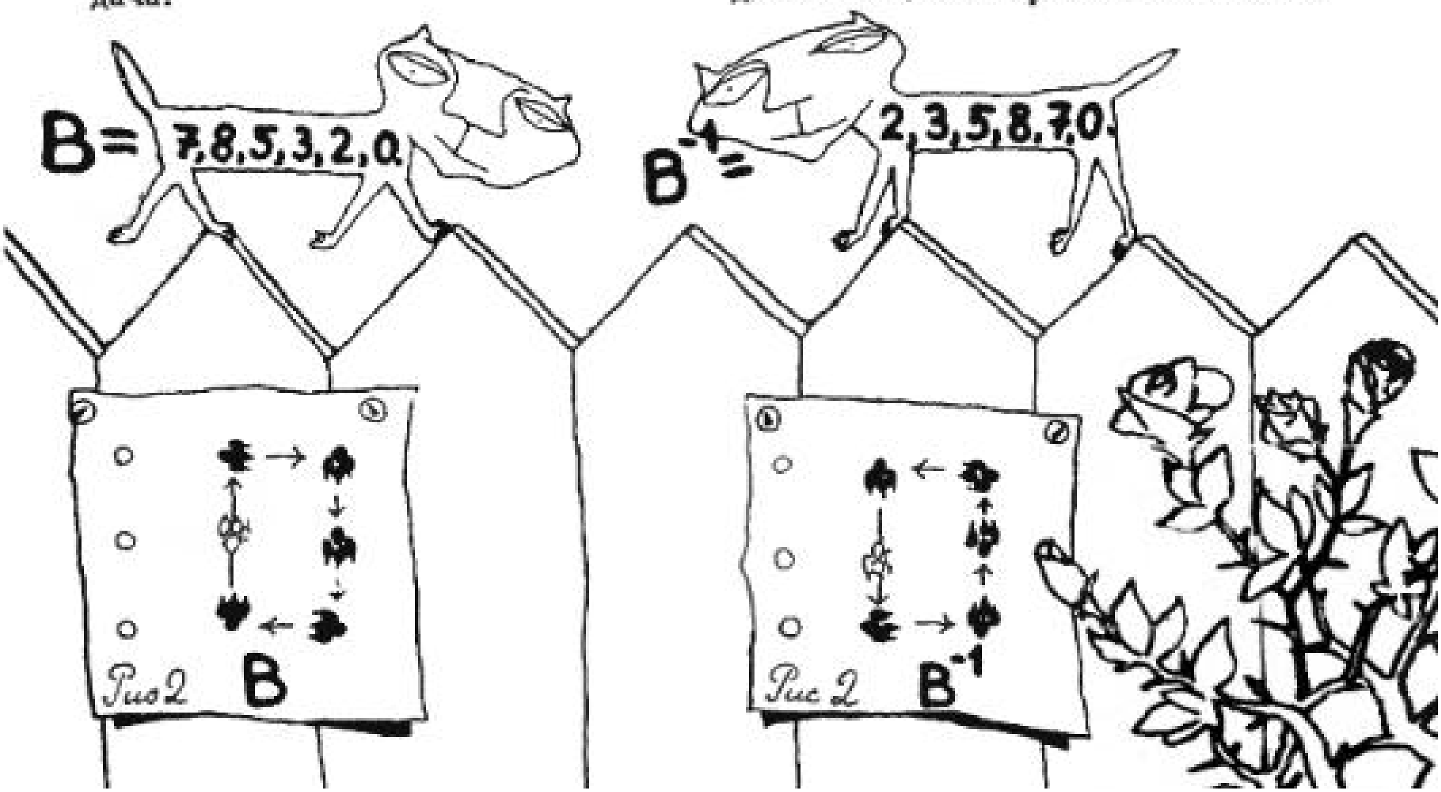
$Y=7,8,5,3,2,0,7,8,5,3,2,0,7,6,4,1,2,3,5,8,7,0,2,1,4,6,7,0,2,3,5,8,7,6,4,1,2,0,7,8,5,3,2,0,7,8,5,3,2,1,4,6,7,0$ (54 хода);

$Z=7,6,4,1,2,3,5,8,7,0,2,3,5,8,7,0,2,1,4,6,7,8,5,3,2,0,7,6,4,1,2,0,7,8,5,3,2,1,4,6,7,0,2,3,5,8,7,0,2,3,5,8,7,0$ (54 хода).

Любителям рекордов предлагаем найти более короткие алгоритмы.

Алгебра и геометрия допустимых преобразований

Предложенный выше алгоритм имеет существенный недостаток: его трудно запомнить. Кроме того, неясно, каким образом получены последовательности X, Y и Z. Трудно рассчитывать, что только с помощью метода проб и ошибок можно получать столь длинные последовательности ходов, осуществляющих подходящие преобразования. Попробуем поэтому более пристально разобраться в «устройстве» последовательностей X, Y и Z. Нетрудно заметить, что определенные серии ходов в них повторяются. Это наводит на мысль выбрать несколько та-



ких серий, действие которых обозримо и легко запоминается, а затем составлять из них любую последовательность ходов. При этом оказываются полезными следующие четыре серии (ячейка с номером 0 свободна перед их выполнением):
$A=2,1,4,6,7,0$, $A^{-1}=7,6,4,1,2,0$, $B=7,8,5,3,2,0$, $B^{-1}=2,3,5,8,7,0$. Обозначения A^{-1} и B^{-1} показывают, что действия этих серий обратны действиям серий A и B.

Условимся A, A^{-1}, B и B^{-1} называть *элементарными сериями*, а преобразования, которые они производят — *элементарными* (*допустимыми*) преобразованиями. На рисунке 2 изображены наглядные *схемы-графики*, демонстрирующие действия этих серий на фишки игрового поля.

Элементарные серии имеют одно полезное свойство: после их выполнения центральная ячейка снова становится свободной, что дает возможность выполнять их в произвольном порядке одну за другой. Конечную последовательность элементарных серий, например A, AB, $A^{-1}BA$, будем называть *допустимой серией или формулой*, а ее действие на фишки игрового поля — *допустимым преобразованием*. При исследовании действия различных формул условимся использовать фишки, на которых вместо букв написаны цифры от 1 до 8. Тогда *стандартной конфигурацией* фишек будем считать ту, при которой каждая фишка находится в ячейке с соответствующим ей номером.

Опишем «алгебру допустимых серий», которая нам поможет производить алгебраические преобразования допустимых серий с целью их упрощения.

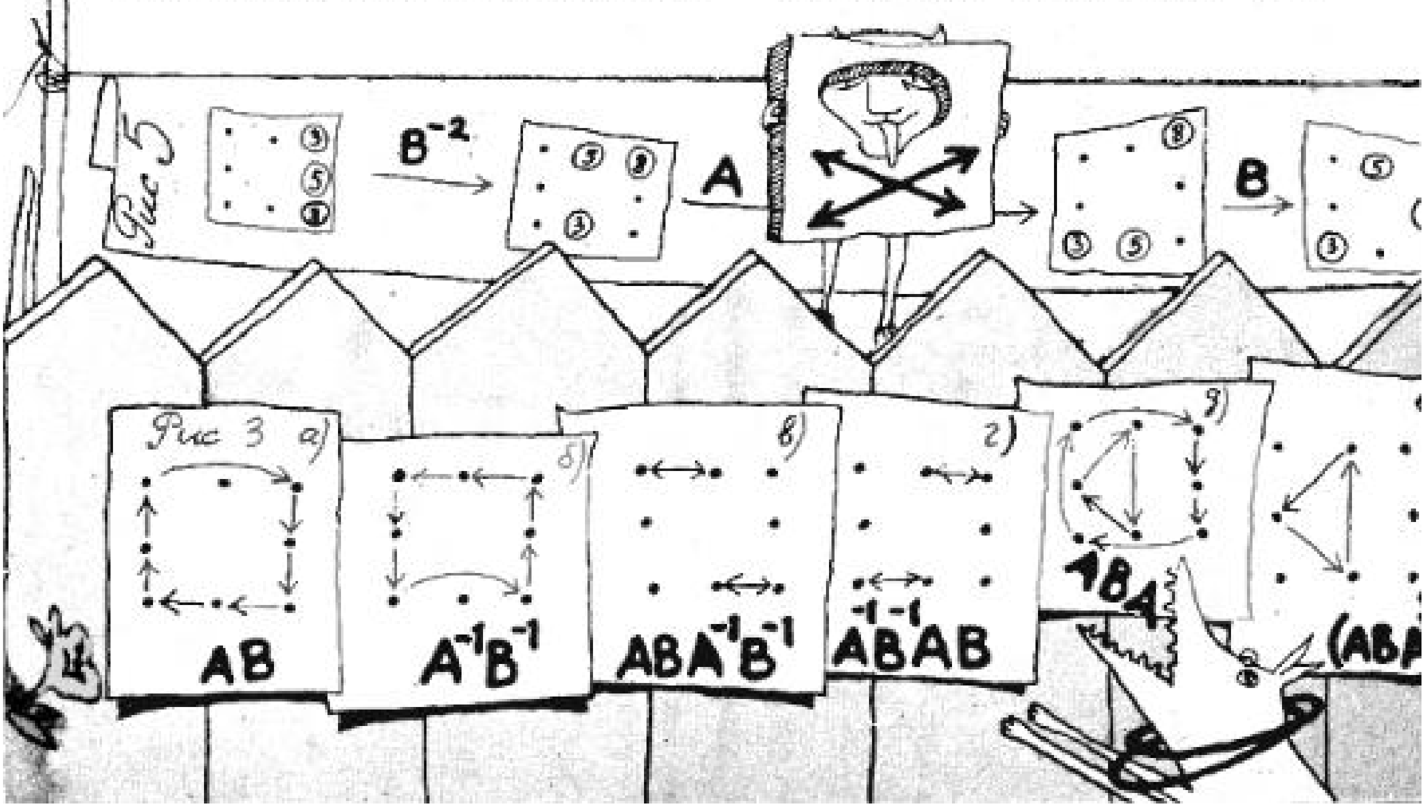
Если две формулы X и Y производят одинаковые преобразования, то будем писать $X=Y$. Пустую серию ходов, которая не изменяет конфигурацию будем обозначать символом 1. Если X и Y — две допустимые серии, то произведение XY тоже является допустимой серией, действие которой состоит в последовательном выполнении X и Y. Нетрудно видеть, что $A^{-1}A=AA^{-1}=1$, $B^{-1}B=BB^{-1}=1$. Аналогично, для любого допустимого преобразования X имеется *обратное*, то есть такое, что $X^{-1}X=XX^{-1}=1$.

Пусть G_1 — множество всех допустимых преобразований. В этом множестве определена операция *умножения*, то есть для любых X и Y из G_1 определено *произведение* XY, состоящее в последовательном выполнении преобразования X, а затем — преобразования Y.

Это умножение обладает следующими свойствами: 1) $(XY)Z=X(YZ)$; 2) существует преобразование 1 такое, что $X\cdot 1=1\cdot X=X$; 3) для любого X существует X^{-1} такое, что $X^{-1}X=XX^{-1}=1$.

В математике произвольное множество G, в котором введена операция умножения, обладающая свойствами 1—3, называется *группой*. Мы показали, что построенная нами совокупность допустимых преобразований G_1 является группой. Можно при этом добавить, что группа G_1 *порождается* преобразованиями A и B.

Оказывается, построенная груп-



па G_1 обладает достаточным набором преобразований для решения головоломки ТЕРПЕНИЕ.

З а д а ч а 3. *Пусть дана произвольная конфигурация фишек игры ТЕРПЕНИЕ со свободной центральной ячейкой. Докажите, что существует формула X из G, которая дает решение игры ТЕРПЕНИЕ.*

Решение этой задачи будет получено после того, как мы найдем алгоритм решения игры ТЕРПЕНИЕ.

Мы выясним также, какие конфигурации фишек, на которых написаны номера от 1 до 8, могут быть приведены к стандартной конфигурации.

У п р а ж н е н и я

1. Пусть некоторое преобразование $X \in G_1$ допускает запись $X = X_1X_2...X_n$, где $X_i \in G_1$. Докажите, что $X^{-1} = X_n^{-1} \cdot X_{n-1}^{-1} \cdot ... \cdot X_1^{-1}$.

2. Нарисуйте графики действия преобразований A^2, A^3, B^2, B^3, $ABAB^{-1}A^{-1}$.

3. Пусть некоторая фишка неподвижна при выполнении преобразования X. Докажите, что она остается неподвижной и при преобразовании $P^{-1}XP$, где P — допустимое преобразование.

4. Докажите тождества $A^5 = B^5 = 1$, $A^4 = A^{-1}$, $A^3 = A^{-2}$, $(ABA^{-1})^4 = AB^{-1}A^{-1}$.

Тождества, подобные приведенным в упражнении 4, помогают упрощать формулы, делая их запись более компактной, а в некоторых случаях — устанавливать тождественность формул.

«Программирование формул»

При поисках алгоритма решения головоломки наиболее трудным делом является описание формул с заранее заданными графиками. Это немного напоминает программирование, при котором команды — это элементарные преобразования, а программы — формулы, то есть последовательности команд.

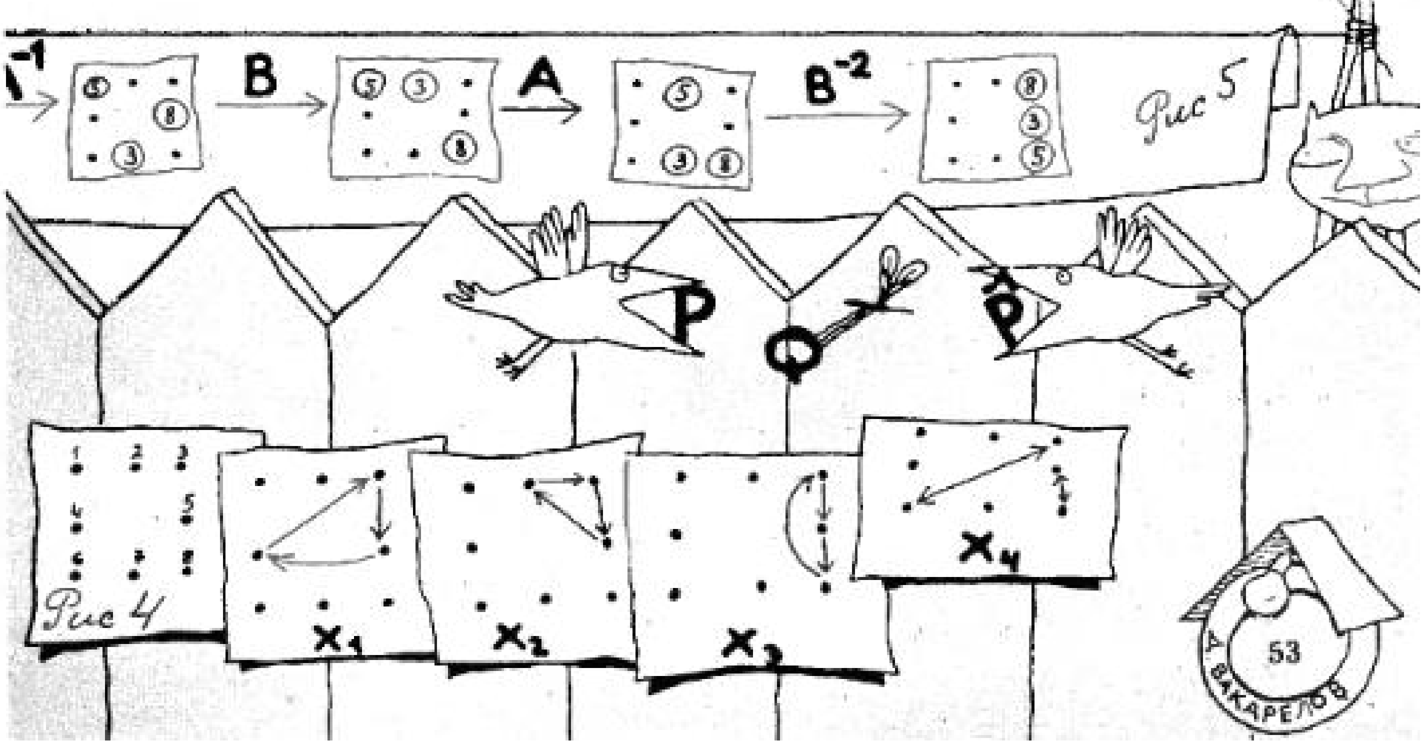
Рассмотрим некоторые практические приемы этого своеобразного программирования.

А. Преобразования $ABA^{-1}B^{-1}$ и $A^{-1}B^{-1}AB$, действие которых показано на рисунках 3, *в*, *г*, называются *коммутаторами*. Они интересны тем, что переставляют некоторые пары точек, оставляя остальные точки неподвижными.

Б. Очень интересно преобразование ABA (рис. 3, *д*), распадающееся на два цикла. Для него $(ABA)^5$ — это цикл, показанный на рисунке 3, *е*.

В задаче 2 для преобразования конфигурации *а* к стандартному виду нужно было найти последовательность ходов, при которой буквы P и E оказываются на своих местах. Легко видеть, что этого можно добиться с помощью преобразования X_2, график которого показан на рисунке 4, *б*.

В. Рассмотрим операцию, которая в теории групп называется *сопряжением*. С ее помощью можно действие некоторого преобразования перенести на другую зону игрового поля. Например, найдем формулу для преобразования X_1 (см. рис. 4, *б*). Для этого с помощью преобразования B^{-2} перемещаем фишку 3 на место фишки 7, а фишку 5 — на место фишки 2. Затем применяем цикл $(ABA)^5$ и, наконец, преобразованием B^2 возвращаем фишки 2 и 7 на старые места.



Получился цикл 4→3→5→4 с формулой $B^{-2}(ABA)^5B^2$.

В общем случае операция сопряжения имеет вид $Q_1 = PQP^{-1}$. При этом говорят, что преобразование Q *сопряжено* с преобразованием Q_1. В нашем случае $Q = (ABA)^5$, $P = B^{-2}$.

Аналогично $X_2 = A^{-2}X_1A^2$ и $X_3 = B^{-1}X_2B$. Отметим, что X_2 и X_3 осуществляют такое же действие, как преобразования X и Z из задачи 2, но имеют значительно большую длину. Преобразование Y, как легко понять, допускает запись $Y = Z^2$.

Сопряжением коммутатора $A^{-1}B^{-1}AB$ с B^{-2} получаем формулу для $X_4 = B^{-2}(A^{-1}B^{-1}AB)B^2 = B^{-2}A^{-1}B^{-1}AB^{-2}$ (мы воспользовались тем, что $B^3 = B^{-2}$).

Г. При построении формул с нужными свойствами можно действовать и иначе. Осуществим для примера цикл 3→5→8→3. Будем выполнять перемещения фишек 3, 5, 8, не интересуясь судьбой остальных фишек, так, как показано на рисунке 5. В результате мы получим нужную перестановку с формулой $B^{-2}ABA^{-1}BAB^{-2}$. Теперь нужно проследить, что же происходит с остальными фишками. Для этого строим график полученного преобразования (рисунок 6, *а*). Получился еще один цикл длины 5, который можно уничтожить, даже не возведя в 5-ю степень, а с помощью предварительного выполнения операции A^{-1}. Итак, $X_5 = A^{-1}B^{-2}ABA^{-1}BAB^{-2}$.

Упражнение 5. Запишите формулы для преобразований, заданных графиками на рисунках 6 *в*, *г*.

Алгоритм решения игры ТЕРПЕНИЕ

Мы будем пользоваться формулой для X_4 и операцией сопряжения. Решение осуществляется в два этапа.

Первый этап. *Установка на свои места трех букв* Е. Для этого специальные формулы не нужны, хотя при желании можно их выписать для каждой конкретной позиции.

Второй этап. *Установка на свои места остальных букв.* Она осуществляется в зависимости от содержимого ячейки 3 преобразованиями, показанными в следующей таблице:

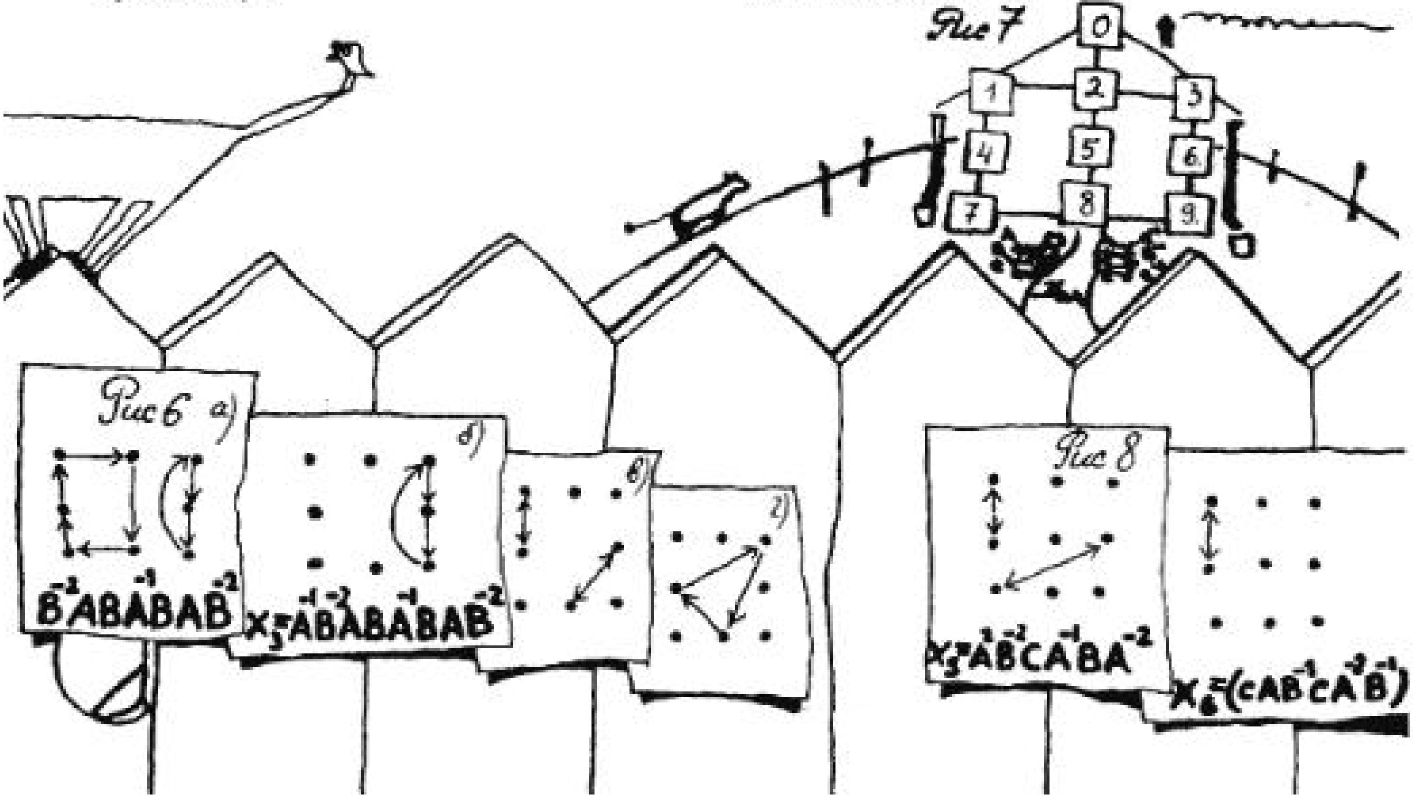
Буква в ячейке 3	Преобразование, ставящее ее на место
Т	$A^{-2}X_4A^2 = A^{-2}B^{-2}A^{-1}B^{-1}AB^{-2}A^2$
П	$A^{-1}X_4A = A^{-1}B^{-2}A^{-1}B^{-1}AB^{-2}A$
Н	$X_4 = B^{-2}A^{-1}B^{-1}AB^{-2}$
И	$AX_4A^{-1} = AB^{-2}A^{-1}B^{-1}AB^{-2}A^{-1}$
Р	X_4 — если стандартная конфигурация еще не достигнута

В приведенном алгоритме существенно используется то, что в слове ТЕРПЕНИЕ две буквы Е.

Найденный алгоритм решения игры ТЕРПЕНИЕ полностью решает задачу 3. Но мы еще не знаем, какие конфигурации приводятся к стандартной. В следующих упражнениях игровое поле совпадает с полем игры ТЕРПЕНИЕ.

Упражнения

6. Получите алгоритмы решения игр для английского слова PATIENCE и болгарского слова ТЪРПЕНИЕ.



7. Постройте теорию игр УПОРСТВО, ВЕРЕНИЦА, СМЕКАЛКА — в этих словах есть по две повторяющиеся буквы, но стоят они не на тех местах, как в игре ТЕРПЕНИЕ.

Группа игры ТЕРПЕНИЕ

Каждый элемент α группы G_1 переставляет фишки. Пусть $\alpha(i)$ — номер фишки, на место которой переходит фишка из ячейки i. Набор чисел $\alpha(1)$, $\alpha(2),\ldots,\alpha(8)$ называется *перестановкой* из чисел $1,2,\ldots,8$. Итак, каждому элементу группы G_1 соответствует некоторая перестановка.

Множество S_n всех перестановок множества из n элементов образует группу (произведение $\alpha\beta$ перестановок α и β заключается в их последовательном выполнении, то есть $(\alpha\beta)(i)=\beta(\alpha(i))$). Эта группа называется *симметрической* группой. Мы убедились, что группу G_1 можно считать частью группы S_8.

Пусть теперь $f=f(x_1,x_2,\ldots,x_8)$ — некоторый многочлен от восьми переменных и $\alpha\in S_8$ — некоторая перестановка. Заменим теперь в многочлене f переменную x_1 на $x_{\alpha(1)}$, переменную x_2 — на $x_{\alpha(2)}$, ..., переменную x_8 — на $x_{\alpha(8)}$. Мы получим новый многочлен

$$\alpha f=f(x_{\alpha(1)},x_{\alpha(2)},\ldots,x_{\alpha(8)}).$$

Понятно, что для двух перестановок α и β будет $(\alpha\beta)f=\beta(\alpha f)$.
Рассмотрим многочлен

$$P_n(x_1,x_2,\ldots,x_n)=$$
$$=(x_1-x_2)(x_1-x_3)\ldots(x_1-x_n)\ldots$$
$$\ldots(x_2-x_3)\cdot\ldots\cdot(x_2-x_n)\cdot\ldots\cdot(x_{n-1}-x_n).$$

Перестановка $\alpha\in S_n$ называется *четной*, если $\alpha P_n=P_n$, и *нечетной*, если $\alpha P_n=-P_n$.

Упражнения

8. Докажите, что при перестановке любых двух переменных x_i и x_j многочлен P_n переходит в $-P_n$.

9. Любая перестановка либо четна, либо нечетна.

10. Если α и β — перестановки одинаковой четности, то $\alpha\beta$ — четная перестановка.

11. Если α и β — перестановки разной четности, то $\alpha\beta$ — нечетная перестановка.

12. Перестановки α и α^{-1} имеют одинаковую четность.

13. Перестановки, соответствующие элементарным сериям A,A^{-1},B,B^{-1}, — четные.

Из упражнений 8—12 следует, что множество A_n всех четных перестановок образует группу. Эта группа называется *знакопеременной группой порядка n*.

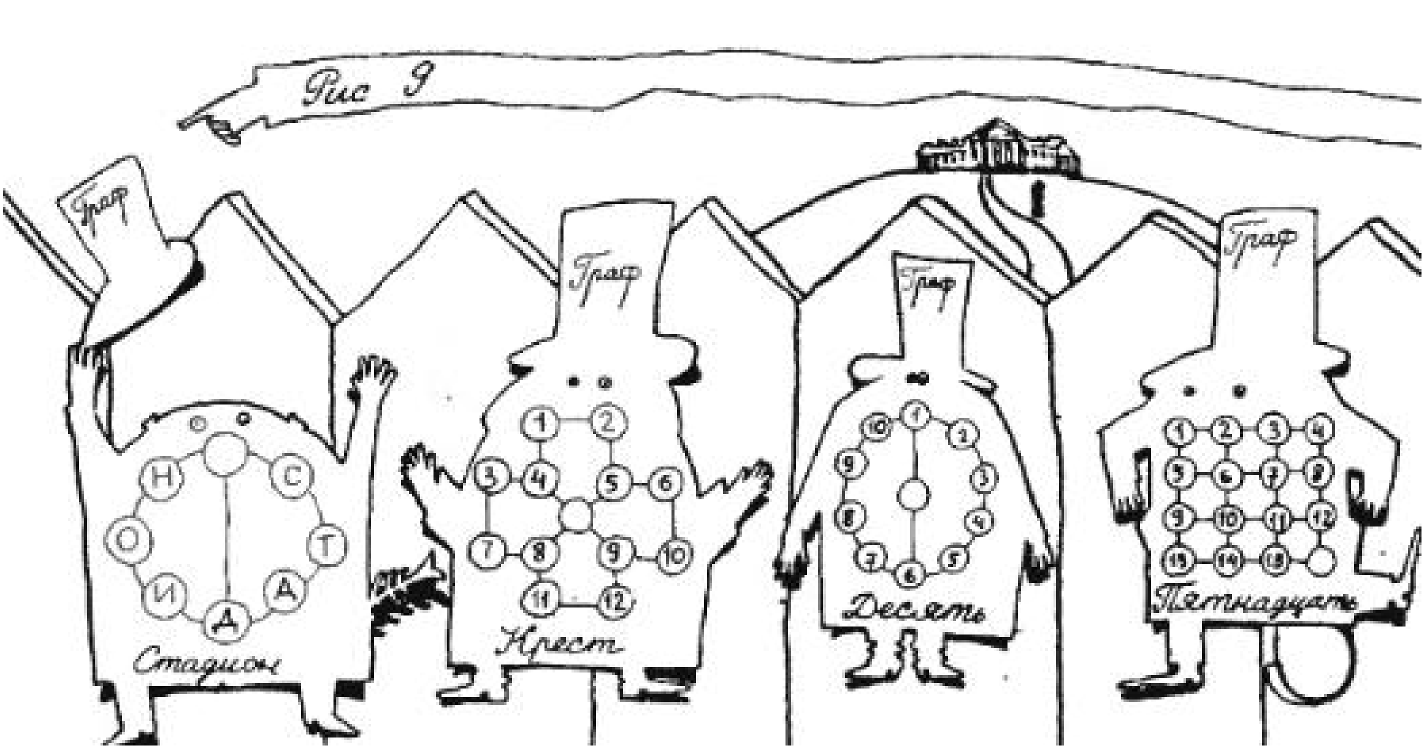
Из упражнения 13 следует, что $A_8\supset G_1$. Пользуясь существованием алгоритма решения игры ТЕРПЕНИЕ и результатами упражнений 10—12, можно доказать, что $A_8=G_1$. Следовательно, с помощью G_1 можно осуществить любую четную перестановку фишек 1,2,...,8 и нельзя осуществить никакую нечетную перестановку.

Упражнение 14. Докажите, что любую позицию можно перевести либо в стандартное положение, либо в такое, которое отличается от стандартного перестановкой фишек 5 и 8.

Головоломка ДОМ

Игровое поле этой игры изображено на рисунке 7. Фишки для игры занумерованы цифрами от 1 до 9. В качестве элементарных серий игры используются следующие:

$A=1,4,7,8,5,2,0$; $A^{-1}=2,5,8,7,4,1,0$;
$B=2,5,8,9,6,3,0$; $B^{-1}=3,6,9,8,5,2,0$;
$C=AB=1,4,7,8,9,6,3,0$; $C^{-1}=3,6,9,8,7,4,1,0$.



Алгоритм решения использует следующие две формулы:

$$X_5 = A^2B^{-2}(ABA^{-1}B^{-1})B^2A^{-2} = A^2B^{-2}CA^{-1}BA^{-2};$$

$$X_6 = (ABAB^{-1}ABA^{-2}B^{-1})^3 = (CAB^{-1}CA^{-2}B^{-1})^3.$$

Эти формулы можно получить с помощью описанных выше приемов.

Этап 1. *Установка на места фишек 1,4,7 и 8.* Для этого специальных формул не требуется.

Этап 2. *Установка на места фишек 2,3,5,6 и 9.* Для этой цели используется формула X_5 (аналогично тому, как использовалась формула X_4 на этапе 2 алгоритма игры ТЕРПЕНИЕ). Отметим, что при каждом использовании формулы X_5 меняют свои места фишки 1 и 4. Поэтому в конце этапа они могут оказаться переставленными. Тогда с помощью формулы X_6 ставим их на свои места. Пусть G_2 — группа игры ДОМ.

Упражнение 15. Докажите, что группа G_2 совпадает с симметрической группой S_9. Указание. Доказательство следует из существования описанного выше алгоритма решения.

Путешествия по графам

Читателю уже должно быть ясно, как можно самостоятельно придумать новые игры типа ТЕРПЕНИЕ и ДОМ. На рисунке 9 приведены еще несколько примеров таких игр.

Упражнения

16. Найдите алгоритмы решения игр ПЯТНАДЦАТЬ, ДУМАЙ БЫСТРЕЕ, КОМБИНАТОР и КУБОЛОГИЯ. Докажите, что соответствующие им группы — знакопеременные (типа A_n).

Обратите внимание, что все игры из упражнения 16 содержат по две одинаковые фишки (в первой из них — это фишки 6 и 9).

17. Найдите алгоритмы решения игр СТАДИОН, КРЕСТ, ДЕСЯТЬ. Покажите, что соответствующие им группы симметрические (типа S_n).

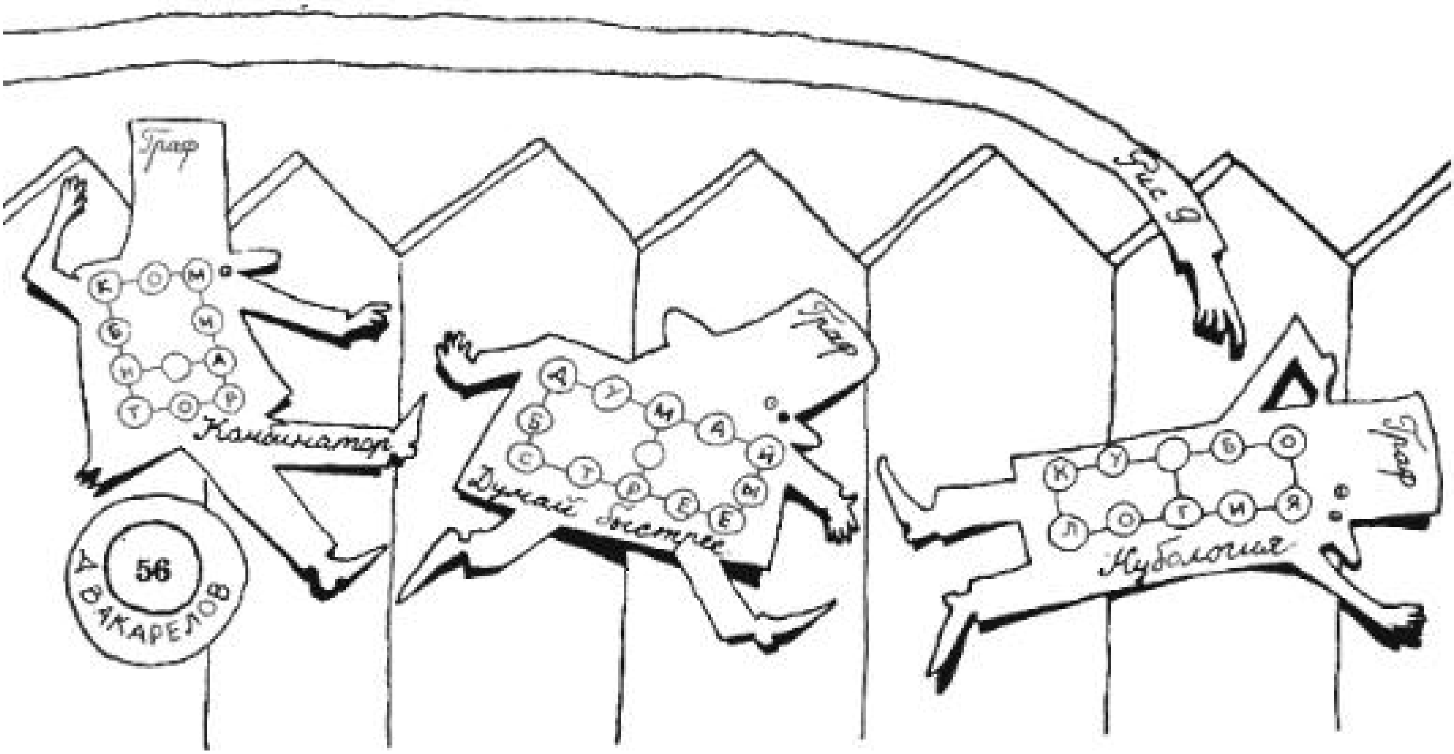
18. Докажите, что группы S_n и A_n содержат соответственно $n! = 1\cdot 2 \ldots n$ и $\frac{1}{2}\,n!$ элементов.

Фигуры, подобные игровым полям рассмотренных головоломок, называются *графами*. Отсюда их общее название — «путешествия по графам». Более точно, *граф* — это конечное множество точек, называемых *вершинами*, некоторые из которых соединены дугами, называемыми *ребрами графа*. Очевидно, что любой граф можно связать с одной или несколькими играми и группами перестановок, которые им соответствуют. Читатель, может быть, уже заметил, что группы рассмотренных игр являются либо знакопеременными (типа A_n), либо симметрическими (типа S_n). Оказывается, что это не случайно: при некоторых весьма общих ограничениях на структуру графов им всегда будут соответствовать группы либо типа A_n, либо типа S_n. Чтобы сформулировать более точно эту удивительную закономерность, нам понадобятся следующие определения.

Под *простым циклом длины k* ($k \geqslant 3$) будем понимать последовательность вершин графа $P_1, \ldots, P_k$, которая удовлетворяет следующим условиям:

1) $P_1 = P_k$ (то есть начальная и последняя вершина цикла совпадают);

2) P_i и P_{i+1} связаны ребром ($i = 1, \ldots, k-1$),



3) $P_i \neq P_j$ при $i \neq j$ $(i,\ j=1,...,k-1)$.

Граф будем называть *циклическим*, если любые две вершины этого графа принадлежат некоторому простому циклу.

Теорема. *Пусть Г произвольный циклический граф с вершинами P_0, $P_1,...,P_n$, а G (Г) — группа игры «путешествие по Г» с фишками 1,..., n. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *если все простые циклы Г имеют четную длину, то G (Г) совпадает с группой A_n;*

2) *если граф Г отличен от графа Γ_6, изображенного на рисунке 10, и содержит хотя бы один простой цикл нечетной длины, то G (Г) совпадает с группой S_n.*

Доказательство этого утверждения мы опускаем. Заметим, что частные случаи этой теоремы уже доказаны ранее. Интерес представляет исключение, связанное с графом Γ_6 (рис. 10). На ЭВМ были вычислены все перестановки группы $G(\Gamma_6)$ и было установлено, что она является собственным подмножеством группы S_6, состоящим из 120 элементов. Если мы хотим, чтобы игра «путешествие по графу Γ_6» всегда имела решение, то необходимо использовать по крайней мере три одинаковые фишки. Это — единственный граф с таким свойством.

Модификации игр

Рассмотрим теперь некоторые модификации «путешествий по графам», связанные с переворачиванием фишек и ограничениями на «правила движения».

Пусть фишки для игры ДОМ имеют квадратную форму и окрашены с двух сторон: одна сторона — в белый, а другая — в черный цвет. Поместим фишки на игровое поле, изображенное на рисунке 7, причем некоторые из них поместим белой стороной вверх, а некоторые — черной. Кроме старых правил передвижения фишек по игровому полю, введем одну новую операцию R: если ячейка с номером 0 свободна, то можно перевернуть одновременно все фишки, находящиеся в ячейках 4, 5 и 6. Цель игры — с помощью допустимых преобразований и операции R перевернуть все фишки белой стороной вверх («зажигание света в окнах»). Задача усложняется, если на белой стороне каждой фишки написать соответственно цифры от 1 до 9 и потребовать, чтобы в конце игры каждая фишка была не только белой стороной вверх, но и занимала ячейку с соответствующим ей номером. Эту игру будем называть СВЕТЯЩИЕСЯ ОКНА.

Упражнение 19. Найдите алгоритмы решения для обоих вариантов игры СВЕТЯЩИЕСЯ ОКНА.

Конечно же, это далеко не единственный прием введения эффекта переориентации фишек в играх типа «путешествие по графу». Например, в статье А. Калинина «Сначала был только кубик» («Наука и. жизнь»,

(Окончание см. на с. 60)

Путешествия по графам

(Начало см. на с. 50)

1984, № 9) описаны игры-«перевертыши», которые можно рассматривать как варианты игр «путешествие по графу» с переориентацией фишек.

Особенно трудные обобщения игр типа «путешествие по графу» можно получить, задавая дополнительные ограничения на правило движения фишек по графу. В качестве примера рассмотрим игру ДВЕНАДЦАТЬ, игровое поле которой изображено на рисунке 11. В этой игре допускаются только такие последовательности ходов, которые получаются с помощью следующих элементарных серий:

$A=3, 7, 11, 10, 9, 5, 1, 2, 0;$
$A^{-1}=2, 1, 5, 9, 10, 11, 7, 3, 0;$
$B=2, 6, 10, 11, 12, 8, 4, 3, 0;$
$B^{-1}=3, 4, 8, 12, 11, 10, 6, 2, 0.$

Если игру ДВЕНАДЦАТЬ рассматривать как обыкновенное «путешествие по графу», то к этому набору элементарных серий необходимо было бы добавить серии $C=2, 1, 5, 9, 10, 11, 12, 8, 4, 3, 0$, $D=2, 6, 10, 11, 7, 3, 0$ и им обратные.

Упражнение 20. Найдите алгоритм решения игры ДВЕНАДЦАТЬ и покажите, что ее группа совпадает с группой S_{12}.

Основной трудностью при решении этой задачи является нахождение формулы, которая переставляет только фишки 7 и 8. Существует ли формула для этой цели с длиной меньше чем 39 букв?

Советы по изготовлению игр

Удобнее всего прикрепить игровое поле к прямоугольному железному листу, а в качестве фишек использовать кусочки магнита (например, фишки от магнитных шашек).

Некоторые варианты игр типа «путешествие по графу» можно осуществить, устанавливая дополнительные перегородки. На странице 57 изображены игры ТЕРПЕНИЕ, ДУМАЙ БЫСТРЕЕ, КУБОЛОГИЯ и КОМБИНАТОР в таком исполнении.

В общеизвестной игре ПЯТНАДЦАТЬ, изготовленной таким же образом, не всякую позицию можно привести к стандартной, а только такую, которая соответствует четной перестановке фишек (фишки 6 и 9 в этой игре — разные).

Перевертыши

Кандидат физико-математических наук
В. Н. ДУБРОВСКИЙ

Раскрывать секрет решения головоломки — занятие столь же нечестное, как сообщать заядлому болельщику счет ночного футбольного матча перед его телевизионной трансляцией на другой день. Поэтому в нашем рассказе о двух головоломках-«перевертышах», знакомых читателю по обложкам 1-го и 2-го номеров «Кванта» за этот год, вопросов будет больше, чем ответов. Но прежде чем задавать вопросы и отвечать на них, напомним, как эти головоломки устроены.

В одной головоломке 8 одинаково раскрашенных в шесть цветов кубиков размером $1\times1\times1$ стоят вплотную друг к другу в квадратной коробке размером 3×3 (рис. 1). В другой головоломке вместо кубиков берутся 23 одинаковых пирамидки (правильных тетраэдра) с раскрашенными в четыре цвета вершинами (рис. 2,*а*), которые размещаются в коробке, имеющей форму правильного шестиугольника со стороной, в два раза большей ребра пирамидки (рис. 2,*б*). В обеих головоломках одно место пустует — «дырка», что позволяет переставлять элементы (кубики и пирамидки), *перекатывая их через ребро*. Задачи, которые мы будем обсуждать, звучат для двух головоломок по-разному. Пирамидки надо научиться переводить в «правильное», или «начальное», положение, показанное на рисунке 2,*б*, после того, как оно было разрушено произвольными перекатываниями. У кубиков много правильных положений (что это такое — ясно из рисунка 1; проверьте, что имеется 24 правильных положения); требуется одно из них превратить в другое. Но обе эти задачи — частные случаи общей для всех «перестановочных» головоломок задачи: *для любых двух размещений элементов выяснить, переводится ли одно в другое, а если да, то каким образом.*

Кубики

Попробуем придумать операции, которые бы поворачивали кубик, оставляя его на месте,— тогда можно будет повернуть все кубики поочередно. Поставим в коробку только один кубик и прокатим его по квадрату 2×2 вокруг одной из вершин основания A (рис. 3). Когда он вернется на место, мы увидим, что он повернулся относительной исходного положения на 120° около диагонали, выходящей из вершины A. Точно так же можно катать по квадрату 3 кубика — цепочкой: после четырех ходов дырка вернется на место, а кубики циклически переставятся (рис. 4) — эту операцию, когда перестановка происходит п р о т и в часовой стрелки вокруг точки A, обозначим C_A. Ясно, что операция C_A^3 (троекратно повторенная C_A) возвращает все 3 кубика на исходные места, причем каждый из них поворачивается на 120° вокруг своей диагонали, выходящей из A (см. рис. 4). Чтобы повернуть эти же кубики в обратном направлении, нужно выполнить обратную операцию $C_A^{-1}=$

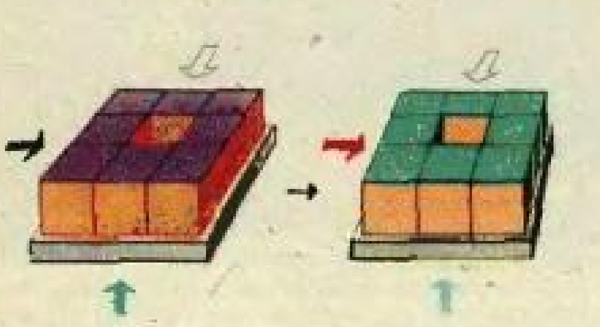


Рис. 1.

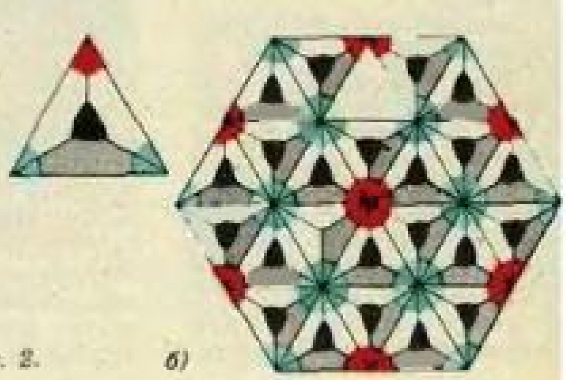


Рис. 2. а) б)

$=(C_A^{-1})^3$, где C_A^{-1} — обход дырки вокруг точки A по часовой стрелке.

Итак, мы можем поворачивать кубики на своих местах, но пока только группами по 3. Теперь уже нетрудно придумать и операции, которые бы поворачивали только один кубик. Для них хватает поля размером 3×2 клетки. Пусть свободная клетка расположена вверху (рис. 5), она принадлежит двум квадратам 2×2 с центрами A и B. Операция C_A не затрагивает два правых кубика, а операция C_B — два левых, поэтому операции $R_1 = C_A^3 C_B^3 C_A^{-3} C_B^{-3}$, $R_2 = C_A^{-3} C_B^3 \times C_A^3 C_B^{-3}$*) и им подобные (см. задачу 1) заведомо оставляют эти 4 крайних кубика неподвижными; пятый же кубик (назовем его «боковым»), как можно проверить, поворачивается в обоих случаях на 180°: при R_1 — вокруг оси, параллельной AB, при R_2 — вокруг «горизонтальной» оси, перпендикулярной AB. Операция вида $[X, Y] = XYX^{-1}Y^{-1}$ называется *коммутатором* операций X и Y. Коммутаторы оказываются очень полезными во всех головоломках с переставляющимися элементами; имеются, например, алгоритмы сборки кубика Рубика, целиком основанные на коммутаторах (см. статью В. и С. Залгаллеров «Венгерский шарнирный кубик» в «Кванте» № 12 за 1980 год).

Задачи

1. Рассмотрите всевозможные коммутаторы операций $C_A^{\pm 3}$, $C_B^{\pm 3}$. Покажите, что все они действуют как R_1 или R_2 или как $R_1 R_2$ (поворот кубика на 180° вокруг вертикальной оси).

2. Покажите, что существует 24 способа поставить кубик на заданную клетку; из них только 12 можно получить из исходного положения перекатываниями по замкнутым маршрутам, а из этих 12 только 4 получаются при действии коммутаторов $[X, Y]$, где X и Y — произвольные операции, возвращающие кубик на исходное место. Придумайте кратчайшую цепочку ходов, при выполнении которой кубик появляется на заданном поле во всех 12 возможных положениях.

*) Порядок выполнения операций — слева направо; например, для $R_1 = C_A^3 C_B^3 C_A^{-3} C_B^{-3}$ сначала выполняется операция C_A^3, затем C_B^3, C_A^{-3} и, наконец, C_B^{-3}.

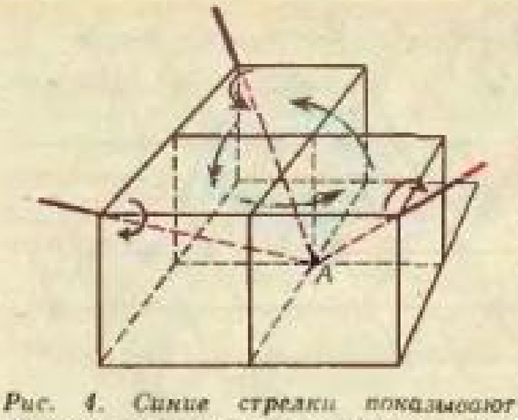


Рис. 4. Синие стрелки показывают перемещение кубиков при операции C_A, красные — вращение кубиков при операции C_A^3.

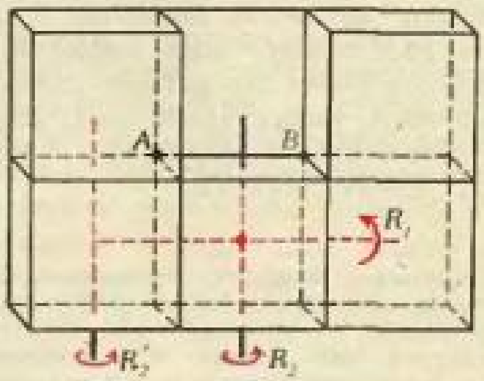


Рис. 5.

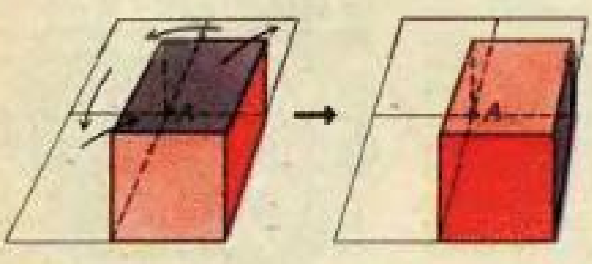


Рис. 3.

Итак, мы научились поворачивать 4 «боковых» кубика. Чтобы повернуть угловой кубик, достаточно поставить его на место бокового, применить операцию R_1 или R_2, а потом вернуть назад: например (см. рис. 5), операция $R_2' = C_A R_2 C_A^{-1} = C_A^{-2} C_B^3 C_A^3 C_B^{-3} C_A^{-1}$ поворачивает левый нижний кубик на 180° вокруг «горизонтальной» оси, перпендикулярной AB (аналогичную операцию для правого нижнего кубика составьте самостоятельно).

Теперь мы умеем поворачивать все кубики, но, наверное, не самым коротким способом (число ходов у нас равно $8 \cdot 48 = 384$): ведь каждый кубик поворачивается отдельно и к тому же остается на месте, что не обязательно*).

*) Для случая, когда пустое место не в центре, а слева внизу, А. Б. Ходулев придумал решение в 100 ходов, причем кубики поворачиваются здесь не на 180°, а на 90°: ЛП²ПВ²ЛП(ПВЛП)³НЛВ²П² НЛ(ВПНЛ)³НПВЛВПН²Л²(ВП)²Н²ЛВЛНП²В²Л²Н² ПВЛВП²Н²ЛВ²НПЛНПВ²Л²Н²П²ВЛНЛВ²П²НЛВП; буквы П, Л, В и Н в этой записи означают ходы, при которых кубик передвигается вправо, влево, вверх и вниз.

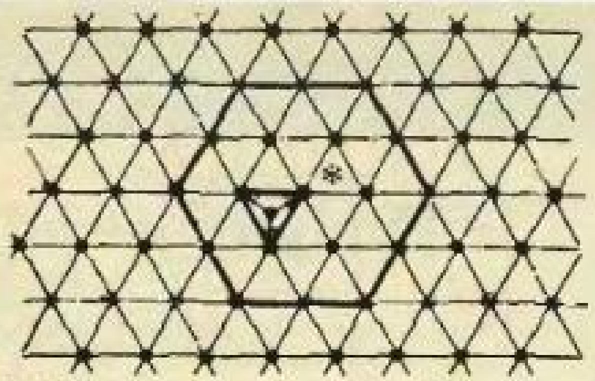


Рис. 6.

Другой изъян нашего решения в том, что оно неполно: мы указали только два варианта поворота кубиков (на 180° вокруг осей, параллельных бортам коробки), но, как следует из задачи 2, таких вариантов, даже если оставлять кубики на своих местах, может быть 11.

Задачи

3. Придумайте операции, поворачивающие на месте только один кубик на 120° вокруг его диагоналей.

4. Найдите как можно более короткие решения головоломки «кубики-перевертыши» для всех 23 «правильных» расстановок, отличных от исходной.

5.* Как узнать по двум данным расстановкам кубиков, переводится ли одна в другую? Каково максимальное число попарно непереводимых друг в друга расстановок?

Пирамидки

Правила действий с пирамидками-перевертышами как будто такие же, как с кубиками. Но сходство между ними оказывается чисто внешним. Дело в том — и это очень существенно,— что в отличие от куба ориентация правильного тетраэдра после нескольких перекатываний однозначно определяется его исходным положением и полем, на которое он попал, и не зависит от его маршрута.

Это легко доказать с помощью рисунка 6. Нашу пирамидку можно поставить любой гранью на один из треугольников сетки, изображенной на этом рисунке, так, чтобы цвета ее вершин совпали с цветами соответствующих узлов сетки. Более того, если цвета вершин и узлов совпали, то независимо от того, на каком треугольнике сетки оказался тетраэдр, они будут совпадать и после перекатывания через любое ребро. Следовательно, каким бы путем ни прикатить пирамидку на заданную ячейку, итоговое расположение цветов ее нижних вершин, а значит и цвет верхней вершины, будет одним и тем же.

Доказанное свойство пирамидок вынуждает нас отказаться от прежней стратегии — поворачивать элементы по отдельности, каждый на своем месте,— ведь если прокатить пирамидку по замкнутому пути, она вернется точно в начальное положение. Наоборот, для каждой пирамидки придется искать место, **куда** ее надо прикатить, а тогда уж нужная ориентация установится автоматически.

Возьмем одну пирамидку в «правильном» положении (рис. 7) и обойдем ею все поля нашей шестиугольной коробки. Мы увидим, что только на двух полях ее ориентация будет «правильной»: на исходном поле и на поле, симметричном ему относительно центра шестиугольника. (Это легко проверить, «накладывая» рисунок 6 на рисунок 7: при любом наложении только на двух парах полей совпадут цвета вершин.) Занумеруем числами от 1 до 12 поля головоломки (рис. 8) так, чтобы симметричные поля получили одинаковые номера, а каждой пирамидке дадим номер поля, на котором она стоит в «правильном» положении. Наша цель — перевести каждую пирамидку на поле с ее собствен-

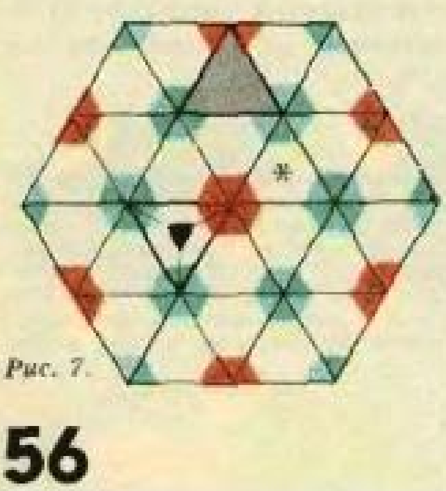


Рис. 7.

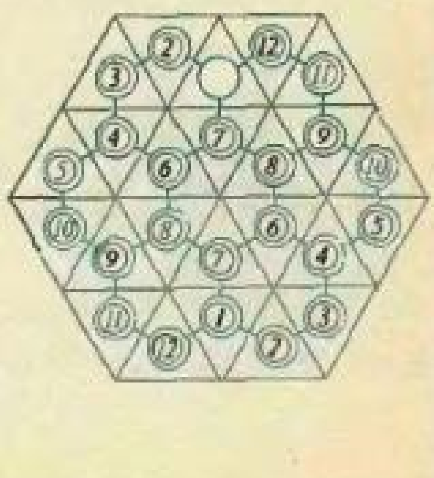


Рис. 8.

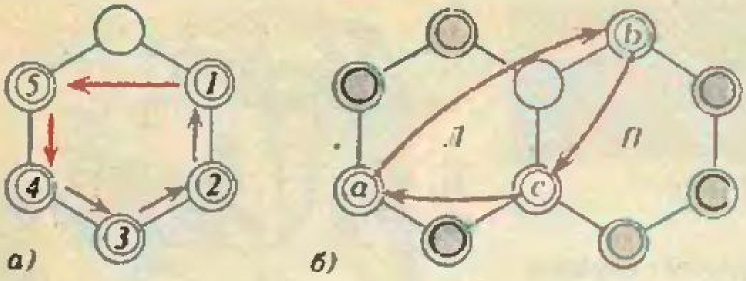


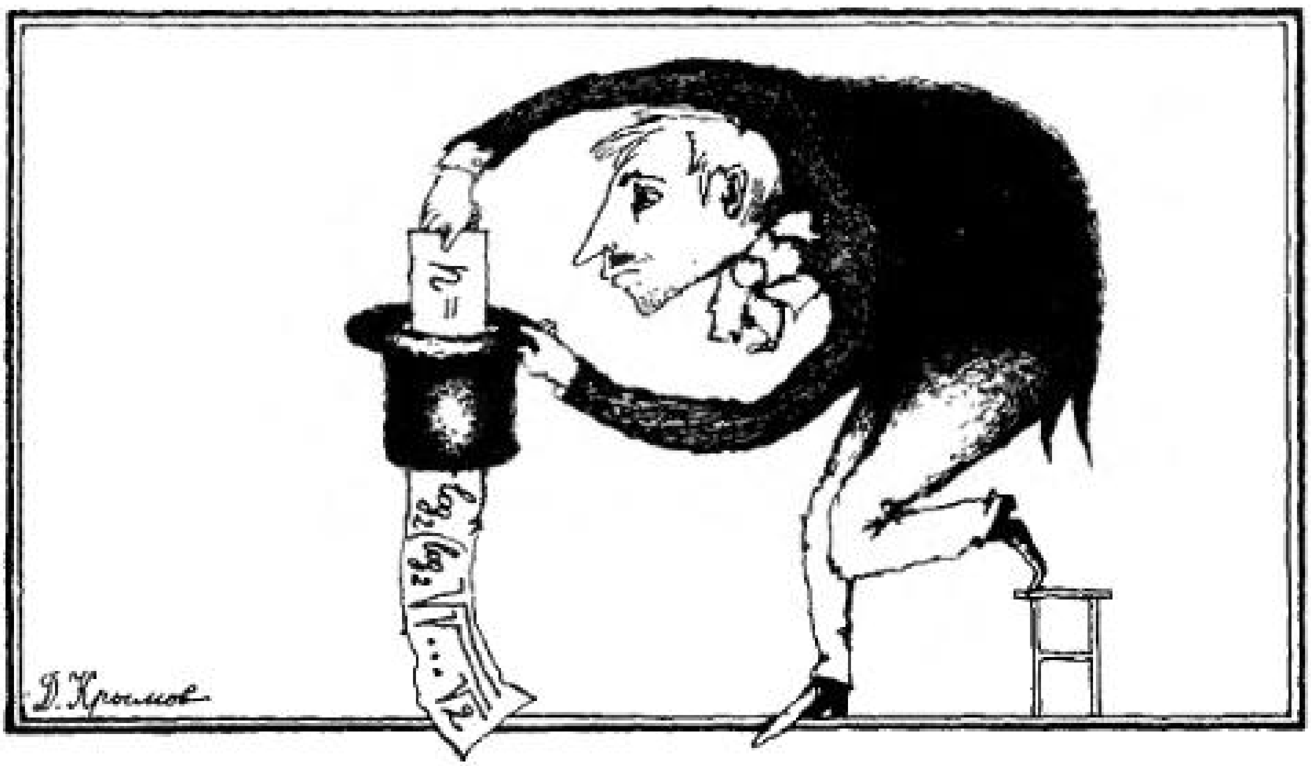
Рис. 9. а) Если последовательно передвинуть фишки 1, 2, 3, 4, 5, 1, получится циклическая перестановка, показанная красными стрелками. б) Пусть Л и П — циклические перестановки рисунка а) для левого и правого шестиугольников рисунка б); тогда операция $П^2Л^2П^{-2}Л^{-2}$ циклически переставляет три фишки a, b и c.

ным номером. Полного решения этой задачи мы не даем. Заметим лишь, что она упростится, если заменить 24 треугольника нумерованными кружками, а пирамидки — 23 фишками (см. рис. 8), которые разрешается передвигать на пустой кружок по голубым линиям. (Они соединяют кружки, отвечающие соседним треугольникам.) Головоломки этого типа подробно обсуждались в статье Д. Вакарелова «Путешествия по графам» («Квант», 1986, № 7, с. 50).

Здесь мы подскажем только одну, но очень полезную операцию — циклическую перестановку 3 фишек — см. рисунок 9 (заметьте, это снова коммутатор!).

Итак, эта игра, в отличие от кубиков-перевертышей, оказалась очень близка к знаменитой «игре 15», хотя с виду должно быть как раз наоборот. Но в «игре 15» все фишки действительно пронумерованы, поэтому сразу ясно, где место каждой; пирамидки сами по себе абсолютно одинаковые, различаются они только своим расположением относительно коробки, и нужны известные усилия и тренировка, чтобы научиться безошибочно определять, куда какую пирамидку ставить.

Задача 6. При каком условии некоторую расстановку пирамидок можно перевести в правильную? Каково максимальное число попарно непереводимых друг в друга расстановок?



Игры и головоломки

Из чего угодно — что угодно

Л. А. ШТЕЙНГАРЦ

Однажды мне нужно было произвести кое-какие вычисления. Я достал свой старенький калькулятор, заглянул в тетрадь — первым стояло число 23 — и нажал на клавишу с цифрой 2. Клавиша не работала. Попробовал нажать на клавишу с цифрой 3 — опять не получилось. Нажал на клавишу «1» — все в порядке, на табло засветилась зеленая единица. Проверил клавиши со знаками операций — работают. Как же быть? Пришло в голову, что $23=11\times(1+1)+1$, и я, быстро нажав в нужной последовательности пять раз на клавишу «1», два раза — на «$+$», и один раз — на $\times$, увидел на табло 23.

Увлекшись, я вскоре забыл про первоначальные нужные мне вычисления. Меня уже волновал «принципиальный» вопрос — *можно ли любое натуральное число изобразить при помощи какого-нибудь одного произвольного числа?* Здесь я должен объяснить читателю, какой смысл я вкладываю в слова «изобразить при помощи одного числа...». Я рассуждаю, как человек, у которого в руках калькулятор: я считаю, что в записи $\sqrt{2}$ используется только о д н а двойка, в записи $\lg\sqrt{2}$ — тоже одна двойка, хотя на самом-то деле $\sqrt{2}$ — это $\sqrt[2]{2}$, а $\lg\sqrt{2}$ — это $\log_{10}\sqrt[2]{2}$. Но у меня есть клавиши, на которых, в частности, есть значки $\sqrt{\ }$ и lg: нажал на них — получил результат!

Если читатель согласен на такие «правила», то я могу предложить ему поиграть в игру «из чего угодно — что угодно». Я приведу цепочку своих рассуждений, а читателю предоставляется убедиться в их «справедливости».

1. *Любое натуральное число можно изобразить при помощи т р е х двоек:*

$$n=-\log_2\Bigl(\log_2\underbrace{\sqrt{\sqrt{\ldots\sqrt{2}}}}_{n\text{ раз}}\Bigr).$$

2. *Любое натуральное число можно изобразить при помощи д в у х ч и с е л, 2 и 10:*

$$n=-\log_2\Bigl(\lg\underbrace{\sqrt{\sqrt{\ldots\sqrt{10}}}}_{n\text{ раз}}\Bigr).$$

3. *Число 10 можно изобразить при помощи о д н о й двойки:*

$$10=\left[\sqrt{\left|\left[-\sqrt{\left|\left[-\arccos\left(-[\sqrt{2}]\right)\right]\right|!}\right]\right|!}\right]$$

(здесь $[x]$ — это *целая часть* числа x).

4. *Любое натуральное число можно изобразить при помощи д в у х двоек.*

5. *При любом натуральном n между числами $\frac{n}{\lg 2}$ и $\frac{n+1}{\lg 2}$ существует хотя бы одно натуральное число k:*

$$\frac{n}{\lg 2}<k<\frac{n+1}{\lg 2};$$

при этом $[\lg 2^k]=n$.

6. *Любое натуральное число можно изобразить при помощи одной десятки:*

$$n=[-\lg(\lg\underbrace{\sqrt{\sqrt{\ldots\sqrt{10}}}}_{k\text{ раз}})],$$

где k таково, что $\frac{n}{\lg 2}<k<\frac{n+1}{\lg 2}$.

7. *Любое натуральное число можно изобразить при помощи одной двойки.*

8. *Любое натуральное число можно изобразить при помощи одной единицы.*

9. *Единицу можно изобразить при помощи одного произвольного числа:*

$$1=[|\sin x|]!$$

(напомним, что $0!=1!=1$).

10. *Любое натуральное число можно изобразить при помощи одного произвольного числа.*

К этой не совсем серьезной игре можно сделать одно серьезное замечание: к сожалению, в наших утверждениях нельзя пропустить слово «натуральное». Дело в том, что множество всех чисел, которые могут быть изображены при помощи одного числа (или конечного количества чисел), является *счетным*. А множество действительных чисел, увы, *несчетно*...

Упражнения

1. Изобразите при помощи цифр 1, 9, 8, 7 (взятых ровно по одному разу) все натуральные числа от 1 до 1987.

2. Изобразите при помощи одного единственного числа 1987 число 1988.

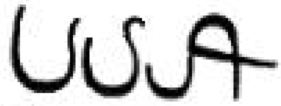
3. Верно ли, что любое натуральное число можно изобразить при помощи одного произвольного числа, если клавиша с символом lg не работает (автору статьи это неизвестно)?

Игры и головоломки

Амбиграммы

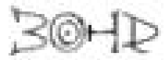
Нашим читателям вряд ли нужно представлять замечательного популяризатора математики М. Гарднера. В течении многих лет он вел математический раздел журнала «Scientific American». После ухода М. Гарднера на пенсию его сменил Даглас Хофстадтер, который назвал этот раздел «Метамагические темы». Д. Хофстадтер — человек с широким кругом научных интересов, включающим математику, физику, теоретическое программирование, генетику и философию. Его книга «Гедель, Эшер, Бах: вечная золотая коса», посвященная математическим идеям выдающегося логика Курта Геделя и созвучным им мотивам творчества М. Эшера и И.-С. Баха, была включена в списки бестселлеров, а ее автор получил почетную Пулитцеровскую литературную премию. Другая его книга содержит собрание статей, опубликованных Хофстадтером в «Scientific American».

Д. Хофстадтер — профессор теоретического программирования Индианского университета в США. Сейчас он работает над книгой, посвященной «амбиграммам» — так Д. Хофстадтер называет надписи, которые читаются по-разному в зависимости от того, как их расположить*). Профессор Хофстадтер любезно предоставил «Кванту» несколько амбиграмм. Все они, конечно, написаны по-английски. Автор предлагает читателям «Кванта» попробовать свои силы в составлении амбиграмм на русском языке. Наиболее интересные из них он готов опубликовать в своей книге об амбиграммах.

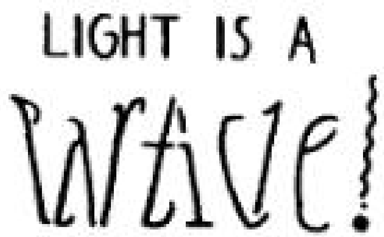


1. Вы, конечно, легко прочитали «USA», т. е. США. Поверните страницу по часовой стрелке на 90° и вы прочитаете «СССР». Д. Хофстадтер надеется, что эта амбиграмма созвучна новому стилю взаимоотношений наших стран.

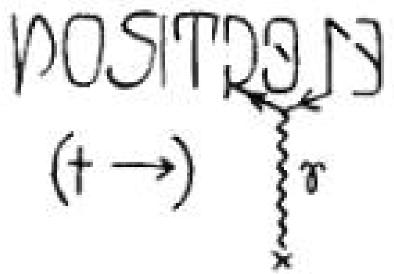
Четыре амбиграммы с «физическим смыслом».



2. Здесь написана фамилия одного из самых крупных физиков XX века — Нильса Бора. Поверните рисунок на 90° против часовой стрелки...



3. Чем же все-таки является свет: волной или частицей? Здесь написаны оба утверждения: «light is a wave» («свет — волна») и «light is a particle» («свет — частица»).



4. Позитрон — частица, двойственная электрону. На этом рисунке написано «positron», но если перелистнуть страницу и прочитать надпись на просвет, то вы увидите «electron».

5. Наибольшие заслуги в открытии квантовой механики принадлежат двум ученым: Шредингеру и Гейзенбергу. На этом рисунке вы видите фамилию одного из них, а если картинку повернуть на 180°, то вы прочитаете фамилию другого.

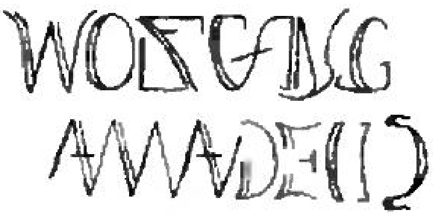
Следующие четыре амбиграммы посвящены великим деятелям науки и искусства.

6. Это — немецкий композитор И.-С. Бах. Поверните рисунок на 90° против часовой стрелки: «фуга» — музыкальная форма, которой Бах широко пользовался.

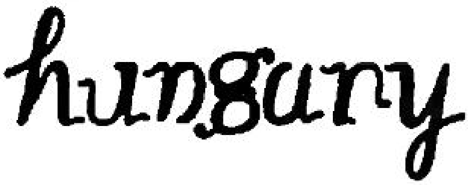
7. «Ньютон» — на этой амбиграмме его имя выдерживает поворот на 180°.

8. «Сальвадор Дали», репродукции картин которого появлялись в «Кванте». Перелистните страницу и прочитайте надпись на просвет...

*) Слово «амбиграммы» буквально означает «двойственные изображения».



9. Здесь написано «Вольфганг Амадеус». Перелистните страницу и поверните ее на 180° — вы прочитаете «Амадеус Моцарт». Три последние амбиграммы — географические названия. Все они обладают симметрией.



10. «Hungary» — это Венгрия. Надпись выдерживает поворот на 180°.

11. Такой же симметрией обладает «Чикаго».

12. А город «Атланта» не меняется, если рассматривать его на просвет.

Может быть, вам захочется перерисовать амбиграммы на кальку — так удобнее рассматривать их на просвет.

Итак, предлагаем вам попробовать свои силы в изобретении амбиграмм. Лучшие из них мы опубликуем.

Небольшой переполох в аптеке

Как-то раз в аптеку доставили 10 флаконов лекарства. В каждом флаконе по 1000 пилюль. Не успел провизор мистер Уайт расставить флаконы на полке, как почтальон принес телеграмму.

Мистер Уайт читает телеграмму управляющей аптекой мисс Блек.

Мистер Уайт. Срочно. Воздержитесь от продажи лекарства. По ошибке фармацевта в одном из флаконов каждая пилюля содержит на 10 мг лекарства больше допустимой дозы. Просьба незамедлительно вернуть флакон с повышенной дозой лекарства.

Мистер Уайт встревожился.

Мистер Уайт: «Нечего сказать, повезло! Теперь мне придется брать по пилюле из каждого флакона и взвешивать. Веселенькое занятие!»

Тяжело вздохнув, мистер Уайт хотел было приступить к неожиданно свалившейся на него работе, как мисс Блек остановила его. Мисс Блек: «Минуточку! Взвешивать 10 раз совсем не нужно! Достаточно произвести 1 взвешивание.»

Каким образом при помощи 1 взвешивания можно установить, в каком флаконе пилюли содержат повышенную дозу лекарства?

Идея мисс Блек состояла в том, чтобы взять 1 пилюлю из первого флакона, 2 пилюли из второго флакона, 3 пилюли из третьего флакона,..., 10 пилюль из десятого флакона...

...положить 55 отобранных пилюль на одну чашу весов и взвесить их. Предположим, что пилюли весили бы 5510 мг, или на 10 мг больше, чем следует. Тогда мисс Блек заключила бы, что среди отобранных пилюль имеется 1 пилюля с повышенной дозой лекарства, а ровно 1 пилюля была извлечена из первого флакона.

Если бы вес 55 пилюль оказался на 20 мг больше нормы, то это означало бы, что среди отобранных пилюль имеются 2 пилюли с повышенной дозой лекарства. Их можно было извлечь только из второго флакона. Так мисс Блек сумела понизить число взвешиваний до 1. Меньше не бывает!

Через 6 месяцев в аптеку доставили еще 10 флаконов того же лекарства. И на этот раз не успели распаковать коробку с флаконами, как почтальон принес телеграмму с извещением о том, что на этот раз фармацевт допустил более серьезную ошибку.

В посылке могло оказаться от 1 до 10 флаконов с пилюлями, каждая из которых на 10 мг тяжелее нормы. Мистер Уайт был вне себя от ярости.

Мистер Уайт: «Что делать, мисс Блек? Ваш метод, который позволил нам так блестяще выйти из затруднения в прошлый раз, неприменим!» Мисс Блек задумалась.

Мисс Блек: «Вы правы, мистер Уайт. Но если слегка модифицировать мой метод, то при помощи 1 взвешивания и на этот раз можно определить, в каких флаконах пилюли содержат повышенную дозу лекарства.»

Что имела в виду мисс Блек?

Как определить непригодные пилюли?

По условиям первой задачи на взвешивание пилюль все более тяжелые пилюли находятся в одном флаконе. Взяв из различных флаконов различное число пилюль (проще всего взять из каждого флакона число пилюль, равное его номеру), мы установим взаимно однозначное соответствие между множеством номеров и множеством флаконов.

Чтобы решить вторую задачу, необходимо воспользоваться последовательностью, которая бы сопоставляла каждому флакону отличный от других номер и обладала бы еще одним дополнительным свойством: сумма членов любой ее подпоследовательности должна быть отличной от суммы членов любой другой ее подпоследовательности. Существуют ли такие последовательности? Да, существуют. Примером может служить хотя бы геометрическая прогрессия со знаменателем 2 и первым членом 1: 1, 2, 4, 8, 16, ... Все члены этой последовательности — степени числа 2, причем показатель возрастает от 0 с единичным шагом. Именно эта последовательность лежит в основе двоичной системы счисления.

Решение задачи состоит в том, чтобы, выстроив флаконы в ряд, взять 1 пилюлю из первого флакона, 2 пилюли из второго флакона, 4 пилюли из третьего флакона и т. д., затем собрать все отобранные пилюли и взвесить. Предположим, что пилюли оказались на 270 мг тяжелее, чем нужно. Так как

(Окончание см. на с. 61)

Игры и головоломки

Небольшой переполох в аптеке

(Начало см. на с. 50)

каждая пилюля с повышенной дозой лекарства тяжелее нормальной на 10 мг, то, разделив 270 на 10, мы получим 27 — число более тяжелых пилюль.

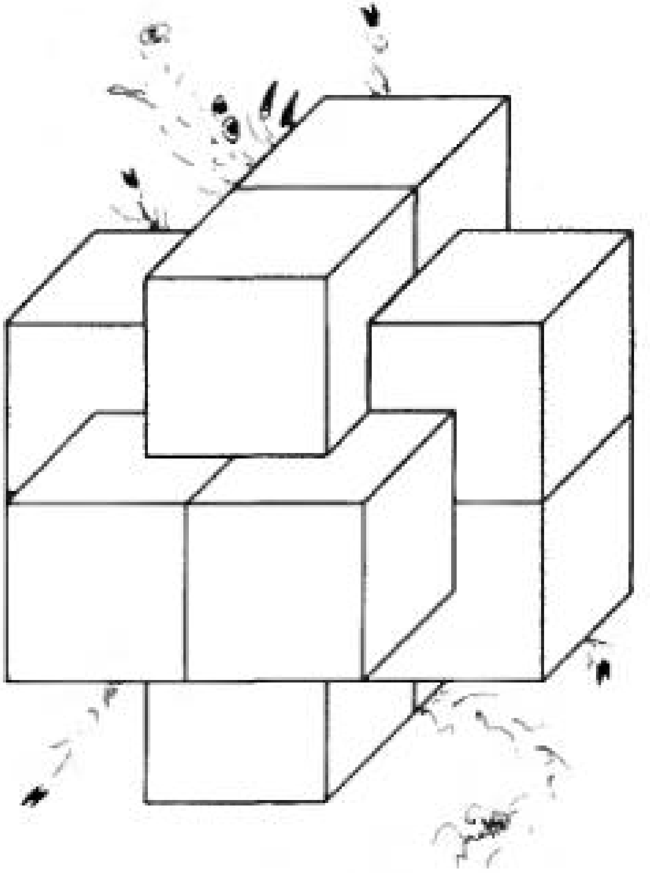
Запишем число 27 в двоичной системе: 11011. Двоичные разряды, в которых стоят единицы, говорят нам, какие степени числа 2 в сумме дают двоичное число 11 011 (или десятичное число 27): 1, 2, 8 и 16. Единицы стоят в первом, втором, четвертом и пятом двоичных разрядах. Следовательно, непригодные пилюли с повышенным содержанием лекарства находятся в первом, втором, четвертом и пятом флаконах. Почетное место отведено двоичной системе и в занимательной математике.

Вот простой карточный фокус, который позволит вам удивить и позабавить ваших друзей. Хотя внешне он ничем не напоминает задачу об отыскании флаконов с непригодными пилюлями, и задача, и фокус по существу «двоичны» — в основе их лежит двоичная система счисления.

Пусть кто-нибудь из зрителей тщательно перетасует колоду карт. Положив ее в карман, попросите вашего помощника назвать любое число от 1 до 15, после чего, сунув руку в карман, достаньте карты, значения которых в сумме равны названному числу (туз считается равным 1).

Секрет фокуса прост. Вы заранее кладете в карман туз, двойку, четверку и восьмерку. Определить на глаз недостачу четырех карт в колоде невозможно, и ваши зрители будут пребывать в уверенности, что вы попросили перетасовать полную колоду. Перетасованную колоду вы подкладываете под четыре карты, уже лежащие в кармане. После того как число названо, вы мысленно представляете его в виде суммы степеней числа 2 (например, если названо число 10, то вы мысленно разлагаете его в сумму $8+2=10$) и, сунув руку в карман, достаете двойку и восьмерку.

Из книги М. Гарднера «Есть идея», М.: Мир, 1982.



Игры и головоломки

Превращения головоломки адмирала Макарова

Д. ВАКАРЕЛОВ, А. КАЛИНИН

Мир устроен так, что вещи в нем могут жить дольше, чем люди, иметь разные имена в разное время и в разных странах. Игрушка, которую вы видите на рисунке, известна в нашей стране как «головоломка адмирала Макарова». В других странах она имеет другие имена, из которых наиболее часто встречающиеся — «дьявольский крест» и «чертов узел».

Этот узел связывается из 6 брусков квадратного сечения. В брусках имеются пазы, благодаря которым и возможно скрещивание брусков в центре узла. Один из брусков не имеет пазов, он закладывается в узел последним, а при разборке вынимается первым.

Автор этой головоломки неизвестен. Появилась она много веков назад в Китае. В ленинградском Музее антропологии и этнографии им. Петра Великого, известном как «Кунсткамера», хранится старинная, сандалового дерева шкатулка из Индии, в 8 углах которой пересечения брусков каркаса образуют 8 головоломок. В средние века моряки и купцы, воины и дипломаты забавлялись такими головоломками и заодно развозили их по свету. Адмирал Макаров, дважды бывавший в Китае до своей последней поездки и гибели в Порт-Артуре, привез игрушку в Петербург, где она вошла в моду в светских салонах. В глубину России головоломка проникала и другими дорогами. Известно, что в деревню Олсуфьево Брянской области чертов узел принес солдат, вернувшийся с русско-турецкой войны.

Сейчас головоломку можно купить в магазине, но приятнее сделать ее своими руками. Наиболее подходящий размер брусков для самодельной конструкции: 6×2×2 см.

Многообразие чертовых узлов

До начала нашего века, за несколько сот лет существования игрушки в Китае, Монголии и Индии было придумано более ста вариантов головоломки, отличающихся между собой конфигурацией вырезов в брусках. Но самыми популярными остаются два варианта. Показанный на рисунке 1 решается довольно легко, просто его и изготовить. Именно эта конструкция использована в древней индийской шкатулке. Из брусков рисунка 2 складывается головоломка, которая называется «Чертов узел». Как вы догадываетесь, свое название она получила за трудность решения.

В Европе, где, начиная с конца прошлого века, «Чертов узел» получил широкую известность, энтузиасты стали придумывать и делать наборы брусков с разными конфигурациями

Если вас заинтересовали непростые проблемы «Суперузлов» из статьи «Превращения головоломки адмирала Макарова» (с. 70), попробуйте свои силы в следующих задачах.

1. Придумайте головоломку, которая имеет следующий алгоритм:

$$(6\bar{z})^2,\ 3\bar{x},\ 1z,\ 4x,\ 2x,\ 2y,\ 5x,\ 5z,\ 3z,\ 3\bar{y}^{\uparrow}.$$

Обратите внимание, что это будет улучшение головоломки рисунка 5 (с. 74) с доведением ее сложности до 10.

2. Найдите алгоритмы решения головоломок, показанных на рисунке 1 (сложности 10) и рисунке 2 (сложности 12).

3. Придумайте головоломку с алгоритмом решения

$$4\bar{z},\ 1\bar{z},\ (2,3)x,\ 2\bar{z},\ 3\bar{x},\qquad (6z)^2,\ 3x,\ 2z,\ (2,3,6)x^{\uparrow}.$$

4. Можно ли добавить в конце алгоритма предыдущей задачи ход 6y и придумать головоломку с этим или другим алгоритмом сложности 13? Решение этой задачи неизвестно. Ваши разработки вместе с моделями присылайте в редакцию.*

Может быть, вы сумеете открыть новые превращения «головоломки адмирала Макарова» и побьете существующие рекорды.

Д. Вакарелов

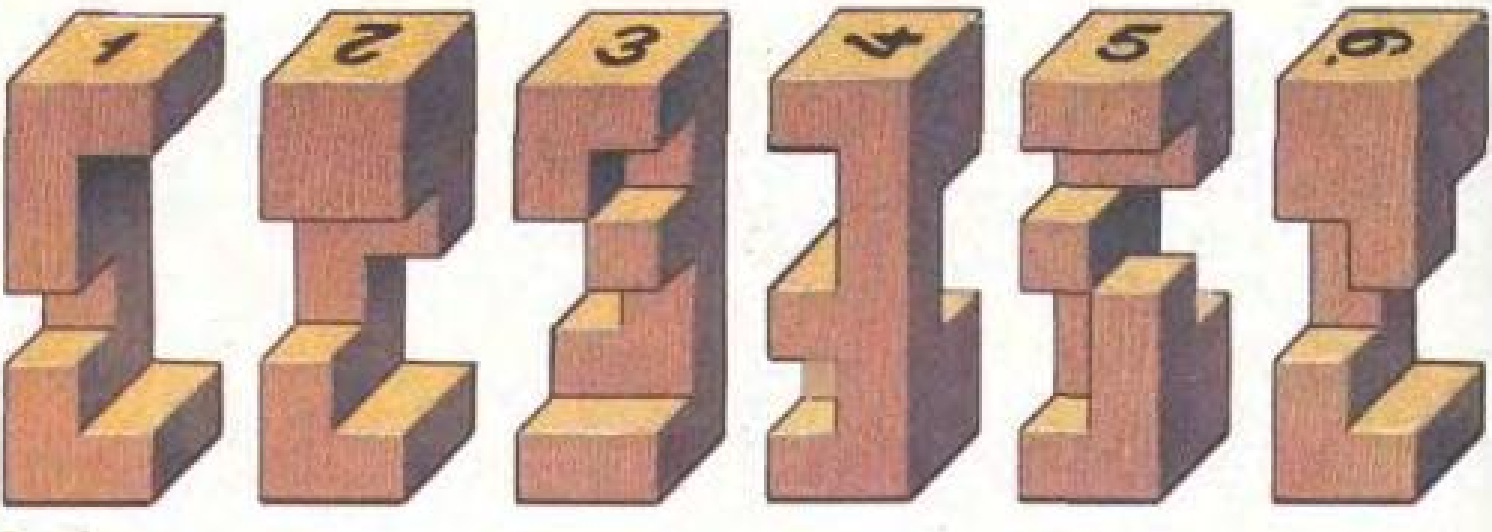


Рис. 1.

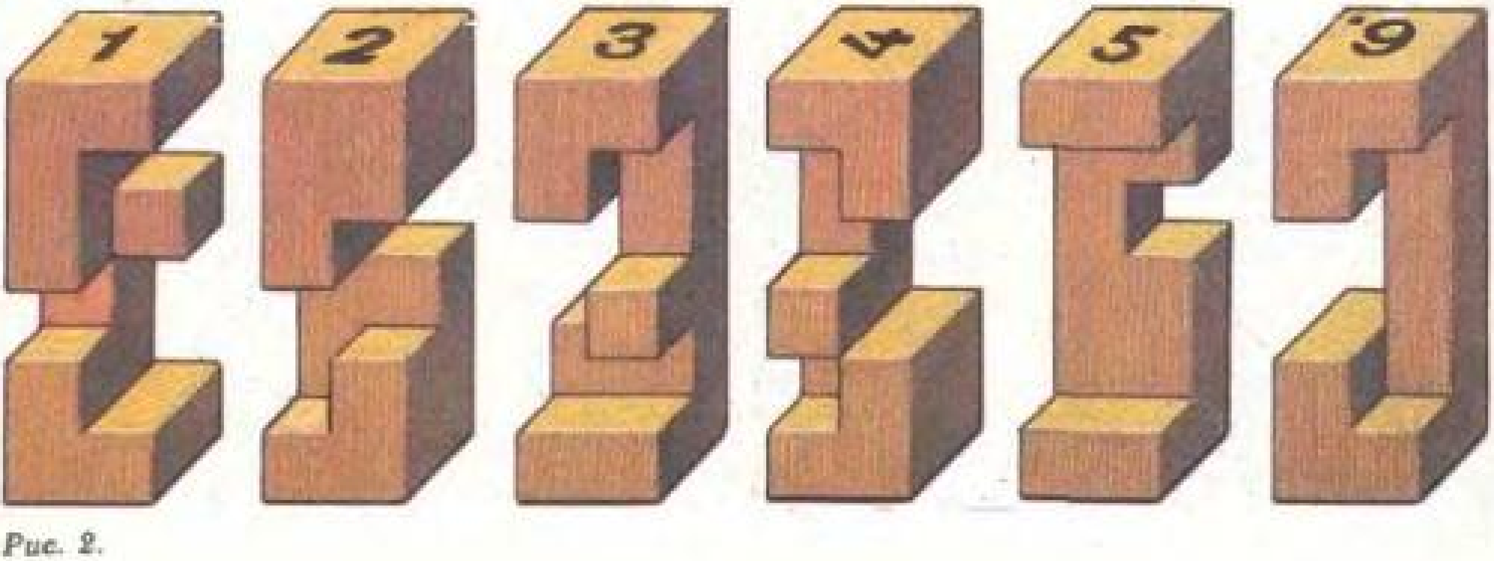


Рис. 2.

вырезов. Один из наиболее удачных комплектов позволяет получать 159 головоломок и состоит из 20 брусков 18 видов. Хотя все узлы внешне неразличимы, они совершенно по разному устроены внутри.

Болгарский художник, профессор Петр Чуховски, автор множества причудливых и красивых деревянных узлов из разного количества брусков, тоже занимался головоломкой «Чертов узел». Он разработал набор конфигураций брусков и исследовал всевозможные комбинации 6 брусков для одного простого его поднабора.

Настойчивее всех в таких поисках был голландский профессор математики Ван де Боер, который своими руками сделал набор из нескольких сотен брусков и составил таблицы, показывающие, как собрать 2906 вариантов узлов.

Это было в 60-е годы, а в 1978 году американский математик Билл Катлер написал программу для компьютера и методом полного перебора определил, что существует 119 979 вариантов головоломки из 6 элементов, отличающихся друг от друга комбинациями выступов и впадин в брусках, а также размещением брусков, при условии, что внутри узла нет пустот. Удивительно большое число для такой маленькой игрушки! Поэтому для решения задачи и понадобилась ЭВМ.

Как ЭВМ решает головоломки?

Конечно, не так, как человек, но и не каким-то волшебным способом. Компьютер решает головоломки (и другие задачи) по программе, программы пишут программисты. Пишут, как им удобно, но так, чтобы было понятно и ЭВМ. Как же ЭВМ манипулирует деревянными брусками?

Будем исходить из того, что мы имеем набор из 369 брусков, отличающихся друг от друга конфигурациями выступов (этот набор первым определил Ван де Боер). В ЭВМ надо ввести описания этих брусков. Минимальный вырез (или выступ) в бруске — это кубик с ребром, равным 0,5 толщины бруска. Назовем его единичным кубиком. В целом бруске содержатся 24 таких кубика (рисунок 1). В ЭВМ для каждого бруска заводится «малый» массив из $6\times2\times2=24$ чисел. Брусок с вырезами задается последовательностью 0 и 1 в «малом» массиве: 0 соответствует вырезанному кубику, 1 — целому. Каждый из «ма-

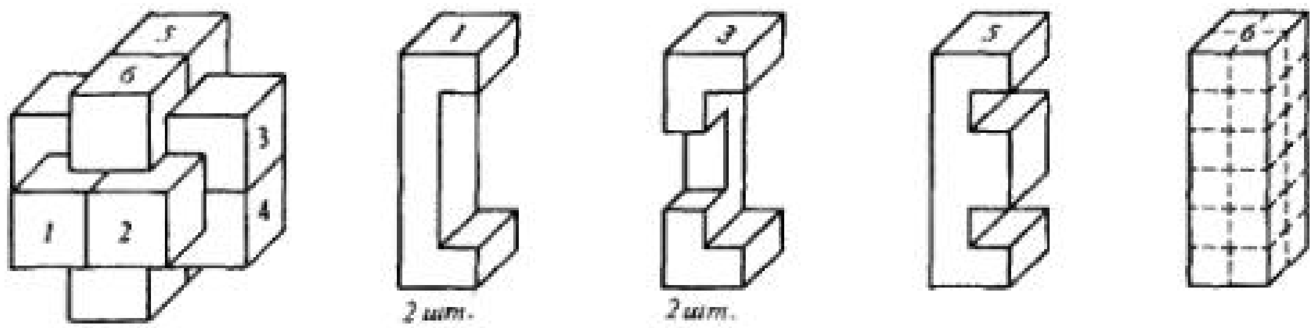


Рис. 1. Простейший вариант головоломки «чертов узел».

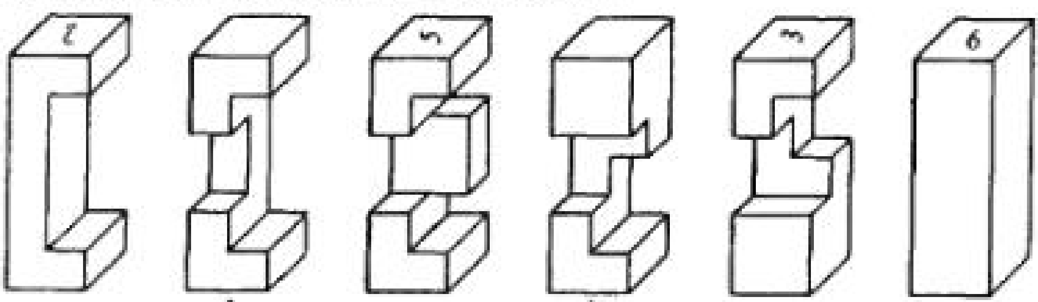


Рис. 2. Бруски классического варианта головоломки «чертов узел» — «головоломка адмирала Макарова».

лых» массивов имеет свой номер (от 1 до 369). Любому из них можно присвоить еще номер от 1 до 6, отвечающий положению бруска внутри головоломки.

Перейдем теперь к головоломке. Представим, что она помещается внутрь куба размером 8×8×8. В ЭВМ этому кубу соответствует «большой» массив, состоящий из 8×8×8=512 ячеек-чисел. Поместить определенный брусок внутрь куба — это значит заполнить соответствующие ячейки «большого» массива числами, равными номеру данного бруска.

Сравнивая 6 «малых» массивов и основной, ЭВМ (т. е. программа) как бы складывает вместе 6 брусков. По результатам сложения чисел она определяет, сколько и каких «пустых», «заполненных» и «переполненных» ячеек образовалось в основном массиве. «Пустые» ячейки соответствуют пустому пространству внутри головоломки, «заполненные» — соответствуют выступам в брусках, а «переполненные» — попытке соединить вместе два единичных кубика, что, естественно, запрещено. Такое сравнение производится многократно, не только с разными брусками, но и с учетом их разворотов, мест, которые они занимают в «кресте», и т. п.

В результате отбирают те варианты, в которых нет пустых и переполненных ячеек. Для решения этой задачи достаточно было бы «большого» массива размером 6×6×6 ячеек. Оказывается, однако, что существуют комбинации брусков, полностью заполняющие внутренний объем головоломки, но при этом разобрать их невозможно. Поэтому программа должна уметь проверять узел на возможность разборки. Для этого Катлер и взял массив 8×8×8, хотя его размеры, возможно, недостаточны для проверки всех случаев.

Он заполняется информацией о конкретном варианте головоломки. Внутри массива программа пытается «двигать» бруски, т. е. перемещает в «большом» массиве части бруска размером 2×2×6 ячеек. Перемещение происходит на 1 ячейку в каждом из 6 направлений, параллельных осям головоломки. Результаты тех из 6 попыток, в которых не образуется «переполненных» ячеек, запоминаются как исходные положения для следующих шестерок попыток. В результате строится дерево всевозможных движений до тех пор, пока какой-нибудь брусок целиком не выйдет из основного массива или же после всех попыток останутся «переполненные» ячейки, что соответствует варианту, который невозможно разобрать.

Вот так были получены на ЭВМ 119 979 вариантов «Чертова узла», в том числе не 108, как полагали древние, а 6402 варианта, имеющих 1 целый, без вырезов брусок.

Суперузел

Обратим внимание, что Катлер отказался от исследования общей задачи — когда узел содержит и внутренние пустоты. В этом случае количество узлов из 6 брусков сильно возрастает и полный перебор, необходимый для поиска допустимых решений, становится нереальным даже для современного компьютера. Но как мы увидим сейчас, самые интересные и трудные головоломки содержатся именно в общем случае — разборку головоломки тогда можно сделать далеко не тривиальной.

Благодаря наличию пустот, появляется возможность последовательно передвинуть несколько брусков прежде, чем удастся полностью отделить какой-либо брусок. Движущийся брусок отцепляет некоторые бруски, разрешает движение следующего бруска и одновременно зацепляет другие бруски.

Чем больше нужно проделать манипуляций при разборке, тем интереснее и труднее вариант головоломки. Пазы в брусках расположены так хитро, что поиск решения напоминает блуждание по темному лабиринту, в котором все время натыкаешься то на стены, то на тупики. Такого типа узел несомненно заслуживает и нового имени; мы будем называть его «суперузел». Мерой сложности суперузла назовем количество движений отдельных брусков, которые необходимо сделать до того, как первый элемент будет отделен от головоломки.

Мы не знаем, кто придумал первый суперузел. Наиболее знамениты (и наиболее трудны в решении) два суперузла: «колючка Билла» сложности 5, придуманная У. Катлером, и «суперузел Дюбуа» сложности 7. До сих пор считалось, что степень сложности 7 едва ли можно превзойти. Однако первому из авторов этой статьи удалось усовершенствовать «узел Дюбуа» и увеличить сложность до 9, а затем, используя некоторые новые идеи, получить суперузлы со сложностью 10, 11 и 12. Но число 13 остается пока непреодолимым. Может быть, число 12 является самой большой сложностью суперузла?

Решение суперузлов

Приводить чертежи таких трудных головоломок, как суперузлы, и не раскрывать их секретов было бы слишком жестоко по отношению даже к знатокам головоломок. Мы дадим решение суперузлов в компактной, алгебраической форме.

Перед разборкой берем головоломку и ориентируем так, чтобы номера деталей соответствовали рисунку 1. *Последовательность разборки* записывается в виде сочетания цифр и букв. Цифры означают номера брусков, буквы — направления движения в соответствии с показанной на рисунках 3 и 4 системой координат. Черта над буквой означает движение в отрицательном направлении оси координат. Один шаг — это перемещение бруска на 1/2 его ширины. Когда брусок передвигается сразу на два шага, его перемещение записывается в скобках с показателем степени 2. Если передвигают сразу несколько деталей, которые зацеплены между собой, то их номера заключают в скобки, например (1, 3, 6) x. Отделение бруска от головоломки отмечается вертикальной стрелкой.

Приведем теперь примеры лучших суперузлов.

Головоломка У. Катлера («колючка Билла»). Она состоит из деталей 1, 2, 3, 4, 5, 6, показанных на рисунке 3. Там же приводится алгоритм ее решения. Любопытно, что в журнале «Scientific American» (1985, № 10) приведен другой вариант этой головоломки и сообщается, что «колючка Билла» имеет единственное решение. Различие между вариантами — всего в одном бруске: деталях 2 и 2 *B* на рисунке 3.

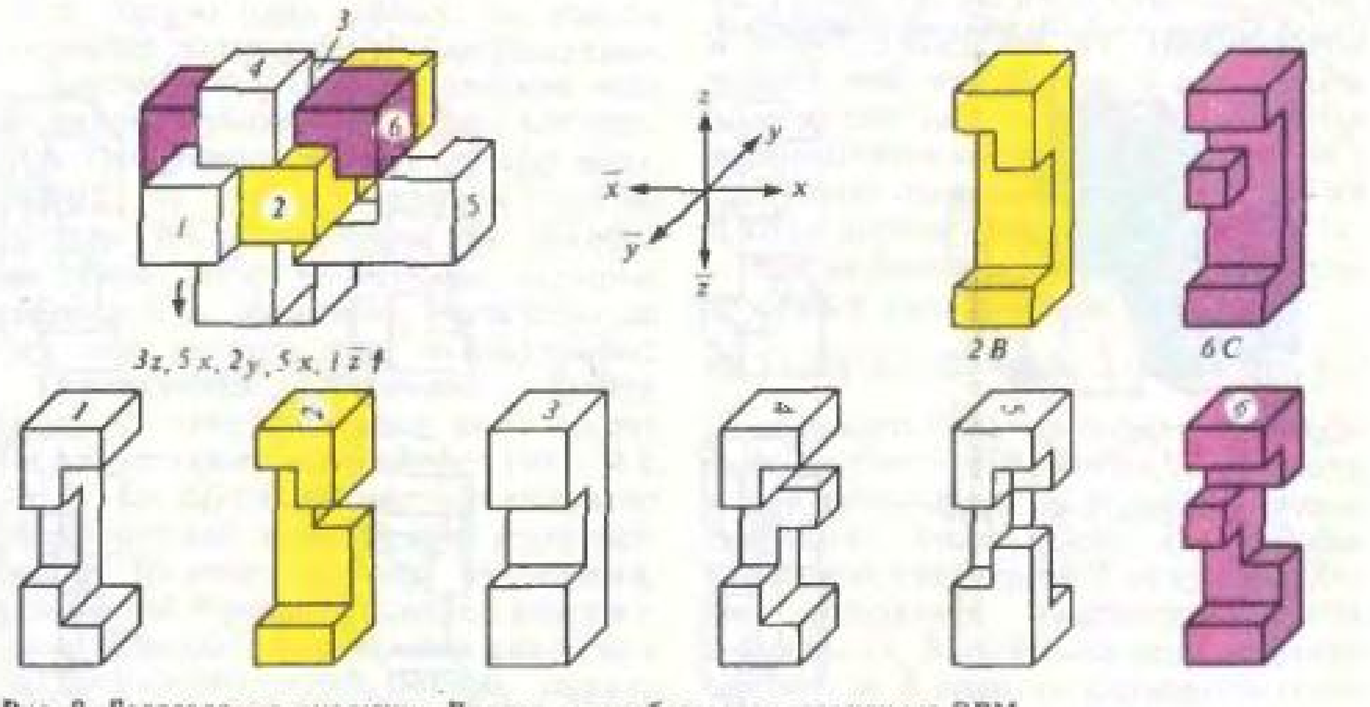
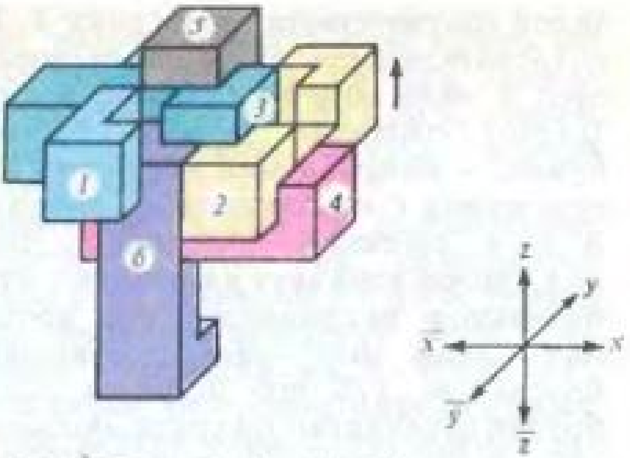
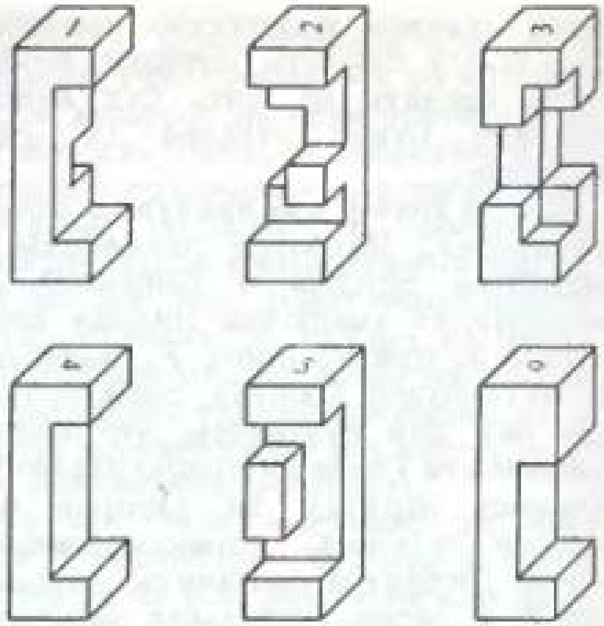


Рис. 3. Головоломка «колючка Билла», разработанная с помощью ЭВМ.

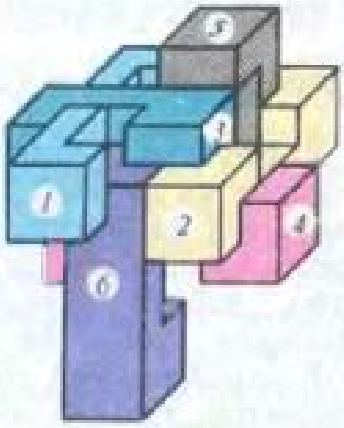


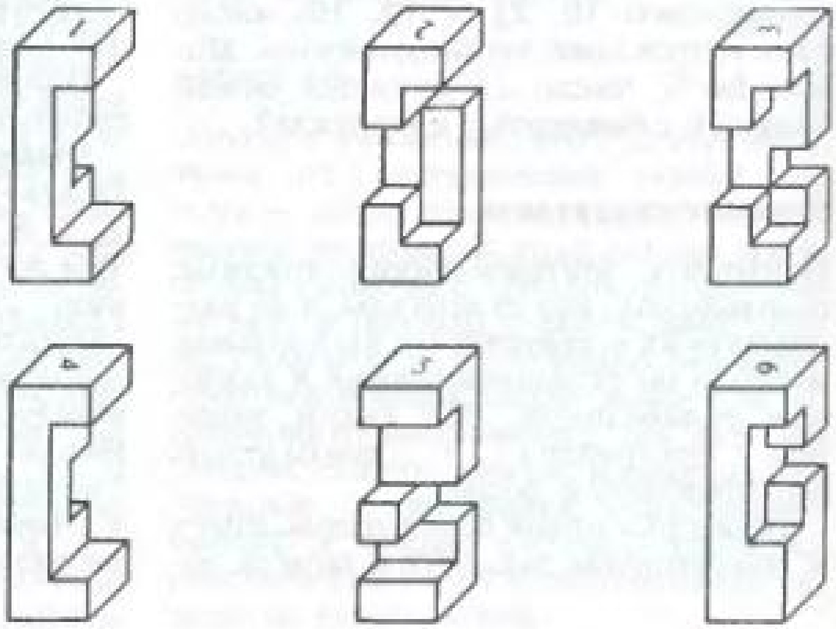


$(6\bar{z})^2, 3\bar{x}, 1z, 4x, 2x, 2y, 2z\uparrow$

$(4\bar{x})^2, 1\bar{z}, 1\bar{x}, 6\bar{y}\uparrow$

Рис. 4. Суперузел Ф. Дюбуа сложности 7.

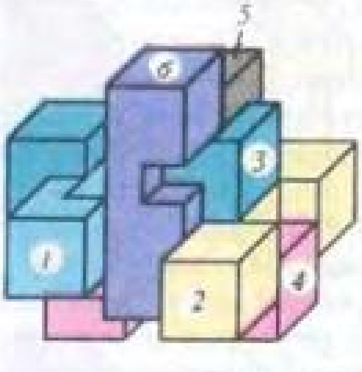


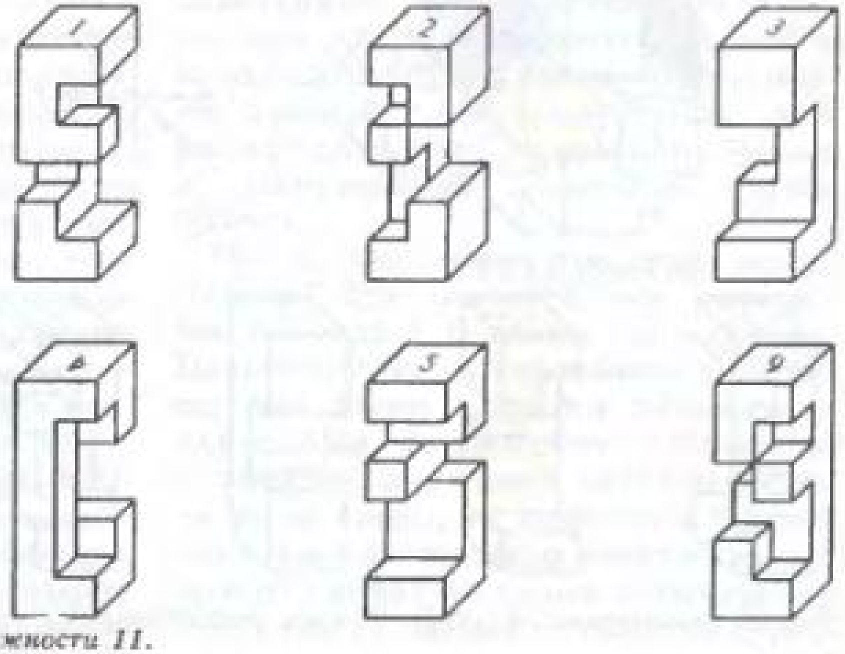


$(6\bar{z})^2, 3\bar{x}, 1z, 4x, 2x,$

$2y, 5x, 5y, 3z\ \uparrow\ (9)$

Рис. 5. Суперузел Д. Вакарелова сложности 9.





$4\bar{z}, 1\bar{z}, 3x, 2x, 2\bar{z}, 3\bar{x}$

$1z, 6z, 3\bar{x}, 1\bar{x}, 6\bar{y}\ \uparrow\ (11)$

Рис. 6. Суперузел Д. Вакарелова сложности 11.

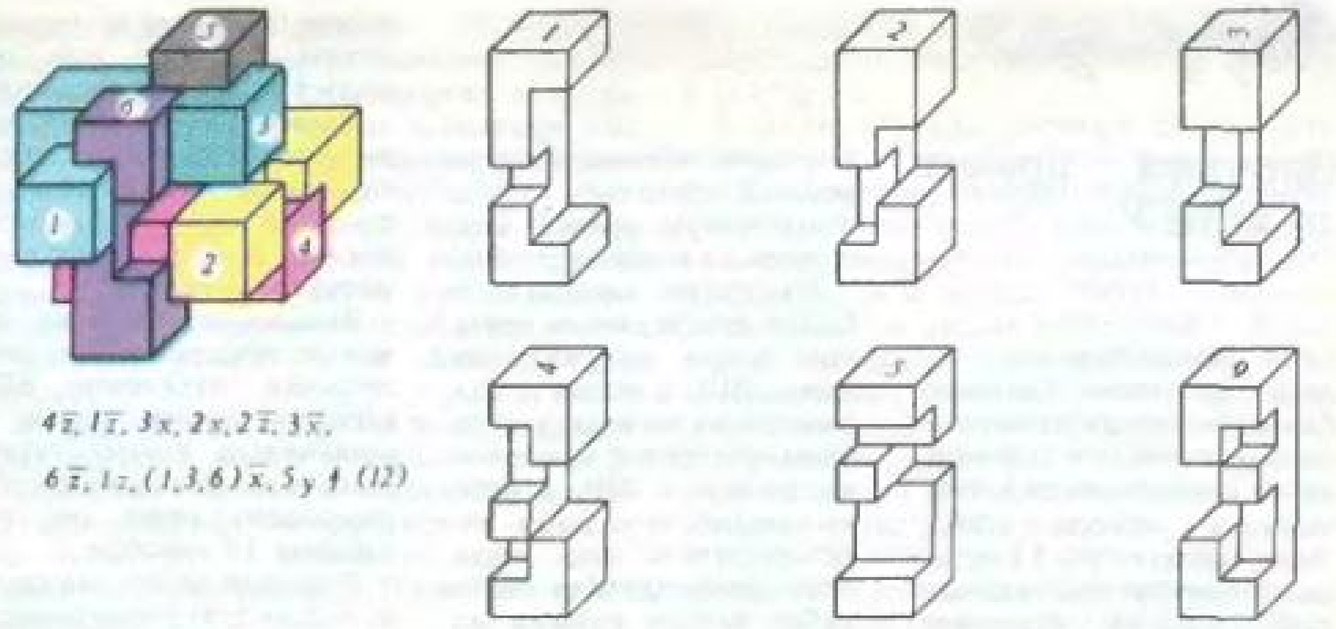


Рис. 7. Суперузел Д. Вакарелова сложности 12.

Из-за того, что деталь 2 B содержит меньше вырезов, чем деталь 2, вставить ее в «колючку Билла» по указанному на рисунке 3 алгоритму не удается. Остается предположить, что головоломка из «Scientific American» собирается каким-то другим способом.

Если это так и мы ее соберем, то после этого сможем заменить деталь 2 *B* на деталь 2, так как последняя занимает меньший объем, чем 2 *B*. В результате мы получим второе решение головоломки. Но «колючка Билла» имеет единственное решение, и из нашего противоречия можно сделать только один вывод: во втором варианте допущена ошибка в рисунке.

Аналогичная ошибка сделана еще в одной публикации (Дж. Слокум, Дж. Ботерманс «Puzzles old and new», 1986), но уже в другом бруске (деталь 6 *C* на рисунке 3). Каково же было тем читателям, которые пытались и, возможно, пытаются до сих пор решить эти головоломки?

Головоломка Филиппа Дюбуа (рис. 4). Она решается за 7 ходов по следующему алгоритму: $(6\bar{z})^2, 3\bar{x}, 1\bar{z}, 4x, 2x, 2y, 2z\uparrow$. На рисунке показано расположение деталей на 6 шаге разборки. Начиная с этого положения, используя обратный порядок алгоритма и изменяя направления движения на противоположные, можно собрать головоломку.

Три суперузла Д. Вакарелова. Первая из его головоломок (рис. 5) — это усовершенствованный вариант головоломки Дюбуа, он имеет сложность 9. Этот суперузел больше других похож на лабиринт, так как при его разборке возникают ложные ходы, заводящие в тупики. Пример такого тупика — ходы $3\bar{x}$, $1\bar{z}$ в начале разборки. А правильное решение такое:

$$(6\bar{z})^2, 3\bar{x}, 1z, 4x, 2x, 2y, 5x, 5y, 3z\uparrow.$$

Вторая головоломка Д. Вакарелова (рис. 6) *решается по формуле:*

$$4\bar{z}, 1\bar{z}, 3x, 2x, 2\bar{z}, 3\bar{x}, 1z, 6z, 3\bar{x}, 1x, 6y\uparrow$$

и имеет сложность 11. Она замечательна тем, что брусок 3 на третьем ходу делает шаг $3x$, а на шестом ходу возвращается обратно ($3\bar{x}$); и брусок 1 на втором шаге двигается по $1\bar{z}$, а на 7 ходу делает обратный ход.

Третья головоломка (рис. 7) — одна из самых сложных. Ее решение:

$$4\bar{z}, 1\bar{z}, 3x, 2x, 2\bar{z}, 3\bar{x}, 6\bar{z}, 1z, (1, 3, 6)\bar{x}, 5y\uparrow$$

до седьмого хода повторяет предыдущую головоломку, затем, на 9 ходу в ней встречается совершенно новая ситуация: неожиданно все бруски перестают двигаться! И тут необходимо догадаться подвинуть сразу 3 бруска (1, 3, 6), и если это движение считать за 3 хода, то сложность головоломки будет равна 12.

Движущиеся игрушки из картона и бумаги

Кандидат физико-математических наук
А. ПАНОВ

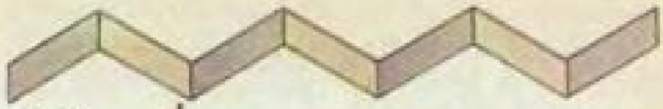


Рис. 1.

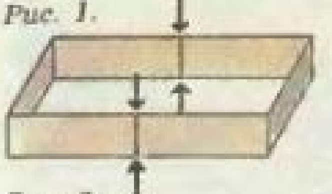


Рис. 2.

Рис. 3.

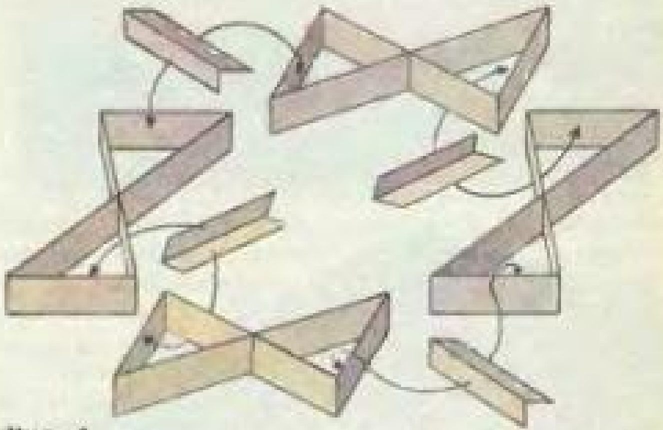


Рис. 4.

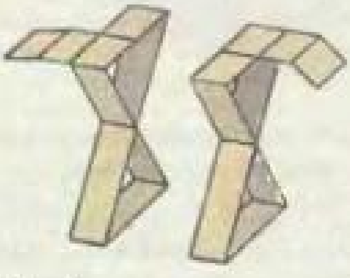


Рис. 5.

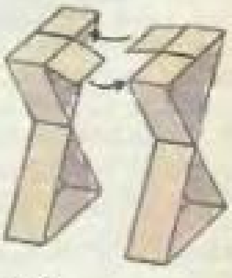


Рис. 6

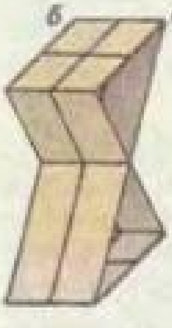


Рис. 7.

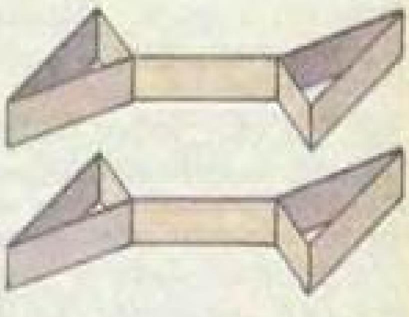


Рис. 8.

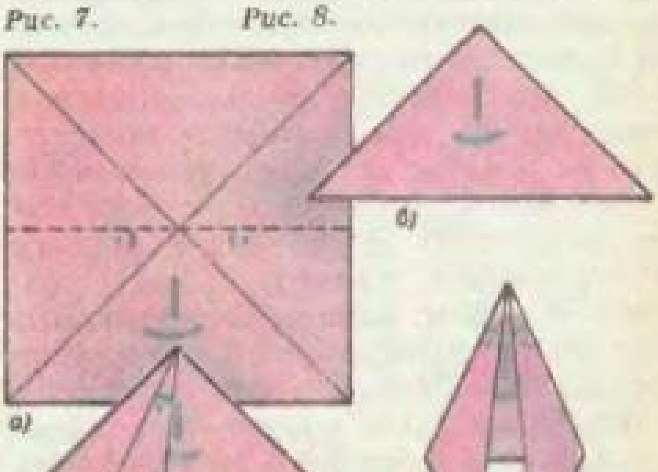


Рис. 9.

О таких игрушках я уже рассказывал в статье «Флексагоны, флексоры, флексманы», опубликованной в «Кванте» № 7 за 1988 год (дальше цитируется как ФФФ). Здесь будет добавлено еще несколько. Все эти игрушки просты в изготовлении и все они на самом деле подвижны.

Три выворачивающихся кольца

Одна из самых привлекательных конструкций в ФФФ — это кольцо из десяти тетраэдров. Кольцо обладает поразительной гибкостью и способностью выворачиваться и выворачиваться до бесконечности («Квант», 1988, № 7, четвертая страница обложки). Аналогичное кольцо можно склеить из восьми треугольных призм. Вот как делается эта игрушка. Из листа ватмана или тонкого картона вырежьте четыре полоски размером 3×42 см. Каждую разделите на семь прямоугольников 3×6 см и сделайте сгибы по линиям раздела (рис. 1). Крайние прямоугольники полоски склейте между собой (рис. 2). В местах, указанных стрелками, сделайте небольшие надрезы. Пропустите через них нитку и завяжите ее (рис. 3). Получится гибкий элемент, состоящий из двух призм, имеющих общее ребро. Кроме четырех таких элементов, нужны еще четыре соединительных полоски 5×5 см. Каждую из них сложите вдвое. Процесс сборки кольца изображен на рисунке 4. Каждую

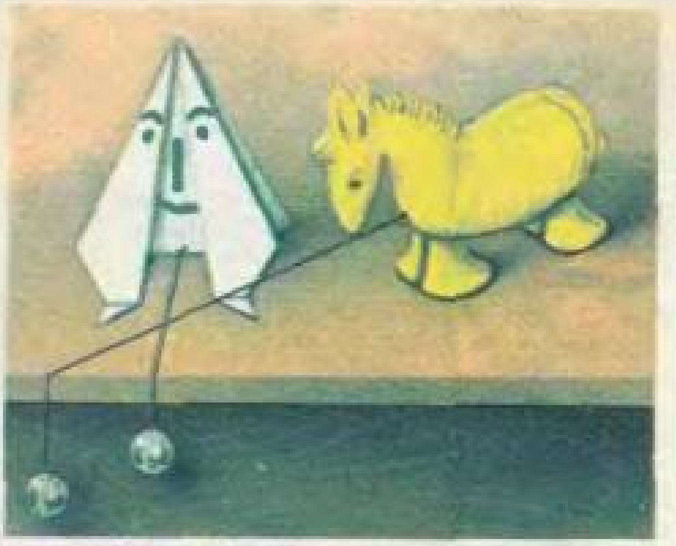


Рис. 10.

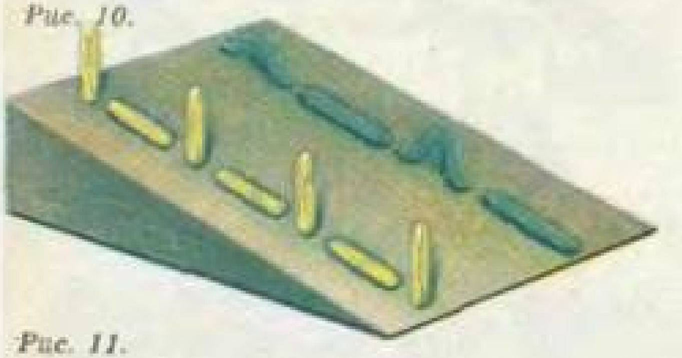


Рис. 11.

из соединительных полосок изнутри намажьте клеем, введите внутрь соседних элементов (обратите внимание, где полоски вводятся сверху, где снизу) и приклейте. Вот и все — игрушка готова и вы можете попробовать ее в деле. Обратите внимание на то, как изящно изгибается это кольцо.

А вот еще более компактная конструкция — она состоит всего из трех таких элементов, как на рисунке 3. На этот раз для соединения двух соседних элементов понадобятся две полоски размером 1×9 см. Каждую из них нужно согнуть втрое, разделив на прямоугольники размером 1×3 см. Возьмите два элемента и к каждому из них подклейте полоску, как на рисунке 5. Теперь расположите элементы друг против друга, как на рисунке 6. Верхние поверхности выступающих прямоугольников намажьте клеем, одновременно введите внутрь противоположных элементов и приклейте. Теперь эти элементы связаны двойным шарнирным соединением (подробности о нем в ФФФ). Действие этого соединения изображено на рисунке 7. Теперь остается таким же образом присоединить третий свободный элемент к первым двум — и кольцо готово.

Наконец, самая экономная выворачивающаяся конструкция. Она склеивается всего из двух элементов. Каждый из них состоит из двух призм, соединенных прямоугольником (рис. 8). И верхние и нижние концы элементов соединяются при помощи двойного шарнирного соединения.

Флексман и ослик

Флексман — это еще один из героев ФФФ. Этот забавный человечек может ходить по наклонным плоскостям. Процесс его создания изображен на рисунке 9. Из тонкой бумаги вырезается квадрат со стороной 15—20 см. По диагоналям делается сгиб вверх, по штриховой линии сгиб вниз (рис. 9, *а*). Затем квадрат складывается в треугольник (рисунок 9, *б*). После этого делаются четыре одинаковые операции. Результат первой из них — на рисунке 9, *в*. Окончательный результат — на 9, *г*. Так у флексмана появляются ножки. И еще четыре завершающие операции — на концах каждой ножки следует отогнуть по маленькому треугольничку. Флексман готов, и если вы поставите его на наклонную плоскость, отрегулируете ее наклон, то флексман, покачиваясь и переваливаясь, начнет мелкими шажками спускаться по ней.

А вернулся я к флексману вот по какой причине. Недавно мне повезло: я купил отличную игрушку — шагающего ослика (рис. 10). Этот ослик тоже ходит по наклонной плоскости, но он может ходить и по горизонтальным поверхностям. К ослику на нитке прикреплен грузик. Если этот грузик перекинуть через край стола, то ослик зашагает и по столу. Такой же грузик можно приделать к флексману, и он тоже будет ходить по столу. Флексман и ослик на первый взгляд кажутся существами совершенно разной породы. Тем поразительней полное совпадение механики их поведения.

(Думаю, что, когда мы, наконец, встретимся с инопланетянами, точно так же при всем внешнем различии внутреннее сходство будет несомненным. Интересно, правда, кто из нас больше будет похож на ослика.)

Шагающая палочка

Это еще один объект, способный ходить по наклонным плоскостям. Найдите стальной шарик диаметром в один сантиметр или около этого. Из плотной бумаги сверните трубочку диаметром чуть побольше шарика, чтобы он мог свободно кататься внутри. Вложите шарик в трубочку и заклейте ее концы кусочками марли, но не туго, а так, чтобы шарик все-таки мог наполовину выкатываться из трубочки. Теперь положите игрушку на наклонную плоскость вдоль линии наклона, и она тут же зашагает. Мне эта игрушка напоминает забавную гусеницу-землемерку. Конечно, сходство здесь не такое полное как между осликом и флексманом, но тем не менее...

Головоломка «цветной треугольник»
(задача для исследования)

На 4-й с. обложки предыдущего номера «Кванта» мы предложили следующую головоломку: на узлах правильной треугольной сетки в треугольнике (с n узлами на стороне) расставить фишки n цветов так, чтобы на линиях сетки, параллельных сторонам, не было одноцветных фишек.

На рисунках 1 и 2 приведены два решения этой головоломки для $n=5$. Интересно, что разбиения 15 узлов сетки на множества одноцветных узлов в обоих случаях симметричны относительно вертикальной высоты треугольника, а на рисунке 2 — еще и относительно двух других высот, а также относительно поворота на 120° вокруг центра треугольника.

Расцветку на рисунке 1 можно получить так. Рассмотрим (косоугольную) систему координат с началом в зеленой вершине треугольника и осями, идущими по боковым сторонам, в которой красная вершина имеет координаты (4; 0), а фиолетовая — (0; 4). Тогда окажется, что зеленый цвет имеют узлы $(x; y)$, для которых $x=y$, красный — точки, для которых $y-x$ при делении на 5 дает остаток 1, голубой — точки с остатком 2 и т. д. Можно проверить, что такой же способ раскраски годится при любом нечетном n. Однако при четном n он не работает: на одну горизонталь попадают одинаковые цвета.

Задача 1. *Возьмем какую-нибудь целочисленную функцию $f(x)$ и разобьем узлы сетки на множества, в каждом из которых разность $y-f(x)$ будет давать одинаковый остаток при делении на n. На каждом из полученных n множеств будем расставлять фишки своего цвета. Покажите, что при четном n «условие разноцветности» не будет выполняться ни при какой функции $f(x)$.*

Более того, при $n=4$ (как и при $n=2$) наша головоломка вообще неразрешима. Действительно, если узлы на основании треугольника окрашены как на рисунке 3, то центральный узел может быть только красным или голубым. В первом случае, двигаясь по стрелкам, мы однозначно определим цвета еще трех узлов и в итоге будем вынуждены нарушить правила: две вершины треугольника оказываются красными. Аналогично рассматривается случай голубого центрального узла.

Задача 2. *Решите головоломку для $n=6$ и $n=8$.*

Задача 3*. *При каких четных $n \geqslant 10$ головоломка «цветной треугольник» имеет решение?*

Еще один, по-видимому, очень трудный вопрос: сколько решений имеет головоломка в зависимости от n? Аналогичный вопрос для расстановок фишек на прямоугольной сетке с условием разноцветности по горизонталям и вертикалям обсуждался в статье В. Шевелева «Латинские прямоугольники» («Квант» № 5 за этот год). Впрочем, и прямоугольная задача, несмотря на свою долгую историю, весьма далека от полного решения.

В. Дубровский

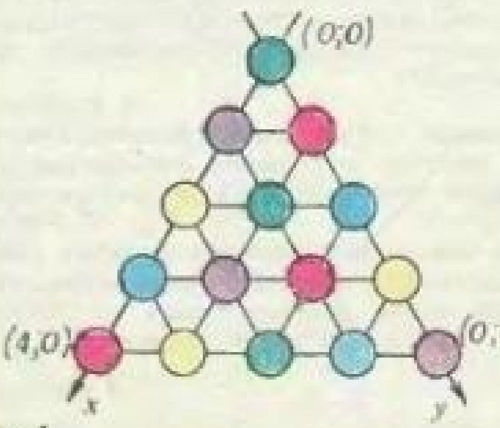


Рис. 1.

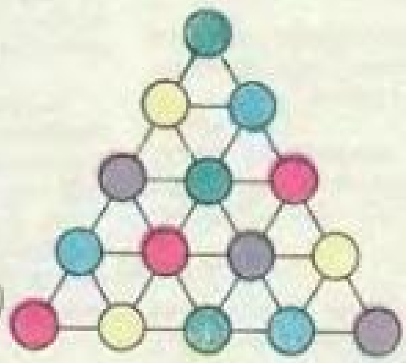


Рис. 2.

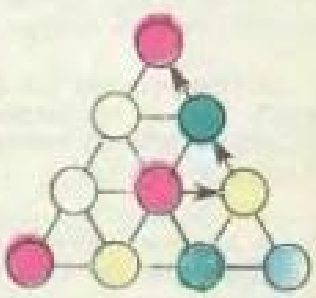


Рис. 3.

Кубики Мак-Магона и таблица Конвея

В начале нашего века английский майор Александр Мак-Магон, преподаватель математики Королевской военной академии, придумал несколько задач с разноцветными кубиками. До него наборы кубиков как игра использовались, пожалуй, только для сооружения зыбких построек да для складывания картинок из кусочков, наклеенных на их грани. (Кстати, и «кубики с картинками» имеют не столь уж долгую историю — они были изобретены в Германии в середине прошлого века.) С тех пор число игр с кубиками неизмеримо возросло, почетное место среди них занял и непревзойденный кубик Рубика... Однако первым был все-таки Мак-Магон и его друг полковник Джоселин, доказавший разрешимость его основной задачи. Но обо всем по порядку.

Представьте, что вам нужно раскрасить кубик в 6 цветов, каждую грань — в свой цвет. Для нижней грани можно выбрать любой из цветов, для передней — любой из 5 оставшихся, для правой — любой из 4 оставшихся и т. д. Получается, что всего имеется $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6! = 720$ способов раскраски. Но если вы заготовите 720 таких кубиков, то обнаружите, что многие из них неразличимы, как только возьмете их в руки,— ведь на кубике не написано, какая грань у него нижняя, а какая — передняя. Неразличимые раскраски получаются друг из друга вращениями куба, переводящими его в себя. Имеется 24 таких вращения: 9 поворотов на углы $\pm 90°$ и $180°$ вокруг осей, проходящих через центры противоположных граней, 8 поворотов на $\pm 120°$ вокруг диагоналей куба, 6 осевых симметрий относительно прямых, соединяющих середины противоположных ребер, и тождественное преобразование. Поэтому для каждой из 720 учтенных выше раскрасок имеется еще 23 ей эквивалентных, а число существенно различных раскрасок равно $720:24=30$. Именно столько кубиков в наборе Мак-Магона. Все они показаны в таблице, приведенной на последней странице обложки. Там же объясняется, как с помощью этой таблицы, которую придумал американский математик Джон Конвей, быстро и красиво решить основную задачу Мак-Магона: выложив из набора один кубик — образец, найти среди остальных 29 такие 8, из которых можно сложить увеличенную вдвое копию образца, соблюдая «правило домино»: маленькие кубики должны соприкасаться гранями одинакового цвета.

Если мы посмотрим на кубик-образец вдоль диагонали, то увидим три грани, сходящиеся в одном из ее концов. Обозначим их цвета цифрами 1, 2, 3, а цвета противоположных граней, соответственно, 4, 5, 6. В искомую восьмерку надо включить хотя бы один кубик с трехгранным углом, раскрашенным теми же цветами 1, 2, 3, причем в том же порядке. Всего таких кубиков вместе с образцом шесть (это число перестановок цифр 4, 5, 6). Однако нетрудно понять, что «правило домино» оставляет из этих шести только два варианта цветов, соответственно противоположных 1, 2, 3: 5, 6, 4 и 6, 4, 5. Из соображений симметрии ясно, что любой из этих двух кубиков можно поместить в угол (1, 2, 3) большого куба, тогда второй кубик нужно будет поместить в противоположный угол (4, 5, 6). (Интересно, что в таблице Конвея эти два кубика и образец всегда расположены на местах вида Xy, Yx и Zx). Аналогично находятся еще три пары кубиков для трех других диагоналей. Таким образом, восьмерка кубиков, решающих задачу Мак-Магона для заданного образца, определена однозначно, хотя сложить большой куб из нее можно двумя способами — чтобы получить один способ из другого, надо перенести каждый кубик в противоположный угол. В таблице Конвея кубики, отвечающие образцу Xy, расположены в строке Y и столбце x, кубик Yx из них надо исключить. Можно проверить, что четыре кубика одного ряда при сборке большого куба займут места в концах диагонали его нижнего основания и скрещивающейся с ней диагонали верхнего основания.

Задача Мак-Магона имеет продолжение: составив копию по данному образцу, надо среди оставшихся кубиков найти новый образец и 8 кубиков, образующих его копию с соблюдением «правила домино». С помощью таблицы эта задача решается почти автоматически — искомые кубики определены однозначно и являются зеркальными отражениями кубиков первого набора.

Возможно, таблица Конвея поможет вам решить и следующие задачи.

1. Соблюдая «правило домино», сложить куб $2 \times 2 \times 2$, каждая грань которого была бы раскрашена одним из а) пяти, б) четырех, в) трех цветов (в каждом случае должны быть использованы все заданные цвета). Все ли эти задачи разрешимы?

2. Откажемся от «правила домино». Сколькими способами тогда можно сложить куб $2 \times 2 \times 2$ по заданному образцу? Сколько существует наборов по 8 кубиков, позволяющих это сделать? Покажите, что сложить куб-копию из такого набора можно 2, 4, 8 или 16 способами. Можно ли сложить куб-копию $3 \times 3 \times 3$?

В. Дубровский

Игры и головоломки

Реверси

Игра реверси (от английского to reverse — обращать) популярна во многих странах. В США она вышла на второе место после шахмат, а в Японии — после го. Проводятся разнообразные турниры, матчи, в том числе чемпионаты мира. Игра привлекает простотой правил — они проще шахматных и шашечных — и удивительной динамичностью. Обстановка на доске меняется мгновенно, и все завоевания игрока за один ход могут перейти к противнику.

Реверси были известны с незапамятных времен, а в начале 70-х годов XX века их как бы заново открыл японец Хаседжава. Коварные ловушки и непредвиденные ситуации, отличающие игру, вызвали у него ассоциацию с шекспировским «Отелло», и в результате реверси получили еще одно название— «Отелло».

Атрибутами игры служат доска 8×8 и 64 фишки (по 32 у каждого игрока), окрашенные с одной стороны в белый цвет, а с другой — в черный. Можно взять и обычную шахматную доску, раскраска ее полей значения не имеет. Фишки можно сделать, приклеив друг к другу обычные белые и черные шашки или окрасив в два цвета 64 одинаковые пуговицы.

Опишем правила игры в реверси. Играющий белыми ставит свои фишки белой стороной вверх, а играющий черными — черной. Прежде всего партнеры располагают в центре доски по две своих фишки, как показано на рисунке 1 (в реверси, в отличие от шахмат, горизонтали доски нумеруются сверху вниз).

Первый ход делают черные (как в го и рэндзю, но в отличие от шахмат и шашек). Соперники по очереди выставляют по одной своей фишке на свободные поля доски, рядом с одной из фишек противника и так, чтобы вместе с какой-нибудь своей фишкой окаймить (окружить) одну или несколько фишек противника по горизонтали, вертикали или диагонали (или по нескольким линиям сразу). Другими словами, фишка ставится на одну линию с другой фишкой того же цвета, уже находящейся на доске, и между ними должен стоять ряд фишек противника, а пустых полей нет. Окруженные с двух сторон фишки попадают в плен, но не снимаются с доски, а переворачиваются другой стороной, меняя свой цвет. Если окружение происходит одновременно по нескольким линиям, то переворачиваются все цепочки захваченных фишек. Итак, любая фишка, попав на доску, до конца игры остается на ней, хотя переворачиваться может сколько угодно раз.

Для иллюстрации рассмотрим симметричную позицию на рисунке 2. Сейчас ход черных, и, ставя фишку на угловое поле a8, они окружают сразу 18 белых фишек в трех возможных направлениях. Фишки вертикали «a», с a2 до a7, окружены фишками a1 и a8, фишки последней горизонтали, с b8 до g8,— фишками a8 и h8, наконец, фишки большой диагонали, с b7 до g2,— фишками a8 и h1. Этот пример является рекордным — наибольшее число фишек, которые могут быть захвачены и перевернуты за один ход, равно 18.

Если в какой-то момент один из игроков не может сделать ход (не в состоянии окружить ни одной неприятельской фишки), то он пропускает его.

Если один из игроков использовал все свои фишки, то он может взять фишку из запаса противника. Впрочем, в комплекте игры и белые, и черные имеют по две дополнительных фишки, и этого, как правило, достаточно, чтобы обойтись собственными фишками.

Ходы обеих сторон считаются в реверси не парами, как в шахматах, а отдельно (за редким случаем нечетные номера соответствуют ходам черных, четные — белых). До начала игры четыре поля доски уже заняты, и поэтому она продолжается не более 60 ходов. Заканчивается партия тогда, когда ни один из партнеров не в состоянии сделать очередной ход, в частности, если все 64 поля доски уже заполнены фишками. Победителем становится тот, чьих фишек в данный момент на доске больше, а при равенстве — ничья (разумеется, учитывается «видимая» на доске сторона фишек).

Возвращаясь к рисунку 2, заметим, что ход черных a8 был последним в партии,— вся доска заполнена фишками. Перевернув рекордное число фишек — 18, черные чудом спаслись — игра закончилась вничью — 32:32!

Рассмотрим теперь для примера десять ходов партии в реверси (по пять с каждой стороны).

1. c5. Черные окружили своими фишками c5 и e5 белую фишку d5, и она переворачивается черной стороной вверх (для простоты будем говорить — меняет цвет).

2. c6. Теперь переворачивается и становится белой фишкой d5.

3. d6. Фишка d6 вновь становится черной.

4. e6. Окружены фишки d6 и e5, обе переворачиваются и становятся белыми.

5. f6. Фишка e5 меняет цвет с белого на черный.

6. c4. Фишки c5, d4 и d5 — белые.

7. b6. Ряд фишек — c6, d6, e6 — переворачивается, и все они становятся черными.

8. e7. Фишки d6, e5 и e6 — белые.

9. f3. Фишки d5 и e4 — черные.

10. e3. Фишка e4 — белая.

Возникла позиция, показанная на рисунке 3. Инициатива у белых, у которых больше фишек. Но радоваться рано: ситуации в реверси меняются, как в калейдоскопе, фишки-хамелеоны то и дело «перекрашиваются», и важно, какими они будут в конце партии.

В большинстве игр, например в шахматах и шашках, материальное превосходство обычно определяет и общий перевес, а в реверси игрок, имеющий значительно большее число фишек своего цвета, может за один ход

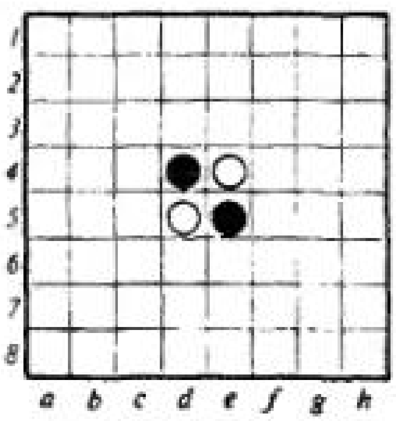


Рис. 1.

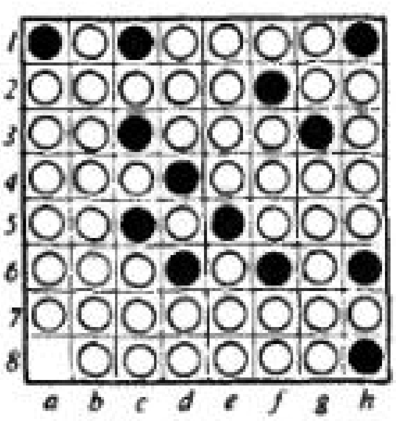


Рис. 2.

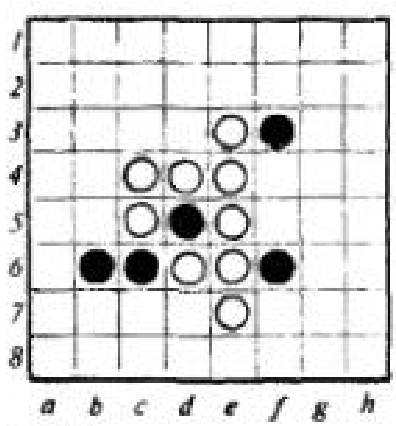


Рис. 3.

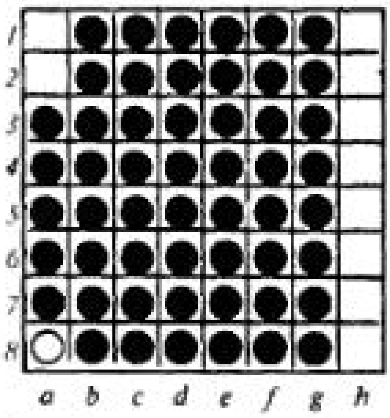


Рис. 4.

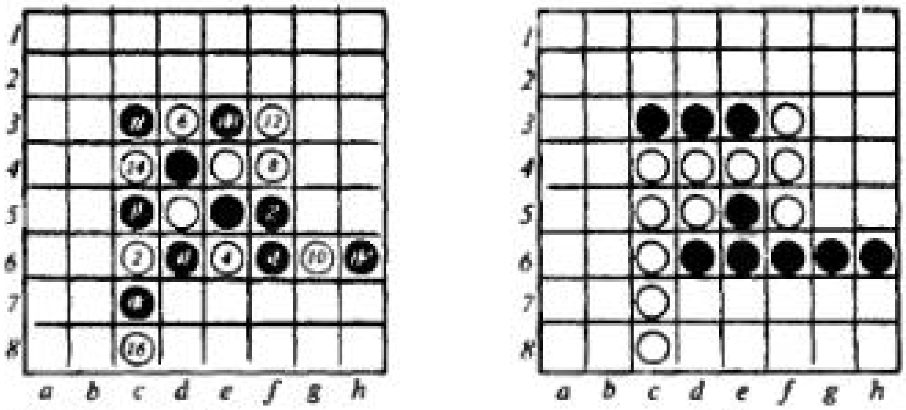


Рис. 5. а) б)

потерять все завоевания (см., например, рис. 2).

Очевидно, если в какой-то момент у одного из игроков оказываются «съеденными» все фишки, партия сразу завершается его поражением. Кратчайший поединок с таким финалом («детский мат» для реверси) состоит из девяти ходов: 1. c5 2. c4 3. e3 4. e6 5. e7 6. d3 7. c3 8. f5 9. g5!, и на доске остались одни черные фишки. Игра закончилась их победой со счетом 13:0.

Рассмотрим некоторые элементарные принципы игры. Поскольку фишки противника, расположенные в центре доски, захватить проще, чем на краю, всегда следует стремиться занять крайние поля доски и препятствовать в этом противнику. Особенно выгоден захват угловых полей. Фишки, попавшие на них, никогда не могут быть перевернуты (их просто нечем захватить) и сохраняют первоначальный цвет до конца партии. Тот, кто прорывается в один из углов доски, получает серьезное преимущество, а если это происходит в начале игры, то — решающее. Поэтому, кстати, весьма опасно ставить свои фишки рядом с угловыми полями, особенно на b2, b7, g2, g7, противник может провести несложную комбинацию и занять угол. Вот яркий пример, иллюстрирующий силу угловых фишек (рис. 4).

Как будто белым впору сдаваться — у них всего одна фишка против 53 фишек противника! Тем не менее они легко берут верх, да еще с «сухим» счетом! Приведем эффектное окончание этой партии.

1. a2. При своем ходе черные все равно вынуждены были бы пропустить его. Теперь вся вертикаль «a» стала белой (пока кроме поля a1). У черных по-прежнему нет ходов, как, впрочем, не будет и до конца партии. 2. h8. Последняя горизонталь окрасилась в белый цвет. 3. h7. 4. h6. 5. h5. 6. h4. 7. h3. 8. a1. 9. h2. 10. h1. Итак, вся доска заполнена белыми фишками, 64:0!

Опытные игроки в дебюте ведут борьбу в центре доски — в квадрате c3 — c6 — f6 — f3, стремясь как можно дольше не выпускать фишки противника на край доски. Затем белые и черные фишки одна за другой занимают край доски, и надо следить за тем, чтобы не пропустить неприятельские фишки в угол. К концу игры вариантов становится меньше, и искусные игроки просчитывают их чуть ли не до конца. Теперь уступка углов уже не так опасна.

Стоит сказать, что игра реверси привлекает к себе большое внимание любителей компьютерных игр, создано немало программ, достойно соперничающих с человеком. В 1989 году на первой компьютерной Олимпиаде в Лондоне именно турнир по реверси собрал наибольшее число программ из разных стран — 15.

Приведем теперь для иллюстрации одну интересную партию в реверси между человеком (черные) и компьютером (белые). Номера ходов для удобства ставятся прямо на полях доски.

На рисунке 5, *а* указаны первые 16 ходов, причем цвет фишек показывает лишь, кто именно — белые или черные — делал ход с данным номером. В результате возникает позиция, которую вы видите на рисунке 5, *б* (чтобы убедиться в этом, нужно, конечно, разыграть партию на доске).

Сначала игроки заняли весь центр доски (12 ходов, квадрат 4×4), а затем вышли на ее край (15-м ходом черные и 16-м — белые). На этом дебют партии можно считать законченным. Миттельшпиль партии, ходы 17—42 можно проследить по рисунку 6. Здесь цвет занумерованных фишек также отвечает последовательности ходов, а цвет фишек, не имеющих номеров, сохранен тот же, что и на рисунке 5, *б*.

Все больше и больше фишек появляется на границах доски, но к ее углам соперники по-прежнему друг друга не подпускают. Позиция после 42-х ходов показана на рисунке 7, *а* (со всех фишек, уже выставленных на доску, сняты номера).

Инициатива сейчас принадлежит компьютеру (25:21), но в эндшпиле человек сумел создать решающую атаку (ходы 43—60). Для этого он пошел на хитрость — отдал левый нижний угол (машина заняла его ходом 46), но ходами 47, 49 проник в соседний правый угол, завоевал значительное пространство в нижней части доски. Шансы уравнялись, но на 50 ходу компьютер ошибся, и черные захватили еще один угол, правый верхний. После их 53-го хода белые не в состоянии поставить на доску новую фишку и вынуждены пропустить ход, а за ним и второй (поэтому фишки с номерами 53, 54 и 55 на рисунке 7, *а* окрашены в черный цвет). Через несколько ходов партия закончилась победой черных с минимальным перевесом 33:31 (рис. 7, *б*).

Остановимся на некоторых стратегических принципах игры. В миттельшпиле игроку следует создавать такие ситуации на доске, чтобы возникали поля, на которые он может пойти, а его противник — нет. Четыре основных случая с возможным ходом белых на краю доски — *А*, *Б*, *В*, *Г* показаны на рисунке 8.

При наличии второй опорной фишки в центре доски (на рисунке центральные поля заштрихованы) белые всегда могут поставить фишку на одно из этих полей; для черных же они недоступны при любом положении в центре. Очевидно, наличие таких «резервных» полей для одной из сторон, в данном случае белых, является очень важным; выражаясь шахматным языком, это позволяет выиграть темп.

Не следует считать, что самое главное в реверси — далекий расчет вариантов. Нередко возникают положения, в которых борьба носит локальный характер, затрагивается лишь некоторая часть доски. Рассмотрим рисунок 9.

Белые плохо разыграли дебют, и черные, ставя фишку на поле *А*, получают резервное поле. Они как можно дольше не занимают поле *В*, а если в какой-то момент белые займут его, то у черных появится новое поле *Г*, на которое они могут пойти, а противник — нет.

Предположим теперь, что черные на первом ходу заняли поле *Б*. В ответ на эту ошибку белые могут про-

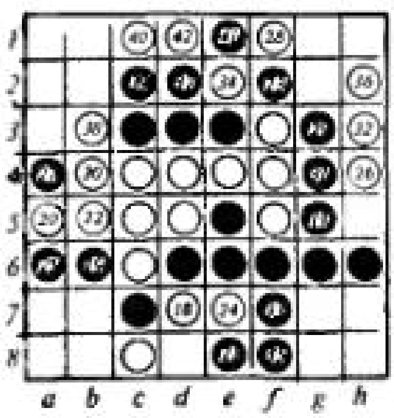
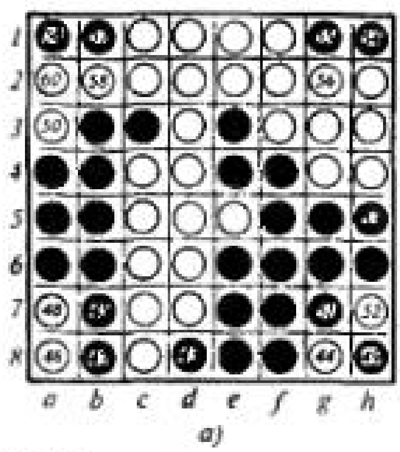
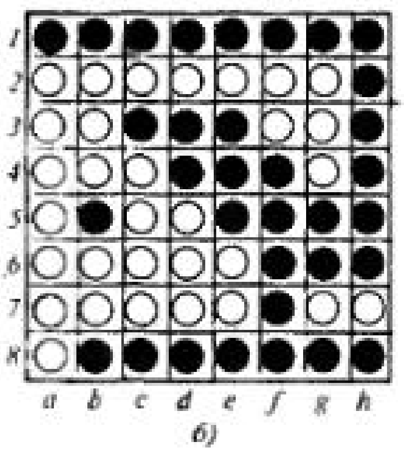


Рис. 6.



а)



б)

Рис. 7.

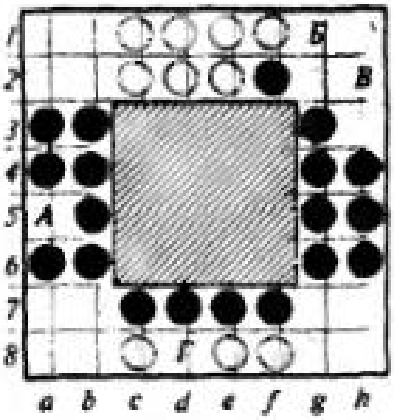


Рис. 8.

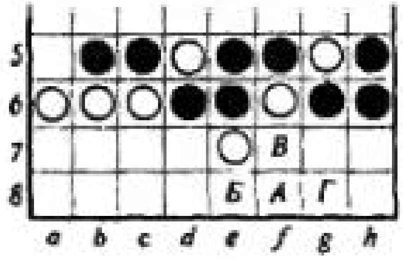


Рис. 9.

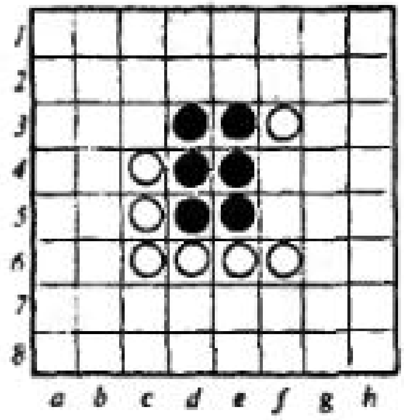


Рис. 10.

вести несложную комбинацию. Белые — *А*, черные — *Г*, белые — *В*, и теперь ход черных (нас сейчас не интересует расположение фишек в верхней половине доски, но предполагается, что на b4 стоит белая фишка). Поскольку занимать поле g7 — самоубийство, черные вынуждены переключиться на другой участок доски.

Чтобы понять идею комбинационного маневра белых, следует остановиться на некоторых общих принципах игры. В любой ситуации на доске у игрока имеется множество плохих ходов и множество нейтральных. Задача противника состоит в том, чтобы заставить его использовать все нейтральные ходы и в конце концов сделать плохой. Стандартный прием заключается в передаче очереди хода. Локальная ситуация разыгрывается так, чтобы в конце концов был ход противника. Этот прием и используется в операции на рисунке 9. После неточности черных и правильных действий партнера они вынуждены ходить вне правого нижнего угла.

Зная стандартные положения на краях (рис. 8) — к чему стремиться и чего избегать, можно уже в районе 30-го хода прогнозировать итог партии. Точный розыгрыш «стороны» доски является как бы аналогом позиционной игры в шахматах. Создание резервного поля можно сравнить с владением открытой линией или образованием проходной пешки... Разумеется, в реверси, как и в шахматах, позиционное преимущество, а тем более материальное (его роль здесь мала), не гарантирует победы, хотя увеличивает ее вероятность.

Разработаны и другие стратегические принципы, применимые в тех или иных положениях.

Как и в любой игре, в реверси существуют интересные задачи и комбинации. Приведем одну уникальную задачу (на шахматном языке — этюд), предложенную одним из авторов О. Степановым. На рисунке 10 белые начинают и выигрывают.

Эта жемчужина решается ходом 1. e2! Посмотрим, как складываются события дальше. Черные фишки d3 и e3 — e5 переворачиваются, и в «живых» остаются только фишки d4 и d5. Как теперь играть черным? После хода d2 или d7 и, соответственно, ответа d1 или d8 на доске, как мы видим, остаются одни белые фишки — игра закончена. В случае одного из ходов b7, b5, b4, b3, f2, f4, f5, f7 и соответствующего ответа a8, a5, a4, a2, g1, g4, g5, g8 у черных остается одна единственная фишка, которая окружена по всем направлениям, и следующим ходом белые завершают игру полным уничтожением неприятельских сил.

Итак, у черных вынужденный ответ g7, уступающий угол доски. Белые играют, например, f5 (на e5 появляется белая фишка) с неизбежным h8. В результате правый нижний угол завоеван, что на столь ранней стадии игры равносильно победе.

Возможно, что это единственная позиция (с точностью до симметрии) со столь малым и примерно равным материалом, про которую можно утверждать, что одна из сторон начинает и выигрывает!

Е. Гик, О. Степанов

Числовые фризы

Дж. КОНВЕЙ

Вот простенькая арифметическая игра. Напишите два ряда единиц и соедините их зигзагом из единиц, как в приводимом примере (точками отмечены места, куда в дальнейшем будут вписываться числа):

```
1  1  1  1  1  1  1  1  1 ...
 1  .  .  .  .  .  .  .  .
  1  .  .  .  .  .  .  .  .
   1  .  .  .  .  .  .  .
  1  .  .  .  .  .  .  .  .
 1  .  .  .  .  .  .  .  .
  1  .  .  .  .  .  .  .  .
   1  1  1  1  1  1  1 ...
```

А теперь начните заполнять пустые места по «правилу ромба»: для четырех соседних чисел, расположенных ромбом,—

```
     С
  З     В
     Ю
```

произведение $З \cdot В$ на 1 больше $С \cdot Ю$, т. е.

$$В = (С \cdot Ю + 1)/З.$$

Вот что получится в нашем примере:

```
1  1  1   1   1  1  1
 1  2  2   4  2  1
  1  3   7   7  1
   1  10  12  3  1
  1  3   17  5  2  1
 1  2  5   7  3  1
  1  3   2   4  1
   1  1   1   1  1
```

Попробуйте и другие зигзаги. Вы обнаружите несколько любопытных закономерностей.

1. Все деления выполняются нацело, т. е. все числа в таблице будут натуральными.

2. В каждой строчке вновь появляется единица.

3. После этого строчки можно не продолжать, потому что новые единицы образуют точно такой же зигзаг, как тот, с которого вы начали, только перевернутый вверх ногами, так что полная таблица будет периодической:

```
1  1  1    1    1  1  1  1     1  1
 1  2  2    4  2  1  3    2    4  1
  1  3    7    7  1  2  5    7    3  1
   1  10   12   3  1  3    17   5  2  1
  1  3    17   5  2  1  10   12   3  1
 1  2  5    7    3  1  3    7    7  1
  1  3    2    4  1  2  2    4    2  1
   1  1    1  1  1  1     1    1  1  1
```

Можете ли вы это объяснить?

Нечто похожее происходит и если умножение заменить сложением. На этот раз надо начать с двух рядов нулей, соединенных зигзагом из нулей, а ромбики достраивать по правилу $В + З = (С + Ю) + 1$, или

$$В = (С + Ю + 1) - З.$$

На сей раз, конечно, во всех строках выскакивают нули:

```
0  0  0  0     0     0     0  0  0
 0  1  2  5     6     4  3  0
  0  2  6    10    9     6  2  0
   0  5  10    12    10  4  1  0
  0  2  8    11    12    7  2  0
 0  1  4  8     10    8  4  0
  0  2  3    6     5     4  1  0
   0  0  0     0     0  0  0  0
```

Можете ли вы объяснить, почему числа здесь не становятся отрицательными, почему строки заканчиваются нулями и почему эти нули образуют точную (не перевернутую) копию исходного зигзага?

Если отказаться от зигзага из единиц, соединяющего крайние ряды, можно все равно наткнуться на интересные узоры. Например, на мультипликативные фризы*), в которых каж-

*) Мультипликативный — значит связанный с умножением (в данном случае, по правилу ромба), фризом или бордюром называют периодически повторяющийся рисунок на бесконечной полосе.

дый ряд состоит из одинаковых положительных чисел:

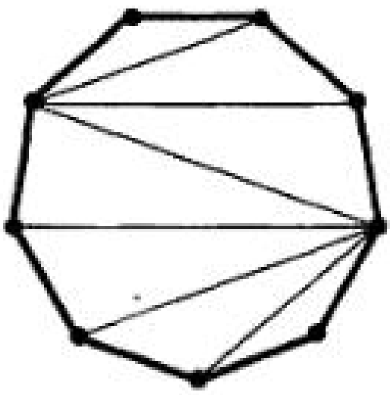
$$\begin{array}{ccccccccccc}
1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\
 & \sqrt{2} & & \sqrt{2} & & \sqrt{2} & & \sqrt{2} & & \sqrt{2} & \\
1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1
\end{array}$$

или

$$\begin{array}{ccccccccccc}
1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\
 & \sqrt{3} & & \sqrt{3} & & \sqrt{3} & & \sqrt{3} & & \sqrt{3} & \\
2 & & 2 & & 2 & & 2 & & 2 & & 2 \\
 & \sqrt{3} & & \sqrt{3} & & \sqrt{3} & & \sqrt{3} & & \sqrt{3} & \\
1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1
\end{array}$$

Вы видите, что числа здесь уже не целые. Что же это за числа? Подсказка: ответ связан с многоугольниками.

Мультипликативные фризы из натуральных чисел тоже связаны с многоугольниками. Как? Вторая подсказка: многоугольник для самого первого нашего примера выглядит так:



От редакции. Этой статьей мы открываем публикацию переводов из «Квантума» — советско-американского журнала, который можно назвать младшим братом «Кванта». Он начал издаваться в США в начале прошлого года, а в этом месяце подписчики получат уже 6-й номер. Пока бóльшую часть его материалов составляют переводы статей из «Кванта», но предполагается увеличение американской доли, и мы собираемся знакомить наших читателей со всеми наиболее интересными статьями американских авторов. К ним, безусловно, относятся заметки под рубрикой «Математические сюрпризы», которую ведет в «Квантуме» человек, наверняка знакомый читателям «Кванта»,— профессор Принстонского университета Джон Конвей. Его имя появлялось на страницах нашего журнала совсем недавно (см. заметку «Кубики МакМагона и таблица Конвея» в «Кванте» № 12 за 1990 год), не раз встречались мы с ним и раньше, скажем, он придумал игру «жизнь», ставшую знаменитой благодаря книгам Мартина Гарднера.

Мы не сомневаемся, что числовые фризы увлекут многих наших читателей и дадут материал для самостоятельных исследований. О фризах упоминается и в книге Гарднера «Крестики-нолики» (М., Мир, 1988, с. 228), где можно найти литературные ссылки. В «Кванте» тоже встречались числовые узоры, получающиеся по правилу ромба,— см. задачу М1209, решение которой опубликовано в 7-м номере за прошлый год. Мы надеемся получить от вас письма с ответами на вопросы, поставленные Конвеем, и тогда вновь вернуться к числовым фризам.

Публикацию подготовил В. Дубровский

Коммутативная головоломка Эрне Рубика

В прошлом году мы познакомили читателей «Кванта» с «часами Рубика» (см. 4-ю с. обложки 4-го номера). Хотя эта головоломка была запатентована знаменитым изобретателем в 1988 году, она все еще малоизвестна у нас (да, пожалуй, такой и останется). Тем не менее, мы получили письма с просьбами выполнить данное почти года назад обещание и рассказать о «часах» подробнее. Надеемся, что наш рассказ будет интересен всем любителям головоломок, а не только немногочисленным обладателям «часов Рубика», тем более, что эта головоломка и устроена, и решается проще, чем, скажем, «волшебный кубик», и поэтому, уяснив себе, как «часы» работают, вы можете попробовать придумать алгоритм «на кончике пера».

Рисунок 1 показывает, как выглядят «часы Рубика» снаружи: с двух сторон круглого корпуса расположены по 9 окошек с вращающимися кружками-циферблатами, на которых нарисованы стрелки. Сбоку корпуса выступают 4 шестеренки, вращая которые, стрелки можно переводить. Скрытый зубчатый механизм — «коробка передач» — позволяет подключать к вращению разные наборы циферблатов. Управляется «коробка передач» кнопками; на каждой стороне корпуса их по 4, но фактически это 4 стержня, выступающие с обеих сторон: если нажать на стержень с лицевой стороны, он выскочит с тыльной, и наоборот. Задача ставится так же, как для «кубика» и множества других подобных головоломок — «запутав» показания часов, надо вернуть их все в «правильное» состояние, а именно, поставить на 12 часов.

Рис. 1.

Прежде чем решать эту задачу, надо, конечно, разобраться, как «часы» управляются, какие стрелки подключаются к вращаемой шестеренке при том или ином варианте нажатия кнопок («передаче»). Тот, у кого головоломка есть, должен просто перепробовать все варианты. А остальным мы предлагаем сразу заглянуть внутрь «часов». На рисунке 2 вы видите, что на ведущих (угловых) шестеренках, выступающих из корпуса, укреплены по 2 циферблата — с тыльной и лицевой стороны; такие парные циферблаты всегда вращаются синхронно. Эта шестеренка сцеплена с шестеренкой на ближайшей кнопке, а она, в свою очередь, сцеплена либо с шестеренками трех соседних тыльных циферблатов (центрального и двух боковых), если кнопка нажата, либо с тремя соответствующими циферблатами лицевой стороны, если кнопка отжата. С этих шестеренок в зависимости от «передачи» вращение может распространяться еще дальше. Очевидно, сцепленные между собой циферблаты могут вращаться только одновременно, в одну сторону и с одной и той же скоростью. Можно сказать, что «часы Рубика» имеют 14 «степеней свободы», отвечающих 4 парам угловых циферблатов и еще 10 одиночным циферблатам, каждый

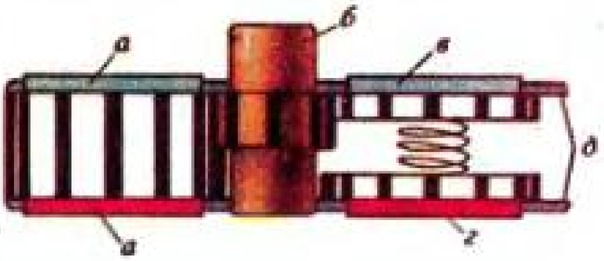


Рис. 2. «Часы Рубрика» в разрезе (плоскостью, проходящей через оси углового и центрального циферблатов): а) пара угловых циферблатов, укрепленных на ведущей шестеренке, б) кнопка с шестеренкой для переключения передач, в) лицевой центральный циферблат, г) тыльный центральный циферблат, д) корпус головоломки.

из которых в принципе может быть повернут независимо от остальных. Следовательно, число различных расположений стрелок не превосходит $12^{14} \approx 1{,}28 \cdot 10^{15}$. В дальнейшем мы увидим, что все эти расположения действительно можно получить.

А теперь посмотрим, какими возможностями при переводе стрелок мы располагаем. Каждая из кнопок может находиться в двух положениях, поэтому всего в головоломке имеется $2^4 = 16$ «передач». При любом нажатии кнопок можно выделить две группы подключенных друг к другу циферблатов: в одну входят угловые пары и лицевые циферблаты, окружающие ненажатые кнопки, другая определяется так же, только если посмотреть на «часы» с тыльной стороны. Каждая пара угловых циферблатов обязательно попадет в одну из групп, но некоторые «одиночные» циферблаты могут оказаться несцепленными с другими. Таким образом, при заданном положении кнопок имеется, вообще говоря, два способа вращения стрелок — можно вращать любую из двух групп. Но в двух случаях — когда все кнопки нажаты или отжаты — образуется только одна группа, поэтому общее число способов вращения равно $2 \cdot 16 - 2 = 30$. Однако если считать *эквивалентными* те способы вращения, которые получаются друг из друга поворотом головоломки в ее плоскости или ее переворачиванием, то останутся всего 5 неэквивалентных вариантов. Все они показаны на рисунке 3. (Проверьте, что имеется 2 способа вращения, эквивалентные варианту A, по 8 способов, эквивалентные B, C и E, и 4 способа, эквивалентные D.) Если повернуть ведущее колесико на $360°/12 = 30°$, то в зависимости от включенной «передачи» те или иные циферблаты (на рисунке 3 они помечены стрелками) повернуться на тот же угол, т. е. на 1 час. Такие операции будем называть *элементарными;* для «передач», показанных на рисунке 3, мы будем обозначать их, соответственно, A, B, C, D, E. Результат операции можно записывать с помощью таблички из нулей и единиц:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

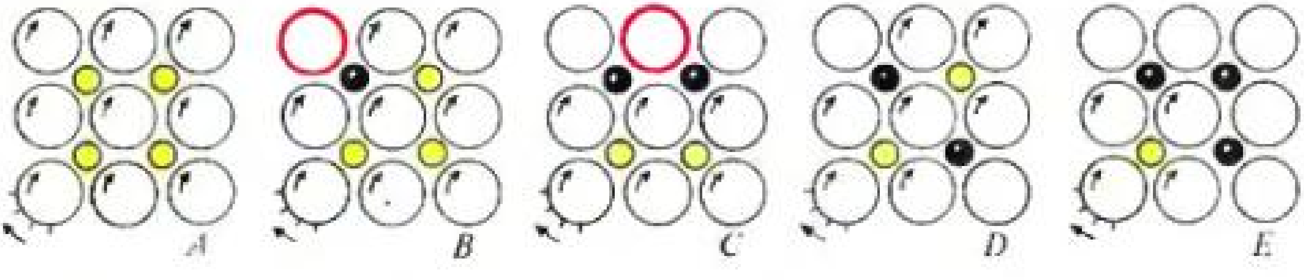


Рис. 3. Пять принципиально различных передач «часов Рубика» (вид с лицевой стороны): желтым показаны ненажатые кнопки, черным — нажатые, зубцы выделены у вращаемой шестеренки.

и т. д.; здесь 1 означает поворот на 1 час, 0 — отсутствие поворота. (Таблички для A, B, C показывают лишь то, что происходит на лицевой стороне «часов», но этого достаточно, т. к. на тыльной стороне будут вращаться только угловые циферблаты, повторяя вращение парных им лицевых.) Чтобы найти результат последовательного выполнения нескольких элементарных операций, надо просто сложить поэлементно соответствующие таблицы. Например,

$$A+A=2A=\begin{pmatrix}2&2&2\\2&2&2\\2&2&2\end{pmatrix},\ A+C=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\2&2&2\end{pmatrix}.$$

Очевидно, что такое «сложение» операций коммутативно, т. е. не зависит от порядка слагаемых. И в этом — главная особенность «часов Рубика», которая делает их существенно проще «волшебного кубика» и родственных ему головоломок.

Результат любой «неэлементарной» операции полностью определяется числом повторений в ней каждой из 30 возможных элементарных операций (оно может быть и нулем), поэтому ее можно записать в виде суммы 30 слагаемых $aA+bB+cC+dD+eE$, где коэффициенты a, b, c,...— это количество повторений A, B, C ..., или углы (в часах), на которые поворачивается ведущая шестеренка при соответствующих положениях кнопок. Теперь дело сводится к чисто алгебраической задаче, точнее, просто к решению системы линейных уравнений.

Действительно, определим для каждого циферблата угол, на который его надо повернуть, чтобы поставить стрелку на 12 часов; получатся две таблички для лицевой и тыльной стороны.

Пусть, например, для лицевой стороны эта табличка выглядит так:

$$\begin{pmatrix}t_{11}&t_{12}&t_{13}\\t_{21}&t_{22}&t_{23}\\t_{31}&t_{32}&t_{33}\end{pmatrix},$$

тогда соответствующие уравнения имеют вид

$$1\cdot a+0\cdot b+0\cdot c+0\cdot d+\\+0\cdot e+...=t_{11},$$
$$1\cdot a+1\cdot b+0\cdot c+1\cdot d+\\+0\cdot e+...=t_{12},$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$1\cdot a+1\cdot b+1\cdot c+0\cdot d+\\+0\cdot e+...=t_{33}.$$

Всего здесь 9 уравнений с 30 неизвестными, но, добавляя еще 5 уравнений для неугловых циферблатов тыльной стороны, получим систему из 14 уравнений. Ее надо решить в целых числах, а точнее, «по модулю 12», т. е., считая числа, дающие одинаковый остаток при делении на 12, равными (ведь 12 час=0 час). Поскольку число неизвестных здесь больше числа уравнений, часть из них, вообще говоря, можно задать произвольно, а остальные уже найти из системы. Ясно, что оставить нужно 14 неизвестных — по числу уравнений, т. е. из всего многообразия 30 элементарных операций можно ограничиться только 14-ю. Но эти операции (или неизвестные в наших уравнениях) должны быть независимы, т. е. ни одна из них не должна выражаться через остальные — иначе мы не сможем получить все 12^{14} состояний «часов Рубика»...

Прервем здесь наши алгебраические рассуждения. Принцип уже ясен, а такое чисто вычислительное, рутинное решение не требует ни воображения, ни соображения — качеств, без которых любая головоломка теряет всю привлекательность. Обратимся лучше снова к рисунку 3 и попробуем, глядя на него, найти такие комбинации элементарных операций, которые позволяли бы переводить стрелки наших часов по отдельности, или хотя бы небольшими группами. Это позволило бы найти прямой путь к решению.

Одна такая операция видна сразу — это

$$A-B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

(знак «минус», конечно, означает, что стрелки поворачиваются в направлении, противоположном указанному на рис. 3). Операция $t(A-B)$, где $t=0, 1, ..., 11$, поворачивает на t делений левую верхнюю пару угловых циферблатов. Аналогично можно поворачивать по отдельности и 3 другие угловые пары. Эти операции удобно использовать в конце решения, поскольку они не разрушат того, что уже достигнуто.

Теперь хотелось бы найти аналогичную операцию для боковых циферблатов. Причем она может поворачивать и угловые циферблаты, ведь мы их все равно будем устанавливать позже. Наверное, вы уже нашли ответ:

$$A-C=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Эта операция переводит на 1 час вперед верхнюю стрелку на лицевой строке (и соседние с ней угловые). Понятно, что головоломку можно повернуть так, чтобы на «верхнем лицевом» месте оказался и любой из 7 других боковых циферблатов.

Итак, мы имеем 8 эквивалентных операций для установки боковых циферблатов и 4 — для угловых. Добавим к ним еще две операции для центральных циферблатов, например, A и аналогичную «тыльную» операцию. Получится 14 операций, которых достаточно для решения головоломки (вспомним систему из 14 уравнений!). Действовать можно так:

1) операцией A (точнее, tA, где $t=0, 1, ..., 11$) устанавливаем центральную стрелку лицевой стороны на 12 часов;

2) операциями вида $t(A-C)$ устанавливаем лицевые боковые стрелки (центральная останется при этом неподвижной);

3) переворачиваем головоломку и повторяем первые два шага;

4) операциями вида $t(A-B)$ устанавливаем угловые стрелки.

Можно было бы на этом и закончить, но наш алгоритм допускает усовершенствование, точнее, его можно сократить. Если считать «ходом» поворот одной из шестеренок при фиксированной «передаче», то число ходов для 1-го шага равно 1, для 2-го — $2\cdot 4=8$ (на каждый циферблат тратится 2 хода — tA и $-tC$), для 3-го — еще $1+8=9$, для 4-го — $2\cdot 4=8$, а всего — 26. Но ведь мы использовали только 14 разных элементарных операций (A, B, C и получающиеся из них поворотами головоломки), а значит, меняя их порядок, можно свести все к 14 ходам. Вот как это делается:

1) операцией вида tC установим центральную лицевую стрелку параллельно верхней лицевой; поворачивая корпус на 90°, повторим эту процедуру еще 3 раза — в результате 5 стрелок (центральная и боковые) на лицевой стороне станут параллельными;

2) операцией вида tA установим эти 5 стрелок на 12 часов;

3) переворачиваем головоломку и повторяем 1-й шаг;

4) операцией вида tC (на тыльной стороне!) устанавливаем все 5 неугловых стрелок параллельно левой верхней угловой и повторяем это еще 3 раза, поворачивая головоломку на 90° — в результате все 9 стрелок станут параллельными;

5) операцией tA (опять-таки на перевернутой головоломке, т. е. на тыльной стороне) ставим все стрелки на 12 часов. Все.

Сделаем в заключение еще несколько замечаний. Ясно, что наш алгоритм позволяет получить любое из 12^{14} возможных расположений стрелок. При этом мы используем 14 ходов, каждый из которых является повторением (в количестве от 0 до 11) одной из 14 элементарных операций A, B, C и им эквивалентных. С учетом коммутативности имеется всего 12^{14} различных комбинаций этих операций. А это значит, что все они различны и каждому расположению стрелок отвечает только одна такая комбинация.

Итак, если *ограничиться только выделенными нами 14-ю операциями*, можно утверждать, что

от любого расположения стрелок к любому другому можно перейти не

(Окончание см. на с. 75)

(Начало см. на с. 60)

более чем за 14 ходов, причем последовательность кодов определена однозначно (с точностью до порядка).

В этом — разительное отличие «часов Рубика» от его «волшебного кубика», для которого не только нет речи о какой-либо единственности решения, но и вопрос о кратчайшем алгоритме так и остается открытым (см. статью «Математика волшебного кубика» в «Кванте» № 8, 1982 г.). Более того, с математической точки зрения «часы» вообще можно считать тривиальной головоломкой, поскольку ее решение сводится к линейным уравнениям. Вот к каким последствиям приводит простенькое свойство коммутативности!

И все же и в этой головоломке остается вопрос, над которым можно подумать. Если пустить в ход все 30 элементарных операций, то однозначность решения, конечно, нарушится, а многие операции можно будет сократить. *Верно ли, что и при таком расширенном арсенале ходов найдутся положения стрелок, до которых нельзя будет добраться быстрее, чем за 14 ходов?* Ждем ваших ответов.

В. Дубровский

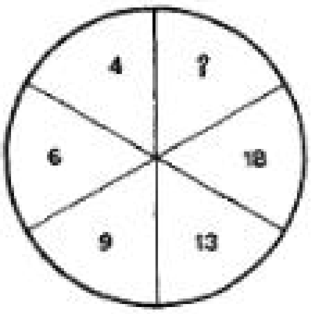
Числовой тест

По многочисленным просьбам читателей публикуем числовой тест. Мы взяли его из книги английского психолога Г. Айзенка «Проверьте свои способности» (М.; Мир, 1972). Один из его тестов мы приводили в нашем журнале в девятом номере за 1989 год. Числовой тест позволяет вычислить ваш «коэффициент интеллектуальности» по следующему правилу: если верно выполнены 7 заданий, КИ= =90, дальше за каждые 4 задания вы получаете еще по 10 очков. На решение теста дается 30 минут.
Не пугайтесь, если вы решили правильно лишь меньшую часть заданий: 100 очков — нормальный результат, 125— хороший, а уж больше 130 — замечательно!
Желаем удачи!

1. Продолжите числовой ряд.

18 20 24 32 ?

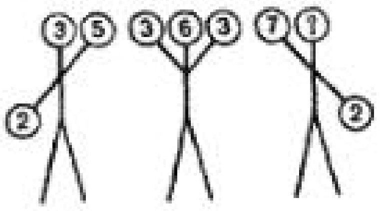
2. Вставьте недостающее число.



3. Продолжите числовой ряд.

212 179 146 113 ?

4. Вставьте недостающее число.



5. Продолжите числовой ряд.

6 8 10 11 14 14 ?

6. Вставьте пропущенное число.

17	(112)	39
28	( )	49

7. Вставьте недостающее число.

3	9	3
5	7	1
7	1	?

8. Продолжите ряд чисел.

7 13 24 45 ?

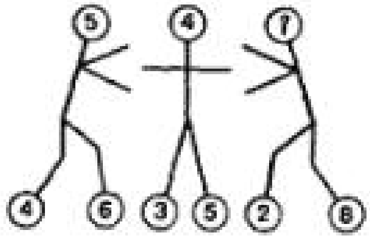
9. Вставьте пропущенное число.

234	(333)	567
345	( )	678

10. Вставьте пропущенное число.

4 5 7 11 19 ?

11. Вставьте недостающее число.



12. Продолжите числовой ряд.

6 7 9 13 21 ?

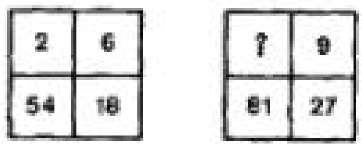
13. Вставьте недостающее число.

4	8	6
6	2	4
8	6	?

14. Продолжите числовой ряд.

64 48 40 36 34

15. Вставьте недостающее число.



16. Вставьте пропущенное число.

718	(26)	582
474	( )	226

17. Продолжите числовой ряд.

15 13 12 11 9 9 ?

18. Вставьте недостающее число.

9	4	1
6	6	2
1	9	?

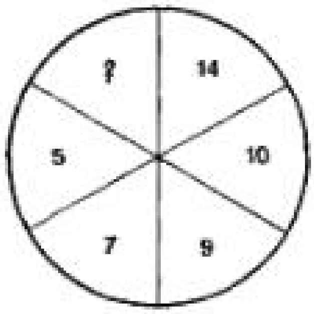
19. Вставьте пропущенное число.

11 12 14 ? 26 42

20. Вставьте недостающее число.

8	5	2
4	2	0
9	6	?

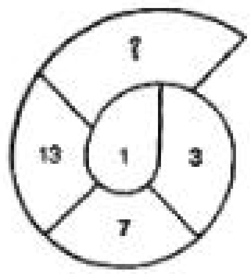
21. Вставьте пропущенное число.



22. Вставьте пропущенное число.

341	(250)	466
282	( )	398

23. Вставьте пропущенное число.



24. Вставьте пропущенное число.

12	(336)	14
15	( )	16

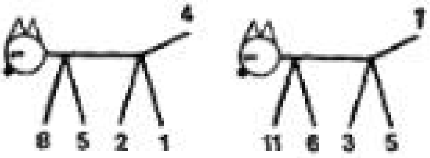
25. Вставьте недостающее число.

4	7	6
8	4	8
6	5	?

26. Продолжите числовой ряд.

7 14 10 12 14 9 ?

27. Вставьте недостающее число.



28. Вставьте пропущенное число.

17 (102) 12
14 ( ) 11

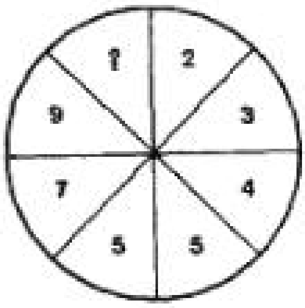
29. Продолжите числовой ряд.

172 84 40 18 ?

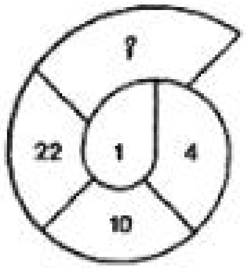
30. Продолжите числовой ряд.

1 5 13 29 ?

31. Вставьте недостающее число.



32. Вставьте недостающее число.



33. Продолжите числовой ряд.

0 3 8 15 ?

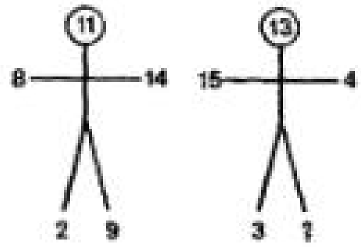
34. Вставьте пропущенное число.

1 3 2 ? 3 7

35. Вставьте пропущенное число.

447 (366) 264
262 ( ) 521

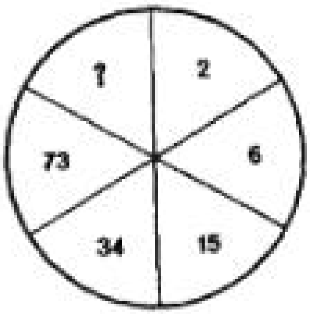
36. Вставьте недостающее число.



37. Продолжите числовой ряд.

4 7 9 11 14 15 19 ?

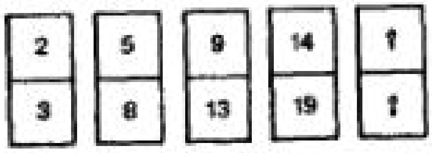
38. Вставьте недостающее число.



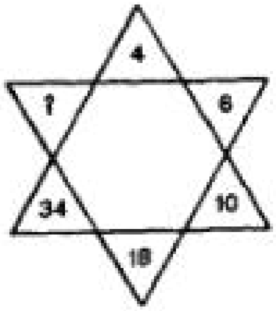
39. Вставьте недостающее число.

3 7 16
6 13 28
9 19 ?

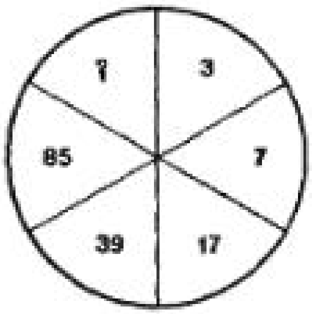
40. Вставьте недостающие числа.



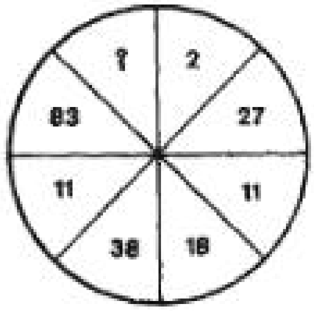
41. Вставьте пропущенное число.



42. Вставьте пропущенное число.



43. Вставьте недостающее число.



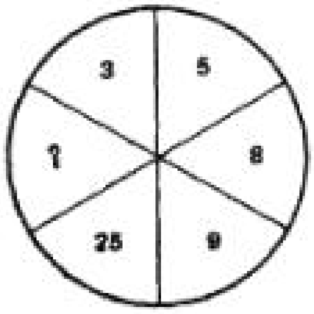
44. Вставьте пропущенное число.

643 (111) 421
269 ( ) 491

45. Продолжите числовой ряд.

857 969 745 1193 ?

46. Вставьте недостающее число.



47. Вставьте недостающие числа.

9 (45) 81
8 (36) 64
10 ( ) ?

48. Продолжите числовой ряд.

7 19 37 61 ?

49. Продолжите числовой ряд.

5 41 149 329 ?

50. Вставьте пропущенное число.

Игра шакур

С. КОНОВАЛОВ

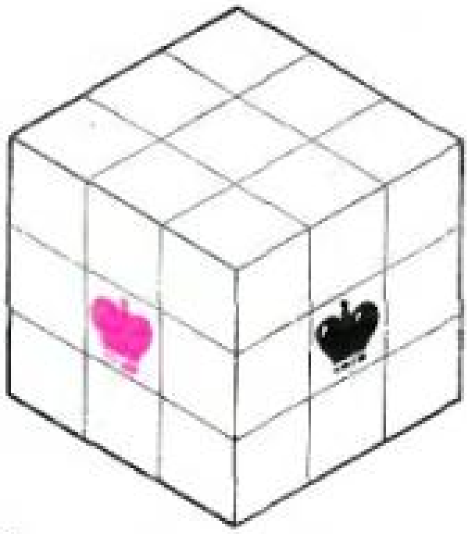


Рис. 1.

В одном из выпусков шахматной странички «Кванта» приводились задачи, в которых в какой-то момент доска поворачивалась. Это меняло направление движения пешек, а следовательно, приводило к другой позиции. Возникает естественная для математика мысль: рассмотреть вариант игры, в котором преобразование шахматного пространства было бы настоящим ходом. Одну из реализаций этой идеи можно получить на кубике Рубика — шахматный кубик Рубика, или, сокращенно, шакур.

Игра будет поверхностной (в геометрическом смысле), «доска» состоит из 54-х клеток. В каждой вершине кубика встречаются три клетки, поэтому мы не сможем сохранить обычную пятнистую раскраску и будем считать доску одноцветной (белой), а фигуры — красными и черными (рис. 1).

Оживим шахматные фигуры (все, кроме пешек, которые нам пока не понадобятся, так как сегодня мы рассмотрим самый простой вид игры — матование одинокого черного короля). Фигура (король, ферзь, ладья, слон или конь) может пойти с поля *A* на поле *B*, если на какой-нибудь развертке кубика фигура может попасть с *A* на *B* по обычным шахматным правилам, однако слону запретим ходить с одной клетки на другую, если у них есть общая сторона. Аналогичное исключение сделаем и для диагональных ходов ферзя, иначе эти фигуры были бы слишком мощными.

Чтобы читателю было проще освоиться с геометрией нашей шахматной доски, рекомендуем сделать комплект шакурных фигур, состоящий из кубика Рубика и фигур-наклеек, изготовленных с помощью любой клейкой ленты.

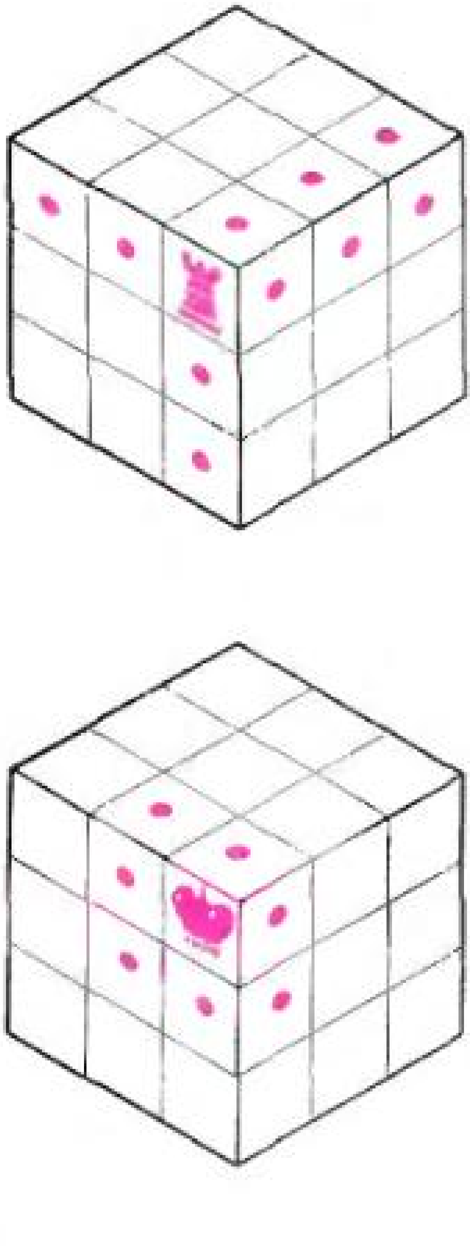


Рис. 2.

Самые простые ходы (и соответствующие развертки) у ладьи и короля (рис. 2). В дальнейшем на рисунках будем отмечать точками поля на «видимых» гранях, доступные фигуре.

У слона, если он не занимает центральную или угловую клетку грани, битые поля образуют два диагональных меридиана, пересекающихся в двух полюсах-антиподах. На рисунке 3 изображены два слона, расположенные в таких полюсах и имеющие одинаковые траектории.

Задача 1. *Нарисуйте развертку куба для определения одного хода-меридиана слона C_1 из позиции на рисунке 3.*

Возможности слона, расположенного в центральной или угловой клетке грани, показаны на рисунке 4.

Задача 2. *Проверьте, что за несколько ходов слон может попасть с любого поля доски на любое другое. За какое наименьшее число ходов слон может попасть с поля 1 на поле 2 (см. рис. 4)?*

Задача 3. *Разберите свойства ферзя.*

Даже на обычной доске кони выделяются своими коварными ходами, на кубике их ходы еще неожиданнее (см. рис. 5).

Отметим, что описанным образом можно определить ходы фигур на поверхности клетчатого кубика с гранями размером $n \times n$, а не только 3×3.

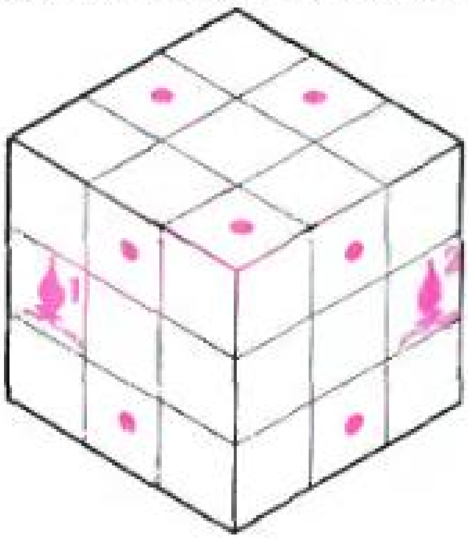


Рис. 3.

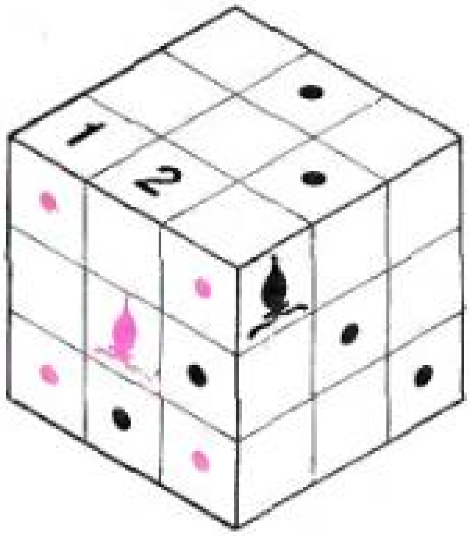


Рис. 4.

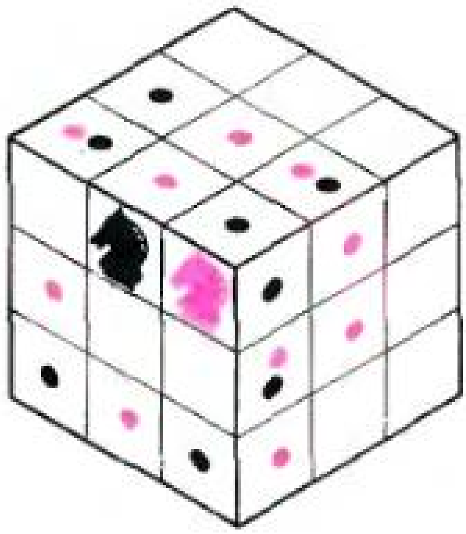


Рис. 5.

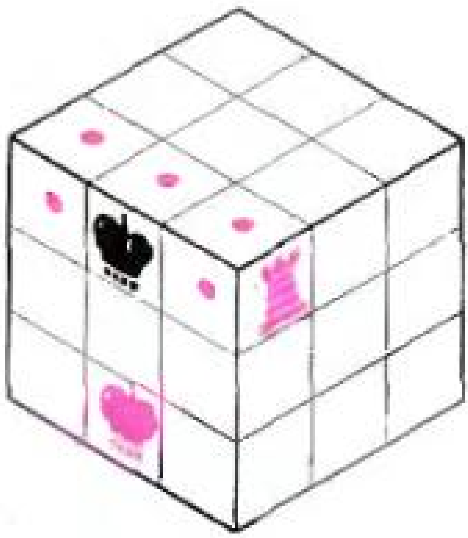


Рис. 6.

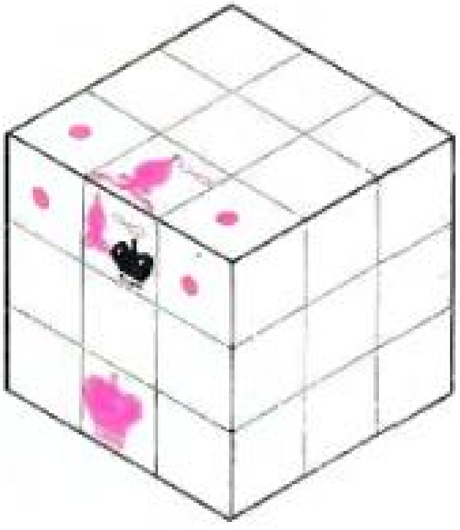


Рис. 7.

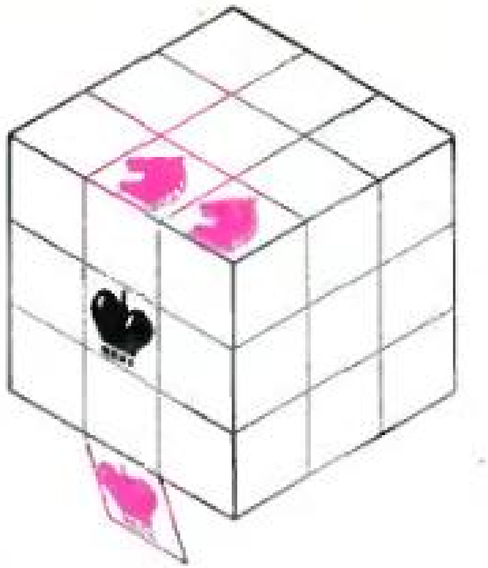


Рис. 9.

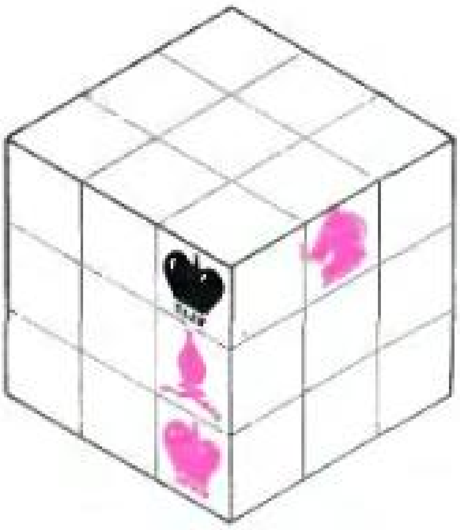


Рис. 8.

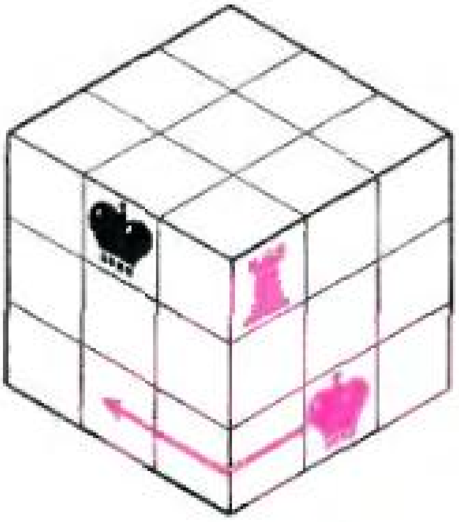


Рис. 10.

На такой доске можно решать обычные задачи с «активными» движениями фигур. Например, докажите, что красные король и ладья могут заматовать одинокого черного короля; заключительная позиция может быть такой, как на рисунке 6.

Любопытно, что перевес в ладью, минимально-достаточный для победы над одиноким королем на обычной доске, оказывается достаточным и на кубике! Еще более неожиданным является то, что на кубике 3×3 можно придумать матовые позиции, в которых кроме королей с сильнейшей стороны участвуют два слона, слон и конь, два коня — опять так же, как на обычной доске.

На рисунке 7 изображена матовая позиция; символ ∞ в клетке доски означает, что слон находится на далеком поле-антиподе, а как мы знаем, действует такой слон-двойник так, как если бы он находился в выделенной клетке. Из рисунка 8 видно, что вместе с красным королем слоны-невидимки отрезают черному королю все пути для бегства, а один из них еще и объявляет шах — на доске мат.

Приведем без комментариев еще несколько матовых позиций.

В позиции на рисунке 9 нам не удастся повернуть кубик так, чтобы все фигуры были на видимых гранях. Красный король расположен на невидимой нижней грани кубика, часть *которой изображена в виде развертки*.

Можно было бы и дальше рассматривать «обычные» шахматные ходы на кубике и решать соответствующие задачи, но у нас в этой заметке другая цель — использовать динамические возможности кубика Рубика.

Назовем две позиции совместимыми, если одну можно получить из другой вращениями граней кубика. Например, позиция, изображенная на рисунке 6, совместима с позицией на рисунке 10.

Теперь мы можем, наконец, сформулировать условия игры шакур: *из заданной расстановки красных и черных фигур получить вращениями граней кубика совместимую с ней позицию, в которой на доске стоял бы мат черному королю.*

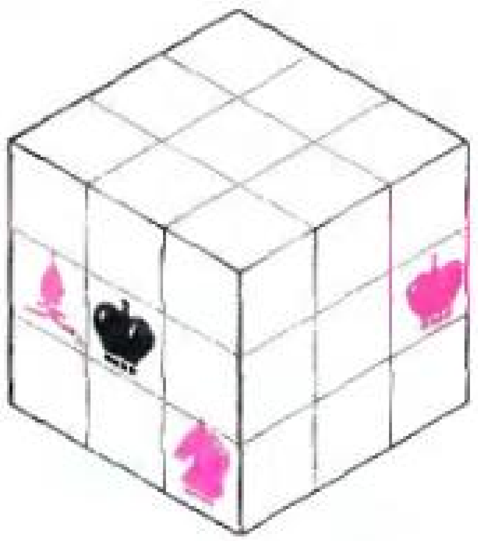
Решение такой задачи будет состоять из двух частей: сначала надо придумать матовую позицию, а потом получить ее, делая ходы-вращения. Подчеркнем, что фигуры будут двигаться только вместе с доской.

Для желающих придумывать задачи отметим, что при большом числе черных фигур их роль будет двоякой: они могут разрушать атаки красных фигур, но могут и ограничивать подвижность своего же черного короля.

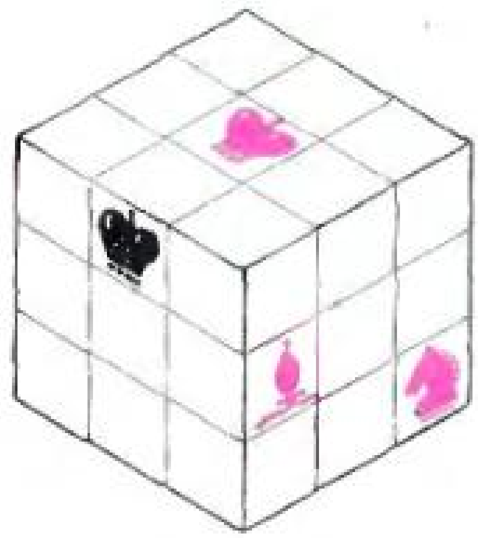
Как и в обычной шахматной композиции, можно было бы ввести ограничения на число ходов-вращений («мат в два хода»), но мы этого делать не станем.

В заключение предлагаем читателям еще четыре задачи (рис. 11) с одинаковым этюдным заданием: найти выигрыш в игре шакур, т. е. заматовать черного короля вращениями кубика Рубика (на невидимых гранях фигур нет).

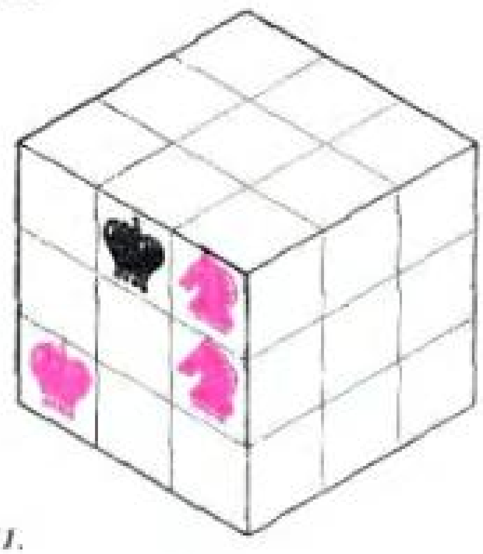
Задача 4.



Задача 6.



Задача 5.



Задача 7.

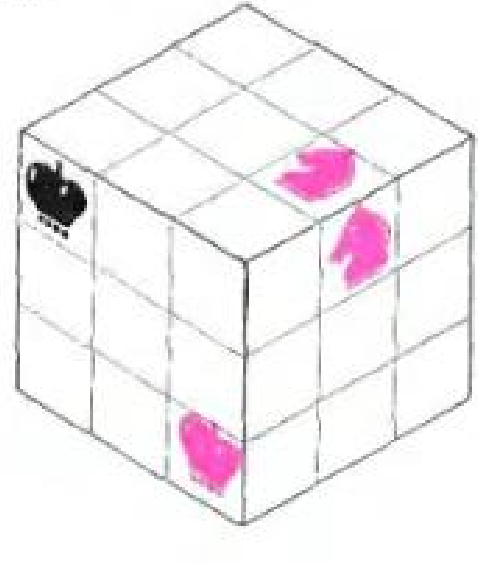


Рис. 11.

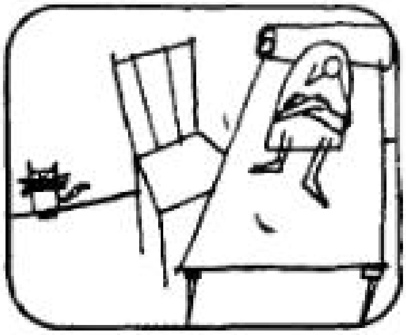
Игры и головоломки

Перед вами — небольшой отрывок из книги замечательного американского популяризатора Мартина Гарднера «Aha!» («Есть идея!», М., Мир, 1982). В ней собраны занимательные задачи, заставляющие читателя искать нестандартные решения.

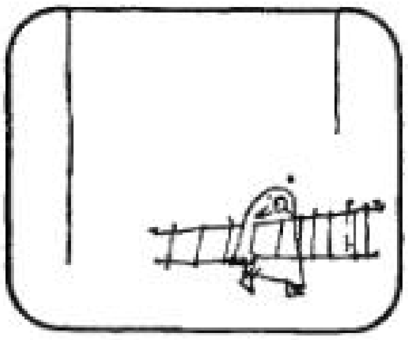
Аховы тесты

М. Гарднер

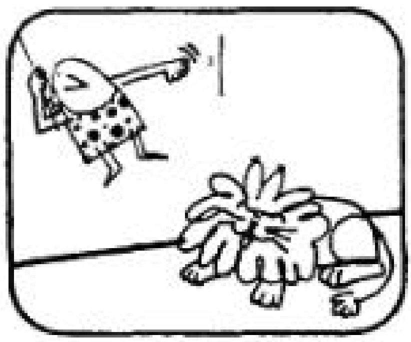
Полиция обратилась за помощью к известному специалисту по решению головоломок, профессору психологии Аху. Свои необычайно остроумные решения он назвал «феноменами Ах» и предложил множество тестов, позволяющих выявлять «феномены Ах» у испытуемых.



Один из его тестов осуществляется с помощью двух веревок, свисающих с потолка в пустой комнате.

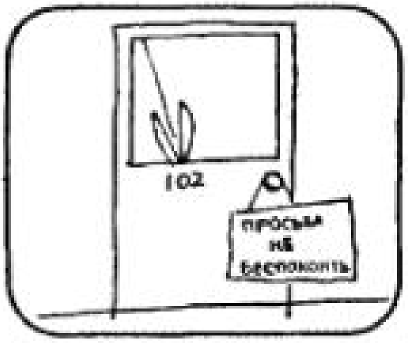


Проф. Ах. Расстояние между этими веревками достаточно велико, поэтому, держась за одну веревку, невозможно дотянуться до другой.

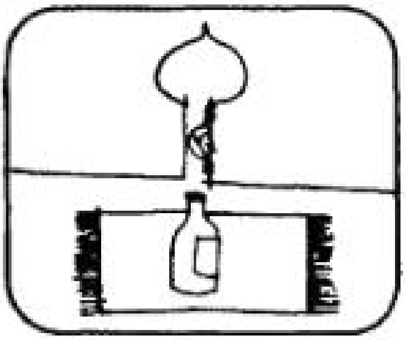


Проф. Ах. Задача состоит в том, чтобы связать свободные концы веревок, не пользуясь ничем, кроме ножниц.

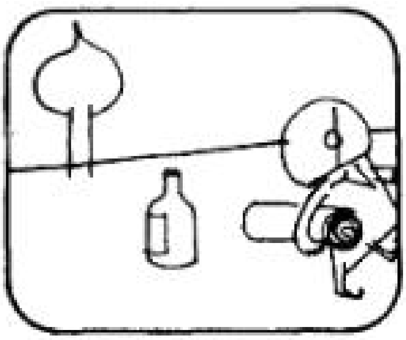
Справитесь ли вы с этим тестом?



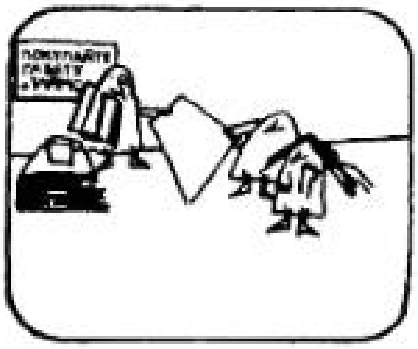
Проф. Ах. А вот еще один тест, который я также очень люблю. В центре небольшого восточного ковра я ставлю открытую бутылку пива. Требуется достать ее, сняв с ковра.



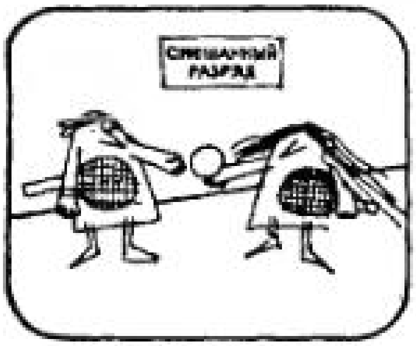
Проф. Ах. К бутылке нельзя прикасаться ни рукой, ни ногой, ни любой другой частью тела или каким-нибудь предметом. Разумеется, проливать пиво на ковер также не разрешается. Если вы не справитесь с этим тестом, может быть, следующий тест покажется вам более простым.



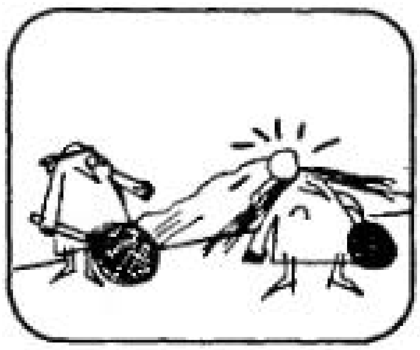
Проф. Ах. Для этого теста нам понадобится газета. Вы с приятелем должны встать на газетный лист так, чтобы ни один из вас не мог прикоснуться к другому. Сходить с газеты не разрешается.
Покажите, на что вы способны. Это ваш последний шанс успешно справиться с одним из тестов проф. Аха.



Когда проф. Ах предложил последний тест одной из студенток, она не только справилась с заданием, но и предложила профессору свой тест.
Студентка. Уважаемый профессор! Не могли бы вы бросить теннисный мяч так, чтобы он, пролетев короткое расстояние, остановился и начал двигаться в обратном направлении?

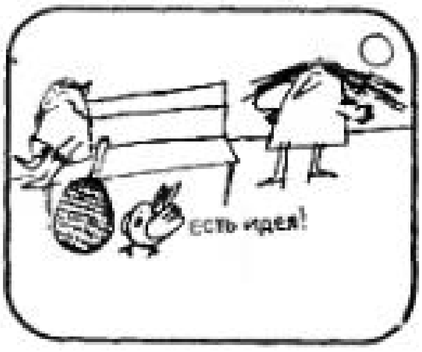


Проф. Ах. Может ли мяч стукнуться о препятствие?
Студентка. Ни в коем случае! Не разрешается также ударить мяч чем-нибудь или привязывать его к чему-нибудь.



После того как проф. Ах признал свое поражение, студентка показала ему, как решается задача. Решение оказалось удивительно простым.

Проф. Ах. И как я только об этом не подумал! О чем не подумал проф. Ах?



Еще несколько тестов. Чтобы помочь вам в развитии «феномена Ах», приведем еще пять задач-тестов:

1. Можете ли вы бросить на пол с высоты 1 м картонную спичку так, чтобы она упала на ребро?

2. Рабочие смешивают известь с песком и цементом для заделки швов между бетонными блоками в фундаменте здания. В одном из блоков узкий прямоугольный канал глубиной 2 м. В этот канал случайно падает вывалившийся из гнезда птенец. Отверстие слишком узко, чтобы в него можно было просунуть руку, впрочем, достать до дна канала все равно было бы невозможно. Не могли бы вы предложить простой и надежный способ, позволяющий в целости и сохранности извлечь птенца из канала в бетонном блоке?

3. К крюку в потолке на нити длиной около 2 м подвешена кофейная чашка. Можете ли вы перерезать нить ножницами посредине так, чтобы чашка не упала на пол? Держать нить, пока вы ее перерезаете, или чашку запрещается.

4. В плотине недостает одного кирпича. Через образовавшуюся брешь размером 5 см × × 20 см льется вода. Обнаруживший течь голландец имеет при себе пилу и цилиндрический деревянный шест диаметром 50 мм. Как ему лучше всего распилить шест, чтобы заткнуть брешь?

5. Нижняя часть винной бутылки имеет форму цилиндра. Высота ее составляет 3/4 высоты бутылки. Верхняя четверть бутылки, состоящая из горлышка и плавного перехода к нижней части, имеет неправильную форму. В бутылку до середины ее налита жидкость. Открывать бутылку запрещается. Можете ли вы, пользуясь только линейкой, точно определить, какая часть объема бутылки заполнена жидкостью?

Перевод с английского Ю. Данилова

Иллюстрации канадского графика Дж. Глена

Ташкентская линейка

Пять лет назад, в разгар всеобщего увлечения «Кубиком Рубика», редакция получила письмо от читателя из Ташкента В. Христинкова с описанием новой головоломки. Автор просил назвать ее «ташкентской линейкой». К сожалению, не предлагалось конструкции такой линейки, и в редакции наши «головоломщики» также не смогли придумать ничего хорошего. Отправить материал «в корзину» было жалко, поскольку эта головоломка, на наш взгляд, интересна уже тем, что является простейшей из так называемых «пермутационных» головоломок — тех, где элементы сначала переводятся в новые положения, а потом допустимыми ходами требуется вернуть их обратно.

Так и пролежало это письмо 5 лет в столе, пока мы не получили письмо из Евпатории от М. Красиловского, который предложил нам ту же головоломку, назвав ее «кубик — МК» и дав ей неожиданную реализацию.

Итак, что же такое «ташкентская линейка», она же «кубик — МК»? Пусть у нас имеется шесть квадратиков, расположенных в одну линию. Чтобы их различать, раскрасим их в разные цвета, или, еще лучше, занумеруем (рис. 1). Разрешим теперь производить следующую операцию: выберем четверку рядом стоящих квадратиков (это можно сделать тремя способами), а потом поменяем между собой местами крайние квадратики, а также средние квадратики этой четверки, что эквивалентно повороту этой части линейки на 180° (рис. 2). Вот и все. Теперь «запутаем» линейку серией таких ходов и предложим кому-либо вернуть ее в исходное положение, совершая лишь описанные нами ходы.

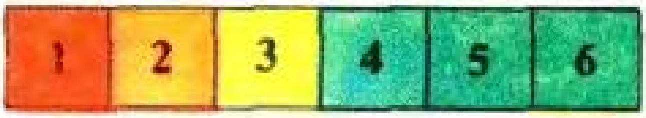


Рис. 1.

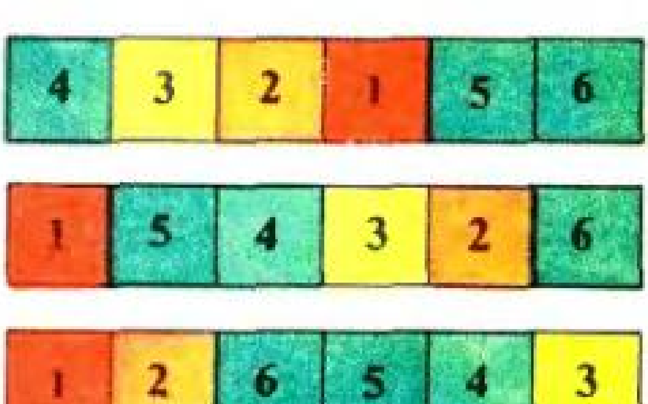


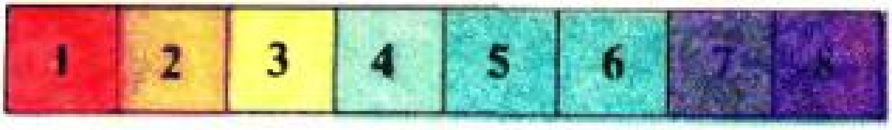
Рис. 2.

Как вы думаете, в скольких различных положениях может находиться «ташкентская линейка»? Оказывается, всего в 360 положениях, что до смешного мало по сравнению с 43 252 003 293 878 272 000 возможными положениями «кубика Рубика». Почему в 360? Заметим, что 6 квадратиков можно уложить в одну линию $6! = 720$ способами. Действительно, на первое место можно положить любой из 6 квадратиков, на второе — любой из оставшихся 5 (получаем $6 \cdot 5 = 30$ способов), затем любой квадратик из оставшихся четырех и т. д. Однако с помощью разрешенных операций мы сможем реализовать лишь половину возможностей. Объяснить причину этого поможет нам понятие транспозиции. Транспозицией в последовательности чисел или других элементов называется операция, в которой ровно два элемента меняются местами. Можно доказать, что если одна расстановка элементов получается из другой с помощью четного количества транспозиций, то нельзя проделать то же самое с помощью нечетного числа транспозиций, и наоборот, расстановка, полученная из другой с помощью нечетного числа транспозиций, не может быть получена из нее с помощью четного их числа.

В нашем случае каждая операция содержит ровно две транспозиции, поэтому мы можем получить только расстановки, соответствующие четному числу транспозиций, что составляет половину всех расстановок. Подумайте, почему.

А теперь подумаем об алгоритме, с помощью которого можно было бы перевести «ташкентскую линейку» в исходное положение из любого допустимого. Если вы немного поупражняетесь с линейкой, то без труда всегда сможете перевести квадратик 1 на первое место, а квадратик 2 — на второе. Посчитаем, сколько возможных позиций может получиться после

Рис. 3.



этого. На третьем месте может оказаться любой из четырех оставшихся квадратиков, на четвертом — любой из трех, итого 12 возможностей. Последние два квадратика мы можем поставить двумя способами, но полученные расстановки будут отличаться на одну транспозицию, следовательно, при одной расстановке последних двух квадратиков мы получим расстановку с четным числом транспозиций, а при другой — с нечетным. Поэтому последние два места определяются однозначно, если установлены все предыдущие. Итак, оказывается достаточным рассмотреть всего 12 расстановок. Это число мы сейчас еще уменьшим.

Выпишем эти 12 расстановок, сгруппировав их попарно:

123456	123564	123645
126543	124653	125463
124365	125346	126354
125634	126435	124536

В каждой паре расстановки отличаются всего одной операцией переворачивания последних четырех цифр. Поэтому, если мы научимся переводить в исходное положение верхнюю расстановку, то сможем сделать то же самое и с нижней. Кроме того, верхняя расстановка в первой паре — требуемая, ее уже не нужно переводить. Осталось 5 расстановок, например, верхних в оставшихся парах. Можно для них выписать процедуры перевода в исходное положение. Вот как предлагает это сделать В. Христинков:

123564	123645	124365	125346	126354
532164	632145	163425	143526	362154
534612	641235	165243	534126	364512
516432	645321	256143	536214	315462
512346	623541	253416	512634	312645
321546	621453	214356	514362	346215
345126	654123	216534	563412	345126
154326	145623	235614	562143	154326
123456	126543	234165	126543	123456
	123456	143265	123456	
		145623		
		126543		
		123456		

Итак, решение получено, но осталось еще много вопросов. Например, можно ли сократить последовательность операций, указанную В. Христинковым? Из каких позиций переход к исходной требует максимального числа операций? Чему равно это число? Сколько различных позиций может получиться за данное количество ходов? Сколько из них не может быть получено за меньшее число ходов?

Чтобы ответить на эти вопросы, конечно, хотелось бы иметь обещанную реализацию «ташкентской линейки» — «кубик — МК», придуманный М. Красиловским. Оказывается, что те, кто имеют программируемый микрокалькулятор, имеют и обещанную реализацию, поскольку требуемую перестановку цифр может осуществить на индикаторе микрокалькулятора соответствующая программа. Правда, программа М. Красиловского рассчитана на линейку не в 6 чисел, а в 8 (рис. 3), но никто не мешает, например, оставить в покое последние две цифры, а с другой стороны, любопытно решить поставленные здесь задачи и для этой более длинной линейки. Мы не приводим этой программы, содержащей 66 шагов, в надежде, что кто-нибудь предложит более экономную программу. Желаем вам успехов в этом деле. М. Красиловский предложил также еще две головоломки «кубик — МК-2» и «кубик — МК-3», в которых реализуются другие способы перестановки элементов. Попробуйте и вы создать другие типы линеек и программы их реализации на микрокалькуляторе.

В заключение хотим напомнить о головоломке «Двумерный кубик Рубика», опубликованный в № 8, 1991 г. Там ситуация очень похожа на описанную здесь — головоломка не имеет материального воплощения, а существует лишь на дисплее компьютера. В нашем случае оказалось достаточным иметь лишь микрокалькулятор.

Публикацию подготовил А. Савин

Игры и головоломки

Ханойская башня

Эта головоломка известна уже довольно давно. Ее автором принято считать французского математика Э. Люка, создавшего ее на основе древних легенд. В русской литературе она впервые появилась, видимо, в 1902 году в книге Е. Игнатьева «В царстве смекалки». Об этой книге мы недавно рассказывали в нашем журнале («Квант» № 4, 1991 г.). Многие авторы книг по программированию, очарованные простотой и изяществом «ханойской башни», описывали алгоритм ее решения.

Что же представляет из себя эта головоломка, которую иногда именуют «Башней браминов», а Е. Игнатьев называет «Детской пирамидкой»? Если вы возьмете детскую пирамиду (диски располагаются в порядке возрастания: верхний — самый маленький, а нижний — самый большой) и еще два стержня от таких же детских пирамид, то головоломка уже у вас в руках (рис. 1).

Занумеруем стержни: тот, на котором находятся диски, получит номер I, другие — номера II и III. Задача состоит в том, чтобы перенести диски со стержня I на стержень III, используя стержень II, как промежуточный. При этом должны соблюдаться два условия: 1) за один ход можно переносить лишь один диск, 2) нельзя класть больший диск на меньший.

Существует легенда, что в индийском городе Бенаресе бог Брама поставил в одном из храмов на бронзовой площадке три алмазные палочки толщиной в корпус пчелы, на одну из них он надел 64 золотых диска, и с момента сотворения мира без устали, сменяя друг друга, жрецы переносят диски с одной палочки на другую в соответствии с описанными правилами. Когда жрецы перенесут все диски с первой палочки на третью,— гласит легенда,— наступит конец света.

Давайте разберемся, как же перенести диски с первого стержня на третий, а за одно выясним, скоро ли наступит обещанный конец света.

Если бы в пирамиде был только один диск, то решение очевидно — перенесем его на третий стержень, и дело с концом. Мы выполнили требуемое задание за один ход. А если бы было два диска? Тогда положим сначала меньший диск на второй стержень, затем положим второй диск на третий стержень, затем перенесем и меньший диск на третий стержень, положив его поверх второго. Все. За три действия мы смогли переложить оба диска на третий стержень. Отметим, что $1=2^1-1$, а $3=2^2-1$. Теперь предположим, что мы умеем перекладывать на третий стержень пирамиду из n дисков за 2^n-1 действие. Покажем, что в таком случае можно перенести на третий стержень и пирамиду из $n+1$ дисков, притом за $2^{n+1}-1$ действие.

Действительно, пусть на пирамиде лежит $n+1$ дисков. На время изменим нумерацию стержней: второй назовем треть-

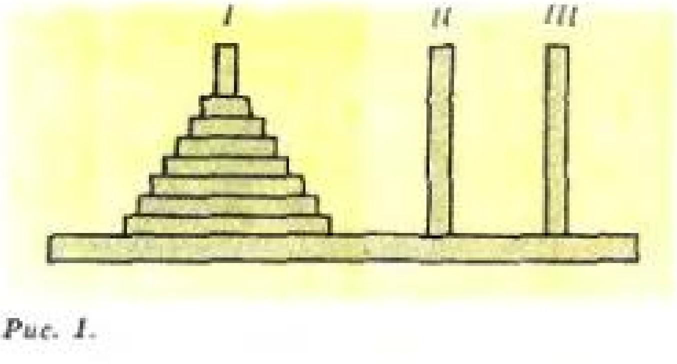


Рис. 1.

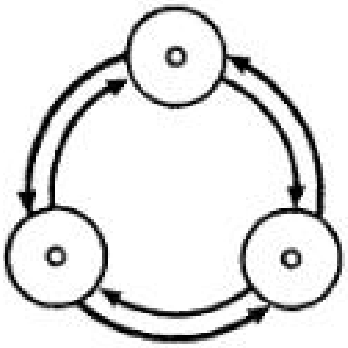


Рис. 2.

им, а третий — вторым. Теперь мы можем перенести n верхних дисков с первого стержня на третий, произведя 2^n-1 действие. На первом стержне остался лишь один диск. Перенесем его на свободный второй стержень. Снова перенумеруем стержни: вернем второму стержню номер три, первому дадим номер два, а третьему — номер один. Теперь у нас на первом стержне лежит n дисков, второй — свободен, а на третьем лежит самый большой диск. Осталось перенести с первого стержня на третий n дисков, что мы умеем делать за 2^n-1 операцию. Все. Мы собрали на третьем стержне все $n+1$ дисков, совершив $(2^n-1)+1+(2^n-1)=2^{n+1}-1$ действие.

Отсюда, в соответствии с принципом математической индукции, вытекает, что для любого натурального числа k можно, имея пирамиду с k дисками, перенести их с первого стержня на третий, соблюдая правила, за 2^k-1 действие.

Приведенное доказательство нетрудно оформить в виде алгоритма действий. Именно такой алгоритм и предлагается программистам в упомянутых книгах для его записи на том или ином алгоритмическом языке.

Нетрудно показать, что меньше чем за 2^k-1 действие перенести k дисков с первого стержня на третий невозможно. Поэтому легендарным жрецам понадобится $2^{64}-1$ действие, чтобы исполнить свою работу. Если тратить на каждое действие лишь по одной секунде, то понадобится 18 446 744 073 709 551 615 с, т. е. более 500 миллиардов лет.

Присмотримся повнимательнее к процессу переноса дисков. Для этого перенумеруем их в порядке возрастания: первый — самый маленький и т. д. Теперь начнем переносить диски в соответствии с алгоритмом и будем записывать номера переносимых дисков:

121312141213121512131214l...

Любопытно, что каждый нечетный перенос — это перенос первого диска. Еще одно наблюдение: расположим стержни в вершинах равностороннего треугольника (рис. 2) и понаблюдаем за движением первого диска. Оказывается, что он движется по кругу в одну и ту же сторону; при этом, если начальное количество дисков четно, то по часовой стрелке, а если нечетно — против. Эти наблюдения позволили в 1961 году сформулировать следующий алгоритм переноса дисков:

сначала переносим первый диск, потом не первый, затем снова первый, потом не первый и т. д., причем первый диск переносится в одном направлении: по часовой стрелке в случае четного количества дисков и против часовой стрелки, в случае их нечетного количества.

Заметим, что указание «переносится не первый диск» полностью определяет, какой диск и куда следует переносить в данный момент, поскольку меньший диск всегда кладется на больший.

Недавно школьник из г. Перми *Миша Федоров* предложил еще один алгоритм, осуществляющий, как и только что описанный, перенос k дисков с первого стержня на третий за 2^k-1 действие.

Миша вводит понятие «пустой башни». Стержни с нанизанными на них дисками он называет башнями, а башню, которая не участвует в операции переноса диска в этот момент, называет пустой. Алгоритм М. Федорова формулируется очень коротко:

в процессе перекладывания пустая башня должна двигаться по кругу в одном и том же направлении: по часовой стрелке, если число дисков нечетно, и против часовой стрелки, если их число четно.

Свою работу Миша Федоров с успехом доложил на Всесоюзной научно-технической конференции школьников. Заметим, что если первый алгоритм приводит к необходимому результату по построению, то справедливость второго и третьего следует доказывать, и это не очень просто. Хотя на самом деле все три алгоритма являются просто различными записями одного и того же процесса переноса дисков.

Существенно другой процесс возникает в том случае, если еще усложнить правила переноса. Наш читатель *А. Тарасенко* предлагает найти алгоритм, позволяющий переносить диски с первого стержня на третий, в котором первый диск ни разу не оказывался бы на втором стержне. Он утверждает, что такая процедура возможна за $2 \cdot 3^{k-1} - 1$ действие. Если же запретить второму диску оказываться на втором стержне, то количество перекладываний становится равным $2^2 \cdot 3^{k-2} - 1$. И вообще, если запретить класть на второй стержень n-й диск, то понадобится $2^n \cdot 3^{k-n} - 1$ действие.

Еще об одной модификации этой головоломки мы писали в предыдущем номере журнала (на 4 странице обложки). *В. Пинаев* предлагает рассмотреть вопрос: всегда ли возможно перенести диски с первого стержня на третий, если первоначально они лежали на первом стержне в произвольном порядке. Приводим доказательство того, что такое перекладывание всегда возможно.

Чтобы доказать возможность такого перекладывания, сначала разберемся с более простой задачей. Пусть требуется собрать пирамиду из дисков, нанизанных на два стержня, при свободном третьем, причем диски расположены на стержнях по возрастанию диаметров. Кроме того, предположим, что такую задачу мы уже умеем решать для любого меньшего количества дисков.

Пусть самый крупный диск находится на первом стержне, тогда чтобы собрать пирамиду на третьем стержне, необходимо сделать три операции:

1) собрать на втором стержне пирамиду без самого большого диска;

2) переместить самый большой диск на третий стержень;

3) переместить пирамиду со второго стержня на третий.

Все три операции мы можем сделать. Действительно, первую операцию мы можем сделать по предположению, вторая операция очевидна, а третья — обычное перемещение в головоломке «Ханойская башня», которое мы уже научились совершать.

Теперь вернемся к основной задаче. На первом стержне находятся диски в произвольном порядке, второй и третий стержни свободны. Постараемся разложить диски на втором и третьем стержнях в порядке возрастания. Начнем такое перекладывание и продолжим его, пока это возможно. При этом мы переложим не менее двух дисков. Если нам повезет, то мы сразу переложим все диски и перейдем к уже решенной задаче. А если не повезет? Пусть некоторый диск уже нельзя положить ни на второй, ни на третий стержень. Мысленно отделим на этих стержнях диски, меньшие рассмотренного диска. Соединим эти части вместе на втором стержне. Это мы уже научились делать. Теперь перенесем злосчастный диск на третий стержень и тем самым мы устраним возникшую трудность. Можем продолжать перекладывание. В результате все диски окажутся собранными на втором и третьем стержнях, а теперь собирать из них башню мы уже умеем. Итак, доказательство закончено.

Можно рассмотреть и такую задачу: все диски разложены в произвольном порядке на всех трех стержнях, требуется собрать их на одном. Эта задача также всегда разрешима.

В. Пинаев предлагает назвать свою головоломку *П*-башней, что же, можно согласиться с таким названием. Заметим, что идея этой головоломки идет от кубика Рубика: запутаем расположение частей головоломки, а потом постараемся привести ее к первоначальному виду с помощью разрешенных действий.

В литературе рассматриваются «Ханойские башни» и с бóльшим количеством стержней, например, в недавно вышедшей книге Ж. Арсака «Программирование игр и головоломок» (М.: Наука, 1990).

Публикацию подготовил А. Савин

Двенадцать долларов, ним и шоколадка

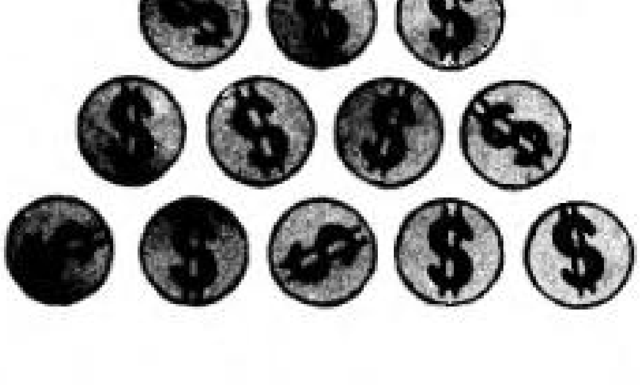
Кандидат физико-математических наук
А. САВИН

Не столь уж давно в салунах американского Среднего Запада можно было наблюдать любопытную игру. Начиналась она так. Бармен подзывал к себе подвыпившего ковбоя, выкладывал на стойку семь монет по одному доллару в две кучки — три и четыре доллара — и предлагал парню их выиграть: «Ставишь пять монет — получаешь двенадцать». Ковбой, отсчитав пять монет, клал их на стойку. Получалась третья кучка монет. Игра заключалась в том, что игроки по очереди берут монеты из этих кучек. Разрешается брать за один раз любое количество монет, но лишь из одной кучки. Забравший последнюю монету забирал и все остальные.

К стойке немедленно стекались завсегдатаи, наперебой подсказывавшие ковбою, из какой кучки и сколько монет, по их мнению, следует брать. Подобную картину вы можете наблюдать у нас при игре в три наперстка. Только если «наперсточники» — это шулера и их козырь — ловкость рук, то в игре «двенадцать долларов» выигрывает тот, кто лучше умеет считать.

Представим себе ход мыслей ковбоя, которому предстояло сделать первый ход: «Возьму-ка я целиком одну кучку. Останется две — играть будет полегче. А какую взять? Возьму маленькую, чтобы оставалось еще много монет».

Вот он берет кучку из трех монет. Остаются две кучки — в 4 и 5 монет. В ответ бармен берет одну монету из большей кучки. Получаются две одинаковые кучки монет. Ковбой берет монету из одной кучки — бармен одну из другой. Ковбой берет две монеты из одной кучки — бармен тоже две монеты из другой кучки. В кучках остается по одной монете. У ковбоя единственная возможность — взять одну монету. Другую — последнюю — берет бармен и высыпает в конторку все остальные монеты.



«Сыграем еще!» — разгорячившись, требует ковбой, выкладывая еще пять долларов.

«К вашим услугам»,— отвечает бармен, снова выстраивая из своих семи долларов две кучки — в 3 и 4 доллара.

«Не торопись, подумай»,— говорит ковбою его внутренний голос. «Хорошо,— отвечает ему ковбой,— в прошлый раз я проиграл, взяв маленькую кучку. А если я возьму другую? Не годится — бармен снова уравняет монеты в двух оставшихся кучках. Возьму-ка я одну монету из большой кучки. Нет! Бармен опять устроит две равные кучки, взяв маленькую кучку. А если взять две монеты? Тогда бармен возьмет среднюю кучку и снова будет две кучки с равным количеством монет. Возьму-ка я тогда из нее три монеты. Теперь он уже не сможет сделать свой финт!» Уверенным движением ковбой берет из большой кучки три монеты и с усмешкой смотрит на бармена.

Тот берет из средней кучки три монеты, и на стойке остаются кучки в 1, 2 и 3 монеты. И тут ковбой начинает понимать, что он проиграл, так как при любом его ходе бармен в ответ всегда сможет образовать две кучки с равным числом монет. Понурив голову, под смех окружающих ковбой возвращается на свое место. И невдомек парню, что еще тысячу лет назад китайские мудрецы научились играть в эту игру.

Кто же выигрывает: начинающий или его партнер? А как следует играть, чтобы выиграть? Оказывается, выигрывает тот, кто ходит первым. Для этого он должен взять из маленькой кучки две монеты. Любой другой ход проигрывает. Итак, образовалось три кучки — в 1, 4 и 5 монет. Теперь, как бы ни сыграл второй игрок, начинающий своим вторым ходом может либо образовать две кучки с равным количеством монет, либо образовать три кучки в 1, 2 и 3 монеты. А здесь второму игроку уже можно сдаваться.

Итак, мы научились играть в «ним» — так назвал эту игру профессор Гарвардского университета Чарлз Л. Бутон. Ну а если мы расположим в кучках не 3, 4 и 5 монет, а, скажем, 3, 4 и 6 монет, то кто выиграет на этот раз: начинающий или тот, кто делает ход вторым? Ведь мы уже получили, что если в кучках 1, 2 и 3 монеты или 1, 4 и 5 монет, то выигрывает тот, кто ходит вторым. А если мы увеличим число кучек? На все эти вопросы Ч. Бутон ответил в своей работе, появившейся на свет в 1901 году.

Оказалось, что здесь очень удобно записывать числа не в десятичной системе счисления, которой мы обычно пользуемся, а в двоичной, так полюбившейся за простоту создателям первых ЭВМ.

Напомним, что если в десятичной системе всякое натуральное число представляется в виде $N=a_n 10^n+a_{n-1}10^{n-1}+\ldots+a_1 10^1+a_0$, где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — целые числа от 0 до 9, то в двоичной системе счисления оно представляется в виде $N=b_m 2^m+b_{m-1}2^{m-1}+\ldots+b_1 2^1+b_0$. Например, $1991=1\cdot 10^3+9\cdot 10^2+9\cdot 10^1+1\cdot 10^0=1\cdot 2^{10}+1\cdot 2^9+1\cdot 2^8+1\cdot 2^7+1\cdot 2^6+0\cdot 2^5+0\cdot 2^4+0\cdot 2^3+1\cdot 2^2+1\cdot 2^1+1\times 2^0=11111000111_2$. Индекс 2 указывает на то, что это число записано в двоичной системе счисления.

Поскольку иметь неограниченное количество однодолларовых монет довольно затруднительно, мы в дальнейшем будем оперировать вместо монет камешками. Ч. Бутон обнаружил удивительную закономерность: запишем друг под другом в столбик числа, выражающие количество камешков в каждой из кучек в двоичной системе счисления. Если в каждом разряде будет стоять четное число единиц (такой набор чисел мы будем называть правильным), то в этом случае при правильной игре выигрывает тот, кто ходит вторым. В противном случае выигрывает начинающий.

Убедиться в справедливости этого совсем нетрудно. Запишем несколько чисел в двоичной системе одно под другим, например,

$$\begin{array}{r}1010101\\111001\\11001\\101\end{array}$$

Попробуем приписать к ним еще одно число так, чтобы в каждом двоичном разряде сумма была четна, т. е. полученная система стала правильной. Как легко видеть, это можно сделать единственным образом: ставим в разряде этого числа 1, если там сумма была нечетна, и 0, если эта сумма четна. В данном случае следует приписать число 1110000. Поэтому, если у нас был правильный набор чисел, то при замене одного (ровно одного!) числа другим, набор перестанет быть правильным. Наоборот, если набор чисел не является правильным, то нетрудно заменить одно из чисел меньшим так, чтобы полученный набор уже был правильным.

Осталось заметить, что набор из нулей является правильным, а набор, не являющийся правильным, содержит хотя бы одно ненулевое число.

Подведем итоги. Если первоначальный набор чисел, указывающий состав кучки камней, является правильным, то выигрывает игрок, берущий камни вторым, а если этот набор не является правильным, то выигрывает начинающий. Первым и каждым последующим ходом он берет такое количество камней из одной кучки, чтобы оставался правильный набор. Так как количество камней все время убывает, а его партнер оставляет ему всегда хотя бы один камень, то начинающий выигрывает.

Игра «ним» неоднократно описывалась как в книгах по занимательной математике, так и в учебниках по программированию. Поэтому «на закуску» угостим вас «шоколадкой» — новой модификацией этой игры. Думаем, что ее с интересом встретят и те, кто уже давно знаком с игрой «ним».

Чтобы сыграть в эту игру, раздобудьте шоколадку (если это не удастся, то нарисуйте ее на листе бумаги, как это сделал наш художник) и отметьте одну из ее долек. Игра состоит в том, что двое игроков

по очереди разламывают ее по какой-нибудь прямой, делящей шоколадку на дольки, и съедают ту половинку, которая не содержит отмеченной дольки. (Если шоколадка нарисована, то соответствующую половинку заштриховывают.) Проигрывает тот, кто не сможет сделать хода, т. е. ему остается лишь одна отмеченная долька.

На первый взгляд связи между играми «ним» и «шоколадка» не видно. Присмотримся повнимательнее к шоколадке, изображенной на рисунке. Она состоит из $6\times8=48$ долек. Ее делят 5 вертикальных и 7 горизонтальных прямых, причем одна вертикальная прямая проходит левее отмеченной дольки, 4 — правее ее, 5 горизонтальных прямых проходят выше отмеченной дольки и 2 ниже.

Разложим теперь четыре кучки камней: в первой 1 камень, во второй — 4, в третьей — 5 и в четвертой — 2. Попросим игроков после каждого хода в игре с шоколадкой брать камни из кучек, причем если, скажем, отломили сверху полоску в 3 дольки, то берем из третьей кучки 3 камня, если отломили справа полоску в одну дольку, то берем из второй кучки 1 камень

и т. д. Заметим, что тогда, играя в «шоколадку», игроки будут играть и в «ним», при этом выигравший в «шоколадку» выигрывает и в «ним». Но в «ним» мы играть уже научились, и естественно нам поменять порядок ходов: сначала сделать ход в игре «ним», а потом соответствующим образом разломить шоколадку.

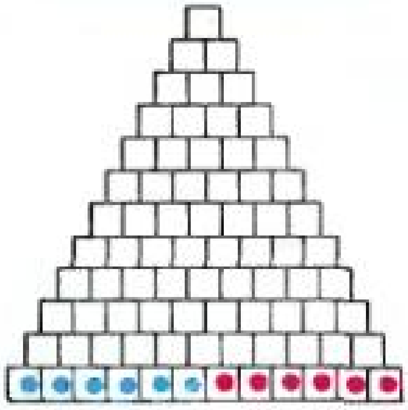
Итак, игра в «шоколадку» есть просто игра в «ним» на четырех кучках камней. И, как говорят, вопрос исчерпан.

Но вопросы тут же посыпались как из рога изобилия. Вот два наиболее интересных из них.

1. При каких размерах шоколадки начинающий проигрывает при любом расположении отмеченной дольки?

2. При каких размерах шоколадки начинающий выигрывает при любом расположении отмеченной дольки?

Пирамида



На четвертой странице обложки предыдущего номера журнала была помещена следующая игра. На нижнюю строку пирамиды (см. рисунок) выставляются фишки двух цветов. Игроки ходят по очереди. Возможны три типа ходов.

Вертикальный ход. Его может совершить лишь фишка нижнего ряда, перейдя на одну из двух соседних клеток верхнего ряда.

Горизонтальный ход. Фишка может перемещаться по своему ряду на любое число свободных клеток.

Дополнительное продвижение. В процессе игры три фишки могут занять положение «треугольником» (две снизу, одна сверху). Хозяин верхней фишки после очередного хода или вместо него может ее передвинуть на соседнюю клетку следующего ряда.

Побеждает тот, кто первым достигнет вершины пирамиды.

Наш автор из Минска И. Акулич, проанализировав эту игру, пришел к выводу, что при наилучшей игре партнеров игра закончится... вничью.

Докажем это. Сначала пронумеруем горизонтальные ряды снизу вверх, а клетки каждого ряда — слева направо. Таким образом, каждой клетке игрового поля поставлено в соответствие два числа: номер ряда и номер клетки в ряду.

Пусть в начальной позиции начинающий занимает левые шесть клеток нижнего ряда, т. е. клетки с (1,1) по (1,6), а второй игрок — остальные клетки нижнего ряда, т. е. с (1,7) по (1,12). Покажем, как должен играть начинающий, чтобы не проиграть. Первым ходом он передвигает фишку с поля (1,5) на поле (2,5), а затем все время переставляет одну и ту же фишку с клетки (1,4) на клетку (1,5) и обратно, предоставляя второму полную свободу добираться до вершины.

Поскольку для «пересылки» фишки в третий и более высокие ряды ей необходима «подпорка» из двух фишек, у второго игрока просто *не хватит фишек* для достижения вершины.

Действительно, всем фишкам нижнего ряда разрешается сразу переходить во второй ряд. Таким образом, второй игрок сможет переправить все свои шесть фишек во второй ряд. Но в третий ряд он сможет переслать только пять фишек, поскольку, если допустить, что он переслал в третий ряд все шесть фишек, то для пересылки последней из них он должен был использовать в качестве «подпорки» в первом ряду две фишки соперника. Однако для него доступна лишь одна из них, а именно (1,6), а доступ к остальным перекрывает фишка (2,5). Правда, последняя фишка, перейдя из первого ряда во второй и заняв поле (2,6), сможет служить «подпоркой» для пересылки фишек третьего ряда в четвертый, совместно с *«вражеской» фишкой* (2,5). В четвертый ряд, таким образом, можно переслать все пять фишек из третьего ряда. А вот из четвёртого в пятый — только три из них, поскольку две фишки должны остаться в четвертом ряду в роли «подпорок». Рассуждая таким же образом, можно увидеть, что из трех фишек, достигших пятого ряда, лишь одна дойдет до седьмого, а две остальные — лишь до шестого (в этом им поможет «подпорка» из двух фишек, задержавшихся в четвертом ряду). Но тогда единственная фишка, достигшая седьмого ряда, может переместиться лишь в восьмой ряд, использовав в качестве «подпорки» две фишки, задержавшиеся в шестом ряду. И не выше!

Итак, второй игрок не сможет подняться выше восьмого ряда, а следовательно — победить.

Беспроигрышная стратегия для второго игрока аналогична. Он должен независимо от первого хода начинающего сделать ответный ход (1,8)—(2,7), а затем гонять фишку с поля (1,9) на поле (1,8) и обратно. При этом начинающий вершины не достигнет.

Игра, однако, приобретает интерес, если для достижения победы достаточно подняться в восьмой ряд. Тут уж не отсидишься! Трудно сказать, для кого такая игра является выигрышной. Попробуйте-ка разобраться.

Наш постоянный читатель и автор И. Акулич прислал нам игру «Пирамида», купленную им в магазине, и задачу, связанную с этой игрой. Автором игры является В. Дмитриев, а предлагаемое новогоднее оформление принадлежит редакционному художнику. Попробуйте поиграть в эту игру, а потом решить задачу И. Акулича.

Правила игры

Игра состоит из игрового поля и 12 фишек 2-х цветов, по 6 каждого цвета. Играют вдвоем.

Фишки расставляют на клетках первого ряда игрового поля. Один играющий слева, другой — справа.

Ходят поочередно. Играющий имеет право выполнить один ход (вертикальный или горизонтальный и дополнительные продвижения).

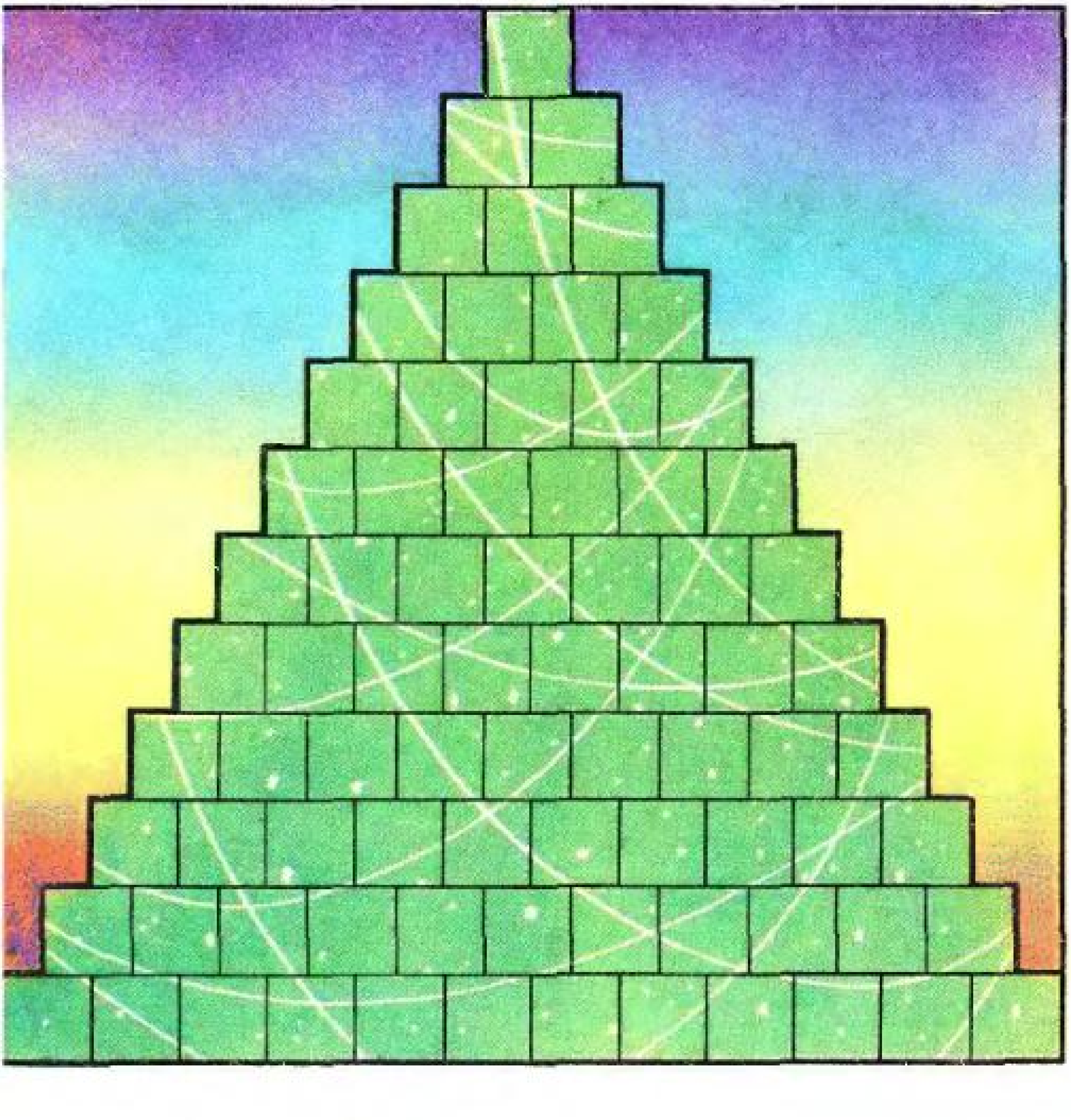
Вертикальный ход. *Его имеет право выполнить только фишка нижнего ряда. При этом она перемещается на одну из двух соседних клеток следующего ряда.*

Горизонтальный ход. *Фишка может перемещаться по своему ряду на любое количество свободных клеток.*

Дополнительное продвижение. *В процессе игры три фишки могут занять положение треугольником (две снизу, одна сверху). Хозяин верхней фишки после очередного хода или вместо него может ее продвинуть на клетки следующего ряда. Побеждает тот, кто первым достигнет вершины пирамиды.*

Задача: *Кто победит, если оба партнера будут играть наилучшим образом?*

Решение читайте в следующем номере.



Ни Лойд, ни Дьюдени...

И. АКУЛИЧ

Есть такой анекдот. В редакции молодому поэту сказали:

— У Вас есть два стихотворения, которые не смогли бы написать ни Пушкин, ни Лермонтов.

— Правда? — обрадовался тот.

— Да, одно о радио, другое о телевидении.

Многим из нас знакомы прекрасные задачи известных сочинителей головоломок Сэма Лойда и Генри Дьюдени. Повозиться с ними одно удовольствие. Особый колорит этим задачам придает то, что авторы представили их в виде коротких историй, будто бы имевших место в действительности, притом для решения зачастую приходится привлекать сведения, явно не содержащиеся в условии. Сборники таких головоломок («Математическая мозаика» Лойда и «Кентерберийские головоломки» Дьюдени) исчезали с прилавков книжных магазинов практически мгновенно.

В этой статье читателю предлагается несколько задач, также изложенных в виде историй. Их не смогли бы составить ни Лойд, ни Дьюдени как раз в силу причин, указанных в анекдоте: того, о чем пойдет речь, в их времена просто не существовало. Итак:

Число на асфальте

Петя и Коля, встретившись на улице, увидели написанное мелом на асфальте двузначное число. Петя прибавил к нему 4 и затем поделил на 7, а Коля поделил его на 9 и затем отнял 1. Результаты совпали.

Какое число было написано?

«Что же здесь современного?» — спросит читатель. Конечно же, асфальт! В те времена дороги асфальтом не покрывали, а писать мелом на брусчатке крайне неудобно. Поэтому можно смело утверждать, что ни Лойд, ни Дьюдени составить такую задачу не смогли бы.

Шахматные часы

В печати промелькнуло сообщение об изобретении новых шахматных часов. Такие часы отводят каждому игроку первоначально 40 минут, а после каждого сделанного хода резерв времени увеличивается на 2 минуты. Таким образом, во-первых, сохраняется общепринятая норма времени (2 часа на 40 ходов)*, и во-вторых, при обдумывании каждого хода игрок имеет запас времени не менее двух минут, что снижает вероятность грубых ошибок, вызываемых цейтнотом. После 40 ходов партия откладывается и затем доигрывается с новым контролем времени.

В шахматном турнире с использованием этих часов встретились шахматисты *A* и *B*, причем шахматист *A* тратил на обдумывание каждого хода одинаковое время. Сделав очередной

*) Въедливый читатель заметит, что не 2 часа, а 1 час 58 минут. (*Прим. ред.*)

ход, он заметил, что всего израсходовал столько же времени, сколько у него осталось в резерве. Еще через несколько ходов он обнаружил, что запас стал в два с половиной раза меньше затрачено времени. Известно также, что его противник сделал в партии не менее 14 ходов, и встреча закончилась без доигрывания победой одного из игроков.

А теперь попробуйте ответить на вопросы:

1) Кто играл белыми?

2) Кто выиграл?

Вот еще одна современная задача, но связанная не с достижениями науки и техники, а с новой модной теорией.

Задача о биоритмах

Прошлым летом (как сейчас помню — второго числа) мы отмечали день рождения Сергея Сергеевича, а той же осенью (помнится, десятого числа) — день рождения его племянника.

— Мы с племянником — близкие натуры,— заявил тогда Сергей Сергеевич,— и не только по причине родства, но и потому, что наши биоритмы полностью совпадают.

— Это точно,— подтвердил племянник.

Вопросы:

1) В каком месяце родился Сергей Сергеевич?

2) В каком веке родился Сергей Сергеевич?

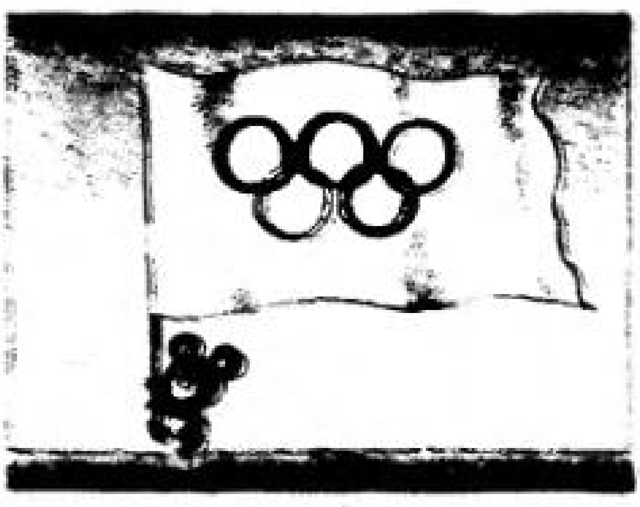
Примечание (для тех, кто не знает, что такое биоритмы): существует теория, согласно которой при рождении человека одновременно «включаются» три цикла: физический, эмоциональный и интеллектуальный продолжительностью соответственно 23, 28 и 33 суток; в первой половине каждого цикла соответствующие способности и склонности человека повышены, во второй — понижены.

В следующей задаче попробуйте определить не месяц и не век, а год.

Какой год?

Петр Петрович родился в день открытия Олимпийских игр. Как-то, отметив свой день рождения, он обнаружил, что его возраст стал равен сумме цифр текущего года. В каком году родился Петр Петрович?

А сейчас — самая «свежая» задача, хотя она с виду таковой не кажется.



Задача о киоске

Весной 1991 года Петя купил в киоске набор марок за 51 копейку, жевательную резинку за 1 рубль 20 копеек, 12 листов цветной бумаги и 3 конверта, но цену листа бумаги и конверта он не знал. Когда киоскер назвал сумму: 2 рубля 2 копейки, Петя сразу воскликнул: «Не может быть!», но потом оказалось, что все правильно. Почему Петя заподозрил ошибку? Сколько стоит конверт и лист бумаги?

Задача о мармеладе

Один школьник описывал другому случай, происшедший с ним в школьном буфете:

— Захотелось мне мармеладу, а денег мало. Я подсчитал свои возможности и говорю: «Взвесьте мне, пожалуйста, 25 граммов», а буфетчица в ответ: «У меня гирьки такой нет, самая маленькая — 50 граммов». Так я и ушел несолоно хлебавши. (Весы в буфете рычажные, с двумя чашками и без стрелок.)

— Ну ты и профан! — воскликнул собеседник.— Разве ты не знаешь, что каждая медная монета весит столько же граммов, сколько копеек составляет ее достоинство? Ты бы сказал: «Вот Вам 5 медяков по 5 копеек, они весят как раз 25 граммов» — и все в порядке.

— Будь у меня такие деньги, я бы купил больше. Но у меня-то было всего 4 копейки...

Поразмыслив, приятели нашли два способа взвесить 25 граммов мармелада в указанных условиях. А найдет ли читатель?

Надеюсь, предложенные задачи пришлись вам по вкусу. Надеюсь также, что прежде чем читать приведенные ниже решения, вы сами поломаете голову в поисках путей к ним...

Решения

Число на асфальте

Задача кажется очень простой и разрешимой очевидным образом. Но не тут-то было!

Более сообразительные школьники сразу поймут: что-то не так. Действительно, Петя сначала *увеличил* число, а затем взял от него *седьмую* часть; Коля же взял *девятую* часть, которую затем еще и *уменьшил*. Но ведь тогда у Пети наверняка должен получиться больший результат, чем у Коли! Менее сообразительные просто попробуют решить задачу «в лоб» и, обозначив искомое число через x, составят уравнение: $(x+4)/7=x/9-1$, откуда $x=-49{,}5$, что вообще не лезет ни в какие ворота.

В чем же дело? Чтобы разобраться, еще раз осмыслим условие задачи. Итак, Петя и Коля встречаются (видимо, лицом к лицу), затем опускают глаза вниз и видят число... Скорее всего, так оно и было. Но тогда они увидят число с разных сторон! Теперь понятно, в чем причина: некоторые числа, будучи перевернутыми, имеют вполне корректный вид, но другие числовые значения. Однако это возможно, только если каждая цифра такого числа допускает переворачивание. Какие же это цифры? Это, конечно, 0 и 8, переходящие сами в себя; 6 и 9, переходящие друг в друга; а также с некоторой натяжкой цифра 1 (здесь можно спорить, но на всякий случай включим и ее). Какие-то из них и составили записанное на асфальте двузначное число, которое Петя воспринял как некоторое число $П$, а Коля — как его «антипод» K. Тогда $(П+4)/7=K/9-1$, откуда $7K=9(П+11)$. Во-первых, отсюда следует, что $K>П$ (что, впрочем, и без того очевидно), а во-вторых, становится ясно, что K делится на 9.

Из цифр 0, 1, 6, 8, и 9 можно составить всего 5 чисел K, делящихся на 9 (включая на всякий случай и начинающиеся цифрой 0). Это: 09, 18, 81, 90 и 99, которым соответствуют $П$, равные 60, 81, 18, 06 и 66. Значения K, равные 09 и 18, придется отбросить, так как для них $K<П$. Для остальных трех значений сделаем прямую проверку:

1) $K=81$, $П=18$. Тогда $(П+4)/7=22/7$ и $K/9-1=8$. Не подходит.

2) $K=90$, $П=06$. Тогда $(П+4)/7=10/7$ и $K/9-1=9$. Тоже не подходит.

3) $K=99$, $П=66$. Тогда $(П+4)/7=10$ и $K/9-1=10$. Это подходит.

Итак, Петя и Коля видели одно и то же число, но Петя воспринял его как 66, а Коля — как 99.

Шахматные часы

Пусть игрок A сделал n ходов и на обдумывание каждого хода тратил t минут. Тогда всего он потратил tn минут.

Шахматные часы отвели ему 40 минут первоначально и по 2 минуты за каждый сделанный ход, т. е. $(40+2n)$ минут. Из них tn минут он израсходовал, поэтому после n-го хода его запас составляет $(40+2n-tn)$ минут.

Если после n-го хода израсходованное время равно запасу, то $tn=40+2n-tn$, откуда $t=(20+n)/n$.

Если после другого, m-го хода израсходованное время оказалось в 2,5 раза больше резерва, то, рассуждая аналогично, получим $tm=2{,}5(40+2m-tm)$, откуда $t=(200+10m)/7m$.

Приравняв полученные значения t, имеем $(20+n)/n=(200+10m)/(7m)$, откуда $m=200n/(140-3n)$.

Видно, что с ростом n растет и m (так как числитель возрастает, а знаменатель уменьшается). При этом наименьшее n, при котором m будет целым,— это $n=5$ (тогда $m=8$). Следующее по величине значение n, при котором m будет также целым,— это $n=20$ (тогда $m=50$). Но в последнем случае партия продолжалась бы не менее 50 ходов, и она по этой причине должна быть отложена, а затем доиграна, что противоречит условию. Еще бо́льшие значения n влекут за собой еще бо́льшие значения m. Поэтому возможен лишь один вариант: $n=5$, $m=8$. Тогда $t=(20+n)/n=5$ минут.

А теперь подсчитаем, на сколько ходов хватило бы времени шахматисту A, если бы он тратил 5 минут на ход. Видно, что после каждого хода его запас времени уменьшается на 3 минуты, поэтому он может сделать максимум 13 ходов, после чего останется лишь минута, т. е. 14-й ход он сделать не успеет.

По условию, игрок B сделал не менее 14 ходов. Если бы B играл черными, то тогда A, играя белыми, тоже сделал бы не менее 14 ходов, но это, как мы только что выяснили, невозможно. Поэтому A играл черными.

После того как B, играя белыми, сделал 14 ходов, наступила очередь A делать 14-й ход. Но у него не хватит на это времени! И поэтому он наверняка проиграл, просрочив время (или сдался после 14-го хода противника, либо же получил мат на 14-м ходу). Во всяком случае, A проиграл.

Задача о биоритмах

Так как НОК (23, 28, 33)=21252, то чтобы биоритмы Сергея Сергеевича и его племянника совпали, разность их возрастов должна быть кратна 21252 дням. Так как это более 58 лет, то ясно, что либо дядя и племянник ровесники, либо один из них старше на 21252 дня (поскольку оба они одновременно живы, то бо́льшие разности нереальны).

Но ровесниками они быть не могут, т. к. день рождения дяди летом, а племянника — осенью. Кроме того, так как $21252=365\times58+82$, то разность их возрастов составляет 58 лет плюс какой-то срок, заведомо меньший трех месяцев. Поэтому если бы племянник был старше, то день рождения дяди наступил бы позже дня рождения племянника на срок, не превышающий трех месяцев, т. е. дядя родился бы осенью или зимой, но никак не летом. Поэтому племянник не может быть и старше дяди.

Итак, дядя старше племянника на 21252 дня.

Теперь определим, в каком веке родился дядя. Здесь, очевидно, возможны два варианта: XIX или XX век. Допустим, дядя родился в XX веке. Так как $58=14\times4+2$, то из 58 идущих подряд лет либо 14, либо 15 високосных, и следовательно, дядя старше племянника на 58 полных лет плюс либо $82-14=68$, либо $82-15=67$ дней, т. е. немногим более двух месяцев. Два летних или осенних идущих подряд месяца могут содержать вместе либо 61 день (например, август+сентябрь), либо 62 дня (только июль+август). Поэтому окончательно дядя старше племянника на 58 полных лет, 2 полных месяца и сверх того либо $67-62=5$ дней, либо $67-61=68-62=6$ дней, либо $68-61=7$ дней. Но тогда если дядя родился 2-го числа, то племянник мог родиться либо $2+5=7$-го, либо $2+6=8$-го, либо $2+7=9$-го числа, но никак не 10-го! Как же так?

Разгадка в том, что 1900-й год не был високосным. Поэтому если дядя родился в XIX веке, то из 58 подряд идущих лет либо 13, либо 14 високосных. Если их 13, то дядя старше племянника на 58 полных лет и 69 дней; и если к тому же два идущих подряд месяца — не июль с августом, то дядя старше племянника на 58 лет, 2 месяца и 8 дней, что как раз удовлетворяет условию (ибо $2+8=10$).

Итак, дядя родился в XIX веке.

Определим месяц его рождения. Так как он, по условию, родился летом, то возможны 3 варианта: 2-е июня, 2-е июля и 2-е августа. Соответствующие даты для племянника: 10-е августа, 10-е сентября и 10-е октября. Первый вариант не подходит: в нем племянник родился не осенью. Второй тоже не годится: разность дней рождения составляет не 69, а 70 дней сверх 58 лет (здесь как раз «влезли» июль с августом, и $31+31+8=70$). Поэтому остается единственная возможность: Сергей Сергеевич родился в августе (а племянник в октябре).

То, что такой ответ корректен, подтверждает пример: Сергей Сергеевич родился 2 августа 1897 года, а его племянник — 10 октября 1955 года. У обоих получается вполне жизнеспособный возраст (хотя у дяди весьма и весьма почтенный), а разность их возрастов, как легко проверить, составляет ровно 21252 дня.

Какой год?

Для решения этой задачи необходимо иметь некоторые минимальные сведения об Олимпийских играх, известные, впрочем, практически каждому школьнику.

Итак, в некотором году сумма цифр этого года равна возрасту Петра Петровича. Следовательно, если от номера этого года отнять эту сумму цифр, то получится год его рождения. Но если от любого числа отнять сумму его цифр, то получится число, делящееся на 9. Поэтому год рождения Петра Петровича делится на 9.

Олимпийские игры, как известно, проводятся в годы, делящиеся на 4. Поэтому год рождения делится и на 9, и на 4, а следовательно — на 36.

С начала Олимпийских игр (а начались они в конце прошлого века, точнее — в 1896 году) было лишь три года, делящихся на 36: 1908, 1944 и 1980.

Но в 1944 году Олимпийские игры не проводились — шла вторая мировая война.

1980 год надо отбросить по другой причине: с тех пор не было ни одного года, сумма цифр которого равнялась бы возрасту. В этом легко убедиться, просто перебрав все годы с 1981-го по нынешний. Но можно и по-другому: допустим, что такой год был. Тогда его первая цифра — это 1, вторая — 9, третья — 8 или 9, т. е. не менее 8. Поэтому возраст был не меньше $1+9+8=18$, что произойдет не раньше $1980+18=1998$ года, до которого еще ой как далеко! Итак, 1980 год тоже отпадает.

Остается один вариант: Петр Петрович родился в 1908 году. В этом году действительно проводились Олимпийские игры (в Лондоне). Вторая часть условия тоже выполняется: в любой год с 1920-го по 1929-й включительно сумма цифр года как раз равнялась возрасту.

Задача о киоске

Упоминание о весне 1991 года существенно, порядки в нашей торговле меняются так быстро, что в другое время задача вполне могла бы иметь другое решение.

Петя наверняка заметил, что цена марок и резинки делится на 3, и, кроме того, количество листов бумаги и конвертов также делится на 3. Следовательно, общая сумма также должна делиться на 3. Но она не делится! Понятно, что Петя заподозрил ошибку. Но его подвело... как вы думаете, что? Ну, конечно же, знаменитый пятипроцентный налог, взимаемый с общей стоимости покупки и округляемый до целого числа копеек. Если общая стоимость купленных вещей равна s копеек, то с налогом это составит $1{,}05s$. Это значение с округлением до целых равно 202 копейки. Следовательно, можно утверждать, что $201{,}5<1{,}05s<202{,}5$, откуда $191{,}9...<s<192{,}8...$ и потому $s=192$ копейки (делится на 3, как и должно быть!). Пусть лист бумаги стоил x копеек, а конверт — y копеек. Тогда $51+120+12x+3y=192$, откуда $12x+3y=21$, и $4x+y=7$. Единственное решение этого уравнения в натуральных числах — это $x=1$ и $y=3$ т. е. лист бумаги стоил одну копейку, а конверт — 3 копейки.

Задача о мармеладе

Разумеется, бессмысленно отвешивать 25 г порциями по 4 г — такая точность для торговых весов заведомо недостижима. С другой стороны, из слов буфетчицы следует, что будь у нее гиря в 25 г — и она смогла бы взвесить требуемое. Поэтому надо найти какие-то предметы общим весом 25 г. Для этого можно, например, использовать медную мелочь, имеющуюся у буфетчицы — у нее-то наверняка наберется 25 копеек медью! В крайнем случае школьник добавил бы свои 4 копейки.

Другой способ основан на словах буфетчицы о том, что у нее имеется гиря весом 50 г. Пусть она взвесит 50 г мармелада, а затем разложит их на две чашки весов, чтобы они уравновесились. Тогда на каждой чашке будет как раз 25 г мармелада.

По-видимому, возможны и другие способы.

Теперь насчет несоответствия условия сегодняшнему дню. Во-первых, чашечные весы без стрелок в школьных буфетах практически не встречаются, во-вторых, если 25 г мармелада стоят 4 копейки, то 1 кг — всего лишь 1 рубль 60 копеек. Теперь такой дешевый мармелад можно встретить только в старых кинофильмах.

Игры и головоломки

Из куба — тетраэдр

Участники международной конференции по синергетике, проходившей в 1990 году в Будапеште, уже успели утомиться от докладов. И тут на кафедру поднялся молодой японский ученый Ясуги Каякава. Зал оживился, когда он принялся вытаскивать из портфеля изящные конструкции, изготовленные из пластмассовых трубочек, которые в его руках начали трансформироваться в другие занятные формы.

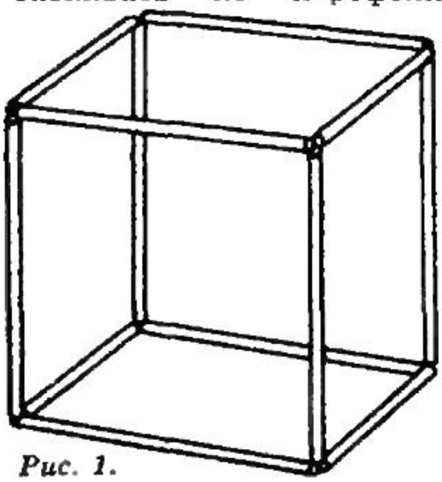


Рис. 1.

Предлагаем одну из задач Каякавы, которую вполне можно считать новой головоломкой. Составьте из соломинок для коктейля и лески остов куба, пропуская леску через соломинки (рис. 1). (Мне для изготовления этой конструкции понадобилось всего три минуты.) А теперь попробуйте преобразовать полученную модель в остов тетраэдра, причем так, чтобы на каждом его ребре оказалось по две соломинки (рис. 2).

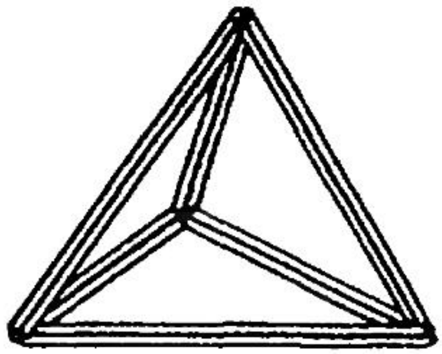


Рис. 2.

Я. Каякаве удалось доказать, что остов всякого полуправильного многогранника (что это такое, описано, например, в первом номере нашего журнала за 1978 г. в статье «Модели многогранников») можно преобразовать либо в остов тетраэдра, либо в остов октаэдра. Попробуйте сами доказать, что остов октаэдра нельзя преобразовать в остов тетраэдра (хотя октаэдр, как и куб, имеет 12 ребер).

А. Савин

Новая игра на клетчатой бумаге

Клетчатая бумага всегда под рукой. Поэтому большой популярностью пользуются всевозможные игры, использующие ее в качестве игрового поля, такие как крестики-нолики, рэндзю или го, которыми

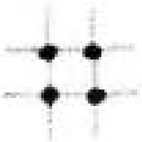


Рис. 1.

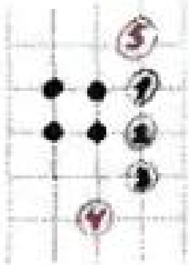


Рис. 2.

вечно кто-нибудь развлекается на уроках в школе или на лекциях в институте. Как правило, такие игры предусматривают участие двух противников, в некоторых количество игроков неограниченно. Предлагаем вам игру на клетчатой бумаге для одного.

На «бесконечном» поле задана начальная конфигурация из четырех точек (рис. 1). Нужно к этим точкам последовательно добавлять новые, подчиняясь следующим двум правилам:

1. Каждая новая точка должна образовывать с предыдущими хотя бы один ряд из трех рядом стоящих точек по вертикали, горизонтали или диагонали.

2. Запрещается ставить точку, если она образует с предыдущими хотя бы один ряд более чем из трех стоящих рядом точек.

Так, на рисунке 2 точки 1, 2, 3 поставлены по правилам, а 4 и 5 — нет, поскольку 4 образует только пару точек (3, 4), а 5 образует четверку точек (5, 1, 2, 3).

Цель игры состоит в том, чтобы поставить как можно больше новых точек.

На рисунке 3 приведены некоторые конечные конфигурации (т. е. такие, к которым нельзя добавить новые точки, не нарушая правил).

Вместо приведенной на рисунке 1 начальной конфигурации можно использовать и другие (примеры даны на рисунке 4). Интересно было бы построить для них конечные конфигурации, а также найти минимальное количество новых точек в таких конфигурациях. Можно строить и конфигурации с заранее заданным числом точек.

Попробуйте доказать, что число новых точек всегда конечно для любой начальной позиции.

С. Хорошкин

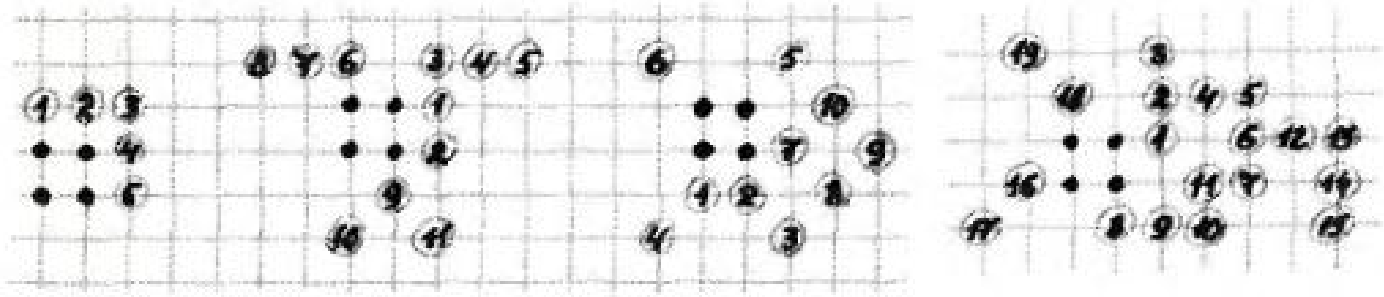


Рис. 3.

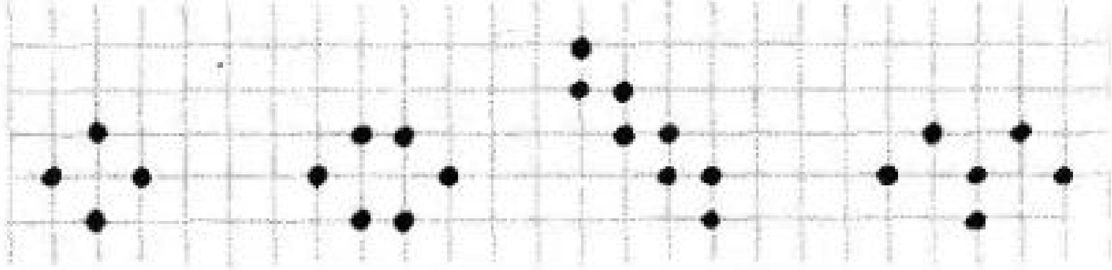


Рис. 4.

Игра го

Немного истории

Го — одна из древнейших игр, дошедших до наших дней. Ей около 5 тысяч лет. Историки до сих пор спорят, какая из стран является родиной го. Одни специалисты считают, что эта игра зародилась в Индии, другие доказывают, что ее истоки восходят к Египту. Однако большинство сходится во мнении, что родина го — Китай.

Первым в списке претендентов на звание «отца» го (по-китайски она называется вейци) значится император Яо, правивший в XXIV—XXIII вв. до н. э. Уже тогда признавалось, что игра развивает интеллектуальные способности человека. Так, преемник императора Яо император Шунь использовал вейци для развития умственных способностей своего сына и наследника Шан Цзюня. А Конфуций отмечал, что вейци совершенствует личность человека.

Где-то в III или IV в. н. э. вейци проникла через Корею в Японию. Первоначально в нее играли монахи-буддисты, императоры же преследовали это занятие, считавшееся столь же порочным, как пьянство. 701 год стал великим годом в истории го на Японских островах: императорским эдиктом игра была признана неазартной и приравнена к упражнениям на музыкальных инструментах. Так, наконец, подпольные занятия монахов получили государственную легальность.

Шли годы. Игра проникла в широкие слои дворянства, купечества, ремесленников и даже крестьян. В 1603 г. сёгуном (правителем) Иэясу был издан эдикт об учреждении Академии го. Но вот наступил 1868 год — год так называемой «революции Мэйдзи». Микадо — император Муцухито — лично возглавил правительство страны, провел серию буржуазных реформ, обновивших общественную жизнь Японии. Го, причисленная к анахронизмам и нелепостям сметенного феодального порядка, почти исчезла из японской жизни. Однако, как это ни парадоксально, именно революция Мэйдзи, нанесшая такой удар по го внутри Японии, способствовала тому, что игра вышла на мировые просторы. После переворота 1868 г. Япония порвала с традиционной политикой изоляции от остального мира: не только идеи западной цивилизации хлынули в эту страну, начался и встречный поток. Европейцы знакомились с японскими обычаями, искусством, архитектурой, узнали они и любимую японцами игру го.

В начале XX в. в Европе стали появляться первые любительские клубы игроков го. Эмануэль Ласкер — тогдашний чемпион мира по шахматам — также заинтересовался игрой. Он быстро убедился, что она дает богатые возможности как для глубоких стратегических замыслов, так и для изящных тактических маневров. Еженедельно в доме Ласкера стали устраиваться вечера игры в го, в которых помимо хозяина принимали участие Эдуард и Бертольд Ласкеры — братья чемпиона мира, тоже очень сильные шахматисты. Ласкер, известный также и как математик, считал го идеальной игрой для математического ума. Между тем японцы, подметил он, до сих пор не выдвинули ни одного математика, который мог бы сравниться с величайшими гениями мира. Значит, это должно сказаться и в го. Сделав сей скороспелый вывод, Ласкер стал поговаривать о том, чтобы поехать в Страну восходящего солнца и встретиться там с ведущими мастерами игры.

Но случай помог чемпиону мира обойтись без дальнего вояжа. В то время в Берлине существовал японский клуб го. Трио Ласкеров отправилось туда, чтобы встретиться с одним японским игроком, не отличающимся высоким классом. Тот охотно согласился сыграть против всех троих, причем разрешил противникам консультироваться друг с другом и, более того, обещал дать вперед девять камней форы, что примерно равноценно ферзю в шахматах!

Немало удивленный, Э. Ласкер незамедлительно высказал сомнение: дескать, едва ли кто в мире сможет успешно соперничать с ним на таких условиях. Тем более что он уже довольно долго изучал теорию игры, разбирал партии японских мастеров и считал, что достиг в го достаточно глубокого понимания.

Задетый за живое, чемпион мира пытался отклонить предложение самонадеянного японца и хотел играть только на паритетных началах. Но японский игрок лишь загадочно улыбался и отрицательно качал головой.

«Ну хорошо же, хочет — пусть попробует!» Встреча состоялась. Ласкер и его союзники старательно обдумывали каждый ход, делая его лишь после длительного обсуждения между собой. Японец отвечал молниеносно, тратя на каждый ход доли секунды. Несмотря на огромную фору, японец наголову разгромил противников.

Огорченный таким исходом игры, Ласкер был вынужден признать, что, очевидно, в го таится много тонкостей, ускользнувших от его внимания. Впрочем, несмотря на такое сокрушительное поражение, Ласкер остался на всю жизнь горячим поклонником го и даже написал учебник для начинающих игроков.

В настоящее время в Японии и во всем мире проводится масса соревнований как среди профессионалов, так и среди любителей. О популярности игры можно судить по таким цифрам: только в Японии насчитывается около 10 миллионов любителей го, а во всем мире их более 20 миллионов. Регулярно проводятся чемпионаты мира, Европы, турниры «Гран-при» и другие. Начиная с 1986 г. в них стали участвовать и наши спортсмены.

Правила и понятия

Что такое го?

Представим себе, что двое путешественников попали на необитаемый остров и после того как пришли в себя, занялись дележом территории. Очевидно, в выигрыше окажется тот, кто отгородит себе территорию побольше.

Смысл игры го как раз заключается в отгораживании большей территории.

Доска для игры — тот же необитаемый остров, а игроки — путешественники, оказавшиеся на нем.

Игровое поле расчерчено 19 вертикальными и 19 горизонтальными линиями. Точки пересечения этих линий образуют 361 пункт для игры. (Здесь же расположен ряд форовых точек — для игры с форой. О ней мы в этой статье рассказывать не будем.) В комплект кроме доски входит набор фишек черного и белого цвета, которые называются камнями.

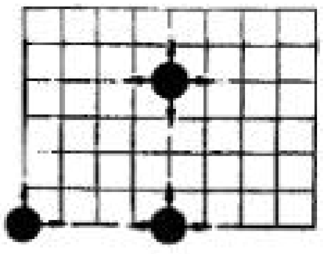
Начинающим рекомендуется использовать уменьшенную доску размером 13×13. На ней легче освоить и правила, и основные технические приемы го. Японцы считают, что, прежде чем переходить к большой доске, надо сыграть не меньше 100 партий на малой.

Итак, в го играют два партнера, у одного из которых черные камни, а у другого белые. Игра начинается с пустой доски. Ходы делаются поочередно. Первыми ходят черные. *Ход* игрока состоит в постановке камня на любой свободный пункт доски. Выставленный на доске камень не может быть перемещен в другое место и остается на ней до конца партии, за исключением тех случаев, когда он считается уничтоженным.

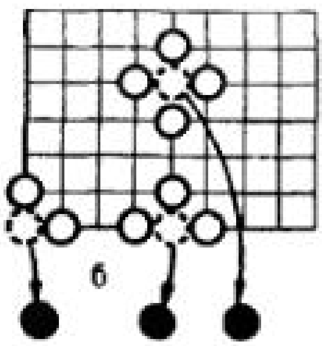
Если камень или группа камней уничтожены, все они снимаются с доски и учитываются только по окончании партии.

Каждый камень, стоящий на доске, имеет «дыхательные пространства» (*дамэ*). На рисунке 1, *а* показано, что у одиночного камня, стоящего в центре доски, имеется 4 дамэ, у камня, стоящего на краю доски,— 3 дамэ, а у камня, находящегося в углу (на пересечении двух пограничных линий),— только 2 дамэ. Если все дыхательные пространства перекрыты камнями противника, то такой камень считается уничтоженным и снимается с доски (рис. 1, *б*).

То же самое правило применимо и к *группе камней*. Группой называется набор камней, стоящих вплотную один к другому, которые не могут быть отделены друг от друга и уничтожены поодиночке. На рисунке 2 показана группа, состоящая из двух камней: их нельзя отделить друг от друга, и они имеют общую судьбу. У этой группы шесть дыхательных пунктов, и поэтому для снятия ее с доски требуется



а



б

Рис. 1.

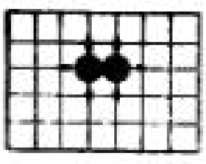
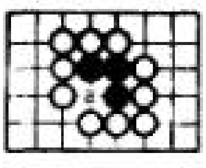
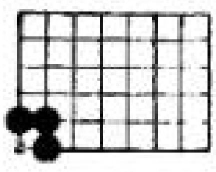


Рис. 2.



а



б

Рис. 3.

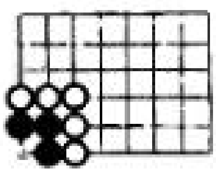
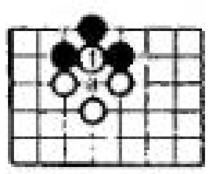
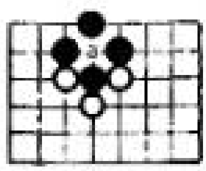


Рис. 4.



а



б

Рис. 5.

шесть камней противника. Очевидно, что для снятия одиночного камня требуется не больше 4 камней. Таким образом, чем больше камней в группе, тем сложнее ее уничтожить, т. е. она сильнее.

Мы сказали, что играющий может сделать ход в любой свободный пункт доски, но есть исключения. В го имеется два типа запрещенных ходов.

1. Запрещается делать ход, приводящий к закрытию последнего дамэ у собственных камней, если только этим ходом не уничтожаются камни противника.

Другими словами, в го запрещено делать самоубийственные ходы. Это правило, по-видимому, введено для того, чтобы избежать грубых ошибок, так как потеря собственных камней — это почти всегда плохо.

На рисунке 3, *а* приведена ситуация, в которой черные не могут сделать ход в пункт «а», так как в этом случае их камни окажутся уничтоженными. Теперь рассмотрим позицию на рисунке 3, *б*. Здесь уже белые не могут пойти в пункт «а», поскольку в этом случае их камень окажется без единого свободного дамэ. Это другой пример самоубийственного хода. Однако бывают случаи, когда такой ход все-таки возможен (рис. 4). Ситуация на этом рисунке напоминает положение на рисунке 3, *а*, но здесь камни черных вплотную окружены белыми камнями. В этом случае белые могут пойти в точку «а»: при этом уничтожаются камни противника и ход не является самоубийственным.

2. Запрещается делать ход, приводящий к повторению позиции (*правило ко*).

Рассмотрим рисунок 5, *а*. Такое расположение камней имеет специальное название — позиция ко. Черные ходом в точку «а» могут захватить камень белых 1, и тогда возникнет позиция, изображенная на рисунке 5, *б*. Теперь, если бы не существовало правила запрета повторения позиции, белые, в свою очередь, могли бы забрать камень черных ходом в точку «а» на рисунке 5, *б*. Таким образом, взаимное взятие могло бы продолжаться до бесконечности и игра потеряла бы смысл. Для того чтобы этого не произошло, и было введено правило ко.

Вернемся снова к позиции на рисунке 5, *а*. Черные взяли камень белых ходом в пункт «а». Теперь, после введения правила ко, для того, чтобы белые смогли забрать камень черных, надо, чтобы позиция изменилась, т. е. белые должны сделать ход в другом пункте доски. И только в случае, если черные не закроют *ко-борьбу* ходом в «а» на рисунке 5, *б*, белые смогут забрать камень черных.

Игра прекращается, если оба партнера отказываются от своего очередного хода. Обычно такой момент наступает тогда, когда не остается ходов, приносящих очки (рис. 6). Теперь начинается заполнение *нейтральных пунктов* (на рисунке 6 — «а» и «в»), и затем идет подсчет *очков*. Нейтральными называются такие пункты территории, которые при заполнении их камнями не приносят очков ни одному из партнеров.

Игрок, набравший наибольшее количество очков, объявляется победителем.

При подсчете очков, связанном с *пленными камнями*, снятыми во время игры, они для удобства подсчета выставляются на территорию противника. В примере на рисунке 6 черные захватили в плен три белых камня, а белые — два черных (эти камни отмечены треугольниками, далее в тексте мы будем их называть «отмеченные камни»). Затем камни перемещаются внутри своей территории (рис. 7) для образования прямоугольных областей, удобных для подсчета (перемещенные камни обозначены кружками).

Теперь уже можно легко подсчитать результат партии. Территория черных составляет 42 очка (30 очков на правой стороне доски и 12 очков в центре), а территория белых — 40,5 очков (14 очков на верхней стороне, 21 очко на нижней и 5,5 очка *коми*). Следовательно, в этой партии черные выиграли с перевесом в 1,5 очка.

Что такое коми? Это компенсация за право первого хода черных — до начала партии они отдают белым 5,5 очка (5 из них передаются в виде пяти камней и 0,5 очка — условно). Эта половина очка исключает ничейный исход игры.

Е. Гик, А. Попов

(Продолжение следует)

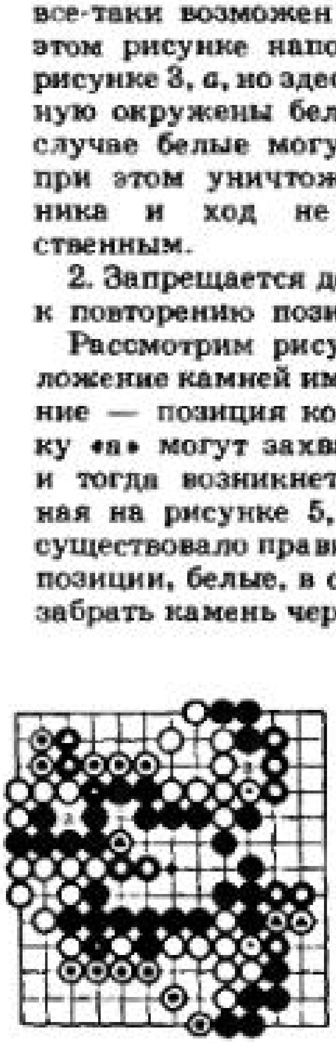


Рис. 6.

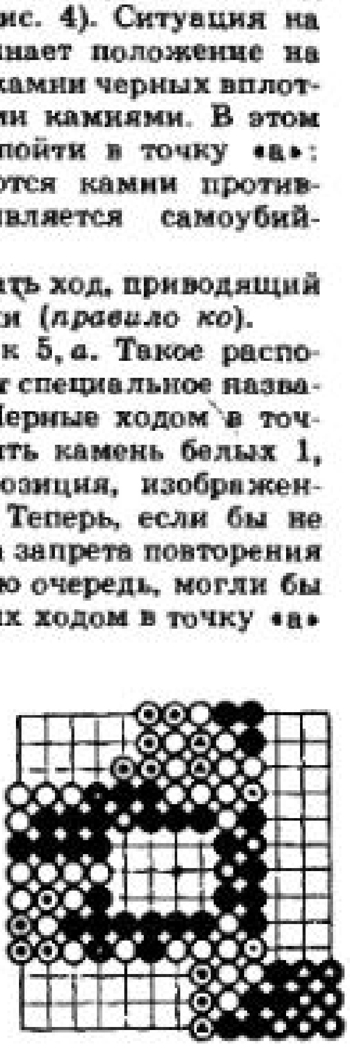


Рис. 7.

Игра го

Живые и мертвые группы

Наряду с правилами игры, одним из самых важных моментов, необходимых для понимания го, является умение разобраться, какие группы *живут*, а какие *умирают*. Для этого введем понятие *глаз* и дадим его определение.

Глазом (недоступным пунктом) называется свободный пункт группы, который не может быть занят противником, пока у этой группы существует еще хотя бы один свободный пункт.

На рисунке 1 приведена группа, у которой имеется один глаз в пункте «а». Эта точка не может быть занята, так как в противном случае ход будет самоубийственным, т. е. запрещенным правилами. Но после того, как будут закрыты все свободные пункты, ход в точку «а» будет возможен — теперь группа черных уничтожается (рис. 2). Следовательно, можно сделать важный вывод, что группа с одним глазом не живет.

Два глаза — жизнь! Группа, имеющая два глаза, не погибает, даже полностью окруженная противником. Это один из самых главных принципов го. На рисунке 3 приведена группа с двумя глазами в пунктах «а» и «в». Ход в любой из этих пунктов является запрещенным, и следовательно, группа живет.

Начинающих следует предостеречь от одной распространенной ошибки: они часто не могут отличить настоящего глаза от ложного.

Рассмотрим позицию на рисунке 4. Здесь показана конфигурация камней, которая очень похожа на единую группу с двумя глазами. Однако на самом деле это не так. На диаграмме — две отдельные группы. Одна группа, имеющая один глаз, состоит из восьми камней, вторая группа, состоящая из трех камней, глаза не имеет совсем. Пункт в точке «а» глазом не является, так как в него можно пойти и уничтожить группу черных, состоящую из трех камней. В данном случае пункт «а» является последним свободным пунктом группы из трех камней и внешним свободным пунктом группы из восьми камней. Такой свободный пункт называется *ложным глазом*.

Продолжение. См. «Квант» № 6.

Есть ли связь между глазом и территорией?

На рисунке 5 черные камни огораживают территорию, состоящую из 15 очков. Но если быть точным, то этот участок можно считать территорией только в том случае, если черные камни, при атаке их белыми, смогут построить два глаза. В данной позиции это, без всяких сомнений, территория черных, поскольку, куда бы белые ни пошли, они не могут помешать черным построить два глаза.

Часто бывает, что группа имеет территорию из нескольких пунктов, но построить на ней можно всего один глаз. Глаз, имеющий территорию из нескольких пунктов, называется *большим*.

Большой глаз легко свести к простому — из одного пункта территории. Для

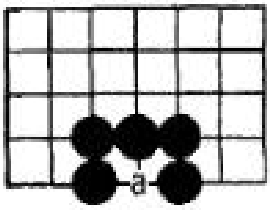


Рис. 1.

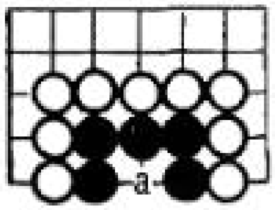


Рис. 2.

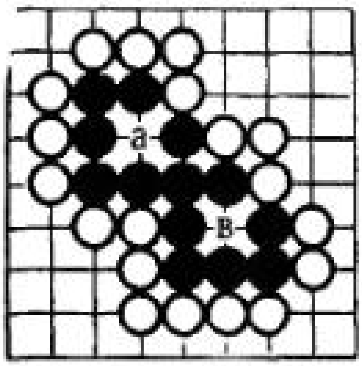


Рис. 3.

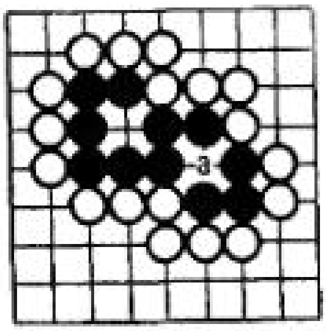


Рис. 4.

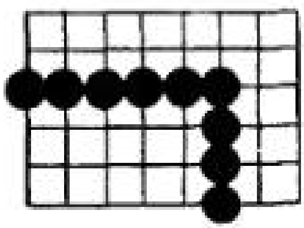


Рис. 5.

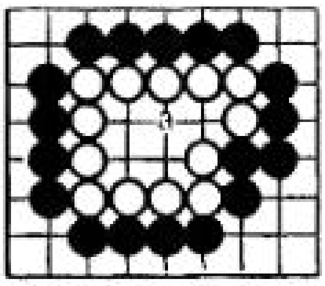


Рис. 6.

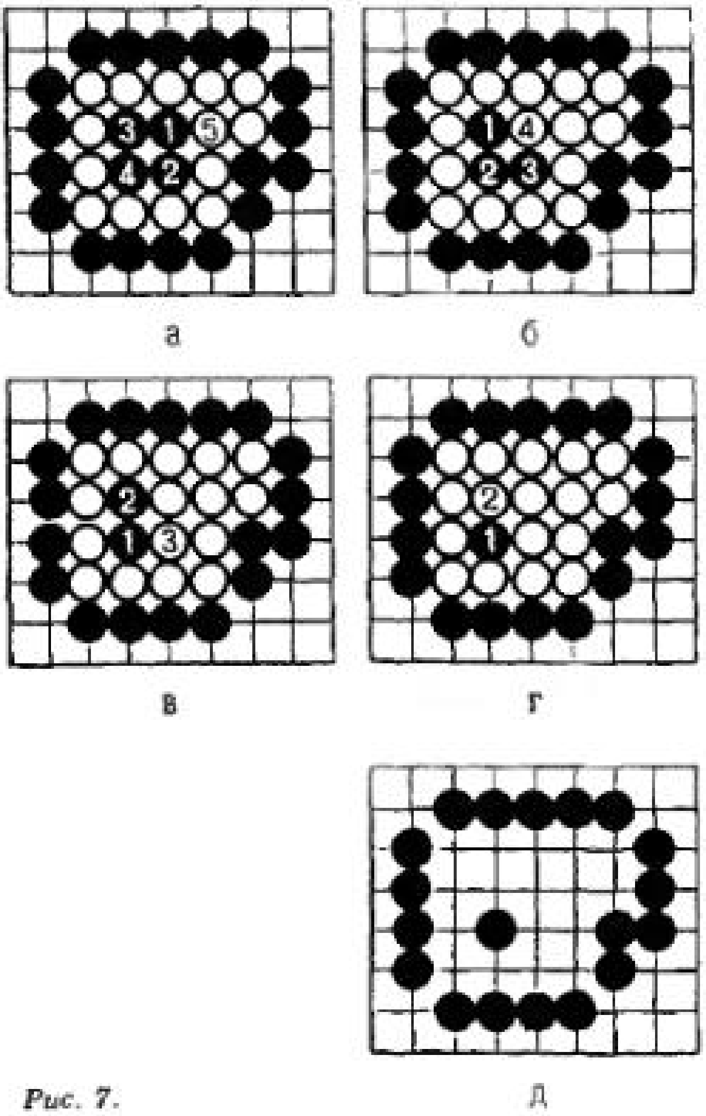


Рис. 7.

того чтобы понять, как это делается, разберем следующий пример.

На рисунке 6 приведена часто встречающаяся конфигурация большого глаза, которая обычно называется *автомобиль*. Судьба этой группы зависит от того, кто первым займет критический пункт «а». Если первыми пойдут туда белые, то они построят два глаза, если же черные, то группа белых гибнет.

Разберем, как это происходит. На рисунке 7, *а* черные продолжают занимать территорию противника камнями 2—4. После хода 4 белые камни оказываются в положении *атари*, т. е. под угрозой захвата. Поэтому они вынуждены сделать ход 5, и сами захватывают четыре черных камня. Но черные ходом 1 (рис. 7, *б*) продолжают последовательно занимать остальные пункты территории. В конце концов они поставят белые камни в положение атари, вынуждая белых ходить в свою территорию (ход 4), тем самым уменьшая ее. Постепенно она сведется к одному пункту (рис. 7, *в*, *г*). На рисунке 7, *д* приведена заключительная позиция: после того как был сделан последний ход и все камни белых сняты с доски. В реальной партии, если нет угрозы уничтожения камней игрока, такая операция по снятию камней противника не проводится, в этом нет необходимости. Группа, не имеющая возможности построить два глаза, считается пленной и снимается с доски лишь после окончания партии.

В го существует еще и другой вид жизни. На рисунке 8, *а* приведена группа, состоящая из семи пунктов территории. Если черные попытаются уничтожить белых, сыграв в критический пункт ходом 1, то им это не удастся, так как белые, противодействуя ходами 2 и 4, построят позицию *сэки* (рис. 8, *б*). В этой позиции ни одному из партнеров не выгодно ходить, так как в противном случае его камни погибнут. Территория, расположенная между камнями, считается нейтральной: никто из играющих не может претендовать на ее захват. На рисунке 9 приведены другие часто встречающиеся в игре ситуации сэки.

После всего сказанного можно дать один практический совет: не надо стремиться строить группы с двумя глазами. Как правило, это невыгодно — надо тратить лишние ходы, да еще занимать свою территорию. Правильным в этой ситуации будет создание таких групп, которые при атаке на них всегда смогут выжить.

Начало игры

Начальная стадия называется *фусэки*, она продолжается в среднем от 20 до 50 ходов.

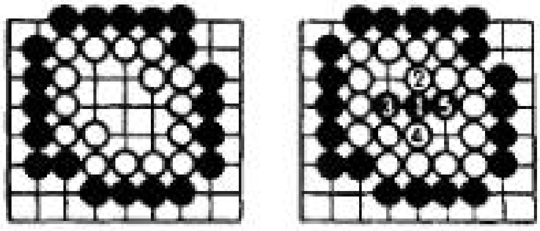
Один из главных принципов фусэки — экономия ходов.

На рисунке 10 хорошо видно, что для получения одной и той же территории из 9 пунктов в углу доски требуется 6 камней, на стороне — 9 камней и в центре — 12 камней. Отсюда делаем вывод, что выгоднее всего занимать углы, затем стороны и только после этого начинать борьбу за остальную часть доски.

Следующий основной принцип фусэки — игра по третьей и четвертой линиям.

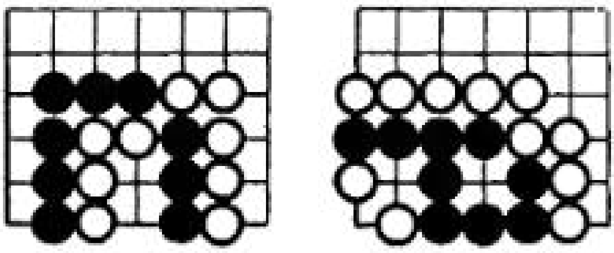
Почему? Вторая от края доски линия не дает большой территории, поэтому ставить свои камни на нее в начале партии невыгодно. Вторую линию иногда называют линией поражения.

Пятая линия с первого взгляда кажется очень выгодной, так как намечает для захвата большую территорию, но го — это игра гармонии и баланса. В ней нельзя



а б

Рис. 8.



а б

Рис. 9.

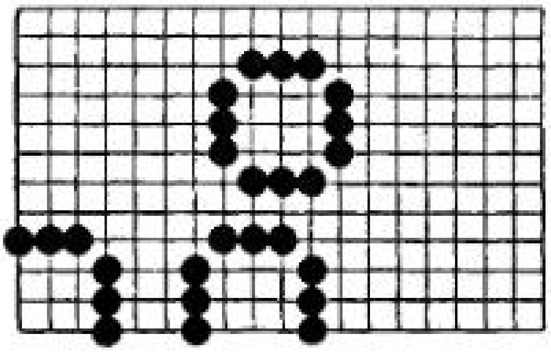


Рис. 10.

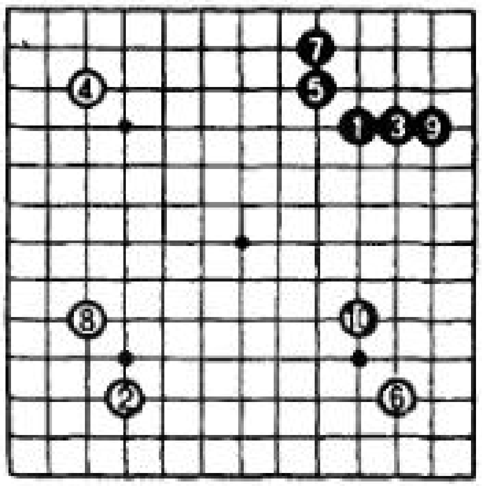


Рис. 11.

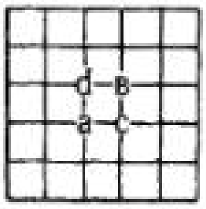


Рис. 12.

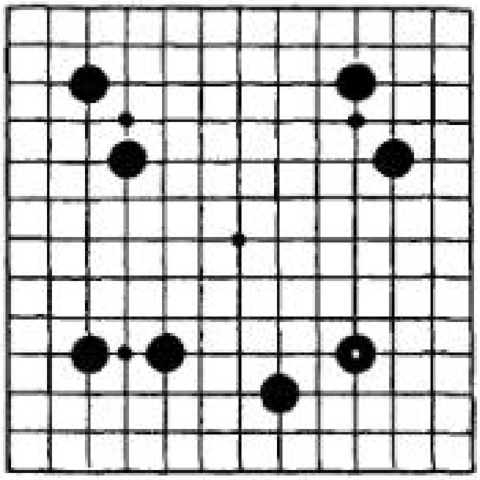


Рис. 13.

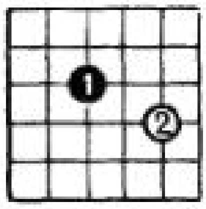


Рис. 14.

быть слишком азартным. Ход по пятой линии не может удержать намеченной территории. Еще хуже играть по шестой, седьмой и более высоким линиям. Поэтому основными для игры в начальной стадии партии являются, повторяем, третья и четвертая линии. Однако они имеют разные характеристики. Легче всего для создания территории использовать третью линию — ее называют «территориальной». Но играть все время только на третьей линии также нецелесообразно, и надо стремиться сочетать игру на третьей линии с игрой на четвертой.

Часто начинающие делают одну распространенную ошибку, пытаясь с самого начала строить прочную территорию. На рисунке 11 показано фусэки из партии двух начинающих игроков. Один из них стал с самого начала выгораживать себе территорию в углу, а второй расставлял камни по всей доске, намечая только контуры будущих территорий. В итоге второй игрок обогнал первого в развитии и одержал легкую победу.

Игра в углах

Существует несколько стандартных точек для игры в углах. На рисунке 12 показаны четыре наиболее распространенные — «а», «в», «с» и «d». Камень, поставленный в точку «а» (*сан-сан*), надежно удерживает угловую территорию, но его недостаток — слабое влияние на другие части доски. Камень в точке «в» (*хоси*), наоборот, имеет превосходное влияние, но недостаточно прочно удерживает территорию в углу. Точки «с» и «d» (*комоку*) обеспечивают контроль над частью угла и воздействуют на одну из сторон. При ходе в комоку возможность создания территории более велика в том месте, где камень находится ближе к краю доски (т. е. на третьей линии).

Для более эффективного контроля над углами применяются построения, которые называются *симари* (закрытые). На рисунке 13 приведены несколько различных типов симари. Однако симари служат не только для контроля над территорией в углу, они являются хорошей базой

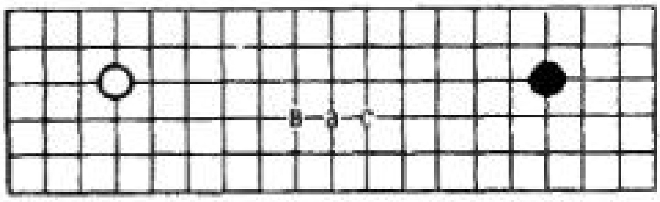


Рис. 15.

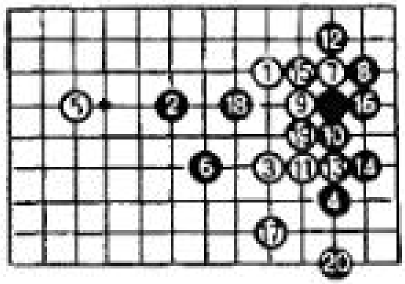


Рис. 16.

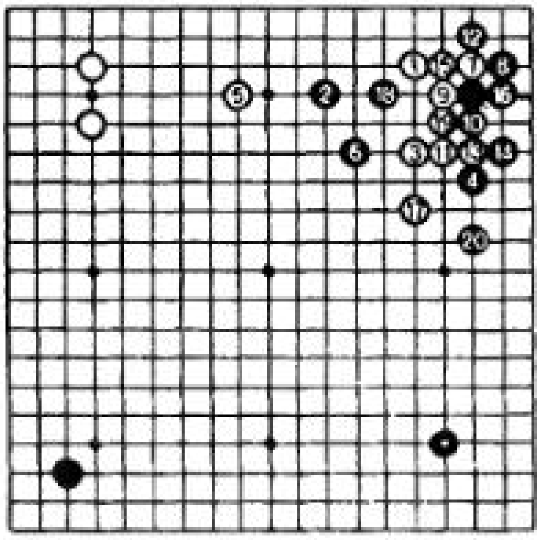


Рис. 18.

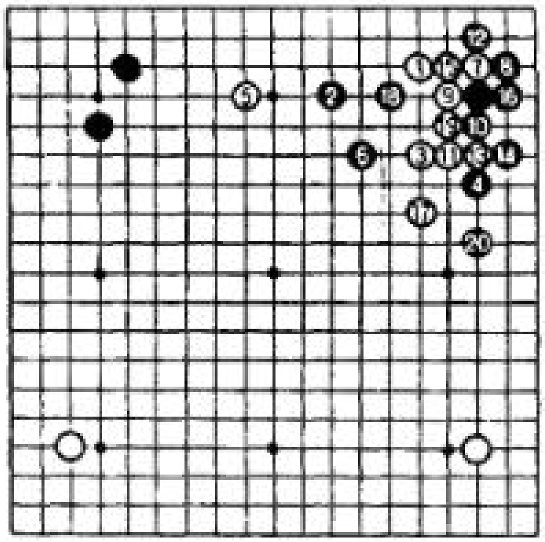


Рис. 17.

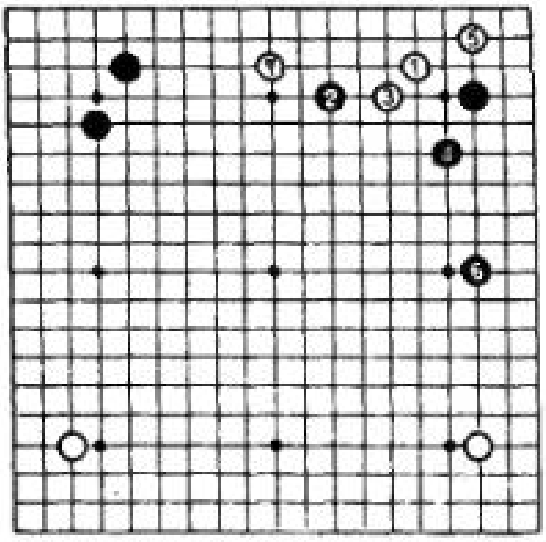


Рис. 19.

для распространения на стороны и центр доски.

Учитывая сложность борьбы против симари, противник часто не дожидается постановки второго камня в углу, а сам занимает эту точку (рис. 14). Такой ход называется *какари* (нападение). В результате атаки ходом какари часто возникает сражение, которое приводит иногда к очень сложной борьбе.

Хираки

После того как партнеры разыграли углы, их внимание переключается на стороны. Они вступают в стадию *хираки* (распространение). Лучшим и наиболее естественным является занятие центральной точки на стороне. На рисунке 15 показаны лучшие точки для развертывания от камня хоси. Трудно точно сказать, какая из этих точек лучшая, так как каждая из них имеет свои плюсы и минусы.

Ход в точку «а» является наиболее стандартным и часто встречающимся, поскольку занимает центр симметрии. Неплохо выглядит и ход в точку «в». С одной стороны, он очень эффективен — расширяет сферу влияния, но вместе с тем слабее связь со своим камнем в хоси, и ее легче разорвать.

Ход в точку «с» на один пункт ближе к своему камню в хоси, и поэтому связь гораздо прочнее, но эффективность в расширении сферы влияния слабее.

Дзесэки

Слово *дзесэки* в Японии используется для описания любой принятой нормы поведения. Однако в словаре про дзесэки написано, что это «камни, расположенные наилучшим образом в игре го»!

Розыгрыш дзесэки начинается всегда с угла, поэтому дзесэки дают и такое определение: «стандартный розыгрыш в углу».

В настоящее время существует огромное множество дзесэки — порядка 20 тысяч, причем каждый год эта цифра растет. Узнав о таком обилии дзесэки, которые надо изучать, многие начинающие приходят в ужас. Но пугаться не надо: механическое заучивание дзесэки может даже помешать росту мастерства, отучивая от самостоятельного мышления.

Возникает вопрос: а зачем же они нужны? Изучение дзесэки избавляет от бесполезной траты энергии на нахождение известных вариантов, а также помогает овладеть техническим мастерством и обрести навыки в нахождении *тэсудзи* (лучший ход).

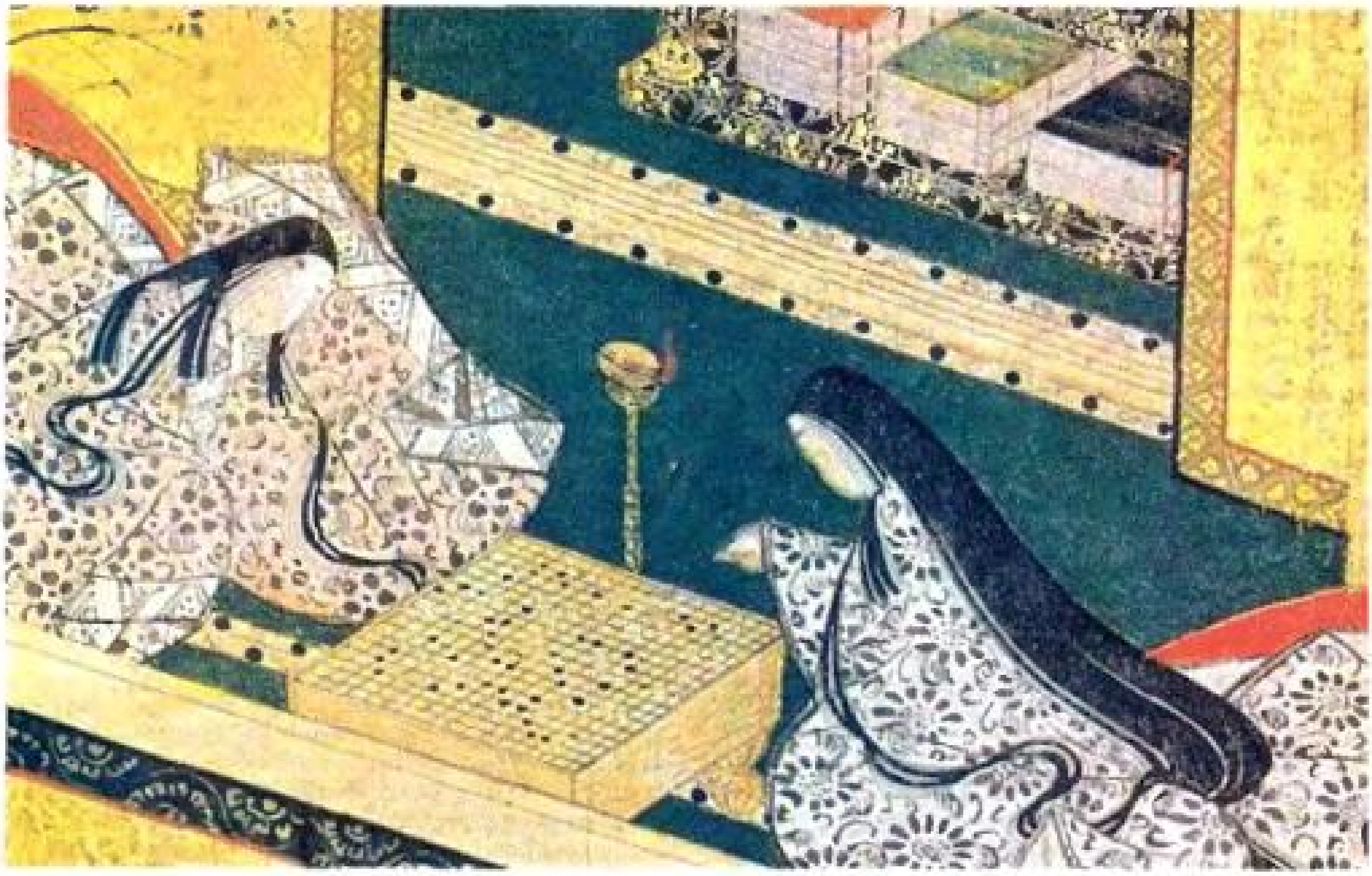
Разберем несколько примеров.

На рисунке 16 приведено часто встречающееся дзесэки. Если рассматривать его на пустой доске, то розыгрыш за обе стороны является абсолютно равным. Однако для каждой конкретной позиции это дзесэки может оказаться как хорошим, так и плохим.

Сравним рисунки 17 и 18. На них приведены позиции из разных партий, но в обеих встречается наше дзесэки. После небольшого анализа можно сказать, что если на рисунке 18 позиция белых перспективнее, то на рисунке 17 результат для них крайне неудачен. Эта ситуация возникла из-за того, что в первой партии (см. рис. 17) белые неправильно выбрали дзесэки ходом 3. В результате у них образовались две слабые группы: камень 5 и камни 1, 3, 7, 9, 11, 13, 15, 17. В позиции на рисунке 18 у белых только одна слабая группа (камни 1, 3, 7, 9, 11, 13, 15, 17), которая уравновешивается слабостью черных камней 2, 6 и 18. Камень 5 здесь не только сильный, но имеет идеальное распространение от своего симари. Вместо хода 3 на рисунке 17 белым лучше было сыграть, как на рисунке 19, с равными шансами.

Е. Гик, А. Попов

(Окончание следует)



Игры и головоломки

Игра го

Разрезание и соединение камней

Важное значение в партии имеет взаимосвязь камней. Совместные действия групп представляют значительную силу, разрозненные слабые группы подвергаются атаке и, в лучшем случае, обеспечивают себе жизнь.

На рисунке 1 приведена позиция, в которой два белых камня не являются соединенными между собой в одну группу. Ходом 1 черные разделяют их на две части. В результате белые попадают в затруднительное положение, и велика вероятность, что какой-нибудь из камней погибнет. Если же белые успеют соединиться в точке 1, то их камни будут представлять значительную силу, и их будет не так-то легко захватить в плен.

Окончание. Начало см. в «Кванте» № 6 и № 7.

Прямые соединения выполняют важную роль, особенно при непосредственном столкновении с камнями противника. Когда же прямого столкновения нет, намного выгоднее соединить свои камни не вплотную, а более широко, но таким образом, чтобы при их атаке они всегда могли соединиться.

Рассмотрим две позиции (рис. 2, *а*, *б*). На рисунке 2, *а* показан пример, в котором играющий, памятуя о том, что соединять камни хорошо, расставил их в цепочку (ходы 1—9). Это неэффективный путь игры. Более удачно расставил свои камни на рисунке 2, *б* другой игрок (ходы 1—5). В обоих случаях очерчены одинаковые территории, однако на рисунке 2, *а* для этого потрачено пять камней, а на рисунке 2, *б* — только три.

Можно, конечно, сказать, что на рисунке 2, *б* беспокойство вызывают промежутки между камнями «а» и «в». Но здесь нет повода волноваться. Если противник попытается ворваться туда (ход 1 на рисунке 2, *в*), то после хода 2 его постигнет неудача.

Ко-борьба

Ко-борьба — сложный раздел тактики. Применение ее приводит к острым продолжениям, обменам больших групп камней и требует хорошего понимания игры в целом.

Рассмотрим позицию на рисунке 3, *а* и возможное продолжение партии. Белые, избирая спокойный путь игры, делают в центре ход 1. Черные ходом 2 создают ситуацию сэки в правом верхнем углу, тем самым избавляясь от возможных осложнений. Последующая игра приведет к следующему результату: 15 камней у белых против 16 у черных. Такой результат не может устроить белых. Поэтому они завязывают своим первым ходом ко-борьбу в правом верхнем углу. Эта более сложная игра позволяет белым использовать свое преимущество в ко-ударах («а» и «в»), каждый из которых угрожает черным потерей группы. У черных всего лишь одна серьезная ко-угроза в «с».

На рисунке 3, *б* демонстрируется применение белыми ко-борьбы, в которой происходит естественный обмен четырех отмеченных белых камней (11 очков) на группу черных в углу (20 очков). Черные получают на 7 очков больше по сравнению с позицией на рисунке 3, *а*. Теперь подсчет очков в пользу белых: 29 против 28 у черных. Из разобранного примера видно, что применение ко-борьбы необходимо в случаях, когда более простая игра не приводит к успеху.

Тэсудзи

Мы уже упоминали, что ходы, использующие наилучшим образом недостатки в построении противника, называются тэсудзи. Знание различных типов тэсудзи очень важно, так как они используются во всех стадиях игры — будь то фусэки, середина или ёсэ.

Разберем несколько наиболее популярных тэсудзи.

Ситё. Так называется один из способов захвата камней. В го существует даже поговорка: «Не знаешь ситё — не умеешь играть в го».

В позиции на рисунке 4 черные ходом 1 захватывают камень белых в ситё. Если белые попытаются убежать от захвата и сыграют в 2, то черные последуют за белыми камнями и сыграют в 3, снова ставя их в положение атари. Белые играют в 4, черные — в 5 и так далее до хода 17. Здесь белые попадают на край доски, бежать им некуда, и поэтому все их камни оказываются захваченными. Расположение камней во время побега напоминает по конфигурации лестницу, поэтому ситё еще иногда называют лестницей.

Позиция на рисунке 5 очень похожа на предыдущую. Однако если черные и в этом случае попытаются захватить белый камень в ситё, то они потерпят неудачу, так как на пути у них окажется отмеченный камень белых, который называется *ситё-прерыватель*. Прежде чем за-

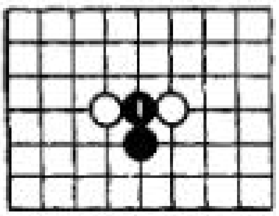


Рис. 1.

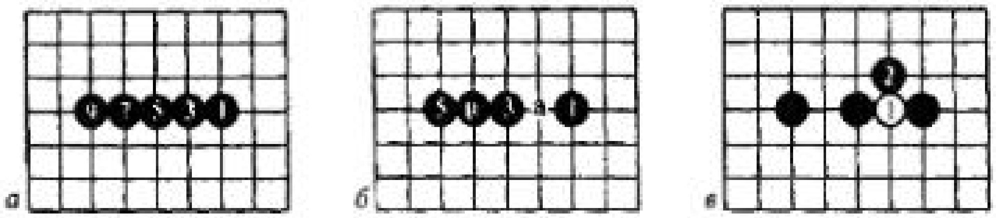


Рис. 2.

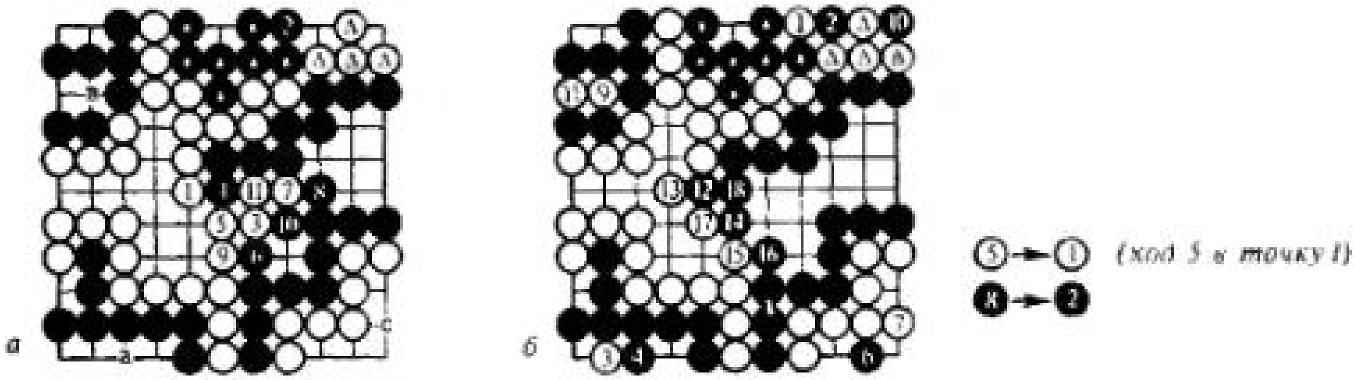


Рис. 3.

хватить в ситё, надо посмотреть, нет ли на пути *ситё-прерывателя*.

В заключение отметим, что ситё не самый лучший способ захвата разрезающих камней. Он применяется лишь в том случае, если нет ничего лучшего. Ведь стоит только появиться ситё-прерывателю, и захваченный камень может вырваться из окружения. Поэтому чаще всего тратят еще один ход для окончательного захвата камня.

Гэта. Так называется другой способ захвата камней — ход 1 на рисунке 6.

Защелка. Одно из наиболее известных тэсудзи, применяемое для захвата камней противника.

На рисунке 7 черные сделали ход 1, пытаясь избежать захвата трех своих камней. На первый взгляд, это им удалось, так как обычные способы съедания камней в точке 3 ни к чему не приведут. Однако у белых имеется тэсудзи. Ходом 2 они жертвуют один камень и затем после ходов 3—6 захватывают камни черных в плен.

Есэ

В заключительной стадии игры вся доска уже разделена на контролируемые игроками территории, но границы их еще до конца не оформлены. Поэтому партнеры стремятся как можно больше увеличить свою территорию и уменьшить территорию противника.

В начале или в середине партии невозможно рассчитать ценность того или иного хода. В конце игры позиция становится более определенной, и такой расчет можно практически сделать для каждого хода, хотя это и бывает довольно трудно.

На рисунке 8 рассмотрен наиболее простой случай расчета ценности хода. Отмеченные черный и белый камни на рисунке 8, *а* обозначают границы своих территорий, но пограничные камни еще не достигли первой линии доски и территории еще полностью не достроены.

Предположим, что результат партии зависит только от разницы между этими двумя территориями. Тогда все будет зависеть от очередности хода. Если ход черных (рис. 8, *б*), то они завершают свою территорию ходами 1 и 3. Подсчитав очки, можно увидеть, что у черных шесть очков территории, а у белых только пять и черные добиваются победы с перевесом в одно очко. Если же ход белых (рис. 8, *в*), то они ходами 1 и 3 завершают свою территорию. Теперь у них будет шесть очков территории, а у черных пять. Сравнив результаты, мы видим, что разница между ними два очка, т. е. ценность хода на данном участке доски составляет два очка.

Но не всегда так просто подсчитать величину хода. В реальной партии встречаются более сложные ситуации. Рассмотрим одну из них.

На рисунке 9 приведена позиция с неразыгранным местом (в правом верхнем углу), в котором надо рассчитать величину хода. Правильный ход белых — 1. Черные отвечают ходами 2 и 4, после чего белые, сохраняя инициативу, играют в другом месте. Позже черные проведут обмен ходами 6 и 7. Затем белые, в свою очередь, проведут обмен 9 и 10. Подсчитав территорию, мы увидим,

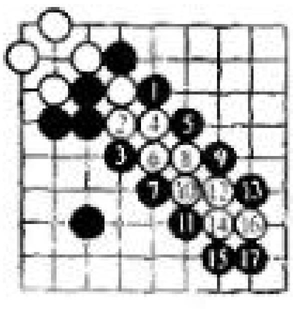


Рис. 4.

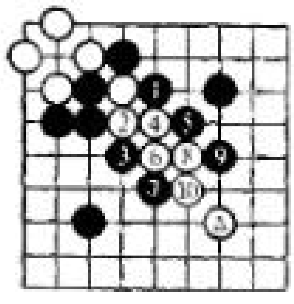


Рис. 5.

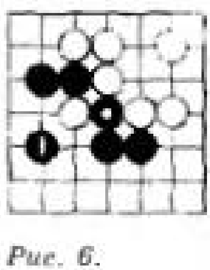


Рис. 6.

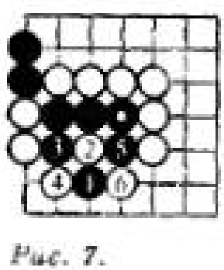


Рис. 7.

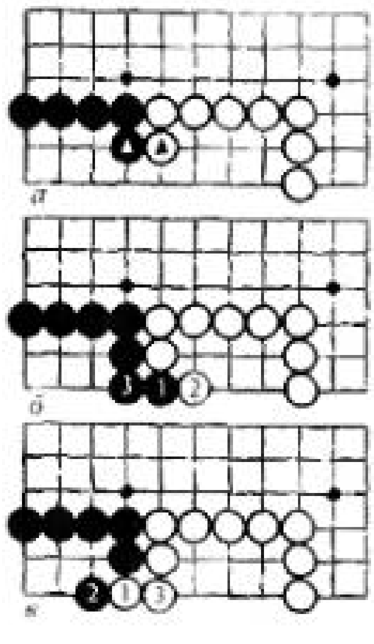


Рис. 8.

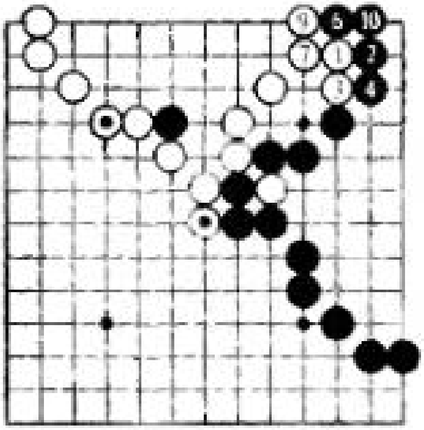


Рис. 9.

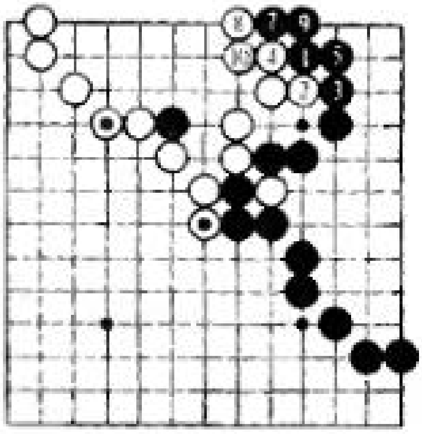


Рис. 10.

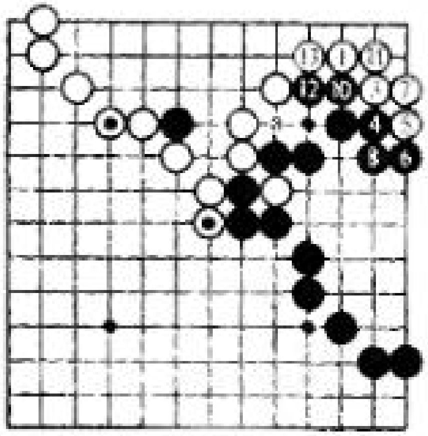


Рис. 11.

что у белых она равняется 23 очкам против 26 у черных.

Разобранный пример показывает, что определить величину хода в ёсэ довольно трудно. Однако еще сложнее оказывается не расчет ходов, а их взаимоотношение — с потерей или без потери темпа они делаются.

Если же здесь первыми сыграют черные (ход 1 на рисунке 10), то после обменов (ход 6 сделан в другом месте) белые имеют территорию 19 очков, черные — 30. Разница с предыдущим розыгрышем составляет 8 очков. Следовательно, ценность хода в этой позиции равна 8 очкам. Но обратим внимание, что белые могут получить эти 8 очков без потери темпа, а черные с потерей.

Возникает вопрос: всегда ли белые ход 1 могут сделать с темпом? Рассмотрим рисунок 11. Если черные не отвечают на ход белых 1 (т. е. играют в другом месте), то те играют в пункт 3 и до хода 8 сохраняют инициативу. В дальнейшем черные без потери темпа делают ходы 10 и 12. После проведения этой операции территория белых составит 28 очков, а черных — 19,5 очка (ход в точку «а» дает одно очко с потерей темпа, и поэтому в расчет берется 0,5 очка).

Сравнивая этот результат с двумя предыдущими, видим, что выгода белых теперь составляет 19,5 очка с потерей темпа. Белые могут его делать, когда наибольший ход на доске с потерей темпа равен 19 очкам или меньше.

Для понимания некоторых тонкостей ёсэ рассмотрим два термина — *сэнтэ* и *готэ*.

Сэнтэ называется такой ход, который делается без потери темпа. Соответственно, готэ — ход с потерей темпа.

Существуют три основных сэнтэ-готэ соотношения:

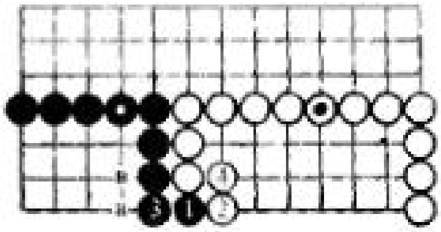


Рис. 12.

— *обоюдное сэнтэ;*
— *обоюдное готэ;*
— *сэнтэ-готэ* (обратное сэнтэ).

Ситуация на рисунке 8 является примером обоюдного готэ. Пример сэнтэ-готэ разобран на рисунках 9, 10. Остается рассмотреть обоюдное сэнтэ (рис. 12). Здесь, кто бы ни играл первым, заканчивает в сэнтэ. Это очень хорошие ходы, и оба партнера стараются как можно раньше сыграть их. Поэтому в ёсэ важно не только подсчитать ценность хода, но и определить, какой он — сэнтэ или готэ.

Вы научились играть в го, познакомились с основами стратегии и тактики. Но наступит момент, когда вам захочется принять участие в официальных соревнованиях, померяться силами с мастерами, получить спортивный разряд. Тогда вы можете обратиться в клуб «Восток» по адресу: *105484, Москва, 16-я Парковая ул., д. 27, кв. 165; тел. 463-20-11; 461-21-14.*

Е. Гик, А. Попов

Крискросс, пра-кроссворд и другие

Мы сообщали, что летом 1992 года в Нью-Йорке состоялся 1-й Чемпионат мира по решению головоломок. Его участники решали логические, цифровые, буквенные и другие задачи. Большинство типов головоломок чемпионата хорошо известны и одинаково популярны у нас и за океаном, но есть исключения.

Э	Д	Д	И	К	А
А	Д	Ж	Е	Й	Н
Н	О	У	О	Ж	Д
А	Л	Л	А	Н	И
И	Л	И	Н	Д	А
Д	И	А	Р	А	С

Рис. 1.

Например, в нашей стране практически не знают головоломку «крискросс». Крискросс выглядит как коврик произвольной конфигурации, сплошь покрытый буквами (рис. 1). На коврике нужно найти определенные слова, например мужские и женские имена. Слова разрешается читать по горизонтали, вертикали или диагонали в любом направлении, в том числе, справа налево и снизу вверх. Привлекательность крискросса в том, что его легко придумать самому и самому оценить его качество: в коврике должно быть как можно меньше неиспользуемых клеточек, заполненных произвольными буквами.

Самая популярная словесная головоломка в мире — это кроссворд. Мы привыкли к одному типу кроссвордов, а их существует множество. Посмотрите на рисунок 2. На нем показаны кроссворды, имеющие квадратные и крестообразные поля, составленные из клеточек без номеров. Нет номеров — нет и перечня точных заданий на слова, которые требуется вписывать. Но не думайте, что от этого задача становится легкой. Клеточки нужно заполнить так, чтобы в каждой строке и каждом столбце помещалось целое слово (существительное единственного числа) и не осталось пустых клеток. Поскольку эти кроссворды более древние, чем обычные, давайте назовем их «пра-кроссворды».

Как вы понимаете, чем больше поле пра-кроссворда, тем труднее решить задачу. Но до каких размеров можно увеличивать поле? Ясно, что для каждого языка мира ответ будет своим. Для русского языка максимальные размеры поля пока неизвестны. Поэтому мы предлагаем читателям следующую задачу: найдите квадратный пра-кроссворд максимального размера.

Решение, претендующее на рекорд, должно удовлетворять одному из двух условий:

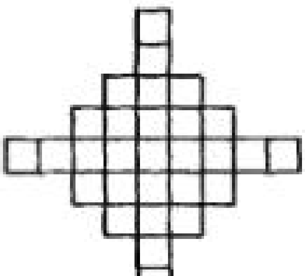
1. Поле не должно содержать одинаковых слов (пра-кроссворд 1-го рода).

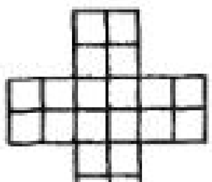
2. Каждое слово должно использоваться дважды: один раз по горизонтали, другой раз по вертикали. Слова должны идти в одинаковом порядке слева направо и сверху вниз (пра-кроссворд 2-го рода).

Примеры обоих пра-кроссвордов показаны на рисунке 2. Будем считать их размеры стартовыми; посмотрим, на что способны читатели «Кванта».

Предлагаем вам также придумать максимальные пра-кроссворды на крестообразных полях различной формы. Поле может быть любой конфигурации, но обязательно симметричное. Следует стремиться не только к максимальной длине слов, но и к большему числу строк и столбцов на поле. Внутри креста не должно быть пустых клеток. Для построения пра-кроссвордов разрешается использовать компьютер.

А. Калинин





Л	О	Б
Е	Д	А
В	А	Р

О	С	О	Т
С	У	М	А
О	М	А	Р
Т	А	Р	А

Рис. 2.

Аномальные флексагоны

И. КАН

Одной из наиболее интересных и удивительных головоломок XX века является флексагон. Его нетрудно изготовить из бумаги при помощи клея и ножниц следующим образом.

Возьмите бумажную ленту шириной 3—5 см и такой длины, чтобы ее можно было разделить на 37 равносторонних треугольников, которые в дальнейшем для краткости будем именовать секторами. Заполните ленту числами, как на рисунке 1. Теперь согните ленту по линиям *A—A*, *B—B*,... ..., *K—K*, накладывая «•» на «11»; «12»; и «12»; «7» на «7» и т. д.— одинаковые числа одно на другое. После сгиба по линии *K—K* длина ленты сократится уже почти вдвое. Продолжайте сгибать ленту, закрывая одинаковые числа: «6»—«6», «5»—«5», «4»—«4» и т. д. Осталась лента из 10 секторов. Чтобы свернуть ее в шестиугольник (а именно такую форму имеет флексагон), согните ленту еще три раза, каждый раз закрывая пару соседних двоек. Теперь тот конец ленты, который помечен числом «11», всуньте в другой конец, который имеет число «11» внутри, так, чтобы совместились друг с другом, во-первых, числа «11», а во-вторых, две «звездочки». Осталось склеить «звездочки», и флексагон готов (рис. 2).

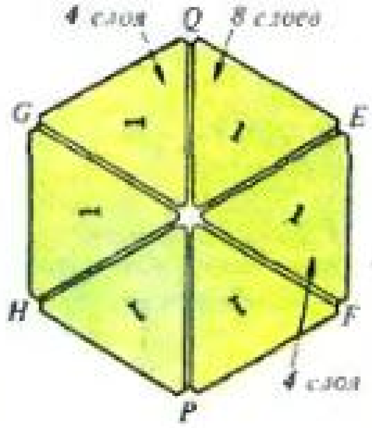


Рис. 2. Исходное положение флексагона.

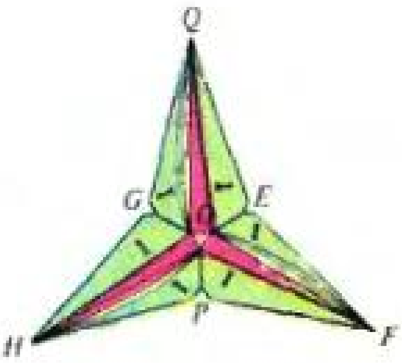


Рис. 3. Позиция «пропеллер».

Первое удивительное свойство флексагона состоит в том, что путем перегибаний от «единиц» наверху и «троек», которые сейчас на другой стороне флексагона, можно перейти к «двойкам». Для этого согните флексагон по линиям *OQ*, *OF*, *OH* (см. рис. 2) от себя, так чтобы точки *E*, *G*, *P* удалялись. Пусть эти точки сомкнутся в одну, тогда получится нечто похожее на трехлопастный пропеллер (рис. 3). Раскройте полученную фигуру спереди. Теперь на лицевой стороне флексагона оказываются «двойки», а на тыльной «единицы».

В качестве начального положения флексагона выберем такое, как на рисунке 2: на лицевой стороне — шесть «единиц», на обратной (тыльной) стороне — шесть «троек», причем под сектором *QOE* с «единицей» (заметьте, что это правый из двух верхних секторов *GOQ* и *QOE*) находится еще 7 слоев, а под соседними секторами — меньше (по 3 слоя).

Операцию, состоящую из последовательности всех сгибов, при помощи которых мы перешли от «единиц» и «троек» к

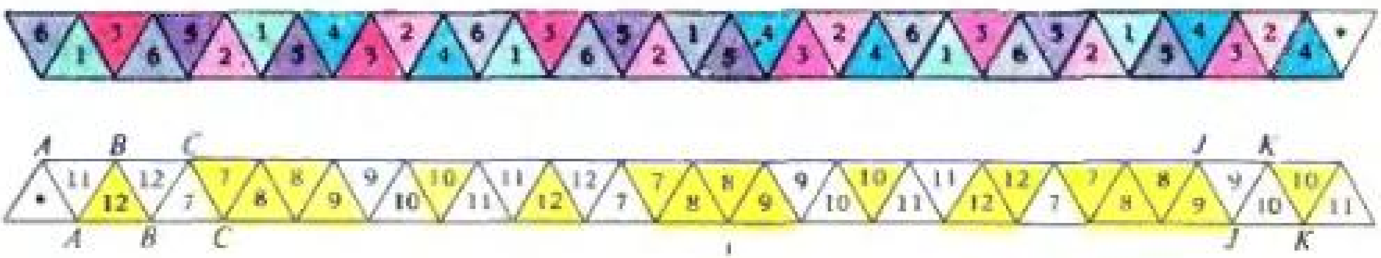


Рис. 1. Разметка и раскраска развертки флексагона.

«двойкам», обозначим через V. Необходимо следить за тем, чтобы при ее выполнении флексагон не поворачивался (иначе это приведет к путанице). Так, после применения V к начальному положению должен получиться флексагон, в котором большее количество слоев бумаги находится уже под левым из двух верхних секторов. Операцию, обратную к V (т. е. такую, что последовательное выполнение V и V^{-1} оставляет флексагон без изменений), естественно обозначить V^{-1}.

Совокупность шести чисел, которые одновременно раскрываются при выполнении операции V, называется плоскостью. Плоскости с числами «1», «2», «3» нами уже получены. Подумайте, как получить плоскости с числами от «4» до «12».

Если вы уже накопили некоторый опыт в «перелистывании» плоскостей, то наверняка удивитесь, узнав, что есть плоскости, помеченные сразу несколькими числами. Это и есть аномальные положения флексагона. К ним можно прийти следующим образом.

Операции U, W. Пусть флексагон находится в начальном положении (рис. 2). Согните его по линии PQ от себя. При этом «тройки» закрываются, а вершины G и E, H и F совмещаются попарно. Раскройте флексагон спереди, так чтобы получилась «лодочка» (рис. 4). Два верхних сектора, помеченных «двойками», опустите в середину, на две «тройки». Получится «корзинка» (рис. 5). Сложите «корзинку» пополам, накладывая «шестерку» на «шестерку» и «единицу» на «единицу». Раздвиньте вверху «лопасти», раскрывая «пятерки». Получается «перевернутый пропеллер» (рис. 3, «вверх ногами»). Если теперь этот «пропеллер» вы раскроете спереди, то тем самым закончите выполнение операции W (рис. 6), а если сзади — то будет выполнена операция U (рис. 7).

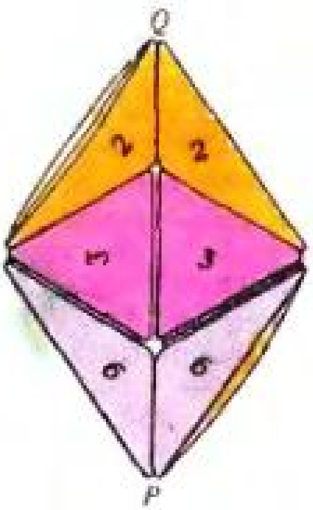


Рис. 4. Позиция «лодочка».

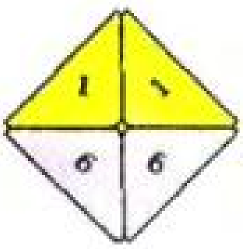


Рис. 5. Позиция «корзинка».

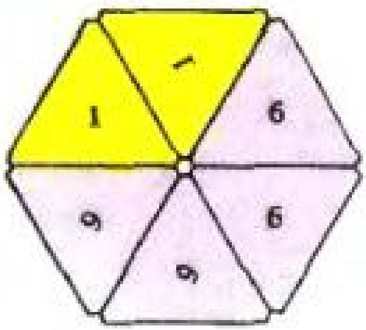


Рис. 6. Результат операции W.

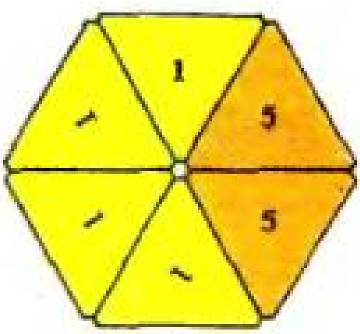


Рис. 7. Результат операции U.

Две следующие операции носят тривиальный характер:

T — это поворот флексагона в его плоскости на 60° против часовой стрелки; Π — это поворот флексагона в пространстве на 180° относительно его вертикальной оси симметрии PQ.

Теперь вы можете начать самостоятельные эксперименты с флексагоном. Рекомендуется записывать все выполненные операции, чтобы иметь возможность вернуться обратно от любого положения, к которому вы пришли. При работе с флексагоном вам пригодится следующее правило устранения аномалий (не являющееся, однако, алгоритмом): в любом аномальном положении следует искать те операции, которые как можно большее количество раз совмещают друг с другом сектора́, помеченные одним и тем же числом. Так, в положении, изображенном на рисунке 7, наиболее целесообразно выполнить операцию U^{-1}, совмещающую сектора с «пятерками» (заметьте, что если операции U^{-1} и $\Pi U \Pi$ одновременно применимы в данном положении, то результат их выполнения — один и тот же).

После некоторого количества экспериментов вы обнаружите, что наибольшую трудность представ-

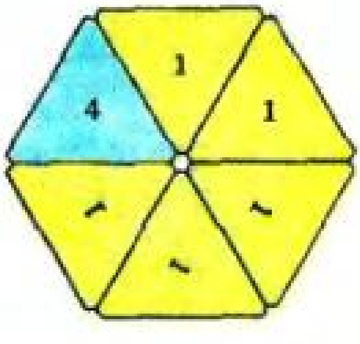


Рис. 8. Положение типа «5» — «1».

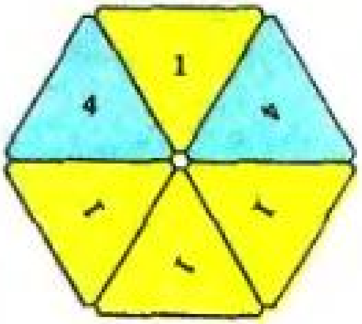


Рис. 9. Положение типа «4» — «2».

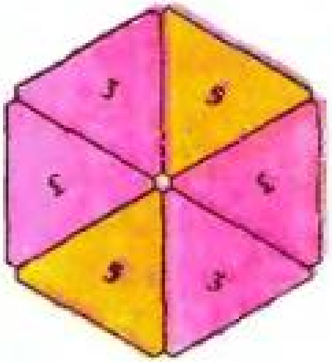


Рис. 10. Второй вариант положения типа «4» — «2».

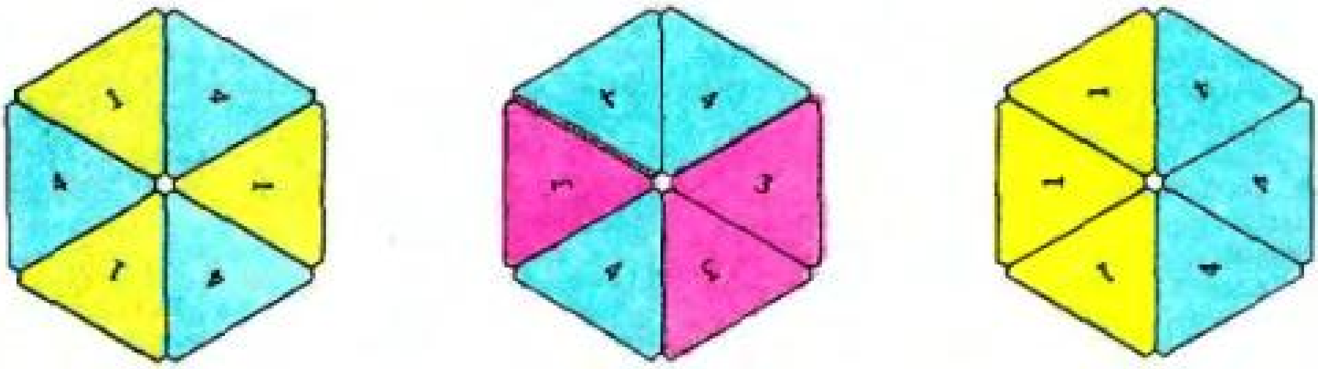


Рис. 11. Положения типа «3» — «3».

ляют собой такие аномалии, когда на одной из плоскостей только одно число отличается от остальных пяти чисел (такие аномалии назовем положениями типа «5» — «1»). К такой ситуации приводит, например, следующая последовательность операций, примененная к начальному положению: $TWUW^{-1}$ (рис. 8).

В флексагоне, который получился, не все плоскости аномальны, в чем легко убедиться, «перелистав» его с помощью преобразования V: плоскости, помеченные числами «5» и «8», присутствуют здесь в своем обычном виде. Постарайтесь обнаружить и другие положения типа «5» — «1», существенно (как именно?) отличающиеся от только что приведенного. Эти аномалии интересны тем, что последовательности операций для их устранения играют ключевую роль в алгоритме устранения любых аномалий (известном автору, но не приведенном здесь из-за недостатка места).

Рассмотрим теперь аномалии типа «4» — «2», т. е. когда в аномальном флексагоне на некоторой плоскости только два совпадающих числа отличаются от остальных четырех, также совпадающих. Две из таких аномалий даны на рисунках 6 и 7. Еще одна получится, если к начальному положению применить последовательность операций $T(WUW^{-1}T^2)^2$ (рис. 9). Положение на рисунке 10, также типа «4» — «2», попытайтесь получить самостоятельно.

Следующее положение (рис. 11, *а*) получается из начального по уже очевидной формуле $T(WUW^{-1}T^2)^3$, а положение на рисунке 11, *б* по формуле $V^2TW^{-2}\Pi W^{-1}\times$ $\times\Pi T^2W^{-1}V^{-1}$. На рисунке 11, *в* представлено еще одно положение типа «3» — «3», оставленное в качестве упражнения.

Какие еще интересные аномалии вам удастся получить? Признаюсь, мне не известен ответ на вопрос: можно ли на двух внешних плоскостях флексагона получить одновременно 12 различных чисел (если флексагон имеет 12 плоскостей)?

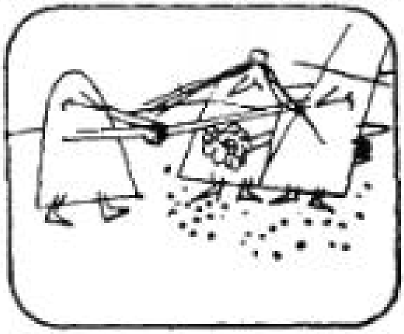
В 9 номере нашего журнала за прошлый год вы могли прочитать отрывок из книги Мартина Гарднера «Aha!» («Есть идея!», М.: Мир, 1982). Сегодня мы предлагаем вам еще одну небольшую главу из этой книги.

In vino veritas

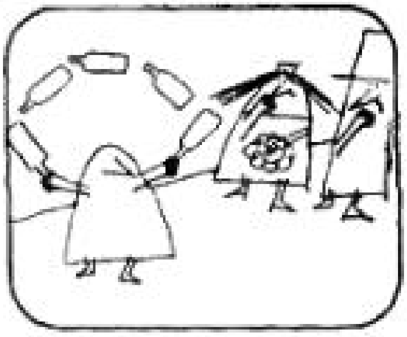
М. ГАРДНЕР

В последний день каникул Боб и Элен сообщили дядюшке Генри, что решили пожениться.

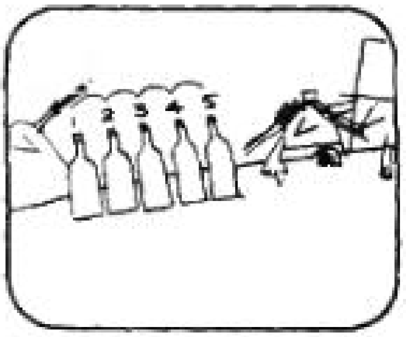
Дядюшка Генри. Рад за вас, мои милые. Нужно отметить этот знаменательный день!



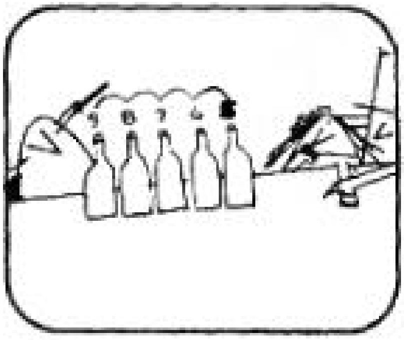
Дядюшка Генри достал из погреба 5 бутылок вина, припасенных для торжественного случая, но тут возникло непредвиденное затруднение: трое обитателей хижины никак не могли прийти к единому мнению относительно того, какую бутылку откупорить первой.



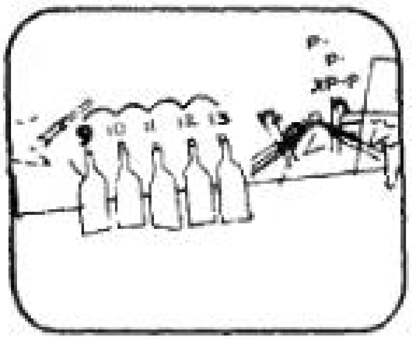
Дядюшка Генри. Постойте, я знаю, как решить спор! Выстроим все бутылки в ряд и пересчитаем их по разработанной мной системе. Вот как это делается: раз, два, три, четыре, пять...



Дядюшка Генри. ...шесть, семь, восемь, девять...



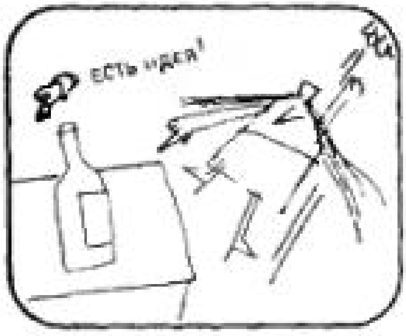
Дядюшка Генри. ...десять, одиннадцать, двенадцать, тринадцать... Понятно?



Боб. Понятно-то понятно, но сколько вы еще собираетесь считать?

Дядюшка Генри. Как вы помните, в 1976 году мы праздновали 200-летие независимости. Вот я и досчитаю до 1976.

Элен (со стоном). Милый дядюшка, на это у вас уйдет еще 200 лет. Впрочем, минутку... Есть идея! Считать по бутылкам совсем не обязательно! Я могу вам сразу сказать, на какой бутылке окончится счет.



Элен. Число 1976 придется на вторую бутылку.

Дядюшка Генри не поверил Элен и упрямо продолжал пересчитывать бутылки. Через 15 минут он досчитал до 1976 и убедился, что счет, как и предсказывала Элен, окончился на второй бутылке.

Дядюшка Генри. Как это тебе удалось, Элен? Не могли бы и вы предложить способ, позволяющий безошибочно определить, на какой бутылке закончится счет, независимо от того, до какого числа мы будем считать?

Элен догадалась, что утомительного счета на бутылках от 1 до 1976 можно избежать, если воспользоваться так называемой арифметикой вычетов, или теорией сравнений. Два числа a и b называются сравнимыми по модулю c, если при делении на c они дают одинаковые остатки. Число c называется модулем сравнения, а остаток от деления любого числа на c — вычетом этого числа по модулю c.

Обычные часы могут служить прекрасным примером конечной арифметики вычетов по модулю 12, содержащей 12 чисел. Действительно, вычет числа 12 по модулю 12 равен 0 (т. е. число 12 сравнимо с нулем по модулю 12). Предположим, что на ваших часах сейчас 12 часов. Сколько будет на ваших часах через 100 часов? Разделив 100 на 12, вы узнаете, что остаток от деления равен 4 (число 100 сравнимо с числом 4 по модулю 12). Значит, через 100 часов на ваших часах будет 4 часа.

Теперь вам ясно, что «метод дядюшки Генри» эквивалентен арифметике вычетов? Единственное отличие состоит в том, что каждая из 3 бутылок, стоящих в середине, соответствует двум числам, поскольку эти бутылки приходится считать и слева направо, и справа налево. Счет 8 приходится на вторую бутылку, после чего весь цикл повторяется. Следовательно, метод дядюшки Генри эквивалентен арифметике вычетов по модулю 8.

Элен оставалось лишь найти вычет числа 1976 по модулю 8, т. е. разделить 1976 на 8 и найти остаток. Проделав вычисления, Элен получила остаток 0. В арифметике вычетов по модулю 8 число 8 имеет нулевой вычет. Следовательно, счет до 1976 должен окончиться на второй бутылке.

Предположим, что вам захотелось узнать, на какой бутылке кончит считать дядюшка Генри, если вздумает дойти, например, до 12 345 678 987 654 321. Нужно ли для этого делить гигантское число на 8? Нет, если вы сообразите, как избежать утомительной процедуры. Так как число 1000 сравнимо с 0 по модулю 8, то необходимо делить на 8 только три последних знака — число 321. Проделав деление, вы узнаете, что интересующее вас семнадцатизначное число сравнимо с 1 по модулю 8. Следовательно, вздумай дядюшка Генри считать до этого числа, он бы закончил счет на первой бутылке.

Варьируя число бутылок, вы будете получать модели конечных арифметик вычетов по другим четным модулям. Если бутылки считать, как обычно, только слева направо, то вы получите модель конечной арифметики вычетов по любому модулю, как четному, так и нечетному.

Перевод с английского Ю. Данилова
Иллюстрации канадского графика Дж. Глена

ПЕРВЫЙ ЧЕМПИОНАТ МИРА

ГОЛОВОЛОМКИ КАК ВИД СПОРТА

Прошлым летом в Нью-Йорке прошел 1-й чемпионат мира по головоломкам. Насколько необычно звучит название этих соревнований, настолько же необычным было их содержание.

В начале года в 13 странах прошли отборочные соревнования, и по 4 сильнейших представителя от каждой страны были посланы в Нью-Йорк.

Головоломки отвечали двум требованиям: новизна и независимость от языка. Одни головоломки можно было решать сообща, другие распределялись между членами команды. Каждая задача оценивалась в баллах, и за отведенное время нужно было набрать максимальное их количество.

Для первого дня организаторы приготовили более легкие задачи: лабиринты, числовые задачи, геометрические головоломки, зрительные задачи на определение объектов и поиск различий, восстановление сюжетов по перепутанным картинкам, буквенные головоломки, тесты на память, перестановочные головоломки. Во второй день были предложены вероятностные головоломки, разгадывание слов, нахождение спрятанных изображений, задачи на упаковку.

Самым твердым орешком оказалась головоломка известного японского изобретателя Нобa Иошигахары. Внешне она выглядела очень скромно — деревянный ящичек, в который нужно уложить 7 деревянных брусочков.

Сам Иошигахара, сидевший за столом жюри, после того, как начался отсчет времени, раз пять повторил: «Хоть бы кто-нибудь решил эту задачу»,— но это не помогло. Отведенные 15 минут истекли, и никто не справился с головоломкой. Тогда, в соответствии с условиями, изобретатель показал всем правильную укладку первого бруска, и опять начался отсчет времени. В течение следующей 15-минутки команде Хорватии удалось решить задачу. После этого было показано место второго бруска, и тогда успеха добились еще две команды: Японии и Словении. США, Канада, Аргентина и Турция справились с задачей после трех подсказок, остальным понадобилось четыре.

По итогам двух дней места распределились так: 1 — США, 2569 очков; 2 — Аргентина, 2224; 3 — Польша, 2134; 4 — Канада, 2103; 5 — Турция, 2066; 6 — Чехо-Словакия, 1908; 7 — Словения, 1782; 8 — Япония, 1664; 9 — Голландия, 1661; 10 — Хорватия, 1609; 11 — Финляндия, 1149; 12 — Германия, 1118; 13 — Венгрия, 737.

Конечно, жаль, что мы с вами не были летом прошлого года в Нью-Йорке. Но может быть, не все потеряно, и осенью этого года мы с вами сумеем попасть на 2-й чемпионат мира, в чешский город Брно? Во всяком случае, если вы за 2—3 часа решите 6 головоломок, показанных на этих страницах, вы можете считать себя кандидатом в сборную России. Сообщите нам в редакцию о ваших достижениях, и если удастся найти организаторов и спонсоров для сборной, у вас есть шанс поехать на второй и следующие чемпионаты мира, заявки на организацию которых уже поданы Аргентиной и Турцией.

А на вопрос, как стать чемпионом мира, ответил абсолютный победитель в личном зачете 1-го чемпионата, канадец Дэвид Сэмуэль. Он сказал: «Я всегда решал все головоломки, которые попадались мне на глаза». Чемпион мира — доктор философии, кандидат компьютерных наук, ему 31 год.

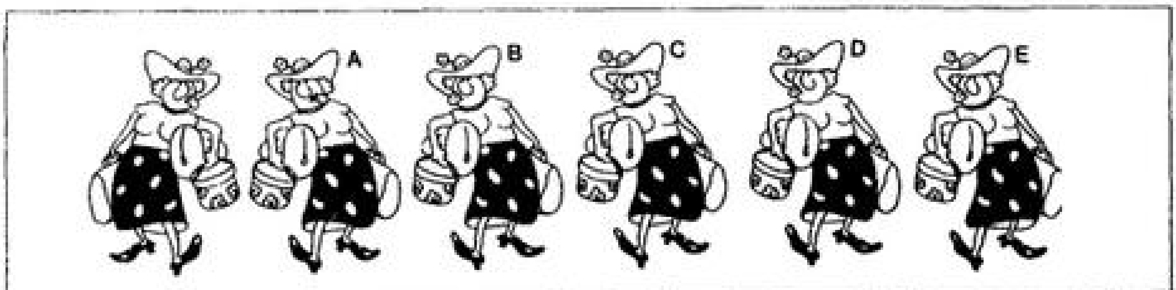


Рисунок 1

Какое из изображений — A,B,C,D или E — является точным зеркальным отражением крайней левой картинки?

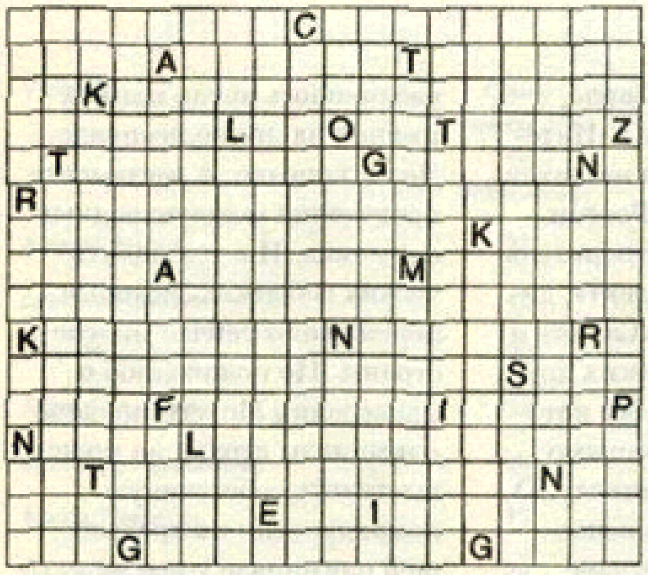


Рисунок 2

Расставьте по клеточкам 30 слов, перечисленных внизу. Все они на разных языках мира имеют одинаковое значение — загадка: ACERTIJO — испанский; AENIGMA — латинский; ARVOITUS — финский; ENIM — креольский; FUMBO — суахили; GATA — шведский; HADANKA — чешский, словацкий; KAHANI — пенджабский; KAI — маори; KIMPAMPA — конго; KIRIGA — кикуйи; MEDYSHJE — албанский; MIKLA — латышский; MOISTATUS — эстонский; MUAMMA — арабский; NANE — гавайский; NAZO — японский; ONSGO — монгольский; PIRI — язык острова Пасхи; PUZZEL — датский; RATGATA — исландский; RATSEL — немецкий; RIDDLE — английский; SASIRTMACA — турецкий; TEKATEKI — индонезийский; TOMHAS — ирландский; TRENCACAPS — каталонский; UGANKA — словенский; ULJHERA — хинди; ZAGADKA — польский. В квадрате расставлены буквы, по одной из каждого слова. Слова могут располагаться по горизонтали и вертикали.

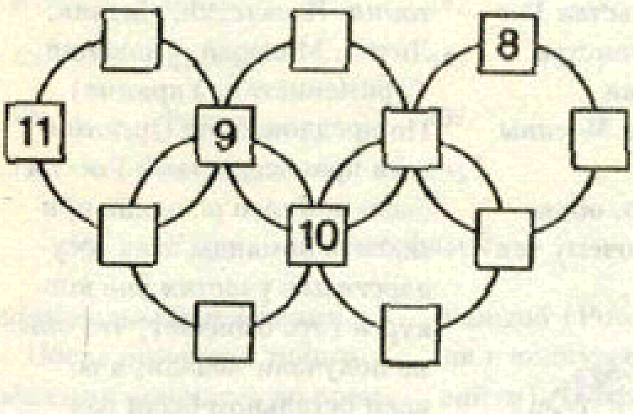


Рисунок 3

Расположите числа от 1 до 12 так, чтобы сумма чисел в каждом кольце была равна 28.

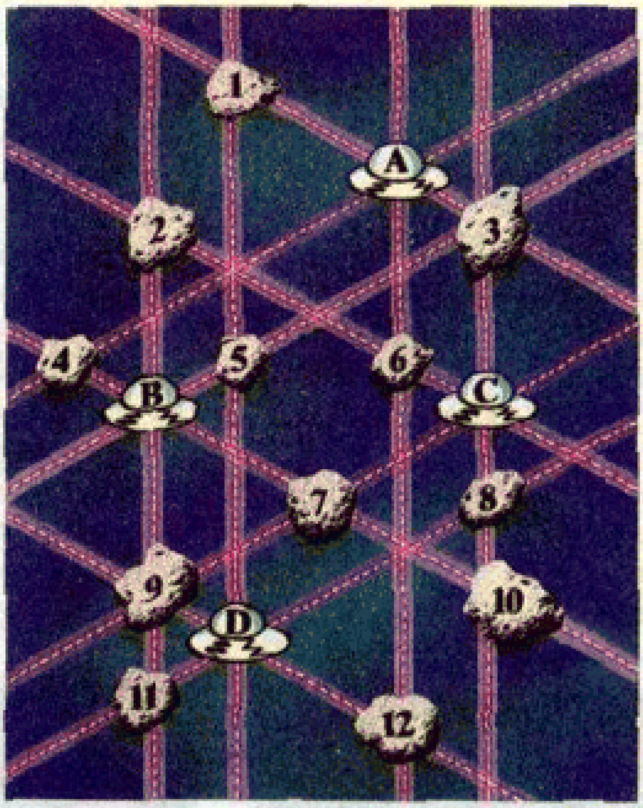


Рисунок 4

Космический корабль попал в пояс астероидов. Чтобы расчистить себе путь, он выпустил четыре летающие тарелки, которые с помощью лазерных пушек должны уничтожить все астероиды. Каждая тарелка имеет энергии на два выстрела. Каждый выстрел уничтожает все астероиды, встретившиеся на пути луча. Найдите 8 направлений выстрелов, которые позволят уничтожить все 12 астероидов.

Сколько цифр нужно изменить, чтобы сумма четырех трехзначных чисел была равна 2001?

8	8	9
9	1	9
6	0	1
8	0	9

Рисунок 5

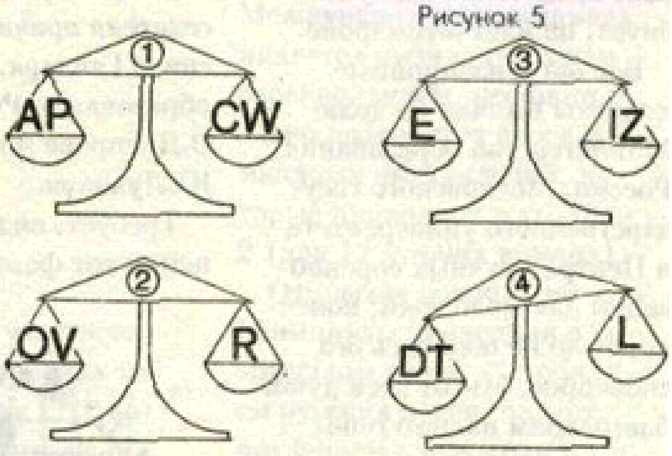


Рисунок 6

Какую из букв — B, H, Q, S или X — нужно положить на правую чашу четвертых весов, чтобы их уравновесить?

Публикацию подготовил А. Калинин

Крестики и нолики

Е. ГИК

ВСЕМ знакома детская игра крестики-нолики: на поля доски 3×3 двое по очереди ставят крестики и нолики, и выигрывает тот, кто первым выстроит три своих знака в ряд. Если никому не удастся добиться этой цели, партия заканчивается вничью. Инициатива принадлежит крестикам, но простой анализ показывает, что правильная игра всегда приводит к ничьей. Поэтому обычные крестики-нолики быстро надоедают, и возникает естественное желание придумать что-нибудь новенькое.

Можно, например, играть в поддавки (доска 3×3 позволяет и это): здесь, наоборот, тому, кто первым выставит ряд из трех своих знаков, засчитывается поражение. В такой игре инициатива — у ноликов, но теперь у крестиков есть надежная ничейная стратегия: на первом ходу они могут занять центральное поле и затем симметрично повторять ходы партнера.

Куда интереснее другой вариант крестиков-ноликов (А.Остин назвал его «безумными крестиками-ноликами»). Каждый игрок при своем ходе ставит либо крестик, либо нолик — что ему заблагорассудится. Побеждает тот, кто первым закончит ряд из одинаковых знаков, безразлично каких. Однако здесь игроки оказываются в неравном положении: начинающий форсированно выигрывает (убедитесь в этом сами). Забавно, но можно играть и в «безумные поддавки»: ходят по-прежнему любыми знаками, но тот, кто первым образует ряд из трех одинаковых знаков, проигрывает. Как и в обычных поддавках, пользуясь симметрией, первый игрок гарантирует себе ничью.

Вот еще одни крестики-нолики (все на той же маленькой доске!), предложенные Д.Силверманом. Играть можно любыми знаками, как в уже описанном «безумном» варианте. Но теперь один из противников считается выигравшим, если он сможет свести игру к обычной ничьей (когда ни у кого не получается ряда из трех одинаковых значков), а другой — если на доске образуется ряд из трех знаков. Докажите сами, что играющий «по-нормальному» побеждает независимо от того, кто ходит первым.

Следующий вариант можно рассматривать как вступление в целый класс «гибридных» игр — помесей крестиков-ноликов и шашек. Партнеры по очереди ставят три своих крестика и нолика. Если никто не выстроил три знака в ряд, игра продолжается. Теперь каждым ходом игрок может передвигать свой значок на соседнее поле по вертикали или горизонтали. Выигрывает тот, кто сумеет первым расположить три своих знака в ряд. Конечно, удобнее не рисовать крестики и нолики карандашом, а пользоваться шашками — белыми и черными. Нетрудно убедиться, что в такой игре право первого хода дает решающее преимущество.

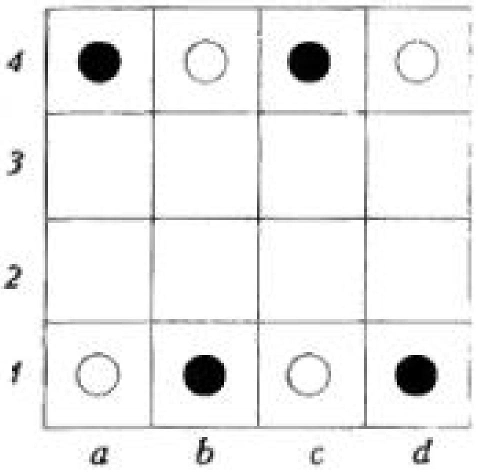


Рис. 1

Как видите, даже такая маленькая доска может служить неиссякаемым источником для изобретения игр.

Так-тиль — простейшая гибридная игра на доске 4×4. У каждого из противников по четыре шашки (рис.1), и игроки по очереди перемещают их по горизонтали и вертикали. Выигрывает тот, кто первым расположит три своих шашки в ряд.

Вот пример партии в так-тиль. 1.c1 – c2 d1 – c1 2.b4 – b3 b1 – b2 3.b3 – a3 (иначе, встав на поле a3, черные сразу выиграли бы) 3...a4 – b4 4.a1 – b1 — белые выиграли, так как черные не в силах помешать маневру 5.d4 – d3.

С помощью компьютера доказано, что так-тиль — игра ничейная: ни одному из партнеров не удается поставить три шашки в ряд (если нет ошибочных ходов).

К подобным играм относятся различные варианты «мельницы», болотуду и т.д.

До сих пор во всех рассмотренных играх партия сразу кончалась с первым выстроенным рядом. Для тех, кому это покажется слишком скучным, придумана еще одна вариация все тех же крестиков-ноликов. На доске 6×6 партнеры по очереди ставят свои значки, получая очко за каждую построенную тройку крестиков или ноликов (по горизонтали или вертикали). Каждое поле доски учитывается дважды — один раз по вертикали и один раз по горизонтали. Выигрывает тот, кто наберет больше очков. Игра заканчивается, когда ходить больше некуда — вся доска заполнена.

Более увлекательны игры в крестики-нолики, в которых победу приносят не три знака, поставленные в ряд, а четыре или пять. В игре «4 в ряд» на доске 4×4 ноликам сделать ничью еще проще, чем на доске 3×3. Для доски 5×5 крестики-нолики давно запрограммированы на компьютере. Машина действует безукоризненно: ничьей добивается любыми значками, а при невнимательной игре человека побеждает. Доказано, впрочем, что на доске 5×5 игра ничейна.

Теперь настала пора рассказать о самых популярных крестиках-ноликах — на бесконечном поле. Двое по очереди ставят свои знаки на клетчатой бумаге, стремясь поставить в ряд (по вертикали, горизонтали или диагонали) пять своих знаков. Реально, конечно, поле ограничено — обычно это просто тетрадный листок. В эту игру охотно играют и школьники, и студенты, и доктора наук; а придумана она была четыре тысячи лет назад, задолго до появления тетрадей в клетку (вместо крестиков и ноликов использовались камушки двух цветов)... Кстати, старинные игры гобанг и гомоку отличаются от бесконечных крестиков-ноликов только наличием специальных досок 19×19 или 15×15, а роль значков играют фишки.

В большинстве рассмотренных игр нолики борются за ничью, а крестики (начинающая сторона) всегда могут ее достичь. Это интуитивно подмеченное правило подтверждает следующая теорема: *при правильной игре в крестики-нолики «n в ряд» на произвольной доске $n \times n$ начинающему гарантирована ничья при любом n.*

Это легко доказать от противного. Предположим, что как бы ни играли крестики, нолики применяют некую выигрышную стратегию и побеждают. Тогда начинающему достаточно поставить на любое место свой первый крестик, а дальше применять стратегию партнера, мысленно поменяв знаки. Если в какой-то момент эта стратегия потребует от него поставить крестик на поле, занятое поставленным ранее крестиком, он ставит свой значок на произвольное поле — лишний крестик никогда не помешает. По предположению, нолики должны выиграть. Но ведь крестики как бы играют ноликами, да еще имеют лишний значок, значит, они тоже должны выиграть. Получили противоречие.

Итак, в игре «5 в ряд» на бесконечной доске крестикам гарантирована ничья. А могут ли они форсированно выиграть? На практике инициатива обычно принадлежит крестикам, но и нолики часто берут верх. Однако в японских книжках по рэндзю (об этой самой популярной в мире модификации крестиков-ноликов мы поговорим как-нибудь в другой раз) приводится исчерпывающий анализ, из которого следует, что крестики форсированно выигрывают. Решающий перевес они получают к десятому ходу, а к пятнадцатому завершают построение необходимого ряда из пяти своих знаков.

Хотя эти теоретические рассуждения вряд ли отпугнут любителей крестиков-ноликов, все же не приходится говорить о серьезных состязаниях, если доказан выигрыш одной из сторон. Поэтому и были придуманы некоторые дополнительные правила, при которых результат игры не так очевиден, принятые в шашках рэндзю.

Посмотрим, как обстоит дело в крестиках-ноликах «n в ряд» при n, больших пяти.

Еще в 1954 году Г.Поллак и К.Шеннон доказали, что при любом $n \geq 9$ у ноликов есть гарантированная ничья. Позже А.Хэйли и

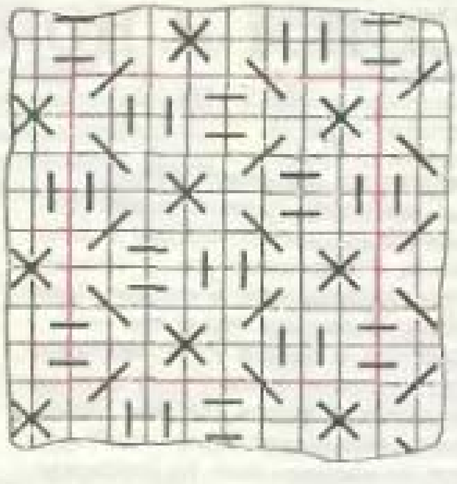


Рис. 2

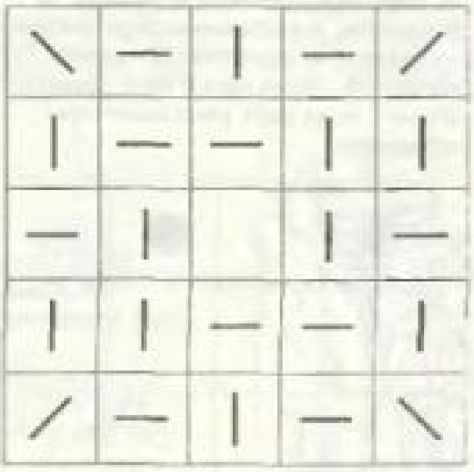


Рис. 3а

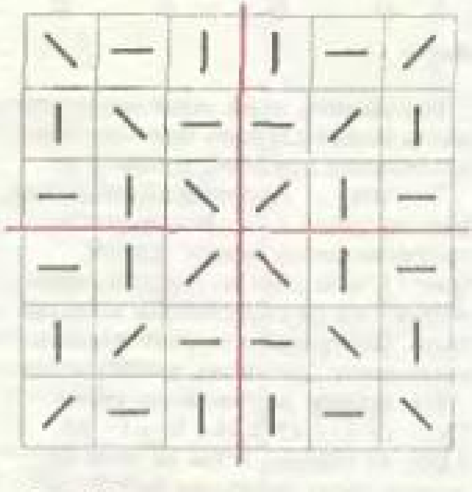


Рис. 3б

Р.Джуитт придумали простой и эффективный алгоритм ее достижения. Всю бесконечную доску надо мысленно разбить на квадраты 8×8 и в каждом из них провести линии, как показано на рисунке 2. В результате все поля доски оказываются разбитыми на пары. Теперь после хода крестиков на некоторое поле противник должен поставить свой нолик на «парное» поле.

Такая стратегия гарантирует ноликам ничью. Действительно, наше покрытие плоскости квадратами 8×8 обладает тем свойством, что в произвольном ряду из девяти соседних полей обязательно найдутся два связанных между собой линией. Это значит, что если одно поле данной пары занято крестиком, то на другом обязательно стоит нолик. Итак, никакие девять полей в одном ряду (а тем более больше) не могут быть заполнены одними крестиками, и партия заканчивается вничью.

К сожалению, эта изящная стратегия неприменима для $n<9$. Правда, более сложным способом доказано, что игра «8 в ряд» тоже ничейна. Что же касается игр «7 в ряд» и «6 в ряд», то вопрос остается открытым. Впрочем, А.Давлицаров и О.Степанов доказали ничейность придуманных ими экваториальных крестиков-ноликов «7 в ряд» (на плоскости выбирают определенное направление — это и есть экватор, — параллельно которому семь одинаковых знаков в ряд не считаются выигрышем).

Для $n=5$ на поле 5×5 срабатывает метод Хэйла и Джуитта. Все поля доски (кроме центрального) разбиваются на пары так, как показано на рисунке 3, а. Теперь после каждого хода крестиков вне центра доски нолики занимают парное ему поле — с той же пометкой и в направлении, указанном линией на поле крестиков. При такой игре нолики даже могут дать крестикам фору — позволить им занять центральное поле и еще одно какое-нибудь. В конце концов в каждом ряду из пяти полей будет стоять хотя бы один нолик, и ничья обеспечена.

Аналогично достигается и ничья в игре «6 в ряд» на доске 6×6 (рисунок 3, б). Здесь ответный ход ноликов по диагоналям квадрата может быть любым. Покрытие Хэйлса и Джуитта в этом случае зеркально симметрично относительно двух выделенных линий.

Путешествие в топологические головоломки

Д. ВАКАРЕЛОВ

Головоломки, о которых пойдет речь, обычно называют шнурковыми, или веревочными. Мартин Гарднер, автор классических книг по занимательной математике, называет их топологическими, потому что решение таких головоломок тесно связано с топологией, разделом математики, в котором изучаются свойства тел, сохраняющиеся при непрерывных деформациях. Например, если веревка завязана в узел и ее свободные концы соединены, то, как ни изгибай такую веревку, узел развязать невозможно. В этом случае говорят, что веревка «заузлена», и заузленность является топологическим свойством веревки.

Кроме основного элемента — веревки, топологическая головоломка обычно содержит кольца, шарики, различные фигурки с одним или несколькими отверстиями, замысловато переплетенные веревкой. Задача состоит в том, чтобы отделить определенную деталь или переместить ее на другое место, не разрывая веревки и не деформируя другие детали.

Существует множество разных топологических головоломок. Я выделяю пять основных типов, различающихся по принципу решения: путешествие петли; обход малой дырки; переход через большое препятствие, следуя его форме; ул-

Рис. 1

авливание веревки; топологические мелеоды. Изложенное выглядит пока очень туманно, поэтому перейдем к конкретным примерам.[1]

Путешествие петли и принцип распрямления

Посмотрим на рисунок 1. Цель этой головоломки — отделить большое кольцо от других деталей. Она достигается, если отцепить петлю от нижней части веревки. Для этого протянем петлю вдоль веревки, просунем ее через маленькое

[1] *Для удобства будем обозначать головоломки номерами рисунков, на которых они изображены. Так, «головоломка 1» — это головоломка, показанная на рисунке 1.*

кольцо и, дойдя до конца веревки, обогнем бусинки. Затем вернемся обратно. В результате петля окажется по другую сторону веревки. Значит, она уже отцепилась, и, таким образом, освободилось большое кольцо. Задача решена.

Головоломка 1 принадлежит к самому распространенному классу топологических головоломок, который основан на принципе «путешествия петли»: все подобные головоломки решаются при помощи движения петли вдоль веревки, которая проходит через одно или несколько отверстий, обходит закрепленную на конце веревки деталь головоломки и затем возвращается обратно.

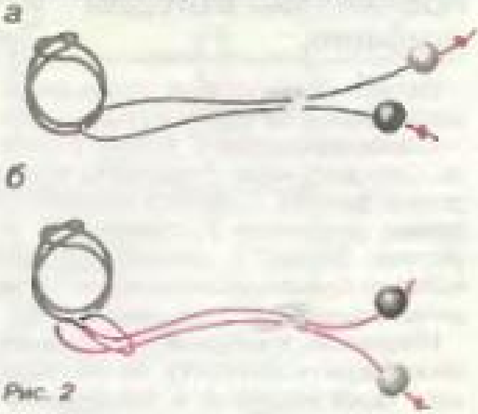


Рис. 2

А теперь перейдем к головоломке, показанной на рисунке 2,*а*. Лучше, если вы на самодельной модели убедитесь, что, манипулируя веревкой, можно перейти в состояние 2,*б*. А в этом состоянии она становится очень похожей на

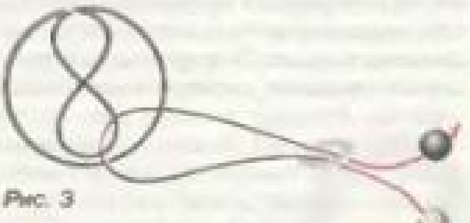


Рис. 3

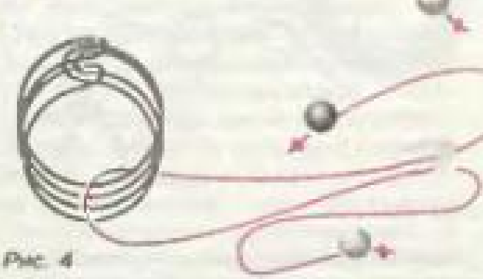


Рис. 4

головоломку 1. Однако при решении из исходного положения она существенно сложнее головоломки 1, потому что в ней принцип путешествия петли хорошо замаскирован — ведь у нее вообще нет петель. Можно сказать, что головоломка

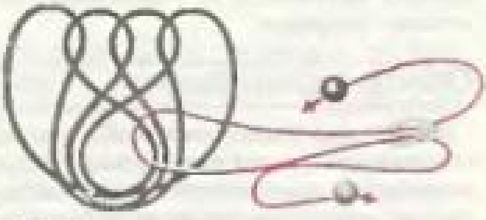


Рис. 5

2 получена из головоломки 1 методом маскировки.

Метод маскировки использован и в головоломках 3—5. В отличие от головоломок, сконструированных на принципе путешествия петли, у которых, как правило, сложность измеряется запутанностью веревки, здесь, наоборот, верев-

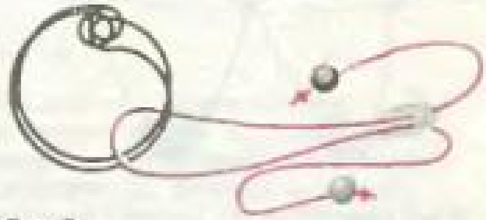


Рис. 6

ка распрямлена. Поэтому новый принцип, на основе которого построены эти головоломки, назовем принципом распрямленной веревки. Чтобы решить такую головоломку, надо сначала как бы «запутать» веревку, а потом методом путешествия петли довести решение до конца.

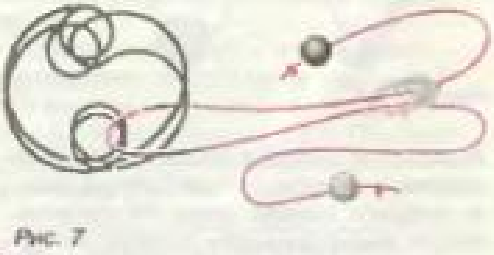


Рис. 7

Головоломка 6 также основана на принципе распрямленной веревки, но она не получается из головоломки 1 методом маскировки. Это модифицированный и упрощенный вариант головоломки 4, для получения которого применен метод модификации.

Головоломка 7 отличается от головоломки 6 наличием двух петель в нижней части проволочной фигуры. Их количество можно произвольно увеличивать. Следовательно, головоломка 7 (а также ее варианты с увеличенным количеством

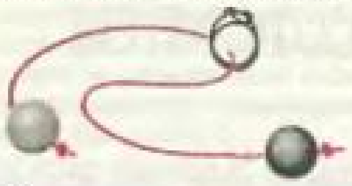


Рис. 8

петель) получается из головоломки 6 методом итерации.

Обход малой дырки

На рисунке 8 показан новый вариант головоломки 2: в ней нет малого кольца, но увеличен размер шариков так, чтобы они не проходили через внутренность проволочной фигуры. На первый взгляд, эта головоломка выглядит весьма парадоксальной — чтобы отделить веревку с шариками от проволочной фигуры, один из шариков должен вроде бы пролезть сквозь дырку меньшего размера. На самом деле шарик «обходит» эту дырку. Отсюда основной принцип этой головоломки назовем «обход малой дырки».

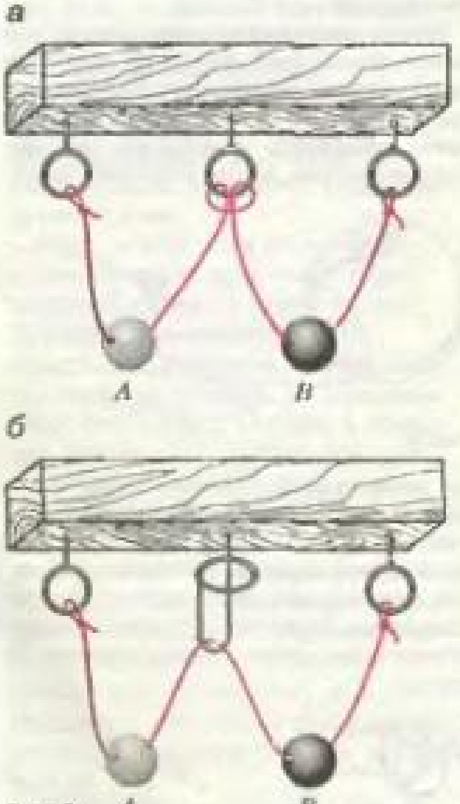


Рис. 9

Классическим примером головоломки, основанной на принципе обхода малой дырки, является древняя «африканская головоломка» (рис 9,*а*). Ее цель состоит в том, чтобы переместить шарик *А* на другую сторону центрального узла, в зону шарика *В*. На рисунке 9,*б* изображен вариант «африканской головоломки», в котором методом маскировки устранена центральная петля.

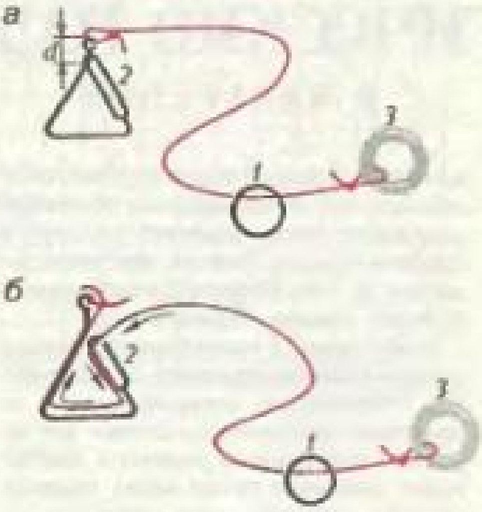


Рис. 10

Преодоление большого препятствия методом огибания

Начнем с классической головоломки, изображенной на рисунке 10,*а*. Цель ее — освободить кольцо 1. Кольцо 1 должно проходить через отверстие 2 проволочной фигуры, а диаметр его немного больше расстояния *d*, отмеченного на рисунке. Кольцо 3, внешний диаметр которого больше диаметра кольца 1, не должен проходить через отверстие 2.

Неизвестно, кто первым придумал эту прекрасную головоломку, но она поражает своей простотой и одновременно сложностью решения. Чтобы разобраться в ней, предварительно проделаем следующее эвристическое рассуждение. Допустим, что проволочная фигура слегка деформирована: из треугольника вынута петля 2 (рис.10,*б*). Тогда освободить кольцо не представляет труда: надеваем его на отверстие 2 и, обходя треугольник, выводим кольцо в том месте, где завязана веревка. Эта процедура оправдывает название основного принципа

Рис. 11

решения головоломки — «преодоление большого препятствия методом огибания». Конечно, это не настоящее решение головоломки, потому что деформация проволочной фигуры не разрешена, но проведенное топологическое рассуждение уже подсказывает путь к решению, которое оставляем читателю.

Завершает раздел головоломка 11, которая получается из головоломки 10

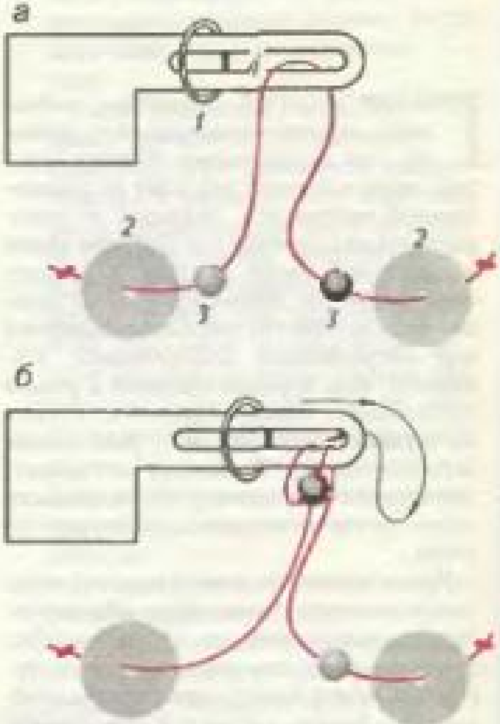


Рис. 12

методом маскировки. Цель осталась прежней — освободить кольцо 1, которое в этом случае уже не проходит через отверстие 2. Петля 3 должна пропускать сквозь себя кольцо 1, но не пропускать проволочную фигуру.

Удваивание веревки

Головоломка, основанная на принципе удваивания веревки, изображена на рисунке 12,*а*. Ее автор — Рик Квитек, учитель из Сан-Франциско. В США она известна как «головоломка дровосека». Цель — освободить кольцо 1. Его размер таков, что оно проходит через отверстие 4. Бусинки 3 проходят через внутренность кольца 1, но не проходят через отверстие 4, а диски 2 проходят через

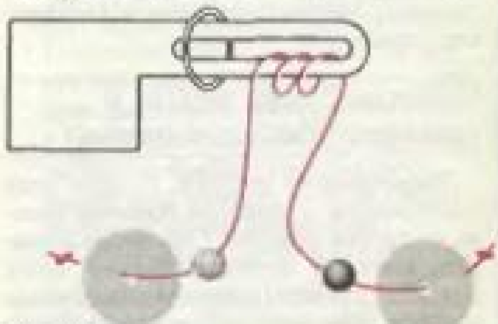


Рис. 13

отверстие 4, но не проходят через кольцо 1.

Решение показано на рисунке 12,*б*

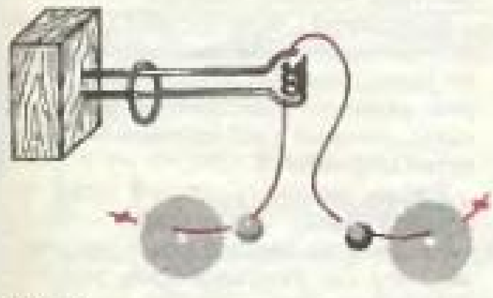


Рис. 14

Рис. 15

Вначале один из дисков пропускается в отверстие 4 — веревка сдваивается, что и оправдывает название основного принципа головоломки. Далее кольцо сдвигается сначала вниз по направлению стрелки, а затем — вверх по сдвоенной веревке и пропускается в отверстие 4. Кольцо снимается с веревки, пропуская сквозь себя бусинку.

Головоломка 13 получена из головоломки дровосека методом итерации. На рисунке 14 показано, как можно замаскировать эту итерацию. Головоломка 15 получена методом маскировки. Предлагаем читателю подумать над тем, что здесь замаскировано. Цель головоломки — освободить кольцо 2. Соотношения размеров следующие: кольцо 2 и диск 4 проходит через петлю 1; диск 4 не проходит через кольцо 2; бусина 3 проходит через кольцо 2, но не проходит через петлю 1; петля 1 не проходит через отверстие бусины; кольцо 2 проходит через отверстие кольца 5.

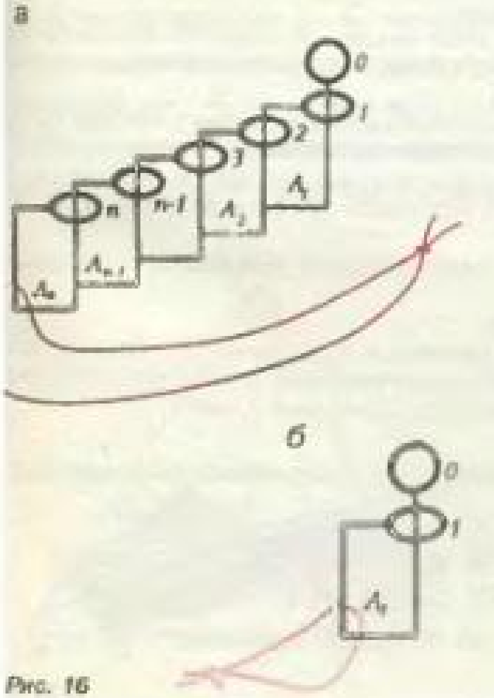


Рис. 16

Топологические меледы

Меледа — одна из самых замечательных головоломок древности. На рисунке 16,*а* изображен топологический вариант меледы, которая состоит из n (на рисунке $n = 5$) секций, изготовленных из проволоки и обозначенных $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Самая простая меледа содержит только одну секцию (рис. 16,*б*). Очевидно, меледа 16,*а* является итерацией этой простой головоломки. Цель головоломки — снять с проволочной конструкции веревочную петлю.

Проведем одно несложное топологическое рассуждение, которое подсказывает, как искать решение головоломок рассматриваемого типа. Для определенности обратимся к головоломке 16,*а* и допустим, что она сделана не из жесткой

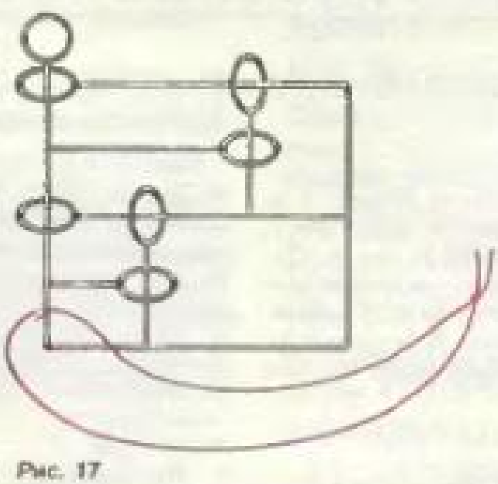


Рис. 17

проволоки, а из резины. Тогда кольцо 0 можно просунуть сквозь кольцо 1, затем кольцо 1 сквозь кольцо 2 и т.д. В конце концов получится фигура, напоминающая дерево, с крайнего «сучка» которого веревка элементарно снимается. Такого рода топологическое рассуждение подходит для всех мелед. Оно подсказывает, что решение получится, если процедуру деформации удастся заменить манипулированием веревкой. Покажем, как это можно сделать для меледы 16,*а*, а решение остальных мелед оставим читателям для самостоятельного поиска.

Рассуждение, которое будет проведено, имеет так называемый рекурсивный характер, поэтому и сама меледа — одна из типичных рекурсивных головоломок. Отметим, что слово «рекурсия» применительно к процедуре каких-либо действий (в нашем случае — решению головоломки) означает возвращение назад, к одним из тех действий, которые уже выполнялись ранее.

Если меледа имеет только одну секцию (рис. 16,*б*), то решение тривально: веревка просовывается сквозь кольцо 1, обводится вокруг кольца 0 и освобождается. Обозначим эту процедуру a_1. Требуется найти процедуру a_n для меледы с

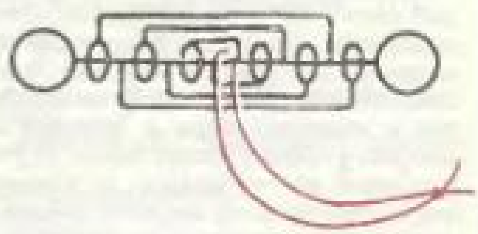


Рис. 18

n секциями. Допустим вначале, что процедура a_{n-1} уже найдена. Пусть веревка находится в секции A_n головоломки. Секция A_n устроена так же, как и секция A_1, поэтому начнем решать головоломку, как если бы имелась только одна эта секция. Просунем веревку сквозь кольцо n, стремясь обойти кольцо $n - 1$. Этому мешает секция A_{n-1}. Но, согласно только что сделанному предположению, процедура a_{n-1} решения меледы с $n - 1$ секциями известна. Воспользуемся процедурой, обратной a_{n-1}, т.е. $\bar{a}_{n-1}$, с помощью которой можно поместить веревку в секцию A_{n-1}. Однако это означает, что с помощью процедуры $\bar{a}_{n-1}$ можно сделать обход кольца $n - 1$. В результате веревка попадает в зону секции A_{n-1}. Теперь все сводится к решению меледы с $n - 1$ секциями, которая, согласно сделанному предположению, решается с помощью процедуры a_n.

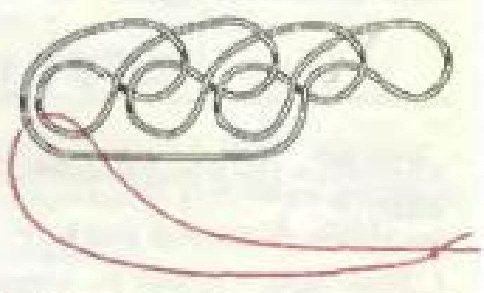


Рис. 19

Так как процедура a_1 описана явно, то проведенное рассуждение показывает, как получить процедуру a_2. Зная a_2, тем же способом находим a_3 и т.д. Подобные рекурсивные процедуры можно найти и для мелед 17 – 19.

Как придумать новую головоломку

Составить новую головоломку на основе уже известного принципа не так уж и сложно: можно изменить форму деталей, добавить новые или иначе их скомбинировать, сохраняя все их функции. В лучшем случае получатся новые версии старых головоломок. Но как создать поистине новую головоломку? В связи с этим поразмышляем, что означают слова «поистине новая»? Проследим, как человек подходит к решению новой топологической головоломки. Предположим, что он уже имеет некоторый опыт и *не начнет сразу, как новичок*, делать хаотичные бессмысленные движения деталями головоломки. В соответствии со своим опытом он приступит к изучению форм и функций ее *деталей, а также к поиску* одного из уже известных ему принципов, на котором она построена. Если аналогия найдена, то решение строится в соответствии с найденным принципом. Не исключено, однако, что все попытки открыть основной принцип остались безуспешными — головоломка упорно сопротивляется. Тогда она либо основана на некотором новом, неизвестном игроку принципе, *либо принцип* известен, но хорошо замаскирован или спрятан. Стоп! Остановимся на последней фразе: «принцип хорошо замаскирован или спрятан». Ведь это и есть метод для создания новых головоломок! Метод маскировки. При помощи метода маскировки иногда можно создавать и новые основные принципы, поэтому очень часто новый принцип — это хорошо замаскированный и измененный старый принцип.

Другой, более частный метод для создания новых головоломок — удачное сочетание нескольких принципов (не обязательно новых) и известных конструкций таким образом, чтобы получилась не простая сумма двух или более головоломок, а нечто целое, которое трудно разделить на составные части. Назовем этот метод методом композиции. Очень часто композиция используется для маскировки: например, головоломка построена на некотором основном принципе, но для его раскрытия надо проделать ряд предварительных действий, которые маскируют принцип.

В некоторых головоломках одна и та же конструкция или деталь периодически повторяется несколько раз. Примером является классическая меледа, а метод, который в ней использован — это метод итерации.

Весьма распространенный метод получения новых головоломок — метод модификации. Модификация часто проявляется как упрощение или усложнение известной конструкции.

После всего вышесказанного читателю нетрудно будет самому придумать новую головоломку.

От редакции: *Всем желающим мы* предлагаем обмениваться идеями новых головоломок. На каждую присланную в редакцию модель (или рисунок) новой головоломки автору будет в ответ послана модель (или рисунок) *незнакомой* ему оригинальной головоломки.

Чемпионат мира по головоломкам

В.ДУБРОВСКИЙ

БЕЗ риска ошибиться можно предположить, что большинство читателей «Кванта» любят решать головоломки. Вам, наверное, будет интересно узнать, что существует своего рода олимпиада, а точнее, «чемпионат мира» по решению этого популярного вида задач.

Это соревнование имеет не очень долгую историю. Пожалуй, за точку отсчета надо принять 1984 год, когда команды из нескольких восточноевропейских стран, представлявшие, в основном, специализирующиеся на кроссвордах и других головоломках издания, приехали в Польшу на первый международный «Марафон кроссвордов». Участники марафона, правила которого были заимствованы из аналогичного всепольского состязания, в течение 24 часов без остановки занимались составлением кроссвордов. Критерием для определения победителя служила длина «продукта» (в метрах). Марафон стал проводится ежегодно, к нему присоединились новые страны, но быстро выяснилось, что этот вид соревнования не вполне справедлив просто из-за различий в языках (финская, а также голландская команды заявили, что придумывать длинные кроссворды на их родных языках труднее, чем, скажем, на английском). Возможно, были и другие причины, но так или иначе в 1990 году, в Хорватии, марафон был проведен в последний раз.

Однако благодаря Виллу Шорцу, капитану американской команды (в то время — главному редактору журнала «Games»), идея международного соревнования по головоломкам была реанимирована в новом виде. В 1992 году в Нью-Йорке Шорц организовал первый Чемпионат мира по головоломкам, основным принципом которого была провозглашена языковая и культурная нейтральность. Естественно, это повлекло коренной пересмотр характера заданий: в основном это были математические и логические головоломки, а также лабиринты, механические головоломки, задание на поиск на картинке скрытого изображения и даже тест на зрительную память. (Часть задач первого чемпионата можно найти в «Кванте» №3/4 за 1993 год.)

С тех пор чемпионат стал проводится ежегодно: в 1993 году он проходил в Брно, в 1994 — в Кельне, а в прошлом году — в Брашове (Румыния). Пока наибольших успехов в этих соревнованиях добивались чехи (в 1993 и 1994 г.) и американцы (1992 и 1995).

В прошлом году, благодаря газете «Поле чудес», на чемпионат впервые приехала команда России, сформированная по результатам заочного конкурса, проводившегося этой газетой, и специального очного отбора. Активное участие в отборе и подготовке команды принял и наш журнал.

По правилам чемпионата в команду включаются четыре человека, никаких ограничений на возраст или род их занятий не накладывается. В нашей команде собрались, в основном, математики: А.Ходулев, давний автор «Кванта», О.Леонтьева (обе они в прошлом — победители международной математической олимпиады), А.Майсурадзе, студент МФТИ, и А.Крюков, инженер-системотехник, участник многих телевикторин. Команда заняла 8-е место из тринадцати (с учётом участников вне конкурса), и это трудно назвать успешным дебютом, однако упреков она не заслужила.

Дело в том, что организаторы соревнования в Брашове сознательно пошли на некий эксперимент, а точнее, сделали шаг назад, и включили в конкурс непомерно много заданий типа кроссвордов. Здесь уж нужно было не столько соображать, сколько знать, причем знать довольно далекие для нас вещи, вроде имен короля Таиланда или американского телеведущего. К тому же вписывать ответы нужно было по правилам английского правописания, а это отнюдь не очевидно: как бы вы написали, например, имя Майя (Чибурданидзе) — Maya, Maia или Maja? Аналогичные трудности испытывали и некоторые другие команды, особенно японцы, занявшие следующее за нами место.

Практически все участники Международного конгресса по головоломкам, который проходил параллельно с соревнованием, согласились, что эксперимент себя не оправдал, так что уже

	3	3	6	2	3	
	5	4	3	2	4	
	5	2	2	0	3	
	2	2	3	0	2	
	4	3	5	3	6	

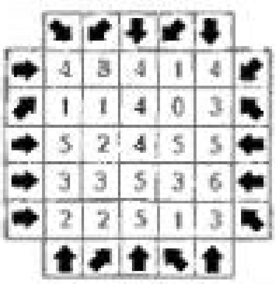
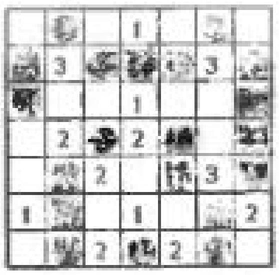


Рис. 1 *Пример*

						2
1		1	2	2		
					1	
3						
		3			1	
				1		
			2		2	



Пример

Рис. 2

на следующем чемпионате, а он пройдет в октябре в Утрехте (Голландия), все будут в равных условиях.

Как же проходило само соревнование? В общем, оно было очень похоже на обычную математическую олимпиаду. Команды «работали» два дня, каждый день проводилось по два примерно трехчасовых тура — до и после обеда. В каждом туре каждому участнику предстояло решить 16 задач. Некоторое разнообразие вносилось тем, что утренние туры были индивидуальными — каждый решал сам за себя и в командный зачет шла сумма индивидуальных результатов, а во второй половине дня команде разрешалось заранее определять, в каком порядке ее участники будут решать задачи, и на счет команды зачислялся лучший результат по каждой задаче. (Интересно, что россияне в командном зачете выступили относительно лучше, чем в индивидуальном.)

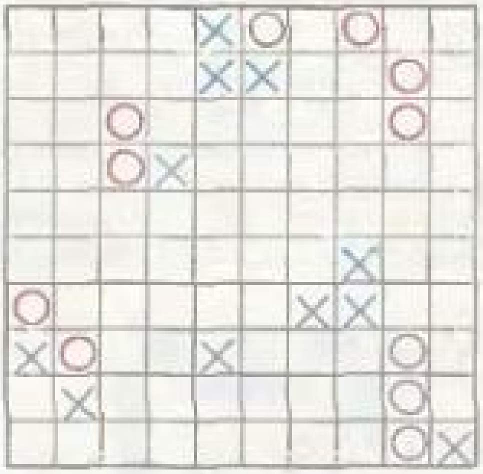


Рис. 3

Впрочем, «формат» предшествующих чемпионатов был несколько иным — пока что он определяется организаторами, а постоянный регламент еще предстоит выработать. На плечах организаторов лежит и тяжелое бремя составления всех заданий; может быть поэтому определенные накладки неизбежны. Однако с точки зрения приема участников и культурной программы (включавшей, в частности, экскурсию в замок знаменитого Дракулы, расположенный неподалеку от Брашова) чемпионат в Брашове был проведен на очень высоком уровне и его организаторы заслужили искреннюю благодарность от всех команд.

А теперь познакомьтесь с некоторыми из головоломок, предлагавшихся на четвертом чемпионате мира. Все они являются оригинальными, но, так сказать, «сварены по японским рецептам». Дело в том, что в Японии распространены логические головоломки на клетчатой бумаге, популярные там не меньше, чем у нас кроссворды. Имеется не меньше десятка различных типов этих головоломок, и каждый из них допускает практически неограниченное тиражирование. Характерной их чертой является то, что в принципе их всегда можно решить перебором вариантов — проблема лишь в ограниченном запасе времени. Однако как правило они составляются так, что с помощью логических рассуждений можно свести перебор к минимуму и даже избавиться от него вообще.

«Японские головоломки» составили около четверти заданий в Брашове — этим организаторы хотели компенсировать неизбежные языковые трудности для команды Японии (компенсация оказалась явно недостаточной). В нашей стране головоломки этого типа малоизвестны, и российскую команду выручило лишь то, что перед началом соревнований всем были розданы материалы с их типовыми образцами; в итоге результат россиян по этим задачам был практически стопроцентным.

Во всех приводимых ниже задачах надо определенным образом заполнить клетки данных на рисунках таблиц; для пояснения рядом с ними нарисованы примеры аналогичных правильно заполненных таблиц.

Расстановка стрелок (рис. 1). Нарисуйте стрелки в 20 пустых клетках на сторонах квадрата с числами таким образом, чтобы число в каждой клетке равнялось количеству указывающих на нее стрелок. Стрелки должны быть параллельны сторонам или диагоналям квадрата.

Новый морской бой (рис. 2). Расставьте внутри данного квадрата 7×7 стандартный набор кораблей для игры в «морской бой» так, чтобы каждое из данных чисел равнялось количеству клеток, занятых кораблями и примыкающих к клетке с числом по стороне. Клетки с кораблями могут касаться друг друга, но только по вершине.

От крестиков к ноликам (рис. 3). Разбейте значки в таблице на пары крестик-нолик и соедините значки каждой пары путем из двух перпендикулярных отрезков, параллельных сторонам квадрата, так, чтобы через каждую клетку прошел ровно один путь.

Географический секрет (рис. 4). Впишите в каждую пустую клетку одну из букв A, B, C, E, H, R, S, T, U так, чтобы в каждой строке, в каждом столбце и каждом из выделенных квадратов 3×3 буквы не повторялись. Найдите слово, которое возникнет в результате.

A			C		H			E
		H				S		
	C	T		R		B	H	
T			B		U			H
		C				E		
H			S		T			A
	B	U		H		A	E	
		E				T		
R			U		E			S

Рис. 4

В заключение — еще одна головоломка или, скорее, игра для одного игрока. Она предлагалась как одно из заданий на втором чемпионате (Брно, 1993 г.).

Числовая чехарда. В квадрат 6×6 на шахматной доске вписаны числа как показано на рисунке 5. Одним ходом разрешается «побить» любым числом соседнее с ним по горизонтали, вертикали или диагонали меньшее число, перепрыгнув через него на свободное поле. Цель игры — за данное число ходов набрать наибольшую возможную сумму «побитых» чисел. Для десяти ходов известно решение, дающее сумму 50. Если Вы сумеете перекрыть этот результат, пришлите нам свою последовательность

8								
7		4	1	2	6	2	5	
6		2	3	4	1	4	5	
5		1	5	3	8	3	3	
4		7	4	1	2	3	2	
3		6	1	2	4	6	1	
2		7	2	1	3	1	5	
1								
	a	b	c	d	e	f	g	h

Рис. 5

ходов. Ходы записываются в шахматной нотации с указанием набранных очков: например, на данном рисунке можно пойти 1. c3-a1(7), 2. d2-b2 (3) и т.д.

Отгадать слово

Е.ГИК

ЭТА УВЛЕКАТЕЛЬНАЯ игра, появившаяся в 70-е годы, богаче и глубже большинства словесных игр. Для успеха в ней важна не только эрудиция играющих, но и умение логически мыслить. Можно сказать, что игра *отгадать слово* представляет собой некоторую смесь словесной игры с логической.

Играют двое. Один игрок задумывает слово из пяти разных букв, а другой должен его отгадать. С этой целью он называет одно за другим разные слова, состоящие из любого числа букв, не обязательно разных, на каждое из которых партнер даст ответ. А именно – он сообщает число вхождений букв задуманного слова в названное, при этом каждая буква задуманного учитывается в ответе столько раз, сколько содержится в названном.[1]

Приведем пример. Пусть наш партнер задумал слово ***колба***, а мы назвали слово ***оборона***. Тогда он должен ответить числом 5. В самом деле, буквы ***к*** и ***л*** не входят в названное слово, буква ***о*** входит 3 раза, буквы ***а*** и ***б*** – по 1 разу. Итого: 0 + 3 + 0 + 1 + 1 = 5.

Называя слово и получая ответ, мы всякий раз делаем определенные выводы относительно задуманного слова. Так, ответ 5 на слово ***оборона*** означает, что в задуманном слове есть ***о*** (иначе наибольший ответ равен 4), а также две буквы из четырех ***б, р, н, а***. Ответ 0 означал бы, что в слове нет ни одной из пяти букв названного; ответ 1 или 2 – что содержится только одна или две буквы из четверки и нет ***о***; ответ 3 – что есть ***о***, но нет букв этой четверки, или, наоборот, есть три буквы из этих четырех, но нет ***о***; наконец, при ответе 4 делаем вывод, что в задуманном слове есть ***о***, а также одна из четырех букв

[1] *Эта игра сходна с числовой игрой «быки и коровы», где нужно отгадывать задуманное число, называя различные комбинации цифр.*

Иллюстрация М.М.Константиновой

б, р, н, а, или все эти четыре буквы вместе, но тогда отсутствует *о*.

Извлекая на каждом ходу некую информацию о слове партнера, мы делаем ход за ходом, пока не получим ответ: «отгадал».

Естественно, слова задумывают оба игрока, а побеждает тот, кто отгадывает слово противника за меньшее число ходов. Как обычно, и задуманное слово, и ходы должны быть существительными нарицательными, в единственном числе. Делать ходы не обязательно по очереди, важно лишь общее число слов. При большом количестве партий в каждой из них можно учитывать не только, кто раньше отгадал слово, но и на сколько ходов быстрее.

Разберем несколько партий. Будем всюду исходить из того, что слово задумывает партнер, а нам надо его отгадать. Рядом со словами указаны ответы противника на них.

Партия 1

1. ***перевал*** 2

В начале игры имеет смысл ходить словами, в которых много гласных — их в русском языке меньше, чем согласных, и значит, есть шансы быстрее отгадать. Для определения одной конкретной буквы лучше воспользоваться словом с большим числом ее вхождений. Например, на слово ***обороноспособность*** ответ, меньший 7, означает, что буква *о* отсутствует, а ответ 7 или больше — что она почти наверняка есть. Конечно, вопрос о букве *о* решает и ход ***око*** (или ***боб***), но он дает нам меньше информации о других буквах.

В данной партии первый ход позволил сделать следующий вывод: либо в задуманном слове есть буква *е* и нет букв *п, р, в, а, л*, либо есть две буквы из этой пятерки, но нет *е*. Цель второго хода — разобраться в ситуации.

2. ***свалка*** 0

Ответ 0 всегда радует, так как дает возможность выбросить из рассмотрения сразу несколько букв. В данном случае мы видим, что в задуманном слове нет букв *в, а, л* (и, очевидно, *с* и *к*), значит, с учетом первого хода, оно содержит либо *е*, либо одновременно *п* и *р*.

3. ***поп*** 0

Итак, второй вариант отпадает, буквы *п*, а значит, и *р*, нет, а есть *е*.

4. ***факультатив*** 4

Так как мы уже знаем, что букв *а, к, л, в* нет, последний ответ означает, что по сути нам надо проанализировать следующую ситуацию с фиктивным словом:

фуьтти 4

Пусть в задуманном слове нет *т*, тогда оно содержит все оставшиеся буквы, т.е. *ф, у, ь, и*. Поскольку *е* уже найдена раньше, искомое слово должно состоять из букв *ф, у, ь, и, е*. Но собрать из них какое-нибудь слово невозможно (это уже не логический, а чисто словесный анализ). Таким образом, в задуманном слове обязательно присутствует *т* и, кроме того, есть *е* и две буквы из четырех: *ф, у, ь, и*.

Очередными ходами мы могли бы найти две эти буквы и недостающую пятую. Но попробуем получить больше информации, не делая ходов (самое тонкое место партии!). Две буквы из четырех можно выбрать шестью способами. Добавляя к каждой паре буквы *е* и *т*, получаем шесть возможных комбинаций: 1) *ф, у, е, т*; 2) *ф, ь, е, т*; 3) *ф, и, е, т*; 4) *у, ь, е, т*; 5) *у, и, е, т*; 6) *ь, и, е, т*.

Внимательный анализ показывает, что последние три из них при любом возможном добавлении пятой буквы не могут образовать слова [2]. Что же касается трех первых комбинаций, то добавляя к первой *б* или *э*, ко второй *н* или к третьей *ш*, получаем четыре возможных слова: ***буфет*** или ***фуэте***, ***нефть*** и ***фетиш***. Конечно, анализ потребовал большого перебора вариантов, но зато мы не сделали ни одного лишнего хода!

Итак, осталось выяснить, какая из четырех букв – *б, э, н, ш* – входит в задуманное слово. Хотелось бы справиться с этой задачей в один ход. Для этого надо подобрать слово, в котором одна из этих букв не содержится вовсе, а три другие содержатся, но в разном количестве. К сожалению, буквы, которые должны входить в это слово, встречаются вместе нечасто, а в нужных пропорциях, по-видимому, не встречаются вовсе. Так что одним ходом не обойтись.

5. ***банан*** 1

Нам повезло! Ответ показывает, что в слове есть *б*, и следующий ход завершает игру.

6. ***буфет*** *отгадал*

При ответе на пятом ходу 0 нельзя было бы выбрать, какая из двух букв, *э* или *ш*, входит в задуманное слово, и потребовался бы еще один ход.

Замечание. В ситуации, сложившейся на 4-м ходу, могло бы помочь такое наблюдение: в искомом слове *ш* может встречаться только в компании *е и* (в других вариантах нет ни той, ни другой буквы), а *н* – только в сочетании с *ь*. Учитывая это, удалось сконструировать слово, которого, к сожалению, нет ни в одном словаре, хотя смысл его совершенно прозрачен: ***бесшинность.*** В нем есть *е*, которая встречается во всех словах-кандидатах, но вовсе нет *э*, всего одна *б*, *ш* вместе с *и* и два *н* вместе с *ь*. Ответ 1 в этом случае будет означать, что нужная нам буква – *э* (***фуэте***), 2 — что это *б* (***буфет***), 3 – *ш* и *и* (***фетиш***), 4 – *н* и *ь* (***нефть***).

Партия 2

1. ***карел*** 3
2. ***креол*** 2

Поскольку четыре буквы у этих двух слов общие, а ответы разные, делаем вывод, что буква *а* в задуманном слове есть, а буквы *о* нет. Кроме того, из ответа на второй ход следует, что из четырех букв *к, р, е, л* в нем есть две. Шесть возможных вариантов запишем следующим образом:

1) *а, к, р (е, л, о)*;
2) *а, к, е (р, л, о)*;
3) *а, к, л (р, е, о)*;
4) *а, р, е (к, л, о)*; (1)
5) *а, р, л (к, е, о)*;
6) *а, е, л (к, р, о)*.

Здесь перед скобками записаны буквы, которые искомое слово может содержать, а внутри скобок буквы, которых в этом случае точно нет.

3. ***бекон*** 3

Три буквы из четырех (*о* отсутствует) можно выбрать четырьмя способами:

1) *б, е, к (о, н)*;
2) *б, е, н (к, о)*; (2)
3) *б, к, н (е, о)*;
4) *е, к, н (б, о)*.

Комбинируя шесть вариантов (1) с четырьмя вариантами (2), получаем $6 \times 4 = 24$ комбинации. Однако не все они совместны. Так, не могут сочетаться первые возможности в (1) и (2): с одной стороны буквы *е* в искомом слове нет, а с другой – есть. Анализ показывает, что из 24 вариантов совместными являются только шесть:

1) *к, а, р, б, н (е, л, о)*;
2) *к, а, е, б (р, л, о, н)*;
3) *к, а, е, н (б, р, л, о)*; (3)
4) *к, а, л, б, н (р, е, о)*;
5) *а, р, е, б, н (к, л, о)*;
6) *а, е, л, б, н (к, р, о)*.

4. ***абрис*** 1

Учитывая, что в слове есть *а*, делаем вывод, что в нем нет *б*, и значит, из шести вариантов остается только третий.

5. ***брошь*** 1

Букв *б, р, о* в слове нет, и получаем, что есть *ш* или *ь*. Итак, имеем две возможные пятерки: *к, а, е, н, ь* или *к, а, е, н, ш.* Из первой слово образо-

[2] *Мы здесь различаем* **е** *и* **ё**, *иначе варианты 4) и 6) дадут соответственно* **дутье** *и* **житье**.

вать нельзя, а из второй можно — ***кашне.*** Следующий ход завершает партию.

6. ***кашне*** *отгадал*

Понятно, что если все пять букв задуманного слова найдены, то это еще не конец игры. Ведь не исключено, что из этой пятерки можно составить несколько слов-анаграмм. Если, определив пять букв, мы натолкнулись на блок анаграмм, то понадобятся дополнительные ходы.

Партия 3

1. ***тапок*** 5
2. ***капот*** 5
3. ***покат*** 5
4. ***топка*** *отгадал*

В этом примере, который можно считать эндшпилем более длинной партии, определив пять букв задуманного слова, мы вынуждены сделать еще три хода, чтобы завершить игру: дела сложились не лучшим образом.

Может показаться, что загадывать слова-анаграммы выгодно, поскольку при отгадывании всех букв дальнейшие действия партнера придется вести наобум – от него уже ничего не зависит. Но надо учесть, что в больших блоках анаграмм содержится меньше редких букв, и сама пятерка находится быстро. Напомним, что рекордный блок пятибуквенных анаграмм содержит шесть слов: ***автор, товар, тавро, отвар, рвота, втора.*** Чтобы разобраться с ним, может понадобиться пять слов.

В игре *отгадать слово* возникают интересные и оригинальные задачи. Рассмотрим десять таких задач и заметим, что решение большинства из них нам неизвестно.

По правилам игры ходы представляют собой слова русского языка. А что изменится, если снять это ограничение и разрешить ходить «абстрактными словами», т.е. любым набором букв? Удивительно, но при таком условии игра сильно упрощается...

Задача 1. *За сколько ходов можно угадать слово (или пять букв анаграммы), если разрешается ходить абстрактными словами?*

Эта задача носит скорее математический характер, ответ на нее довольно неожиданный – какое бы слово ни было задумано, для его разгадки требуется всего один ход! Он может быть таким:

$$\underbrace{а}_{1\ раз}\ \underbrace{б\ldots\ldots б}_{10^1\ раз}\underbrace{в\ldots\ldots в}_{10^2\ раз}\ldots\ldots\underbrace{я\ldots\ldots я}_{10^{32}\ раз}$$

Данное «слово» содержит все 33 буквы алфавита, причем ***а*** – 1 раз (10^0), ***б*** – 10^1 раз и т.д., ... ***я*** – 10^{32} раз. Ответ позволяет сразу определить пятерку букв задуманного слова. Действительно, если в нем есть ***а***, то последней цифрой ответа будет 1, а если ***а*** нет, то на конце стоит 0. Если слово содержит ***б***, то на втором месте справа в ответе стоит 1, в противном случае 0, и т.д. Очевидно, число-ответ состоит из многих нулей (28, если в слове есть буква Я) и ровно пяти единиц, которые и определяют однозначно пять нужных букв.

Приведем пример. Пусть в ответ на наше абстрактное слово получено число 100 101 011. Это значит, что в задуманном слове имеются буквы: ***а*** (1 на правом конце), ***б***(1 на втором месте справа), ***г*** (1 на четвертом месте справа), ***е***(1 на шестом месте справа) и ***з*** (1 на девятом месте справа). Итак, задумано слово ***забег.***

Конечно, наше волшебное слово имеет астрономическую длину, но в данном случае важно лишь само существование такого универсального хода.

Часто в процессе игры возникает необходимость выяснить, содержится ли в задуманном соперником слове та или иная конкретная буква. В связи с этим любопытна следующая задача.

Задача 2. *Для каких букв алфавита можно определить за один ход, содержится ли она в задуманном слове или нет?*

Предполагается, что никакой информацией мы пока не располагаем. Тем не менее почти две трети алфавита – 20 букв из 33 – требуют всего одного хода (см. таблицу). Идея проста – подозреваемая буква должна выделяться числом своих вхождений в названное слово. Проще всего взять слово, состоящее из двух букв – одна содержится два раза, а другая – один. По любому ответу мы сразу определяем, есть ли две эти буквы в слове (или одна из них) или нет. Пусть сделан первый ход ***дед***. Если ответ 0, то в искомом слове нет ни ***д***, ни ***е***. Если ответ 2, то есть ***д***, а ***е*** отсутствует. Наконец, если ответ 3, то в слове есть обе буквы ***д*** и ***е.***

Трехбуквенными словами такого типа можно определить 10 букв. А еще для десяти используются слова большей длины. Девять из них устроены так: они содержат подозреваемую букву и две пары других букв. В результате нечетный ответ (1, 3 или 5) свидетельствует о наличии этой буквы, а четный (0, 2 или 4) – об отсутствии. Для отгадывания буквы ***в*** тот же прием потребовал семибуквенного слова (с тремя парами посторонних букв). Можно использовать и более короткое, пятибуквенное слово ***атака***. Здесь ответ

А	РОТАТОР
Б	БОБ
В	ДОВОД
Г	НАГАН
Д	ДЕД
Е	ДЕД
Ё	ЕЛКА, ЛАК
Ж	ЖАР, АР
З	КАЗАК
И	МИМ
Й	РАЙ, АР
К	ОКО
Л	ШАЛАШ
М	МИМ
Н	КОКОН
О	ОКО
П	ПОП
Р	ТРАТА
С	КОКОС
Т	ПОТОП
У	ПУП
Ф	ТОРФ, ТОР
Х	ДОХОД
Ц	ЦЕЛЬ, ЕЛЬ
Ч	ЧЕСТЬ, СЕТЬ
Ш	ШИШ
Щ	ЩЕЛЬ, ЕЛЬ
Ъ	ВЪЕЗД, ЗЕВ, ДЕД
Ы	ДЫРА, ДАР
Ь	КОНЬ, КОН
Э	ЭРА, АР
Ю	ЮБКА, БАК
Я	ЯБЕДА, БЕДА

3 или больше говорит о том, что буква ***а*** в слове есть, а меньший ответ – что нет.

Конечно, пятибуквенное слово, служащее для разгадки одной из букв, может не помочь для других букв. Так, если ответом на ход ***довод*** служит число 2, то мы знаем, что в задуманном слове нет буквы ***в***, а есть ***д*** или ***о***, но какая именно – неизвестно. Другое дело, если пятибуквенное слово содержит только две буквы (одну 2 раза, другую – 3), но такого слова нам найти не удалось.

Даже если все буквы имеют разное число вхождений, слово может быть непригодно для их определения. Так, слово ***баобаб*** содержит три буквы в разном количестве, но при неудачном ответе мы не определим точно, какая из букв содержится в задуманном слове. Действительно, ответ 0 говорит, что нет букв ***а, б, о,*** ответ 1 – что есть ***о***, но нет ***а*** и ***б***, однако ответ 3 не вносит ясности – из него следует, что либо в слове есть ***б*** и нет ***а*** и ***о***, либо, наоборот, нет ***б***, но есть ***а*** и ***о***.

Задача 3. *За какое наименьшее число ходов можно определить, содержится ли данная буква в задуманном слове?*

Оказывается, любую букву (исключая ***ъ***) можно «вычислить» не более чем за два хода. Как мы видели, двадцать букв находятся за один ход. Для отгадывания еще 12 букв можно брать пару слов: одно из них состоит из букв второго плюс искомая буква (см. таблицу). Одинаковые ответы на эти слова скажут, что в задуманном слове данной буквы нет, а разные – что есть. Например, один и тот же ответ на ходы ***рай*** и ***ар*** (0, 1 или 2) означает, что буква ***й*** отсутствует, а разные (ответы могут отличаться только на 1) – что присутствует.

Для ***ъ*** удалось найти только трехходовое решение. Интересно, что если буквы ***е*** и ***ё*** не различать, то и для ***ъ*** достаточно пары из двух слов – ***мопед***, ***подъем***.

Каждый читатель может составить свою собственную таблицу для отгадывания букв в слове противника. На практике, конечно, редко "гонятся" за одной буквой, а делая ход, пытаются извлечь больше информации о задуманном слове.

В следующем примере определить задуманное слово совсем легко.

1. ***парапет*** 7

Полученный ответ сразу дает нам пять букв: ***а, п, р, е, т*** и, стало быть, слово ***патер.*** Теперь можно сформулировать еще одну задачу.

Задача 4. *Придумайте как можно более длинное слово, сыграв которым на первом ходу, мы сразу же определим (при удачном ответе) задуманное.*

Поскольку семибуквенное слово мы уже знаем, надо вести поиски более длинных слов.

Задача 5. *Придумайте как можно более короткое слово, сыграв которым на первом ходу, мы сразу определим (при удачном ответе) задуманное.*

Эта задача как бы противоположна предыдущей и напоминает ситуацию в «балде». В самом деле, уже на первом ходу, сыграв коротким словом, мы должны отгадать несколько букв – задуманного противником, чтобы затем однозначно дополнить их до самого слова.

Задачи 4 и 5 связаны с отгадыванием слова за один ход. Предположим теперь, что первым ходом мы отгадали четыре его буквы. Например, такое начало:

1. ***атлет*** 5

Ответ показывает, что в задуманном слове есть буквы ***а, т, л, е.*** Осталось определить пятую букву. Разумеется, не стоит использовать для этой цели нашу таблицу. Анализ показывает, что из 29 оставшихся букв алфавита вместе с четырьмя найденными слово могут образовать целых десять: ***б (балет), в (валет,*** анаграмма ***ветла), м (метла), н (лента), п (лепта), р (талер), у (алеут), ф (лафет), г (легат), с (стела).*** Возникает такая задача.

Задача 6. *Придумайте такой первый ход (с соответствующим ответом), после которого четыре буквы задуманного слова определяются сразу, а для пятой остается как можно больше возможностей (может быть, десять букв – это рекорд?).*

В последнем примере после первого хода не удается сразу установить, какая из десяти букв искомая. Получаем еще одну задачу.

Задача 7. *Какое наибольшее число букв можно расшифровать одним ходом, т.е. определить, какая из них входит в задуманное слово?*

Достаточно найти такое слово, в которое бы одна из подозреваемых букв не входила совсем, вторая входила 1 раз, третья – 2, четвертая – 3 и т.д. Очевидно, мы считаем, что четыре буквы нам уже известны. Пусть, например, надо установить, какая из четырех букв ***у, е, н, о*** входит в задуманное слово. Задачу решает слово ***озеленение,*** в которое ***у*** не входит, ***о*** входит 1 раз, ***н*** – 2 раза, ***е*** – 4 раза. Получив ответ, мы немедленно определяем недостающую пятую букву (зная, конечно, информацию о вхождении в задуманное слово букв ***з, л, и***).

Буквы ***у, о, н, е*** в последнем примере выбраны не случайно. Пусть нами сделан такой первый ход:

1. ***кабала*** 6

Тогда слово противника содержит все четыре буквы данного – ***к, а, б, л.*** Какая же буква пятая? Анализ показывает, что найденные буквы можно дополнить до слова пятью способами: ***булка, колба*** (или ***бокал***), ***белка, бланк, балык***. Итак, остается выяснить, какая из букв ***у, о, н, е, ы*** пятая в искомом слове, и мы приходим к рассмотренному примеру.

Если на второй ход ***озеленение*** следует ответ 1, то искомой буквой будет ***у*** или ***ы*** (так как есть вхождение ***л***, то букв ***о, н, е*** в слове нет), задумано слово ***булка*** или ***балык***. Следующим ходом игра завершается.

При ответе 2 получаем букву ***о***, а следующим ходом разбираемся с анаграммами (***колба*** или ***бокал***). При ответе 3 имеем букву ***н*** и слово ***бланк***, наконец при ответе 5 – букву ***е*** и слово ***белка***.

В задаче 6 мы имели 10 возможных пятых букв, и их, по-видимому, можно однозначно распознать не менее чем за три хода. В последнем случае у нас пять возможных пятых букв, но уже после следующего хода картина почти полностью проясняется – либо это одна из букв ***о, н, е,*** либо одна из букв ***у, ы.*** Возникает следующая задача.

Задача 8. *Придумайте партию, в которой на первом ходу отгадываются четыре буквы, для пятой остается как можно больше возможностей, но все они расшифровываются на втором ходу (в задаче 6 это было не обязательно).*

В отличие от предыдущей задачи здесь требуется не просто распознать как можно больше букв за один ход, а сделать это так, чтобы соответствующий набор возник как бы в процессе игры, после первого хода.

Предположим теперь, что мы догадались, какое слово задумал противник, назовем его словом-гипотезой. Будем считать, что самим этим словом ходить нельзя. Тогда получаем еще одну задачу.

Задача 9. *Для $p = 2, 3...$ придумать такое слово-гипотезу (играть им запрещено), что убедиться в ее правильности нельзя быстрее чем за p ходов.*

Для $p = 2, 3, 4, 5, 6$ задача решается легко. В качестве слова-гипотезы достаточно взять любого представителя блока анаграмм, содержащего $(p + 1)$ слово. Так, слово ***автор***, как мы знаем, с гарантией определяется только после пяти ходов. А при меньшем числе ходов гипотеза еще не будет подтверждена. Для больших значений p блоки из $(p + 1)$-й анаграммы неизвестны.

Можно придумать и другие остроумные задачи для игры *отгадать слово*. Многие из них вряд ли удастся решить без серьезного привлечения компьютера к тем или иным словарям русского языка. Во всяком случае, про последнюю задачу, связанную со стратегией игры, это можно сказать с определенностью.

Задача 10. *Какое наименьшее число слов достаточно назвать, чтобы наверняка отгадать задуманное слово противника?*

Опыт игры показывает, что при тонких и внимательных действиях слово удается определить за 5 – 7 ходов, но доказать это мы не беремся.