Журнал «Квант» о кубике Рубика

В. Залгаллер,
С. Залгаллер

Венгерский шарнирный кубик

В Венгерской Народной Республике распространена занятная математическая головоломка, созданная в 1975 г. венгерским архитектором, профессором Эрнё Рубиком. Ее внешний вид показан на четвертой странице обложки: это пластмассовый куб, разбитый на 27 конгруэнтных кубиков. Внутренний кубик удален, а 26 наружных кубиков с помощью специальных выступов сцеплены так, что любая плитка из 9 кубиков, прилегающих к одной грани куба, может быть повернута в любую сторону на 90°. (Начало двух таких поворотов изображено на рисунке 1.) После поворота на 90° вся система сохраняет прежнюю свободу вращений: снова любую плитку в любую сторону можно повернуть в ее плоскости на 90°.

Об устройстве шарнирного скрепления этих кубиков можно написать отдельную статью — сейчас же мы будем обсуждать другой вопрос.

Первоначально каждая из граней большого куба была окрашена в свой цвет (красный, оранжевый, желтый, зеленый, синий, белый). После ряда случайно выбранных вращений окраска граней куба становится пестрой: на грани присутствуют клетки разных цветов. Головоломка состоит в том, чтобы, получив в руки такой пестрый куб, добиться с помощью вращений *правильной* расстановки кубиков, то есть такой расстановки, при которой каждая грань куба снова будет одного цвета.

Задача эта совсем не проста. Не вооруженному теорией человеку, даже способному, редко удается сразу собрать более одной грани. Число расстановок кубиков, которые можно получить (подсчитано, что их $N = 43\,252\,003\,274\,489\,856\,000$), делает ее недоступной для перебора даже на ЭВМ. Заметим, впрочем, что не любая расстановка может быть получена вращениями плиток куба: если разрешить разборку куба на составляющие его 26 кубиков, то можно составить $12 \cdot N = 529\,024\,039\,393\,878\,272\,000$ разных расстановок (см. задачу 8 из Добавления).

В настоящей заметке мы предлагаем читателю правила (они не являются самыми экономными по числу вращений), позволяющие от любой из N возможных расстановок кубиков вернуться к их правильной расстановке.

Описание вращений

Чтобы изложить предлагаемые правила, условимся сначала о терминологии.

Будем называть *центральными* кубики, стоящие в центрах граней куба. Каждый центральный кубик всегда (при любых вращениях) остается центральным и смотрит наружу одной клетки определенного цвета.

Поскольку нас интересуют не изменения положения всего куба в пространстве, а лишь изменения взаимного расположения его частей, мы будем считать его положение в пространстве фиксированным. Это озна-

Рис. 1.

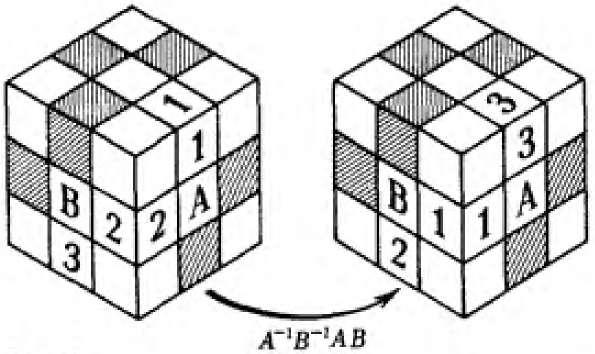


Рис. 2.

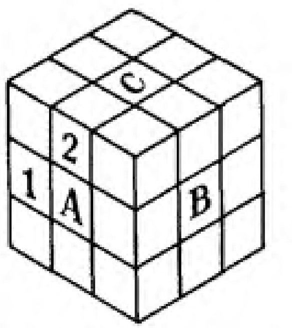


Рис. 3.

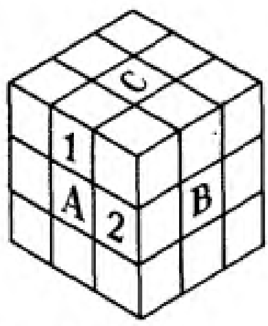


Рис. 4.

чает, что положение всех центральных кубиков в пространстве остается неизменным. Это означает также, что из девяти плоскостей куба мы будем поворачивать только шесть.

Если на рисунке некоторая центральная клетка отмечена буквой A, то поворот (не «средней») плитки, содержащей эту клетку, на 90° по часовой стрелке мы будем обозначать через A, а поворот этой же плитки на 90° против часовой стрелки будем обозначать через A^{-1}. Очевидно, $A^{-1}A^{-1}A^{-1}=A$ и $A^2=A^{-2}$, где $A^2=A\ A$ и $A^{-2}=A^{-1}\ A^{-1}$.

Кубики, содержащие среднюю часть ребра большого куба, будем называть *средними*. Средний кубик всегда остается средним и смотрит наружу двумя клетками определенного цвета. Для каждой пары цветов (кроме тех пар цветов, которыми первоначально были раскрашены противоположные грани куба) имеется единственный средний кубик с клетками этих цветов.

Угловыми назовем кубики, занимающие в составе куба угловые места. Каждый угловой кубик всегда остается угловым и смотрит наружу тремя клетками, окрашенными в разные цвета. Сочетание этих трех цветов у каждого из угловых кубиков свое.

Основные этапы

Заманчивый, на первый взгляд, путь: постепенно увеличивая пятно одноцветных клеток, получить одноцветную грань, а потом взяться за другую — видимо, приводит лишь к непреодолимым трудностям. Не справившись с головоломкой, ее нередко портят — от злости или из любопытства к устройству шарнира. Мы надеемся, что предлагаемый ниже способ решения сделает головоломку доступной, но и он требует определенных усилий при реализации.

Предлагаемые действия разобьем на четыре больших этапа, Мы уже договорились, что в ходе решения головоломки центральные кубики не меняют своего положения в пространстве. Что касается средних кубиков, то каждый из них должен в процессе решения занять вполне определенное место: оказаться на ребре между двумя «своими» гранями куба, то есть теми гранями, чьи центральные клетки такого же цвета, как две клетки данного среднего кубика. Кроме того, он должен быть правильно повернут: его цветные клетки должны прилегать к центральным клеткам того же цвета. Совершенно аналогично обстоит дело с угловыми кубиками: у каждого из них есть свое место (на стыке трех граней с центральными клетками его цветов) и единственный правильный разворот. В соответствии с этим порядок наших действий будет следующим:

Этап 1: *поставить на нужные места все средние кубики.*

Этап 2: *правильно повернуть на своих местах все средние кубики.*

Этап 3: *поставить на нужные места все угловые кубики.*

Этап 4: *правильно повернуть все угловые кубики.*

Каждый из этапов мы будем выполнять только после того, как предыдущий этап полностью закончен. При этом очередной этап будем выполнять так, чтобы после его завершения оказались не нарушенными достижения предшествующих этапов.

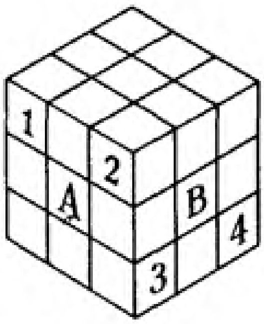


Рис. 5.

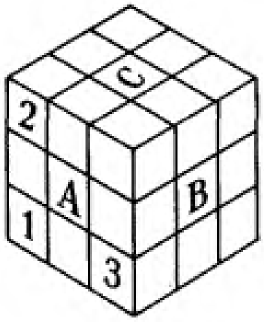


Рис. 6.

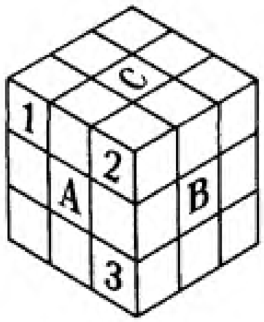


Рис. 7.

После выполнения второго этапа на каждой из граней куба образуется крест из пяти клеток одного цвета. После выполнения четвертого этапа задача окажется решенной — каждая грань куба станет одноцветной.

Невозможные положения

Достаточность предлагаемых ниже «комбинаций» для выполнения перечисленных этапов опирается на три свойства рассматриваемого шарнирного куба. В рамках этой статьи мы будем считать эти свойства экспериментальными фактами. Их можно, однако, доказать, решив задачи, придуманные В. Дубровским (см. Приложение).

Если кубики выведены из правильного положения только допустимыми вращениями (а не разборкой и новой сборкой всего устройства или перекраской граней), то не может возникнуть положение, при котором:

I. *все средние кубики стоят на своих местах и только один из них повернут неправильно;*

II. *все средние кубики и стоят, и повернуты правильно, а все угловые кубики, кроме двух, стоят (в любых положениях) на своих местах;*

III. *все средние кубики и стоят, и повернуты правильно, а все угловые кубики стоят на своих местах и только один из них повернут неправильно.*

Предварительные комбинации

Чтобы привыкнуть к тому, как записываются повороты, мы сначала рассмотрим несколько важных для дальнейшего стандартных комбинаций.

Первая комбинация $A^{-1}BA$ (в отличие от школьного учебника, это будет означать, что сначала совершается поворот A^{-1}, затем B, затем A) называется *сопряжением* элемента B с помощью элемента A. На рисунке 2 показано, как эта комбинация позволила собрать белую грань целиком, поставив белую клетку 1 на место желтой 2.

Вторая комбинация $A^{-1}B^{-1}AB$ называется *коммутатором* элементов A, B. Проверьте, что в положении куба, изображенном на рисунке 2, серые клетки остаются на месте, а средние кубики 1, 2, 3 *циклически переставляются*, то есть переходят по схеме $1 \to 3 \to 2 \to 1$. Проследите еще, как переставляют средние кубики комбинации $ABA^{-1}B^{-1}$, $AB^{-1}A^{-1}B$, $A^2B^2A^2B^2$, $A^2BA^2B^{-1}$, $A^2B^{-1}A^2B$, $AB^2A^{-1}B^2$, $A^{-1}B^2AB^2$ — коммутаторы других поворотов (каких?).

Этап 1: средние кубики — на место

Комбинация из семи поворотов

$$K_1 = A^{-1}C^{-1}B^{-1}A^{-1}BAC$$

взаимно переставляет местами средние кубики 1, 2 (рис. 3) и сохраняет местоположение остальных средних кубиков (проверьте!*).

Комбинация K_1 фактически позволяет менять местами любые два средних кубика. Если они не прилегали к одной грани куба или не были на ней соседними, то всегда можно вспомогательными поворотами (запомнив эти повороты по цвету центра поворачиваемой плитки) привести желаемые кубики в положение 1, 2 (рис. 3), переставить их комбинацией K_1, а затем, в обратной очередности и обратных направлениях повторить сделанные вспомогательные повороты.

---

*) Если у вас нет экземпляра игрушки, советуем нарисовать развертку куба (чернилами на хорошем листе бумаги) и, пользуясь карандашом и ластиком, следить за передвижением клеток на развертке.

Очевидно, попарные перестановки средних кубиков позволяют осуществить этап 1: поставить на свои места все средние кубики.

Этап 2: повернем средние кубики

Комбинация из двенадцати поворотов

$$K_2=(AB^{-1}A^{-1}B)(BC^{-1}B^{-1}C)(CA^{-1}C^{-1}A)$$

одновременно поворачивает в своих гнездах кубики 1, 2 (рис. 4) и не меняет ни местоположений, ни поворотов остальных средних кубиков (проверьте!).

Комбинация K_2 позволяет повернуть на своих местах любые два средних кубика. Действительно, если они не прилегали к одной грани куба или не были на ней соседними, то всегда можно вспомогательными поворотами (запомнив эти повороты по цвету центра поворачиваемой плитки) привести желаемые два кубика в положение 1, 2 (рис. 4), повернуть их комбинацией K_2, а затем, в обратной очередности и в обратных направлениях повторить вспомогательные повороты.

Попарные совместные повороты средних кубиков позволяют осуществить этап 2, поскольку (ввиду свойства I) не может случиться, чтобы требовал поворота только один средний кубик.

Этап 3: угловые кубики — на место

Комбинация из двенадцати поворотов

$$K_3=(ABA^{-1}B^{-1})^3$$

осуществляет одновременно перестановки кубиков 1, 2 и кубиков 3, 4 (рис. 5), сохраняет все достижения этапов 1, 2 и не изменяет местоположения угловых кубиков, отличных от 1, 2, 3, 4 (проверьте!)

Комбинация из двадцати четырех поворотов

$$K_4=(ACA^{-1}C^{-1})^3(B^{-1}A^{-1}BA)^3$$

осуществляет перестановку кубиков 1, 2, 3 (рис. 6) по схеме $1\rightarrow2\rightarrow3\rightarrow1$, сохраняет все достижения этапов 1, 2 и не изменяет местоположения угловых кубиков, отличных от 1, 2, 3.

Поясним, как, пользуясь комбинациями K_3 и K_4, осуществлять этап 3.

Допустим, что после завершения этапа 2 часть угловых кубиков не стоит на своих местах. Ввиду свойства II таких кубиков будет не менее, чем три. Выберем один из них и отметим его номером 1. Кубик, занимающий то место, куда должен встать кубик 1, отметим номером 2.

Если кубик 2 сам должен перейти на место кубика 1, то номером 3 отметим любой, отличный от первых двух и стоящий не на своем месте угловой кубик, а номером 4 — кубик, стоящий там, куда должен перейти кубик 3. Затем, с помощью вспомогательных поворотов (запоминая их) поставим кубики 1, 2 и 3, 4 в положение пар 1, 2, и 3, 4, изображенных на рисунке 5. С помощью комбинации K_3 осуществим перестановку $1\rightleftarrows2$, $3\rightleftarrows4$, после чего в обратной очередности и обратных направлениях повторим вспомогательные повороты. В итоге, кроме ранее стоявших на своих местах угловых кубиков, заведомо попадут на свои места кубики 1, 2, 3.

Если же кубик 2 не должен был перейти на место кубика 1, то отметим номером 3 кубик, стоящий там, куда должен перейти кубик 2. Если кубик 3 не должен перейти на место кубика 1, то отметим номером 4 кубик, который стоит там, куда должен перейти кубик 3. После этого, как и выше, то есть с помощью вспомогательных поворотов и комбинации K_3, осуществляем перестановку $1\rightleftarrows2$, $3\rightleftarrows4$, которая ставит на свои места кубики 1 и 3.

Остается случай, когда требуется перестановка кубиков $1\rightarrow2\rightarrow3\rightarrow1$. В этом случае, с помощью вспомогательных поворотов (запоминая их) ставим кубики 1, 2, 3 в каком-то порядке на места 1, 2, 3 (рис. 6). Одна из двух комбинаций K_4, K_4^{-1}, которые осуществляют перестановки м е с т $1\rightarrow2\rightarrow3\rightarrow1$, $1\rightarrow3\rightarrow2\rightarrow1$, будет осуществлять перестановку к у б и к о в $1\rightarrow2\rightarrow3\rightarrow1$ (находящихся сейчас на местах 1, 2, 3). Выполним именно эту комбинацию. После этого в обратной очередности и обратных направлениях повторим вспомогательные повороты. В итоге кубики 1, 2, 3 станут на место.

Повторяя указанный процесс, мы выполним этап 3 — поставим на свои места все угловые кубики.

Этап 4: повернем угловые кубики

Нам потребуются следующие две комбинации:

$$K_5=[(A^{-1}CAC^{-1})(C^{-1}BCB^{-1})(B^{-1}ABA^{-1})]^2,$$
$$K_5^{-1}=[(AB^{-1}A^{-1}B)(BC^{-1}B^{-1}B)(BA^{-1}B^{-1}A)]^2.$$

Комбинация K_5 поворачивает одновременно каждый из кубиков 1, 2, 3 (рис. 7) вокруг оси, идущей от его центра к центру куба, на 120° по часовой стрелке. Комбинации K_5^{-1} поворачивает те же кубики против часовой стрелки. Местоположение и поворот любого из остальных кубиков при этом не меняются.

Знание комбинаций K_5 и K_5^{-1} позволяет совместно повернуть в желаемом направлении (но в одну и ту же сторону) л ю б ы е три угловых кубика. Достаточно собрать их с помощью вспомогательных поворотов в одну грань, совместно повернуть с помощью комбинации K_5 или K_5^{-1} (в зависимости от нужного направления поворота), а затем вернуть на своим места поворотами, обратными вспомогательным.

Поясним теперь, как, пользуясь комбинациями K_5 и K_5^{-1}, осуществить этап 4.

Если после завершения этапа 3 имеются неправильно повернутые угловые кубики, то, ввиду свойства III, таких кубиков не менее двух.

Допустим, что их больше двух. Возьмем любые три из них. Хотя бы два из этих трех кубиков требуют поворота в одну и ту же сторону. Повернув в эту сторону все три кубика, мы уменьшим число неверно повернутых кубиков. Так мы придем к положению, когда неверно повернутых кубиков либо нет, либо ровно два.

Если неверно повернутых кубиков только два, они не могут оба требовать поворота в одну и ту же сторону. Иначе мы бы совместно повернули их и еще один кубик — появилось бы положение с одним неверно повернутым кубиком, что невозможно в силу III.

Итак, два неверно повернутых кубика требуют поворота в разные стороны. Повернем в нужную сторону один их этих кубиков и два кубика, ранее стоявших правильно. А затем — в другую сторону — эти два новых кубика и второй из ранее повернутых неправильно. В результате все кубики займут правильное положение!

Приложение*)

Обозначим через S_0 *правильное состояние* куба. Занумеруем числами $i=1, 2, \ldots, 8$ его вершины (угловые кубики) и числами $j=1, 2, \ldots, 12$ его ребра (средние кубики). На ребрах выберем (и запомним) любую ориентацию (и нарисуем соответствующие стрелки на средних кубиках) так, чтобы параллельные ребра были сонаправлены.

Предположим, что в некотором *законном состоянии***) S куба j-й средний кубик попал на ребро j'; сравним ориентацию ребра j' (которую мы запомнили) со стрелкой, нарисованной на j-м кубике. Обозначим через $n_j(S)$ величину, равную 0, если указанные ориентации совпадают, и равную 1 в противном случае. Если сумма

$$n_1(S)+n_2(S)+\ldots+n_{12}(S)$$

четна, мы полагаем $n(S)=0$, иначе $n(S)=1$; можно сказать, что $n(S)$ — это «четность суммарного поворота средних кубиков». Докажите, что

1. *Величина n является инвариантом, то есть одинакова при всех законных состояниях куба:* $n(S)=n(S_0)=0$. (Указание. Достаточно показать, что $n(S)$ не меняется при любом повороте одной плитки).

2. *В законном состоянии куба не может быть повернут ровно один средний кубик* (свойство I, с. 19). (Указание. В таком состоянии $n(S)=1$).

Вспомним, что положение центральных клеток куба в пространстве не меняется при поворотах; для определенности предположим, что нижний центральный кубик — зеленый, верхний — синий; эти два цвета будем считать *выделенными*. Возьмем i-й угловой кубик нашего куба, находящегося в состоянии S. Ровно одна клетка углового кубика выделена (почему?). Если эта клетка горизонтальна, положим (по определению) $N_i(S)=0$; если эта клетка становится горизонтальной при повороте кубика на 120° (по часовой стрелке) вокруг диагонали большого куба, положим $N_i(S)=1$; если же горизонтальность получается поворотом на 240°, то $N_i(S)=-1$. Если сумма

$$N_1(S)+N_2(S)+\ldots+N_8(S)$$

при делении на 3 дает в остатке 0, 1, 2, мы полагаем величину $N(S)$ равной $0, 1, -1$ соответственно. Можно сказать, что величина N — это «направление суммарного поворота угловых кубиков». Докажите, что

3. *Величина N является инвариантом, то есть одинакова при всех законных состояниях куба:* $N(S)=N(S_0)=0$.

4. *В законном состоянии у куба не может быть повернут неправильно ровно один угловой кубик* (свойство III, с. 19).

Предположим теперь, что в состоянии S средние кубики с номерами 1, 2, ..., 12 занимают места с номерами $j_1, j_2, \ldots, j_{12}$ соответственно, а угловые кубики 1, 2, ..., 8 — места $i_1, i_2, \ldots, i_8$. Наборы $I(S)=(i_1, i_2, \ldots, i_8)$ и $J(S)=(j_1, j_2, \ldots, j_{12})$ — это просто номера кубиков, записанные в другом порядке; математики такие наборы называют *перестановками*. Перестановку называют *четной*, если в ней имеется четное число *беспорядков*, то есть четное число пар цифр, стоящих не в порядке возрастания, и *нечетной* в противном случае. Например, перестановка (12453687) нечетна, так как она содержит 3 беспорядка: (4, 3), (5, 3), (8, 7). Обозначим через $\varepsilon(S)$ число, равное 0, если $I(S)$ и $J(S)$ имеют одинаковую четность, и равное 1 в противном случае. Можно сказать, что ε — это «четность расстановки всех кубиков». Докажите, что

5. *Величина ε является инвариантом, притом $\varepsilon(S)=\varepsilon(S_0)=0$ для любого законного состояния S.* (Указание. Покажите, что при любом повороте плитки меняется четность I и четность J).

6. *Ровно два угловых кубика не могут поменяться местами* (свойство II, с. 19).

7*. *Состояние S куба законно тогда и только тогда, когда*

$$n(S)=N(S)=\varepsilon(S)=0.$$

8*. *Все состояния (в том числе полученные разборкой и сборкой куба разбиваются на 12 классов; при этом два состояния S, S' переводятся друг в друга поворотами плит тогда и только тогда, когда $n(S)=n(S')$, $N(S)=N(S')$, $\varepsilon(S)=\varepsilon(S')$.*

---

*) Автор Приложения — В. Дубровский.

**) То есть в состоянии, полученном из правильного поворотами плиток (без перекрашивания клеток или разборки кубика).

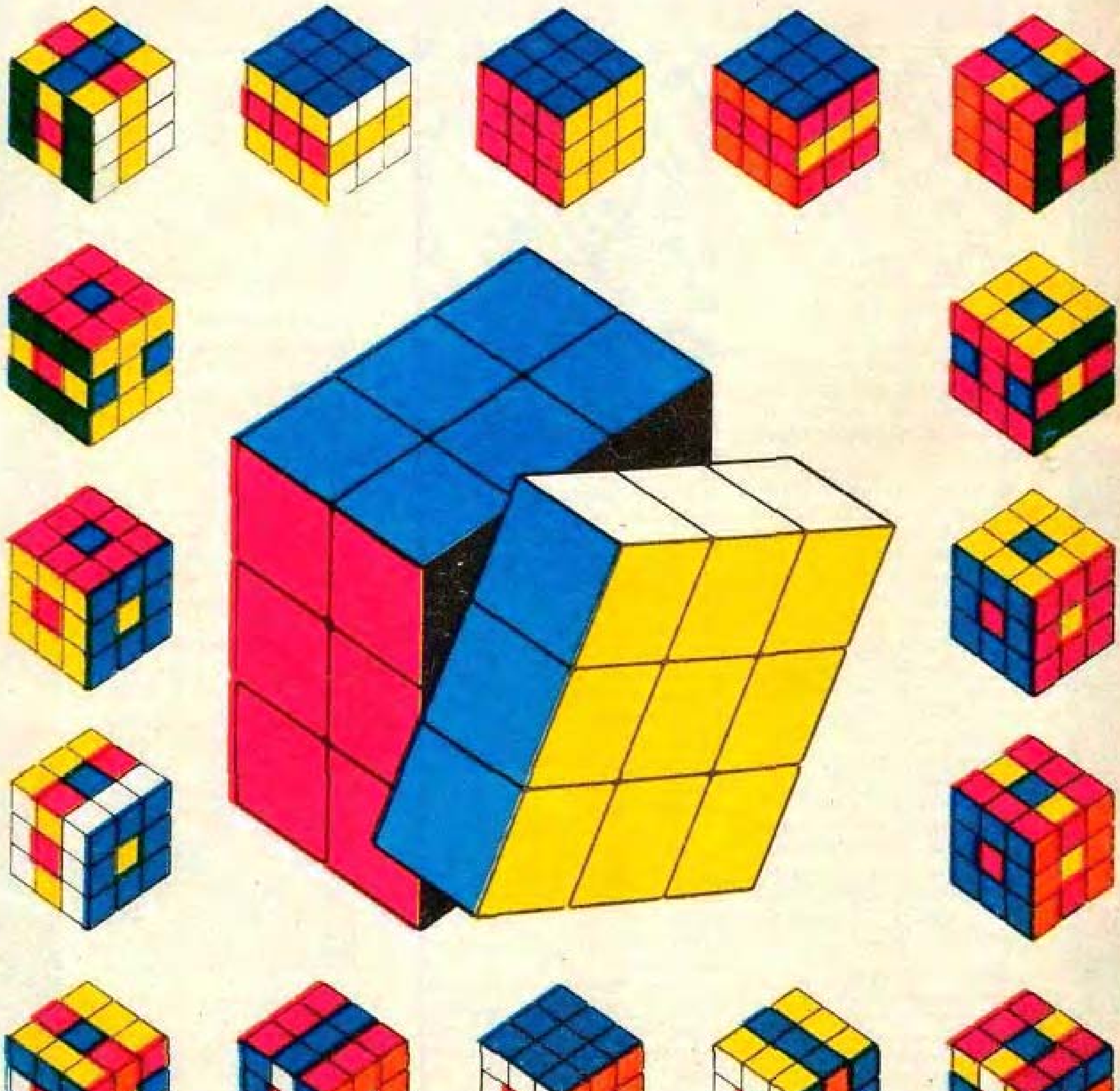
Цена 30 коп.
Индекс 70465

Наш художник изобразил здесь «жизнеописание» венгерского шарнирного кубика. Внутри этой пластмассовой математической игрушки-головоломки спрятан остроумно устроенный шарнирный механизм, позволяющий поворачивать любую «плитку» из девяти цветных кубиков. В центре крупным планом показано начало поворота (примерно на 60°) «ближней» плитки против часовой стрелки.

Окаймляют большой куб более мелкие изображения превращений куба, полученные подобными поворотами. Вверху в центре показан куб в «начальной позиции» (все грани одноцветные); справа от него изображен куб после поворота двух горизонтальных плиток (верхней и нижней); затем повернули две вертикальные плитки (какие?). Как развивались события дальше — проследите сами. Обратите внимание на симметричные раскраски, получившиеся в середине вертикальных рядов. Проследите, как при повороте двух горизонтальных плиток второго слева куба в верхнем ряду вновь возникает начальная позиция,— закончился своеобразный жизненный цикл шарнирного кубика!

О правилах игры в эту головоломку и о возникающих при этом задачах см. с. 32

В. Дубровский



Ю. Демков

Поворачиваем кубики

Нет, в этой статье не обсуждается «венгерский шарнирный кубик» (см. «Квант», 1980, № 12, с. 17) — головоломка, родившаяся в руках венгерского архитектора Эрнё Рубика и вызвавшая ажиотаж во всем мире, особенно в ВНР и США, где ее выпускают в миллионах экземпляров. К этой трудной и интересной игре «Квант» скоро вернется, а здесь речь пойдет о значительно более простой головоломке, которую каждый может смастерить за несколько минут и для которой можно построить несложную и законченную математическую теорию.

Возьмем 8 кубиков и сложим из них куб вдвое большего размера*). Раскрасим три пары противоположных граней этого куба, соответственно, в белый и желтый, красный и оранжевый, зеленый и синий цвета́. Тогда у каждого из маленьких кубиков три грани окажутся раскрашенными в разные цвета́. Возьмем теперь куб в руки и повернем на 180° слой из четырех прилегающих друг к другу кубиков относительно четырех остальных (по часовой или против часовой стрелки, не важно, — результат от этого не зависит). Очевидно, что это можно сделать тремя разными способами. Назовем эти три поворота *элементарными операциями* или *ходами*. Повторяя эти ходы в разном порядке несколько раз, мы будем получать разные распределения цветов по граням куба. Назовем каждое такое распределение цветов *состоянием* куба, причем все распределения, отличающиеся поворотом куба как целого, будем считать одним и тем же состоянием. Назовем *нулевым* то состояние, при котором каждая грань большого куба раскрашена одним цветом.

Возникают следующие вопросы. Сколько имеется различных состояний, получающихся из нулевого некоторой последовательностью ходов? Каково наименьшее число ходов, переводящих данное произвольное состояние в нулевое? Каково минимальное число ходов, переводящих два данных состояния друг в друга?

Изображение состояний и запись ходов

Чтобы ответить на эти вопросы, научимся сначала описывать состояние куба и введем специальную запись для ходов. Сперва зафиксируем положение куба в пространстве, считая, что один из маленьких кубиков остается неподвижным при всех преобразованиях, например тот, три внешние грани которого окрашены в белый, оранжевый и зеленый цвета́.

На рисунке 1 изображение куба и 12-ти обращенных к нам граней малых кубиков дополнено изображением 9-ти задних граней, как бы отраженных в круглом вогнутом зеркале. Три грани заднего малого кубика, остающиеся неподвижными, на рисунке не изображены.

Обозначим поворот передних четырех кубиков на 180° вокруг оси x буквой X, поворот четырех правых кубиков — Y и поворот четырех верхних кубиков — Z (рис. 2). При всех этих ходах задний малый кубик будет оставаться неподвижным, так что выполняя ходы X, Y, Z, мы никогда не повернем куб как целое. Состояния, которые получаются из нулевого применением операций X, Y, Z, изображены на рис. 1, где они помечены номерами *2—4*.

Композиция ходов и соотношения

Композицию (последовательное выполнение) ходов мы будем называть

*) Чтобы это осуществить на самом деле, нужно внутренние грани кубиков покрыть тонким слоем пластилина — они склеятся при сборке, а потом легко будут расцепляться и сцепляться

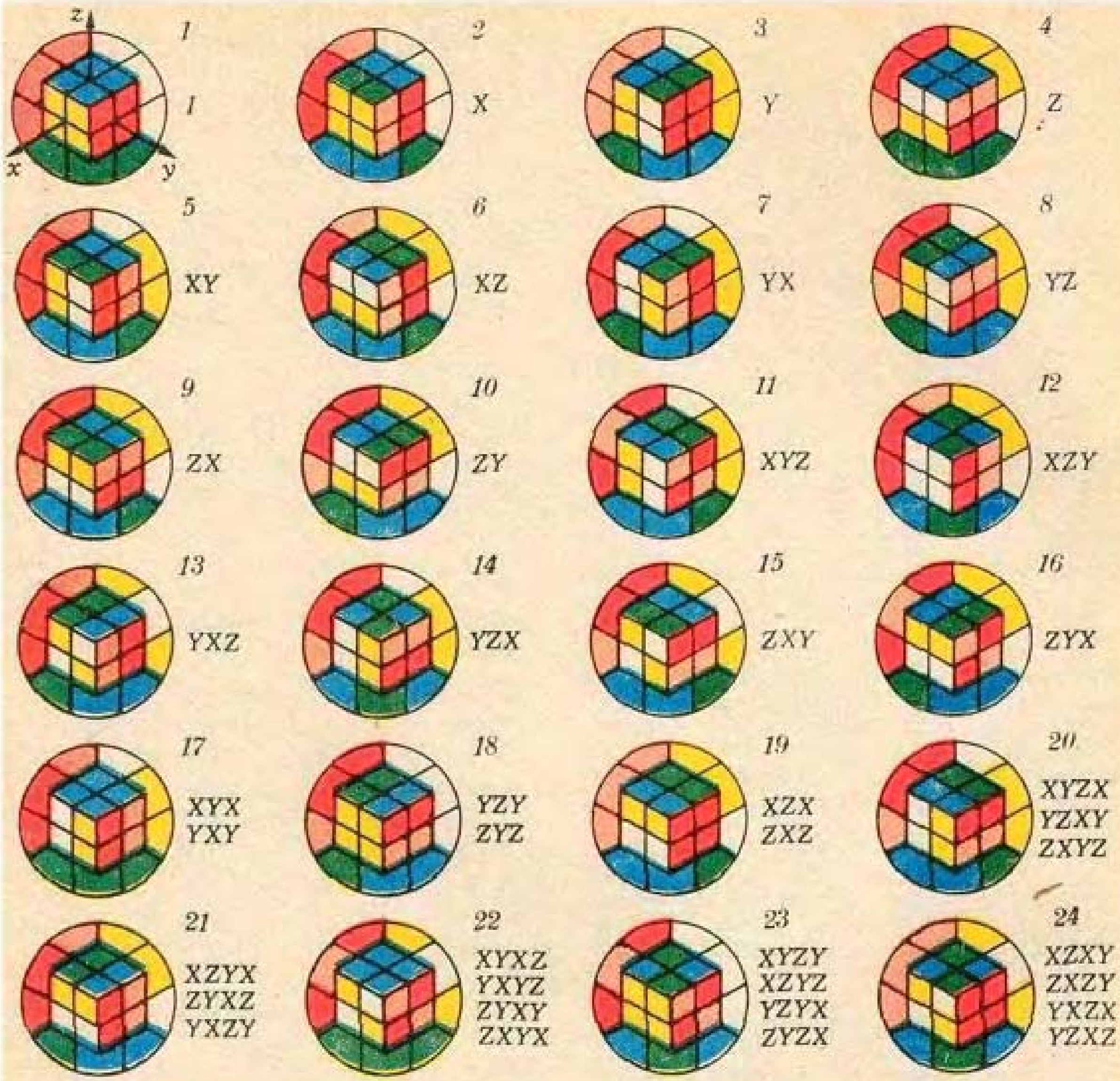


Рис. 1.

также *умножением*; произведение ходов будем записывать слева направо. Например, YZX — это последовательное выполнение ходов Y, Z, X; $X^3 = XXX$ — это выполнение трех ходов X. Два произведения ходов мы будем считать *равными*, если они на каждое состояние куба действуют одинаково.

Умножение ходов, конечно, не коммутативно; например, все шесть «парных» произведений не равны (номера *5—10* на рисунке 1).

Обозначим I «тождественный» ход, оставляющий куб не изменившимся. Очевидно,

$$X^2 = Y^2 = Z^2 = I. \qquad (*)$$

Легко проверить, что все «парные» произведения, повторенные три раза, не меняют состояния куба:

$$(XY)^3 = (YZ)^3 = (ZX)^3 = (YX)^3 = (ZY)^3 = (XZ)^3 = I. \qquad (**)$$

Кроме того,

$$(XYZY)^2 = (XZYZ)^2 = (YXZX)^2 = (YZXZ)^2 = (ZXYX)^2 = (ZYXY)^2 = I \qquad (***)$$

Из равенств (*), (**), (***) легко получить (уже не обращаясь к кубу!) много новых равенств. Например (проверьте!), $XYX = YXY$ (см. также задачу 1 на с. 16).

Итак, мы получили три группы равенств, согласно которым все три хода X, Y, Z являются «корнями квадратными из единицы» (*), а все шесть парных ходов — «корнями кубичными из единицы» (**), а еще шесть комбинаций ходов специального вида ($XYZY$, $YZXZ$, ...) тоже яв-

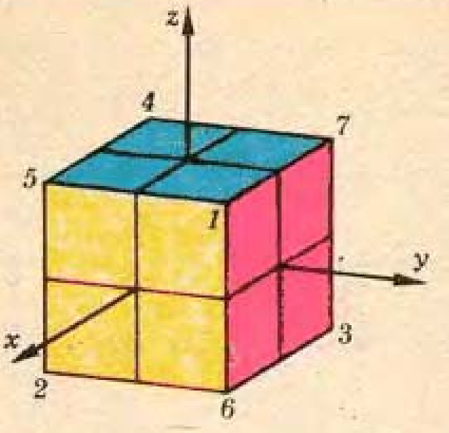


Рис. 2.

ляются «корнями квадратными из единицы» (***).

Граф состояний

Мы научились изображать состояния куба (и приписали им номера *1—24*, рис. 1), научились записывать ходы и нашли соотношения между ходами. Хотелось бы уметь более наглядно изображать связь между состояниями и ходами. Для этого служит *граф состояний*, показанный на рисунке 3. На нем точки (вершины) обозначают состояния, а отрезки — ходы, позволяющие перейти из одного состояния в «соседнее». Так, в центре рисунка жирная точка изображает нулевое состояние; из нее выходят три отрезка, отвечающие ходам X, Y, Z; из точек на концах этих отрезков также выходит по три отрезка: один возвращает в нулевое состояние, остальные приводят в два новых состояния, и т. д. Продолжая этот процесс неограниченно, можно считать всю плоскость покрытой шестиугольной сеткой — графом состояний.

Соотношениям (*) на графе отвечает движение туда и обратно по одному из отрезков, а соотношениям (**) — обход шестиугольника (проверьте!).

У полученной картины очевидный недостаток — на ней имеется бесконечно много вершин (состояний), в то время как у нашего куба лишь конечное число состояний. Значит, какие-то (различные) вершины отвечают одному и тому же состоянию. Чтобы в этом разобраться, занумеруйте (например, прямо на рисунке 3) все вершины графа номерами *1—14*, пользуясь рисунком 1.

Вы тогда увидите, какие вершины между собой должны совпадать. Например, жирная точка в верхней части рисунка 3 тоже отвечает нулевому состоянию (а всего таких точек на рисунке уместилось 7). Кстати, путь от «центральной» нулевой точки к «верхней» соответствует соотношению

$$XZYZXZYZ=I,$$

то есть одному из соотношений (***).

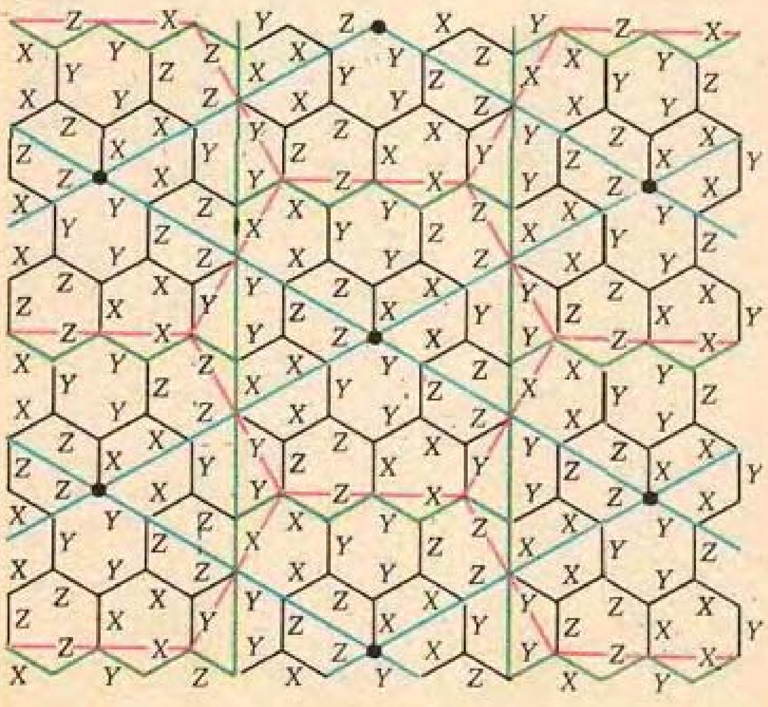


Рис. 3. Граф состояний куба. Стороны шестиугольников обозначают элементарные операции (они помечены буквами *X*, *Y*, *Z*), вершины шестиугольников — состояния, а жирные точки отвечают нулевому состоянию. Синие, красные и зеленые линии выделяют фундаментальные области.

Имея перед глазами пронумерованный граф состояний, легко ответить на поставленные в начале статьи вопросы. Имеется всего 24 состояния (и 24 класса равных между собой последовательностей ходов). Из них 3 состояния получаются из нулевого состояния одним ходом, 6 — двумя ходами, 9 — тремя ходами и 5 — четырьмя ходами. Вообще, чтобы найти минимальную цепочку ходов, соединяющую данные два состояния, достаточно найти две вершины на графе с соответствующими номерами и соединить их кратчайшей ломаной, которая укажет нужные ходы, причем число этих ходов всегда $\leqslant 4$.

Фундаментальные области

В последней фразе внимательный читатель должен был заметить неточность: необходимо брать не любые «две вершины с соответствующими номерами», а такие, которые расположены «по соседству», иначе может появиться лишний путь типа (***).

В этой связи удобно «раскроить» наш граф на ячейки, внутри которых нет совпадающих вершин и которые содержат все 24 состояния. На рисунке 3 показаны три способа для осуществления такого раскроя: на красные шестиугольники, на синие ромбы и на зеленые «прямоугольники с ломаными сторонами».

В математике такие ячейки часто называют *фундаментальными областями*. Проверьте, что после необходимых отождествлений граничных точек каждая из указанных ячеек действительно содержит 24 различных вершин — состояний.

Пространственный граф состояний

Не побоявшись пословицы «лучшее — враг хорошего», попробуем получить еще более точную модель состояний нашего куба, отправляясь от фундаментальных областей. Для этого придется выйти в трехмерное пространство.

Выделим сперва фундаментальную область, изображенную зелеными линиями на рисунке 3 и выпрямим горизонтальные ломаные линии. Тогда фундаментальная область превратится в прямоугольник, а сетка путей представится в виде регулярной кирпичной кладки из десяти «кирпичей» и четырех «полукирпичей» (рис. 4).

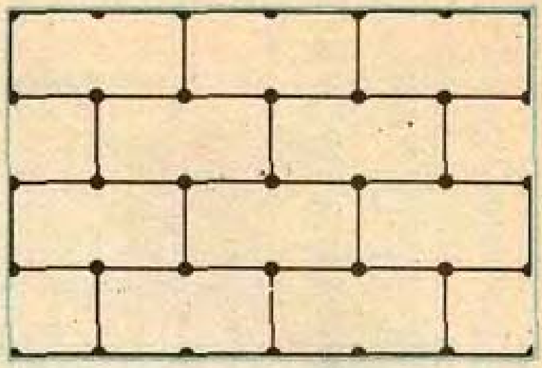


Рис. 4.

Склеивая верхнюю и нижнюю стороны прямоугольника, получим трубку. Далее, скрутим эту трубку на пол-оборота и, изогнув ее, склеим торцы. Получим изображенную на рисунке 5 поверхность, называемую *тором*. Она покрыта сеткой из 12 шестиугольников с 24 вершинами и 36 ребрами. Если на каждую вершину мы запишем ее номер (пользуясь пронумерованным рисунком 3), то полученный *граф на торе дает полное описание нашей головоломки*. Действительно, каждой из 24 вершин на торе отвечает ровно одно из 24 состояний нашего куба, и от состояния к состоянию можно перейти за один ход тогда и только тогда, когда соответствующие вершины на торе соединены (черным) ребром (см. рис. 5).

Геометрическая задача. Покажите, что отождествление границы других фундаментальных областей (см. рис. 3; красные шестиугольники и синие ромбы) по указанным выше правилам тоже дает тор с нарисованным на нем графом. Сравните этот граф с предыдущим.

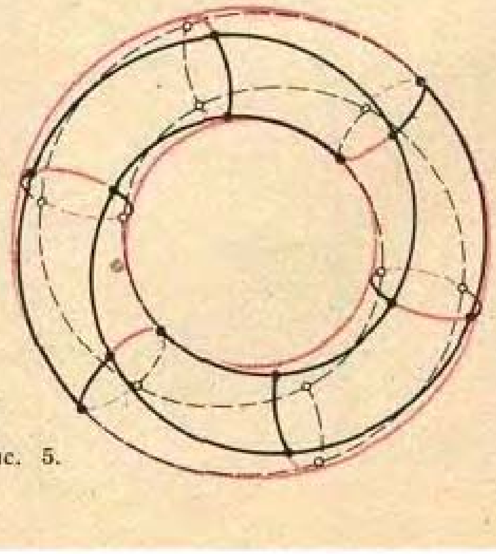


Рис. 5.

Группы преобразований

Увлекшись неожиданно возникшей здесь геометрией, нам не следует упускать из виду алгебраическую природу наших исследований, связанных с важным понятием группы преобразований. Непустая совокупность G преобразований некоторого множества*) называется *группой преобразований*, если

1° композиция любых двух преобразований из G также является преобразованием из G:

$$f, g \in G \Rightarrow f \circ g \in G;$$

2° преобразование, обратное к любому преобразованию из G, также содержится в G:

$$f \in G \Rightarrow f^{-1} \in G.$$

Из свойств 1° и 2° сразу следует, что тождественное преобразование I всегда содержится в G (ибо $f^{-1} \circ f = I$).

Легко видеть, что для нашей игры совокупность всех преобразований (то есть последовательностей ходов) куба является группой преобразований множества всех его состояний. Действительно, свойство 1° очевидно, свойство же 2° следует из того, что любой ход обратен сам к себе (см. (*)), а преобразование, обратное к любой последовательности ходов, является той же последовательностью, только выписанной в обратном порядке (проверьте!).

В качестве других примеров групп преобразований назовем семейство всех перемещений плоскости и совокупность всех взаимно-однозначных преобразований конечного множества (из n элементов) на себя. Последняя группа называется *группой подстановок**) (из n элементов) и обозначается S_n. (Проверьте для нее свойства 1° и 2° и покажите, что в S_n имеется $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ элементов).

С алгебраической точки зрения не существенно, какова природа преобразуемых элементов, а важна алгебраическая структура самих преобразований, то есть то, как устроена операция умножения $\circ$ (композиция) в совокупности G. Алгебраисты считают две группы преобразований G и H одинаковыми, если они *изоморфны*; это значит, что существует взаимно однозначное отображение $\alpha : G \to H$ группы G и H, сохраняющее операцию композиции, то есть удовлетворяющее свойству

$$g, g' \in G \Rightarrow \alpha(g \circ g') = \alpha(g) \circ \alpha(g').$$

Например, совокупность всех перемещений плоскости, переводящей в себя некоторый фиксированный равносторонний треугольник, является группой (почему?) и эта группа изоморфна группе подстановок множества из трех элементов S_3 (проверьте!).

Подробнее о группах преобразования и о важном понятии (абстрактной) *группы* можно прочитать в книге П. С. Александрова «Введение в теорию групп» (Библиотечка «Квант», вып. 7, М., 1980).

Алгебраическая модель игры

Мы покажем, что *группа преобразований нашего куба изоморфна группе S_4 перестановок четырех элементов.* Для этого занумеруем вершины куба (или, что то же, маленькие кубики) цифрами от *1* до *8*, как показано на рисунке 2. Легко видеть, что вершины *1—4* и *5—8* являются вершинами тетраэдров, вписанных в куб, причем при всех наших преобразованиях вершины *1—4* и *5—7* переходят друг в друга (а вершина *8* остается на месте). Таким образом, наши преобразования осуществляют перестановку вершин *1—4* и двадцати четырем преобразованиям куба взаимно однозначно сопоставляются $4! = 24$ перестановки четырех вершин. Трем ходам X, Y, Z соответствуют перестановки двух вершин: ходу X — вершин *1*, *2*, ходу Y — *1*, *3* и ходу Z — *1*, *4*. Таким образом, мы связали нашу исходную задачу с довольно простой задачей о представлении всех элементов группы перестановок четырех элементов в виде произведений трех базисных парных перестановок одного выделенного элемента с тремя остальными и показали, что

---

*) *Преобразованием* множества называется его взаимно однозначное отображение на себя

**) или *перестановок*

все остальные элементы группы можно построить в виде произведений не более чем четырех базисных элементов.

Наряду с геометрической, мы получили алгебраическую модель нашей игры.

Алгебраические задачи. 1. Покажите, что группа преобразований нашего куба однозначно описывается *основными* соотношениями (*), (**), (***). Это значит, что любое верное соотношение между ходами X, Y, Z может быть получено из основных *вставками* и *сокращениями*. (Вставкой называется операция над соотношениями, при которой в любое место уже полученного соотношения вставляется одна из левых частей основных соотношений например

$$XYXY=I \Rightarrow XY(ZZ)XY=I,$$

а сокращение — это операция, обратная к вставке, например:

$$ZXY(ZZ)YX\dot{Z}=I \Rightarrow ZXYYXZ=I).$$

2. Покажите, что соотношения (*), (**) однозначно описывает группу тех перемещений плоскости, которые совмещают шестиугольную сетку саму с собой. (Указание. Ходу X отвечает симметрия плоскости относительно серединного перпендикуляра отрезка X — см. рис. 3).

Только ли игра?

Отметим в заключение, что в природе имеются объекты, обладающие свойствами, похожими на свойства нашего куба. Это так называемые *молекулы с внутренними вращениями*. Простейшей такой молекулой является молекула этана CH_3—CH_3, в которой один метильный радикал может поворачиваться относительно другого (рис. 6). Свойства симметрии таких молекул, описываемые группами преобразований, оставляющих молекулы неизменными, в настоящее время интенсивно изучаются. И хотя пока неизвестна молекула, обладающая как раз такой симметрией внутренних вращений, как рассмотренный нами куб, но не исключено, что она может быть найдена. Существует молекула «кубон», состоящая из восьми атомов углерода и восьми атомов водорода (рис. 7), похожая на рассмотренную здесь модель; но, по-видимому, свободного вращения одной грани относительно параллельной грани не происходит.

Отметим также, что двойная периодическая структура, которая видна на рисунке 3, встречается в реальных физических кристаллах. В этом случае мелкие шестиугольные ячейки соответствуют элементарным ячейкам кристалла, состоящим из атомов, в то время как бо́льшие ячейки связаны с более тонкими свойствами кристалла — ориентацией спинов атомов, размещением различных изотопов и т. д.

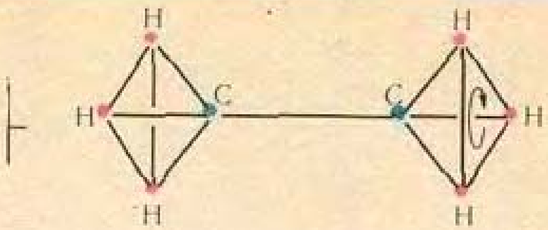


Рис. 4.

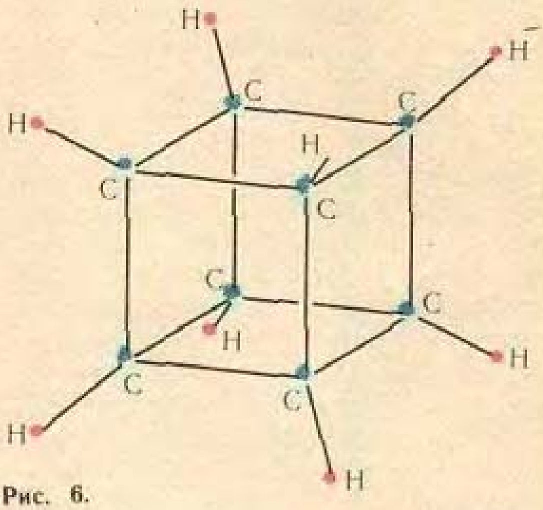
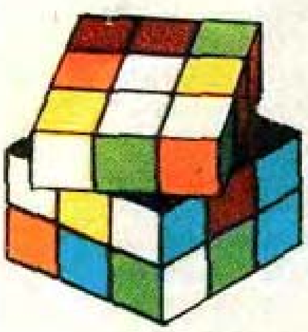


Рис. 6.

Отсюда видно, что исследованные группы симметрии такого типа может оказаться интересным и с физической точки зрения.

Поправка

В программу на с. 56 «Кванта», 1981, № 9 вкралось несколько опечаток, из которых укажем отсутствие метки 1 перед пятым оператором и пропуск знаков продолжения в записи оператора DATA. На с. 55 вместо CALL STR следует читать CALL STP.



М. Евграфов

Механика волшебного кубика

В ответ на многочисленные просьбы читателей мы публикуем статью об устройстве «венгерского шарнирного кубика» («Квант», 1980, № 12). В статье подробно рассказывается, как «венгерский кубик» можно изготовить в школьной мастерской. К математической стороне дела мы вернемся в одном из следующих номеров, когда изготовленный вами кубик будет у вас в руках.

Внешне «волшебный кубик» венгерского архитектора Э. Рубика представляет из себя куб, как бы разрезанный на 27 равных маленьких кубиков (видны, конечно, только 26 из них). Маленькие кубики сцеплены таким образом, что любой слой из 9 кубиков, примыкающих к одной грани большого куба, можно свободно вращать вокруг его оси (см. рисунок выше). Поразительно, что вся система в целом при этом не распадается, ни один из маленьких кубиков пошевелить отдельно не удается. Внешние грани маленьких кубиков снабжены наклейками шести разных цветов (по девять наклеек каждого цвета); требуется с помощью поворотов слоев переставить маленькие кубики так, чтобы каждая грань большого куба оказалась окрашенной в один цвет.

О том, как это сделать, напечатано немало статей (например, «Квант», 1980, № 12 и «Наука и жизнь», 1981, № 3). Устройство «венгерского кубика» в этих статьях подробно не обсуждалось, что вполне естественно. Имея кубик, его нетрудно разобрать и увидеть, как он устроен. Моя статья написана для тех, кто не имеет возможности решить задачу столь простым путем. Я сам был именно в таком положении, но мне повезло: я выпросил у одного из своих знакомых сломанный «венгерский кубик», починил его и вернул хозяину. С полученными знаниями мне уже нетрудно было сделать свой кубик.

Как же он крутится?

«Венгерский кубик» составлен из 27 основных деталей (не считая цветных наклеек, пружинок и других мелочей). Эти детали — трехмерный крест, скрытый внутри, и 26 «кубиков», выходящих наружу.

«Кубики» — отнюдь не кубики. Они бывают трех различных видов в зависимости от расположения на гранях большого куба: *центральные кубики* (их 6 штук, расположены они в центре каждой грани), *средние кубики* (их 12 штук, расположены они в середине каждого ребра) и *угловые кубики* (их 8 штук, они расположены в вершинах большого куба).

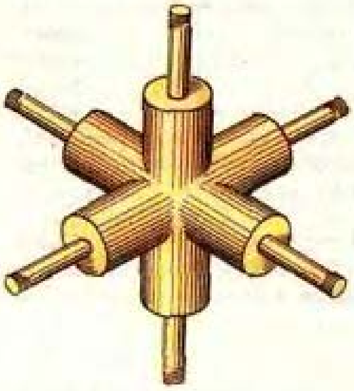


Рис. 1. Крест.

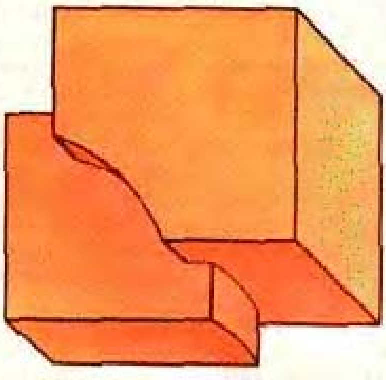


Рис. 2. Боковой кубик.

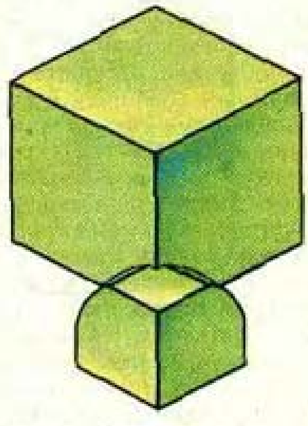


Рис. 3. Угловой кубик.

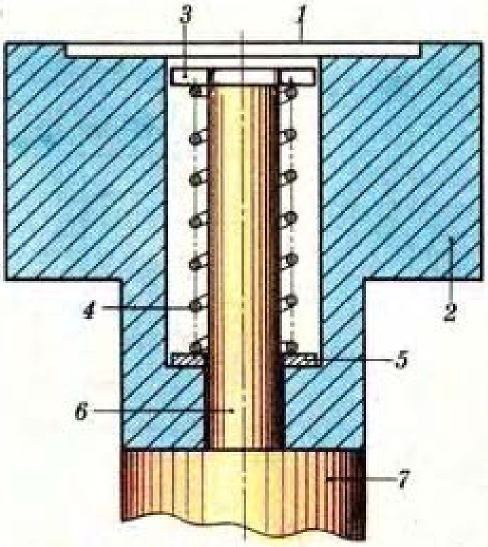


Рис. 4. Центральный кубик на кресте (1 — крышечка; 2 — центральный кубик; 3 — гайка; 4 — пружинка; 5 — шайба; 6 — тонкая ось креста; 7 — толстое плечо креста).

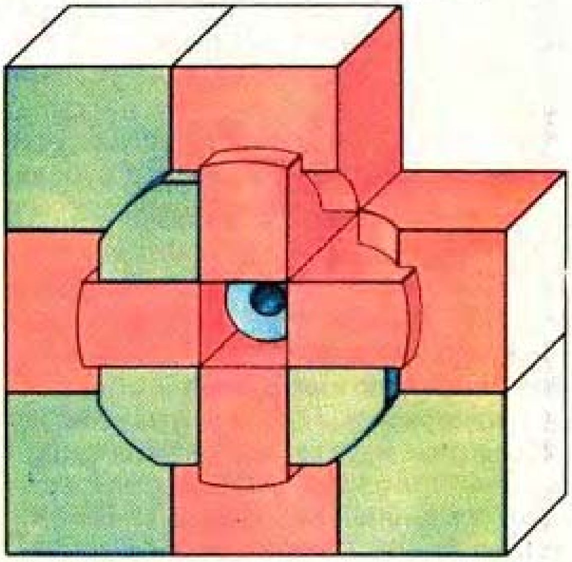


Рис. 5. Внутренняя сторона грани куба, снятой **с креста (один угловой кубик также снят).**

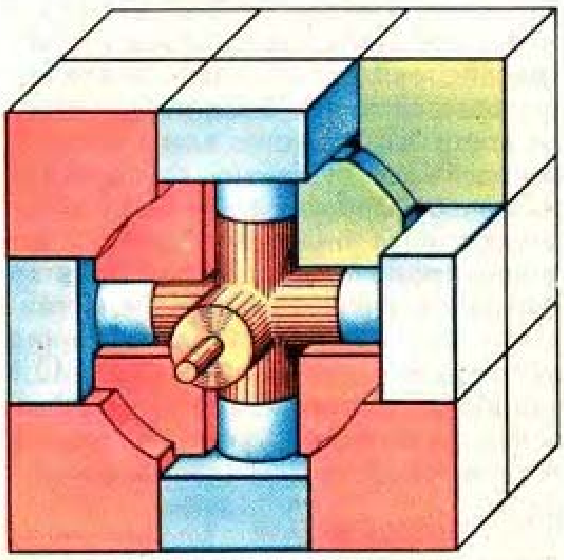


Рис. 6. Вид куба, с которого сняты одна грань и один средний кубик.

На рисунках 1, 2 и 3 изображены соответственно внутренний крест, средний кубик и угловой кубик. На рисунке 4 изображено крепление центрального кубика на внутреннем кресте.

Рисунок 5 изображает внутреннюю сторону грани, снятой с креста.

Рисунок 6 изображает «волшебный кубик», с которого сняты одна грань и один из средних кубиков.

Для большей наглядности на рисунках 5 и 6 центральные кубики, средние кубики, угловые кубики и внутренний крест окрашены в разные цвета. Эта окраска не имеет отношения к цветным наклейкам на внешних гранях кубиков.

На рисунках 5 и 6 видно, как выступы на средних и угловых кубиках складываются в почти цилиндрический выступ с внутренней стороны грани большого куба, а на среднем слое образуется цилиндрическое кольцеобразное углубление. Поворот слоя (грани) отвечает повороту цилиндрического выступа в цилиндрическом углублении.

Вот в сущности и весь секрет устройства головоломки Э. Рубика!

Роль пружинки 4 (см. рис. 4) — в том, чтобы иметь возможность слегка оттягивать при поворотах поворачиваемый слой.

Из рисунка 4 видно, в частности, как разбирать «волшебный кубик». Для этого нужно снять цветную наклейку с какого-либо одного центрального кубика, вытащить крышечку 1, подцепив ее за край иголкой или ножом, и освободить пружинку 4. После этого центральный кубик снимется с оси креста, и головоломка легко разберется.

* * *

Перейдем ко второй теме статьи — как смастерить самодельный «волшебный кубик». Речь пойдет не о каком-либо неполноценном подражании промышленному экземпляру. Самодельная головоломка должна быть и красивее, и надежнее промышленной. Как говорит одна мудрая пословица, если дело стоит делать хоть как-нибудь, то его стоит делать как следует.

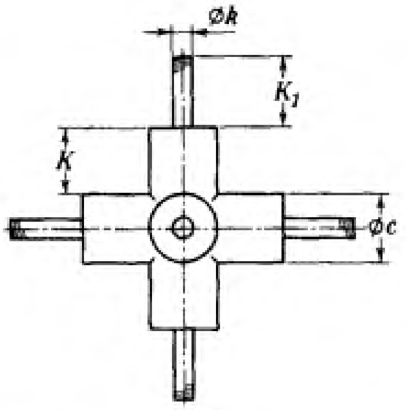


Рис. 7.

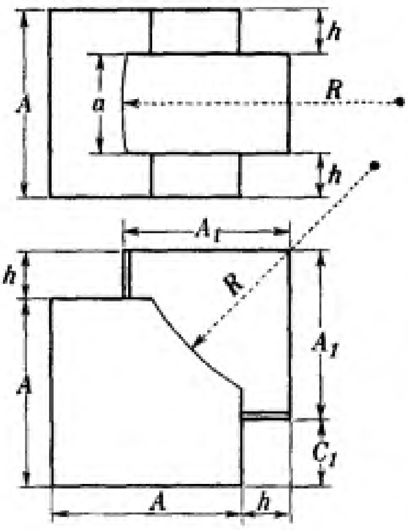


Рис. 8.

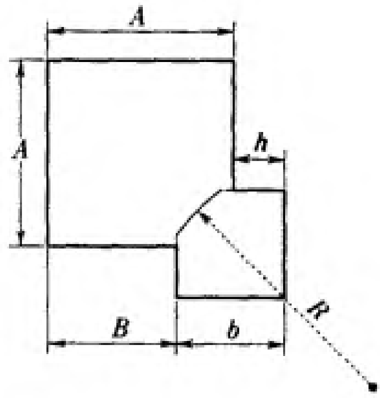


Рис. 9.

Выбор материала

Для изготовления кубика наиболее подходят сравнительно мягкие сорта пластмасс. Почти идеален фторопласт, хорош винипласт, неплохи полиэтилен и полипропилен. К сожалению, я не могу предложить регулярных способов отыскания достаточно толстых кусков таких пластмасс.

Наиболее доступны сравнительно тонкие листы более твердых (и более хрупких) пластмасс — плексиглас и гетинакс. Они тоже могут быть использованы для изготовления кубика, но придется прибегать к склеиванию. И плексиглас, и гетинакс склеиваются соответствующими клеями намертво, правда, клеи для плексигласа обладают очень сильным запахом (и даже немного ядовиты). Гетинакс прекрасно склеивается эпоксидным клеем. Кроме того, гетинакс прочно окрашивается масляными красками и нитрокрасками.

Выбор размеров

На рисунках 7, 8, 9 и 10 приведены чертежи основных деталей головоломки. Размеры обозначены буквами; одинаковые буквы означают один и тот же размер. Между размерами должны выполняться соотношения $a+2h=A$, $B+b=A+h$, $A_1=K+C_2$, $R=A_1+\frac{1}{2}c$, $2C_1+2C_2+2K+c=3A$.

В остальном размеры можно менять в зависимости от имеющегося материала. При использовании мягких пластмасс размер h не следует брать слишком малым, а при использовании хрупких пластмасс не следует брать слишком малым размер $A-B$. В первом случае нарушение условия может привести к частому рассыпанию головоломки, а во втором случае могут сломаться угловые кубики.

Для промышленного «венгерского кубика»

$A=19$ мм, $h=5$ мм, $c=9$ мм,

а у сделанного мною кубика

$A=15$ мм, $h=4$ мм, $c=7$ мм

Необходимый инструмент

Из измерительных инструментов необходимы простейший штангенциркуль и слесарный угольник (чертежные угольники не годятся). Нужны также тиски, ножовка по металлу, свежие бархатные напильники (плоский, квадратный, треугольный, полукруглый) и надфили. В качестве ножей очень удобно использовать медицинские скальпели — они делаются из хорошей стали. Если их не удастся достать, то лучше всего сделать самодельные штихели — ножички с различной формой лезвий. Их затачивают на точиле из обломков ножовочных полотен. Еще понадобятся сверла различных диаметров, а также метчик и плашка (для нарезания внутренней и наружной резьбы) М2,5 или М3. Желательно иметь под рукой набор наждачной бумаги с разной величиной зерна (не очень крупного).

Изготовление креста

Толстая часть креста может быть изготовлена (как и в промышленном

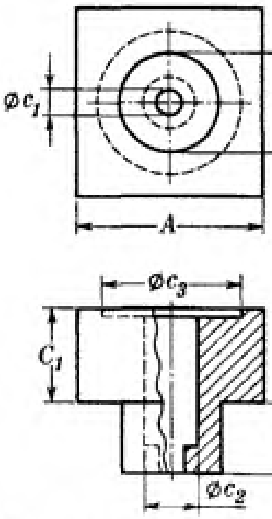


Рис. 10.

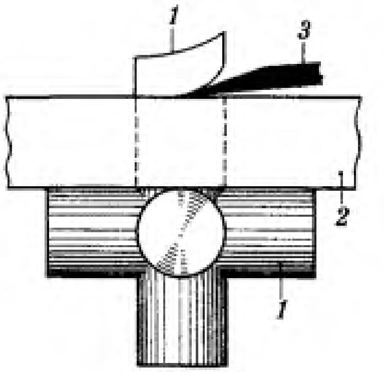


Рис. 11. 1 — крест; 2 — металлическая или плексигласовая планка с отверстием; 3 — нож.

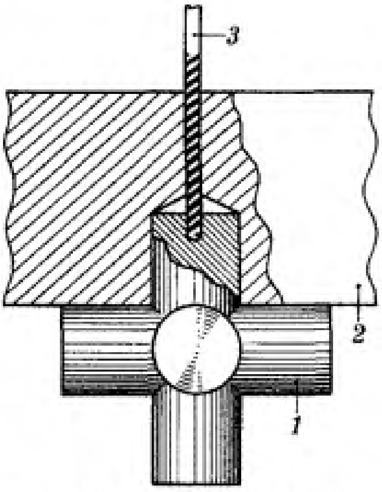


Рис. 12. 1 — крест; 2 — кондуктор — планка с просверленным в ней заранее ступенчатым отверстием; 3 — сверло.

«венгерском кубике») из куска капрона. Кусок капрона нужной величины можно получить, расплавив старые чулки, обрывки рыболовной лески и т. п. при температуре 120° в алюминиевой или жестяной баночке. Капрон легко режется ножом, и грубую заготовку креста сделать легко. Для придания каждому плечу креста точной цилиндрической формы удобно следующее приспособление: в металлической пластине сверлятся 4—5 отверстий; самое узкое — желаемого диаметра, каждое следующее на 0,2—0,3 мм шире. Когда мы продавливаем капроновое плечо креста через отверстие, острый край отверстия срезает с капрона стружку. После продавливания через все отверстия по очереди мы получим плечо почти идеальной цилиндрической формы. При обработке каждого следующего плеча нужно следить, чтобы оно получилось строго перпендикулярным к тем уже обработанным плечам, к которым оно должно быть перпендикулярно, и соосно с противоположным плечом. Перпендикулярность проверяется угольником на просвет. Нарушения подправляются ножом. Соосность проверяется на глаз и подправляется ножом.

Тонкие оси креста лучше всего делать из стальных вязальных спиц диаметра 2,5 мм, нарезанных на кусочки нужной длины Толстые плечи креста подрезаются по размеру (рис. 11), а затем в них высверливаются осевые отверстия диаметра 2 мм (рис. 12). Концы тонких осей (~7 мм) грубо зазубриваются напильником. Эти концы нагревают и вдавливают в высверленные отверстия. Чтобы не испортить крест, эту операцию лучше проводить, вставив оперируемое плечо в отверстие, которое использовалось для подрезания по размеру. На оставшемся конце тонкой оси нарезается резьба. Поскольку начало резьбы всегда бывает не очень точным, лучше сделать тонкую ось немного длиннее. Когда на резьбу будет навернута гайка, лишний кусочек спиливается напильником.

Для завинчивания гайки на ней нужно сделать прорезь (рис. 13: на том же рисунке изображен конец отвертки для завинчивания такой гайки).

Окончательная подгонка креста проводится при сборке головоломки, так что крест не следует сразу доводить до совершенства.

На токарном станке можно сделать очень хороший крест из металла (материал — твердый дюралюминий или латунь). Однако эта работа требует сравнительно высокого уровня токарного мастерства. Обработку де-

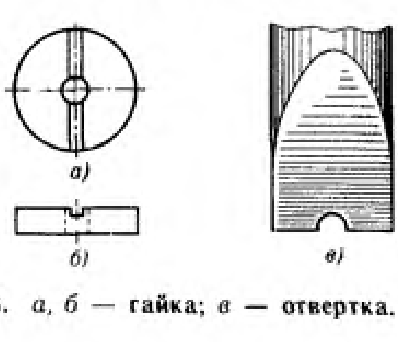


Рис. 13. *а*, *б* — гайка; *в* — отвертка.

тали (толстая часть креста) следует вести в центрах, причем для разных стадий обработки придется изготовить 2 или 3 различных хомутика (приспособления для вращения детали). С разметкой центровых отверстий для второй и третьей пары плеч креста тоже придется потрудиться. Не так просто снять и острые выступы в середине готового креста. Тонкая ось в этом случае сажается в толстую часть креста на резьбе, а затем запаивается (или приклеивается эпоксидным клеем, если крест сделан из дюралюминия).

Изготовление средних и угловых кубиков

После того как заготовки для кубиков грубо нарезаны (с точностью 1—1,5 мм для мягких пластмасс и 0,5—1 мм для твердых пластмасс), их обработку можно условно разделить на две стадии: грубую и точную подгонку по размерам. Грубая подгонка ведется по шаблонам на глаз, точная — по угольнику и штангенциркулю. При грубой подгонке мягкие пластмассы подрезаются ножом и выравниваются крупнозернистой шкуркой, а твердые — опиливаются бархатным напильником (шкурку и напильники следует время от времени мыть щеткой с водой). При точной подгонке любые пластмассы подскабливаются ножом и выравниваются мелкозернистой шкуркой.

Процесс точной подгонки таков:

Поверочным инструментом с небольшим нажимом проводят по обрабатываемой поверхности. От нажима выпуклые места начинают блестеть, а впадины остаются матовыми. Заблестевшие места подскребаются ножом, и процесс повторяют. Время от времени поверхность выравнивают шкуркой. В качестве поверочного инструмента при подгонке первой плоскости используют любую плоскую плитку, при подгонке перпендикулярной плоскости — угольник, а при подгонке параллельной плоскости — штангенциркуль.

Последовательность операций при изготовлении кубиков из мягких пластмасс такова:

Сначала производится точная подгонка трех взаимно перпендикулярных плоскостей болванки, затем — точная подгонка параллельных им плоскостей. Получается параллелепипед (или куб). Затем производится грубая и точная подгонка вырезов на одной грани, потом на другой и т. д. Для грубой подгонки вырезов на гранях стоит сделать держалку для заготовки, изображенную на рисунке 14, и приспособления для пропиливания (рис. 15). Материалом для обоих приспособлений может служить плексиглас. В качестве пилки удобнее всего взять запасные полотна для ножовки-шлицовки (они продаются в хозяйственных магазинах). Лучше сделать столько приспособлений для пропиливания, сколько различных (по высоте и глубине) вырезов.

Для криволинейных вырезов также стоит сделать специальный инструмент — нечто вроде полукруглой стамески. Его нетрудно изготовить на точиле из обычной стамески. Радиус закругления при заточке проверяется по шаблону.

При изготовлении кубиков из твердой пластмассы делать сложные вырезы не нужно. Еще одно упрощение — у твердых листовых пластмасс с самого начала имеются точно подогнанные параллельные плоскости. Однако эти упрощения с лихвой компенсируются трудностями, связанными со склейкой. Основная трудность — сдвиги деталей, зажатых для затвердения клея. Лучший способ преодоления этой трудности — соединение деталей винтами.

Рис. 14. 1 — съемная прокладка (такую же можно подкладывать и под крышку); 2 — зажимный винт.

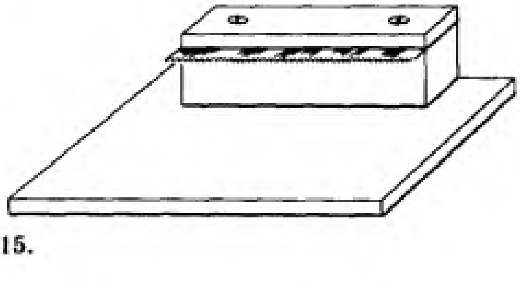


Рис. 15.

Чтобы винты не приклеились, их следует покрыть тонким слоем машинного масла или вазелина. После затвердения клея винты вывинчиваются, отверстия промываются и заделываются эпоксидным клеем, смешанным с опилками пластмассы. Вместо винтов в просверленные отверстия можно вставлять плотно сидящие гвозди. Их можно и не удалять после склеивания. Винты немного удобнее, так как с ними не нужны специальные приспособления для зажима деталей на время затвердения клея.

Центральные кубики

Если есть возможность поработать на токарном станке, то центральные кубики лучше делать составными — квадратная шляпка из пластмассы, круглая ножка из металла (предпочтительно из латуни). Чертеж шляпки и ножки дан на рисунке 16. Токарная работа не требует особой квалификации.

Цветные наклейки

В этом вопросе нельзя использовать то решение, которое выбрано в промышленном образце. Липких лент стольких цветов не найти. Для кубиков из гетинакса простейшее решение — окраска (масляными красками или нитрокрасками). Для кубиков из мягких пластмасс — инкрустация. Инкрустируемые кусочки можно нарезать из наборов лекал. Кусочки проще делать круглыми. Их легко вырубать с помощью стальной трубки с остро заточенными краями. Углубления в кубиках можно сделать с помощью перки (перовое сверло, используемое для сверления отверстий в дереве коловоротом). Профиль перки (а если необходимо, то

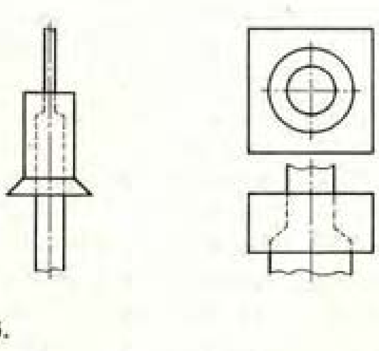


Рис. 16.

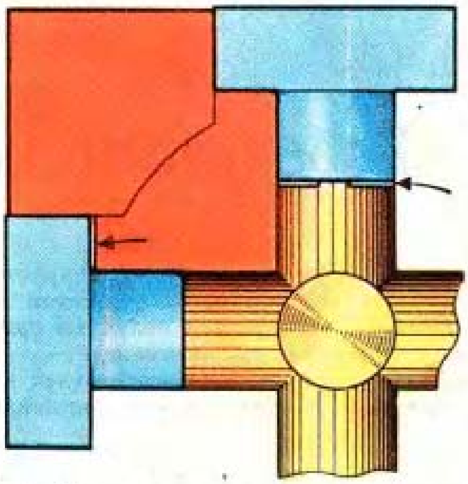


Рис. 17. Стрелки показывают на возможные зазоры.

и ее диаметр) можно немного изменить подточкой на точиле.

У центальных кубиков инкрустируемые кусочки заодно будут исполнять обязанности крышечек.

Сборка волшебного кубика

Тщательная отделка боковых и угловых кубиков необходима, так как «по роду службы» они должны хорошо сидеть в любых допустимых местах. При окончательной подгонке можно подправлять лишь крест и положение центральных кубиков на нем. Проверка положения центральных кубиков проводится с помощью боковых кубиков (рис. 17). Сначала просветы выравниваются легким подгибом тонких осей креста, а затем сводятся на нет подпиливанием конца ножки центрального кубика. Если боковой кубик плохо входит, то немного подпиливается и сам крест. На этой стадии острые углы кубиков, упирающиеся в центр креста и в соединение ножки центрального кубика с его шляпкой, стоит немного скруглить.

После ликвидации просветов проверяется движение собранной головоломки. Если «волшебный кубик» слишком часто застревает на поворотах, можно немного ослабить пружинки (укоротив их). Может помочь и небольшое скругление всех острых углов.

При окончательной сборке на каждую гайку следует капнуть каплю лака для ногтей. Это предупредит отвинчивание гайки во время работы.

В. Дубровский

Алгоритм волшебного кубика

Непросто справиться с «венгерским волшебным кубиком» — самой популярной головоломкой XX века. Поэтому нетерпеливые люди, потеряв надежду на успех, зачастую прекращают свое знакомство с ним разламывая его на кусочки. Говорят, что после появления «кубика» в Японии даже понизилась производительность труда, а в США эту игрушку сейчас продают в комплекте с пластмассовым топориком: не сумел решить — ломай!
«Квант» относится к кубику Рубика более спокойно и серьезно, о чем свидетельствует публикуемая ниже статья.

В этой статье мы рассказываем, как решить волшебный кубик — знаменитую головоломку Э. Рубика*). Строго говоря, алгоритма решения (то есть набора точных правил для приведения раскраски всех граней из произвольной к одноцветной) мы здесь не приводим — такой алгоритм уже был опубликован в «Кванте» (1980, № 12, с. 17). Вместо этого мы даем большой список полезных комбинаций, указывая для каждой способ выполнения (последовательность поворотов) и результат (какие маленькие кубики переставляются и как). Из различных комбинаций, приводящих к одному и тому же результату, мы старались выбрать самую короткую. В конце статьи мы показываем, что волшебный кубик можно привести в начальное состояние (с одноцветными гранями) за 79 поворотов или меньше.

*) Если у вас нет экземпляра кубика, вы можете его сконструировать, пользуясь указаниями статьи М. Евграфова в «Кванте» 1982, № 3.

Обозначение операций

Обозначим каждую грань волшебного кубика: *Ф* (фасад), *Т* (тыл), *В* (верх), *Н* (низ), *П* (правая), *Л* (левая) (см. рис.). Поворот грани X на $n \cdot 90°$ по часовой стрелке будем обозначать через X^n, например повороты правой грани на 90°, 180°, 270° записываются, как $П$, $П^2$, $П^{-1}=П^3$. Таким образом каждой операции (цепочке поворотов граней) отвечает «слово» из букв *Ф, Т, В, Н, П, Л* со степенями*), читаемое и выполняемое слева направо.

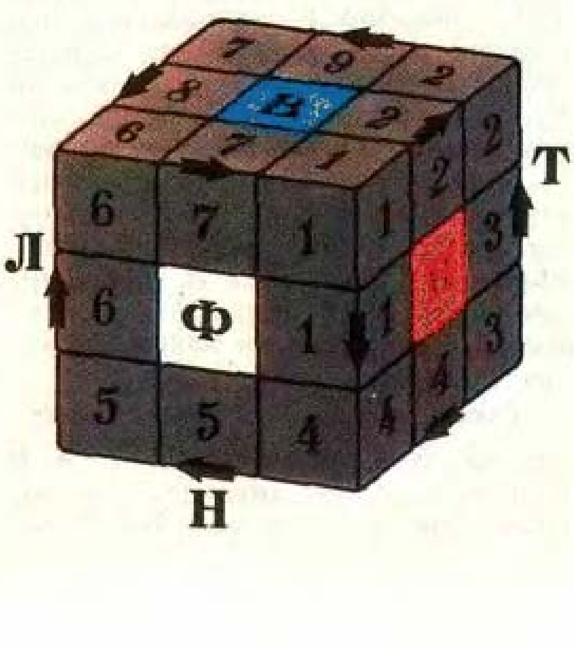
Обозначение результата операции

Мы будем записывать в единой формуле как передвижение маленьких кубиков, так и изменение их ориентации в пространстве.

Для записи передвижений маленьких кубиков перенумеруем угловые кубики и соответствующие вершины числами от 1 до 8, средние (и соответствующие ребра) — числами от 1 до 12 (см. рисунок; записи всех рассматриваемых в статье операций относятся к нумерации, показанной на этом рисунке).

Допустим, что в результате операции F первый угловой кубик перешел на место i_1-го, i_1-й — на место i_2-го и т. д. Каждый раз в этой цепочке будет появляться новый номер и неизбежно наступит момент, когда

*) Забавный способ запоминания таких «слов» приводится в статье «Венгерский кубик» в журнале «Наука и жизнь», № 3 за 1981 г. (с. 131).



кубик с номером i_{n_1} вернется на место первого (почему?). Кубики $1, i_1, ..., i_{n_1}$ образуют в операции F *цикл*, обозначаемый $(1i_1 \dots i_{n_1})$. Если еще не все угловые кубики вошли в этот цикл ($n_1 < 7$), то берем любой из оставшихся (пусть его номер i_{n_1+1}) и повторяем тот же процесс — возникнет второй цикл $(i_{n_1+1} \dots i_{n_2})$. В конце концов запись угловых кубиков окажется разложенной на *независимые* (то есть не имеющие общих элементов) циклы: $(1i_1 \dots i_{n_1}) \cdot (i_{n_1+1} \dots i_{n_2}) \dots$

Аналогично обстоит дело со средними кубиками. Соответствующие циклы мы будем записывать в квадратных скобках; так, запись [2 7 6] означает, что второй средний кубик перешел в седьмой, седьмой — в шестой, шестой — во второй.

Пусть в результате некоторой операции i-й средний кубик занял место j-го. Он может расположиться на этом месте двумя способами. Если направление стрелки, привязанной к его ребру (см. рис. 1), окажется противоположным направлению стрелки j-го кубика, то в соответствующем цикле после номера i поставим знак минус. Отсутствие знака означает, что направления стрелок совпали. Так, запись $[2^- 7^+ 6^-]$ (или $[2^- 7\ 6^-]$, «плюсики» мы обычно опускаем для средних кубиков) означает, что второй средний кубик перешел в седьмой с противоположными стрелками, седьмой в шестой с совпадающими стрелками, шестой во второй с противоположными стрелками. Запись $[2^-]$ означает, что второй средний кубик остался на месте, но повернулся на 180°.

Угловой кубик может расположиться на новом месте тремя способами. Соответственно в записи цикла после номера этого кубика будем ставить знак +, знак — или ничего не писать. Знак не пишется, если горизонтальная грань данного углового кубика и после выполнения операции остается горизонтальной. В противном случае, чтобы привести эту грань на новом месте в горизонтальное положение, нам пришлось бы повернуть кубик вокруг диагонали на 120°. Если поворот должен производиться против часовой стрелки, ставим +, если по часовой стрелке — ставим —. Скажем, записи (5^+), (5), (5^-) означают, что пятый кубик остается на месте, но поворачивается на 120°, 0°, 240° по часовой стрелке соответственно.

Пояснения к таблице *(см. с. 24)*

Записывая операцию, мы будем сначала писать последовательность поворотов (слово из букв *Ф, Т, В, Н, П, Л* со степенями), затем знак $\sim$, а потом результат, записанный в виде циклов со знаками. Освоить эту систему записи вам помогут примеры; проверьте, что $П \sim (1^+2^-3^+4^-)$ $[1234]$, $В^- \sim (1276)\ [2^-9^-8^-7^-]$, $Ф^2 \sim (15)\ (46)\ [16]\ [57]$, $ПФ \sim (1^+2^-3^-5^-6^+)\ (4^+)\ [1234567]$, $П^2Ф^2 \sim (135)\ (264)\ [136]\ [24]\ [57]$.

В таблице приводится 47 операций, найденных при игре в кубик, иногда методом проб и ошибок, но большей частью с помощью довольно интересных алгебраических рассуждений, которые недостаток места не позволяет воспроизвести здесь. Операции C_{15} и C_{19} заимствованы из «Венгерского среднешкольного журнала», C_{18} — из упомянутой выше статьи в «Науке и жизни».

Схема алгоритма

Первый этап: сборка «столбика» 2×2×3. Назовем «столбиком» совокупность всех маленьких кубиков, не лежащих в двух смежных гранях большого куба, для определенности — *Ф* и *П*. Для правильной расстановки всех кубиков в «столбике» особых хитростей не требуется. Приведем, например, операции, при которых 1-й средний кубик переходит на 8-е место и в одном случае сохраняет, а в другом меняет свой угол поворота, причем все кубики «столбика», кроме, конечно, 8-го, остаются нетронутыми: $A_1 = ПТВ^2Т^{-1}$, $A_2 = Ф^{-1}ТВТ^{-1}$. Этот этап удается выполнить примерно за 25 ходов.

Второй этап: разворачивание средних кубиков в гранях Ф и П. Легко показать, что при любой последовательности поворотов число средних кубиков, у которых направления стрелок не совпадают с «правильным» (показанным на рисунке), всегда

Таблица полезных операций

Название, описание и результат операции	Число ходов
1) *Перестановки средних кубиков:*	
а) *3-циклы*	
$C_1 = Ф^{-1}П^{-1}ФП \sim [125] \cdot (1^+2)(45^-)$	4
$C_2 = Ф^2П^{-1}Ф^2П \sim [126] \cdot (1^+2^-5^-64^+)$	4
$C_3 = ФП^{-1}Ф^{-1}П \sim [127] \cdot (1^-4^-)(2^+6^+)$	4
$C_4 = Ф^2П^2Ф^2П^2 \sim [136] \cdot (135)(264)$	4
$C_5 = П^{-1}Ф^{-1}П^{-1}ФП^2 \sim [235] \cdot (1^+5^+)(2^-3^-)$	5
$C_6 = П^{-1}Ф^2П^{-1}Ф^2П^2 \sim [236] \cdot (1^+2^-35^+6^-)$	5
$C_7 = П^{-1}ФП^{-1}Ф^{-1}П^2 \sim [237] \cdot (1^+2)(3^-6)$	5
$C_8 = П^{-1}Ф^{-1}П^2ФП^{-1} \sim [245] \cdot (1243^-5^+)$	5
$C_9 = П^{-1}Ф^2П^2Ф^2П^{-1} \sim [246] \cdot (13^+6^-)(24^-5^+)$	5
$C_{10} = Ф^{-1}П^{-1}ФП^{-1}Ф^{-1}П^2Ф \sim [123] \cdot (1^-3)(2^-4^-)$	7
б) *2-циклы*	
$C_{11} = П^{-1}Ф^{-1}П^{-1}ФП^{-1}Ф^{-1}П^2Ф \sim [14](12^+34^-)$	8
$C_{12} = ПНТП^2Т^{-1}П^2Н^{-1} \sim [12][3^-][4^-](24^+3)(1^+5^+)$	7
в) *поворот средних кубиков*	
$C_{13} = ВФ^{-1}В^{-1}ФП^{-1}ФПФ^{-1} \sim [1^-][2^-](1^-2^-)(46^-)$	8
г) *перестановки средних кубиков, не сдвигающие угловых*	
$C_{14} = П^2НВ^{-1}Ф^2ВН^{-1} \sim [136]$	6
$C_{15} = ВПТЛФВ^{-1}Ф^{-1}Л^{-1}Т^{-1}П^{-1} \sim [1^-2^-7]$	10
$C_{16} = ПВН^{-1}Ф^{-1}НВ^{-1} \sim [1^-6^-24^-3]$	6
$C_{17} = (П^2Ф^2)^3 \sim [24][57]$	6
$C_{18} = П^2Ф^2П^2Ф^2 \cdot ПВ^{-1}П^2ВФ \cdot ПВФ^2В^{-1}Ф \sim [2^-][7^-]$	14
$C_{19} = П^{-1}ВПТЛФВ^{-1}ПВ^{-1}П^{-1}Ф^{-1}Л^{-1}Т^{-1}В \sim [2^-][7^-]$	14
2) *Перестановки угловых кубиков, не сдвигающие средних*	
а) *3-циклы*	
$У_1 = ВЛВ^{-1} \cdot П^{-1} \cdot ВЛ^{-1}В^{-1} \cdot П \sim (1^+2^+6^+)$	8
$У_2 = Л^{-1}ТЛ \cdot Ф^{-1} \cdot Л^{-1}Т^{-1}Л \cdot Ф \sim (12^-6^+)$	8
$У_3 = Ф^2П^2Ф \cdot Л \cdot Ф^{-1}П^2Ф \cdot Л^{-1}Ф \sim (126)$	9
$У_4 = Л^2Т^2Л^{-1} \cdot Ф^2 \cdot ЛТ^2Л^{-1} \cdot Ф^2Л^{-1} \sim (1^+26^-)$	9
$У_5 = ПВ^2П \cdot Н \cdot П^{-1}В^2П \cdot Н^{-1}П^2 \sim (12^+6^-)$	9
$У_6 = Л^{-1}ТВ^2Т^{-1}ЛТЛ^{-1}В^2ЛТ^{-1} \sim (1^-2^-6^-)$	10
$У_7 = П^{-1}Т^2П \cdot Ф \cdot П^{-1}Т^2П \cdot Ф^{-1} \sim (1^+7^+4^+)$	8
$У_8 = ФНФ^{-1} \cdot В^2 \cdot ФН^{-1}Ф^{-1} \cdot В^2 \sim (17^+4^-)$	8
$У_9 = Ф^{-1} \cdot ПТ^{-1}П^{-1} \cdot Ф \cdot ПТП^{-1} \sim (1^-74^+)$	8
$У_{10} = Н^2Л^{-1}Н^{-1}П^2НЛН^{-1}П^2Н^{-1} \sim (1^-7^+4)$	9
$У_{11} = Т^{-1}НТ^{-1}П^2ТН^{-1}Т^{-1}НП^2Н^{-1}Т^2 \sim (174)$	11
$У_{12} = П^2Н^{-1}ЛНП^2Н^{-1}Л^{-1}Н \sim (2^+4^-6)$	8
$У_{13} = В^{-1}У_7В \sim (2^+4^+6^+)$	10
$У_{14} = В^{-1}У_{10}В \sim (246)$	11
б) *разворачивание угловых кубиков*	
$У_{15} = (ПФ^{-1}Н^2ФП^{-1}В^2)^2 \sim (2^-)(6^+)$	12
$У'_{15} = П^{-1}У_{15}П \sim (6^+)(3^-)$	14
$У''_{15} = ПУ_{15}П^{-1} \sim (1^-)(6^+)$	14
$У_{16} = У_9^{-1} \cdot У_8 = ПТ^{-1}П^{-1}Ф^{-1}ПТП^{-1}Ф^2НФ^{-1}В^2ФН^{-1}Ф^{-1}В^2 \sim (1^+)(4^+)(7^+)$	15
$У'_{16} = П^{-1}У_{16}П \sim (1^+)(2^+)(7^+)$	15
$У''_{16} = FУ_{16}F^{-1} \sim (1^+)(3^+)(7^+)$, здесь $F = ФН^{-1}Ф^{-1}В^2$	15
$У_{17} = (C_{13})^2 = (ВФ^{-1}В^{-1}ФП^{-1}ФПФ^{-1})^2 \sim (1^+)(2^+)(4^-)(6^-)$	16
$У_{18} = (C_3C_2)^2 = (ФП^{-1}Ф^{-1}ПФ^2П^{-1}Ф^2П)^2 \sim (1^-)(2^+)(4^+)(5^+)(6^+)$	16
в) *3-циклы с разворачиванием*	
$У_{19} = Л^{-1}ТВ^2Т^{-1}ЛН^2ТЛ^{-1}В^2ЛТ^{-1}Н^2 \sim (1^-2^-7^-)(3^-)(5^+)$	12
$У_{20} = (C_{12})^2 = (ПНТП^2Т^{-1}П^2Н^{-1})^2 \sim (2^+34^+)(1^-)(5^-)$	14
г) *пары 2-циклов*	
$У_{21} = (C_1)^3 = (Ф^{-1}П^{-1}ФП)^3 \sim (1^-2^+)(4^-5^+)$	12
$У_{22} = (C_3)^3 = (ФП^{-1}Ф^{-1}П)^3 \sim (14)(26)$	12
$У_{23} = C_{17}П^{-1} = (Ф^2П^2)^2Ф^2П(Ф^2П^2)^2Ф^2П \sim (13)(24)$	12
$У_{24} = (C_{11})^2 = (П^{-1}Ф^{-1}П^{-1}ФП^{-1}Ф^{-1}П^2Ф)^2 \sim (1^+3^-)(2^+4^-)$	16

четно. Поэтому после первого этапа в гранях $Ф$ и $П$ может находиться 2, 4 или 6 таких кубиков. Операция $A_3 = НП^{4-n}Н^{-1}$ $(n = 1, 2, 3)$ «исправляет стрелки» у двух кубиков — 5-го и n-го, а операция $A_4 = НВ^{-1}ПВН^{-1}$ — у четырех (1-, 3-, 5- и 7-го), при этом все кубики «столбика» остаются на местах. Применяя операции типа A_3 и A_4, мы добиваемся того, что стрелки всех средних кубиков будут направлены правильно. Для этого нужно не более 8 ходов.

Третий этап: расстановка средних кубиков. На этом этапе будут поворачиваться только грани Φ и Π, поэтому «столбик» и правильные направления стрелок средних кубиков автоматически сохраняются. Можно доказать (это легко сделает каждый, кто знаком с понятием перестановки), что необходимое для этого передвижение 7 средних кубиков записывается в виде композиции не более трех циклов длины 3 и, возможно еще одного поворота; следовательно, 7 средних кубиков граней Φ и Π можно правильно расставить, использовав не более трех операций типа C_1—C_{10}. Более подробный анализ показывает, что этот этап требует не более 14 ходов.

Четвертый этап: расстановка и разворачивание угловых кубиков. Нам осталось расставить и правильно развернуть 6 угловых кубиков граней Φ и Π. Как выше, можно установить, что необходимое передвижение 6 угловых кубиков записывается в виде композиции не более трех циклов длины 3, поэтому для правильной расстановки 6 угловых кубиков нам потребуется не более трех операций типа Y_1—Y_{14}. После этого можно, применяя операции Y_{15}—Y_{18}, правильно повернуть все кубики. Действительно, повернув два кубика с помощью Y_{16}, мы всегда можем уменьшить число неправильно развернутых кубиков на 1 или 2, пока оно больше двух. Когда же останется два таких кубика, они окажутся повернуты в противоположные стороны, и их правильный разворот достигается снова с помощью Y_{16}, Y'_{16} или Y''_{16}. Гораздо рациональнее, пользуясь нашим богатым запасом 3-циклов угловых кубиков, расставлять и разворачивать их одновременно: среди операций, осуществляющих перестановку данных трех кубиков, всегда можно выбрать одну так, чтобы два из них повернулись на нужные нам углы. Не вдаваясь в детали, отметим, что для 4-го этапа хватает 32 ходов и это число наверняка может быть уменьшено.

Итак, общее число ходов в предлагаемом алгоритме теоретически не превосходит 79, но на практике оно оказывается меньше — около 70.

В одном из следующих номеров журнала мы глубже познакомимся с математикой волшебного кубика. Это позволит нам полностью обосновать приведенный выше алгоритм и рассказать о рекордно коротком (по имеющемся данным) алгоритме — на 52 хода.

Игра, задача или спорт?

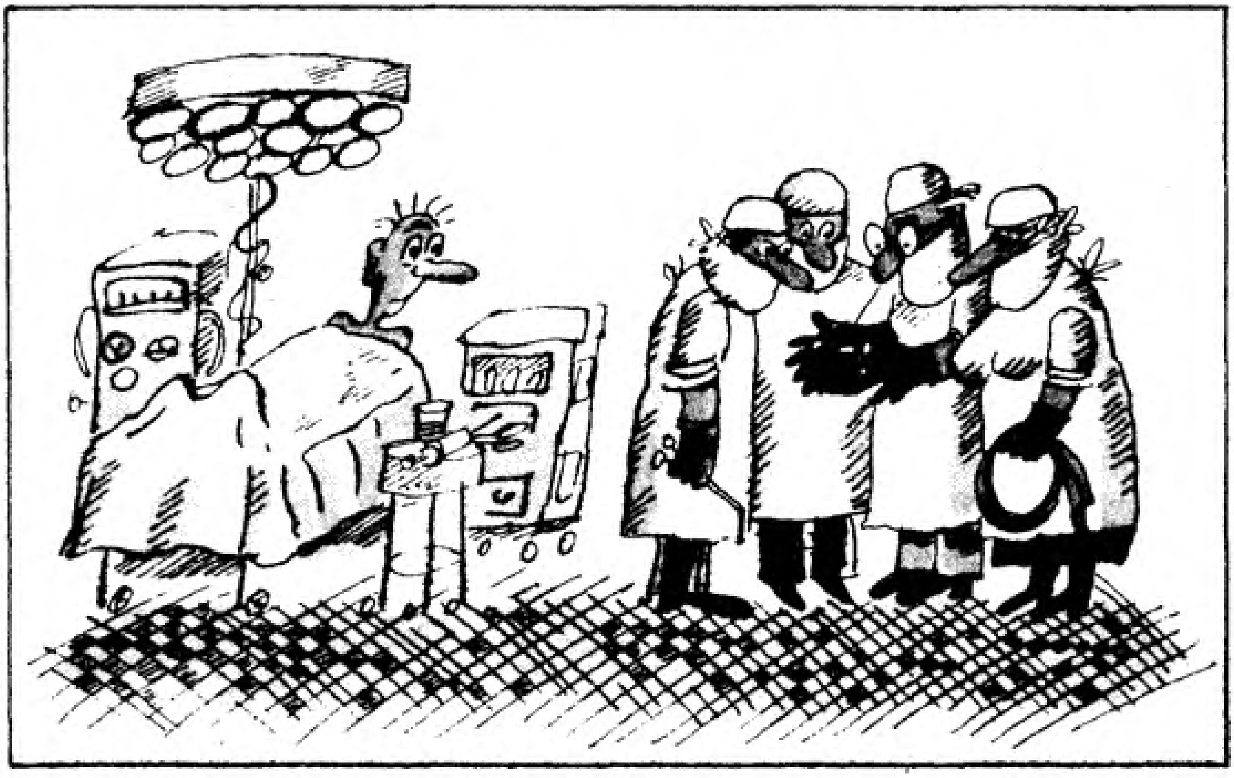
Эти соревнования очень напоминали состязания штангистов — разминочный зал, помост, за которым — огромное табло, участники, собирающиеся с силами (или с мыслями?) перед подходом к снаряду, судьи, аплодисменты зрителей... Только вместо штанги на помосте был установлен небольшой столик с сенсорным электронным фиксатором времени, табло показывало не килограммы, а секунды, вместо грома железа раздавалось тихое поскрипывание, да и «спортсмены» не отличались могучим телосложением тяжелоатлетов. Здесь, в Будапеште, 5—6 июня проходил первый чемпионат мира по «волшебному кубику Рубика». На него съехались чемпионы 19 стран трех континентов — в основном, школьники и студенты-математики.

Соревнования проходили так: очередной участник на глазах зрителей наугад вытаскивал из чемоданчика, наполненного заранее «запутанными» кубиками, один, изучал его в течение 15 секунд, еще несколько секунд мог, как гимнаст, прокручивать в уме начало комбинации, а затем уже демонстрировал совершенство своего алгоритма и, конечно, ловкость пальцев. Было проведено три серии попыток; в зачет шло лучшее время. За соблюдением правил следило жюри, возглавляемое самим изобретателем головоломки — профессором Э. Рубиком.

Результаты, показанные «гроссмейстерами кубика», поразительны. Даже худшее время лишь немногим превышает 55 секунд. (Для сравнения скажем, что нетренированный, но уже знакомый с кубиком человек, пользуясь записью алгоритма, тратит на сборку около двух часов.) Не обошлось и без казусов: чемпион Финляндии в одной из попыток так спешил, что один за другим сломал два кубика. А первое место занял шестнадцатилетний американец Мин Тай, его время — 22,95 секунды!

Так что же такое «волшебный кубик» — игра, математическая задача или... новый вид спорта?

В. Н.



В. Дубровский

Математика волшебного кубика

«Квант» уже рассказывал подробно о конструкции венгерского «волшебного кубика» и алгоритмах решения этой головоломки*). Вслед за кубиком на свет появилась целая серия похожих на него игр. Математической теории таких игр и посвящена наша статья. А для любителей практической игры в кубик мы приводим принципиальную схему рекордно короткого алгоритма волшебного кубика, основанную на этой теории.

Волшебный кубик задает вопросы

Условимся называть различные варианты сборки волшебного кубика, возникающие при произвольной расстановке 8 угловых маленьких кубиков по вершинам большого куба и 12 средних — по ребрам, его *состояниями*. Центральные кубики во всех состояниях расположены одинаково — так же, как в *нулевом состоянии*, когда каждая грань волшебного кубика окрашена в один цвет. Любой слой из 9 маленьких кубиков, примыкающих к одной грани большого куба, разрешено поворачивать на $\pm 90°$ или $180°$. Такое вращение будем называть *поворотом грани* или просто *ходом*, а любую последовательность ходов — *операцией*. Если состояние S_2 можно получить из состояния S_1 с помощью некоторой операции, то и от S_2 можно перейти к S_1, изменив направление каждого из поворотов на противоположное и выполняя их в обратном порядке. В этом случае будем говорить, что состояния S_1 и S_2 *связаны*. В частности, состояние, связанное с нулевым (а только в таких состояниях и может пребывать реальный волшебный кубик, если его не разбирать), назовем *законным*.

Задача 1. Докажите, что общее число состояний волшебного кубика равно $N = 8! \cdot 3^8 \cdot 12! \cdot 2^{12}$ ($n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$, читается: n-факториал).

Мы постараемся ответить на следующие вопросы: любое ли состояние куба является законным, то есть можно ли, собрав маленькие кубики в произвольном порядке, получить затем нулевое состояние поворотами граней? Если нет, то как узнать, законно ли данное состояние и вообще, связаны ли два данных состояния? Сколько существует законных

*) «Квант», 1980, № 12, с. 17; 1982, № 3, с. 20 и № 7, с. 22; см. также «Наука и жизнь», 1981, № 3, с. 131 и 1982, № 2, с. 97.

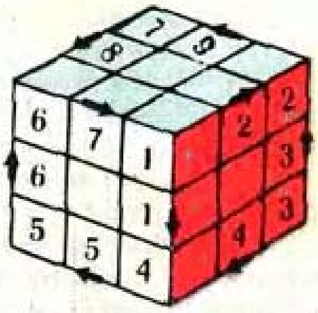


Рис. 1. Нулевое состояние. Скрытый угловой кубик имеет номер 9, скрытые средние — номера 10, 11, 12. На скрытых ребрах стрелки сонаправлены со стрелками на симметричных им относительно центра куба ребрах.

состояний, другими словами — сколько разных раскрасок волшебного кубика можно получить, вращая его грани? Каково максимальное число попарно не связанных состояний? Прежде всего разберемся,

Как задавать состояния

Чтобы полностью описать состояние волшебного кубика, надо для каждого маленького кубика указать м е с т о, которое он занимает, и его о р и е н т а ц и ю на этом месте — каждый угловой кубик можно поместить в одно и то же «гнездо» тремя, а средний — двумя способами.

Представим, что волшебный кубик находится в нулевом состоянии. Перенумеруем его вершины и находящиеся в них угловые кубики числами от 1 до 8, а ребра и соответствующие средние кубики — числами от 1 до 12. Кроме того, на каждом ребре большого куба выберем определенное направление (мысленно нарисуем на нем стрелку) и нарисуем стрелку того же направления на соответствующем среднем кубике (рис. 1).

Теперь местонахождение i-го углового (j-го среднего) кубика в состоянии S можно задать номером $\sigma_S(i)$ ($\tau_S(j)$) той вершины (того ребра), где он находится (здесь $i=1, \ldots, 8$, $j=1, \ldots, 12$).

Чтобы задать ориентацию угловых кубиков, выделим пару противоположных граней большого куба, например его горизонтальные грани. Для определенности предположим, что верхний центральный кубик — синий, а нижний — зеленый*). Каждый угловой кубик имеет либо одну грань синего цвета, либо одну грань зеленого цвета; угол α ($\alpha=0°$, 120° или 240°), на который следовало бы повернуть этот кубик в его «гнезде» вокруг диагонали большого куба против часовой стрелки**), чтобы эта (синяя либо зеленая) грань стала горизонтальной, будем называть *углом поворота* данного углового кубика в состоянии S и обозначать $\alpha_S(i)$, где i — номер кубика.

Ориентацию j-го среднего кубика в состоянии S зададим углом $\beta_S(j)$ между нарисованной на нем стрелкой и направлением ребра, на котором он находится ($\tau_S(j)$-го ребра). Угол $\beta_S(j)$ может равняться 0° или 180°; будем называть его *углом поворота* j-го среднего кубика в состоянии S.

Что общего у связанных состояний

Нам надо выяснить, в каком случае два состояния связаны друг с другом. С этой целью проследим, как изменяются характеристики состояний $\alpha_S, \beta_S, \sigma_S$ и τ_S при поворотах граней. Начнем с углов поворотов. Легко проверить, что

А. Углы поворотов угловых кубиков не изменяются при поворотах четырех вертикальных граней на 180° и при произвольных поворотах горизонтальных граней.

Б. Углы поворотов средних кубиков не изменяются при поворотах двух противоположных (правой и левой на рис. 1) граней на 180° и при произвольных поворотах остальных граней.

В. При повороте любой вертикальной грани на $\pm 90°$ к углам поворотов α_S двух кубиков, стоящих в ее противоположных вершинах, добавляется по 120°***), а к углам

*) Между прочим, кубик раскрашивают по-разному. Мы имеем в виду куб, у которого зеленая и синяя грани противоположны.

**) Разумеется, не разрушая волшебный куб, реально повернуть его угловой кубик в своем гнезде нельзя — мы здесь определяем теоретическое понятие.

***) Как это принято, углы поворотов мы складываем с точностью до 360°, например $240°+240°=120°$, $180°+180°=0°$ и т. д.

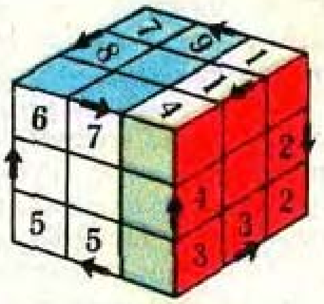


Рис. 2. После поворота правой грани на 90° по часовой стрелке. Здесь $\tau(1)=2$, $\tau(4)=1$, $\tau(2)=3$, $\alpha(1)=\alpha(3)=120°$, $\alpha(2)=\alpha(4)=240°$, $\beta(1)=\beta(2)=\beta(3)=\beta(4)=180°$.

поворотов двух ее других угловых кубиков добавляется по 240°.

Г. При повороте правой или левой (рис. 2) грани на $\pm 90°$ меняются углы поворотов всех четырех средних кубиков этой грани.

Отсюда немедленно вытекает, что *суммы углов поворотов всех угловых и всех средних кубиков*

$$A(S)=\alpha_S(1)+\alpha_S(2)+\ldots+\alpha_S(8),$$
$$B(S)=\beta_S(1)+\beta_S(2)+\ldots+\beta_S \qquad (12)$$

остаются постоянными при всех поворотах граней. Такие характеристики состояния называются *инвариантами* (от латинского «не изменяющийся»). Значения любого инварианта для двух связанных состояний S_1 и S_2, очевидно, совпадают. Поэтому равенства $A(S_1)=A(S_2)$ и $B(S_1)=B(S_2)$ являются необходимыми условиями связанности состояний. Вскоре мы увидим, что, присоединив к ним аналогичное равенство для еще одного инварианта, мы получим и достаточные условия. Но, прежде чем определить этот третий инвариант, нам придется сделать небольшое отступление

О перестановках

Перестановкой конечного множества называется любое отображение этого множества на себя. Таким образом, определенная выше функция σ_S, заданная на множестве $\{1, \ldots, 8\}$, является перестановкой этого множества, а τ_S — перестановка множества $\{1, \ldots, 12\}$. С любой операцией F также связаны две перестановки σ_F и τ_F этих же множеств: если нулевое состояние S_0 переводится операцией F в состояние S, то, по определению, $\sigma_F(i)=\sigma_S(i)$, $\tau_F(j)=\tau_S(j)$. Другими словами, $\sigma_F(i)$ и $\tau_F(j)$ — это номера тех мест (см. рис. 1), которые занимают в результате операции F угловой кубик, стоявший на i-м месте, и средний кубик, стоявший на j-м месте.

Выполнив одну за другой перестановки σ_1 и σ_2 одного и того же множества, мы снова получим его отображение на себя — перестановку σ. Она называется *композицией* σ_1 и σ_2: $\sigma=\sigma_1 \circ \sigma_2$.

Задача 2. Пусть операция F переводит волшебный кубик из состояния S в состояние S'. Докажите, что $\sigma_{S'}=\sigma_{S}\circ\sigma_F$, $\tau_{S'}=\tau_S\circ\tau_F$. Докажите также, что $\sigma_{F_1\circ F_2}=\sigma_{F_1}\circ\sigma_{F_2}$, $\tau_{F_1\circ F_2}=\tau_{F_1}\circ\tau_{F_2}$, где $F_1\circ F_2$ — композиция операций F_1 и F_2.

Пусть σ — произвольная перестановка множества $\{1, 2, \ldots, n\}$. Нарисуем одну под другой две строчки по n точек. Если при перестановке σ число i переходит в j, соединим i-ю точку верхней строки отрезком с j-й точкой нижней строки — мы получим *граф перестановки* σ (рис. 3). Обозначим через $N(\sigma)$ число точек пересечения отрезков графа (точку, в которой пересекается больше двух отрезков, сосчитаем столько раз, сколько пар отрезков ее содержит). Перестановка σ называется *четной* (*нечетной*), если

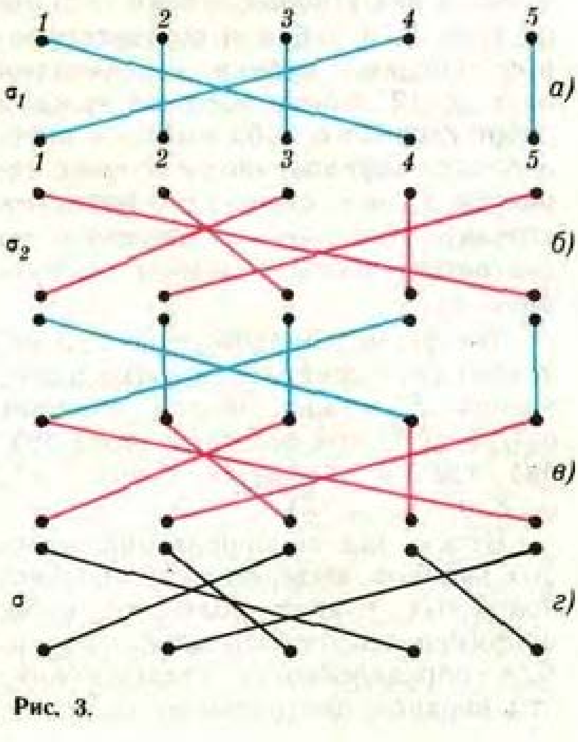


Рис. 3.

число $N(\sigma)$ четно (нечетно). *Знак перестановки* σ определим равенством $\varepsilon(\sigma)=(-1)^{N(\sigma)}$; $\varepsilon(\sigma)$ равно 1 или -1 в зависимости от того, четна или нечетна перестановка. Выясним, как зависит четность композиции $\sigma_1 \circ \sigma_2$ от четностей σ_1 и σ_2. Граф композиции строится очень просто (см. рис. 3): совмещаем нижнюю строку графа перестановки σ_1 (рис. 3, *а*) с верхней строкой графа σ_2 (рис. 3, *б*) — получается «промежуточный» граф (рис. 3, *в*), а затем заменяем каждую ломаную в промежуточном графе на отрезок, соединяющий ее концы (рис. 3, *г*). Число точек пересечения ломаных в промежуточном графе, очевидно, равно $N(\sigma_1)+N(\sigma_2)$. При «распрямлении» ломаных оно может уменьшиться, но его четность сохранится (докажите это самостоятельно). Таким образом, $N(\sigma_1 \circ \sigma_2)$ и $N(\sigma_1)+N(\sigma_2)$ — числа одной четности; следовательно,

$$\varepsilon(\sigma_1 \circ \sigma_2)=(-1)^{N(\sigma_1 \circ \sigma_2)}= =(-1)^{N(\sigma_1)+N(\sigma_2)}=(-1)^{N(\sigma_1)}\times \times(-1)^{N(\sigma_2)}=\varepsilon(\sigma_1)\circ\varepsilon(\sigma_2).$$

Другими словами, *композиция двух перестановок четна, если их четности совпадают, и нечетна в противном случае.*

Допустим, что перестановка σ множества из n элементов оставляет неподвижными $n-m$ элементов, а остальные m элементов можно упорядочить так, что первый из них переходит во второй, второй — в третий и, вообще, i-й — в $(i+1)$-й, а m-й элемент — опять в первый. Тогда перестановка σ называется *циклом длины* m или m-*циклом*. Например, перестановки σ_1, σ_2 и σ, графы которых изображены на рисунках 3, *а, б, г*, являются циклами длины 2, 4 и 5 соответственно.

Задача 3. Докажите, что
а) Любая *транспозиция* (то есть 2-цикл) является нечетной перестановкой.
б) Любой n-цикл является композицией $n-1$ транспозиций. Его четность противоположна четности числа n.
в) Любую перестановку можно представить в виде композиции циклов, причем можно обойтись только транспозициями, а в случае четных перестановок — 3-циклами.

Полная система инвариантов волшебного кубика

Назовем *знаком состояния* S число $\varepsilon(S)=\varepsilon(\sigma_S)\circ\varepsilon(\tau_S)$. Оно равно 1 или -1 в зависимости от того, совпадают или нет четности перестановок σ_S и τ_S.

Рассмотрим поворот F любой грани на 90°. Пусть в результате этого поворота волшебный кубик перешел из состояния S в состояние S'. Тогда (задача 2) $\sigma_{S'}=\sigma_S\circ\sigma_F$, $\tau_{S'}=\tau_S\circ\tau_F$. Перестановки σ_F и τ_F — это 4-циклы, поэтому они нечетны (задача 3, *б*) и $\varepsilon(\sigma_F)=\varepsilon(\tau_F)=-1$. Следовательно, $\varepsilon(\sigma_{S'})=\varepsilon(\sigma_S)\times\varepsilon(\sigma_F)=-\varepsilon(\sigma_S)$, $\varepsilon(\tau_{S'})=-\varepsilon(\tau_S)$ и $\varepsilon(S')=\varepsilon(S)$. Итак, знак состояния не меняется при поворотах граней. Это и есть третий инвариант.

Докажем, что *система инвариантов* $A(S)$, $B(S)$ и $\varepsilon(S)$ — *полная*, то есть, что *совпадение их значений для двух состояний обеспечивает связанность этих состояний.*

Пусть для начала $A(S)=B(S)=0°$, $\varepsilon(S)=1$. Покажем, что состояние S связано с нулевым состоянием S_0. Попробуем воспользоваться алгоритмом из статьи «Алгоритм волшебного кубика» («Квант» № 7 за этот год)*). Первый его этап всегда можно выполнить беспрепятственно. Второй выполним при условии, что число неправильно повернутых средних кубиков четно. Так и будет, ибо сумма углов поворота средних кубиков $B=0°$. Третий этап осуществим всегда. После него волшебный кубик переходит в состояние S', в котором все средние кубики стоят на своих местах, то есть $\tau_{S'}$ — тождественная перестановка. Но $\varepsilon(S')=1$; значит, $\sigma_{S'}$ — четная перестановка, а она разлагается в композицию 3-циклов (задача 3, *в*). Поэтому все угловые кубики мы сумеем расставить по местам. Останется правильно развернуть их. А это можно сделать, пользуясь операциями, указанными в алгоритме, благодаря тому, что сумма углов поворотов $A=0°$.

Пусть далее $A(S_1)=A(S_2)=\alpha$, $B(S_1)=B(S_2)=\beta$, $\varepsilon(S_1)=\varepsilon(S_2)=\varepsilon$. Если $\alpha=\beta=0°$, а $\varepsilon=1$, то оба состояния S_1 и S_2 связаны с нулевым; следовательно, они связаны друг с другом. Наконец, пусть S_1 и S_2 — «незаконные» состояния, например $\alpha=0°$, $\beta=180°$, $\varepsilon=1$. Рассмотрим состояния S_1' и S_2', получающиеся из S_1 и S_2 переворачиванием какого-то одного среднего кубика, скажем сине-белого. Инварианты A и ε при этом, конечно, не меняются, а B становится равным 0°, поэтому S_1' и S_2' связаны. Возьмем волшебный кубик в состоянии S_1 и заклеим синюю

*) Разумеется, можно применить и любой другой алгоритм

грань выбранного среднего кубика белой наклейкой, а белую — синей. Получим состояние S_1'. Переведем его в S_2' и снимем наклейки — получится состояние S_2! Следовательно, состояния S_1 и S_2 связаны. Аналогично доказывается, что любые два состояния с одинаковыми инвариантами связаны. Таким образом, каждый из $3\times2\times2=12$ наборов значений инвариантов A, B и ε (A принимает три значения: 0°, 120° и 240°, B — два: 0° и 180°, ε — тоже два: 1 и —1) определяет класс попарно связанных состояний с этим набором инвариантов, причем состояния из разных классов не связаны; один из классов образован законными состояниями.

Задача 4. Докажите, что число состояний во всех классах одинаково и равно $8!\cdot3^8\cdot\cdot11!\cdot2^{12}$.

Задача 5. Докажите, что значения инвариантов A, B, ε зависят только от состояния волшебного кубика, но не от выбора пары граней, направлений на ребрах и нумерации вершин и ребер.

Рекордный алгоритм

В журнале «Сайентифик Америкэн» (1981 г., № 3) описана общая идея рекордно короткого алгоритма волшебного кубика, придуманного английским математиком М. Тистлетуэйтом. Пользуясь этим алгоритмом, можно перейти от любого законного состояния к нулевому не более, чем за 52 хода*). Алгоритм Тистлетуэйта коренным образом отличается от алгоритмов, которые описаны в упомянутых нами выше статьях. В общих чертах его схема такова.

Введем три ограничения на допустимые повороты граней:

1) запрещается поворачивать две противоположные вертикальные грани (допустим, правую и левую на рис. 1) на $\pm90°$;

2) запрещается поворачивать какую бы то ни было вертикальную грань на $\pm90°$;

3) запрещаются все повороты граней на $\pm90°$.

Обозначим через Φ_1, Φ_2, Φ_3 совокупность всех операций, удовлетворяющих первому, второму, третьему ограничению соответственно (например, Φ_3 — это всевозможные последовательности поворотов граней на 180°), а через Σ_1, Σ_2, Σ_3 — класс всех состояний, получаемых из нулевого операциями из Φ_1, Φ_2, Φ_3. Ясно, что $\Sigma_1\supset\Sigma_2\supset\Sigma_3\ni S_0$ и что любые два состояния из класса Σ_k связаны друг с другом операцией из Φ_k. Весь алгоритм разбивается на четыре этапа. На первом выполняется такая операция F (без ограничений на ходы), которая переводит исходное состояние S в какое-нибудь состояние $S_1\in\Sigma_1$. В дальнейшем разрешаются только операции из Φ_1. На втором этапе с помощью операции $F_1\in\Phi_1$ волшебный кубик переводится в состояние $S_2\in\Sigma_2$, на третьем с помощью операции $F_2\in\Phi_2$ — в состояние $S_3\in\Sigma_3$. Наконец, на четвертом этапе, вращая грани только на 180°, мы должны получить из состояния S_3 нулевое состояние S_0.

Очевидно, попав после очередного этапа в класс Σ_k, мы его уже не покидаем, так что достижения всех предыдущих этапов сохраняются автоматически. Кроме того, вплоть до последнего этапа не нужно «загонять» маленькие кубики на положенные места. Но основное достоинство этой схемы в том, что она гораздо лучше обычных приспособлена к просчету на ЭВМ. Вероятно, это и сыграло решающую роль при «установлении мирового рекорда».

Прежде, чем составлять по этой схеме алгоритм, надо выяснить, что из себя представляют классы состояний Σ_1, Σ_2, Σ_3. Тут-то нам и пригодятся инварианты. С классами Σ_1 и Σ_2 разобраться легко. Вспоминая свойства A и $Б$ углов поворотов маленьких кубиков, мы видим, что *углы поворотов средних кубиков $\beta_S(j)$ инвариантны относительно операций из Φ_1* (свойство $Б$), *углы поворотов угловых кубиков $\alpha_S(i)$ инвариантны относительно операций из Φ_2* (свойство A). Легко заметить также, что при операциях из Φ_2 четыре средних кубика, расположенных в горизонтальном «среднем слое» между верхней и нижней гранями, могут меняться местами только между собой, так что состав этого слоя остается неизменным.

Задача 6. Докажите, что величины $A(S)$, $\varepsilon(S)$ и $\beta_j(S)$ ($j=1, \ldots, 12$) образуют полную систему инвариантов относительно операций из Φ_1, а $\varepsilon(S)$, $\alpha_i(S)$ ($i=1, \ldots, 8$), $\beta_j(S)$ ($j=1, \ldots, 12$) и состав горизонтального среднего слоя — относительно операций из Φ_2.

Столь же просто убедиться, что при операциях из Φ_3, кроме инвариантов, перечисленных в задаче 6, сохраняются также составы двух вертикальных средних слоев и составы двух четверок угловых кубиков, образующих правильные тетраэдры (на рис. 1 в одну

*) В том же журнале сообщается, что в действительности всегда достаточно 23 ходов (!), причем уменьшить это число нельзя. Судя по всему, пока столь короткий реальный алгоритм решения кубика не найден.

из них входят угловые кубики 1, 3, 5, 7, а в другую — 2, 4, 6, 8). Но это еще не все! Имеется еще один инвариант относительно набора операций Φ_3, описывающий зависимость между перестановками угловых кубиков внутри четверок. Возьмем любые два кубика одной из четверок. Они оба прилежат ровно к одной из граней куба. Если это правая или левая грань, то скажем, что эти кубики занимают *1-ю позицию,* если передняя или задняя — то *2-ю,* если верхняя или нижняя — то *3-ю.* Ясно, что вторая пара кубиков этой четверки всегда занимает ту же позицию, что и первая. Для простоты ограничимся состояниями S, у которых состав четверок «правильный» (как в нулевом состоянии). Рассмотрим первую четверку и определим перестановку p_S множества $\{1, 2, 3\}$, полагая $p_S(i)=j$, если пара кубиков этой четверки, занимавшая i-ю позицию в состоянии S_0, занимает j-ю позицию в состоянии S. Аналогично, для второй четверки определим перестановку q_S. Наш последний инвариант — это перестановка $\delta_S=p_S\circ q_S^{-1}$*). Он может принимать любое из $3!=6$ значений.

Задача 7. Докажите, что δ_S действительно инвариант относительно Φ_3 и что вместе с инвариантами, перечисленными выше, он образует полную систему для Φ_3.

Теперь ясно, что на каждом этапе алгоритма следует стремиться к тому, чтобы значения очередной порции найденных нами инвариантов стали такими же, как для нулевого состояния.

Мы предлагаем читателям самостоятельно разработать алгоритм или его отдельные этапы по указанной схеме и прислать в редакцию свои варианты. Лучшие из них будут опубликованы.

Поиграем в другие игры

Даже неискушенные в математике люди сразу признают в волшебном кубике «родственника» знаменитой головоломки «15» Сэма Лойда, хотя внешне они совершенно не похожи. Сходство заключено в общей структуре этих игр, которую можно описать так: имеется некая система, способная пребывать в различных *состояниях,* среди которых одно («нулевое») состояние выделено. Задача состоит в том, чтобы перевести произвольное заданное состояние в нулевое, пользуясь определенным набором стандартных преобразований системы (в случае волшебного кубика — поворотами граней на $\pm 90°$ или $180°$), которые можно назвать *элементарными операциями* или *ходами.* При этом любой ход *обратим* (то есть, сделав его, мы всегда можем одним ходом вернуться в исходное состояние).

Так же, как и для волшебного кубика, в общем случае определяются понятия операции, связанных состояний, инварианта. Еще одно полезное понятие — *орбита состояния:* так называют множество всех состояний, связанных с данным. В частности, как мы видели, множество состояний волшебного кубика распадается на 12 орбит.

Мы предлагаем читателю ряд задач, посвященных исследованию игр указанного типа. В задачах 8—10 требуется доказать некоторые общие свойства этих игр (приводятся только их формулировки). В задачах 11—16 рассматриваются разные примеры, причем дается только описание игры, а ответить нужно на следующие вопросы: 1) каков полный набор инвариантов данной игры? 2) как перевести одно из двух связанных состояний в другое? 3) каково число орбит и состояний в одной орбите?

Задачи

8. Будем писать $S_1\simeq S_2$, если состояния S_1 и S_2 связаны. Тогда для любых состояний S_1, S_2, S_3 1) $S_1\simeq S_1$, 2) $S_1\simeq S_2\Rightarrow S_2\simeq S_1$, 3) $S_1\simeq S_2$, $S_2\simeq S_3\Rightarrow S_1\simeq S_3$. Другими словами, отношение $S_1\simeq S_2$ есть отношение эквивалентности.

9. Орбиты любых двух состояний S_1 и S_2 либо совпадают (если $S_1\simeq S_2$), либо не имеют общих элементов.

10. Если всякая операция, переводящая в себя хотя бы одно состояние, переводит в себя и любое другое состояние, то число N_0 состояний во всех орбитах одинаково, а число всех состояний $N=N_0\cdot k$, где k — число орбит. Проверьте, что указанное свойство операций справедливо для волшебного кубика.

11. Исследуйте игры, отличающиеся от «волшебного кубика» только набором элементарных операций: 1) разрешено вращать только 2 (3, 4 или 5) грани; 2) ход — это поворот пары противоположных граней (одной по, а другой против часовой стрелки) на один и тот же угол; 3) соответственно, обе грани по часовой стрелке.

(Окончание см. на с. 48)

*) Здесь q_S^{-1} обозначает обратное отображение к отображению q_S.

Математика волшебного кубика

(Начало см. на с. 22)

12. «Перекрашенный кубик». Элементарные операции прежние, но 1) на каждом центральном кубике нарисована стрелка, регистрирующая его повороты; 2) куб покрашен в три цвета так, что цвета противоположных граней в нулевом состоянии одинаковы.

13. «Волшебный параллелепипед $n \times m \times k$». Описание этой игры должно быть ясным из названия. Разумеется, неквадратные грани можно поворачивать только на 180°, и вращаются не только грани, но и внутренние слои. Даже среди 9 вариантов, отвечающих $n, m, k < 3$, имеются отнюдь не тривиальные. Вариант $3 \times 3 \times 2$ выпускается в Венгрии под названием «Домино». Недавно в Венгрии стал выпускаться кубик $4 \times 4 \times 4$ под замечательным названием «Месть Рубика»!

14. «Волшебный кубик $3 \times 3 \times 3 \times 3$». (Для тех, кто немного знаком с четырехмерной геометрией.)

15. «Волшебный многогранник». В вершинах и в серединах ребер произвольного многогранника располагаются шарики разных цветов (число цветов равно общему числу вершин и ребер многогранника). За один ход разрешается циклически переставить все шарики одной грани. Состояние здесь полностью описывается перестановками σ_S и τ_S.

16. «Волшебный тетраэдр». Нулевое состояние — правильный тетраэдр, каждая грань которого окрашена в один из четырех цветов. При «поворотах граней» перемещается 4 угловых и 6 реберных «элементов», форму которых уточнять не будем. Важно, что здесь, кроме перестановок, надо учитывать и их ориентацию. Другие варианты получаются с октаэдром, додекаэдром и икосаэдром.

Кубик в картинках

Кандидат физико-математических наук
В. Н. ДУБРОВСКИЙ

Наверное, кубик Рубика уже не нуждается в представлении — только «Квант» посвятил ему четыре большие статьи *), и даже по телевидению его показывали! А самое главное — наконец, он стал появляться в продаже. Теперь повсюду можно встретить людей (обычно весьма юных), пытающихся *собрать* кубик — упорно, но не всегда успешно. Вот мы и решили еще раз рассказать, а точнее — показать на картинках, как это делается.

Повороты граней мы будем изображать с помощью стрелок в квадрате 3×3, изображающем переднюю грань кубика (рис. 0).

Каждый этап сборки задается рисунками, на которых показаны исходное положение *кубичков,* которые переставляются на этом этапе, последовательность поворотов этого этапа и вид кубика после его завершения.

Договоримся, что при сборке грань с синим центральным квадратом всегда будет у нас верхней. Центральный квадрат противоположной грани в разных экземплярах кубика бывает разным; для определенности будем считать его зеленым. Итак, в результате сборки верхняя грань кубика должна стать у нас синей, нижняя — зеленой. Передней гранью по ходу сборки может служить любая из четырех остальных (боковых) граней.

Если вы хоть немного крутили кубик, вы поняли, что центральные кубички всех граней сразу можно считать стоящими на своем месте (поскольку их взаимное расположение жестко установлено конструкцией кубика), а для каждого из остальных кубичков имеется вполне определенное окончательное положение: каждая грань кубичка должна примыкать (по стороне или вершине) к центральному квадрату того же цвета.

Кубик мы будем собирать послойно — сначала нижний слой (первые два шага), потом средний (третий шаг) и, наконец, верхний (последние четыре шага).

*) В. Залгаллер, С. Залгаллер «Венгерский шарнирный кубик» (1980, № 12), М. Евграфов «Механика волшебного кубика» (1982, № 3), В. Дубровский «Алгоритм волшебного кубика» (1982, № 7) и «Математика волшебного кубика» (1982, № 8). См. также заметку «Игра, задача или спорт?» (1982, №7, с. 25) и статью Ю. Демкова «Поворачиваем кубики» (1981, № 12).

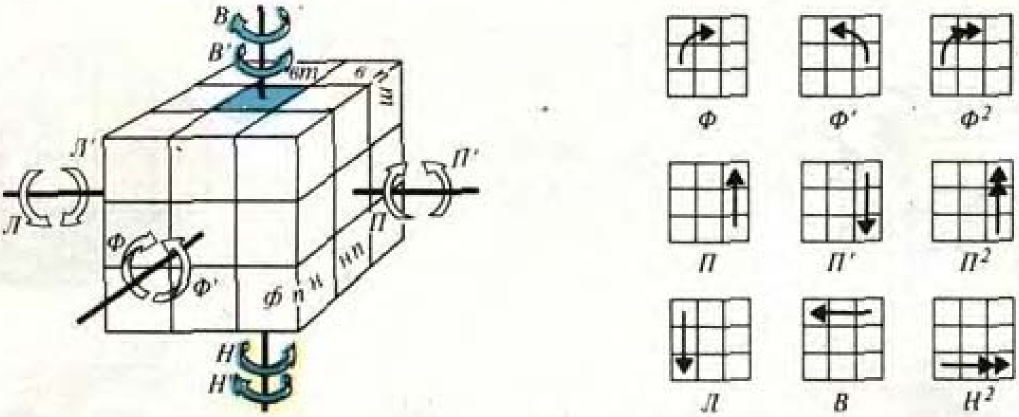


Рис. 0. «Стрелочные» и «буквенные» обозначения поворотов пяти граней (задняя грань нам не понадобится). Например, буква Ф обозначает поворот передней (Фасад) грани на 90° по часовой стрелке, Ф' — ее поворот на 90° против часовой стрелки, $Ф^2$ — ее поворот на 180°. На этом и следующих рисунках незакрашенные грани кубичков — это грани, цвет которых на данном рисунке мы не желаем фиксировать.

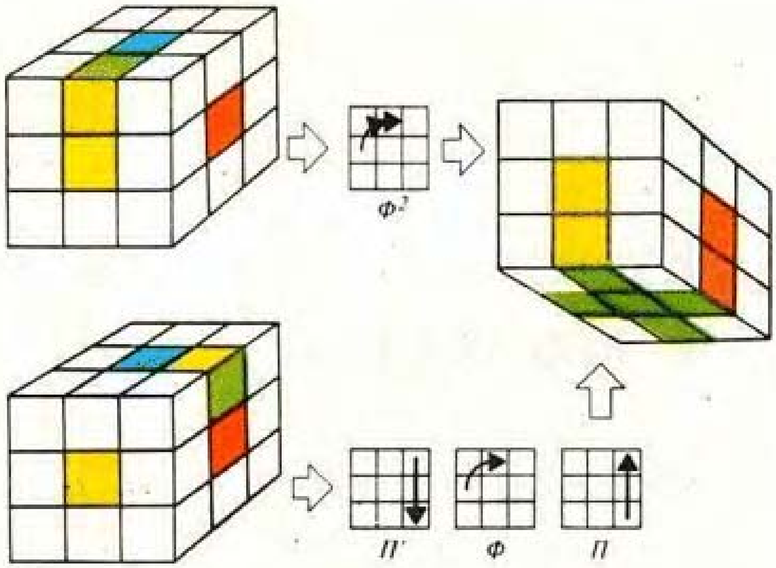


Рис. 1. Первый шаг: установка нижнего реберного кубичка.

Итак, начинаем!

Первый шаг. **Нижний крест:** *устанавливаем нижние реберные кубички* (рис. 1). Выберите какой-нибудь реберный кубичек с зеленой гранью, не стоящий в окончательном положении, и поворотом боковой грани, в которой он находится, переведите его в верхнюю грань. Пусть вторая грань выбранного кубичка — желтая; поворотом кубика сделайте грань с желтым центральным квадратом передней и поворотом верхней грани приведите кубик в какое-то из двух исходных положений рисунка 1. Действуйте согласно рисунку — выбранный кубичек окажется в нужном положении. Устанавливая каждый следующий реберный кубик, нельзя портить уже достигнутое (подумайте, как это сделать!).

В дальнейшем на всех рисунках мы тоже будем переднюю грань изображать желтой (то есть с жел-

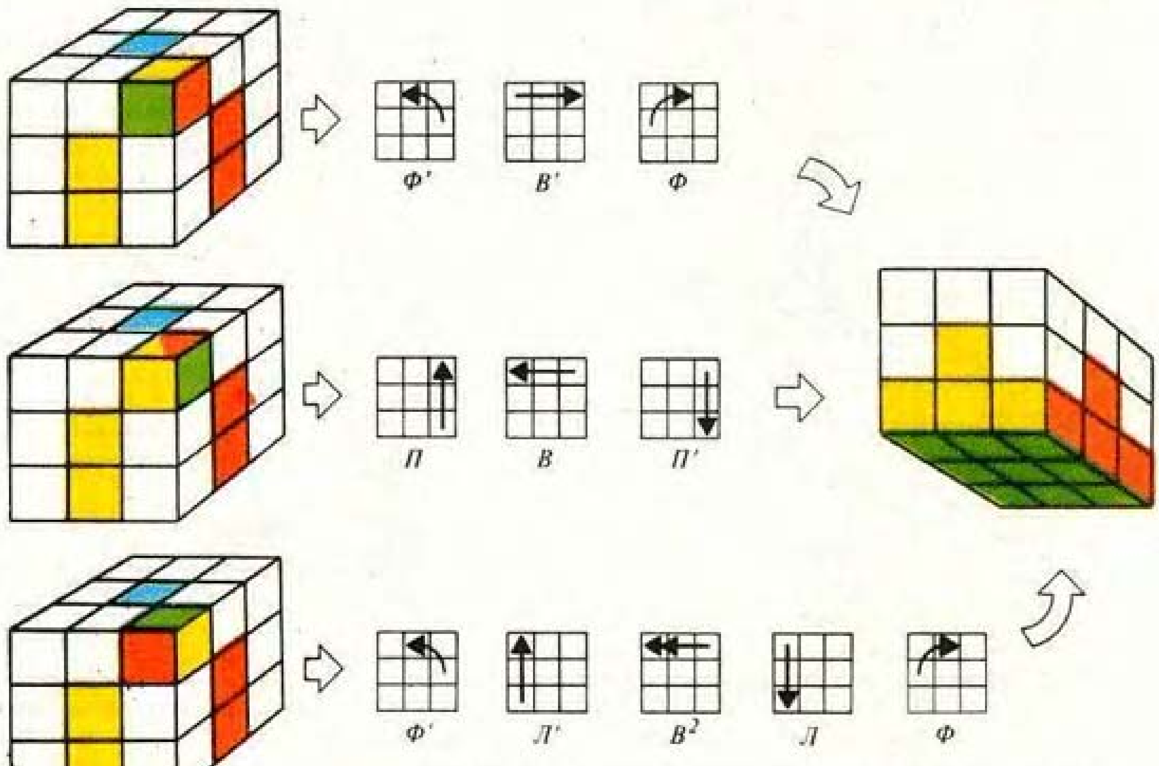


Рис. 2. Второй шаг: установка нижнего углового кубичка.

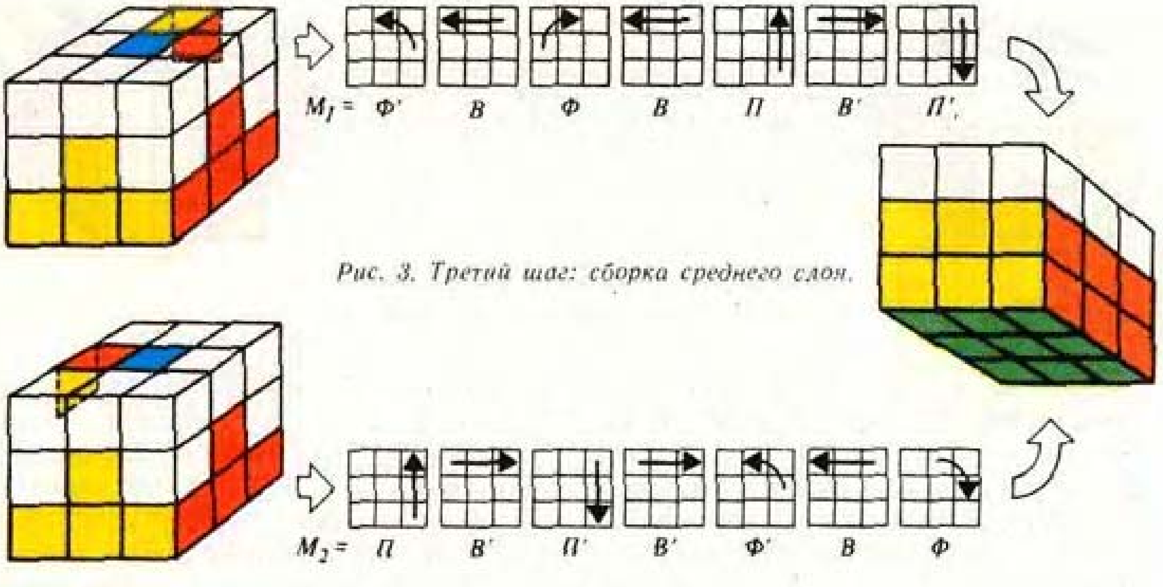


Рис. 3. Третий шаг: сборка среднего слоя.

тым центральным квадратом), правую — оранжевой. Но, разумеется, на каждом шаге, приводя кубик к исходному положению соответствующего рисунка, вам самим придется соображать, какую грань принять за переднюю.

Второй шаг. **Нижние углы:** *устанавливаем нижние угловые кубички* (рис. 2). Выберите какой-нибудь угловой кубичек с зеленой гранью, находящийся в верхнем слое, и поворотом верхней грани поставьте его точно над его местом в нижнем слое. При этом выбранный кубичек займет какое-то из трех исходных положений рисунка 2. Действуйте согласно рисунку — выбранный кубичек окажется в нужном положении. Если в верхнем слое не осталось угловых кубичков с зеленой гранью, но в нижнем слое какой-то угловой кубичек не стоит в окончательном положении, поверните кубик так, чтобы этот кубичек оказался «передним-правым-нижним», и проделайте любую из операций рисунка 2 — он окажется в верхнем слое.

Третий шаг. **Средний слой:** *устанавливаем средние реберные кубички* (рис. 3). Выберите какой-нибудь реберный кубичек без синих граней, находящийся в верхнем слое. Поворотом верхней грани приведите кубик в какое-то из двух исходных положений рисунка 3. Действуйте согласно рисунку — выбранный кубичек окажется в нужном положе-

Рис. 4. Четвертый шаг: ориентирование двух верхних реберных кубичков. (Красные стрелки показывают, как они при этом переставляются, что на этом шаге для нас не важно.)

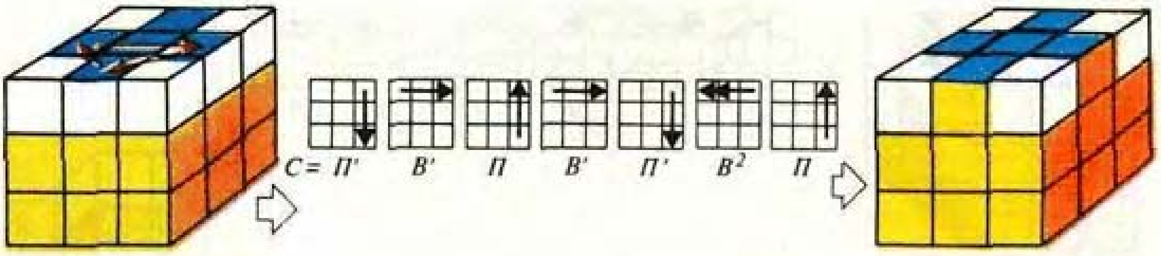


Рис. 5. Пятый шаг: перестановка трех верхних реберных кубичков.

нии. Если в верхнем слое не осталось реберных кубичков без синих граней, но какой-то из средних реберных кубичков не находится в окончательном положении, поверните кубик так, чтобы этот кубичек оказался «передним-правым», и проделайте л ю б у ю из операций рисунка 3 — он окажется в верхнем слое.

Четвертый шаг. **Ориентирование верхних реберных кубичков:** *устанавливаем верхние реберные кубички синими гранями вверх* (рис. 4). Неправильно повернутыми могут быть только два или четыре кубичка — поэтому достаточно уметь переворачивать любую пару. В зависимости от того, хотите вы перевернуть пару соседних или пару противоположных кубичков, выполните одну из двух операций рисунка 4 *) — выбранные кубички перевернутся. (При этом они еще и переставятся.)

Пятый шаг. **Перестановка верхних реберных кубичков:** *расставляем верхние реберные кубички по своим местам, не переворачивая их* (рис. 5). Если один из них уже стоит правильно, *а три других надо переставить* по направлению часовой стрелки (случай А), поместите кубик в исходное положение рисунка 5 и действуйте согласно рисунку — кубички расставятся по своим местам. В противном случае поверните верхнюю грань так, чтобы какие-то два ее реберных кубичка встали правильно. (Это всегда возможно. Почему?) Если два других правильно не встанут, то дальше действуем в зависимости от того, являются ли «правильные» кубички соседними (случай Б) или противоположными (случай В). В случае Б поверните верхнюю грань еще на 90° против часовой стрелки — получится случай А. В случае В действуйте согласно рисунку 5, приняв за переднюю любую боковую грань кубика; после этого, повернув верхнюю грань на 90° в нужном направлении, опять придем к А. (Между прочим, случай В встречается в 5 раз реже случая Б — докажите!)

Остается уже немного.

Шестой шаг. **Ориентирование верхних угловых кубичков:** *устанавливаем верхние угловые кубички синими гранями вверх* (рис. 6). После пятого шага неправильно повернутыми могут быть два, три или все четыре кубичка*). В случае трех «неправильных» кубичков поместите кубик в одно из двух исходных положений рисунка 6 и действуйте согласно рисунку — кубичка повернутся. (При этом они еще и переставятся.) Если надо перевернуть два или четыре кубичка, расположите кубик так, чтобы левый верхний угол передней грани был синим и выполните операцию T' для случая двух кубичков или T для четырех. После этого выполните операцию T, приняв за переднюю соответствующую боковую грань кубика.

И, наконец:

Седьмой шаг. **Перестановка верхних угловых кубичков:** *расставляем верхние угловые кубички по своим местам, не переворачивая их*

*) Присмотревшись к буквенной записи операций F и F', легко увидеть, что они являются взаимно обратными: $F' = F^{-1}$, кроме того, F' можно заменить на F^3. Аналогичные утверждения верны для операций T, T' (шестой шаг) и для операций Z, Z' (седьмой шаг).

*) Причем, например, в случае т р е х неправильно повернутых кубичков их синие грани должны обязательно выходить на р а з н ы е боковые грани кубика. Аналогичные утверждения выполняются и для двух или четырех кубичков. Об этом подробно рассказано в статье «Математика волшебного кубика».

Рис. 6. Шестой шаг: ориентирование трех верхних угловых кубичков. (При выборе исходного положения кубика красные стрелки игнорируются.)

(рис. 7). После шестого шага либо все верхние угловые кубички встанут правильно, либо один из них встанет правильно, а три других надо циклически переставить, либо все они будут стоять неправильно. В первом случае все в порядке — кубик собран. Во втором случае, в зависимости от того, надо ли переставить «неправильные» кубички против часовой стрелки или по часовой стрелке, выполните одну из двух операций рисунка 7 — кубички расставятся по своим местам. В третьем случае выполните л ю б у ю из операций рисунка 7, приняв за переднюю любую боковую грань кубика, — один угловой кубичек встанет правильно, и мы получим предыдущий случай*).

Все. Можно вздохнуть с облегчением — кубик собран!

* * *

Читатель нашего журнала вряд ли удовлетворится тем, что научится собирать кубик по шпаргалке. Как же без нее обойтись? Конечно, все нужные операции можно просто запомнить. И подобраны они так, чтобы это было не слишком трудно.

*) Попробуйте доказать, что в любом случае можно обойтись не более чем двукратным применением операции Z.

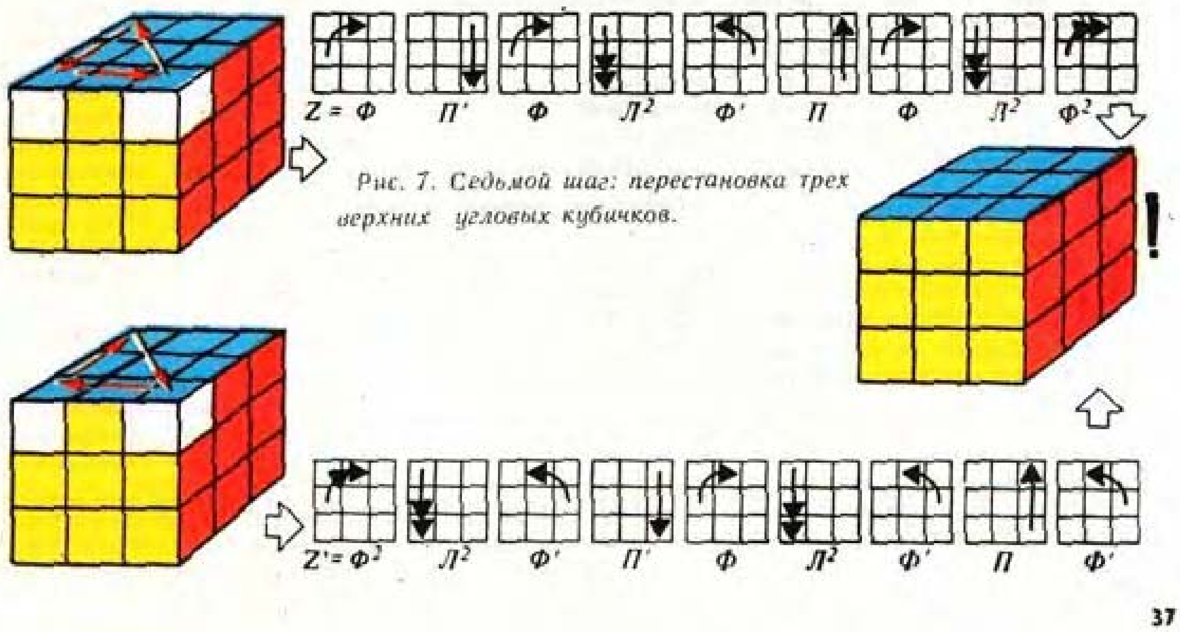


Рис. 7. Седьмой шаг: перестановка трех верхних угловых кубичков.

Операции первых двух шагов совсем короткие. Советуем вам проделать их медленно, поворот за поворотом, и проследить за передвижениями тех кубичков, которые устанавливаются в правильное положение с их помощью, — вы поймете, как эти операции «работают», и научитесь выполнять их не задумываясь. Для каждого из следующих шагов можно запомнить только одну операцию; вторую (там, где она есть) всегда можно заменить на дважды проделанную первую. Отметим еще, что 5 последних ходов операции M_1 (3-й шаг) совпадают с 5-ю первыми ходами F (4-й шаг) и что операция Z (7-й шаг) получается из T (6-й шаг) заменой первого хода $П^2=П'П'$ на $ФП'$ и двух последних — $Ф°П$ — на $Ф'Ф'=Ф^2$. Так что по сути дела надо выучить только три основные операции M_1, C, T и некоторые их варианты.

Однако гораздо интереснее и полезнее проникнуть в «принцип действия» этих операций.

Рассмотрим для начала операцию $M_1=Ф'ВФ\cdot В\cdot ПВ'П'$. Первые три ее поворота $Ф'ВФ$ аналогичны трехходовкам 2-го шага и переводят кубичек *фпн* (способ обозначения кубичков см. на рис. 0) из нижнего слоя в верхний, причем так, что он правильным образом приставляется к соответствующему реберному кубичку (проверьте!); похожи на них и последние три поворота $ПВ'П'$, возвращающие кубичек *фпн* (вместе с приставленным к нему реберным) на место; промежуточный поворот $В$ готовит исходную позицию для последних трех поворотов. Проанализируйте самостоятельно операцию M_2 и операцию $M_3=Ф'ВФВ^2ПВ^2П'$, которую можно применять вместо M_1. После этого попробуйте на той же основе придумать операции, аналогичные M_1 и M_2, для случая, когда кубичек *фпн* стоит на своем месте, но ориентирован неправильно. Можно пойти дальше и разработать операции, позволяющие объединить 2-й и 3-й шаги, то есть одновременно с каждым нижним угловым кубичком устанавливать и примыкающий к нему реберный кубичек среднего слоя.

Операции 4-го и 5-го шагов построены на основе так называемых *коммутаторов*, то есть последовательностей вида $xyx^{-1}y^{-1}$ (x^{-1} — это поворот, обратный к x: $Ф^{-1}=Ф'$, $(Ф')^{-1}=Ф$, $(Ф^2)^{-1}=Ф^2$). Если x и y — это повороты двух смежных граней кубика X и Y (на $\pm 90°$ или $180°$), то коммутатор $xyx^{-1}y^{-1}$ циклически переставляет три реберных кубичка: один — из грани X, другой — из Y, третий — на общем ребре X и Y (проверьте!); при этом переставляются и некоторые угловые кубички, но здесь это нас почти не интересует *). Например, коммутатор $ВПВ'П'$ осуществляет перестановку *фп*→*вт*→*вп*→*фп*. Если же перед ним выполнить поворот $Ф$, а после него $Ф'$, то есть операцию $F=Ф\cdot ВПВ'П\cdot Ф'$, то в этой перестановке вместо кубичка *фп* будет участвовать *фв* (он занимает место *фп* при повороте $Ф$). В результате переставляются три реберных кубичка одной грани — верхней: *фв*→*вт*→*вп*→*фв*, причем два из них, *фв* и *вп*, переворачиваются (это нам и нужно на 4-ом шаге); существенно также и то, что нижние угловые кубички остаются на своих местах. Аналогично устроены операции $F'=Ф\cdot ПВП'В'\cdot Ф'$ и $C=П'В'\cdot ПВ'П'В\cdot ВП$. Придумайте сами другие аналогичные операции; попробуйте научиться сразу составлять верхний крест (шаги 4-й и 5-й), используя не более двух операций такого типа.

Описанный прием преобразования операций (в данном случае — коммутаторов) называется *сопряжением*; в общем виде: $g=a\cdot f\cdot a^{-1}$ — операция, *сопряженная* с f. Этот же прием использован для образования операций двух последних шагов T и Z; обе они сопряжены с $Y=П'ФЛ^2Ф'ПФЛ^2Ф'$: $T=П'YП$, а $Z=Ф'YФ$. Операция Y переставляет три угловых кубичка (*фпв*→*нпф*→*лвт*→*фпв*), оставляя все остальные кубички на местах.

Рекомендуем читателю самостоятельно составить и проделать другие операции по общей схеме $A\cdot BCB^{-1}\cdot A^{-1}\cdot BC^{-1}B^{-1}$, где A и C — повороты двух противоположных граней (на любые из углов $\pm 90°$, $180°$), а B — поворот перпендикулярной им грани (на $\pm 90°$). Можете ли вы объяснить, почему все они циклически переставляют какие-то три угловых кубичка? (Заметьте, что при операции BCB^{-1} в грани A заменяется ровно один кубичек (угловой) — на кубичек из грани C; ср. операции 2-го шага.) Для того чтобы сразу выполнить оба последних шага сборки кубика, всегда достаточно трех и почти всегда — двух операций такого вида (или сопряженных с ними).

Мы раскрыли все секреты описанного метода сборки кубика Рубика и объяснили, как его можно сократить. Остальное — дело рук самих читателей.

*) Алгоритм сборки кубика, целиком основанный на коммутаторах, был опубликован в статье «Венгерский шарнирный кубик».

Новости кубологии

Кандидат физико-математических наук

В. ДУБРОВСКИЙ,
А. КАЛИНИН

Лучшая головоломка XX века, придуманная 13 лет назад венгерским преподавателем дизайна Эрне Рубиком, упорно сопротивляется попыткам разгадать все ее тайны. Сразу после изобретения кубика Рубика начался поиск самого короткого пути к ее решению. Первые разработанные алгоритмы требовали 200—300 ходов (поворотов граней) для того, чтобы вернуть кубик в исходное состояние.

Постепенно длина алгоритмов (т. е. минимальное число ходов, гарантирующее решение) сокращалась. Это происходило за счет изменения последовательности сборки разных частей головоломки (улучшения стратегии) и применения более коротких операций для перестановки и правильной ориентации маленьких кубиков (улучшения тактики). Ставший самым популярным «послойный» алгоритм кубика Рубика («Квант», 1983, № 9) осуществляет сборку не более чем за 108 ходов). Совершенствуя его, удается уменьшить это число до 86 ходов. Дальнейшие улучшения требуют резкого увеличения количества формул, которые необходимо держать в голове или на бумаге в процессе сборки. В период всеобщего увлечения кубиком (1981—1983 гг.) редакция «Кванта» получила не менее десятка объемистых разработок, авторы которых, проделав гигантскую работу по поиску новых операций, получили алгоритмы, позволяющие решать «головоломку века» в среднем за 50—60 ходов*). Наиболее основательную работу проделал московский инженер А. Карасев, разработавший таблицы для сборки кубика из 5412 операций, разбитых на 22 группы по 246 формул в каждой группе!

Одновременно с любителями решать головоломку, держа ее в руках, неприступный кубик штурмовали и программисты. Сначала успеха добились менее «безумные» из них — те, кто взялись за Малый кубик размером $2\times2\times2$ кубичка. Задачу они решали с конца: исходя из правильного состояния кубика, программа начинает «разрушать» его, получая и запоминая результаты всевозможных поворотов граней. Если какая-либо расцветка кубика появляется повторно, то соответствующая операция игнорируется, так что в памяти компьютера остаются только самые короткие формулы. В результате был получен список всех возможных состояний Малого кубика с указанием, после каких поворотов граней они впервые появились. Этот список никогда не был ни опубликован, ни напечатан хотя бы в одном экземпляре. Причина не столько в его громадных размерах, сколько в том, что из-за таких размеров слишком трудно найти в списке нужную вам в данный момент операцию.

Если подсчитать количество состояний Малого кубика после определенного числа поворотов граней, то получится следующая таблица:

1 расцветка — после 0 поворотов граней,
9 расцветок — после 1 поворота граней,
54 расцветки — после 2 поворотов граней,
321 расцветка — после 3 поворотов граней,
1 847 расцветок — после 4 поворотов граней,
9 992 расцветок — после 5 поворотов граней,
50 136 расцветок — после 6 поворотов граней,
227 536 расцветок — после 7 поворотов граней,
870 072 расцветки — после 8 поворотов граней,

*) Подчеркнем, что здесь речь идет именно о среднем числе ходов, а точнее, о числе ходов, которое обычно требовалось самим авторам алгоритмов для сборки кубика их методом.

1 887 748 расцветок —
после 9 поворотов граней,
623 800 расцветок —
после 9 поворотов граней,
2 664 расцветки —
после 11 поворотов граней.

Поворачивая грани 12 раз, компьютер не нашел ни одного нового состояния Малого кубика. Следовательно, чтобы решить головоломку из 8 маленьких кубичков, всегда достаточно сделать не более 11 ходов. Чаще всего хватит и 10 ходов.

Малый кубик есть не что иное, как 8 угловых кубичков классического кубика Рубика. Но в последнем — 26 кубичков, а это уже колоссально усложняет задачу перебора. Кубик Рубика может иметь $N \approx 4{,}3 \times 10^{19}$ различных расцветок. Если ваша программа будет тратить всего 1 микросекунду на получение и анализ одной расцветки, то понадобится 1,4 миллиона лет, чтобы закончить всю работу. Вот почему в начале статьи мы назвали «безумными» тех программистов, что взялись за решение этой задачи.

Из этих программистов первого впечатляющего успеха добился английский математик М. Тистлетуэйт, который разработал совершенно новый алгоритм, позволявший всегда упорядочить кубик Рубика не более чем за 52 хода («Математика волшебного кубика», «Квант», 1982, № 8). Хотя в принципе с помощью этого алгоритма можно собрать кубик и вручную, реально его может выполнить только компьютер. В дальнейшем этот алгоритм удалось несколько улучшить — сначала этого добился сам англичанин, а пару лет назад Х. Клоостерман из Голландии довел длину алгоритма до 42 ходов. Важно отметить, что эта граница обоснована строго (а не эмпирически), т. е. доказано, что из любого состояния кубика Рубика можно вернуться в правильное не более чем за 42 хода, причем данный рекордный алгоритм не может гарантировать лучшего результата. (Это не означает, что другой алгоритм не может оказаться короче.) Конечно, это доказательство существенно использует компьютер (как, например, и относительно недавнее решение знаменитой «проблемы четырех красок»): для каждого из этапов сборки был осуществлен полный перебор вариантов, число ходов, понадобившееся в худшем случае, и принимается за «длину» данного этапа.

Совсем недавно нового достижения добился немецкий математик Герберт Коцемба. Он был среди тех «менее безумных», кто 10 лет назад победили Малый кубик, но затем примкнул к «самым самым» и, возможно, уже остался единственным, кто до наших дней продолжал штурм головоломки века. Теперь к нему пришел заслуженный успех. Он разработал алгоритм и написал программу, которая решает головоломку Рубика менее чем за 21 ход! Сразу скажем, что эта оценка длины, в отличие от предыдущей, эмпирическая: все состояния кубика, которые предлагались программе Коцембы, были упорядочены не более чем за 21 ход. В частности, программа нашла более короткие решения для многих задач на составление узоров на кубике (или пасьянсов), весьма популярных в «золотую эру» кубика. Нет никакой гарантии, однако, что состояний, требующих больше 21 поворота по программе Коцембы, не существует вовсе. Более того, такую гарантию мог бы дать только полный перебор вариантов для каждого этапа программы (их два), а он пока не под силу даже программе Коцембы и его более мощному, чем у предшественников, компьютеру.

Идея алгоритма Герберта Коцембы

Собственно говоря, то, что придумал Коцемба, не является «алгоритмом сборки кубика» в том смысле, как его обычно понимают в «кубологии».

Обычные алгоритмы сборки представляют собой наборы правил, позволяющих для любого заданного состояния кубика поставить некую ближайшую цель и достичь ее, выполнив последовательность поворо-

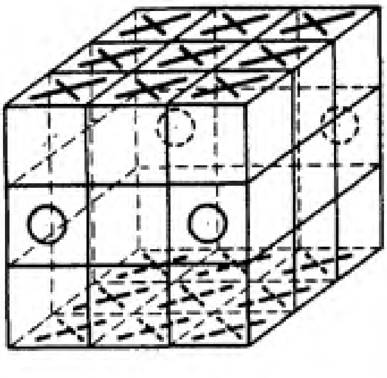


Рис. 1. Промежуточное состояние кубика Рубика.

тов граней, предписываемую правилами в данной ситуации. Тем самым кубик переводится в новое состояние, более близкое к правильному (по крайней мере, с точки зрения данного алгоритма). Например, цель может состоять в том, чтобы найти неправильно стоящий угловой кубичек и переместить его в свой угол, не трогая остальные угловые кубички. И таких маленьких шажков приходится делать очень много.

В алгоритме Коцембы ставится только одна промежуточная цель — кубик надо перевести в одно из состояний, которые так и названы — промежуточными. Они характеризуются тем, что любое промежуточное состояние можно получить из правильного (а значит, и наоборот — превратить его в правильное), поворачивая четыре боковые грани только на 180°, а верхнюю и нижнюю — на произвольный угол (естественно, кратный 90°). Более наглядное описание семейства промежуточных состояний дает специальная расцветка кубика, изображенная на рисунке 1: верхняя и нижняя грани красятся одним цветом, а на каждом из реберных кубичков горизонтального среднего слоя один из двух квадратиков красится вторым цветом; остальную поверхность кубика вообще можно не закрашивать. Первая цель (задача первого этапа) алгоритма Коцембы — восстановить такую раскраску из хаотического исходного состояния. При этом, конечно, можно пользоваться любыми поворотами. На втором этапе применяются только повороты, перечисленные выше. Легко понять, что они автоматически сохраняют нашу вспомогательную раскраску. По существу, на втором этапе происходит только установка каждого кубичка на его место. А благодаря сохранению вспомогательной раскраски правильная ориентация кубичков на своих местах будет обеспечена автоматически. Таким образом, число промежуточных состояний равно числу допустимых перестановок кубичков (т. е. перестановок, получаемых из правильной поворотами граней), при которых реберные кубички среднего слоя остаются в этом слое. Его нетрудно вычислить: четыре кубичка среднего слоя переставляются 4! способами, остальные реберные кубички — 8! способами, угловые — тоже 8! способами. Общее число всевозможных перестановок — $(8!)^2\times\times 4!$ — нужно еще поделить пополам, чтобы выделить допустимые перестановки (см. статью «Математика волшебного кубика»). Итак, получается $N_2=(8!)^2\cdot 4!/2\approx 19{,}5\cdot 10^9$ промежуточных состояний. Эта величина дает представление о порядке числа вариантов, которое должна держать в своей памяти машина, подыскивая достаточно короткую операцию для упорядочивания промежуточного состояния.

На первом же этапе программу интересует не полное описание заданного состояния кубика (т. е. не все $4{,}3\cdot 10^{19}$ возможных вариантов), а только исходное расположение цветов вспомогательной раскраски, которое нужно привести к стандартному виду (рис. 1). Другими словами, здесь важны ориентации всех кубичков и места, занимаемые четырьмя кубичками среднего слоя. Таким образом, число N_1 вариантов, рассматриваемых на первом этапе, равно

(число допустимых ориентаций 8 угловых кубичков)×(число допустимых ориентаций 12 реберных кубичков)×(число расположений кубичков горизонтального слоя)$=3^7\cdot 2^{11}\cdot C_{12}^4\approx 2{,}217\cdot 10^9$

(почему 3^7 и 2^{11}, а не 3^8 и 2^{12}, объясняется в упомянутой выше «Математике волшебного кубика»).

Естественно, $N_1 N_2$ — это общее число допустимых состояний кубика, и оно на 9 порядков больше числа N_1+N_2 вариантов, охватываемых программой. Тем не менее, даже это уменьшенное число все еще слишком велико, чтобы можно было произвести исчерпывающий перебор случаев и запомнить его результаты. Поэтому машина не знает заранее, какое решение она выдаст для введенного в нее исходного состояния кубика. Она ищет решение «в присутствии заказчика» и выдает, возможно, не кратчайший, но достаточно короткий вариант.

Отметим, что метод Коцембы также восходит к алгоритму Тистлетуэйта. Однако в последнем используются не один, а три вложенных друг в друга класса промежуточных состояний, отвечающих поэтапному сужению набора разрешенных поворотов; второй из этих трех классов и составляют промежуточные состояния Коцембы. Понятно, что если вам нужно добраться из пункта *A* (исходное состояние) в пункт *B* (правильное состояние) и по дороге обязательно посетить пункт *C* (промежуточное состояние), то такой путь *ACB* может оказаться длиннее прямого пути *AB*, даже если его отрезки *AC* и *CB* проходятся оптимально. А если еще и на пути из *A* в *C* надо завернуть в *D*, а из *C* в *B* — в дополнительное промежуточное состояние *E*, то получится еще более длинный путь *ADCEB*. Зато каждый из отрезков этого пути уже настолько сокращается, что полный перебор случаев становится возможным. Так и появились рекордные результаты Тистлетуэйта и Клоостермана.

Как работает программа Коцембы

Грубо говоря, Коцемба заставляет машину просматривать всевозможные цепочки поворотов, разрешенных на соответствующем этапе, и ловить момент, когда цель этого этапа будет достигнута. Однако при таком лобовом подходе объем просматриваемых вариантов был бы слишком велик. Так, первый ход можно сделать $6\times 3=18$ способами (любую из шести граней можно повернуть на один из трех углов — $180°$, $\pm 90°$), на втором и каждом из следующих ходов число способов равно 15, так как нет смысла дважды подряд поворачивать одну грань. Таким образом, возникает «дерево вариантов», от каждой ветви которого отходят пять следующих ветвей. (На самом деле, начиная с определенного момента некоторые ветви будут срастаться, потому что разные цепочки ходов могут порождать одинаковые преобразования кубика.) Число цепочек ходов длины, не превосходящей n, равно сумме геометрической прогрессии $18(1+15+...+15^{n-1})$.

Между прочим, только при $n=18$ это число превысит общее число N состояний кубика, а значит, заведомо найдутся состояния, которые нельзя упорядочить меньше чем за 18 ходов. В действительности, из-за сращивания ветвей дерева вариантов число 18 можно еще увеличить. (В свое время промелькнуло сообщение о том, что доказано существование состояний, не решаемых быстрее чем за 21 ход; впрочем, оно могло быть не вполне достоверным.) Как видим, результаты, показываемые программой Коцембы, близки к наилучшим.

Сокращения перебора Герберт Коцемба добился с помощью специальной фильтрующей программы. Она хранит определенную информацию о всех цепочках из, скажем, не более чем 8 ходов, и позволяет отсеивать состояния, которые заведомо не упорядочиваются (в смысле 1-го или 2-го этапов алгоритма) такими цепочками. Начав «сборку», компьютер настраивается выполнить первый этап за 10 ходов. Он порождает первые два хода и включает фильтр на 8 ходов; если возникшее состояние не отсеется, производится третий ход и включается фильтр на 7 ходов, и т. д. Если на каком-то шагу произойдет отсев, надо поменять предыдущий сделанный ход. Пока что для всех позиций, предлагавшихся программе,

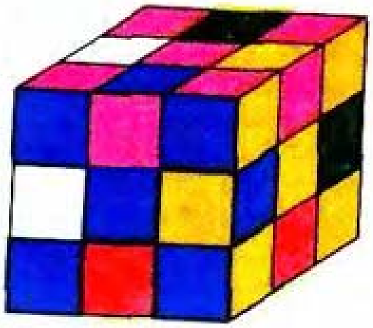


Рис. 2. Пасьянс «реверс» — все реберные кубички перевернуты на своих местах.

удавалось осуществить первый этап не более чем за 10, а второй — не более чем за 14 ходов.

Для реализации своего алгоритма Коцемба использовал персональный компьютер Atari ST с памятью 1 Мбайт и частотой 8 Мгц. Ядро программы — генератор операций с блоком проверки, написанные на Ассемблере. Размеры этого ядра — менее 500 байт! Остальные части программы, которые не оказывают существенного влияния на быстродействие, выполнены на Бейсике. В результате среднее время нахождения одного решения — 1,5 минуты (10 секунд на первый этап и 85 секунд на второй). Работа построена так: в компьютер вводят описание конкретного кубика (расположение и ориентацию всех кубичков). После этого машина ищет и запоминает лучшие (не более 13 ходов) пути для достижения промежуточного состояния, а затем для самого короткого из них включается второй этап. Если суммарная длина полученной после этого операции больше 21 хода, компьютер возвращается к этапу 1 и пытается найти более короткое решение на базе другого промежуточного состояния, возможно, увеличив длину первого этапа. Предъявляя компьютеру различные варианты запутанного кубика, Герберту всегда удавалось обнаружить операцию не длиннее 21 хода, хотя бы на это и уходило много часов работы программы.

Герберт Коцемба обратился ко всем любителям кубика с предложением присылать ему варианты запутанного кубика, к которым не удается вручную найти операции короче 21 хода. А мы в 1982—83 гг. проводили конкурс среди читателей популярного еженедельника «Собеседник» по лучшим узорам (пасьянсам) на гранях кубика Рубика. Тогда победители нашли операции короче 21 хода ко всем узорам, кроме одного (см. рис. 2), и теперь мы послали эту задачу в Дармштадт, где живет автор рекордного алгоритма.