МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ ИССЛЕДОВАНИЯ СОЦИАЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ

В. Скитович

2005

Введение

Объекты социальных процессов представляют собой, как правило, элементы живой природы, что существенно отличает методы их изучения от методов применяемых в естественных науках. Так, в частности, прямое взаимодействие исследователя с изучаемым объектом часто оказывается нежелательным, поскольку может привести и приводит к изменению характеристик этого объекта. Иногда размеры и масштабы социальных процессов делают такое взаимодействие просто невозможным. В результате этого приходится заменять исследуемый объект его *моделью.* Понятие модели является первичным и поэтому неопределяемым. Однако, многими авторами предлагаются различные *квазиопределения*, в которых делаются попытки раскрыть содержание этого понятия. Если попытаться обобщить подобные "определения", то получится примерно следующее.

Квазиопределение. *Модель объекта* — это концентрированная и упорядоченная информация об объекте, записанная на некотором языке.

При этом используемый "язык" может трактоваться достаточно широко, что позволяет включать в данное "определение" как имитационные, так и физические модели. Такая расширенная трактовка языка позволяет многим авторам говорить о модели как о некотором "тексте". Мы в дальнейшем будем говорить исключительно о математических моделях, имея в виду, что нами будет использоваться язык математики — *язык формальной логики.*

Однако, чтобы записать информацию об объекте, надо этой информацией обладать. Как показывает история развития применения математического моделирования, основным источником должна быть *теория* рассматриваемого явления действительности. Однако, любая теория — это также некоторый текст, в котором систематизирована и упорядочена информация об объекте исследования. Чем же тогда теория отличается от модели? Формально ничем, так как любая теория — это, безусловно, всегда некоторая модель реальной действительности. Однако принято считать, что теория моделирует реальность на более высоком уровне абстракции.

В процессе исследования некоторого объекта на основе математического моделирования принято выделять четыре следующих этапа.

Первый этап связан непосредственно с построением самой математической модели. На этом этапе осуществляется отображение исследуемого объекта, точнее информации об объекте, в "текст". Поскольку это отображение носит самый общий характер и заранее невозможно указать какими свойствами оно может или должно обладать, его принято называть *морфизмом.* В содержательном плане, когда мы говорим о математическом моделировании, отображение представляет собой процесс *формализации*, т. е. запись используемых понятий и отношений, которые собственно и определяют исследуемый объект, на языке математики.

Второй этап представляет собой исследование модели, построенной на первом этапе. Результатом этого исследования будут некоторые выводы о свойствах и характеристиках построенной модели. Если говорить о математических моделях, то, по-видимому, их исследование должно быть доверено математикам. Выводы о свойствах модели в этом случае, как правило, будут оформлены в виде теорем или в виде других математических утверждений.

На третьем этапе на основе полученных выводов о модели делается попытка сделать выводы о самом исследуемом объекте или обычно говорят об *интерпретации* полученных результатов. Сделанные выводы могут оказаться уже известными, тогда говорят об объяснительном характере построенной модели. Если выводы в целом согласуются с теорией и при этом несут новую информацию об исследуемом объекте, то говорят о теоретической значимости построенной модели. Если полученные выводы противоречат теории, то необходимо или уточнить (модифицировать) модель или пересмотреть саму теорию.

На четвертом этапе решается вопрос о практической значимости построенной модели на основе проверки соответствия полученных выводов реальной действительности. Эту процедуру принято называть *верификацией* полученных результатов. Поскольку, как известно, последним и окончательным критерием истинности служит практика, то только попытка применения полученных выводов позволит получить ответ на поставленный вопрос.

Сам процесс исследования носит циклический характер, упрощённая схема которого имеет следующий вид:

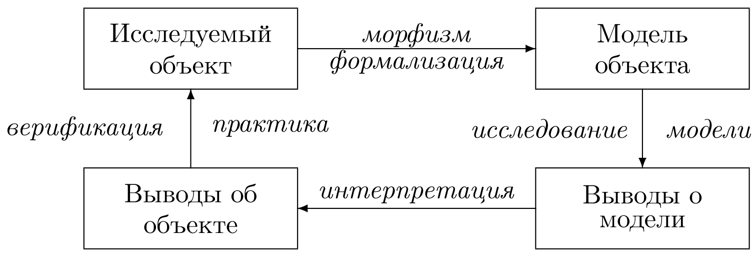


Рис. 1. Схема циклического исследования.

Указанный циклический процесс, возможно иногда с пропуском отдельных этапов, осуществляется до тех пор, пока не удастся построить *адекватную* модель. Под *адекватностью* обычно понимается способность модели отражать некоторые свойства изучаемого объекта. Полностью адекватных моделей нет и не может существовать. Любая модель — это всегда упрощённая копия действительной реальности. Следовательно нельзя утверждать, что существует одна единственная "правильная" модель изучаемого объекта. Этот факт не позволяет говорить о некоторой общей методологии построения моделей и заставляет рассматривать решение этой проблемы в большей степени как искусство, зависящее от объёма знаний и опыта исследователя.

Таким образом, любая модель может дать только ограниченную информацию о реальной действительности. И если мы хотим в результате моделирования получить большую информацию, то должны строить множество самых разнообразных моделей, каждая из которых будет отражать различные стороны и связи исследуемого явления.

Часть I

Дискретные модели

Глава 1

Элементы математической логики и теории множеств

1.1 Логические высказывания

Познавая окружающий мир, мы отражаем его через *понятия* и в виде новых *понятий*. Связывая и сопоставляя различные понятия мы приходим к некоторым умозаключениям, *утверждениям* или *отрицаниям*, например: "Все люди смертны", "Невозможно создать вечный двигатель", "$2 \times 2 = 5$" и т. п. Подобные утверждения и отрицания обладают тем свойством, что, сопоставляя их с действительностью, мы имеем возможность оценить каждое из них как *истинное* или как *ложное*. Математическая логика изучает умозаключения с точки зрения их внутреннего строения, поэтому в дальнейшем любые утверждения и отрицания мы будем называть *высказываниями*.

Определение. Под высказыванием будем понимать предложение, о котором имеет смысл говорить, что оно или истинно или ложно.

Так предложение "$2 \times 2 = 4$" представляет собой высказывание, являющееся истинным. Предложение "$2 \times 2 = 5$" также будет высказыванием, но уже ложным. Предложение "$x \times y = 4$" уже не будет являться высказыванием, так как значения x и y нам неизвестны и мы не можем оценить его истинность или ложность. Возможны случаи (*парадоксы*), когда то или иное предложение нельзя охарактеризовать ни как истинное, ни как ложное, которое в отличие от предыдущего примера не содержит ничего неопределённого. Так утверждение, известное как *парадокс лжеца*,

"Я лгу",

если признать его содержание истинным, оказывается ложным. Если считать его ложным, то оно оказывается истинным.

Так как в дальнейшем нас не будет интересовать содержание высказываний, то будем их просто обозначать прописными буквами латинского алфавита, иногда с индексами: A, B, C_i, H_k. Если высказывание истинно (ложно), то будем говорить, что оно имеет значение Л (И).

Также как и в обыденной речи из отдельных высказываний можно строить более сложные высказывания, используя для этого логические операции (пропозициональные связки). При этом нас будут интересовать условия, при которых получающееся высказывание будет истинным.

Если некоторому истинному высказыванию предпослать оборот "неверно, что ...", то оно превратится в ложное. Например, высказывание "Неверно, что Москва - столица России." является ложным.

Определение. Отрицанием высказывания P будем называть высказывание $\neg P$ (читается "не P"), истинное тогда и только тогда, когда высказывание P ложно.

Отрицание высказывания можно определить также таблицей истинности

P	$\neg P$
И	Л
Л	И

Заметим, что двойное отрицание ($\neg\neg P$) равнозначно исходному высказыванию P, так как оба эти высказывания принимают одно и тоже значение истинности. В этом можно убедиться с помощью таблицы истинности, рассматривая $\neg P$ как исходное высказывание.

Определение. Высказывание $P \vee Q$ (читается "P или Q"), ложное тогда и только тогда, когда оба высказывания ложны, будем называть *дизъюнкцией.*

В обыденной речи дизъюнкции соответствует союз "или". Например, высказывание "$2 \times 2 = 5$ или Петерим Сорокин — социолог." будет истинным. А высказывание "Париж — столица России или $\pi > 5$." будет уже ложным.

Определение. Высказывание $P \wedge Q$ (читается "P и Q"), истинное тогда и только тогда, когда оба высказывания истинны, будем называть *конъюнкцией* .

В обыденной речи конъюнкции соответствует соединительный союз "и". Например, высказывание "Москва — столица России и 6 кратно 3." является истинным. А высказывание "Берлин — столица Франции и социология — наука." будет уже ложным.

Определение. Высказывание $P \to Q$ (читается "если P , то Q"), ложное тогда и только тогда, когда P истинное, а Q ложное, будем называть *импликацией* .

В обыденной речи импликации соответствует оборот "если ..., то ..." или "из... следует ...". Например, высказывание "Если $2 \times 2 = 5$, то сахар фиолетовый." является истинным, так как из ложной посылки можно вывести любое следствие. А высказывание "Если $\pi > 3$, то число сторон треугольника также будет больше трёх." будет уже ложным.

Все рассмотренные логические операции могут быть заданы таблицей истинности

P	Q	$P \vee Q$	$P \wedge Q$	$P \to Q$
И	И	И	И	И
И	Л	И	Л	Л
Л	И	И	Л	И
Л	Л	Л	Л	И

1.2 Формулы логики высказываний

Введенные логические операции (отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация) позволяют получать из простых высказываний более сложные. Если вместо простых высказываний брать уже построенные более сложные, то появляется возможность строить многоступенчатые конструкции сложных высказываний, которые принято называть *формулами.* Дадим формальное определение формулы.

Пусть имеется алфавит, который содержит следующие наборы символов:

1. высказывания: $A, B, \ldots, H_k, \ldots$;

2. логические связки: $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow$;

3. скобки (левая и правая): (,) .

Тогда *словом* для данного алфавита будет являться любая последовательность указанных символов, например, $A(\neg D)) \rightarrow (H_i \vee \wedge(C \vee \neg)$. Но не каждое слово будет являться формулой. Для этого оно должно удовлетворять некоторым требованиям.

Определение.

1. высказывание, обозначенное прописной буквой латинского алфавита (возможно с индексом), есть *формула*;

2. если Ψ — формула, то $(\neg\Psi)$ — формула;

3. если Ψ, Φ — формулы, то $(\Psi \wedge \Phi), (\Psi \vee \Phi), (\Psi \rightarrow \Phi)$ — формулы;

4. все другие слова, которые не могут быть получены по первым трём правилам, формулами не являются.

Можно проверить, что слово $((\neg(A \vee B)) \rightarrow (A \wedge B))$ является формулой, так как может быть построено из высказываний A и B последовательным применением пунктов 2 и 3 данного определения. С другой стороны, слово $(A \rightarrow B($ согласно п.4 формулой не является, так как в любой формуле число левых и правых скобок должно обязательно совпадать. Чтобы упростить запись формул, обычно договариваются не писать внешние скобки, а также опускать некоторые внутренние считая, что в формулах (подформулах) без скобок логические операции выполняются в следующей последовательности: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$. Так, например, вышеприведённая формула примет следующий более простой вид: $\neg(A \vee B) \rightarrow A \wedge B$.

Так как согласно определению, формула представляет собой последовательное применение логических операций к некоторым подформулам, то для любой формулы может быть построена таблица истинности. В качестве примера построим таблицу истинности для рассматриваемой формулы

A	B	$A \vee B$	$\neg(A \vee B)$	$A \wedge B$	$\neg(A \vee B) \rightarrow A \wedge B$
И	И	И	Л	И	И
И	Л	И	Л	Л	И
Л	И	И	Л	Л	И
Л	Л	Л	И	Л	Л

1.3 Равносильность формул

Определение. Пусть Φ и Ψ — две формулы и $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — простые высказывания, входящие по крайней мере в одну из формул Φ или Ψ. Формулы Φ и Ψ будем называть *равносильными*, если при любых значениях истинности высказываний $A_1, A_2, \ldots, A_n$ значения истинности формул Φ и Ψ совпадают.

Равносильность двух формул Φ и Ψ будем обозначать посредством знака равенства: $\Phi = \Psi$.

Введение понятия равносильности позволяет сократить число используемых логических связок, выражая одни логические операции через другие. Так, например, импликацию можно выразить через конъюнкцию и отрицание, т. е. имеет место следующая равносильность: $A \to B = \neg A \vee B$. Доказательством данной равносильности служит следующая таблица истинности:

A	B	$\neg A$	$\neg A \vee B$	$A \to B$
И	И	Л	И	И
И	Л	Л	Л	Л
Л	И	И	И	И
Л	Л	И	И	И

Используя следующие равносильности, можно осуществлять тождественные преобразования формул.

1. Коммутативность

$$A \vee B = B \vee A,\ A \wedge B = B \wedge A.$$

2. Ассоциативность

$$(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C),\ (A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C).$$

3. Дистрибутивность

$$A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C),\ A \wedge (B \vee C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C).$$

4. Законы поглощения

$$A \wedge (A \vee B) = A,\ A \vee (A \wedge B) = A.$$

5. Закон двойного отрицания

$$\neg(\neg A) = A.$$

6. Законы де Моргана

$$\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B,\ \neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B.$$

7. Законы идемпотентности

$$A \vee A = A,\ A \wedge A = A.$$

8. Формулы расщепления

$$A = (A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B),\ A = (A \vee B) \wedge (A \vee \neg B).$$

Каждая из этих равносильностей может быть проверена с помощью таблиц истинности.

1.4 Нормальные формы

Обозначим через $A^{'}$ одно из двух высказываний A или $\neg A$.

Определение. Формулу $A_1^{'} \wedge A_2^{'} \wedge \ldots \wedge A_n^{'}$ будем называть *элементарной конъюнкцией.*

Следующие формулы являются элементарными конъюнкциями:

$$A\,,\ \neg B \wedge C\,,\ \neg A \wedge B \wedge C\,,\ A \wedge B \wedge \neg A.$$

Определение. Формулу $A_1^{'} \vee A_2^{'} \wedge \ldots \vee A_n^{'}$ будем называть *элементарной дизъюнкцией.*

Следующие формулы являются элементарными дизъюнкциями:

$$A\,,\ \neg B \vee C\,,\ \neg A \vee B \vee C\,,\ A \vee B \vee \neg A.$$

Определение. Формулу, представляющую собой дизъюнкцию элементарных конъюнкций, будем называть *дизъюнктивной нормальной формой* (сокращенно ДНФ), а конъюнкцию элементарных дизъюнкций - *конъюнктивной нормальной формой* (КНФ) .

Теорема 1. *Любая формула логики высказываний может быть представлена в виде равносильной ей ДНФ или КНФ.*

Как правило, подобное представление может быть реализовано различными способами. Так, например, формула $A \vee B$ уже находится в ДНФ. Однако она может быть записана в следующем виде

$$A \vee B = A \wedge (B \vee \neg B) \vee B \wedge (A \vee \neg A) = (A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B),$$

где каждая элементарная конъюнкция включает все простые высказывания исходной формулы. Такое представление формулы оказывается уже с точностью до перестановки элементарных конъюнкций однозначным и носит название *совершенной ДНФ.*

Определение. Пусть формула Φ содержит простые высказывания $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Будем говорить, что формула Φ находится в *совершенной дизъюнктивной нормальной форме (СДНФ)* относительно этого списка высказываний, если выполняются следующие условия:

1) формула Φ находится в ДНФ;

2) каждый дизъюнктивный член формулы Φ является n-членной конъюнкцией, причём на k-ом месте $(1 \leqslant k \leqslant n)$ этой конъюнкции стоит либо высказывание A_k либо его отрицание $\neg A_k$;

3) все дизъюнктивные члены попарно различны.

Теорема 2. *Любая формула логики высказываний может быть представлена единственным образом в виде равносильной ей СДНФ.*

Имеется два способа построения СДНФ. Первый способ состоит в последовательном осуществлении равносильных преобразований по следующему алгоритму:

1) Все логические операции в формуле выражаются через операции дизъюнкции, конъюнкции и отрицания.

2) Используя законы де Моргана добиваемся, чтобы операции отрицания относились только к элементарным высказываниям.

3) Используя свойство дистрибутивности добиваемся, чтобы все конъюнкции выполнялись раньше, чем дизъюнкции и тем самым получаем некоторое представление исходной формулы в ДНФ.

4)Если в полученной ДНФ имеется несколько одинаковых элементарных конъюнкций, то оставляется только одна.

5) Если в элементарную конъюнкцию одновременно входит некоторое высказывание и его отрицание, то удаляем эту конъюнкцию из ДНФ.

6) Если высказывание или его отрицание входит в элементарную конъюнкцию несколько раз, то оставляем только одно вхождение.

7) Если в в какую-либо элементарную конъюнкцию $A_1^{'} \wedge A_2^{'} \wedge \ldots \wedge A_r^{'}$ не входит высказывание A_k или его отрицание $\neg A_k$, то эту конъюнкцию заменяем на равносильную

$$A_1^{'} \wedge A_2^{'} \wedge \ldots \wedge A_r^{'} = (A_1^{'} \wedge A_2^{'} \wedge \ldots \wedge A_r^{'}) \wedge (A_k \vee \neg A_k)$$

и переходим к выполнению пункта 3).

8) Используя свойство коммутативности добиваемся, чтобы в каждой элементарной конъюнкции на k-ом месте стояло высказывание A_k или его отрицание $\neg A_k$.

Второй способ построения СНДФ состоит в том, что сначала строится для исходной формулы таблица истинности а затем для каждой строки таблицы, где формула принимает истинное значение строится элементарная конъюнкция $A_{i1}^{'} \wedge A_{i2}^{'} \wedge \ldots \wedge A_{in}^{'}$ по следующему правилу:

$$A_{ik}^{'} = \begin{cases} A_{ik}, & \text{если } A_{ik} = \text{И}; \\ \neg A_{ik}, & \text{если } A_{ik} = \text{Л}. \end{cases}$$

После чего СНДФ строится в виде дизъюнкций найденных элементарных конъюнкций, т. е.

$$\Phi(A_1, A_2, \ldots, A_n) = \bigvee_i (A_{i1}^{'} \wedge A_{i2}^{'} \wedge \ldots \wedge A_{in}^{'})$$

Проиллюстрируем второй метод построения СДНФ на примере решения следующей задачи [8].

Путешественник находится в одном из городов *А* или *Б*, но в каком именно — ему неизвестно. Он задаёт собеседнику один вопрос, на который может получить ответ "да" или "нет", причём ответ собеседника может являться правдой или ложью (чем именно, ему тоже неизвестно). Придумать вопрос, по ответу на который можно безошибочно судить, в каком городе находится путешественник.

Будем строить вопрос таким образом, чтобы ответ "да" соответствовал нахождению путешественника в городе *А*, а ответ "нет" — нахождению в городе *Б*. Сформулируем следующие простые высказывания:

P — "Путешественник находится в городе *А*",

Q — "Собеседник говорит правду".

Тогда отрицание этих высказываний будет означать, что

$\neg P$ — "Путешественник находится в городе *Б*",

$\neg Q$ — "Собеседник говорит ложь".

Построим сложное высказывание $\Phi(P, Q)$ с таким расчётом, чтобы собеседник говорил, что оно истинно, если P истинно, и что оно ложно, если P ложно. Таблица истинности сложного высказывания $\Phi(P, Q)$ будет выглядеть следующим образом

P	Q	ответ	$\Phi(P,Q)$
И	И	И	И
И	Л	И	Л
Л	И	Л	Л
Л	Л	Л	И

Теперь выпишем СНДФ для интересующего нас сложного высказывания

$$\Phi(P,Q) = (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q).$$

Итак можно задать собеседнику следующий вопрос: "Верно ли, что я нахожусь в городе A и Вы говорите правду или я нахожусь в городе $Б$ и Вы говорите ложь?".

Определение. Формулу будем называть *тавтологией* (тождественно-истинной), если она принимает значение истина при любых значениях, входящих в неё простейших высказываний.

В содержательном плане тавтологии представляют собой логические законы, подстановка в которые конкретных высказываний позволяет получать истинные высказывания. Примером тавтологии может служить закон *исключённого третьего* : $A \vee \neg A$.

Естественно возникает вопрос о существовании процедуры, которая для любой формулы алгебры высказываний позволяла бы за конечное число шагов определить, является ли она тавтологией или нет. Ответ оказывается положительным.

Теорема 3. *Для того, чтобы формула являлась тавтологией необходимо и достаточно, чтобы каждая элементарная дизъюнкция её КНФ содержала какое-либо высказывание и его отрицание одновременно.*

1.5 Функциональные схемы.

Методы математической логики позволяют анализировать и конструировать достаточно сложные логические системы, используя для этого некоторый *полный* набор функциональных элементов. В качестве такого набора, позволяющего реализовать любую логическую функцию, можно взять коньюнктор, дизъюнктор и инвертор, физически реализующих соответствующие логические операции (см. Рис. 1.1)

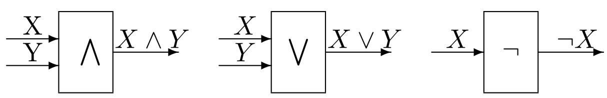


Рис. 1.1. Функциональные элементы.

Соединяя вход одного из функциональных элементов с выходом другого, можно получать новые функциональные элементы, представляющие собой *суперпозицию* соответствующих элементов. Можно показать, что любая формула алгебры высказывания может быть реализована как суперпозиция исходных функциональных элементов. Тогда, для реализации той или иной логической схемы, достаточно задать соответствующую ей таблицу истинности. На основании теоремы 2. можно построить СНДФ интересующей нас формулы, после чего реализовать её при помощи имеющихся функциональных элементов. Естественно, перед реализацией СНДФ целесообразно её упростить, чтобы минимизировать число используемых функциональных элементов. Проиллюстрируем рассмотренную процедуру на следующих примерах.

1. Одноразрядный сумматор (сложение по модулю два). Требуется реализовать функциональную схему системы, которая складывает *булевы переменные* $f(X,Y) = X + Y$ по следующим правилам:

$$0 + 0 = 0; \quad 1 + 0 = 1; \quad 1 + 1 = 0.$$

X	Y	$f(X,Y)$
И	И	Л
И	Л	И
Л	И	И
Л	Л	Л

Сопоставив единице **И**, а нулю — **Л**, можно написать для рассматриваемой функции таблицу истинности, которая позволяет выписать совершенную конъюктивную нормальную форму в следующем виде:

$$f(X,Y) = (X \wedge \neg Y) \vee (\neg X \wedge Y) .$$

Реализуя полученную формулу при помощи функциональных элементов, получаем интересующую нас функциональную схему:

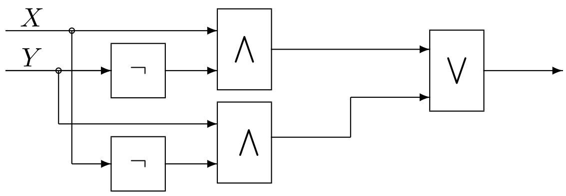


Рис. 1.2. Функциональная схема одноразрядного сумматора.

2. "Красная кнопка".

С тем, чтобы избежать случайного нажатия президентом красной кнопки, один из двух заместителей (это может быть премьер-министр или министр обороны) должен подтвердить принятое решение нажатием своей кнопки. Только в этом случае система сработает.

X	Y	Z	$f(X,Y,Z)$
И	И	И	И
И	И	Л	И
И	Л	И	И
И	Л	Л	Л
Л	И	И	Л
Л	И	Л	Л
Л	Л	И	Л
Л	Л	Л	Л

Обозначим через X, Y, Z — решения, принимаемые соответственно президентом и его заместителями. Тогда, составив таблицу истинности, можно выписать совершенную конъюктивную нормальную форму интересующей нас функции в следующем виде:

$$f(X,Y,Z) = (X \wedge Y \wedge Z) \vee (X \wedge Y \wedge \neg Z) \vee (X \wedge \neg Y \wedge Z) .$$

Осуществив равносильные преобразования, получим *тупиковую* форму

$$f(X, Y, Z) = X \wedge (Y \vee Z),$$

которую реализуем в виде следующей функциональной схемы:

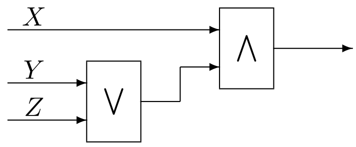


Рис. 1.3. Функциональная схема красной кнопки.

3. Длинный коридор.

Требуется установить два выключателя таким образом, чтобы можно было из любого конца коридора зажигать и гасить свет в этом коридоре. Обозначим через X и Y возможные состояния выключателей, тогда считая, что истине соответствует наличие света в коридоре, построим таблицу истинности.

X	Y	$f(X,Y)$
И	И	Л
И	Л	И
Л	И	И
Л	Л	Л

Заметим, что полученная таблица истинности совпала с таблицей истинности для одноразрядного сумматора. Следовательно функциональная схема 1.2. позволяет также решить задачу освещения длинного коридора.

1.6 Предикаты

Логика высказываний является достаточно узкой логической системой и не охватывает многих видов рассуждений. Так некоторые предложения, например,"x — простое число", "$x + y = 5$", "$x > y$" и т. п., по форме близки к высказываниям, но формально таковыми не являются, поскольку значения x и y неизвестны и мы поэтому ничего не можем сказать об истинности подобных утверждений. Расширем понятие высказывания путём введения в рассмотрение *переменного высказывания* или *предиката* как высказывательной функции, определённой на некоторой *предметной области* исходных объектов.

Пусть имеется некоторая совокупность однородных объектов

$$U = \{a_1, a_2, \ldots, a_r, \ldots\}, \tag{1.1}$$

которую в дальнейшем будем называть *универсальным множеством.* Неизвестные параметры $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ переменного высказывания, обозначаемые строчными буквами латинского алфавита, будем называть *предметными переменными* и будем считать, что они могут принимать значения только тех объектов, которые перечислены в универсальном множестве U.

Определение. *Предикатом* (или n-местным предикатом) будем называть любую функцию $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, определенную на некотором универсальном множестве U и принимающую значения И или Л.

Приведём несколько примеров.

1) "x — простое число." Это одноместный предикат, обозначим его через $P(x)$, предметной областью для которого являются натуральные числа. Подстановка вместо аргумента x конкретного натурального числа позволяет получить простое высказывание, так $P(5) = \text{И}$ и $P(9) = \text{Л}$.

2) "$x^2 + y^2 = z^2$." Это трёхместный предикат, предметной областью которого выступают длины сторон произвольного треугольника. Согласно теореме Пифагора его значение будет истинным тогда и только тогда, когда x, y — катеты, а z — гипотенуза прямоугольного треугольника.

3) "Если *тетрадь* лежит в *папке*, а папка лежит в *портфеле*, то *тетрадь* лежит в *портфеле.*" Это также трёхместный предикат, притом тождественно истинный.

4) "$2 \times 2 = 5$." Это простое ложное высказывние, которое можно рассматривать как нуль-местный предикат.

Поскольку предикаты в зависимости от значений предметных переменных принимают значения истинно или ложно, то над ними можно осуществлять все введённые логические операции а также составлять таблицы истинности. Помимо этого над предикатами вводятся ещё некоторые специфические операции, называемые *кванторами.*

Определение. Пусть $P(x)$ — некоторый предикат. Будем понимать под *квантором всеобщности* операцию, которая сопоставляет предикату $P(x)$ следующее высказывание: "Для любого значения x высказывание $P(x)$ истинно". Символически данное высказывание записывается следующим образом: $\forall\, x\, P(x)$ и читается как "для всех x $P(x)$".

Содержательно квантор всеобщности представляет собой обобщение операции конъюнкции. Так, если предметная область состоит из конечного числа объектов $U = \{a, b, c, d)$, то квантор всеобщности может быть записан в виде равносильной формулы алгебры высказываний

$$\forall\, x\, P(x) = P(a) \wedge P(b) \wedge P(c) \wedge P(d).$$

Определение. Пусть $P(x)$ — некоторый предикат. Будем понимать под *квантором существования* операцию, которая сопоставляет предикату $P(x)$ следующее высказывание: "Существует такое значение x, для которого высказывание $P(x)$ истинно". Символически данное высказывание записывается следующим образом: $\exists\, x\, P(x)$ и читается как "существует такое x, что $P(x)$".

Содержательно квантор всеобщности представляет собой обобщение операции дизъюнкции. Так, если предметная область состоит из конечного числа объектов $U = \{a, b, c, d\}$, то он может быть записан в виде равносильной формулы алгебры высказываний

$$\exists\, x\, P(x) = P(a) \vee P(b) \vee P(c) \vee P(d).$$

Применение кванторов превращает одноместные предикаты в простые высказывания (нуль-местные). Если имеется n-местный предикат, то можно применять кванторы по какой-либо переменной

$$\forall\, x_1\, P(x_1, x_2, \ldots, x_n);\ \exists\, x_2\, P(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

В результате в обоих случаях получается $(n-1)$-местный предикат, зависящий от $(x_2, x_3, \ldots, x_n)$ и $(x_1, x_3, \ldots, x_n)$ соответственно. Далее будем говорить, что переменные x_1 и x_2 в этих формулах являются *связанными.*

Дадим индуктивное определение формулы логики предикатов и одновременно при этом дадим определение *связанных* и *свободных* переменных.

Определение.

1) Предикат, в котором все места замещены предметными переменными или константами, является формулой. При этом все входящие в предикат предметные переменные считаются свободными, связанных переменных нет.

2) Если Φ — формула логики предикатов, содержащая свободную переменную x , то $\forall x\,\Phi$ и $\exists x\,\Phi$ — также формулы, в которых x будет уже связанной переменной, а остальные переменные сохраняют свой характер, т. е. остаются свободными, если были свободными в Φ и остаются связанными, если были связанными в Φ.

3) Если Φ — формула, то $\neg\Phi$ также будет формулой, все переменные которой те же и того же характера, что и в формуле Φ.

4) Если Φ и Ψ — формулы, причём нет такой переменной, которая в одну из них входит свободно, а в другую связанно, то

$$\Phi \vee \Psi, \Phi \wedge \Psi, \Phi \to \Psi$$

также будут формулами, содержащими все переменные из формул Φ и Ψ и характер переменных остаётся неизменным.

5) Каждая формула может быть получена за конечное число шагов из элементарных при помощи указанных правил и операций.

Рассмотрим несколько примеров.

1. Последовательность символов

$$\forall x\, \exists y\, (A(x, y, z) \to (B(x, z) \wedge C(y, z)))$$

представляет собой формулу логики предикатов, в которой переменная z свободна, а переменные x и y являются связанными.

2. Следующая последовательность символов

$$\forall x\, A(x, y) \to \exists y\, B(x, y)$$

формулой не является, так как переменные x и y одновременно являются и свободными и связанными.

3. Возьмём в качестве предметной области натуральные числа и обозначим через $A(x, y)$ высказывание (предикат): "x является делителем y ". Тогда утверждение, что любое число, делящееся на 12, обязательно будет делиться также на 3, 4 и 6, можно записать в виде следующей формулы:

$$\forall y\, (A(12, y) \to A(3, y) \wedge A(4, y) \wedge A(6, y)).$$

Определение. Пусть формулы Φ и Ψ имеют одинаковый набор свободных переменных $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Будем говорить, что формулы Φ и Ψ *равносильны* на предметной области U, если на любом наборе значений свободных переменных они принимают одинаковые значения.

Определение. Формулы Φ и Ψ будем называть *абсолютно равносильными*, если они равносильны на любой предметной области.

Равносильность двух формул Φ и Ψ будем обозначать посредством знака равенства: $\Phi = \Psi$.

Проиллюстрируем разницу между этими двумя определениями на следующем примере. Имеются две формулы, содержащие свободные переменные x и y

$$(A(x) \vee \neg A(x)) \wedge (A(y) \vee \neg A(y)) \text{ и } (A(x) \vee \neg A(y)).$$

Первая формула представляет собой тождественно истинное высказывание независимо от предметной области. Вторая формула также будет тождественно истинным высказыванием, если предметная область состоит только из одного объекта. Но если предметная область состоит из двух объектов, скажем a и b, и при этом $A(a) = \text{И}$ и $A(b) = \text{Л}$, то высказывание $(A(b) \vee \neg A(a))$ будет ложным и вторая формула уже не является тождественно истинной. Таким образом получаем, что эти формулы будут равносильны на любой предметной области, состоящей из одного объекта, но не будут при этом абсолютно равносильными.

Введённое понятие позволяет осуществлять равносильные преобразования формул логики высказывания, используя следующие правила.

1. Перенос квантора через отрицание.

$$\neg(\forall x\, A(x)) = \exists x\, (\neg A(x)); \ \neg(\exists x\, A(x)) = \forall x\, (\neg A(x)).$$

2. Вынос квантора за скобки. Пусть x не является свободной переменной предиката B, тогда

$$\forall x\, A(x) \vee B = \forall x\, (A(x) \vee B); \ \exists x\, A(x) \vee B = \exists x\, (A(x) \vee B);$$
$$\forall x\, A(x) \wedge B = \forall x\, (A(x) \wedge B); \ \exists x\, A(x) \wedge B = \exists x\, (A(x) \wedge B).$$

Отметим, что если предикат B содержит переменную x, то справедливыми будут только две следующие равносильности

$$\forall x\, A(x) \wedge \forall x\, B(x) = \forall x\, (A(x) \wedge B(x)); \ \exists x\, A(x) \vee \exists x\, B(x) = \exists x\, (A(x) \vee B(x)).$$

3. Перестановка одноимённых кванторов.

$$\forall x\, \forall y\, A(x,y) = \forall y\, \forall x\, A(x,y); \ \exists x\, \exists y\, A(x,y) = \exists y\, \exists x\, A(x,y).$$

Перестановка разноимённых кванторов не позволит получить равносильную формулу. Так если предикат $A(x, y)$ истинен только когда $x < y$ и в качестве предметной области выбраны все вещественные числа, то высказывание $\forall x\, \exists y\, A(x, y)$ будет истинным, а высказывание $\exists y\, \forall x\, A(x, y)$ — ложным.

4. Переименование связных переменных.

$$\forall x\, A(x) = \forall y\, A(y); \ \exists x\, A(x) = \exists y\, A(y).$$

Для формул логики предикатов сохраняются также все правили равносильных преобразований логики высказываний.

Определение. Формулу логики предикатов будем называть *нормальной*, если из логических символов она содержит только $\vee, \wedge, \neg$, причём символ $\neg$ встречается лишь перед символами предикатов, и все символы кванторов стоят в начале формулы, т. е. все символы предикатов и логических операций находятся в области действия каждого из кванторов.

Согласно данному определению формула $\forall x\, \exists y\, (\neg A(x, y) \vee B(x, y))$ является нормальной, а формула $\forall x\, (\neg A(x) \vee \exists y\, B(x, y))$ — нет.

Теорема 4. *Для любой формулы логики предикатов существует равносильная ей нормальная формула.*

Определение. Формулу логики предикатов Φ будем называть *общезначимой* (тождественно-истинной), если она принимает значение истина для любого набора значений предметных переменных и для любых предметных областей.

Данное определение является обобщением понятия тавтологии, так что сами тавтологии, рассматриваемые как формулы логики предикатов, также будут общезначимыми. Менее тривиальными примерами являются следующие общезначимые формулы:

$$\forall x\, A(x) \to A(y);\;\; A(y) \to \exists x\, A(x).$$

В отличие от логики высказываний, где представление формулы в виде равносильной ДНФ или КНФ позволяет выяснить тавтология это или нет, для логики предикатов эта проблема в общем случае оказывается неразрешимой .

Теорема 5 (Тезис Чёрча)**.** *Не существует алгоритма, который для любой формулы логики предикатов устанавливает, общезначима она или нет.*

1.7 Логические выводы

Доказательство той или иной теоремы можно рассматривать как последовательность умозаключений, где каждое последующее является *логическим следствием* предыдущих. Но каждое умозаключение можно рассматривать как некоторую формулу логики предикатов.

Определение. Пусть имеется некоторый список формул Γ. Будем говорить, что формула Φ является *логическим следствием* Γ и писать: $\Gamma \Rightarrow \Phi$, если для любых значений предметных переменных, при которых формулы списка Γ принимают значение истина, формула Φ также примет значение истина.

Пусть список Γ состоит из единственной формулы $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $\Phi = Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — свободные переменные. Можно показать, что $P \Rightarrow Q$ тогда и только тогда, когда следующая формула

$$\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n \,(P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to Q(x_1, x_2, \ldots, x_n))$$

является общезначимой. Заметим также, что список Γ может быть пустым, т. е. не содержать формул. В этом случае запись " $\Rightarrow \Psi$ " означает, что формула Ψ общезначима. Эти результаты допускают естественное обобщение.

Теорема 6. *Если* $\Gamma, P \Rightarrow Q$*, то* $\Gamma \Rightarrow (P \to Q)$.

Содержательный смысл списка Γ раскрывается при построении той или иной аксиоматической теории, когда фиксируется предметная область и в основу математической теории кладутся некоторые исходные положения, называемые *аксиомами.* Тогда все остальные утверждения, называемые *теоремами*, получаются как логические следствия аксиом. При этом соответствующая последовательность формул называется *выводом* или *доказательством.* Конкретное доказательство может использовать не только аксиомы, но и ранее доказанные утверждения.

Определение. Аксиоматическую теорию будем называть *непротиворечивой*, если не существует формулы Ψ, такой, что одновременно выводимы формулы Ψ и $\neg\Psi$.

Заметим, что в *противоречивой* теории, где одновременно выводимы формулы Ψ и $\neg\Psi$, выводима любая формула. Проверка выводимости (логического следования) той или иной формулы часто оказывается достаточно трудоёмкой задачей. Поэтому при построении аксиоматической теории обычно задают конечный список *правил вывода*, которые позволяют из истинных высказываний получать новые, также истинные. Укажем некоторые правила вывода, которые лежат в основе исчисления предикатов:

1. Силлогизм *modus ponens*: $A, A \to B \Rightarrow B$.
2. Связывание квантором всеобщности: $B \to A(x) \Rightarrow B \to \forall\, y\, A(y)$.
3. Связывание квантором существования: $A(x) \to B \Rightarrow \exists\, y\, A(y) \to B$.

1.8 Приложения логического анализа

Основной областью приложения логики, естественно, является анализ приводимых нами рассуждений и умозаключений. Переводя все фразы на язык логических высказываний и предполагая их истинность или ложность, логический анализ позволяет сделать те или иные выводы, т. е. получить некоторую информацию. В качестве примера проанализируем высказывания персонажей задачи Кислера [10].

Браун, Джон и Смит обвиняются в подделке сведений о подлежащих налоговому обложению доходах. Они дают под присягой следующие показания:

Браун: "Джонс виновен, а Смит не виновен."

Джонс: "Если Браун виновен, то виновен и Смит."

Смит: "Я невиновен, но хотя бы один из них двоих виновен."

Обозначим через B, D и C высказывания: "Браун невиновен", "Джонс невиновен", "Смит невиновен". Тогда показания персонажей задачи можно записать в виде логической формулы:

$$(\neg D \wedge C) \wedge (\neg B \to \neg C) \wedge (C \wedge (\neg B \vee \neg D)) = F(B, D, C),$$

таблица истинности для которой имеет следующей вид

N	B	D	C	$\neg D \wedge C$	$\neg B \to \neg C$	$C \wedge (\neg B \vee \neg D)$	$F(B, D, C)$
1	И	И	И	Л	И	Л	Л
2	И	И	Л	Л	И	Л	Л
3	И	Л	И	И	И	И	И
4	Л	И	И	Л	Л	И	Л
5	И	Л	Л	Л	И	Л	Л
6	Л	И	Л	Л	И	Л	Л
7	Л	Л	И	И	Л	И	Л
8	Л	Л	Л	Л	И	Л	Л

Если предположить, что все подозреваемые говорили правду, так как давали показания под присягой, то формула $F(B, D, C)$ должна принять значение истина. Из таблицы истинности (строка 3) видно, что это возможно только в том случае, когда Джонс виновен, а Браун и Смит — нет.

Однако, можно предположить, что в целях запутать следствие виновные будут лгать. Тогда, если подозреваемый невиновен, то его показания будут истинными, а если он виноват, то — ложными. Этим условиям в таблице истинности соответствует только шестая строка. Следовательно, в этом случае Браун и Смит виновны, а Джонс — нет.

При анализе тех или иных высказываний надо учитывать, что перевод их в логические формулы не всегда однозначен, так как они могут содержать двусмысленности и неопределённости. Соединительные союзы естественного языка не всегда обладают свойствами соответствующих пропозициональных связок языка логики. Так если в логике $A \wedge B$ всегда равносильно $B \wedge A$, то фразы (пример Строусона [10]) *"Джейн вышла замуж и у неё родился ребёнок"* и *"У Джейн родился ребёнок и она вышла замуж "* имеют существенное различие.

В умозаключениях могут быть опущены некоторые посылки особенно, если они хорошо известны и общеприняты. Так, например, фраза *"Люди смертны"* должна переводиться как фраза *"Все люди смертны"*, а фраза *"Люди покорили Эверест"* означает, что *"Некоторые люди покорили Эверест"*.

Перевод условных предложений естественного языка ("если , то ", "следует из", "влечёт"и т. п.) во многом зависит от контекста и от того, кто говорит, так как необходимо понять о каком "следовании"идёт речь: *материальном* или *логическом*. В первом случае, когда речь идёт о высказывании предметного языка, используется перевод $A \to B$. Если речь идёт о логическом следовании, т. е. высказывании на языке исследователя, то используется перевод $A \Rightarrow B$.

Подобные проблемы возникают из-за того, что наш естественный язык не является формальным и поэтому логический анализ имеет ограниченное применение. Однако, когда мы говорим о языке математики, эти проблемы исчезают и язык логики позволяет записывать определения, утверждения и доказательства. В качестве примера дадим определение ограниченной функции:

$$\exists\, y \forall\, x\, (|f(x)| \leqslant y).$$

Язык логики также позволяет выражать связи между различными понятиями. Так, например, определение неограниченной функции функции может быть получено как отрицание свойства быть ограниченной:

$$\overline{\exists\, y \forall\, x\, (|f(x)| \leqslant y)} = \forall\, y\, \exists\, x\, \overline{(|f(x)| \leqslant y)} = \forall\, y\, \exists\, x\, (|f(x)| > y).$$

Областью применения логики может выступать и построение социологических теорий. Социальные проблемы возникли вместе с человечеством, на большинство из которых приходилось постоянно давать тот или иной ответ. Исторический опыт решения этих проблем нашел своё отражение в культуре народов — социальной памяти общества, в частности, в форме классического литературного наследия и фольклора. Так, например, студент ознакомившись с работой Макса Вебера "Протестантская этика и дух капитализма"не обнаружит для себя что-то принципиально новое, поскольку он уже успел раньше прочитать роман Гончарова "Обломов".

Ясно, что исследование классического наследия позволяет говорить о философии и социологических воззрениях Толстого, Достоевского, Чернышевского и т. д. Однако, это удел, в основном, литературоведов. Для нас же больший интерес представляют пословицы и поговорки, каждая из которых представляет собой высказывание. В зависимости от истинности этих высказываний можно предложить следующую классификацию:

- **аксиомы** — высказывания, истинность которых принимается нами на веру;

- **теоремы** — высказывания, истинность которых может быть доказана (тавтологии, общезначимые формулы);

- **леммы** — высказывания, истинность которых может быть установлена при некоторых дополнительных предположениях (выполнимые формулы).

Примерами *аксиом*, которые могут лечь в основу аналитической теории поведения, являются следующие пословицы [11]:

1. *"Гром не грянет, мужик не перекрестится."*

2. *"Лучше синица в руках, чем журавль в небе."*

3. *"Семь раз отмерь, один раз отрежь."*

Первая аксиома постулирует общую схему поведения (бихевиоризма): "*стимул — реакция*". Вторая аксиома говорит, что поведение человека не обязано быть оптимальным и может оказаться даже не рациональным. Третья аксиома указывает на то, что при принятии решения каждый человек использует некоторое *решающее правило*, которое определяет — действовать ему или нет.

Данная система аксиом, естественно, является неполной, что позволяет, добавляя новые аксиомы, моделировать любые типы поведения. Так, если мы хотим говорить об экономическом поведении, то можем пополнить систему аксиом двумя следующими пословицами [11]:

4. *"Нужда цены не ждёт."*

5. *"Запас карман не тянет."*

Примерами *теорем* могут служить следующие пословицы:

1. *"Все дороги ведут в Рим."* Эта пословица была использована В.Феллером [12] для интерпретации свойства возвратности симметричных случайных блужданий на плоскости.

2. *"Хочешь мира — готовься к войне"*. Доказательство этого утверждения смотри на странице 99.

3. *"Мало в привозе — много в запросе"*. Это высказывание характеризует основной закон теории спроса и предложения.

Приведённая классификация пословиц и поговорок не является абсолютной, так как любое высказывание можно объявить истинным и рассматривать как аксиому. Если в основу теории положено достаточно много аксиом, то не исключено , что некоторые из них могут оказаться логическим следствием других и, следовательно, могут рассматриваться как теоремы.

1.9 Понятие множества

Понятие *множества* является одним из основных в математике и , как правило, обычно не определяется, т. е. рассматривается как первичное. Поэтому под множеством будем понимать некоторую совокупность однородных объектов, обладающих общими свойствами и называемых *элементами*. Так, например, можно говорить о множестве книг, стоящих на книжной полке, множестве простых чисел, множестве студентов факультета и т. п. Множества будем обозначать прописными буквами латинского алфавита, иногда с индексами, а элементы, составляющие эти множества — строчными буквами латинского алфавита.

Множество считается заданным, если относительно любого объекта можно сказать, является ли он элементом данного множества или нет. Тот факт, что объект a является элементом множества A будем записывать в следующем виде: $a \in A$. Если объект b не является элементом множества A, то будем использовать запись $b \notin A$. Для того, чтобы облегчить и упростить соответствующую процедуру проверки, а также, чтобы избежать многочисленных парадоксов, характерных для теории множеств, будем считать, что рассматриваемые объекты могут браться только из заранее фиксированного *универсального множества* U (см. формулу (1.1.) на стр. 15).

Множество, состоящее из каких-либо элементов, может быть задано двумя следующими способами. Первый способ состоит в явном задании множества путём перечисления всех его элементов и заключении их в фигурные скобки

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}, \text{ где } a_i \in U \text{ для всех значений } i.$$

Данный способ задания обычно используется, когда множество состоит из *конечного* числа элементов. Однако, его иногда используют и для задания *бесконечных* множеств, когда достаточно ясно из каких элементов универсального множества оно состоит. Так, например, множество натуральных чисел принято записывать в следующем виде: $\mathcal{N} = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$.

Второй способ задания множества состоит в указании универсального множества и перечислении свойств (признаков), которыми обладают элементы данного множества. Обозначим через $P_i(x)$ предикат, который принимает значение истина, если объект x обладает i-ым свойством. Тогда рассматриваемое нами множество будет задано в следующем виде:

$$A = \{x \mid (x \in U) \wedge P_1(x) \wedge P_2(x) \wedge \ldots \wedge P_m(x)\}, \tag{1.2}$$

где m — число признаков, которыми обладают элементы множества A.

Если ввести обозначение

$$P(x) = (x \in U) \wedge P_1(x) \wedge P_2(x) \wedge \ldots \wedge P_m(x),$$

то формула (1.2), определяющая множество A, значительно упростится:

$$A = \{x \mid P(x)\}.$$

При этом содержательный смысл формулы сохраняется — объект x является элементом множества A, только когда предикат $P(x)$ принимает значение истина. Заметим, что в некоторых случаях предикат $P(x)$ может принимать значение ложно для всех значений x , т.е. ни один из объектов универсального множества не обладает перечисленными свойствами и задаваемое множество оказывается *пустым.*

Определение. Множество не содержащее ни одного элемента будем обозначать через $\emptyset$ и называть*пустым множеством.*

Несмотря на кажущуюся простоту рассмотренных способов задания множеств, иногда они могут приводить к парадоксам. Так некий брадобрей объявил, что он бреет только тех мужчин деревни, кто не бреется сам. Оказалось, что данное "высказывание" не позволяет определить множество тех людей, которых бреет брадобрей, поскольку нельзя ответить на вопрос: "Бреет ли брадобрей сам себя, если он является жителем деревни?" Любой ответ приводит к противоречию, также как и в парадоксе лжеца (стр. 7).

Перечислим наиболее часто встречающиеся множества, а также принятые для них стандартные обозначения:

$\mathcal{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ – множество натуральных чисел;

$Z = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ – множество целых чисел;

$Q = \{x \mid (x = p/q) \wedge (p \in Z) \wedge (q \in \mathcal{N})\}$ – множество рациональных чисел;

$\mathcal{R} = \{x \mid (-\infty < x < +\infty)\}$ – множество действительных чисел;

$\mathcal{R}^2 = \{(x, y) \mid (x \in \mathcal{R}) \wedge (y \in \mathcal{R})\}$ – множество точек плоскости.

Определение. Будем говорить, что множество A является *подмножеством* множества B и писать $A \subset B$ или $B \supset A$, если каждый элемент множества A является элементом множества B.

В качестве примера укажем, что множество натуральных чисел является подмножеством множества целых чисел, т.е. $\mathcal{N} \subset Z$. Отметим некоторые важные свойства понятия подмножества, которые непосредственно вытекают из определения.

1. $A \subset U$ — любое множество является подмножеством универсального множества.

2. $A \subset A$ — каждое множество является подмножеством самого себя.

3. $\emptyset \subset A$ — пустое множество является подмножеством любого другого множества.

Определение. Два множества A и B будем называть равными и писать $A = B$, если каждое из них является подмножеством другого.

Понятие подмножества позволяет строить новые множества, элементами которых могут выступать подмножества. Так можно говорить о множестве всех подмножеств данного множества. Это новое множество принято обозначать через 2^A, где A — исходное множество. Пусть $A = \{a, b, c\}$, тогда

$$2^A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

Нестандартное обозначение данного множества связано с тем, что если мы обозначим через $\mid A \mid$ — число элементов (*мощность*) множества A, то справедливо следующее равенство $\mid 2^A \mid = 2^{|A|}$. В связи с этим заметим, что $\emptyset$ и $\{\emptyset\}$ — это два различных множества, так как $\mid \emptyset \mid = 0$ (пустое множество не содержит элементов) , а $|\{\emptyset\}| = 1$ (элементом является пустое множество). Нетрудно проверить, что эти два множества связаны следующим отношением: $\{\emptyset\} = 2^{\emptyset}$.

В отличии от множества всех подмножеств данного множества, такое понятие как "множество всех множеств" оказывается некорректным и не имеет право на существование.

1.10 Операции над множествами

Над множествами можно производить различные операции, результатом которых будут являться новые множества.

Определение. *Объединением* двух множеств A и B будем называть множество элементов

$$A \cup B = \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B)\},$$

каждый из которых принадлежит хотя бы одному из этих множеств.

Если множества A и B заданы посредством предикатов $P_A(x)$ и $P_B(x)$, т. е. $A = \{x \mid P_A(x)\}$ и $B = \{x \mid P_B(x)\}$, то $A \cup B = \{x \mid P_A(x) \vee P_B(x)\}$.

Часто бывает удобно иллюстрировать операции над множествами графически, используя для этого диаграммы Эйлера-Венна. Универсальное множество обычно изображается прямоугольником, множества - овалами, а результат операции - штрихованной областью. Так, например, объединение двух множеств будет иметь следующий вид (см. Рис.1.4.)

U

A B

Рис. 1.4. Объединение двух множеств.

U

A B

Рис. 1.5. Пересечение двух множеств.

Определение. *Пересечением* двух множеств A и B будем называть множество элементов

$$A \cap B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\},$$

которые принадлежат каждому из этих множеств.

Если множества A и B заданы посредством предикатов $P_A(x)$ и $P_B(x)$, т. е. $A = \{x \mid P_A(x)\}$ и $B = \{x \mid P_B(x)\}$, то $A \cap B = \{x \mid P_A(x) \wedge P_B(x)\}$.

На представленной диаграмме (см. Рис.1.5.) пересечение представляет дважды заштрихованная (в клеточку) область.

Если $A \cap B = \emptyset$, то множества A и B называются *непересекающимися.*

Определение. *Разностью* двух множеств A и B будем называть множество элементов $A \setminus B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$, принадлежащих множеству A и не принадлежащих множеству B (см. Рис.1.6.).

Если множества A и B заданы посредством предикатов $P_A(x)$ и $P_B(x)$, т. е. $A = \{x \mid P_A(x)\}$ и $B = \{x \mid P_B(x)\}$, то $A \setminus B = \{x \mid P_A(x) \wedge (\neg P_B(x))\}$.

Определение. *Дополнением* множества A до универсального множества U будем называть множество элементов

$$\overline{A} = \{x \mid (x \in U) \wedge (x \notin A)\} = U \setminus A,$$

не принадлежащих множеству A (см. Рис.1.7.).

Если $A = \{x \mid (x \in U) \wedge P_A(x)\}$, то $\overline{A} = \{x \mid (x \in U) \wedge (\neg P_A(x))\}$.

U $\overline{A}$

$A \setminus B$ B A

Рис. 1.6. Разность двух множеств. Рис. 1.7. Дополнение множества.

Поскольку сами множества и операции над ними определяются через высказывания и соответствующие логические операции, то это позволяет установить *взаимо-однозначное соответствие* между понятиями теории множеств и алгебры высказываний.

Логика высказываний	И	Л	$\to$	$\vee$	$\wedge$	$\neg A$
Теория множеств	U	$\emptyset$	$\subset$	$\cup$	$\cap$	$\overline{A}$

В теории множеств, также как и в логике высказываний, можно ограничиться тремя операциями: объединения, пересечения и дополнения, через которые могут быть выражены все другие операции, результатом которых является подмножество универсального множества U. Так операцию разности двух множеств можно выразить через операции пересечения и дополнения.

$$\begin{aligned} A \setminus B &= \{x \mid (x \in U) \wedge (x \in A) \wedge (x \notin B)\} = \\ &= \{x \mid (x \in U) \wedge (x \in A)\} \wedge \{(x \in U) \wedge (x \notin B)\} = A \cap \overline{B}. \end{aligned}$$

Указанные операции будут, естественно, обладать и всеми другими свойствами соответствующих логических операций. Так, в частности, для этих операций можно переписать все основные свойства дизъюнкции, конъюнкции и отрицания (см. стр. 10).

1. Коммутативность

$$A \cup B = B \cup A,\ A \cap B = B \cap A.$$

2. Ассоциативность

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),\ (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

3. Дистрибутивность

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

4. Законы поглощения

$$A \cap (A \cup B) = A,\ A \cup (A \cap B) = A.$$

5. Закон двойного отрицания

$$\overline{\overline{A}} = A.$$

6. Законы де Моргана

$$\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B},\ \overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

7. Законы идемпотентности

$$A \cup A = A,\ A \cap A = A.$$

8. Формулы расщепления

$$A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}),\ A = (A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}).$$

Введём теперь специальную операцию, которая позволяет получать множества, не являющиеся подмножествами универсального множества.

Определение. *Декартовым произведением* двух множеств A и B будем называть множество всех упорядоченных пар

$$A \times B = \{(x, y) \mid (x \in A) \wedge (y \in B)\},$$

где первый элемент пары (x, y) выбирается из множества A, а второй — из множества B .

Если множества A и B — числовые интервалы , то декартово произведение $A \times B$ представляет собой прямоугольник (см. Рис.1.8.), сторонами которого являются множества A и B. Можно заметить, что декартово

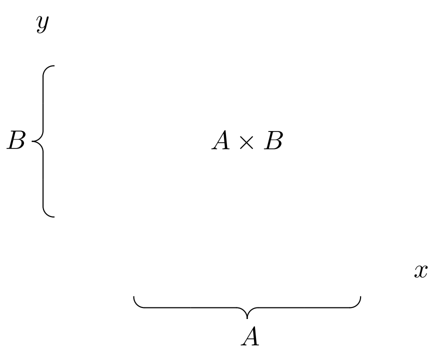


Рис. 1.8. Декартово произведение.

произведение не обладает свойством коммутативности, т. е. в общем случае $A \times B \neq B \times A$. Однако, если $A = B$, то допустимо писать $A \times A = A^2$ и в этом случае результатом произведения будет квадрат. В частности, $\mathcal{R} \times \mathcal{R} = \mathcal{R}^2$, где $\mathcal{R}$ — множество действительных чисел, а $\mathcal{R}^2$ — множество точек плоскости. Данное определение декартова произведения можно обобщить на случай произвольного конечного числа сомножителей:

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n =$$
$$= \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid (x_1 \in A_1) \wedge (x_2 \in A_2) \wedge \ldots \wedge (x_n \in A_n)\}.$$

Отметим, что элементами нового множества являются всевозможные упорядоченные наборы элементов, содержащие ровно по одному представителю каждого из перемножаемых множеств . Такие наборы $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в общем случае принято называть *кортежами* и в частном случае, когда имеем дело с числовыми множествами — *векторами*.

Примером, когда социолог встречается с подобным множеством, может служить анкетный опрос. Так если анкета содержит n закрытых вопросов и A_i — множество предлагаемых ответов на поставленный вопрос, то декартово произведение $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ представляет собой множество вариантов заполнения анкеты. Если нас интересует *число* возможных вариантов заполнения анкеты, то ответ на этот вопрос даёт основная теорема комбинаторики.

Теорема 7 (теорема умножения)**.** *Пусть* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — *конечные множества и* $\mid A_i \mid = m_i$, *тогда*

$$\mid A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \mid = \prod_{i=1}^{n} \mid A_i \mid = \prod_{i=1}^{n} m_i = m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_n.$$

Глава 2

Бинарные отношения

2.1 Определения и способы задания

Бинарные отношения, т. е. отношения между двумя элементами какого-либо множества, являются основным инструментом для моделирования и исследования социальных отношений.

Определение. *Бинарным отношением* φ на множестве M назовём некоторое подмножество R_φ в декартовом произведении M^2 ($R_\varphi \subset M^2$). При этом будем говорить, что элемент x находится в отношении φ с элементом y тогда и только тогда, когда $(x, y) \in R_\varphi$ или более кратко:

$$x\varphi y \Longleftrightarrow (x, y) \in R_\varphi.$$

Содержательный смысл этого формального определения состоит в том, что для задания бинарного отношения достаточно задать или знать список пар элементов (R_φ), находящихся в данном отношении. Такая формализация удобна тем, что объектом исследования становится множество. Но при таком подходе теряется качественное содержание этого отношения. Зная множество R_φ , мы ничего не сможем сказать о природе этого отношения и не сможем отличить родственные отношения от дружеских или от классовых отношений. На практике же социолог работает с качественным определением отношения и никто ему готового списка R_φ не даст. Это множество, формально определяющее бинарное отношение, надо ещё построить.

Для решения этой задачи необходимо сначала формализовать качественное определение отношения, т. е. записать его на языке математики в виде некоторого предиката $P(x, y)$, который, в свою очередь, позволит уже построить множество R_φ:

$$x\varphi y \Longleftrightarrow P(x, y) = \text{И} \implies R_\varphi = \{\, (x, y) \mid P(x, y) \,\}.$$

Рассмотрим следующий пример. Пусть имеется некоторое подмножество натуральных чисел $M = \{\, 1, 2, 3, 4 \,\}$ и пусть на нём задано отношение "быть делителем". Число x является *делителем* числа y, если число y делится на x без остатка. Это качественное определение. Однако, нам известно, что любое натуральное число можно выразить через другое следующим образом:

$$y = n \cdot x + r \text{ , где } \quad 0 \leqslant r < x \quad \text{и} \quad n \in \mathcal{N}. \tag{2.1}$$

В нашем случае остаток должен быть равен нулю, т.е $r = 0$. Тогда из формулы (2.1) получаем, что число x будет являться делителем числа y, если последнее представимо в виде: $y = n \cdot x$, $n \in \mathcal{N}$. Это уже *формализованное* определение, которое позволяет построить множество, задающее отношение "быть делителем":

$$R_\varphi = \{(x, y) \mid y = n \cdot x\} = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,4),(3,3),(4,4)\}.$$

В данном примере достаточно легко удалось формализовать качественное определение бинарного отношения, так как элементами множества M являлись числа. Для формализации социальных отношений, где элементами являются отдельные индивиды, надо иметь ещё некоторую дополнительную информацию (анкету) об этих индивидах, которую можно записать в виде *кортежа* $(x_1, x_2, \dots x_n)$ (см. стр. 28.). Введём обозначение

$$x \div (x_1, x_2, \dots x_n),$$

которое означает, что элемент x характеризуется кортежем $(x_1, x_2, \dots x_n)$ и рассмотрим несколько примеров формализации качественных определений бинарных отношений.

1. Отношение "быть старше". Индивид x старше индивида y, если он родился раньше. Это качественное определение. Для того, чтобы определить кто старше, достаточно знать дату рождения каждого, d_x и d_y, соответственно. Отметим, что у более старшего дата рождения должна быть меньше, тогда $x \div d_x$, $y \div d_y$ и формализованное определение отношения "быть старше" имеет следующий вид:

$$x\varphi y \iff d_x < d_y. \tag{2.2}$$

2. Отношение "быть родственником". Согласно [9] родственные отношения — это связь между людьми, основанная на происхождении от общего предка. Однако, такое определение оказывается слишком широким и мы, скажем основываясь на библейских сказаниях, рискуем объявить всех людей родственниками. Поэтому приходиться вводить понятие степени родства. В этом случае, для каждого индивида кортеж $P_k(x)$ представляет собой множество всех прародителей до k-ого колена включительно. Два индивида будут родственниками k-ой степени, если их соответствующие множества прародителей содержат хотя бы одного общего предка, т. е.

$$x\varphi y \iff P_k(x) \cap P_k(y) \neq \emptyset\,. \tag{2.3}$$

3. Отношение "сидеть рядом". Характерный пример весьма расплывчатого понятия, которое , тем не менее , требуется уточнить и формализовать, так как совершенно неясно , что собой должен представлять кортеж. Прежде всего необходимо в данном случае ввести систему координат. Если мы говорим о посещении театра, то система координат (ряд, место) обычно уже задана и входной билет полностью определяет кортеж. Ничто не мешает и в других случаях ввести подобную систему координат и тем самым определить месторасположение каждого индивида. Остаётся теперь уточнить понятие "рядом". Обычно мы требуем, чтобы ряд совпадал а номера мест отличались бы не более чем на единицу. Тогда, если $x \div (x_i, x_j)$ и $y \div (y_i, y_j)$,

где первая компонента кортежа — номер ряда а вторая — номер места, то формализованное определение примет следующий вид:

$$x\varphi y \iff \begin{cases} x_i = y_i \\ \mid x_j - y_j \mid \leqslant 1 \end{cases} . \tag{2.4}$$

4. Отношение "быть другом". Это отношение не только весьма расплывчато, но и не имеет строгого определения, что, к сожалению, в социологии встречается часто. В таких случаях можно попытаться выделить некоторые объективные признаки, характеризующие рассматриваемое отношение и на их основе построить частичное (неполное) формализованное определение. Для дружеских отношений таким признаком, по-видимому, является совместное времяпрепровождение какой-то части своего свободного времени.

Для конечных множеств бинарное отношение иногда удобно задавать графически. Для этого на плоскости мысленно рисуется окружность и на ней равномерно в виде точек располагают элементы множества . Если элемент x находится в данном отношении с элементом y, то соответствующие точки соединяют стрелкой (*дугой*), от x — начала дуги к y — концу дуги. Если конец и начало дуги совпадают ($x\varphi x$), то такая дуга называется *петлёй*. Получающуюся картинку называют *орграфом* (ориентированным графом) или просто графом.

Определение. *Орграфом* будем называть структуру $G =< V, D >$, где $\mid V \mid = n$ — конечное множество вершин и $D \subset V^2$ — множество дуг.

Это определение отличается от определения бинарного отношения только требованием конечности множества вершин. Поэтому многие авторы определяют граф как бинарное отношение, заданное на конечном множестве вершин, где $V = M$ и $D = R_\varphi$. В качестве примера построим граф, задающий отношение "быть делителем" на множестве $M = \{ 1, 2, 3, 4 \}$ (см. Рис. 2.1.).

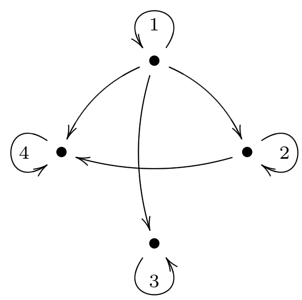


Рис. 2.1. Граф отношения "быть делителем".

Орграф даёт визуальное представление связей между элементами множества, порождаемых бинарным отношением. Однако, подобная картинка не годится для непосредственной компьютерной обработки и анализа существующих связей. Поэтому граф часто бывает удобно задавать при помощи матрицы, называемой *матрицей смежности*: $R_{n\times n} = \{r_{i,j}\}$, где $n = \mid V \mid$ и

$$r_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{если } x_i \varphi x_j; \\ 0, & \text{если } (x_i, x_j) \notin R_\varphi. \end{cases}$$

В качестве примера, построим матрицу смежности для отношения быть делителем:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Можно заметить, что матрица смежности R также как и множество R_φ определяет список пар элементов, находящихся в данном отношении.

2.2 Свойства бинарных отношений

Анализировать бинарные отношения можно через выявление тех свойств, которыми обладают или не обладают рассматриваемые отношения. Рассмотрим наиболее важные свойства.

1. Рефлексивность.

Определение. Отношение φ на множестве M будем называть *рефлексивным*, если для всех элементов из этого множества имеет место $x\varphi x$, т. е. $\forall\, x \in M\ (x,x) \in R_\varphi$.

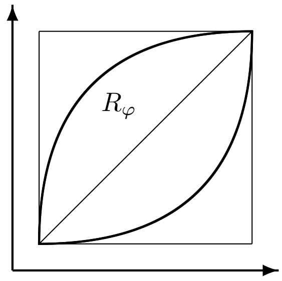


Рис. 2.2.

Признаками того, что бинарное отношение является рефлексивным могут служить: принадлежность множеству R_φ диагонали множества M^2 (см. Рис. 2.2); наличие петли у каждой вершины графа и единицы, стоящие по главной диагонали матрицы смежности R. Из рассмотренных выше примеров все отношения, за исключением отношения "быть старше", являются рефлексивными. У критически настроенного читателя может возникнуть сомнение в том, что сидя в театре он "сидит рядом" с собой. Попробуем внести некоторые исправления в соответствующее определение (2.4) и рассмотрим новое отношение:

$$x\varphi y \iff \begin{cases} x_i = y_i \\ \mid x_j - y_j \mid = 1 \end{cases} .$$

Определённое таким образом отношение уже не будет являться рефлексивным. Но, по мнению автора, это новое определение больше соответствует отношению "сидеть непосредственно рядом" (возле, около) чем "сидеть рядом", т. е. достаточно близко.

2. Симметричность.

Определение. Отношение φ на множестве M будем называть *симметричным*, если из того, что элемент $x \in M$ находится в отношении φ с элементом $y \in M$ ($(x,y) \in R_\varphi$) обязательно следует, что и элемент y находится в отношении φ с элементом x, т. е. $x\varphi y \Longrightarrow y\varphi x$.

Заметим, что точки плоскости (x,y) и (y,x) расположены симметрично относительно диагонали квадрата M^2 (см. Рис. 2.2.), поэтому множество R_φ, задающее бинарное отношение, всегда оказывается симметричным. Отсюда и происходит название данного свойства. Если рассмотрим орграф, задающий симметричное отношение на конечном множестве, то с каждой дугой будет существовать тогда и противоположно направленная дуга. Поэтому, обычно, для симметричных отношений вершины соединяют не дугами, а *ребрами* и соответствующий граф называют уже *неориентированным.* Матрица смежности R также будет симметричной, так как $r_{i,j} = r_{j,i}$. Из рассмотренных примеров отношения "быть родственником", "сидеть рядом" и "быть другом" являются симметричными. Отношения "быть делителем" и "быть старше" этим свойством не обладают.

3. Транзитивность.

Определение. Отношение φ на множестве M будем называть *транзитивным*, если из выполнения условий $x\varphi y$ и $y\varphi z$ следует, что $x\varphi z$.

Транзитивными являются отношения "быть делителем" и "быть старше". Дружеские и родственные отношения свойством транзитивности не обладают. Так друг вашего друга совсем не обязан быть вашим другом. Если отец и сын и, соответственно, сын и мать (жена отца) находятся в близких родственных отношениях, то отсюда не следует, что муж и жена близкие родственники. Более того, браки между близкими родственниками вплоть до четвёртой степени запрещены как церковью, так и законом.

4. Полнота.

Определение. Отношение φ на множестве M будем называть *полным*, если для любой пары несовпадающих элементов x и y из множества M или элемент x находится в отношении φ с элементом y или элемент y находится в отношении φ с элементом x, т. е. истинно следующее высказывание:

$$\forall\, x, y \in M,\, x \neq y \Longrightarrow (x\varphi y) \vee (y\varphi x) = \text{И}.$$

Согласно этому определению, по крайней мере, одна из симметричных точек (x, y) или (y, x) должна принадлежать множеству R_φ. Тогда, если множество M конечно и отношение φ задано графом, то любые две вершины графа должны быть соединены дугой. Так как направление дуги неизвестно, то будем вместо дуги рисовать ребро. В результате получим неориентированный граф, в котором проведены все рёбра. Такой неориентированный граф называется *полным*. Отсюда и название данного свойства. Примером полного отношения может служить отношение "быть не младше": $x\varphi y \Longleftrightarrow d_x \leqslant d_y$.

5. Антисимметричность.

Определение. Отношение φ на множестве M будем называть *антисимметричным*, если из выполнения условий $x\varphi y$ и $y\varphi x$ следует, что $x = y$.

Согласно этому определению никакие две симметричные точки (x, y) и (y, x) не могут одновременно принадлежать множеству R_φ. Примерами антисимметричных отношений могут служить отношения "быть не меньше (не больше)" для числовых множеств и "быть подмножеством". Отметим, что оговорка "для числовых множеств" неслучайна, так как очень похожее отношение "быть не младше (не старше)" в общем случае свойством антисимметричности не обладает. Дело в том, что в социальной сфере не может существовать двух тождественно равных объектов. Кортежи, характеризующие эти объекты, в силу своей конечности, могут совпасть, но объекты всё-равно останутся разными. Поэтому, имея равенство $d_x = d_y$, мы не можем утверждать, что $x = y$.

Отметим, что перечисленные свойства не являются абсолютными и могут проявляться в тех или иных отношениях различным образом, в зависимости от рассматриваемого множества и самого отношения. Так отношение "быть делителем" в общем случае не обладает свойством полноты. Однако, если это отношение задано на множестве $M = \{1, 2, 4\}$, то оно уже будет обладать свойством полноты.

2.3 Отношение эквивалентности

Выявление свойств отношений, выполняющихся для любых множеств, позволяет классифицировать эти отношения и выделять целые классы отношений, обладающих общими свойствами. Один из таких классов образуют *эквивалентности.* Понятие эквивалентности, в том или ином виде, присутствует во всех без исключений научных дисциплинах и используется для выявления элементов близких по своим характеристикам.

Определение. Бинарное отношение φ на множестве M будем называть *отношением эквивалентности* (эквивалентностью), если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Можно заметить, что в основу определения эквивалентности положены основные свойства отношения *равенства.* Следовательно, понятие эквивалентности это есть обобщение понятия равенства, так как оно сохраняет все его основные свойства, но при этом не требует тождественного совпадения. Обычно говорят, что эквивалентность — это равенство по определённому признаку φ и используют следующее обозначение $x \underset{\varphi}{\sim} y$. Более того, любое отношение эквивалентности можно определить через равенство или систему равенств: $x \underset{\varphi}{\sim} y \iff \varphi(x) = \varphi(y)$. Верно и обратное утверждение, т. е. бинарное отношение, определённое равенством или системой равенств, всегда будет эквивалентностью. Это позволяет легко строить примеры отношений эквивалентности. Так, если мы в качестве множества M возьмём множество респондентов, заполнивших анкету с закрытыми вопросами, то одинаковые ответы на некоторые из вопросов определят эквивалентность. Следовательно, эквивалентностями будут следующие отношения: "быть ровесником", "состоять в одной партии", "иметь одинаковый пол" и т. п.

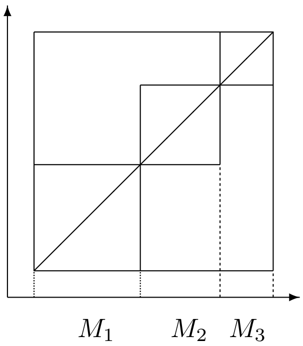


Рис. 2.3.

Если имеется формальное определение эквивалентности, то соответствующее множество, определяющее это отношение, будем обозначать через $R_{\varphi}^{\sim}$. Можно показать, что это множество представляет собой систему "квадратиков", нанизанных на диагональ (см. Рис.2.3). Содержательный смысл этого рисунка раскрывает следующая теорема.

Теорема 8. *Если на множестве M определено отношение эквивалентности $R_{\varphi}^{\sim}$, то это приводит к разбиению множества на непересекающиеся классы эквивалентных элементов*

$$M = \bigcup_i M_i \quad \textit{при этом} \quad M_i \cap M_j \neq \emptyset, \textit{ если } \quad i \neq j.$$

Доказательство. Возьмём произвольный элемент $a \in M$ и построим множество $M_a = \{\, x \mid a \underset{\varphi}{\sim} x \,\}$, состоящие из элементов эквивалентных элементу a. В силу свойства рефлексивности $a \in M_a$ и следовательно $M_a \neq \emptyset$. Возьмём теперь произвольный элемент $b \in M$ и аналогичным образом построим множество M_b. Покажем , что эти два множества , если они имеют хотя бы один общий элемент, совпадают. Пусть $z \in M_a \cap M_b$, тогда элемент z будет принадлежать каждому из этих множеств и при этом будет эквивалентен элементам a и b, т. е. $a \underset{\varphi}{\sim} z$ и $b \underset{\varphi}{\sim} z$. В силу свойства симметричности $z \underset{\varphi}{\sim} b$, но тогда по свойству транзитивности следует, что $a \underset{\varphi}{\sim} b$. Возьмём произвольный элемент $v \in M_b$, тогда $b \underset{\varphi}{\sim} v$ и в силу свойства транзитивности $a \underset{\varphi}{\sim} v$. Из эквивалентности элементов a и v следует, что $v \in M_a$ и следовательно $M_b \subset M_a$. В силу симметрии, мы можем написать $b \underset{\varphi}{\sim} a$ и, взяв теперь произвольный элемент $w \in M_a$, аналогичным образом показать, что $M_a \subset M_b$. Из этих двух включений получаем, что $M_a = M_b$. Если теперь для каждого элемента множества $x \in M$ построим M_x, то получим разбиение множества на непересекающиеся подмножества.

Покажем, что элементы, попавшие в одно и тоже подмножество будут эквивалентны. Пусть $v, w \in M_x$, тогда $x \underset{\varphi}{\sim} v$ и $x \underset{\varphi}{\sim} w$. В силу симметричности $v \underset{\varphi}{\sim} x$ и по транзитивности из $v \underset{\varphi}{\sim} x$ и $x \underset{\varphi}{\sim} w$ следует, что $v \underset{\varphi}{\sim} w$.

Осталось теперь показать, что эквивалентные элементы обязательно попадут в одно и тоже подмножество. Предположим противное. Пусть $x \underset{\varphi}{\sim} y$, $x \in M_a$, $y \in M_b$ и при этом $M_a \neq M_b$. Тогда $a \underset{\varphi}{\sim} x$, $x \underset{\varphi}{\sim} y$ и по свойству транзитивности $a \underset{\varphi}{\sim} y$. Но это означает, что $y \in M_a$ и,следовательно,$M_a = M_b$, так как эти множества имеют общий элемент y. Пришли к противоречию.†

Доказанная теорема позволяет установить между M и $R_\varphi^\sim$ следующую связь. Если $M = \bigcup M_i$, разбиение множества порождаемое отношением $R_\varphi^\sim$, то $R_\varphi^\sim = \bigcup M_i^2$ (см. Рис.2.3).

Верно и обратное утверждение, а именно:

Теорема 9 (Обратная). *Если на множестве задано разбиение, то отношение "принадлежать одному подмножеству" является эквивалентностью.*

Рассмотрим несколько примеров:

1. Раньше, когда обработка анкет производилась вручную, часто приходилось их сортировать, складывая в отдельные пачки анкеты с одинаковыми ответами на некоторые из вопросов. Эта операция приводила к разбиению множества заполненных анкет на классы эквивалентности.

2. Группа студентов из 20 человек сдала экзамен со следующими результатами :

"отлично" — 4;
"хорошо" — 8;
"удовлетворительно" — 6;
"неудовлетворительно" — 2.

Если ввести отношение "получить одинаковую оценку", то данное отношение будет эквивалентностью и группа студентов окажется разбитой на четыре класса : "отличники", "хорошисты", "троечники" и "двоечники".

3. Если возьмём отношение "родиться в одном году", то множество жителей города окажется разбито на классы ровесников.

2.4 Отношение порядка

Если отношение эквивалентности является обобщением равенства, то *отношение порядка* — обобщение понятия неравенства. Так как неравенства бывают строгие и нестрогие, то, соответственно, различают строгий и нестрогий порядок.

Определение. *Строгим порядком* будем называть отношение, которое обладает свойствами:

1. антирефлексивности ($\forall x \in M \overline{x \, \varphi \, x} \quad ((x, x) \notin R_\varphi)$);
2. транзитивности ($x \, \varphi y, y \, \varphi z \Longrightarrow x \, \varphi z$).

Примером строгого порядка может служить отношение "быть старше":

$$x\varphi y \Longleftrightarrow d_x < d_y.$$

Определение. *Нестрогим порядком* будем называть отношение, которое обладает свойствами:

1. Рефлексивности ($\forall x \in M \; x\,\varphi x \quad ((x,x) \in R_\varphi)$);
2. Транзитивности ($x\,\varphi y,\, y\,\varphi z \Longrightarrow x\,\varphi z$) ;
3. Антисимметричности ($x\,\varphi y,\, y\,\varphi x \Longrightarrow x = y$).

Примером нестрого порядка может служить отношение "быть делителем". Отметим, что отношение "быть не младше" не является отношением нестрогого порядка, так как для него (см. стр. 33) свойство антисимметричности не выполняется. В связи с этим приходится дополнительно вводить понятие *предпорядка* (квазипорядка).

Определение. *Предпорядком* будем называть отношение, которое обладает свойствами рефлексивности и транзитивности.

Можно заметить, что отношение предпорядка является обобщением как отношения эквивалентности так и нестрогого порядка, так как обладает их общими свойствами — рефлексивностью и транзитивностью.

Обозначим через "$\succ$" и "$\succcurlyeq$", соответственно, отношения строгого и нестрогого порядка. Подмножество M^2, формально определяющее отношение порядка, будем обозначать через $R^{\succ}$ вне зависимости от вида порядка.

Определение. Множество, на котором задано отношение порядка, будем называть *частично упорядоченным* .

Частичный порядок означает, что не все элементы множества сравнимы между собой. Рассмотрим множество абитуриентов $M = \{x, y, v, z\}$, где каждый из абитуриентов характеризуется следующими оценками, полученными на вступительных экзаменах:

$$\begin{array}{ccl} x & \div & (4,\ \ 4,\ \ 4)\,, \\ y & \div & (5,\ \ 4,\ \ 3)\,, \\ z & \div & (3,\ \ 3,\ \ 3)\,, \\ v & \div & (5,\ \ 5,\ \ 2)\,. \end{array}$$

Определим отношение "сдать экзамены не хуже" следующим образом:

$$x \succcurlyeq y \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 \geqslant y_1 \\ x_2 \geqslant y_2 \\ x_3 \geqslant y_3 \end{cases} .$$

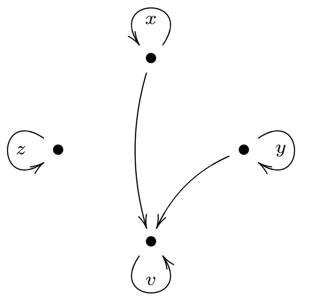


Рис. 2.4. Граф отношения "сдать экзамены не хуже".

Согласно этому определению (см. Рис. 2.4), каждый из абитуриентов сдал экзамены не хуже самого себя, $x \succcurlyeq v$, $y \succcurlyeq v$, а абитуриенты x, y и z между собой несравнимы.

Для того, чтобы можно было сравнивать любые элементы, отношение порядка должно обладать свойством полноты:

$$\forall\, x, y \in M \text{ И} = (x\varphi y) \vee (y\varphi x).$$

Определение. Множество будем называть *линейно упорядоченным*, если на нём задано отношение порядка, обладающее свойством полноты.

Список студенческой группы, словарь, рейтинг лист — всё это примеры линейно упорядоченных множеств. В первых двух примерах линейное упорядочение осуществлено на основе *лексиграфического порядка.*

Определение. Пусть имеется некоторый алфавит S — линейно упорядоченное конечное множество символов и пусть имеются два слова, составленных из символов этого алфавита: $\alpha = \alpha_1\alpha_2\dots\alpha_k\dots$ и $\beta = \beta_1\beta_2\dots\beta_k\dots$ *Лексиграфическим порядком* будем называть отношение порядка, которое устанавливает, что слово α предшествует слову β $(\alpha \succ \beta)$, если $\alpha_1 = \beta_1, \dots,$ $\alpha_{k-1} = \beta_{k-1}$, а символ α_k предшествует символу β_k в алфавите S . При этом считается, что пробел (пустой символ) предшествует любым другим символам.

Если линейный порядок задан на конечном множестве $\mid M \mid = n$, то элементы множества $M = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ можно перенумеровать, и при том единственным способом так, чтобы они перечислялись в порядке "возрастания" (или "убывания"): $x_1^* \prec x_2^* \prec \dots \prec x_n^*$. Если на конечном множестве задан линейный предпорядок, то также можно осуществить эту процедуру, но уже не единственным способом. Можно показать, что, множество M будет разбито в этом случае на классы эквивалентности

$$M = \bigcup_{i=1}^{r} M_i,\ r < n, \text{ порождаемые эквивалентностью: } x \sim y \Longleftrightarrow \begin{cases} x \succcurlyeq y \\ y \succcurlyeq x \end{cases},$$

которые будут уже упорядоченены: $M_1 \prec M_2 \prec \dots \prec M_r$ таким образом, что если $x_i \in M_i$, $y_j \in M_j$ и $i > j$, то $x_i \succ y_j$. Например, если мы хотим ранжировать группу студентов по результатам сданного экзамена , то получим только сравнимые классы "отличников", "хорошистов", "троечников" и "двоечников" (см. стр. 35). А для того, чтобы упорядочить студентов внутри каждого из этих классов потребуется, по-видимому, некоторая дополнительная информация.

При анализе линейных порядков особую роль играют "крайние" элементы: x_1^* и x_n^* — *минимальный* и *максимальный*, соответственно.

Определение. Пусть на множестве M задано отношение порядка $R^{\succ}$. Элемент $x^+ \in M$ будем называть *максимальным* элементом множества M, если

$$\forall y \in M\, (x^+, y) \in R^{\succ}\ (x^+ \succcurlyeq y).$$

Соответственно, элемент $x^- \in M$ будем называть *минимальным* элементом множества M, если

$$\forall y \in M\, (y, x^-) \in R^{\succ}\ (y \succcurlyeq x^-).$$

В общем случае, указанные элементы могут и не существовать (см. пример на стр. 35). Даже наличие линейного порядка не гарантирует существование этих элементов. В качестве примера рассмотрим открытый интервал чисел $(0; 1)$. Все числа строго упорядочены, но ни минимального ни максимального элементов нет. Однако, если линейно упорядоченное множество замкнуто и ограничено, то всегда будут существовать минимальные и максимальные элементы. Если линейный порядок строгий или нестрогий, то будут существовать единственный минимальный элемент и единственный максимальный. В случае линейного предпорядка, таких элементов может быть несколько. Так каждый студент, сдавший экзамен на "отлично" будет максимальным элементом, получивший же "неуд" — минимальным.

Глава 3

Проблема социального выбора

3.1 Правила большинства

Проблема выбора — это центральная проблема, с которой общество и каждый человек сталкивается постоянно в своей повседневной деятельности.

Формализуем проблему социального выбора следующим образом. Пусть имеется некоторое множество альтернатив M и конечное множество выборщиков N, $\mid N \mid = n$. Каждый из выборщиков, исходя из своих предпочтений, задаёт на множестве альтернатив отношение порядка $R_i^{\succ}$. Требуется найти правило (процедуру выбора), которое однозначно определяло бы "наилучшую" для выборщиков альтернативу. При этом предполагается, что выборщики действуют независимо.

Для принятия коллективных решений необходимо уметь сравнивать между собой различные альтернативы. Организуем попарное сравнение альтернатив путём голосования. Для этого возьмём две произвольные альтернативы $x, y \in M$ и подсчитаем число выборщиков, предпочитающих альтернативу x альтернативе y :

$$n(x,y) = \mid \{i \mid (x,y) \in R_i^{\succ}\} \mid,$$

а также число выборщиков, предпочитающих альтернативу y:

$$n(y,x) = \mid \{j \mid (y,x) \in R_j^{\succ}\} \mid .$$

Определение. Будем говорить, что по правилу *относительного большинства* альтернатива x будет предпочтительнее альтернативы y , если при парном сравнении она наберёт большее число голосов, т. е.

$$x \succ y \Longleftrightarrow n(x,y) > n(y,x).$$

Отметим, что правило относительного большинства используется в нашей стране при проведении второго тура голосования при выборе президента, когда первый тур не позволяет выявить победителя. При голосовании в Думе или Заксе могут использоваться и другие правила голосования.

Определение. Будем говорить, что по правилу *α-большинства* альтернатива x будет предпочтительнее альтернативы y, если она наберёт больше чем αn голосов, т. е.

$$x \succ y \Longleftrightarrow n(x,y) > \alpha n\,, \quad \text{где} \quad \frac{1}{2} \leqslant \alpha < 1.$$

Правило α-большинства при $\alpha = 1/2$ называется правилом *простого большинства*, а при $\alpha = 2/3$ — правилом *квалифицированного большинства.* Последнее правило иногда называют также *конституционным* большинством, поскольку для принятия поправки к Конституции РФ необходимо, чтобы за неё проголосовало более двух третей состава Думы. Это правило действует также при принятии особо важных решений — отклонить "вето" президента или принять решение об импичменте.

Если каждый из выборщиков задаст линейный порядок на множестве альтернатив, то понятия относительного и простого большинства окажутся эквивалентными. Действительно, линейный порядок гарантирует, что при голосовании не будет воздержавшихся и, следовательно, обязательно каждый из выборщиков проголосует за одну из альтернатив. Но тогда будет выполняться соотношение: $n(x,y) + n(y,x) = n$, из которого следует, что $n(y,x) = n - n(x,y)$ и правило относительного большинства становится правилом простого большинства, так как

$$n(x,y) > n(y,x) = n - n(x,y) \Longrightarrow n(x,y) > n/2.$$

Исходные данные для анализа конкретных примеров проблемы социального выбора будем задавать в виде следующей таблицы, которую принято называть *групповым профилем*:

n_1	$\ldots$	n_i	$\ldots$	n_r
$x_{1,1}$	$\ldots$	$x_{i,1}$	$\ldots$	$x_{r,1}$
$x_{1,2}$	$\ldots$	$x_{i,2}$	$\ldots$	$x_{r,2}$
$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$x_{1,m}$	$\ldots$	$x_{i,m}$	$\ldots$	$x_{r,m}$

где n_i – число выборщиков ($\sum n_i = n$), задавших на множестве M линейный порядок: $x_{i,1} \succ x_{i,2} \succ \ldots \succ x_{i,m}$, $m = |M|$.

Определение. *Победителем по Кондорсе*[1] будем называть альтернативу $x^* \in M$, которая при парном сравнении не может проиграть никакой другой, т. е.

$$\forall y \in M \;\; n(x^*,\, y) \geqslant n(y,\, x^*).$$

Определение. Худшим (проигравшим) по Кондорсе будем называть альтернативу $\dot{x} \in M$, которая при парном сравнении не может выиграть ни у одной из альтернатив , т. е.

$$\forall y \in M \;\; n(y,\, \dot{x}) \geqslant n(\dot{x},\, y).$$

Заметим, что данные определения почти дословно повторяют определения (см. стр. 37) максимального и минимального элементов множества.

[1]КОНДОРСЕ Мари Жан Антуан Никола де Карита (1743–1794) — французский философ-просветитель, математик и социальный теоретик.

Отличие состоит в том, что попарное сравнение элементов не обязано, в общем случае, задавать на множестве альтернатив отношение порядка. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим следующий групповой профиль:

25	30	45
a	b	c
b	c	a
c	a	b

Нетрудно проверить, что $n(a,b) = 25 + 45 = 70 > n(b,a) = 30$ и следовательно $a \succ b$. Аналогичным образом можно убедиться, что для большинства выборщиков $b \succ c$ и $c \succ a$, так как $n(b,c) = 55$ и $n(c,a) = 70$. Но тогда отношение коллективного предпочтения $x \succ y \iff n(x,y) > n(y,x)$ не обладает свойством транзитивности и, следовательно, не является отношением порядка. Более того, в данном профиле не существует ни победителя по Кондорсе, ни худшего, так как для любой альтернативы всегда можно указать ещё более предпочтительную для большинства. Этот пример иллюстрирует *парадокс голосования* (парадокс Кондорсе), который показывает, что попарное сравнение альтернатив не позволяет, в общем случае, когда альтернатив больше двух, решить проблему социального выбора.

Отсутствие победителя по Кондорсе и ,следовательно наличие, как минимум, трёх равносильных альтернатив предоставляет богатые возможности для манипулирования итогами голосования. Для получения желаемого результата, ведущему собрание (спикеру, председателю комитета или жюри и т. п.) достаточно лишь "грамотно" установить порядок последовательного сравнения альтернатив.

Для анализируемого профиля победителем всегда будет альтернатива рассматриваемая в последнюю очередь. Так, если обсуждаются три варианта постановления и ни одно из них не набирает более 50 процентов голосов, а ведущий предпочитает вариант c, то он может предложить сначала сравнить альтернативы a и b и затем уже лучшую из них с альтернативой c. Поскольку $a \succ b$ и $c \succ a$, то окончательно будет принят вариант c.

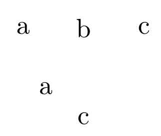


Рис. 3.1.

Чтобы избежать нежелательной возможности манипулирования итогами выбора при отсутствии победителя по Кондорсе, можно выбрать одно из правил голосования, обобщающих это понятие. Такие правила обычно называют *состоятельными по Кондорсе*, поскольку они гарантируют выбор победителя по Кондорсе, если такой существует среди рассматриваемых альтернатив. Рассмотрим некоторые из этих правил.

Определение. *Правило Копленда.* Сравним две произвольные альтернативы x и y и оценим результат следующим образом

$$k(x,y) = \begin{cases} +1, & \text{если } n(x,y) > n(y,x) \\ -1, & \text{если } n(x,y) < n(y,x) \\ 0, & \text{если } n(x,y) = n(y,x). \end{cases}$$

Суммируя очки, набранные альтернативой x, определим *оценку Копленда*:

$$K(x) = \sum_{y \neq x} k(x,y).$$

Альтернативу, имеющую наивысшую оценку, объявим *победителем по Копленду.*

Для того, чтобы определить победителя по Копленду, надо провести круговой турнир и посмотреть какая альтернатива наберёт наибольшее количество очков. Так как победитель по Кондорсе не может проиграть никакой другой альтернативе, то он естественно, получит наивысшую оценку Копленда: $K(x^*) = m - 1$, где m — число альтернатив.

Определение. *Правило Симпсона. Оценкой Симпсона* альтернативы x будем называть наименьшее из всех чисел $n(x, y)$

$$S(x) = \min_{y \neq x} n(x, y).$$

Альтернативу, имеющую наивысшую оценку, объявим *победителем по Симпсону.*

Если существует победитель по Кондорсе, то $S(x^*) > n/2$ и он оказывается победителем по Симпсону, так как для всех остальных альтернатив $S(y) < n/2$.

Определение. *Правило параллельного исключения.* Пусть число альтернатив $m = 2^r$. Разобъём все альтернативы на пары и сравним по правилу большинства. Победители выходят в следующий круг, где опять разбиваются на пары и сравниваются. Осуществив эту процедуру r раз, определим единственного победителя.

Это хорошо известная "олимпийская система соревнований с выбыванием", которая многими считается наиболее справедливой, так как является состоятельной по Кондорсе. Однако, кого эта система объявит победителем, если победителя по Кондорсе нет? К сожалению, ответ неоднозначный. Всё зависит от жеребьёвки. Рассмотрим следующий групповой профиль:

25	30	45
a	b	c
b	c	a
c	a	b
d	d	d

Здесь, в отличие от примера на стр. 41, добавлена альтернатива d, которая является худшей по Кондорсе. Разабъём альтернативы на пары произвольным образом и сравним. Победители каждой из пар встретятся в финале. Оказывается, что в данном случае, как и в спорте, преимуществом в финале будет обладать тот, кому в полуфинале достался более слабый соперник. Убедимся непосредственно, что альтернатива, сравниваемая в полуфинале с альтернативой d, становится победителем.

a b c d a c b d a d b c

a c c b a b

c b a

Выше перечисленные правила, хотя и позволяют решать проблему выбора, на практике применяются редко, так как требуют слишком больших материальных затрат. Исключение представляют спортивные соревнования.

3.2 Правила голосования с подсчетом очков

Одним из недостатков правил большинства является то, что они не учитывают степень предпочтения отдельных выборщиков. Так, если i-ый выборщик предпочитает альтернативу x альтернативе y — $(x, y) \in R_i^{\succ}$, то неясно а насколько альтернатива x для него будет предпочтительнее. Степень предпочтения можно измерить числом промежуточных альтернатив z таких, что $x \succ z \succ y$. Пусть каждый из выборщиков задаст линейный порядок R_i на конечном множестве альтернатив $\mid M \mid = m$. Рассмотрим неубывающую последовательность целых чисел

$$s_0 \leqslant s_1 \leqslant \ldots \leqslant s_{m-1}, \quad \text{где} \quad s_0 < s_{m-1}\,,$$

которая определяет число очков $s_i(x)$, получаемое альтернативой x от i-го выборщика в зависимости от занятого места. При этом, за последнее место даётся s_0 очков, за предпоследнее — s_1 и так далее.

Определение. *Правило подсчета очков.* Будем считать *победителем по очкам* альтернативу, имеющую максимальную сумму очков

$$B(x) = \sum_{i=1}^{n} s_i(x).$$

Отметим наиболее важные частные случаи.

- *Правило Борда*: $s_0 = 0$, $s_1 = 1$, …, $s_{m-1} = m - 1$, по которому число очков $b_i(x)$, получаемое альтернативой x от i-го выборщика, равно числу менее предпочтительных для него альтернатив. В этом случае $B(x) = \sum b_i(x)$ называется *числом Борда* и можно показать, что

$$B(x) = \sum_{y \in N} [n(x, y) - n(y, x)],$$

  где, $n(x, y)$ — число выборщиков, для которых $(x, y) \in R_i$.

- *Рейтинговое голосование*: $s_0 = s_1 = \ldots = s_{m-2} = 0$, $s_{m-1} = 1$, когда каждый выборщик может подать свой голос только за одну альтернативу и альтернатива, набравшая большинство голосов, объявляется победителем.

- При подведении итогов командных соревнований, где R_i определяется результатами отдельных видов программы, очки могут начисляться командам следующим образом: за первое место — 7 очков, за второе — 5, за третье — 4, …, за шестое — 1 и за остальные ничего. В зависимости от вида спорта и уровня соревнований количество зачётных мест и начисляемых очков могут, естественно, варьироваться. Победителем будет объявлена команда, набравшее наибольшее число очков.

Обратимся снова к примеру на стр. 42. Найдём числа Борда для рассматриваемых альтернатив

$$\begin{array}{rcrcr} B(a) & = & 25\cdot 3+30\cdot 1+45\cdot 2 & = & 195 \\ B(b) & = & 25\cdot 2+30\cdot 3+45\cdot 1 & = & 185 \\ B(c) & = & 25\cdot 1+30\cdot 2+45\cdot 3 & = & 220 \\ B(d) & = & 25\cdot 0+30\cdot 0+45\cdot 0 & = & 0 \end{array}$$

и упорядочим все альтернативы по убыванию: $c \succ a \succ b \succ d$. Рейтинговое голосование задаст уже другой порядок: $c \succ b \succ a \succ d$.

Как видим, правило мест позволяет не только решить проблему выбора, но и задать отношение порядка на множестве альтернатив. Однако, и у правила суммы очков также имеются существенные недостатки. Так, например, оказывается, что

Теорема 10 (Фишберн [8]). *Существуют профили, для которых победитель по Кондорсе не может стать победителем по очкам ни при какой системе очков.*

Доказательство. Рассмотрим следующий групповой профиль

6	3	4	4	
a	c	b	b	s_2
b	a	a	c	s_1
c	b	c	a	s_0

где $s_2 \geqslant s_1 \geqslant s_0$ и $s_2 > s_0$ — число очков начисляемое за соответствующее место. Альтернатива a является победителем по Кондорсе, так как

$$n(a,b) = 9 > 17/2 \quad \text{и} \quad n(a,c) = 10 > 17/2\,.$$

Теперь сравним суммы очков, набранных альтернативами a и b

$$B(a) = 6s_2 + 7s_1 + 4s_0 \quad , \quad B(b) = 8s_2 + 6s_1 + 3s_0$$
$$B(b) - B(a) = 2s_2 - s_1 - s_0 = (s_2 - s_1) + (s_2 - s_0) > 0.$$

Следовательно $B(b) > B(a)$ и альтернатива a не может быть победителем по сумме очков.†

Более того, оказывается, что при рейтинговом голосовании победителем может быть объявлен худший по Кондорсе. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим следующий групповой профиль

3	5	7	6
a	a	b	c
b	c	d	b
c	b	c	d
d	d	a	a

Здесь $B(a) = 8 > B(b) = 7 > B(c) = 6$ и, следовательно, альтернатива a имеет наивысший рейтинг. Однако, большая часть выборщиков поставила эту альтернативу на последнее место и, при парном сравнении с любой другой, оказывается, что $n(x,a) \geqslant 13 > 21/2 > n(a,x)$, т. е. альтернатива a является худшей по Кондорсе. Этот парадокс объясняет почему иногда многие рейтинг-листы, хит-парады, топ-десятки и т. п. возглавляют далеко не лучшие альтернативы. Именно для того, чтобы избежать подобного парадокса, выборы президента, мэров и т. п. у нас в стране проводятся в два этапа. Поэтому отказ многих регионов от проведения второго тура голосования может привести к очень неожиданным результатам выборов.

Ещё одна проблема — это выбор правил голосования и системы очков. Проиллюстрируем её на следующем примере (Страффин [8]). Для этого рассмотрим групповой профиль

1	4	1	3	B_1	B_2	B_3	B_4
a	c	e	e	4	1	3	2
b	d	a	a	3	1	2	2
c	b	d	b	2	1	1	1
d	e	b	d	1	0	0	1
e	a	c	c	0	0	0	0

где B_1, B_2, B_3, B_4 — используемые системы очков.

Для анализа данного профиля попытаемся определить победителя, используя все ранее перечисленные методы голосования:

- Парное сравнение ничего не даёт, так как нет победителя по Кондорсе.
- Правило Симпсона также не позволяет выявить победителя, так для всех альтернатив $S(x) = \min_y n(x, y) = 4$ и все альтернативы оказываются эквивалентными.
- Правило Копленда объявляет победителем альтернативу a и задаёт на множестве альтернатив следующий предпорядок: $a \succ \{b, c, d, \} \succ e$.
- Правило Борда (система очков B_1) объявляет победителем альтернативу e, так как
$$B_1(a) = 16,\ B_1(b) = B_1(c) = B_1(d) = 18,\ B_1(e) = 20$$
и задаёт предпорядок $e \succ \{b, c, d\} \succ a$ противоположный предпорядку, полученному по правилу Копленда.
- Система очков B_2 соответствует неофициальному олимпийскому зачёту, когда подсчитывается только число призовых мест. В этом случае
$$B_2(a) = B_2(c) = B_2(d) = 5,\ B_2(b) = 8,\ B_2(e) = 4$$
и альтернатива b будет объявлена победителем.
- Если попытаться дополнительно учесть достоинство олимпийских медалей (система очков B_3), то
$$B_3(a) = 11,\ B_3(b) = B_3(d) = 9,\ B_3(c) = 13,\ B_3(e) = 12$$
и победителем будет уже альтернатива c.
- Альтернатива d ничуть не хуже всех остальных и при системе очков B_4 она окажется победителем, так как
$$B_4(a) = B_4(a) = 10,\ B_4(c) = 9,\ B_4(d) = 13,\ B_4(e) = 12.$$

Как видно из данного примера, любая из альтернатив может быть достаточно обоснованно объявлена победителем. Всё зависит от системы голосования, которую мы используем.

3.3 Парадокс Эрроу

Неудовлетворённость получаемыми результатами и возникающие при этом парадоксы заставляют более основательно подойти к проблеме социального выбора. Для этого попытаемся построить функцию коллективного выбора, которая, с одной стороны, упорядочила бы все альтернативы, а с другой, отвечала бы некоторым нашим представлениям о "справедливом" выборе

$$R^{\succ} = F(R_1^{\succ}, R_2^{\succ}, \dots, R_n^{\succ}),$$

где $R_i^{\succ}$, $i = 1, 2, \dots, n$ — индивидуальные предпочтения выборщиков;

F — коллективная функция выбора (правила голосования);

$R^{\succ} \subset M^2$ — отношение порядка, задаваемое функцией F.

Очевидно, что множество функций коллективного выбора не пусто, так как правила Копленда, Симпсона, Борда и др. позволяют упорядочивать альтернативы . Теперь остаётся только сформулировать требования, предъявляемые к этим функциям с тем, чтобы избежать нежелательных парадоксов. Эти требования принято называть "аксиомами голосования" или "аксиомами демократического выбора". В научной литературе, посвящённой проблеме голосования, можно найти около двух десятков таких аксиом. Укажем некоторые из них.

Аксиома I. *Универсальность.* Функция коллективного выбора F должна быть определена на любом наборе $\{R_i^{\succ}\}_{i=1}^n$ индивидуальных предпочтений.

Аксиома II. *Монотонность.* Пусть $\{R_i\}$ предпочтения выборщиков, согласно которым $(x, y) \in R$, т. е. для "большинства" альтернатива x предпочтительнее альтернативы y. Если теперь некоторые из выборщиков пересмотрят свои предпочтения в пользу альтернативы x ($R_i^{'} = R_i$, если $(x, y) \in R_i$), то новые предпочтения $\{R_i^{'}\}$ не должны изменить коллективный выбор, т.е для "большинства" альтернатива x должна остаться предпочтительнее альтернативы y — $(x, y) \in R^{'}$, где $R^{'} = F(R_1^{'}, R_2^{'}, \dots, R_n^{'})$.

Аксиома III. *Независимость от посторонних альтернатив.* Пусть $\{R_i\}$ предпочтения выборщиков, согласно которым $(x, y) \in R$. Если добавим к множеству M ещё одну альтернативу $M^{'} = M \cup \{a\}$ и доопределим индивидуальные предпочтения следующим образом:

$$R_i^{'} = R_i \cup R_i^a, \quad \text{где} \quad R_i^a \subset (M \times \{a\}) \cup (\{a\} \times M),$$

то и для новых (расширенных) предпочтений альтернатива x должна остаться более предпочтительной, т. е. $(x, y) \in R^{'}$.

Аксиома IV. *Суверенность граждан.* Фальсификация выбора не допускается, т. е. обязательно должны учитываться мнения выборщиков и поэтому любая альтернатива может оказаться по сравнению с любой другой более предпочтительной:

$$\forall\, x, y \in M \,\exists\, \{R_i\}\, (x, y) \in R.$$

Аксиома V. *Отсутствие "диктатора".* "Диктатором" будем называть такого выборщика i^*, чьё предпочтение объявляется коллективным мнением, т. е.

$$\forall \{R_i\}\, R = F(R_1, R_2, \dots, R_n) = R_{i^*}.$$

Аксиома VI. *Состоятельность по Кондорсе.* Если существует победитель по Кондорсе $x^* \in M$, то он будет объявлен победителем выборов, т. е. $\forall\, y \in M\, (x^*, y) \in R$.

Аксиома VII. *Участие.* Пусть выборщик i не участвует в голосовании и победителем будет объявлена альтернатива a. Тогда участие выборщика i приведёт к избранию или альтернативы a или более для него предпочтительной альтернативы b, т. е. $(b, a) \in R_i$.

Аксиома VIII. *Неманипулируемость.* Выборщикам невыгодно сообщать ложную информацию о своих предпочтениях. Если i-ый выборщик сообщит $R_i^{'}$ вместо R_i, в результате чего победителем будет объявлена альтернатива b вместо альтернативы a, то $(a, b) \in R_i$.

Аксиома IX. *Эффективность (Оптимальность по Парето).* Если все выборщики предпочитают альтернативу x, то она и должна быть объявлена победителем, т. е. $\forall\, i \in N \forall\, y \in M\, (x, y) \in R_i \Longrightarrow \forall\, y \in M (x, y) \in R$.

Аксиома X. *Пополнение.* Разобъём множество выборщиков на два непересекающихся подмножества: $N = N_1 \cup N_2$, $N_1 \cap N_2 = \emptyset$. Если каждое из подмножеств объявит победителем альтернативу $a \in M$, то и всё множество выборщиков N должно объявить эту альтернативу победителем.

Аксиома XI. *Анонимность (Равноправие выборщиков).* Номер выборщика не должен влиять на результат. Если осуществить любую перестановку аргументов функции коллективного выбора $\pi(R_1, \ldots, R_n) = (R_1^*, \ldots, R_n^*)$, то результат не изменится $F(R_1, \ldots, R_n) = F(R_1^*, \ldots, R_n^*)$.

Аксиома XII. *Нейтральность (Равноправие альтернатив).* Номер альтернативы не влияет на результат. Пусть групповой профиль $\{R_i^{'}\}$ получен из профиля $\{R_i\}$ перестановкой местами альтернатив x и y в предпочтении каждого выборщика. Тогда, если $(x, y) \in R$, то $(y, x) \in R^{'}$.

Список аксиом можно было бы продолжить. Но и так уже представленный перечень аксиом представляет собой систему зависимых и не совместных между собой аксиом.

Теорема 11 (теорема Эрроу о невозможности)**.** *Если число выборщиков не менее двух $|N| \geqslant 2$, а число альтернатив не менее трех $|M| \geqslant 3$, то аксиомы I – V несовместны, т. е. невозможно построить функцию коллективного выбора, удовлетворяющую этим аксиомам.*

Этот результат, полученный Эрроу в 1951 году, оказался весьма неожиданным для либералов, так как утверждает , что нет и не может быть идеальной избирательной системы, соответствующей нашим представлениям о "демократическом" выборе и вызвал многочисленные дебаты и дискуссии, которые продолжаются и по сегодняшний день. Были предприняты многочисленные попытки ослабить требования аксиом, но тщетно.

Однако, действительно, некоторые аксиомы необходимо сузить. Так аксиома универсальности требует, чтобы функция коллективного выбора была определена на любом мыслимом множестве индивидуальных предпочтений. Но мы знаем, что в любом государстве при организации выборов существует возрастной ценз и другие ограничения, так как бессмысленно проводить голосование, скажем, в детском саду или в доме умалишенных. Любая социологическая теория должна ориентироваться на рациональное поведение и, следовательно, необходимо учитывать соответствующие законы , формирующие это поведение. Поэтому можно утверждать, что индивидуальные предпочтения не являются абсолютно произвольными а, напротив, подчиняются некоторым закономерностям.

Предположим, что все альтернативы упорядоченены по какому-либо признаку, например, по шкале левый–правый, число выборщиков нечётно $n = 2k+1$, а индивидуальные предпочтения каждого из выборщиков задаются унимодальной функцией полезности u_i: $(x, y) \in R_i \iff u_i(x) > u_i(y)$, график которой изображен на Рис.3.2.

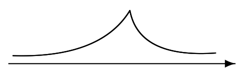


Рис. 3.2. График унимодальной функции

Обозначим через p_i альтернативу, на которой достигается "пик" функции полезности $\max_x u_i(x) = u_i(p_i)$. В силу унимодальности альтернативы p_i будут определены однозначно для каждого из выборщиков. Упорядочим эти альтернативы по имеющейся шкале

$$p_1^* \preccurlyeq p_2^* \preccurlyeq \ldots \preccurlyeq p_k^* \preccurlyeq p_{k+1}^* \preccurlyeq p_{k+2}^* \preccurlyeq \ldots \preccurlyeq p_n^* .$$

Тогда, альтернатива p_{k+1}^*, оказавшаяся на $(k+1)$ месте, её иногда ещё называют *медианой*, будет победителем по Кондорсе. Проверим это утверждение. Возьмём произвольную альтернативу x, лежащую левее p_{k+1}^* и сравним эти две альтернативы. Так как, в силу унимодальности, все выборщики, чьи "пики" совпадают с p_{k+1}^* или лежат правее, предпочтут альтернативу p_{k+1}^*, то

$$n(p_{k+1}^*, x) \geqslant (k+1) = (n+1)/2 > n/2.$$

Возьмём теперь альтернативу y, лежащую правее p_{k+1}^*. Тогда все выборщики, чьи "пики" совпадают с p_{k+1}^* или лежат левее, предпочтут альтернативу p_{k+1}^* и

$$n(p_{k+1}^*, y) \geqslant (k+1) = (n+1)/2 > n/2 .$$

Таким образом, при сделанных предположениях, всегда определён победитель, выбор которого уже удовлетворяет всем аксиомам теоремы Эрроу.

3.4 Анализ избирательной системы РФ

Посмотрим какие из перечисленных 12 аксиом выполняются в нашей избирательной системе.

Аксиома I. *Универсальность.* Не выполняется, так как если большинство предпочтёт альтернативу "против всех", то выборы будут считаться не состоявшимися.

Аксиома II. *Монотонность.* Не выполняется. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим следующий групповой профиль

30	32	38
a	b	c
b	c	a
c	a	b

По результатам первого тура голосования победитель определён не будет и во второй тур выйдут альтернативы b и c. Так как

$$n(b,c) = 30 + 32 = 64 > n(c,b) = 38,$$

то по правилу относительного большинства победителем будет объявлена альтернатива b. Предположим, что на основе опросов или пробных голосований избирателям станет известен рассматриваемый профиль и , следовательно, результат предстоящих выборов. Как подобная информация может отразиться на поведении электората? Да, всегда найдутся "перевёртыши", желающие оказаться в стане будущего победителя. Поэтому предположим, что часть электората альтернативы c будет теперь голосовать за альтернативу b, в результате чего групповой профиль предпочтений изменится следующим образом

30	42	28
a	b	c
b	c	a
c	a	b

Казалось бы, дополнительные голоса должны только улучшить положение альтернативы b. Однако, теперь во второй тур выйдут альтернативы a и b и так как $n(a,b) = 30 + 28 = 58 > n(b,a) = 42$, то уже альтернатива a будет объявлена победителем. Как видно из данного примера, иногда дополнительные голоса могут только помешать достижению победы.

Аксиома III. *Независимость от посторонних альтернатив.* Не выполняется. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим два следующих профиля

32	30	38
a	b	c
b	c	a
c	a	b

22	30	33	15
a	b	c	d
b	c	a	a
c	a	b	c
d	d	d	b

где появление новой альтернативы d сократило электорат альтернатив a и c. Как это отразится на итогах голосования ? В первом случае победителем будет объявлена альтернатива c и , следовательно, для большинства $c \succ b$. Во втором случае победит уже альтернатива b и тогда оказывается, что $b \succ c$. Таким образом, появление дополнительной альтернативы привело к изменению отношения между альтернативами b и c.

Аксиома IV. *Суверенность граждан.* Формально выполняется. Однако, на практике, что дружно признаётся всеми политиками и СМИ, возможна фальсификация итогов выборов в пределах до 20 процентов, половина из которых приходится на долю "административного ресурса".

Аксиома V. *Отсутствие "диктатора".* Формально выполняется. Однако, на практике, коль скоро допускается фальсификация и если при этом организатор фальсификации одновременно является выборщиком, то в какой-то степени он будет и "диктатором".

Аксиома VI. *Состоятельность по Кондорсе.* Не выполняется. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим следующий групповой профиль

30	32	38
a	b	c
b	a	a
c	c	b

Легко проверить, что

$$n(a,b) = 30 + 38 = 68 > n(b,a) = 32 \quad \text{и} \quad n(a,c) = 30 + 32 = 64 > n(c,a) = 38$$

и , следовательно, альтернатива a является победителем по Кондорсе. Но в нашей системе она выбрана не будет, так как не сможет даже попасть во второй тур.

Аксиома VII. *Участие.* Не выполняется. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим два следующих профиля

30	32	38
a	b	c
b	c	a
c	a	b

30	32	28
a	b	c
b	c	a
c	a	b

отличающихся только тем, что часть электората альтернативы c, оценив бесперспективность победы (см. пример) , отказалась от участия в голосовании. В результате этого демарша, победителем вместо альтернативы b стала альтернатива a. Но для электората альтернативы c $a \succ b$ и , следовательно, те , кто отказался участвовать в выборах, тем самым улучшили для себя итоги выборов. И не только для себя, ещё и для 58 процентов избирателей итоги выборов оказались более предпочтительными. Так что, если встретите где-нибудь слоган "ГОЛОСУЙ, ИЛИ ПРОИГРАЕШЬ!— не верьте, ложь всё это.

Аксиома VIII. *Неманипулируемость.* Не выполняется. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим два следующих профиля

30	32	38
a	b	c
b	c	a
c	a	b

34	32	34
a	b	c
b	c	a
c	a	b

отличающихся только тем, что часть электората альтернативы c стала голосовать за альтернативу a.В результате этого, победителем вместо альтернативы b будет уже альтернатива c. Так что , голосовать надо не сердцем, а умом.

Аксиома IX. *Эффективность.* Выполняется. Альтернатива, набравшая 100 процентов голосов, будет объявлена победителем уже после первого тура голосования.

Аксиома X. *Пополнение.* Не выполняется. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим три следующих профиля

4	15	20
a	b	c
b	c	a
c	a	b

26	17	18
a	b	c
b	c	a
c	a	b

30	32	38
a	b	c
b	c	a
c	a	b

где третий профиль получается объединением выборщиков из первых двух. В первом профиле альтернатива c будет объявлена победителем уже после первого тура голосования, так как наберёт более 50 процентов голосов. Во втором профиле также победит альтернатива c, но уже после второго тура. Естественно было бы предсказать ей победу и в третьем профиле. Но там победителем будет объявлена альтернатива b.

Аксиома XI. *Анонимность.* Формально выполняется, так как в Законе о выборах зафиксировано правило: один выборщик — один голос. На практике этот принцип равенства, к сожалению, достаточно часто нарушается, за счёт чего и осуществляется "вброс".

Аксиома XII. *Нейтральность.* Формально выполняется. Но обеспечить реальное равенство альтернатив практически невозможно. Преимущество получают уже альтернативы, попавшие в верхнюю часть бюллетеня, так как определённая часть электората весь список кандидатов никогда не читает. А если попытаться учесть доступ к СМИ, коробки из под ксерокса и т. п., то вообще ни о каком равенстве альтернатив говорить не приходится.

Сравнительный анализ нашей избирательной системы с системами выборов стран "западной демократии"практически ничего не даёт , поскольку наша система списана,в основном, с французской. Если сравнивать с Америкой, то можно утверждать, что избирательная система в США ещё хуже, чем наша. Достаточно вспомнить итоги выборов в 2000 году, когда большая часть населения проголосовала за А.Гора, а президентом был избран Дж.Буш. В нашей избирательной системе этот парадокс может произойти только при выборах в Думу, когда большинство населения будет представлено меньшинством, но никак не при выборе президента.

Рассмотрим этот парадокс более подробно . Чтобы не описывать всю избирательную систему США, ограничимся модельным примером. Будем считать, что имеется всего три штата и каждый житель поддерживает или демократов (d)или республиканцев (r). Выборы проходят в два тура. В первом туре каждый штат выбирает одного выборщика из двух альтернатив, демократа или республиканца. Во втором туре выборщики называют президента. Ясно, что второй тур является чистой формальностью, так как исход выборов предрешён составом выборщиков, т. е. результатами первого тура. Рассмотрим групповые профили, сложившиеся в этих штатах

$$\begin{array}{cc} 40 & 60 \\ \hline d & r \\ r & d \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{cc} 45 & 55 \\ \hline d & r \\ r & d \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{cc} 80 & 20 \\ \hline d & r \\ r & d \end{array}$$

Отметим, что большая часть населения поддерживает демократов, так как

$$n(d,r) = \frac{40+45+80}{3} = 55 > n(r,d) = \frac{60+55+20}{3} = 45.$$

Однако президентом будет избран республиканец в силу того, что республиканцы сумеют победить в большинстве(два из трёх) штатов.

Разделение на демократов и республиканцев весьма условно, да и жители могут перемещаться из одного штата в другой достаточно свободно. Поэтому рассмотренный парадокс реализуется в США достаточно редко (4 или 5 раз за всю историю). В странах же Балтии, где размежевание более устойчиво и идёт по линии "русскоязычный"или нет , данный парадокс при выборах в сейм (парламент) реализуется постоянно как результат "грамотной"нарезки избирательных округов.

Глава 4

Элементы математического программирования.

4.1 Критерии качества и целевые функции

Коль скоро оказалось, что проблема социального выбора не имеет решения, рассмотрим более простую задачу, а именно, выбор из заданного множества элементов "наилучшего". Естественно для решения этой задачи необходимо уметь сравнивать элементы между собой. Отметим, что многие парадоксы проблемы группового выбора были связаны с использованием относительных оценок $n(x, y)$ для сравнения альтернатив. Введение же для всех альтернатив единой шкалы измерения позволило бы получать абсолютные (независимые от других альтернатив) оценки и тем самым решить проблему ранжирования.

Определение. Отображение $f : M \to R^+ = [0, \infty)$, которое сопоставляет каждой альтернативе $x \in M$ некоторое неотрицательное число $f(x) \geqslant 0$, будем называть критерием качества.

Наличие критерия качества позволяет естественным образом на множестве M задать отношение порядка

$$x \succ y \Longleftrightarrow f(x) > f(y) \quad \text{или} \quad x \succcurlyeq y \Longleftrightarrow f(x) \geqslant f(y)$$

Так как из двух произвольных чисел одно всегда будет не меньше другого, то нестрогий порядок будет обладать свойством полноты и следовательно на множестве M будет задан линейный предпорядок. Это, в свою очередь, гарантирует существование максимального элемента (возможно и не единственного), который (один из которых) мы и объявим "наилучшим". Таким образом решение задачи выбора "наилучшего"элемента сводится к задаче построения соответствующего критерия качества.

Естественно сначала возникает вопрос о существовании такого критерия Однако, в данном случае, нас интересует обратная задача — построить критерий качества, который задавал бы на множестве M конкретный линейный порядок. В общем случае ответ отрицательный. Так, например, не существует критерия качества, который позволил бы определить лексиграфический порядок на произвольном неограниченном множестве. Однако, если множество не более чем счётно, то всегда существует критерий качества, задающий необходимый линейный порядок. Более того, если сумеем построить требуемый критерий качества, то тем самым определим целое семейство критериев, каждый из которых будет задавать тот же самый линейный порядок. Для этого достаточно применить к критерию качества любую положительную и монотонно возрастающую функцию $g(x) > 0$

$$x \succ y \Longleftrightarrow f(x) > f(y) \Longleftrightarrow g(f(x)) > g(f(y)).$$

Это в какой-то степени упрощает решение поставленной задачи. Суть же самой проблемы построения критерия качества состоит в том, что любой элемент множества характеризуется не одним параметром (признаком), а целым набором параметров $x \div (x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$. Можно дать интерпретацию этой задачи, которая сведёт её к проблеме группового выбора. Предположим, что имеется n экспертов, каждый из которых оценивает только один какой-нибудь параметр и их предпочтения описываются $f_i(x) = x_i$ — частными критериями. Отличие от проблемы социального выбора будут состоять в том, что теперь совсем не обязательно требовать выполнения аксиом анонимности, отсутствия "диктатора"и т. п. Таким образом окончательное решение задачи сводится к сворачиванию частных критериев в один.

Рассмотрим наиболее часто встречающиеся методы сворачивния частных критериев.

Линейная свёртка(Валовый показатель — ВАЛ)

Определим линейную свёртку следующим образом

$$L(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i, , \quad \text{где} \quad \lambda_i \geqslant 0\,.$$

Коэффициенты $\{\lambda_i\}$ служат для приведения всех единиц измерения частных критериев к одной шкале. Иногда требуют, чтобы $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$. Но это требование не обязательное, так как при желании этого всегда можно добиться эквивалентным преобразованием $\lambda_i^{'} = \lambda_i / c$, где $c = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k$.

Помимо простоты, основным достоинством линейной свёртки служит её свойство сохранять естественное отношение порядка для любой системы весовых коэффициентов $\{\lambda_i\}$. Действительно, если $x \underset{E}{\succcurlyeq} y$, то $\forall i : x_i \geqslant y_i$. Теперь, домножив левые и правые части этих неравенств на $\lambda_i > 0$ и просуммировав получившиеся неравенства

$$\begin{array}{cc} & \lambda_1 x_1 \geqslant \lambda_1 y_1 \\ & \lambda_1 x_2 \geqslant \lambda_1 y_2 \\ + & \ldots \\ & \lambda_1 x_n \geqslant \lambda_1 y_n \\ \cline{2-2} & L(x) = \sum \lambda_i x_i \geqslant L(y) = \sum \lambda_i y_i \end{array}$$

убеждаемся, что $x \underset{L}{\succcurlyeq} y$ для любого набора $\{\lambda_i\}$.

Однако линейная свёртка обладает и недостатками. Основной из них — это возможность компенсировать неудовлетворительные значения одних параметров за счет хороших значений других. Для иллюстрации снова обратимся к примеру с оценкой успеваемости

$$M = \left\{\begin{matrix} x & \div & (4, & 4, & 4) \\ y & \div & (5, & 4, & 3) \\ z & \div & (3, & 3, & 3) \\ v & \div & (5, & 5, & 2) \end{matrix}\right\} \qquad \begin{matrix} L(x) = 4+4+4 = 12 \\ L(y) = 5+4+3 = 12 \\ L(z) = 3+3+3 = 9 \\ L(v) = 5+5+2 = 12 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} C(x) = 4 \\ C(y) = 3 \\ C(z) = 3 \\ C(v) = 2 \end{matrix}$$

где L определим как сумму набранных баллов. Тогда получим следующий предпорядок $z \prec \{x, y, v\}$, в котором элемент v, несмотря на явно неудовлетворительную оценку, оказывается даже среди максимальных элементов, т. е. среди наилучших.

Критерий Чебышева В данном случае предлагается оценивать качество объекта (элемента) по худшему значению частных критериев

$$C(x) = \min_i\{\lambda_i f_i(x)\} = \min_i\{\lambda_i x_i\}.$$

Это критерий уже не будет обладать недостатком линейной свёртки.Так для рассматриваемого примера, если оценивать успеваемость наименьшей из полученных оценок, то получим следующий предпорядок $v \prec \{y, z\} \prec x$.

Но и у критерия Чебышева имеется существенный недостаток — он не сохраняет естественный порядок. Так в рассмотренном примере абитуриент y сдал экзамены значительно лучше чем z и $y \underset{E}{\succ} z$. Однако согласно критерию Чебышева они сдали экзамены одинаково, так как $C(y) = C(z)$.

Мультипликативный критерий качества

$$P(x) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}, \text{ где } \quad \alpha_i > 0 \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1.$$

Отметим, что данный критерий качества обладает всеми достоинствами и недостатками линейной свёртки, так как при логарифмировании получается эквивалентный критерий

$$\ln P(x) = \ln(x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \ln x_i,$$

отличающийся от линейной свёртки только тем, что характеристики объекта измеряются в логарифмической шкале.

Использование перечисленных критериев не всегда решает все проблемы, так как часто бывает неясно каким образом определять систему весовых коэффициентов $\{\lambda_i\}$. В некоторых случаях для каждого частного критерия можно найти его максимальное значение

$$\max_{x \in M} f_i(x) = f_i^* \text{ и положить } \ \lambda_i = \frac{1}{f_i^*}.$$

Иногда пытаются определить значения $\{\lambda_i\}$ на основе экспертных оценок. В некоторых случаях упорядочивают частные критерии по важности (значимости), после чего в качестве свёртки берут лексиграфический порядок.

Заметим, что задание отношения порядка при помощи критерия качества позволяет свести задачу нахождения максимальных и минимальных элементов множества к задаче отыскания максимума и минимума критерия качества

$$\max_{x\in M} f(x) = f(x^+) \qquad \min_{x\in M} f(x) = f(x^-).$$

В тех случаях, когда критерий качества используется для решения некоторой задачи оптимизации, его принято называть *целевой функцией*.

4.2 Производственные функции

При анализе поведения индивидов, часто возникает необходимость моделировать результат их деятельности. Для этого используются производственные функции, которые позволяют описывать те или иные используемые технологии. В общем случае любой процесс производства может быть представлен в виде двухсоставного вектора

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_m),$$

где $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — факторы производства;
$(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ — произведённая продукция.

Ясно, что не любой вектор способен описывать реальные технологии. Так, в частности, невозможно из ничего производить нечто. Поэтому обычно требуют отсутствия "рога изобилия", т. е. считается, что технологии вида

$$(0, 0, \ldots, 0; y_1, y_2, \ldots, y_m)$$

существовать не могут.

Ограничимся случаем, когда каждая из рассматриваемых технологий может производить только один вид продукции. В экономике их принято называть "чистыми отраслями". Тогда вместо записи $(x_1, x_2, \ldots, x_n; y)$ удобнее использовать более привычную $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Пусть имеются два вектора, отличающиеся только одной компонентой

$$\begin{array}{rl} & x = (x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) \\ \text{и} & x^{'} = (x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i^{'}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \end{array}.$$

Для того, чтобы в дальнейшем не писать подобных громоздких выражений, будем использовать следующую символическую запись $x^{'} = x \parallel x_i^{'}$, которая означает, что в векторе x i-ая компонента заменена на $x_i^{'}$.

Отметим следующие свойства, которым должны удовлетворять производственные функции.

1. Аргументами производственной функции являются существенные факторы производства. Отсутствие хотя бы одного из них делает производство невозможным, т. е.

$$\forall i : f(x \parallel 0_i) = 0.$$

2. **Монотонность.** Рост одного из факторов производства приводит к увеличению объёма производства, т. е. производственная функция возрастает по каждому из аргументов. Если $x_i^{'} > x_i$, то $f(x \parallel x_i^{'}) > f(x)$ или, если $f(x)$ дифференцируема по каждому аргументу,

$$\forall i : \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} > 0,$$

где $\partial f/\partial x_i$ — частная производная, которую в экономике принято называть *предельной полезностью* i-го фактора производства.

3. **Закон падающей эффективности.** Невыгодно увеличивать объём производства за счёт увеличения только одного фактора производства, так как с ростом затрат скорость роста объёма производства будет замедляться, т. е. предельная полезность каждого фактора производства является убывающей функцией

$$\forall i : \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i^2} < 0.$$

4. **Однородность.**Равномерное увеличение всех факторов производства ведёт к пропорциональному увеличению объёма производства, т. е.

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^k f(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

где $k > 0$ — степень однородности. Если коэффициент λ характеризует изменение масштаба производства, то степень однородности k характеризует эффективность производства в зависимости от его масштаба. При этом могут наблюдаться три различных случая

$$\begin{cases} k < 1, & \text{убывающая эффективность;} \\ k = 1, & \text{постоянная эффективность;} \\ k > 1, & \text{возрастающая эффективность.} \end{cases}$$

Определение. Функцию вида $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, удовлетворяющую перечисленным четырём свойствам будем называть производственной функцией.

Заметим, что рассмотренные свойства не являются абсолютными и при некоторых условиях, скажем при не рациональном использовании ресурсов, могут нарушаться. Так чрезмерное количество вносимых удобрений может вместо повышения урожайности привести к гибели рассады. Чтобы избежать подобных парадоксов, считают что производственная функция определена не для всех возможных значений аргументов, а только на некоторой области, где все указанные свойства будут уже выполняться. Эту область принято называть *экономической.*

Согласно определению К.Маркса производство есть труд помноженный на капитал. Если формализовать это определение, то получим производственную функцию Кобба-Дугласа

$$y = AT^{\alpha}K^{\beta} \ , \text{ где } \ \alpha, \beta > 0 \ \text{ и } \ \alpha + \beta = 1.$$

Функция Кобба-Дугласа допускает естественное обобщение на случай произвольного числа производственных факторов

$$y = Ax_1^{\alpha_1} x^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n} \ , \text{ где } \ \alpha_i > 0 \ \text{ и } \ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1.$$

Так как функция Кобба-Дугласа и её обобщение представляет собой мультипликативный критерий качества и, следовательно, обладает свойствами линейной свёртки, то она может использоваться только для макроэкономических процессов. Для анализа экономических процессов на микроуровне используется критерий Чебышева

$$y = \min_i \{\lambda_i x_i\},$$

который в экономике принято называть "узким местом".

4.3 Функции полезности

Удовлетворять потребности и реализовывать свои интересы каждый индивид может через имеющиеся у него ресурсы $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, обладающие соответствующей потребительной стоимостью. Поскольку потребности и интересы у каждого индивида разные, то и отношение к одному и тому же набору ресурсов (товаров) будет различным. Обозначим через $u(x)$ субъективную оценку отдельного индивида потребительной стоимости вектора $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Так как удовлетворение потребностей и интересов можно рассматривать как некоторый производственный процесс, в результате которого происходит потребление ресурсов , то функция полезности должна обладать всеми свойствами производственной функции. Так, если имеется потребность передвигаться, но нет бензина или моторного масла, то полезность автомобиля окажется нулевой. Ни один покупатель не станет, по-видимому, возражать, если ему какого-либо товара дадут больше чем оплачено. Если человек начнёт удовлетворять свой голод пирожками, то по мере насыщения, полезность каждого последующего пирожка для него будет уменьшаться. Именно на этом факте основана оптовая торговля. Покупатель приобретёт тем большую партию товара, чем меньше средняя стоимость единицы товара. Отметим также, что оптовая торговля выгодна и продавцу, поскольку позволяет увеличить оборот капитала, а не прибыль , как часто пишут некоторые экономисты.

Определение. Субъективную оценку $y = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, удовлетворяющую четырём свойствам производственной функции будем называть функцией полезности.

В отличие от производственной функции, оказывается достаточно трудно привести пример функции полезности, так как исследователю обычно не известны те потребности , исходя из которых индивид оценивает тот или иной набор товаров. Да и сам индивид не в состоянии свои предпочтения формализовать в виде некоторой функции.

Однако психологами разработаны тесты, позволяющие выявлять равноценные для индивида наборы товаров $\{x_k = (x_{k,1}, x_{k,2}, \ldots, x_{k,n})\}$, для которых

$$u(x_1) = u(x_2) = \ldots = u(x_r) = C,$$

где $C > 0$ — некоторая константа. Множество всех векторов удовлетворяющих условию $u(x) = C$ назовём *кривой безразличия.*

Рис. 4.1. Кривые безразличия .

Пусть всего имеется два вида товаров, тогда график кривой безразличия $u(x, y) = C$ примет следующий вид (см. Рис.). Опираясь на свойства функции полезности, можно показать, что этот график будет обладать следующими свойствами

1. Целиком лежит в положительном квадранте и не пересекает осей координат, так как $x > 0, y > o$ и $u(x, y) > 0$.

2. Кривая безразличия выпукла вниз.

3. Если $C' > C$, то график кривой безразличия $u(x, y) = C'$ будет лежать выше кривой $u(x, y) = C$.

4. Графики кривых безразличия $u(x, y) = C$ и $u(x, y) = C'$ не пересекаются.

5. Через любую точку положительного квадранта можно провести некоторую кривую безразличия и при этом только одну.

Графики кривых безразличия позволяют анализировать экономическое поведение и предпочтения потребителей, служат основным инструментом изучения потребительского спроса. Однако как функции полезности, так и кривые безразличия не несут всей необходимой информации для определения экономического поведения . Необходимо ещё учитывать существующий уровень цен на товары а также уровень доходов потребителя. Обозначим через $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ вектор цен и через S его доход. Тогда наборы товаров, которые сможет приобрести потребитель будут задаваться следующим неравенством

$$p_1x_1 + p_1x_1 + \dots + p_1x_1 \leqslant S,$$

которое принято называть *бюджетным ограничением.*

Функция полезности $u(x)$ позволяет сравнивать различные наборы товаров, тем самым задавая на рассматриваемом множестве отношение линейного порядка или предпорядка. Естественно предположить, что потребитель будет стремиться обеспечить максимум полезности и предпочтёт выбрать из всех элементов *оптимальный*, т. е. тот, который доставит максимум его функции полезности.

$$\max_{x \in \{x | px \leqslant S\}} u(x) = u(x^*).$$

4.4 Общий вид задачи оптимизации

Рассмотренная задача максимизации функции полезности допускает естественное обобщение. Выбор элемента из множества — это всегда принятие управленческого решения, направленное на достижение некоторой поставленной цели. Качество принимаемого решения (элемента) оценивается значением целевой функции, которая тем самым задаёт линейный предпорядок на множестве возможных решений. В зависимости от поставленной цели, наилучшим решением будет максимальный или минимальный элемент множества *допустимых решений.* Поэтому решение задачи сводится к отысканию максимума или минимума целевой функции. Чтобы не оговаривать каждый раз какая конкретно решается задача, в общем случае говорят об оптимизации целевой функции $opt_x C(x)$.Так как при выборе решения цель может быть только одна, то было бы большой ошибкой пытаться гнаться за двумя зайцами и добиваться, скажем, "максимума эффективности при минимуме затрат". Минимум затрат, как известно, всегда нуль и, в силу отсутствия "рога изобилия", получить что-либо из нуля невозможно. Некоторые авторы считают, что существует только два вида корректно поставленных задач оптимизации: "максимум эффективности при фиксированных затратах"и "минимум затрат при заданной эффективности".

И в том и в другом случае возникает необходимость указать существующие связи между "эффективностью"и "затратами". Это можно сделать используя ограничения вида

$$\begin{cases} f_1(x_1,x_2,\ldots,x_n)=0 \\ \ldots \\ f_k(x_1,x_2,\ldots,x_n)=0 \\ \ldots \\ f_r(x_1,x_2,\ldots,x_n)=0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} g_1(x_1,x_2,\ldots,x_n)\geqslant 0 \\ \ldots \\ g_j(x_1,x_2,\ldots,x_n)\geqslant 0 \\ \ldots \\ g_s(x_1,x_2,\ldots,x_n)\geqslant 0 \end{cases},$$

первые из которых называются *уравнениями связи*, вторые — *граничными условиями.* Так как используемые переменные $\{x_i\}$ обычно интерпретируются как социальные или экономические характеристики (показатели) и измеряются в неотрицательных шкалах, то к имеющимся ограничениям добавляется стандартное требование: $\forall i : x_i \geqslant 0$.

Если ввести вектор-функции

$$F(x)=(f_1(x),f_2(x),\ldots,f_r(x)) \text{ и } G(x)=(g_1(x),g_2(x),\ldots,g_s(x)),$$

то формулировку общей задачи оптимизации можно записать в следующей символической форме

$$\begin{array}{c} opt_x C(x) \\ F(x)=0 \\ G(x)\geqslant 0 \\ x\geqslant 0 \end{array}.$$

Множество решений системы равенств и неравенств (ссылка)

$$\begin{array}{c} F(x)=0 \\ G(x)\geqslant 0 \\ x\geqslant 0 \end{array}$$

называют *множеством допустимых решений.* Если это множество оказывается пустым, то говорят, что задача оптимизации не имеет решения.

Определение. Допустимое решение, доставляющее максимум или минимум целевой функции, будем называть оптимальным решением и обозначать x^*.

Если задача оптимизации поставлена корректно, то как правило, всегда существует оптимальное решение, хотя возможно и не единственное, так как целевая функция, в общем случае, задаёт линейный предпорядок. Если множество допустимых решений неограниченно, то в некоторых случаях значение целевой функции может оказаться бесконечно большой величиной. В этом случае говорят, что решение задачи оптимизации не имеет решения.

Ослабление ограничений обычно приводит к расширению множества допустимых решений и следовательно к "улучшению"оптимального решения. Отсюда, как правило, оптимальное решение будет лежать на границе множества допустимых решений и большинство неравенств для оптимального решения превратятся в равенства.

Здесь таится большая опасность связанная с устойчивостью оптимального решения и возможностью его реализации. Дело в том, что множество допустимых решений представляет собой, как правило, *экономическую область*, т. е. множество рациональных действий и тогда оптимальное решение как граничное может таковым уже и не являться. Вряд ли человек, выбирая в горах кратчайший путь, рискнёт идти по самому краю пропасти. Если мы собираемся строить предприятие и при этом желаем минимизировать затраты, то рискуем выбрать в экологическом плане самый "грязный"проект, как самый дешёвый, хотя и удовлетворяющий существующим нормам допустимого загрязнения окружающей среды. Подобные примеры можно множить. Поэтому не всегда оптимальное решение является приемлемым и окончательным, так как до решения задачи бывает достаточно трудно предвидеть недостатки оптимального решения . Таким образом, почти всегда необходим тщательный анализ получаемого решения с тем, чтобы возможно внести дополнительные ограничения и получить уже новую задачу оптимизации. Естественно нет никаких гарантий, что и новая постановка задачи будет окончательной. Поэтому основное достоинство задач оптимизации состоит в том, что их решение позволяет очертить предельные грани возможного, оставляя открытым вопрос об их реализуемости.

В качестве примера рассмотрим задачу (ссылка), когда имеется всего два вида товаров

$$\begin{gathered} \max u(x,y) \\ p_1x + p_2y \leqslant S \\ x, y \geqslant 0 \end{gathered}$$

Заметим, что для оптимального решения (x^*, y^*) должно выполняться равенство $p_1x^* + p_2y^* = S$. В противном случае, если $p_1x^* + p_2y^* < S$, то у потребителя есть возможность увеличить свою функцию полезности, приобретя ещё некоторое количество товаров и, следовательно, решение (x^*, y^*) не является оптимальным. Тогда рассматриваемая задача эквивалентна задаче

$$\max_{(x,y)} u(x,y) \text{ при } p_1x + p_2y = S \text{ и } x, y \geqslant 0$$

Множеством допустимых решений будет являться отрезок прямой $p_1x + p_2y = S$, называемый *бюджетной линией.* Возьмём на нём две точки A и B, полученные в результате пересечения бюджетной линии с некоторой кривой безразличия. Значения целевой функции в этих точках будут одинаковыми, так как они лежат на одной кривой безразличия. Если теперь на бюджетной линии взять любую точку между A и B, то значение целевой функции увеличится, так как кривая безразличия, проходящая через эту точку будет лежать выше. Если новая кривая безразличия будет пересекаться с бюджетной линией, то это означает, что значение целевой функции снова можно увеличить. Отсюда следует, что если (x^*, y^*) — оптимальное решение, то кривая безразличия, проходящая через эту точку, должна в ней касаться бюджетной линии. Из условия касания следует, что нормаль к бюджетной линии должна быть коллинеарна нормали касательной (градиенту) функции полезности в этой точке, т. е.

Рис. 4.2. .

$$(p_1, p_2) = \lambda\left(\frac{\partial u(x^*, y^*)}{\partial x}, \frac{\partial u(x^*, y^*)}{\partial y}\right), \text{ где } \lambda - \text{некоторая константа.}$$

Решая это векторное уравнение относительно λ, получим, что

$$\frac{p_1}{\frac{\partial u(x^*,y^*)}{\partial x}} = \frac{p_2}{\frac{\partial u(x^*,y^*)}{\partial y}} = \lambda,$$

т. е. предельные полезности в оптимальном решении всегда пропорциональны ценам. К сожалению, некоторые экономисты, путая причину и следствие, часто утверждают обратное, а именно, что цены должны быть пропорциональны предельным полезностям.

4.5 Задачи линейного программирования

Задачи оптимизации допускают богатую классификацию в зависимости от вида целевой функции и ограничений, полноты информации, учёта динамики и т. п.

Определение.Задачу оптимизации будем называть задачей линейного программирования, если целевая функция и ограничения линейны, т. е. имеют вид: $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$.

В качестве примера рассмотрим задачу о "рационе". Предположим, что имеется некоторый фермер, который занимается откармливанием бычков (поросят, цыплят или нечто подобным). В "Справочнике животновода"он найдёт научно-обоснованный рацион, указывающий какое количество органических веществ (жиры, белки, углеводы, аминокислоты и т. п.) необходимо для нормального развития бычков. Но на рынке имеются только конкретные продукты (сено, зерно, комбикорма и т. д.), содержащие в разных пропорциях указанные вещества. Задача фермера будет состоять в том, чтобы подобрать набор продуктов (рацион), содержащий в нужном количестве все органические вещества и имеющий минимальную стоимость. Для удобства сведём все необходимые данные в следующую таблицу

$W \backslash T$	T_1	T_2	$\cdots$	T_j	$\ldots$	T_m	B
w_1	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1j}	$\cdots$	a_{1m}	b_1
w_2	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2j}	$\cdots$	a_{2m}	b_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
w_i	a_{i1}	a_{i2}	$\ldots$	a_{ij}	$\cdots$	a_{im}	b_i
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
w_n	a_{n1}	a_{n2}	$\ldots$	a_{nj}	$\ldots$	a_{nm}	b_n
C	c_1	c_2	$\ldots$	c_j	$\ldots$	c_m	

где w_i – некоторое органическое вещество;
b_i – необходимое количество i-го вещества;
T_j – некоторый продукт;
a_{ij} – количество i-го вещества в одной единице j-го продукта;
c_j – цена одной единицы j-го продукта .

Обозначим через $X = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ набор продуктов, приобретаемый фермером. Стоимость этого набора составит $c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_mx_m$. Так как фермер стремится минимизировать затраты на выращивание бычков, но при этом должен обеспечить потребление каждого вещества не менее b_i, т. е. для всех значений i

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{im}x_m \geqslant b_i \ ,$$

то соответствующая задача минимизации примет вид

$$\min_X \sum_{j=1}^{m} c_j x_j$$

$$\begin{gathered}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m \geqslant b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m \geqslant b_2 \\
\ldots \\
a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{im}x_m \geqslant b_i \\
\ldots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m \geqslant b_n \\
x_j \geqslant 0
\end{gathered}$$

Было бы большой ошибкой решать вместо задачи о "рационе"задачу о "диете"с тем, чтобы сэкономить на семейном бюджете или определить стоимость прожиточного минимума. Когда 50 лет тому назад была предпринята подобная попытка, оказалось, что для минимизации затрат надо питаться только одной капустой. Желающие могут попробовать. Поэтому прожиточный минимум определяется стоимостью фиксированного набора продуктов из 19 наименований.

Так как целевая функция и все ограничения оказались линейными, то мы получили задачу линейного программирования, которую обычно записывают, используя матричную запись, в более компактном виде

$$\begin{gathered}
\min CX \\
AX \geqslant B \\
X \geqslant 0
\end{gathered}$$

и называют *стандартной формой* записи задачи линейного программирования. Когда все ограничения принимают вид равенств, то соответствующую матричную запись задачи линейного программирования

$$\begin{gathered}
\min CX \\
AX = B \\
X \geqslant 0
\end{gathered}$$

называют *канонической формой.*

Теорема 12. *Если в задаче линейного программирования множество допустимых решений не пусто и целевая функция ограничена, то существует хотя бы одно оптимальное решение.*

4.6 Геометрическая интерпретация задачи линейного программирования

Определение Множество M ,будем называть выпуклым, если отрезок, соединяющий две произвольные точки этого множества, также будет принадлежать данному множеству или формально

$$\forall\ x, y \in M: \ \lambda x + (1-\lambda)y \in M, \quad \text{где} \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1.$$

Примерами выпуклых множеств могут служить *гиперплоскость*, т. е. множество решений линейного уравнения

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

а также *полупространство* — множество решений неравенства

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \geqslant b\ .$$

Теорема 13 (Лемма)**.** *Пересечение двух выпуклых множеств является выпуклым множеством.*

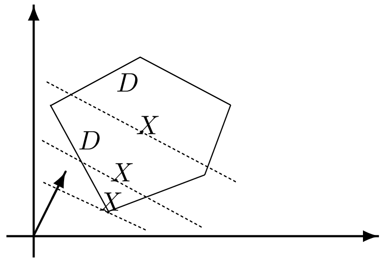
Рассмотрим геометрическую интерпретацию решения задачи линейного программирования, заданной в стандартной форме

$$\begin{gathered}\min CX\\ AX \geqslant B\\ X \geqslant 0\end{gathered}$$

Из утверждения Леммы следует, что множество допустимых решений задачи линейного программирования

$$D = \{X|\ (AX \geqslant B) \wedge (X \geqslant 0)\}$$

представляет собой выпуклый многогранник. Если имеется всего две переменные, то каждое из ограничений будет задавать полуплоскость а множество допустимых решений — выпуклый многоугольник (см. рис).



Возьмём произвольное допустимое решение $X_0 \in D$ и проведём гиперплоскость $CX = CX_0$. Так как последнее уравнение можно записать в виде $C(X - X_0) = 0$, то гиперплоскость(на рис. — прямая) будет проходить через точку X_0 перпендикулярно вектору C. которая разделит множество допустимых решений на два подмножества $D = D^{>} \cup D^{<}$,

где $D^{>} = \{X|\ (CX > CX_0) \cap D\}$ и $D^{<} = \{X|\ (CX < CX_0) \cap D\}$.

При этом подмножество $D^{>}$ будет лежать "ниже" гиперплоскости, а подмножество $D^{>}$ — "выше". Подмножество, лежащее "выше", определяет направление вектора C.

Если множество $D^{<} \neq \emptyset$, то допустимое решение X_0 не является оптимальным, так как значение целевой функции можно уменьшить, выбрав для этого любой элемент множества $D^{<}$. Отметим, что если бы мы рассматривали задачу максимизации, то выбор элемента из множества $D^{>}$ привёл бы к увеличению значения целевой функции. Выберем произвольную точку X_1 из множества $D^{<}$ и проведём новую гиперплоскость $CX = CX_1$.

Повторив предыдущие рассуждения, придцм к выводу, что значение целевой функции можно ещё уменьшить, если выбрать любое допустимое решение, лежащее "ниже"построенной гиперплоскости. Таким образом, для оптимального решения X^* множество допустимых решений, лежащих "ниже"гиперплоскости $CX = CX^*$, должно быть пустым. Эту гиперплоскость легко построить, осуществляя параллельный сдвиг гиперплоскости $CX = CX_0$ в направлении противоположном направлению вектора C до тех пор, пока множество допустимых решений не окажется "выше".

Если гиперплоскость при этом пересечёт только вершину выпуклого многогранника ограничений, то оптимальное решение будет единственным. Если гиперплоскость прой дёт через ребро или грань выпуклого многогранника, тогда любая точка ребра или грани окажется оптимальным решением.

Определение Оптимальное решение, которое является вершиной выпуклого многогранника ограничений будем называть базисным оптимальным решением задачи линейного программирования.

Теорема 14. *Если в задаче линейного программирования существует оптимальное решение, то также будет существовать и оптимальное базисное решение.*

Эта теорема позволяет ограничиться рассмотрением только базисных оптимальных решений. Наличие допустимых решений ещё не гарантирует наличия оптимального. Согласно теореме для этого необходимо ещё ограниченность множества допустимых решений. Если множество D не ограничено, то (см.рис) значение целевой функции может неограниченно возрастать, а оптимального решения существовать не будет. В подобном случае говорят, что задача линейного программирования не имеет решения из-за неограниченности целевой функции.

4.7 Понятие двойственности

С каждой задачей линейного программирования можно связать другую задачу, называемую *двойственной* по отношению к исходной. Сопоставим каждому элементу задачи линейного программирования двойственный по следующим правилам:

$$\min \longleftrightarrow \max,\ C \longleftrightarrow B^T,\ A \longleftrightarrow A^T,\ B \longleftrightarrow C^T,\ \geqslant \longleftrightarrow \leqslant\ ,$$

где верхний индекс T означает транспонирование.

Определение. Пусть дана задача линейного программирования в стандартной форме. Заменим все элементы этой задачи на двойственные и полученную таким образом пару задач будем называть двойственными

$$\begin{array}{ccc} \min CX & & \max B^T Y \\ AX \geqslant B & \longleftrightarrow & A^T Y \leqslant C^T \\ X \geqslant 0 & & Y \geqslant 0 \end{array}$$

В качестве примера рассмотрим задачу "о пилюлях", являющуюся двойственной к задаче "о рационе". Исходная информация задаётся той же таблицей

$W\backslash T$	T_1	T_2	$\cdots$	T_j	$\dots$	T_m	B
w_1	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1j}	$\cdots$	a_{1m}	b_1
w_2	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2j}	$\cdots$	a_{2m}	b_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
w_i	a_{i1}	a_{i2}	$\dots$	a_{ij}	$\cdots$	a_{im}	b_i
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
w_n	a_{n1}	a_{n2}	$\dots$	a_{nj}	$\dots$	a_{nm}	b_n
C	c_1	c_2	$\dots$	c_j	$\dots$	c_m	

Предположим теперь, что на рынке появилась фирма, производящая все необходимые для рациона питательные вещества в виде пилюль. Фирму естественно интересует цены, по которым она сможет реализовывать свой товар. Так как из пилюль можно составить искусственный эквивалент любого продукта, то для того, чтобы соответствующий набор пилюль пользовался спросом, стоимость этого набора не должна превышать стоимости натурального продукта. Пусть $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ — вектор цен на пилюли, тогда стоимость одной единицы искусственного эквивалента j-го продукта будет составлять $a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \cdots + a_{nj}y_n$ и не должна превышать c_j.

По условию задачи "о рационе" нам ничего не известно о других покупателях кроме фермера. Поэтому фирма будет считать, что структура спроса обусловлена вектором B и будет стремиться максимизировать стоимость этого рациона. Таким образом для определения максимально возможных цен на пилюли мы получаем следующую задачу линейного программирования

$$\max_Y \sum_{i=1}^{m} b_j y_i$$

$$\begin{gathered}
a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \cdots + a_{n1}y_n \leqslant c_1 \\
a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{n2}y_n \leqslant c_2 \\
\dots \\
a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \cdots + a_{nj}y_n \leqslant c_j \\
\dots \\
a_{1m}y_1 + a_{2m}y_2 + \cdots + a_{mn}y_n \leqslant c_m \\
y_i \geqslant 0
\end{gathered}$$

Если воспользоваться матричной записью, то задача "о пилюлях" примет следующий вид

$$\begin{gathered}
\max B^T Y \\
A^T Y \leqslant C^T \\
Y \geqslant 0
\end{gathered}$$

т. е. действительно будет являться двойственной к задаче "о рационе".

Решения двойственных задач между сбой тесно связаны. Совместный анализ решений двойственных задач позволяет получать дополнительную информацию.

Теорема 15 (Теорема двойственности)**.**

1. *Для любых допустимых решений X и Y двойственных задач справедливо неравенство $CX \geqslant B^T Y$.*

2. *Если каждая из двойственных задач имеет допустимое решение, то будут существовать и оптимальные решения и при этом будет выполняться равенство $CX^* = B^T Y^*$.*

3. *Если одна из двойственных задач имеет неограниченное решение, то другая задача не будет иметь даже допустимого решения.*

Вернёмся к задачам "о рационе" и "о пилюлях". Согласно Теореме двойственности для оптимальных решений будет выполняться равенство $CX^* = B^T Y^*$, т. е. стоимости набора продуктов, реализующего рацион B, и его искусственного эквивалента будут совпадать. Но, во-первых, не все нестрогие неравенства ограничений для оптимального решения превратятся в равенства и следовательно приобретаемый набор продуктов будет содержать питательных веществ больше чем рацион B. А, во-вторых, вряд ли найдётся разумный человек, который предпочтёт приобрести за ту же цену искусственный эквивалент а не натуральный продукт. Тогда оптимальное решение задачи "о пилюлях" оказывается не реализуемым, так как не найдётся покупателя, готового приобретать пилюли по таким ценам. Чтобы успешно торговать, фирме , по-видимому, придётся цены на пилюли немного снизить. Таким образом решением задачи "о пилюлях" оказались не цены (или, как их иногда ещё называют, "теневые цены"), а только верхние оценки для реальных цен на пилюли. Возможно именно поэтому Л.Канторович предложил решение двойственной задачи называть *объективно обусловленными оценками.*

4.8 Транспортная задача

Среди задач линейного программирования важный класс представляет задача о рациональной перевозке некоторого "однородного"продукта от производителей к потребителям. Под "однородностью"продукта в данном случае понимается общее наименование и одинаковое качество (уголь, зерно, щебень и т. п.), т. е. потребителю безразлично откуда будет поступать данный продукт. Пусть имеются n пунктов производства с объёмом производства $a_i\,, i = 1, 2, \ldots, n$ за определённый промежуток времени (сутки, месяц,квартал). Имеются также m пунктов потребления с объёмами потребления за тот же период равными $b_j\,, j = 1, 2, \ldots, m$, соответственно. Будем предполагать, что спрос и предложение сбалансированы, т.е

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j.$$

Иногда это равенство называют условием *замкнутости* транспортной задачи. Будем считать, что известны тарифы перевозок c_{ij} — затраты по перевозке одной единицы продукта из i-го пункта производства в j-ый пункт потребления. Эти затраты могут быть выражены как в стоимостных (рубли,доллары, у.е.), так и в натуральных (километры) единицах. Требуется найти такой план перевозок, который позволил бы удовлетворить спрос и при этом суммарные затраты на перевозку были бы минимальными. Обозначим через x_{ij} количество продукта, перевозимое из i-го пункта производства в j-ый пункт потребления. Тогда соответствующая транспортная задача может быть сформулирована следующим образом.

$$\text{Найти} \qquad \min_X \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{при ограничениях:} \quad \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j\,, \qquad j = 1, 2, \ldots, m$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i\,, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$x_{ij} \geqslant 0\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n\,, \quad j = 1, 2, \ldots, m\,,$$

где $X = \{x_{ij}\}$ — матрица (план) перевозок размера $(n \times m)$.

Содержательный смысл ограничений состоит в том, что в каждый пункт потребления необходимо завезти требуемое количество продукта, из каждого пункта производства необходимо вывезти всю произведённую продукцию и перевозимые объёмы продукта не могут быть отрицательными. Заметим также, что условие сбалансированности (замкнутости) не вошло в явном виде в формулировку задачи, так как оно неявно содержится в ограничениях

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_{ij} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{m} b_j\,.$$

Если условие сбалансированности выполнено, то транспортную задачу называют *замкнутой* и для неё всегда существуют как допустимое, так и оптимальное решения. Если спрос и предложение не сбалансированы , то соответствующую транспортную задачу называют *открытой* и она может быть сведена к замкнутой задаче путём введения фиктивного пункта производства или потребления.

Пусть спрос превышает предложение, т. е. $\sum b_j > \sum a_i$. Введём фиктивный пункт производства с объёмом производства равным

$$a_{n+1} = \sum_{j=1}^{m} b_j - \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Затраты на перевозки из фиктивного пункта производства, так как они не осуществляются, положим нулевыми, т. е. $c_{(n+1)j} = 0$ для $j = 1, 2, \ldots, m$. Тогда транспортная задача станет уже сбалансированной и примет вид

$$\text{Найти} \qquad \min_X \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{при ограничениях:} \quad \sum_{i=1}^{n+1} x_{ij} = b_j\,, \qquad j = 1, 2, \ldots, m$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i\,, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, n+1$$

$$x_{ij} \geqslant 0\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n, n+1\,, \qquad j = 1, 2, \ldots, m\,,$$

где $X = \{x_{ij}\}$ — матрица (план) перевозок размера $(n+1) \times m$.

Пусть $X^* = \{x^*_{ij}\}$ — оптимальный план перевозок, тогда перевозки из фиктивного пункта производства объёмом $x^*_{(n+1)j}$ естественно не производятся и часть спроса останется неудовлетворённой. Но так как

$$\sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x^*_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x^*_{ij},$$

то вся произведённая продукция будет вывезена с минимальными транспортными издержками. Следует отметить, что при таком подходе не учитывается важность и приоритетность тех или иных заявок и поэтому говорить о какой-либо "справедливости"при их удовлетворении не приходится.

Если наблюдается перепроизводство, т. е. $\sum b_j > \sum a_i$, то вводим фиктивного потребителя с объёмом потребления равным $b_{m+1} = \sum a_i - \sum b_j$ и нулевыми тарифами $c_{i(m+1)} = 0$ для $i = 1, 2, \ldots, n$. Транспортная задача станет замкнутой и примет следующий вид

$$\text{Найти} \qquad \min_X \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m+1} c_{ij}x_{ij}$$

$$\text{при ограничениях:} \quad \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j\,, \qquad j = 1, 2, \ldots, m, m+1$$

$$\sum_{j=1}^{m+1} x_{ij} = a_i\,, \qquad n = 1, 2, \ldots, n$$

$$x_{ij} \geqslant 0\,, \quad n = 1, 2, \ldots, n\,, \qquad j = 1, 2, \ldots, m\,,$$

где $X = \{x_{ij}\}$ — матрица (план) перевозок размера $n \times (m+1)$. Решение данной задачи позволит минимизировать транспортные издержки, связанные с необходимостью удовлетворить существующий спрос. Перевозки оптимального плана X^* объёмом $x^*_{i(m+1)}$ естественно не осуществляются и указанные объёмы продукции остаются в пунктах производства.

4.9 Задача о назначениях

Определёный интерес представляет частный случай транспортной задачи, а именно, так называемая задача о назначениях. Рассмотрим одну из возможных постановок этой задачи . Пусть имеются n рабочих , которых следует распределить по n рабочим местам для выполнения тех или иных работ. При этом каждого рабочего можно назначить на выполнение только одной работы. Пусть c_{ij} — эффективность выполнения i-ым рабочим j-ой работы. Требуется назначить рабочих по рабочим местам таким образом, чтобы выполнить все работы с максимальной эффективностью. Введём следующие обозначения

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-ый рабочий назначен на } j\text{-ую работу;} \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда задача о назначениях примет следующий вид

$$\text{Найти} \qquad \max_X \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$\text{при ограничениях:} \quad \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1\,, \qquad j = 1,2,\ldots,n$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1\,, \qquad i = 1,2,\ldots,n$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}, \quad i = 1,2,\ldots,n\,, \quad j = 1,2,\ldots,n\,,$$

где $X = \{x_{ij}\}$ — матрица назначений размера $(n \times n)$.

Содержательный смысл ограничений состоит в том, что каждая работа должна выполняться только одним рабочим и каждый рабочий должен быть назначен на выполнение только одной работы, т. е. матрица назначений должна в каждой строке и в каждом столбце иметь только одну единицу.

Хотя задача о назначениях всегда имеет допустимое и оптимальное решения, условие $x_{ij} = \{{}^1_0$, вообще говоря, делает задачу целочисленной и тем самым усложняет отыскание оптимального решения. Однако, было доказано, что условие $x_{ij} = \{{}^1_0$, можно заменить на более простое $0 \leqslant x_{ij} \leqslant 1$ и решать получающуюся задачу как транспортную, поскольку это автоматически позволит получить целочисленное решение.

На практике иногда возникают трудности с определением коэффициентов матрицы эффективности $C = \{c_{ij}\}$. В этом случае в качестве матрицы эффективности рассматривают матрицу квалификации, элементы которой определяют следующим образом

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-ый рабочий способен выполнять } j\text{-ую работу ;} \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если все элементы матрицы квалификации равны единице, то любое допустимое решение будет являться и оптимальным. При этом, значение целевой функции будет равно

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{i=1}^{n} 1 = n\,.$$

Следовательно, в общем случае, должно выполняться неравенство

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x^*_{ij} \leqslant n\,,$$

где $X^* = \{x^*_{ij}\}$ — оптимальное решение задачи назначения.

Определение Будем говорить, что задача о назначениях с матрицей квалификации C разрешима, если для оптимального решения X^* выполняется равенство

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x^*_{ij} = n\,.$$

Содержательно разрешимость означает, что каждого рабочего можно назначить на выполнение работы, соответствующей его квалификации. Обозначим через N множество всех рабочих и через R — множество всех работ, при этом $|N| = |R| = n$. Пусть $S \subset N$ — некоторое подмножество рабочих. Обозначим через

$$R_S = \{j | (j \in R) \wedge (i \in S) \wedge (c_{ij} = 1)\}$$

множество работ, которое может выполнять подмножество S рабочих согласно матрице квалификации.

Теорема 16. *Для того, чтобы задача о назначении была разрешима необходимо и достаточно, чтобы для любого подмножества рабочих $S \subset N$ выполнялось следующее неравенство $|S| \leqslant |R_S|$.*

Рассмотрим конкретный пример, где $N = \{i_1, i_2, i_3, i_4\}$, $R = \{j_1, j_2, j_3, j_4\}$ и матрица квалификации имеет следующий вид

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Выберем подмножество рабочих $S = \{i_1, i_2, i_4\}$, для которого $R_S = \{j_1, j_4\}$. Так как $|S| = 3 > 2 = |R_S|$, то условие теоремы не выполнено и следовательно рассматриваемая задача неразрешима. Действительно, по крайней мере, одного из рабочих $(|S| - |R_S| = 3 - 2 = 1)$ нельзя назначить на выполнение работы, соответствующей его квалификации. Нетрудно проверить, что следующие матрицы назначений

$$X_1^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X_2^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X_3^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

являются оптимальными решениями задачи о назначении и для них значение целевой функции будет равно $\sum\sum c_{ij}x_{ij}^* = 3 < 4$.

Показательно, что, в отличие от решения транспортной задачи, попытка применения на производстве оптимального решения задачи о назначении привела к неожиданным социальным последствиям. Так бригады, где регулярно применялась подобная практика, месяца через три обычно разваливались — рабочие начинали оттуда бежать. Дело в том, что перечень работ изо дня в день практически оставался неизменным, следовательно и оптимальное решение также не менялось. Таким образом происходило закрепление определённых видов работ за конкретными рабочими, что приводило к существенной дифференциации в заработках и затрудняло желающим повысить свою квалификацию. Поэтому более "опытные"бригадиры, отслеживая потребности членов бригады, самостоятельно подбирали некоторым рабочим соответствующие работы, а для остальных рабочих и оставшихся работ решалась уже задача о назначении. Получавшееся решение естественно не было оптимальным, но зато в бригаде царил мир и порядок. Оптимальное же решение использовалось исключительно во время авралов и коммунистических субботников, т. е. в тех случаях, когда требовалось показать наивысшую производительность труда.

Можно указать достаточно много практических задач, решение которых может быть сведено к решению задачи о назначениях (распределние самолётов по авиалиниям, распределение министерских портфелей и т. п.). Многими математиками, начиная с Халмоша, предлагалось использовать задачу о назначениях для составления супружеских пар (Marriage Problem), трактуя c_{ij} как "меру счастья" будущего союза. Правда, постановка задачи выглядела достаточно искусственной, так как каждый раз приходилось фантазировать, чтобы оправдать необходимость массовых бракосочетаний. Однако, реальная жизнь оказалась богаче подобных фантазий и основатель "Церкви унификации" кореец Сон Мьюонг Мун (он же Мун Сон Мен ли просто Мун) уже около пятидесяти лет каждый год решает подобную задачу для тысяч своих последователей.

4.10 Модели леонтьевского типа

Важным случаем линейных ограничений часто выступают балансовые модели, некоторый аналог закона сохранения материи. Рассмотрим производственную деятельность некоторого предприятия за фиксированный период времени, скажем за год. При этом будем предполагать, что каждая из имеющихся технологий способна производить только один вид продукции. В экономике подобные технологии принято называть "чистыми отраслями". Пусть предприятие обладает n чистыми отраслями , каждая из которых произвела за рассматриваемый период v_i единиц i-ой продукции $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Обозначим через $\hat{a}_{ij}$ — объём продукции i-ой чистой отрасли , потреблённый j-ой чистой отраслью за указанный период и через $\hat{y}_i$ — объём продукции i-ой чистой отрасли , который попал в сферу потребления. Значок "$\hat{}$ "(крышечка) указывает, что соответствующие данные могут быть получены из статистических отчётов предприятия. Эти все данные удобно свести в единую таблицу.

$V\backslash n$	1	2	$\ldots$	j	$\ldots$	n	Y
v_1	$\hat{a}_{11}$	$\hat{a}_{12}$	$\ldots$	$\hat{a}_{1j}$	$\ldots$	$\hat{a}_{1n}$	y_1
v_2	$\hat{a}_{21}$	$\hat{a}_{22}$	$\ldots$	$\hat{a}_{2j}$	$\ldots$	$\hat{a}_{2n}$	y_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
v_i	$\hat{a}_{i1}$	$\hat{a}_{i2}$	$\ldots$	$\hat{a}_{ij}$	$\ldots$	$\hat{a}_{in}$	y_i
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
v_n	$\hat{a}_{n1}$	$\hat{a}_{n2}$	$\ldots$	$\hat{a}_{nj}$	$\ldots$	$\hat{a}_{nn}$	y_n

Если статистические данные верны, то для каждой строки данной таблицы должно выполняться равенство

$$v_i = \sum_{j=1}^{n} \hat{a}_{ij} + y_i\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n\,.$$

Сами по себе коэффициенты $\hat{a}_{ij}$ мало информативны, так как существенно зависят от объёма продукции, производимой j-ой чистой отраслью. Нормируем эти данные и определим *коэффициенты прямых затрат*

$$a_{ij} = \frac{\hat{a}_{ij}}{v_j}\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n\,, \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

как количество единиц продукции i-ой чистой отрасли, необходимой для производства одной единицы продукции j-ой чистой отрасли.

Это определение даёт возможность переписать систему балансов в следующем виде

$$v_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j + y_i\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n\,.$$

Оказывается, что коэффициенты прямых затрат полностью характеризуют используемые технологии и могут меняться только в связи с внедрением новых технологий. Поэтому, если на следующий год планируется для каждой чистой отрасли произвести x_i единиц продукции и поставить в сферу потребления y_i единиц, то для этих плановых цифр также должны выполняться балансовые соотношения

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + y_i\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n\,.$$

Эта система линейных уравнений связывает валовый объём производства с объёмами конечной продукции и получила название *модель межотраслевого баланса* (модель Леонтьева). В зависимости от решаемой задачи, величины x_i и y_i могут быть представлены как в натуральных так и в стоимостных единицах измерения. В соответствии с этим различают *натуральный* или *стоимостной* межотраслевые балансы. Систему уравнений () можно записать в матричном виде

$$X = AX + Y\,,$$

где $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)'$ — валовый объём производсва;
$Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)'$ — объём конечного спроса;
$A = \{a_{ij}\}$ — матрица коэффициентов прямых затрат размера $n \times n$.

Уравнение межотраслевого баланса позволяет определить валовый объём производства, необходимый для удовлетворения конечного спроса Y. Для этого достаточно формально решить данное уравнение относительно X

$$X = (I - A)^{-1} Y = BY\,,$$

где I — единичная матрица размером $n \times n$;
$B = (I - A)^{-1}$ — *матрица полных затрат*, элементы которой b_{ij} показывают сколько надо произвести единиц продукции i-ой чистой отрасли для получения одной единицы j-го конечного продукта.

Определение Матрица $A \geqslant 0$ называется продуктивной, если для любого вектора конечного спроса $Y \geqslant 0$ существует неотрицательное решение $X \geqslant 0$ уравнения $X = AX + Y$, т. е. существующие технологии позволяют реализовать любой план при наличии соответствующих ресурсов.

Теорема 17. *Для того, чтобы матрица $A \geqslant 0$ была продуктивной, необходимо т достаточно, чтобы существовала неотрицательная матрица $B = (I - A)^{-1}$.*

Уравнение МОБ отражает потенциальные возможности существующих технологий, но не учитывают такие ограничительные факторы, как мощность каждой чистой отрасли (материальные ресурсы) и общее количество рабочей силы (трудовые ресурсы). Пусть l — общее число рабочих и $L = (l_1, l_2, \ldots, l_n)$ — вектор затрат рабочей силы, где l_i — количество рабочих, необходимых для производства одной единицы продукции i-ой чистой отрасли. Тогда число рабочих, необходимых для производства валового объёма X не может превышать общего числа имеющихся рабочих, т. е. должно выполняться неравенство

$$l_1x_1 + l_2x_2 + \cdots + l_nx_n = \sum_{i=1}^{n} l_ix_i = LX \leqslant l \ .$$

Поскольку любая технология обладает конечной производительностью, то за планируемый период можно произвести ограниченный объём продукции, т. е. для каждой компоненты вектора должно выполняться ограничение

$$x_i \leqslant \mu_i \ , \ i = 1, 2, \ldots, n$$

где μ_i — мощность i-ой чистой отрасли.

Естественно поставить задачу о наиболее эффективном использовании имеющихся технологий. Часто под эффектом понимают произведённую стоимость конечного продукта. В этом случае может быть рассмотрена следующая задача оптимизации

$$\begin{array}{rl}
\text{Найти} & \max\limits_{X} CY \\
\text{при ограничениях:} & Y = (I - A)X \,, \\
& x_i \leqslant \mu_i \,, \quad i = 1, 2, \ldots, n \,, \\
& LX \leqslant l \,, \\
& x_i \geqslant 0 \,, \quad i = 1, 2, \ldots, n \,,
\end{array}$$

где $C = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ — вектор цен на выпускаемую продукцию.

Подобная стратегия планирования может быть оправдана только в случае гарантированного сбыта производимой продукции, так как в сферу потребления будет направляться узкий ассортимент дорогостоящей продукции без учёта реального спроса.

Для максимального удовлетворения спроса надо предварительно изучить этот спрос, его структуру. Предположим, что пропорции потребления (потребительская корзина) описывается вектором $Y_0 = (y_1, y_2, \ldots, y_n,)'$. Тогда структура конечного спроса будет иметь вид $Y = \lambda Y_0$ и для его максимального удовлетворения целесообразно решать следующую задачу

$$\begin{array}{rl}
\text{Найти} & \max\limits_{X} \lambda \\
\text{при ограничениях:} & \lambda Y_0 = (I - A)X \,, \\
& x_i \leqslant \mu_i \,, \quad i = 1, 2, \ldots, n \,, \\
& LX \leqslant l \,, \\
& x_i \geqslant 0 \,, \quad i = 1, 2, \ldots, n \,.
\end{array}$$

Теорема 18. *Если матрица A продуктивна и $Y_0 > 0$, $L > 0$, $\mu_i > 0$ для всех значений $i = 1, 2, \ldots, n$ и $l > 0$, то задача линейного программирования имеет ровно одно решение.*

4.11 Проблема стратификации общества.

В любой научной дисциплине математика становится эффективным методом, когда соответствующая наука достигает определённой степени зрелости. Как правило, об этом свидетельствует появление научно обоснованной классификации. Под классификацией обычно понимается распределение элементов некоторого множества на классы (группы) по заранее определённым признакам, т. е. некоторое отношение эквивалентности. Но чем тогда наука отличается от коллекционирования марок или спичечных этикеток, где также используется та или иная классификация? Принципиальное отличие научной классификации состоит в том, что она упорядочивает эти классы, т. е. является предпорядком, а не просто эквивалентностью.

К сожалению, проблема социальной стратификации (классификации) в социологии до сих пор не решена. Может ли здесь помочь математика? Ответ, в общем случае, положительный. Но для решения этой проблемы необходимо уметь строить математическую модель общества.

Глава 5

ТЕОРИЯ ИГР

5.1 Математическая модель конфликтной ситуации

Ни одно из многочисленных определений конфликта не является корректным. Дело в том, что рациональные действия часто позволяют избежать само возникновение конфликта. Поэтому будем говорить только о *конфликтной ситуации*, понимая под этим наличие у взаимодействующих сторон несовпадающих интересов. Рассмотрим и формализуем основные элементы конфликтной ситуации.

1. Это прежде всего сами участники конфликтной ситуации, которых будем рассматривать как некоторое конечное множество N. При этом $|N| = n$, где n — число участников конфликтной ситуации. Каждому участнику можно сопоставить его номер, тогда множество N примет вид $N = \{1, 2, \ldots, n\}$. Заметим, что в качестве участников могут выступать не только отдельные индивиды, но также и команды, фракции, классы, государства и т. п.

2. Каждый из участников может осуществлять некоторые действия или выбирать определенную линию поведения, влияющие на течение и исход конфликтной ситуации. Обозначим через X_i множество стратегических возможностей отдельного участника и через $x_i \in X_i$ его стратегию, т. е. конкретный выбранный им способ действий. Если каждый из участников выберет свою стратегию, то будем говорить, что сложилась ситуация $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, которая и определяет исход конфликтной ситуации, так как действия участников уже фиксированы.

3. Для качественной оценки последствий принятых решений введём множество исходов конфликтной ситуации I. Так как любой исход однозначно определяется ситуацией x, то в дальнейшем часто будем отождествлять множество исходов со всем множеством ситуаций $X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$.

4. Естественно, что каждый из участников конфликтной ситуации оценивает тот или иной исход с точки зрения реализации своих интересов. Для формализации этого процесса введем функцию выигрыша для каждого из участников $H_i(x)$, определенную на множестве ситуаций. При этом будем считать, что каждый из участников стремится максимизировать свой выигрыш. Отметим, что в отличие от задач оптимизации, выигрыш отдельного

участника зависит не только от выбора собственных стратегий, но и от поведения других участников

$$H_i(x) = H_i(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n).$$

5. Любая конфликтная ситуация развивается по своим собственным законам и правилам, которых обязаны придерживаться все участники. Обозначим этот перечень законов и правил через П. Содержательный смысл этих правил будет определяться конкретным классом рассматриваемых конфликтных ситуаций.

Предложенная формализация позволяет рассматривать любую конфликтную ситуацию как некоторую систему

$$\Gamma = < N, \{X_i\}, I, \{H_i\}, \Pi >,$$

которую назовем *игрой*, заданной в нормальной форме. В дальнейшем участников конфликтной ситуации будем просто называть игроками.

Определение Под решением игры Γ будем понимать отображение Ψ, которое каждой игре Γ ставит в соответствие некоторое подмножество исходов (ситуаций) $\Psi(\Gamma) = X' \subset X$.

На содержательном уровне отображение Ψ выделяет некоторые "хорошие" (оптимальные) с той или иной точки зрения исходы конфликтной ситуации. Поэтому отображение Ψ часто называют принципом оптимальности. В частности, когда исход конфликтной ситуации оценивается с точки зрения общества, можно говорить о выборе в качестве принципа оптимальности принципа *социальной справедливости*. При этом надо иметь в виду, что принцип социальной справедливости всегда является историческим. То, что сегодня считается "хорошим" решением, завтра может быть уже объявлено неудовлетворительным. Поэтому нет и не может существовать единого принципа оптимальности и для любой игры можно рассматривать различные решения, в том числе и взаимоисключающие. Всё зависит от позиции исследователя, с какой точки зрения он рассматривает конкретную игру.

Выбор конкретного принципа оптимальности также не решает всех проблем, поскольку это ещё не гарантирует достижение желаемого результата. Во-первых, предписываемое оптимальное множество исходов может оказаться пустым. Во-вторых, игрокам иногда бывает невозможно скоординировать свои действия таким образом, чтобы реализовать оптимальное решение. В последнем случае, по-видимому, надо менять правила игры. Нечто подобным с переменным успехом и пытаются заниматься наши законотворческие организации: Дума, ЗАКСы, правительства и т. п.

При этом далеко не все конфликтные ситуации представляют интерес для рассмотрения. Интерес представляют только те, которые воспроизводятся на регулярной основе, носят массовый характер и в случае не оптимального исхода ведут к серьёзным (значительным) социальным последствиям. А роль соц. институтов и состит в том , чтобы обеспечить стабильность.

5.2 Антагонистические игры

Рассмотрим частный случай игры Γ, когда имеются всего два игрока ($|N| = 2$), интересы которых прямо противоположны. Обозначим соответственно через X и Y стратегические возможности игроков. Множество исходов игры отождествим с множеством ситуаций $X \times Y$. Антагонистический характер конфликтной ситуации состоит в том, что выигрыш одного из игроков является проигрышем другого, т. е.

$$H_1(x, y) = -H_2(x, y), \text{ где } x \in X, \ y \in Y \text{ и } (x, y) \in X \times Y.$$

Иногда условие переписывают в виде $H_1(x, y) + H_2(x, y) = 0$ и говорят об игре двух лиц с нулевой суммой. Указанная зависимость позволяет при анализе подобных игр ограничиться рассмотрением функции выигрыша только одного из игроков. Для определённости обычно указывают функцию выигрыша первого игрока, т. е. $H(x, y) = H_1(x, y)$.

Определение Систему $\Gamma =< X, Y, H >$ будем называть антагонистической игрой, заданной в нормальной форме.

Игра происходит следующим образом. Игроки независимо и одновременно выбирают свои стратегии $x \in X$ и $y \in Y$. После этого первый игрок получает выигрыш, равный $H(x, y)$, а второй игрок — $(-H(x, y))$. Других правил кроме перечисленных нет, так как антагонистическая борьба — это всегда борьба без правил. Если какие-то действия одного из игроков объявляются недопустимыми, то для этого достаточно соответствующим образом сузить множество его стратегий и необходимость в дополнительных правилах отпадает.

Поскольку в определении антагонистической игры указана функция выигрыша первого игрока, который стремится получить как можно больше, то его принято называть *максимизирующим* игроком. Так как выигрыш первого игрока есть проигрыш второго, то второй игрок, естественно, стремится сделать этот выигрыш как можно меньше. Поэтому второго игрока принято называть *минимизирующим* игроком.

Определение. Под решением антагонистической игры будем понимать ситуацию равновесия (x^*, y^*), которая удовлетворяет следующим неравенствам:

$$H(x, y^*) \leqslant H(x^*, y^*) \leqslant H(x^*, y), \tag{2.2}$$

где x^* — оптимальная стратегия первого игрока,

y^* — оптимальная стратегия второго игрока

$Val\,(\Gamma) = H(x^*, y^*) = v^*$ — значение игры.

Содержательно данное определение означает, что в ситуации равновесия ни один из игроков не может увеличить свой выигрыш даже, если он заранее знает, что его противник выберет свою оптимальную стратегию. Более того, ему самому невыгодно в данной ситуации выбирать какую–либо другую стратегию отличную от оптимальной, так как тогда он рискует выиграть меньше.

К сожалению, для большинства антагонистических игр наличие ситуации равновесия чаще исключение чем правило. Условие существования ситуации равновесия связано с понятиями *минимакса* и *максимина*. Определим верхнее и нижнее значения антагонистической игры, v^+ и v^- соответственно, следующим образом:

$$v^+ = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} H(x, y) \qquad \text{и} \qquad v^- = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} H(x, y). \tag{2.3}$$

Содержательно, v^-— гарантированная величина выигрыша для первого игрока, если он использует свою максиминную стратегию. В свою очередь, второй игрок, используя свою минимаксную стратегию, может гарантировать, что величина выигрыша первого игрока (проигрыша второго игрока) не будет превосходить верхнего значения игры — v^+. Следовательно, если игроки будут действовать "осторожно", то они могут гарантировать, что v — выигрыш первого игрока всегда будет находиться в пределах

$$v^- \leqslant v \leqslant v^+. \tag{2.4}$$

Неравенство (2.4) содержит утверждение, что $v^- \leqslant v^+$, которое требует доказательства. Действительно, справедлива следующая теорема

Теорема 19 (О минимаксе)**.**

$$\max_{x \in X} \min_{y \in Y} H(x, y) \leqslant \min_{y \in Y} \max_{x \in X} H(x, y).$$

Неизвестно кто первый выдвинул идею о том, что теория игр в принципе не может быть применена к социальным процессам так как в своей основе использует максиминные и минимаксные стратегии для описания поведения игроков.

Теперь можно сформулировать основной результат

Теорема 20. *Для существования в антагонистической игре* $\Gamma =< X, Y, H >$ *ситуации равновесия* (x^*, y^*) *необходимо и достаточно,чтобы*

$$\max_{x \in X} \min_{y \in Y} H(x, y) = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} H(x, y). \tag{2.5}$$

Часто бывает удобно при анализе антагонистической игры рассматривать не отдельную игру, а целый класс *стратегически эквивалентных игр.*

Определение. Две антагонистические игры $\Gamma =< X, Y, H >$ и $\Gamma^{'} =< X, Y, H^{'} >$ будем называть стратегически эквивалентными, если их функции выигрыша связаны следующим образом: $H^{'}(x, y) = \beta H(x, y) + \alpha$ и при этом $\beta > 0$.

Содержательный смысл этого определения раскрывает следующая теорема (стр.18)

Теорема 21. *Если в одной из стратегически эквивалентных антагонистических игр* $\Gamma =< X, Y, H >$ *или* $\Gamma^{'} =< X, Y, H^{'} >$ *, для которых* $H^{'}(x, y) = \beta H(x, y) + \alpha$*,* $\beta > 0$*, существует ситуация равновесия* (x^*, y^*)*, то эта ситуация будет являться ситуацией равновесия и для другой игры и при этом значения игр будут связаны следующим отношением*

$$Val\,(\Gamma^{'}) = H^{'}(x^*, y^*) = \beta H(x^*, y^*) + \alpha = \beta Val\,(\Gamma) + \alpha\,.$$

Таким образом указанное линейное преобразование антагонистических игр не изменяет оптимальных стратегий игроков а влияет только на начало отсчёта и масштаб функции выигрыша и, соответственно, значения игры.

5.3 Матричные игры

Рассмотрим частный случай антагонистической игры Γ, когда каждый из игроков имеет конечное множество стратегий

$$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \qquad \text{и} \qquad Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}.$$

В этом случае исходная игра имеет конечное число исходов (ситуаций) и может быть полностью описана матрицей A размера n на m, элементами которой являются выигрыши первого игрока

$$a_{ij} = H(x_i, y_j), \qquad (i = 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, m).$$

Игра $\Gamma = < A_{n\times m} >$, задаваемая матрицей выигрышей A, происходит следующим образом. Первый игрок выбирает в качестве своей стратегии некоторую строку матрицы A, а второй игрок — некоторый столбец, в результате чего складывается ситуация (i, j). Элемент матрицы a_{ij}, стоящий на пересечении выбранных игроками строки и столбца и определит выигрыш первого (проигрыш второго) игрока.

Рассмотрим несколько примеров матричных игр :

1. "Орлянка". Два игрока одновременно кладут на стол по монете "орлом"или "решеткой"вверх. Если "картинки"совпадут, то выигрывает первый игрок, в противном случае — второй. Если в каждой отдельной партии разыгрывается некоторая единичная ставка, то матрица данной игры примет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

2. "Камень, мешок, ножницы". Это одна из древнейших тюремных игр, в которую было принято играть на пальцах. Количество выброшенных пальцев от одного до трех соответствовало выбранному предмету, при этом камень побеждал ножницы, мешок – камень и ножницы – мешок. Если игроками выбирались одинаковые предметы, то результат партии признавался ничейным. Матрица выигрышей этой игры имеет следующий вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

3. Не заботясь о содержательном смысле игры , просто напишем некоторую, специальным образом построенную матрицу выигрышей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

Все результаты, справедливые для антагонистических игр, естественно, применимы и для матричных игр с той только разницей, что

$$v^+ = \min_j \max_i \{a_{ij}\} \qquad \text{и} \qquad v^- = \max_i \min_j \{a_{ij}\}. \tag{3.4}$$

Если в первых двух играх ситуации равновесия не существуют, так как $v^- = -1 \neq v^+ = 1$, то в третьем примере

$$v^- = \max_i \min_j \{a_{ij}\} = \max\{-2, -2, 2, -2\} = 2 \qquad \text{и} \tag{5.1}$$

$$v^+ = \min_j \max_i \{a_{ij}\} = \min\{4, 2, 3\} = 2 \ , \tag{5.2}$$

т. е. $v^- = v^+$ и, следовательно, согласно **Теореме 2.2.** существует ситуация равновесия. Согласно определению решения антагонистической игры значением этой игры будет $v^* = v^- = v^+ = a_{3,2} = 2$, а оптимальными стратегиями для первого игрока выбор третьей строки и для второго — второго столбца матрицы игры.

Отметим, что матричная игра, для которой существует ситуация равновесия, мало интересна, так как рациональные действия игроков в ней однозначно предопределены. Если разыгрывается несколько партий такой игры, то у игроков нет оснований от партии к партии менять свои стратегии и, следовательно, каждый раз исход игры будет неизменным. Если же разыгрывается несколько партий в "орлянку", то ни один из игроков не рискнет сохранять неизменной выбираемую стратегию, так как подобные действия легко "расшифровываются"противником. Возможность изменять от партии к партии свои стратегии и составляют суть любой игры, делают ее исход непредсказуемым. Однако в этом случае возникает проблема определения решения игры.

5.4 Смешанное расширение матричной игры

Пусть разыгрывается достаточно большое количество партий некоторой матричной игры $\Gamma = < A >$, матрица которой не имеет ситуации равновесия. Понимая необходимость менять стратегии от партии к партии, игроки могут использовать для этого различные алгоритмы, т. е. некоторые правила по которым осуществляется выбор стратегии в очередной партии в зависимости от исходов предшествующих партий. Однако, если количество партий достаточно велико, то противник всегда может определить этот алгоритм и начиная с некоторой партии эффективно использовать полученную информацию. Единственный способ лишить этой возможности противника — это выбирать свою стратегию в каждой отдельной партии случайным образом, используя смешанную стратегию.

Определение. Вероятностным распределением будем называть любую систему чисел $\{p_1, p_2, \ldots, p_r\}$, удовлетворяющим следующим условиям:

$$1.\ p_i \geqslant 0,\ \ (i = 1, 2, \ldots, r); \tag{5.3}$$

$$2.\ \sum_{i=1}^{r} p_i = 1. \tag{5.4}$$

Определение. Смешанной стратегией игрока будем называть любое вероятностное распределение на множестве чистых стратегий, т. е. вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ для первого игрока и вектор $y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ для второго, где компоненты векторов x и y — вероятности выбора соответственно строки и столбца матрицы, удовлетворяющие условиям

Чтобы более четко различать различного вида стратегии, ранее введенные стратегии будем называть *чистыми.* Обозначим через X и Y, соответственно, множества смешанных стратегий игроков. Отметим, что чистые стратегии игроков можно рассматривать как частный случай смешанных, когда одна из компонент вектора равна единице, а все остальные нули. Следовательно множества X и Y содержат в себе и все чистые стратегии игроков.

Определение. Смешанным расширением матричной игры Γ назовем следующую антагонистическую игру:

$$\Gamma_A = < X, Y, H(x,y) >$$

где X — множество смешанных стратегий первого игрока,
Y — множество смешанных стратегий второго игрока и

$$H(x,y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_i y_j \text{ — математическое ожидание выигрыша.}$$

Теорема 22. *Для смешанного расширения матричной игры* Γ_A *всегда существует ситуация равновесия.*

Объявим теперь решение игры Γ_A решением в смешанных стратегиях исходной матричной игры Γ. Если (x^*, y^*) — ситуация равновесия игры Γ_A, то соответственно назовем:

$$x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) \text{ — оптимальной смешанной стратегией первого игрока,}$$

$$y^* = (y_1^*, y_2^*, \ldots, y_m^*) \text{ — оптимальной смешанной стратегией второго игрока и}$$

$$Val\ (\Gamma) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_i^* y_j^* \text{ — значением игры } \Gamma.$$

Содержательный смысл такого определения решения игры Γ состоит в том, что если игроки разыграют достаточно большое количество партий и каждый при этом будет использовать свою оптимальную смешанную стратегию, то, хотя исход каждой отдельной партии будет случайным, средний выигрыш первого игрока будет близок значению игры — $Val\ (\Gamma)$. Если обозначим через k число сыгранных партий и через v_i результат отдельной партии, то согласно закону больших чисел

$$\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} v_i \quad \xrightarrow{\text{по вер.}} \quad Val\ (\Gamma) \text{ при } k \to \infty.$$

Для реализации оптимальной смешанной стратегии достаточно иметь датчик случайных чисел, который выдаёт случайные числа равномерно распределённые на интервале $(0,1)$. Предварительно отрезок $[0,1]$ разбивается на интервалы, длина каждого из которых равна соответствующей компоненте вектора смешанной стратегии игрока. Номер интервала, в который попадет значение случайной величины, как раз и определит чистую стратегию игрока, выбираемую им в конкретной партии.

Отметим, что если какая-либо из компонент оптимальной смешанной стратегии игрока равна нулю, то соответствующая чистая стратегия никогда им не будет выбрана. Такие чистые стратегии, для которых $x_i^* = 0$ или $y_j^* = 0$, принято называть *пассивными.* Чистые стратегии, для которых $x_i^* > 0$ или $y_j^* > 0$, т.е. те которые реально могут использоваться, называют *активными.* Множество всех активных стратегий игрока называют *спектром оптимальной смешанной стратегии* и, соответственно, вводятся обозначения

$$Sp(x^*) = \{i : x_i > 0\} \quad \text{и} \quad Sp(y^*) = \{j : y_i > 0\}$$

Теорема 23. *Если один из игроков использует свою оптимальную смешанную стратегию, а другой чистую, то справедливы следующие результаты*

$$1. \quad H(x^*, j) = \begin{cases} v, & \text{если } j \in Sp(y^*); \\ > v, & \text{если } j \notin Sp(y^*). \end{cases}$$

$$2. \quad H(i, y^*) = \begin{cases} v, & \text{если } i \in Sp(x^*); \\ < v, & \text{если } i \notin Sp(x^*). \end{cases}$$

где $v = H(x^*, y^*)$ — значение матричной игры.

Содержательный смысл данной теоремы состоит в том, что если один из игроков использует свою оптимальную смешанную стратегию, то от действий второго игрока уже почти ничего не зависит. Он может только увеличить свой ожидаемый проигрыш или уменьшить выигрыш, выбрав пассивную стратегию.

5.5 Методы решения матричных игр

5.5.1 Аналитический метод

Рассмотрим сначала простейший случай, когда матрица игры имеет размер 2×2

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Если существует ситуация равновесия ($v^+ = v^-$), то данная матричная игра имеет тривиальное решение в чистых стратегиях. Если $v^* \neq v^-$, то надо искать решение в смешанных стратегиях. Обозначим через $x = (x_1, x_2)$ и $y = (y_1, y_2)$ соответственно смешанные стратегии игроков. В силу свойства смешанных стратегий (4.1.) $x_2 = 1 - x_1$ и $y_2 = 1 - y_1$. Так как игроки имеют всего по две чистых стратегии, то можно утверждать, что каждая из них обязательно будет активной. Тогда, если x и y — оптимальные смешанные стратегии, то согласно Теореме 4.2., имеем

$$\begin{cases} H(x, 1) = a_{11}x_1 + a_{21}(1 - x_1) = v \\ H(x, 2) = a_{12}x_1 + a_{22}(1 - x_1) = v \\ H(1, y) = a_{11}y_1 + a_{12}(1 - y_1) = v \\ H(2, y) = a_{21}y_1 + a_{22}(1 - y_1) = v \end{cases} \tag{5.1.}$$

Систему уравнений (5.1.) обычно представляют в виде двух независимых систем линейных уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}(1 - x_1) = v \\ a_{12}x_1 + a_{22}(1 - x_1) = v \end{cases} \qquad \begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}(1 - y_1) = v \\ a_{21}y_1 + a_{22}(1 - y_1) = v \end{cases},$$

из которых уже легко получить решение матричной игры:

$$x^* = \left(\frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}} \, , \, \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}} \right)$$
$$y^* = \left(\frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}} \, , \, \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}} \right)$$
$$v = \frac{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}} \, .$$

Для решения конкретных матричных игр нет необходимости запоминать столь громоздкие формулы, можно просто решать систему уравнений. Проиллюстрируем всё это на примере решения игры "Орлянка"с матрицуй выигрышей $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Пусть $(x, 1-x)$ — смешанная стратегия первого игрока. Для того, чтобы быть оптимальной она должна удовлетворять системе уравнений

$$\begin{cases} \;\; x - (1-x) = v \\ -x + (1-x) = v \end{cases}$$

Сложив оба уравнения, получим, что $0 = 2v$ или $v = 0$. Вычтя из первого уравнения второе, получим, что $4x - 2 = 0$ или $x_1^* = 1/2$. Таким образом окончательно получаем получаем, что значение игры $v = 0$ и оптимальная смешанная стратегия первого игрока $x^* = (1/2\,, 1/2)$. Оптимальная стратегия второго игрока $y^* = (1/2\,, 1/2)$ может быть найдена аналогичным способом из решения системы уравнений

$$\begin{cases} \;\; y - (1-y) = v \\ -y + (1-y) = v \end{cases}$$

5.5.2 Графоаналитический метод

Рассмотрим теперь случай, когда матрица игры имеет размерность $2 \times m$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \end{pmatrix}.$$

Если $x = (x_1, 1 - x_1)$ — оптимальная смешанная стратегия первого игрока, то согласно Теореме 4.2.

$$H(x, j) = a_{1j}x_1 + a_{2j}(1 - x_1) \geqslant v \quad \text{для всех} \quad j = 1, 2, \ldots, m.$$

Проблема здесь состоит в том, что неясно какие чистые стратегии второго игрока являются активными. Однако активные стратегии можно определить графическим методом. Для этого нарисуем график функции (см. рисунок 1.)

$$f(z) = \min_j \{a_{1j}z + a_{2j}(1 - z)\} \quad \text{при} \quad z \in [0, 1] \quad ,$$

представляющий собой нижнюю огибающую семейства отрезков.

Каждому отрезку соответствует некоторая чистая стратегия второго игрока. Точка максимума функции $f(z)$ лежит на пересечении двух отрезков, соответствующих активным стратегиям второго игрока (на рисунке это 2-ая и j-ая чистые стратегии). Проекция этой точки на ось x даёт значения

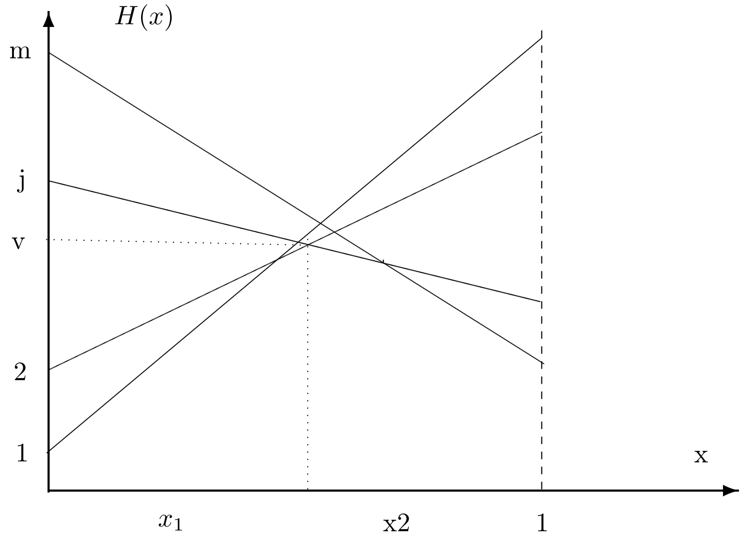


Рис. 5.1. Нижняя огибающая

компонент оптимальной смешанной стратегии первого игрока, а проекция на ось v — значение игры. Ясно, что график не позволяет точно определить эти величины. Но знание активных стратегий второго игрока позволяет на основе теоремы написать систему линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{12}x + a_{22}(1-x) = v \\ a_{1j}x + a_{2j}(1-x) = v \end{cases}$$

решение которой определит интересующие нас данные. Таким образом графический метод решения позволяет свести решение матричной игры размера $2 \times m$ к решению игры размера 2×2.

Аналогичным образом можно решать и матричные игры размера $n \times 2$, матрица выигрышей которой имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \end{pmatrix}$$

Если $y = (y_1, 1 - y_1)$ — оптимальная смешанная стратегия первого игрока, то согласно Теореме 4.2.

$$H(i, y) = a_{i1}y_1 + a_{i2}(1 - y_1) \leqslant v^* \quad \text{для всех} \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Для каждой чистой стратегии первого игрока построим графики (отрезки) функции выигрыша $H(i, y) = a_{i1}y + a_{i2}(1 - y)$ и на их основе нарисуем

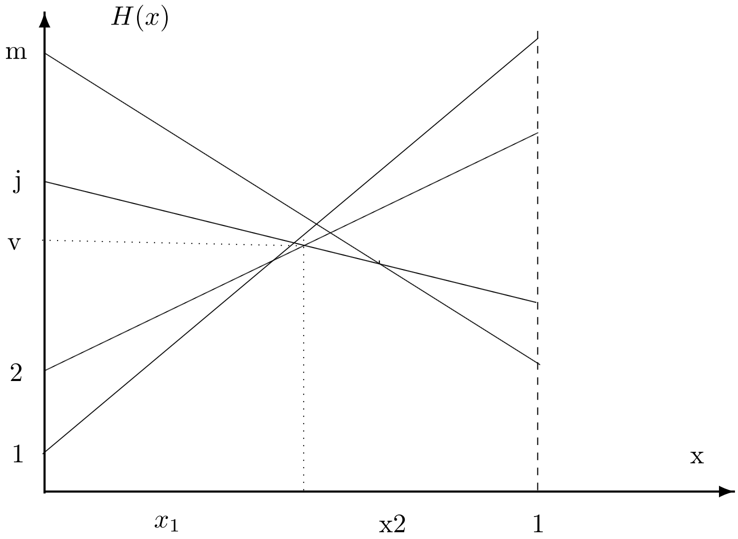


Рис. 5.2. Верхняя огибающая

график функции (см. рисунок 2.)

$$g(y) = \max_i \{a_{1j}y + a_{2j}(1-y)\} \quad \text{при} \quad y \in [0,1] \quad ,$$

представляющий собой верхнюю огибающую семейства отрезков.

Точка миниимума функции $g(z)$ лежит на пересечении двух отрезков, соответствующих активным стратегиям первого игрока (на рисунке это 2-ая и j-ая чистые стратегии). Проекция этой точки на ось y даёт значения компонент оптимальной смешанной стратегии второго игрока, а проекция на ось v — значение игры. Для получения точных значений интересующих нас характеристик надо решить следующую систему линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{12}x + a_{22}(1-x) = v \\ a_{1j}x + a_{2j}(1-x) = v \end{cases}$$

решение которой определит интересующие нас данные. Таким образом графический метод решения позволяет свести решение матричной игры размера $2 \times m$ к решению игры размера 2×2.

5.5.3 Общий случай произвольной размерности

Если имеется игра Γ с матрицей выигрышей $A = \{a_{ij}\}$ произвольной размерности $n \times m$, то решение игры может быть сведено к решению некоторой пары двойственных задач линейного программирования.

Не нарушая общности рассуждений, можно считать, что все элементы матрицы выигрышей строго положительные. В противном случае можно рассмотреть стратегически эквивалентную игру $\Gamma^{'}$ с матрицей выигрышей

$A' = \{a_{ij} + b\}$, где $b = |\min_{i,j}\{a_{ij}\}| + 1$. Сделанное предположение о положительности элементов матрицы выигрышей позволяет утверждать, что значение игры также будет строго положительно, т. е. $v^* > 0$.

Пусть $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ — оптимальная смешанная стратегия первого игрока. Тогда согласно Теореме

$H(x^*, j) = a_{1j}x_1^* + a_{2j}x_2^* + \dots + a_{nj}x_n^* \geqslant v^*$ для всех значений $j = 1, 2, \dots, m$.

Разделим правые и левые части имеющихся неравенств на $v^* > 0$

$$a_{1j}\frac{x_1^*}{v^*} + a_{2j}\frac{x_2^*}{v^*} + \dots + a_{nj}\frac{x_n^*}{v^*} \geqslant 1 \ , \ j = 1, 2, \dots, m$$

и введем новые переменные $x_i = x_i^*/v^*$, тогда получим систему неравенств

$$a_{1j}x_1 + a_{2j}x_2 + \dots + a_{nj}x_n \geqslant 1 \ , \ j = 1, 2, \dots, m .$$

Заметим, что

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = \frac{x_1^*}{v^*} + \frac{x_2^*}{v^*} + \dots + \frac{x_n^*}{v^*} = \frac{1}{v^*} ,$$

так как $x_1^* + x_2^* + \dots + x_n^* = 1$.

Вспомним, что v^* есть средний выигрыш, который первый игрок стремится максимизировать и, следовательно, величину $1/v^*$ — минимизировать. Таким образом получаем следующую задачу линейного программирования

$$\min_x (x_1 + x_2 + \dots + x_n)$$

$$\begin{array}{llll} a_{11}x_1 & +a_{21}x_2 & + \dots + a_{n1}x_n & \leqslant 1 \\ a_{12}x_1 & +a_{22}x_2 & + \dots + a_{n2}x_n & \leqslant 1 \\ & & \dots & \\ a_{1j}x_1 & +a_{2j}x_2 & + \dots + a_{nj}x_n & \leqslant 1 \\ & & \dots & \\ a_{1m}x_1 & +a_{2m}x_2 & + \dots + a_{mn}x_n & \leqslant 1 \\ & & x_i \geqslant 0 & \end{array}$$

решение которой позволяет найти значение игры и оптимальную смешанную стратегию первого игрока.

Аналогичным образом для отыскания оптимальной смешанной стратегии второго игрока можно построить двойственную задачу линейного программирования

$$\max_y (y_1 + y_2 + \dots + y_m)$$

$$\begin{array}{c} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1m}y_m \geqslant 1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2m}y_m \geqslant 1 \\ \dots \\ a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \dots + a_{im}y_m \geqslant 1 \\ \dots \\ a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nm}y_m \geqslant 1 \\ x_j \geqslant 0 \end{array}$$

где $y_j = y_j^*/v^*$ и $y_1 + y_2 + \dots + y_m = 1/v^*$.

5.6 Понятие доминирования

Часто при анализе матричных игр а также при решении задач линейного программирования проблему представляет размерность матрицы. Так, например, известно, что шахматы могут быть сведены к некоторой матричной игре очень большой размерности. Известно также, что существует решение этой игры в чистых стратегиях. Однако это решение до сих пор не найдено, именно, из-за слишком большой размерности. Одним из способов решения этой проблемы является вычёркивание в исходной матрице строк и столбцов, соответствующих пассивным стратегиям игроков.

Рассмотрим множество чистых стратегий первого игрока. Каждая из чистых стратегий характеризуется вектором элементов соответствующей строки матрицы выигрышей, т. е.

$$i \div (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{ij}, \ldots, a_{im})\,,\ i = 1, 2, \ldots, n\,.$$

Определение Будем говорить, что чистая i-ая стратегия первого игрока доминирует k-ую стратегию и обозначать $i \succ k$, если выполняются следующие условия

$$\begin{cases} 1.\ \forall j \quad a_{ij} \geqslant a_{kj} \\ 2.\ \exists j_0 \quad a_{ij_0} > a_{kj_0} \end{cases}$$

Содержательный смысл данного определения состоит в том, что на множестве чистых стратегий задаётся естественный строгий порядок (см.), т. е. из двух стратегий та "лучше" (доминирует), которая гарантирует больший выигрыш независимо от действий противника. Ясно, что максимальный элемент, если он существует, будет являться чистой оптимальной стратегией первого игрока. Однако, в общем случае, естественный порядок только частично упорядочивает множество чистых стратегий и поэтому максимальный элемент может и не существовать. Таким образом задание естественного порядка далеко не всегда позволяет найти оптимальное решение, но зато позволяет выявить заведомо "плохие" (доминируемые) стратегии, которые игрок никогда не будет использовать, а именно пассивные стратегии. При этом надо иметь ввиду, что если i-ая стратегия доминирует k-ую, то это ещё не означает, что она сама является активной. В свою очередь i-ая стратегия может оказаться доминированной и следовательно пассивной.

Аналогичным образом определим доминирование стратегий для второго игрока

$$j \succ l \Longleftrightarrow \begin{cases} 1.\ \forall i \quad a_{ij} \leqslant a_{il} \\ 2.\ \exists i_0 \quad a_{i_0 j} < a_{i_0 l} \end{cases}$$

Напомним, что второй игрок является минимизирующим и поэтому для него та стратегия "лучше" , где проигрыш (выигрыш первого игрока) меньше.

Определение. Пусть имеется вектор $x = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, \ldots, x_n)$. Расширением вектора x на i-ом месте будем называть следующий вектор

$$\hat{x}_i = (x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_i, \ldots, x_n)\,.$$

Рассмотрим матричную игру $\Gamma =< A >$, в которой чистая i-ая стратегия доминируется некоторой другой. Поскольку i-ая стратегия оказывается пассивной и, следовательно, никогда не будет использоваться первым игроком, вычеркнем в матрице A i-ую строку и получившуюся матрицу обозначим через A_i.

Теорема 24. *Для матричных игр* $\Gamma =< A >$ *и* $\Gamma^{'} =< A_i >$ *справедливы следующие утверждения.*

1. $Val(\Gamma) = Val(\Gamma^{'})$.
2. *Если* y^* *— оптимальная смешанная стратегия второго игрока в матричной игре* $\Gamma^{'}$*, то она будет также оптимальной стратегией и в игре* Γ.
3. *Если* $x^* = (x_1^*, \dots, x_{i-1}^*, x_i^*, \dots, x_{n-1}^*)$ *— оптимальная смешанная стратегия первого игрока в матричной игре* $\Gamma^{'}$*, то расширение вектора* x^* *на* i *-ом месте* $\hat{x}_i^* = (x_1^*, \dots, x_{i-1}^*, 0, x_i^*, \dots, x_{n-1}^*)$ *будет оптимальной смешанной стратегией в игре* Γ.

Пусть теперь в матричной игре Γ чистая j-ая стратегия второго игрока доминируется некоторой другой. Вычеркнем в матрице A j-ый столбец и получившуюся матрицу обозначим через A^j.

Теорема 25. *Для матричных игр* $\Gamma =< A >$ *и* $\Gamma^{'} =< A^j >$ *справедливы следующие утверждения.*

1. $Val(\Gamma) = Val(\Gamma^{'})$.
2. *Если* x^* *— оптимальная смешанная стратегия первого игрока в матричной игре* $\Gamma^{'}$*, то она будет также оптимальной стратегией и в игре* Γ.
3. *Если* $y^* = (y_1^*, \dots, y_{j-1}^*, y_j^*, \dots, y_{m-1}^*)$ *— оптимальная смешанная стратегия второго игрока в матричной игре* $\Gamma^{'}$*, то расширение вектора* y^* *на* j*-ом месте* $\hat{y}_j^* = (y_1^*, \dots, y_{j-1}^*, 0, y_j^*, \dots, y_{m-1}^*)$ *будет оптимальной смешанной стратегией в игре* Γ.

Сформулированные теоремы показывают, что вычёркивание строк и столбцов, соответствующих доминируемым стратегиям, позволяет сократить размерность игры без изменения значения исходной игры. Оптимальные же стратегии могут быть построены путём последовательного расширения. Проиллюстрируем всё это на следующем примере.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Так как третья строка доминирует первую, то

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Третий столбец доминирует второй, поэтому

$$A_1^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Третья строка доминирует вторую, откуда

$$A^2_{1,2} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Оптимальными смешанными стратегиями в последней матричной игре будут $x^* = y^* = (1/4; 3/4)$ и значение игры $v^* = 11/4$. Последовательно осуществляя расширения найденных оптимальных стратегий, найдём решение исходной матричной игры $\hat{x}^*_{1,2} = (0, 0, 1/4, 3/4)$, $\hat{y}^*_2 = (1/4, 0, 3/4)$ и $Val(\Gamma) = v^* = 11/4$.

5.7 Игры с природой

Антагонистические конфликты в реальной жизни встречаются очень редко за исключением искусственно созданных конфликтных ситуаций в виде спортивных и азартных игр. Однако, часто бывает удобно в задачах принятия решения в условиях неопределённости наделить случайный фактор "разумом"и считать, что он активным образом противодействует достижению поставленной цели. В этом случае возникает антагонистическая игра с некоторым воображаемым противником, которого принято называть "природой". Такая постановка задачи позволяет оценить возможности достижения цели при самых неблагоприятных условиях.

Рассмотрим следующий пример. Пусть у фермера имеется S гектаров пахотных земель, на которых он может выращивать различные культуры: $K_1, K_2 \ldots, K_n$. Урожайность культур, а соответственно и доход, будут существенным образом зависеть от погодных условий в весенне-летний период. На основе многолетних наблюдений можно классифицировать возможные для данной местности погодные условия: $P_1, P_2 \ldots, P_m$ и объявить их стратегиями "природы". Выделим некоторый участок единичной площади и определим матрицу выигрышей $A = \{a_{ij}\}$ как ожидаемый доход с этого участка при посадке на нём i-ой культуры и j-ых погодных условиях.

Не исключено, что получившаяся матричная игра будет иметь решение в чистых стратегиях. Это будет означать, что для данной местности существует культура, выращивание которой дёт наибольший доход. Действительно, нечто подобное в мире случается и мы даже знаем, что существуют целые страны, выращивающие только или рис,или хлопок, или кофе, или цитрусовые и т. п. Россия, к сожалению, почти всюду является зоной рискованного земледелия, поэтому на существование решения игры в чистых стратегиях надеяться не приходится.

Однако, согласно Т. всегда будет существовать решение в смешанных стратегиях. Пусть v^* — значение игры и $x^* = (x^*_1, x^*_2, \ldots, x^*_n)$ — оптимальная смешанная стратегия фермера. Можно было бы для реализации значения игры каждый год использовать датчик случайных чисел, который бы на основе оптимальной смешанной стратегии указывал бы какой культурой в этом году засевать все пахотные угодья. Но в этом случае для реализации значения игры потребовалось бы лет 200-300. Поэтому поступим другим способом и разобъём все угодья на достаточно большое число маленьких участков. Теперь, используя датчик случайных чисел, сыграем с "природой" на каждом из этих участков и тем самым для каждого участочка определим засеваемую культуру. Так как маленьких участков можно сделать значительно больше чем число культур, то участки с одной и той же культурой можно объединить в один. Если число маленьких участков увеличивать неограниченно, то согласно ЗБЧ площадь выделяемая под каждую культуру будет соответственно равна $S_i = Sx_i^*$ га.

Пусть теперь реализуются j-ые погодные условия. Оценим доход, полученный со всего участка.

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} S x_i^* = S \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i^* = SH(x^*, j) = \begin{cases} Sv^*, & \text{если } j \in Sp(y^*) \\ > Sv^*, & \text{если } j \notin Sp(y^*). \end{cases}$$

Таким образом, согласно Т., если "природа" выберет активную стратегию, то фермер всё равно реализует значение игры. Поскольку "природа" реальным разумом не наделена и не обязательно будет противодействовать фермеру, то не исключено, что будет реализована пассивная стратегия. Естественно, в этом случае доход фермера превысит ожидаемый.

Игры с "природой" могут быть использованы также для решения задач выбора оборудования для предприятия, определения состава научного-исследовательского коллектива, выбора проектов строительства в сейсмоопасной зоне и т. п. Следует обратить внимание на нестандартную реализацию в этих играх оптимальной смешанной стратегии, компоненты которой задают уже не просто вероятности выбора, а главным образом пропорции.

5.8 "Безобидные" игры.

Все давно знают, что бессмысленно играть в азартные игры с шулерами или с государством — проигрыш гарантирован. Поэтому, если есть желание разориться, то достаточно регулярно участвовать в лотерейных розыгрышах, приобретая на весь имеющийся капитал лотерейные билеты. Бессмысленно также говорить о какой-либо социальной справедливости при наличии антагонистических противоречий, так как каждая из противоборствующих сторон будет стремиться добиться максимума. Однако, иногда предпринимаются попытки говорить о *безобидности* участия в подобных мероприятиях.

Определение. Антагонистическую игру Г будем называть *безобидной*, если $Val(\Gamma) = v^* = 0$.

Если исходная игра Г не является безобидной, то рекомендуется рассмотреть множество стратегически эквивалентных игр и выбрать среди них безобидную. Для того, чтобы получить безобидную игру, достаточно заменить функцию выигрыша $H(x, y)$ на новую $H^{'}(x, y) = H(x, y) - v^*$, где v^* — значение исходной игры Г. На практике чаще используется другой способ сведения исходной игры к безобидной, а именно, если $v^* > 0$, то первый игрок за право участия в этой игре выплачивает перед каждой партией второму игроку сумму равную значению игры — v^*. Таким образом для любой матричной игры существует эквивалентная ей безобидная игра.

Однако, в общем случае, данная процедура не всегда реализуема, так как значение игры может не существовать или обращаться в бесконечность. Рассмотрим соответствующий пример, который получил название "Петербургский парадокс". Монета бросается до первого появления "орла". Если это произошло при k-ом бросании монеты, то выигрыш первого игрока составляет $H(k) = 2^k$. Ясно, что вряд ли найдётся желающий выступать в роли второго игрока. Сколько тогда первый игрок должен заплатить второму, чтобы игра стала безобидной и второй игрок согласился бы сыграть одну партию?

Найдём математическое ожидание величины выигрыша первого игрока. Случайные события, приводящие к появлению "орла" имеют следующий вид

$$O,\ PO,\ PPO, \ldots,\ \underbrace{P \ldots P}_{(k-1)\ \text{раз}}\ O, \ldots$$

Вероятности этих событий соответственно будут равны

$$\frac{1}{2}\,,\ \left(\frac{1}{2}\right)^2,\left(\frac{1}{2}\right)^3, \ldots,\ \left(\frac{1}{2}\right)^k, \ldots$$

Тогда математическое ожидание величины выигрыша первого игрока будет равно

$$M[H] = \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} 1 = \infty.$$

Возник парадокс, состоящий в том, что игрок за право участие в игре, в которой он всегда получает только конечный выигрыш, должен заплатить бесконечно много.

Качественное разрешение парадокса состоит в том, второй игрок, соглашаясь принять участие в этой игре, берёт на себя потенциально невыполнимое обязательство, а именно, заплатить сколь угодно большой проигрыш. Поэтому при попытке сведения игры к безобидной и первому игроку приходится брать на себя невыполнимое обязательство — заплатить бесконечно много. Таким образом возникает необходимость учитывать конкретные возможности второго игрока. Пусть $S = 2^m$ — максимальная сумма, которую второй игрок может выплатить первому. Тогда монету можно бросать не более чем $(m-1)$ раз и выигрыш первого игрока будет равен $H(k) = 2^k$, если "орёл" выпадет в первый раз при k-ом бросании монеты. Если "орёл" не появится, то дальнейшие бросания не производятся и первый игрок получает максимально большой выигрыш $H = 2^m$. Вероятность этого события будет равна $P(H = 2^m) = (1/2)^{(m-1)}$ и математическое ожидание выигрыша (значение игры) примет уже конечное значение

$$M[H] = \sum_{k=1}^{m-1} 2^k \left(\frac{1}{2}\right)^k + 2^m \left(\frac{1}{2}\right)^{(m-1)} = \sum_{k=1}^{m-1} 1 + 2 = m + 1 = v^*.$$

Учитывая, что $m = \log_2 S$ окончательно получаем связь между значением игры и капиталом второго игрока

$$v^* = \log_2 S + 1\,,$$

которая объясняет возникновение парадокса. При формулировке правил игры мы неявно предположили, что второй игрок обладает бесконечным капиталом и поэтому значение игры также оказалось бесконечным.

Однако для нас гораздо важнее тот факт, что значение игры оказывается может зависеть от капиталов противников, т. е. на исход игры влияют не действия игроков, а содержимое их кошельков. Чтобы убедиться в этом, обратимся к теории азартных игр.

Рассмотрим антагонистическую игру, в отдельной партии которой первый игрок с вероятностью p выигрывает некоторую единичную ставку и соответственно с вероятностью $q = 1 - p$ проигрывает. Отличие азартных игр, скажем от салонных, состоит в том, что игроки перед каждой партией должны делать ставки. Если игрок не в состоянии сделать очередную ставку, то он выбывает из игры. Пусть в начале игры первый игрок обладает капиталом в n единиц, а второй игрок — в m единиц. Тогда игра будет продолжаться до тех пор, пока либо капитал первого не станет нулевым, либо станет равным $n + m$, т. е. до тех пор, пока один из игроков не разорится.

Обозначим через q_k вероятность окончательного разорения первого игрока, если его текущий капитал равен k. После очередного розыгрыша партии его капитал станет равным либо $k + 1$, либо $k - 1$, и поэтому

$$q_k = pq_{k+1} + qq_{k-1}\,, \text{ если } 1 < k < n + m\,.$$

При $k = 1$ текущий розыгрыш может уже привести к разорению, поэтому формула примет вид $q_1 = pq_2 + q$. Аналогично при $k = n + m - 1$ текущая партия может завершиться победой и поэтому $q_{n+m-1} = qq_{n+m-2}$. Чтобы объединить все эти формулы в одну, положим $q_0 = 1$ и $q_{n+m} = 0$. Тогда формула будет уже справедлива для $k = 1, 2, \ldots, n + m - 1$. Непосредственной подстановкой можно убедиться, что

$$q_k = \frac{(q/p)^{n+m} - (q/p)^k}{(q/p)^{n+m} - 1}$$

является решением системы уравнений и при этом единственным (см. стр. 359). Исключение представляет случай, когда $p = q = 1/2$, так как при этих значениях вероятностей выигрыша числитель и знаменатель формулы обращаются в нуль. Однако, используя правило Лопиталя, можно найти предел этого выражения при $p \to 0$

$$q_k = 1 - \frac{k}{n+m}\,.$$

Подставив вместо k начальное значения капитала первого игрока, окончательно получим вероятность разорения

$$q_n = \begin{cases} \frac{(q/p)^{n+m} - (q/p)^n}{(q/p)^{n+m} - 1}\,, & \text{при } p \neq q \\ 1 - \frac{n}{n+m}\,, & \text{при } p = q = 1/2\,. \end{cases}$$

Вероятность разорить противника соответственно будет равна $p_n = 1 - q_n$.

Значение этой игры (математическое ожидание выигрыша) будет равно

$$v^* = mp_n - nq_n = m - (n + m)q_n\,.$$

Можно показать, что $v^* = 0$ тогда и только тогда, когда $p = q$. Это означает, что при указанных правилах безобидная игра остаётся безобидной, но никакая игра, не являющаяся безобидной, не может стать безобидной.

Пусть два игрока, первый из которых имеет 100 рублей а второй рубль, играют в безобидную игру, скажем в "орлянку" , до разорения одного из них. Тогда согласно формуле вероятность выиграть первому игроку рубль прежде, чем он разорится будет равна

$$p_{100} = \frac{100}{100 + 1} = 0,99\,,$$

т. е. у второго игрока практически нет никаких шансов сохранить свой рубль, играя в эту "безобидную" игру.

Более того, если у игрока имеется некоторый капитал в n единиц и он имеет право в любой момент прекратить игру, не являющуюся для него безобидной ($p < q$), а его противник, обладая бесконечно большим капиталом, всегда готов продолжать игру, то у него имеются хорошие шансы выиграть некоторую сумму. Для этого игрок должен пытаться разорить не противника, что невозможно, а некоторого фиктивного игрока, обладающего капиталом в m единиц. Пусть игрок хочет обеспечить свои шансы на успех с вероятностью $1/2 < p^* < 1$, тогда величину m можно определить решив неравенство

$$1 - \frac{(q/p)^{n+m} - (q/p)^k}{(q/p)^{n+m} - 1} \geqslant p^* \,.$$

Таким образом оказывается, что безобидные игры могут таковыми и не являться, а в игры, не являющиеся безобидными, можно при определённых условиях сыграть, так как решающее значение играют капиталы игроков, а не значение игры. Всё это заставляет поставить под сомнение теорию "безобидных" игр, а слово безобидные заключить в кавычки.

5.9 Бескоалиционные игры.

Рассмотрим снова общее представление игры в нормальной форме

$$\Gamma = < N, \{X_i\}, I, \{H_i\}, \Pi >$$

и выделим некоторый класс неантагонистических игр, которые будем называть *бескоалиционными*. Наличие более чем двух игроков или наличие у них общих интересов делает антагонистический конфликт уже невозможным, так как возникают предпосылки для координации совместных действий. Тем не менее будем считать, что согласно правилам бескоалиционной игры игроки действуют независимо и между ними невозможны никакие соглашения, которые обязывали бы их выбирать определённые стратегии. Нечто подобное можно наблюдать в Думе, когда голосование по тому или иному вопросу объявляется тайным. Проконтролировать выбор депутата в этом случае оказывается невозможно и поэтому любые предварительные договорённости, соглашения и обязательства теряют всякий смысл.

Определение. Бескоалиционной игрой будем называть ситему

$$\Gamma = < N, \{X_i\}, \{H_i\} >,$$

где N — конечное множество игроков $|N| = n$;
X_i — стратегические возможности i-го игрока ;
$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x_i \in X_i$ — ситуация ;
$H_i(x)$ — функция выигрыша i-го игрока.

Отдельная партия бескоалиционной игры протекает следующим образом. Одновременно и независимо каждый из игроков выбирает свою стратегию $x_i \in X_i$, в результате чего образуется ситуация $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, после чего выигрыш каждого из игроков равен $H_i(x)$.

Можно заметить, что бескоалиционная игра является обобщением проблемы социального выбора. Действительно, множество игроков можно интерпретировать как множество выборщиков, которые должны выбрать одну из ситуаций, исходя из своих индивидуальных предпочтений, которые определяются функциями выигрыша

$$x \succ y \Longleftrightarrow H(x) > H(y) \Longleftrightarrow (x, y) \in R_i^{\succ}.$$

Отличие состоит только в определении решения. Если для проблемы социального выбора это некоторая единственная альтернатива, то для бескоалиционной игры это уже некоторое подмножество ситуаций, которые мы готовы объявить "хорошими". Однако здесь, в отличие от антагонистических игр, для определения решения могут использоваться уже различные принципы оптимальности, в основу которых можно положить выгодность, устойчивость или справедливость.

Так как интересы игроков не являются строго противоположными, то они могут обсуждать различные ситуации и даже пытаться договориться о совместных действиях. Предположим, что игрокам удалось договориться о целесообразности выбора некоторой ситуации $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Поскольку это соглашение не является обязательным , то, по-видимому, каждый из игроков предполагая, что остальные игроки будут придерживаться достигнутого соглашения, попытается увеличить свой выигрыш. Тогда, если для i-го игрока найдётся такая стратегия $x_i^{'}$, что $H_i(x \parallel x_i^{'}) > H_i(x)$, то трудно будет ожидать, что он реализует стратегию x_i. Если окажется, что для всех возможных значений $x_i^{'} \in X_i$ i-ому игроку невыгодно нарушать соглашения, т.е $H_i(x \parallel x_i^{'}) \leqslant H_i(x)$, то, по-видимому, следует ожидать, что рекомендованная стратегия x_i будет им реализована.

Определение. Ситуацию $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в игре Γ будем называть приемлемой для i-го игрока, если для всех возможных значений $x_i^{'} \in X_i$ выполняется неравенство $H_i(x \parallel x_i^{'}) \leqslant H_i(x)$.

Обозначим через G_i множество всех ситуаций приемлемых для i-го игрока. Тогда пересечение всех этих множеств

$$G = \bigcap_{i=1}^{n} G_i$$

даст множество ситуаций приемлемых для всех игроков одновременно. Ситуации, образующие множество G, принято называть *ситуациями равновесия по Нэшу.*

Определение. Множество равновесных ситуаций $G \subset X$ будем называть решением по Нэшу бескоалиционной игры Γ .

Заметим, что ситуация равновесия по Нэшу является обобщением понятия ситуации равновесия, введённой для антагонистических игр. Действительно, пусть $\Gamma =< X, Y, H_1, H_2 >$ — бескоалиционная игра двух лиц, для которой ситуация (x^*, y^*) приемлема для обоих игроков и при этом $H_1(x, y) = -H_2(x, y)$, т. е. игра Γ является антагонистической. Тогда, согласно определению решения по Нэшу, должны выполняться неравенства

$$\forall x \in X : H_1(x, y^*) \leqslant H_1(x^*, y^*) \text{ и } \forall y \in Y : H_2(x^*, y) \leqslant H_2(x^*, y^*).$$

Выразим $H_2(x, y)$ через $-H_1(x, y)$, тогда второе неравенство примет вид

$$\forall y \in Y : -H_1(x^*, y) \leqslant -H_1(x^*, y^*) \text{ или } H_1(x^*, y^*) \leqslant H_1(x^*, y).$$

Теперь, объединив первое и второе неравенства, окончательно получим

$$\forall x \in X, \forall y \in Y : H_1(x, y^*) \leqslant H_1(x^*, y^*) \leqslant H_1(x^*, y)$$

определение ситуации равновесия для антагонистической игры.

Однако, в отличие от антагонистических игр, ситуации равновесия в бескоалиционных играх не исчерпывают всех возможностей, предоставляемых игрокам в бескоалиционных играх. Так, в частности, если несколько игроков одновременно отклонятся от ситуации равновесия, то не исключено, что они тем самым смогут увеличить свой выигрыш.

Будем характеризовать каждую из ситуаций вектором выигрышей игроков, которые они получат при реализации данной ситуации

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \div (H_1(x), H_2(x), \ldots, H_n(x))$$

и определим естественное отношение порядка следующим образом.

Определение. Будем говорить, что ситуация x доминирует ситуацию y и обозначать $x \succ y$, если для всех игроков выигрыш в ситуации x не меньше, чем в ситуации y и по крайней мере для одного из игроков выигрыш будет больше, т. е.

$$x \succ y \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \forall\, i : & H_i(x) \geqslant H_i(y) \\ \exists\, i_0 : & H_{i_0}(x) > H_{i_0}(y). \end{array} \right.$$

Определённое отношение порядка задаёт частичный порядок на множестве ситуаций, что позволяет игрокам не рассматривать заведомо неудовлетворительные варианты (доминируемые ситуации) и в отдельных случаях выявлять максимальный элемент, т. е. ситуацию, в которой выигрыш каждого из игроков будет максимальным.

Определение. Решением бескоалиционной игры по Парето (или Парето оптимальными ситуациями) будем называть множество недоминируемых ситуаций.

Содержательный смысл данного определения состоит в том, что в Парето оптимальных ситуациях невозможно одновременно увеличить выигрыш каждого из игроков.

5.10 Биматричные игры.

Рассмотрим класс бескоалиционных игр двух лиц $\Gamma =< X, Y, H_1, H_2 >$, в которых каждый из игроков имеет конечный набор стратегий $|X| = n$ и $|Y| = m$. Такие игры принято называть *биматричными*, так как они полностью определяются заданием двух матриц одинаковой размерности $\Gamma =< A, B >$, где A и B — матрицы выигрышей первого и второго игроков соответственно. Розыгрыш отдельной партии происходит следующим образом. Игроки одновременно и независимо объявляют свой выбор, первый игрок указывает номер строки а второй игрок — номер столбца. После чего выигрыш первого игрока будет равен a_{ij}, а выигрыш второго игрока — b_{ij}, где i и j — номера выбранных игроками строки и столбца соответственно. Если $a_{ij} = -b_{ij}$, то будем иметь просто матричную игру.

Рассмотрим несколько примеров биматричных игр.

1. **Игра "семейный спор".**

Муж и жена (первый и второй игрок соответственно) решают вопрос о том, куда им пойти вечером, если муж предпочитает футбол, жена — балет, а отсутствие согласия никого не устраивает. Моделью этой конфликтной ситуации может служить биматричная игра $\Gamma =< A, B >$, где матрицы выигрышей имеют следующий вид

$$A = \begin{array}{cc} & \text{ф} \quad \text{с} \\ \begin{array}{c} \text{ф} \\ \text{с} \end{array} & \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ & \text{Муж} \end{array} \qquad B = \begin{array}{cc} & \text{ф} \quad \text{с} \\ \begin{array}{c} \text{ф} \\ \text{с} \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \\ & \text{Жена} \end{array}$$

Пусть первый игрок выбирает строку , а второй — столбец. Тогда приемлемыми ситуациями для мужа будут только те ситуации, которым соответствуют максимальные элементы в столбцах его матрицы выигрышей, т. е. $G_1 = \{(\text{ф,ф}); (\text{с,с})\}$. Приемлемыми ситуациями для жены будут только те ситуации, которым соответствуют максимальные элементы в строках её матрицы выигрышей, т. е. $G_2 = \{(\text{ф,ф}); (\text{с,с})\}$. Ситуациями равновесия будут ситуации приемлемые для каждого из игроков, т. е. $G = G_1 \bigcap G_2 = \{(\text{ф,ф}); (\text{с,с})\}$.

Найдём теперь ситуации оптимальные по Парето. Для этого охарактеризуем каждую ситуацию вектором выигрышей игроков

$$\begin{array}{ccc} (\text{ф,ф}) & \div & (5,1) \\ (\text{ф,б}) & \div & (0,0) \\ (\text{б,ф}) & \div & (0,0) \\ (\text{б,б}) & \div & (1,5) \end{array}$$

и заметим, что (ф,ф) $\succ$ (ф,б) и (ф,ф) $\succ$ (б,ф), а ситуации (ф,ф) и (б,б) между собой несравнимы. Таким образом ситуации $G = \{(\text{ф,ф}); (\text{с,с})\}$ будут являться не только равновесными, но и оптимальными по Парето.

Хотя решения по Нэшу и по Парето совпали (лучше всё-таки пойти куда-нибудь вместе), проблема конкретного выбора осталась открытой.

2. Игра "два бандита".

Два бандита, подозреваемые в совершении тяжкого преступления, попались на мелком преступлении и содержатся изолировано друг от друга. Если бандиты сознаются в содеянном (ситуация — (с,с)) и покаются, то они получат по 8 лет тюрьмы. Если они будут всё отрицать (ситуация —(о,о)), то их смогут осудить только за мелкое преступление и они получат по году. Если сознается только один из них, то он будет отпущен на свободу, а другой получит максимальный срок — 25 лет. Моделью этой конфликтной ситуации является биматричная игра $\Gamma =< A, B >$, где

$$A = \begin{array}{cc} & \text{с} \quad \text{о} \\ \begin{array}{c} \text{с} \\ \text{о} \end{array} & \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ -15 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad B = \begin{array}{cc} & \text{с} \quad \text{о} \\ \begin{array}{c} \text{с} \\ \text{о} \end{array} & \begin{pmatrix} -8 & -15 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

В данной игре имеется только одна ситуация равновесия (с,с), а все остальные ситуации будут оптимальными по Парето. При этом ситуация (о,о) будет доминировать ситуацию (с,с). Парадоксальность полученного решения состоит в том, что каждая из ситуаций может быть объявлена решением игры в зависимости от позиции, с которой рассматривается данная конфликтная ситуация. С точки зрения общества каждый преступник должен покаяться и понести заслуженное наказание - ситуация (с,с). Групповым интересам бандитов соответствует ситуация (о,о), а индивидуальным интересам — ситуации (с,о) и (о,с) соответственно. В связи с проблемой выбора стратегии, стоящей перед бандитами, эту игру иногда называют "дилемма заключённого".

3. Игра "перекрёсток".

Два автомобиля, двигаясь по перпендикулярным направлениям, одновременно подъезжают к перекрёстку. Каждый из них теперь может или притормозить (т), чтобы пропустить другого или, наоборот, ускориться (у), чтобы проскочить перекрёсток первым. Матрицы выигрышей имеют следующий вид

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{т} & \text{у} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -10 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \text{т} \\ \text{у} \end{array} \quad B = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{т} & \text{у} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -10 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \text{т} \\ \text{у} \end{array}$$

Ситуации (т,у) и (у,т) — равновесные и оптимальны по Парето, т. е. структура решения такая же как и в игре "семейный спор"(кто-то должен пропустить другого). Однако у игроков в данной конфликтной ситуации практически нет возможностей согласовывать свои действия, да и последствия несогласованных действий (ситуация (у,у)) могут быть весьма серьёзными. Поэтому приходится ограничивать свободу выбора игроков и вводить "Правила дорожного движения", которые уже однозначно предписывают игрокам выбор их стратегий.

4. Игра "мирное сосуществование".

Имеются два соседствующих государства, обладающих примерно равными экономическими потенциалами. Каждое из них может по отношению к соседу проводить миролюбивую (м) или агрессивную (а) политику. Осуществление миролюбивой политики позволяет государствам весь ВВП использовать на социальное и экономическое развитие. Осуществление агрессивной политики также обеспечивает мирное сосуществование, но требует больших затрат на вооружение и содержание армии. Если одно из государств осуществляет миролюбивую политику, а другое — агрессивную, то ,как известно, страна, не имеющая собственной армии, должна кормить армию соседа. Матрицы выигрышей этой конфликтной ситуации имеют следующий вид

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{м} & \text{а} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 7 & 13 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \text{м} \\ \text{а} \end{array} \qquad B = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{т} & \text{т} \end{array} \\ \begin{matrix} 10 & 13 \\ 4 & 7 \end{matrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \text{м} \\ \text{а} \end{array}$$

В данной игре только одна ситуация равновесия (а,а)и, следовательно, если "хочешь мира — готовься к войне". Остальные ситуации будут оптимальными по Парето, т. е. структура решения такая же как в игре "два бандита". Однако имеется и небольшое отличие: ситуация (м,м), наиболее желательная для общества, в данном случае не является устойчивой. Поэтому желательно обеспечить устойчивость этой ситуации путём развития международного права и усиления роли ООН при разрешении международных конфликтов.

5.11 Кооперативные игры

Неудовлетворительность решений бескоалиционных игр во многом вызвана независимостью действий игроков и отсутствием возможностей заключать коллективные соглашения. Предположим теперь, что существует механизм, позволяющий обеспечивать выполнение достигнутых соглашений и будем рассматривать игру $\Gamma =< N, \{X_i\}, I, \{H_i\}, \Pi >$ как кооперативную игру. Так как любые соглашения должны носить взаимовыгодный характер, то необходимо предусмотреть также возможность перераспределения дополнительных доходов, получаемых в результате кооперации. В общем случае можно считать, что игроки обладают некоторыми ресурсами, перераспределение которых и составляет экономическую основу коллективных соглашений. В данном случае, для упрощения изложения, будем считать, что выигрыши игроков являются *трансферабельными*, т. е. часть выигрыша может быть передана другим игрокам благодаря чему и осуществляются побочные платежи.

При анализе кооперативных игр основную роль играют действия коалиций а не отдельных игроков. Поэтому кооперативную игру чаще определяют в *характеристической форме* $\Gamma =< N, v(S) >$, где N — множество игроков и $v(S)$ — характеристическая функция игры, определённая на множестве всех коалиций $S \subset N$.

Определение. Функцию обладающую следующими свойствами

1. $v(\emptyset) = 0$;

2. Условие супераддитивности.

Если S,$T \subset N$ и $S \bigcap T = \emptyset$, то $v(S \bigcup T) \geqslant v(S) + v(T)$.
будем называть характеристической функцией кооперативной игры.

Значение характеристической функции $v(S)$ удобно интерпретировать как гарантированный доход (выигрыш) коалиции S при условии, что она действует самостоятельно. Тогда первое условие в определении характеристической функции означает отсутствие "рога изобилия", а условие супераддитивности говорит, что кооперация всегда выгодна, так как гарантированный доход коалиции $S \bigcup T$ не может быть меньше суммы индивидуальных доходов этих коалиций.

Реальные конфликтные ситуации, допускающие кооперативное поведение игроков, как правило, моделируются игрой, записанной в нормальной форме. Поэтому часто возникает проблема построения характеристической функции этой кооперативной игры. Отметим сразу, что данная проблема не всегда имеет единственное решение. Поэтому укажем способ, позволяющий осуществлять переход от нормальной формы игры к характеристической.

Пусть $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — ситуация в игре Γ, заданной в нормальной форме. Обозначим через x_S компоненты ситуации x, выбор значений которых осуществляют игроки коалиции S и через $y_{N \setminus S}$ — компоненты, выбор значений которых осуществляет дополнительная коалиция $N \setminus S$, т. е. все оставшиеся игроки, не вошедшие в коалицию S. Тогда ситуация x может быть представлена в виде $x = (x_S, y_{N \setminus S})$. Обозначим через X_S и $Y_{N \setminus S}$ соответственно стратегические возможности рассмотренных коалиций, каждые из которых представляют собой декартово произведение стратегиских возможностей игроков, входящих в эти коалиции

$$X_S = \prod_{i\in S} X_i \ \text{ и } \ Y_{N\setminus S} = \prod_{j\in N\setminus S} X_j.$$

Обозначим через $H_S(x_S, y_{N\setminus S}) = \sum\limits_{i\in S} H_i(x_S, y_{N\setminus S})$ суммарный выигрыш игроков коалиции S и рассмотрим антагонистическую игру

$$\Gamma =< X_S, Y_{N\setminus S}, H_S >,$$

т. е. будем считать, что игроки коалиции S действуют самостоятельно и пытаются максимизировать суммарный выигрыш, а остальные игроки, забыв о собственных интересах, противодействуют игрокам коалиции S. Для любой антагонистической игры всегда определено нижнее значение игры — гарантированный выигрыш первого(масимизирующего) игрока, которое и возьмём в качестве значения характеристической функции

$$v(S) = v = \max_{x_S} \min_{y_{N\setminus S}} H_S(x_S, y_{N\setminus S}).$$

Отметим, что для общей коалиции $(S = N)$ антагонистическая игра имеет вырожденный характер (отсутствует второй игрок) и поэтому вычисление значения характеристичекой функции сводится к максимизации суммы выигрышей всех игроков

$$v(N) = \max_x \sum_{i=1}^{n} H_i(x).$$

Можно показать, что таким образом определённая функция действительно будет характеристической, т. е. помимо условия $v(\emptyset) = 0$ будет удовлетворять и условию супераддитивности. Рассмотрим несколько примеров определения и построения характеристической функции.

1. Игра "капиталист и рабочий".
У капиталиста имеется единственная стратегия — предложить работу, а у рабочего, который на данный момент является безработным, две — согласиться или нет. Эту кооперативную игру можно записать как биматричную, где матрицы выигрышей имеют следующий вид

$$A = \begin{array}{cc} \text{с} & \text{н} \\ (10 & 0) \end{array} \qquad B = \begin{array}{cc} \text{с} & \text{н} \\ (0 & -100) \end{array}.$$

Так как $\max\min\{10; 0\} = 0$ и $\max\{0; -100\} = 0$, то $v(\{\text{К}\}) = v(\{\text{Р}\}) = 0$. Действуя совместно, капиталист и рабочий смогут вместе получить выигрыш $v(\{\text{К, Р}\}) = \max\{10; -100\} = 10$.

2. Правило большинства.
Проблему социального выбора можно рассматривать как кооперативную игру, если считать, что коалиция "выигрывает", если она обладает большинством голосов и "проигрывает" в противном случае. Тогда характеристическую функцию можно определить следующим образом:

$$v(S) = \begin{cases} 1, & \text{если } |S| > n/2\ ; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

3. Взвешенные мажоритарные игры.
Пусть каждый из игроков обладает некоторым количеством голосов $k_i > 0$. Коалиция "выигрывает" , если сумма голосов игроков, входящих в эту коалицию, не меньше некоторого числа Q. Тогда характеристическая функция определяется следующим образом:

$$v(S) = \begin{cases} 1, & \text{если } \sum\limits_{i \in S} k_i \geqslant Q \ ; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Взвешенные мажоритарные игры возникают достаточно часто. Например, игроками могут быть акционеры некоторой компании, а число голосов соответствовать количеству акций. Или игроками могут являться фракции в Думе, а число голосов — численность соответствующей фракции.

Исходом кооперативной игры является *делёж*, т. е. окончательный доход (выигрыш) каждого из из игроков, получаемый им в результате перераспределения индивидуальных доходов. Отметим, что не всякое перераспределение доходов может быть названо дележом.

Определение. Вектор $d = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$, где d_i — окончательная доля, получаемая i-ым игроком, будем называть дележом, если он удовлетворяет следующим условиям:

1. Условие индивидуальной рациональности
$$d_i \geqslant v(\{i\}), \quad i \in N;$$
2. Условие коллективной рациональности
$$\sum_{i=1}^{n} d_i = v(N).$$

Содержательный смысл этих условий достаточно очевиден. Ни один из игроков не согласится вступать в какие-либо соглашения, если его доля будет меньше того, что он и сам себе может обеспечить, действуя самостоятельно. Условие () означает, что игроки должны распределять между собой максимально большой суммарный выигрыш, а согласно () это и будет $v(N)$.

Заметим, что из условия супераддитивности следует, что

$$v(N) \geqslant v(S) + v(N \setminus S) \geqslant \ldots \geqslant \sum_{i=1}^{n} v(\{i\}).$$

Определение. Кооперативную игру $\Gamma =< N, v(S) >$ будем называть *существенной*, если

$$v(N) > \sum_{i=1}^{n} v(\{i\}).$$

В противном случае, т. е. если

$$v(N) = \sum_{i=1}^{n} v(\{i\})$$

кооперативную игру будем называть *несущественной*.

В дальнейшем будем рассматривать только существенные игры, так как для несущественной кооперативной игры существует один единственный делёж, а именно $d_i = v(\{i\}),\ i \in N$. Содержательный смысл данного определения состоит в том, что целесообразно рассматривать только такие игры, где кооперация приносит реальный дополнительный доход. Для того, чтобы кооперативная игра была существенной необходимо и достаточно, чтобы хотя бы одно из неравенств () было строгим.

5.12 Принципы построения дележей.

Распределение и перераспределение доходов, по-видимому, является одной из центральных проблем функционирования и развития любого общества. Только через соответствующие механизмы могут быть реализованы такие понятия как "справедливость", "равенство", "свобода" и т. п. Поэтому на протяжении всего исторического периода существования и развития человечества столько внимания уделяется формированию, обоснованию и выбору принципов распределения доходов. Малейшие ошибки в решении этой проблемы способны привести не только к не желаемым , но даже и к катастрофическим социальным и экономическим последствиям. Так, например, вульгарно понимаемое равенство, как "всем поровну", и порождаемые им формы "уравниловки", вообще, не могут рассматриваться в качестве принципа распределения, так как не гарантируют выполнения условия индивидуальной рациональности. В результате этого, подобные механизмы распределения, будучи навязаны обществу под видом "дележа", на самом деле могут выступать как те или иные формы грабежа.

Рассмотрим некоторые принципы построения дележей, которые допускают содержательную интерпретацию и могут быть использованы для решения конкретных прикладных задач. Так как для выполнения условия коллективной рациональности необходимо выполнение неравенства (), то любой делёж можно представить в виде

$$d_i = v(\{i\}) + \alpha_i,\ \text{где}\ \alpha_i \geqslant 0\ \ \text{и}\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = v(N) - \sum_{i=1}^{n} v(\{i\}).$$

Таким образом, построение дележа сводится к распределению дополнительного дохода, получаемого в результате кооперации.

1. Принцип арифметической справедливости.

Будем считать игроков "равными" в том смысле, что каждый из них имеет равное право на дополнительную часть дохода, полученного в результате кооперации, т. е. $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n$. Тогда окончательная доля каждого из игроков будет иметь следующий вид:

$$d_i = v(\{i\}) + \frac{1}{n}\,[v(N) - \sum_{i=1}^{n} v(\{i\})].$$

Данная формула сильно напоминает формулу распределения доходов при социализме, где первое слагаемое отражало долю, получаемую из фонда заработной платы, т. е. "по труду", в зависимости от квалификации, стажа и т. п. А второе слагаемое — долю, получаемую из фонда общественного потребления, куда входили бесплатное образование, бесплатное медицинское обслуживание и т. д.

2. Принцип геометрической справедливости.

В некоторых случаях целесообразно считать, что каждый из игроков имеет право на долю в дополнительном доходе, пропорциональную его индивидуальному вкладу. Так как характеристическая форма кооперативной игры доставляет минимальную информацию об игроках, можно предположить, что индивидуальный вклад каждого из игроков пропорционален соответствующему значению характеристической функции — $v(\{i\})$. В этом случае принцип справедливости требует, чтобы $\alpha_i = c \cdot v(\{i\})$. Исходя из условия (), нетрудно показать, что

$$c = \frac{v(N) - \sum\limits_{i=1}^{n} v(\{i\})}{\sum\limits_{i=1}^{n} v(\{i\})} = \frac{v(N)}{\sum\limits_{i=1}^{n} v(\{i\})} - 1.$$

Тогда окончательная доля каждого из игроков будет равна

$$d_i = v(\{i\}) + v(\{i\}) \Big[\frac{v(N)}{\sum\limits_{i=1}^{n} v(\{i\})} - 1 \Big] = v(\{i\}) \cdot \frac{v(N)}{\sum\limits_{i=1}^{n} v(\{i\})}\,,\ i \subset N.$$

Примером использования данной формулы может служить распределение дивидендов, когда каждый игрок, в данном случае акционер, получает доход пропорциональный числу акций. Однако не всегда использование этой формулы бесспорно. Так, например, периодически возникают дискуссии о "северных надбавках", которые пропорциональны основному окладу и тем самым игнорируют тот факт, что условия проживания для всех работающих за полярным кругом одинаковы.

3. Вектор Шепли.

Условие коллективной рациональности в неявном виде предполагает необходимость объединения всех игроков в одну общую коалицию. Рассмотрим этот процесс создания общей коалиции как некоторый динамический процесс, где на каждом шаге происходит объединение уже возникшей коалиции S с некоторым игроком i. Пусть доля игрока i будет при этом равна

$$d_i = v(S \cup \{i\}) - v(S)$$

, т. е. игрок, входящий в коалицию, получает весь дополнительный доход от кооперации с этой коалицией. В силу свойства супераддитивности, если положить $T = \{i\}$, получаем, что

$$v(S \cup \{i\}) \geqslant v(S) + v(\{i\}) \text{ или } d_i = v(S \cup \{i\}) - v(S) \geqslant v(\{i\}),$$

т. е. условие индивидуальной рациональности будет всегда выполнено.

Нетрудно убедиться, что и условие коллективной рациональности также будет выполнено, так как весь дополнительный доход обязательно кому-либо распределяется. Таким образом, когда все игроки объединятся в общую коалицию, мы получим некоторый делёж. Сам по себе такой делёж не очень хороший, так как доля каждого игрока будет существенно зависеть от коалиции, с которой он объединится. Так, например, невыгодно быть начинающим, поскольку в этом случае игроку формально приходится объединяться с пустой коалицией и его доля будет равна его гарантированному доходу (выигрышу)

$$d_1 = v(\emptyset \cup \{i_1\}) - v(\emptyset) = v(\{i_1\}).$$

Поэтому предлагается рассмотреть все дележи, которые возникают в результате перестановки игроков при последовательном их объединении в одну общую коалицию и в качестве окончательного взять среднее арифметическое всех этих дележей. Нетрудно убедиться, что число возможных перестановок будет равно $n!$ и число последовательностей, в которых i-ый игрок объединяется с коалицией S, будет равно $|S|! \cdot (n - |S| - 1)!$. Тогда среднее арифметическое доли i-го игрока может быть найдено по следующей формуле

$$d_i = \frac{1}{n!} \sum_{S \not\ni i} |S|! \cdot (n - |S| - 1)! \cdot [v(S \cup \{i\}) - v(S)].$$

Найдя по формуле () долю каждого игрока, мы получим делёж, который называется *вектором Шепли.*

Полученному результату можно дать и вероятностную интерпретацию. Пусть игроки случайным образом образуют некоторую последовательность, согласно которой происходит образование общей коалиции, а долю каждого игрока определим по формуле () . Если теперь предположим, что все последовательности игроков равновероятны, то вектор Шепли будет задавать для каждого из игроков математическое ожидание его доли.

4. Вектор Банзафа.

При вероятностной интерпретации вектора Шепли использовалось классическое определение вероятности, т.е считалось, что все последовательности равновероятны. Отказ от требования равновероятности позволяет обобщить полученную формулу, используя произвольные вероятностные распределения.

Определение. Ожидаемой долей игрока i будем называть величину

$$d_i = \sum_{S \not\ni i} p_i(S) \cdot [v(S \cup \{i\}) - v(S)],$$

где $\{p_i(S)\}$ — некоторое вероятностное распределение на множестве коалиций $S \subset N$, не содержащих игрока i.

Объявим теперь равновероятными событиями реализации любых коалиций $S \subset N$, с которыми может объединяться отдельный игрок. Так как существует всего 2^{n-1} подмножеств множества N, не содержащих i-го игрока, то

$$\forall\ S \subset N \text{ и } i \notin S\ :\ p_i(S) = 1/2^{n-1}.$$

Определение. Делёж, компонентами которого являются ожидаемые доли

$$d_i = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{S \not\ni i} \left[v(S \cup \{i\}) - v(S)\right],$$

будем называть вектором Банзафа.

5. Лексиминный принцип.

Рассмотрим произвольный делёж $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Упорядочим множество его компонент по возрастанию и получившийся вектор обозначим через $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$. Например, если $x = (5, 4, 8, 6)$, то $x^* = (4, 5, 6, 8)$.

Определение. Будем говорить, что делёж x предпочтительнее дележа y в смысле лексиминного порядка, если существует такое целое число k $(0 \leqslant k \leqslant n-1)$, для которого выполнены следующие условия:

$$\begin{cases} x_i^* = y_i^*, & \text{если } 1 \leqslant i \leqslant k; \\ x_{k+1}^* > y_{k+1}^*. \end{cases}$$

Данное определение задаёт линейный предпорядок на замкнутом и ограниченном множестве дележей и тем самым гарантирует существование максимального элемента, который (или один из которых) может быть выбран в качестве исхода кооперативной игры, соответствующего лексиминнуму принципу.

В содержательном плане лексиминный принцип позволяет выбрать делёж наиболее близкий к равномерному и может использоваться в тех случаях, когда распределение "всем поровну" не является дележем.

Поскольку каждый из рассмотренных принципов определяет, как правило, единственный исход игры, то соответствующий делёж (или подмножество дележей) будем называть *решением кооперативной игры.* В связи с этим, рассмотренные способы построения дележей принято называть *принципами оптимальности.* Таким образом решение кооперативной игры сводится к выбору игроками некоторого принципа оптимальности и построению дележа, соответствующего этому принципу.

В качестве примеров рассмотрим решения некоторых кооперативных игр.

1. Игра "Капиталист и рабочий".

$$v(\{K\}) = v(\{P\}) = 0, \; v(\{K, P\}) = 10.$$

Характеристическая функция симметрична относительно игроков, поэтому, вне зависимости от выбранного принципа оптимальности, решением игры будет делёж $d = (5, 5)$.

2. Игра "Капиталист и два рабочих". Добавим ещё одного рабочего, сохранив все условия предыдущей задачи.

$$v(\{K\}) = v(\{P_1\}) = v(\{P_2\}) = 0, \; v(\{K, P_1\}) = v(\{K, P_1\}) = 10,$$
$$v(\{P_1, P_2\}) = 0, \; v(\{K, P_1, P_2\}) = 16.$$

Так как производство без капитала невозможно (см.К-Д), то $v(\{P_1, P_2\}) = 0$ и игра перестаёт быть симметричной. В силу закона падающей эффективности удвоение рабочей силы не приведёт к удвоению дохода и поэтому выбрано значение $v(\{K, P_1, P_2\}) = 16 < 20$.

Арифметический и лексиминный принципы оптимальности предоставят каждому из игроков равные доли, т. е. в этих случаях $d = (16/3, 16/3, 16/3)$. Больший интерес представляет вектор Шепли, так как при построении дележа он использует всю информацию о значениях характеристической функции. Для нахождения вектора Шепли построим таблицу, где в первом столбце укажем всевозможные последовательности игроков при образовании общей коалиции, а в остальных столбцах — соответствующие доли, получаемые игроками в зависимости от занимаемого места в соответствующей последовательности.

Последовательности	K	P_1	P_2
KP_1P_2	0	10	6
KP_1P_2	0	6	10
P_1KP_2	10	0	6
P_1P_2K	16	0	0
P_2KP_1	10	6	0
P_2P_1K	16	0	0

Найдём теперь средний доход (выигрыш) каждого из игроков и тем самым определим вектор Шепли: $(8\frac{2}{3}, 3\frac{2}{3}, 3\frac{2}{3})$. Естественно возникает вопрос о том, насколько *справедливо* данное распределение. Ответ на этот вопрос даёт следующий пример.

3. Игра "капиталист и профсоюз". Предположим теперь, что рассматриваемые два рабочих образовали профсоюз и выступают на рынке труда как один игрок, которого обозначим через П. Тогда игра "капиталист и два рабочих" превращается в игру "капиталист и профсоюз", характеристическая функция которой имеет следующий вид:

$$v(\{K\}) = v(\{\Pi\}) = 0,\ v(\{K, \Pi\}) = 16.$$

Но эта игра оказывается уже симметричной и, следовательно, как и в игре "капиталист и рабочий" игроки получат равные доли, т.е. $d_K = 8$ и $d_\Pi = 8$. Поскольку рабочих мы различаем только по номерам, естественно предположить, что они свой доход разделят поровну и тогда окончательный делёж будет иметь следующий вид: $(8, 4, 4)$. Сравнение этого дележа с вектором Шепли позволяет сделать вывод о том, что наличие конкуренции между рабочими приводит к уменьшению их доходов, после чего говорить о справедливости распределения по вектору Шепли уже не приходится.

5.13 Устойчивость коалиционных соглашений.

Для реализации решения кооперативной игры необходимо добиться согласия всех игроков, без чего невозможно создание общей коалиции. Предположим, что игрокам удалось договориться о принципе оптимальности и тем самым определить некоторое подмножество возможных дележей. Однако этого ещё не достаточно, чтобы тот или иной делёж был реализован.

Определение. Будем говорить, что делёж x доминирует делёж y по коалиции S и обозначать $x \succ_S y$, если выполняются следующие условия:

$$\begin{cases} \forall i \in S : x_i > y_i, \\ \sum_{i \in S} y_i < v(S). \end{cases}$$

Первое условие $\forall i \in S : x_i > y_i$ означает, что все игроки коалиции S предпочтут дележу y делёж x. Выполнение второго условия позволяет игрокам коалиции S выдвинуть *угрозу* выхода из общей коалиции, если остальные игроки будут настаивать на реализации дележа y. Эта угроза оказывается эффективной, так как коалиция S может гарантировать каждому из своих членов больше, чем полагается тому по дележу y, в частности величину

$$y_i + \frac{v(S) - \sum\limits_{k \in S} y_k}{\mid S \mid} > y_i.$$

Следовательно, в случае осуществления этой угрозы, в отличие от всех остальных участников игры, интересы игроков коалиции S не пострадают. Всё это заставляет отвергнуть делёж y как неудовлетворительный.

Отметим, что не всякая коалиция может осуществлять доминирование. Так коалиция не может состоять из одного игрока или объединять всех игроков. Первое предположение $S = \{i\}$ приводит к выполнению условия $y_i < v(\{i\})$, что невозможно, так как в этом случае нарушается условие индивидуальной рациональности. Второе предположение $S = N$ приводит к нарушению условия коллективной рациональности:

$$\sum_{i=1}^{n} y_i < v(N).$$

Таким образом доминирование дележей могут осуществлять коалиции, для которых выполняются следующие условия:

$$2 \leqslant \mid S \mid \leqslant (n-1).$$

Определение. Будем говорить, что делёж x доминирует делёж y и обозначать $x \succ y$, если существует такая коалиция S, что $x \underset{S}{\succ} y$.

Естественно предположить, что некоторый делёж может быть реализован, если не найдётся ни одного дележа, который бы доминировал данный.
Определение. Множество недоминируемых дележей кооперативной игры $\Gamma =< N, v(S) >$ будем называть С-ядром этой игры.

Теорема 26. *Для того, чтобы делёж $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ принадлежал С-ядру, необходимо и достаточно, чтобы для всех коалиций $S \subset N$ выполнялось следующее условие:*

$$\forall S \subset N : \sum_{i \in S} x_i \geqslant v(S),$$

которое принято называть условием коалиционной рациональности.

К сожалению, для большинства содержательных игр С-ядро оказывается пустым, что не позволяет игрокам прийти к какому-либо соглашению или делает принимаемые решения неустойчивыми. В качестве примера рассмотрим игру "Третий лишний"

$$v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0,$$
$$v(\{1,2\}) = v(\{1,3\}) = v(\{2,3\}) = 1,$$
$$v(\{1,2,3\}) = 1.$$

Симметричность данной игры не даёт преимущества ни одному из игроков, что делает естественным рассмотрение дележа $x = (1/3, 1/3, 1/3)$. Но этот делёж оказывается доминируемым, поскольку объединившись, любые два игрока могут получить больше. В частности, делёж $y = (1/2, 1/2, 0)$ доминирует делёж $x = (1/3, 1/3, 1/3)$ по коалиции $\{1, 2\}$, так как

$$\begin{cases} y_1 = 1/2 > 1/3 = x_1, \ y_2 = 1/2 > 1/3 = x_2, \\ x_1 + x_2 = 1/3 + 1/3 = 2/3 < 1 = v(\{1, 2\}). \end{cases}$$

Но у третьего игрока, оказавшегося "лишним", есть возможность, подкупив одного из игроков, образовать коалицию и отвергнуть делёж y. Так, например, делёж $z = (0, 3/4, 1/4)$ доминирует делёж y по коалиции $\{2, 3\}$ поскольку

$$\begin{cases} z_2 = 3/4 > 1/2 = y_2, \ y_3 = 1/4 > 0 = y_2, \\ y_2 + y_3 = 1/2 + 0 = 1/2 < 1 = v(\{2, 3\}). \end{cases}$$

Однако и этот делёж оказывается доминируемым, скажем, дележом $u = (1/2, 0, 1/2)$ по коалиции $\{1, 3\}$. Круг замкнулся, делёж u ничем не отличается от дележа y и следовательно доминирующие коалиции могут образовываться и разваливаться сколь угодно долго.

Любые другие попытки построить недоминируемый делёж также обречены на неудачу, так как C-ядро в рассматриваемой игре пусто. Убедимся в этом, для чего выпишем все условия, которым должны удовлетворять элементы C-ядра:

1. $x_1 \geqslant v(\{1\})$	условие индивидуальной рациональности
$x_2 \geqslant v(\{2\})$	
$x_3 \geqslant v(\{3\})$	
2. $x_1 + x_2 + x_3 = 1$	условие коллективной рациональности
3. $x_1 + x_2 \geqslant 1$	условие коалиционной рациональности
$x_1 + x_3 \geqslant 1$	
$x_2 + x_3 \geqslant 1$	

Сложив неравенства условия коалиционной рациональности, получим

$$2(x_1 + x_2 + x_3) \geqslant 3.$$

Учтя условие коллективной рациональности приходим к противоречию:

$$2 \geqslant 3,$$

следовательно рассмотренная система ограничений несовместна и C-ядро игры "Третий лишний" — пусто.

Определённый интерес представляют классы кооперативных игр, для которых C-ядро не пусто. Для описания этих классов полезным оказывается понятие эквивалентности.

Определение. Две игры $\Gamma =< N, v(S) >$ и $\Gamma' =< N, v'(S) >$ будем называть эквивалентными, если существуют некоторое положительное число $k > 0$ и $n =| N |$ действительных чисел $\{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$ таких, что для любой коалиции $S \subset N$ выполняется равенство

$$v'(S) = k \cdot v(S) + \sum_{i \in S} c_i.$$

Нетрудно убедиться, что определённое таким образом понятие действительно является отношением эквивалентности, т. е. обладает свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности и тогда, согласно теореме (см.), множество кооперативных игр оказывается разбито на множество непересекающихся классов. Укажем для каждого такого класса некоторого представителя, имеющего наиболее простой вид.
Определение. Будем говорить, что кооперативная игра $\Gamma =< N, v(S) >$ задана в $(0,1)$-редуцированной форме, если

$$v(N) = 1 \text{ и } v(\{i\}) = 0 \text{ для всех } i \in N.$$

Теорема 27. *Любая существенная кооперативная игра эквивалентна одной и только одной игре в $(0,1)$-редуцированной форме.*

Заметим, что для игр, заданных в $(0,1)$-редуцированной форме, множество дележей M задаётся следующим образом:

$$M = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid (\forall i : x_i \geqslant 0) \wedge (\sum_{i=1}^{n} x_i = 1)\}.$$

Геометрически множество M представляет собой *n-мерный симплекс*, т. е. правильный многогранник, вершинами которого являются точки

$$(1,0,0,\ldots,0), (0,1,0,\ldots,0), \ldots, (0,0,\ldots,0,1).$$

В частности, для игр трёх лиц множеством дележей оказывается правильный треугольник.

Определение. Кооперативную игру $\Gamma =< N, v(S) >$, заданную в $(0,1)$-редуцированной форме, будем называть *простой*, если для всех коалиций $S \subset N$ либо $v(S) = 0$, либо $v(S) = 1$. При этом коалицию S будем называть *выигрывающей*, если $v(S) = 1$. Кооперативную игру общего вида будем называть *простой*, если её $(0,1)$-редуцированная форма является простой игрой.

Так, например, "Правило большинства", "Взвешенные мажоритарные игры" и "Третий лишний" являются простыми играми.

Определение. Кооперативную игру $\Gamma =< N, v(S) >$ будем называть *симметричной*, если $v(S)$ зависит только от числа игроков в коалиции S, т. е. характеристическую функцию игры можно представить в следующем виде:

$$v(S) = f(\mid S \mid).$$

Примерами симметричных игр являются "капиталист и рабочий", "третий лишний"и "взвешенная мажоритарная игра".

Опишем теперь классы кооперативных игр, для которых существуют устойчивые дележи, т. е. С-ядро которых не пусто.

1. **Множество кооперативных игр двух лиц.** Так как при $n = 2$ условие (см.)не может быть выполнено, то в рассматриваемых играх доминирование одним дележом другого просто невозможно. Следовательно, в играх двух лиц множество всех дележей и С-ядро совпадают. Именно этим объясняется популярность двусторонних соглашений, так как при наличии доброй воли всегда найдётся компромиссное решение, выгодное каждой из договаривающихся сторон.

2. **Подмножество кооперативных игр трёх лиц.**

   Теорема 28. *Для существования в кооперативной игре трёх лиц C-ядра необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее условие:*
   $$v(\{i_1, i_2\}) + v(\{i_1, i_3\}) + v(\{i_2, i_3\}) \leqslant 2v(\{i_1, i_2, i_3\})$$

3. **Множество выпуклых игр.**

   Определение. Кооперативную игру $\Gamma =< N, v(S) >$ будем называть *выпуклой*, если её характеристическая функция удовлетворяет следующему условию:

   $$v(S \cup T) + v(S \cap T) \geqslant v(S) + v(T) \text{ для всех коалиций } S, T \subset N.$$

   Если предположить, что коалиции S и T не пересекаются , то из условия выпуклости получим условие супераддитивности. Обратное утверждение неверно, т. е. из условия супераддитивности не следует условия выпуклости.

   Теорема 29 (Шепли)**.** *C-ядро выпуклой кооперативной игры не пусто и содержит вектор Шепли.*

4. **"Диктаторские" игры.**
   Определение. Пусть рассматривается простая кооперативная игра. Игрока $i_0 \in N$ будем называть *"диктатором"*, если из условия $v(S) = 1$ следует, что игрок $i_0 \in S$, т. е. без этого игрока невозможно создать ни одной выигрывающей коалиции. Соответственно игрока j_0 будем называть *"болваном"*, если для любой коалиции $S \subset N$ $v(S) = v(S \setminus \{j_0\})$, т. е. этот игрок не способен сделать выигрывающей ни одну из коалиций.

   Теорема 30. *Необходимым и достаточным условием существования в простой кооперативной игре не пустого C-ядра является наличие среди игроков этой игры хотя бы одного "диктатора".*

5. **Игры со "слабыми" коалициями.** В ходе создания коалиций каждый из игроков естественно предпочитает войти в такую коалицию, которая способна обеспечить ему наибольший выигрыш. Так как заранее не известен принцип оптимальности, который предпочтут игроки образованной коалиции, то приходится ориентироваться на пропорциональное распределение, т. е. во сколько раз коалиция способна увеличить индивидуальный выигрыш каждого игрока, вошедшего в в эту коалицию. Соответствующий коэффициент, назовём его *силой* коалиции и обозначим через α_S, определим следующим образом:

   $$\alpha_S = v(S) \Bigg/ \sum_{i \in S} v(\{i\}) \ .$$

   Теорема 31. *Если в кооперативной игре любая коалиция не сильнее общей, т. е.*
   $$\forall\ S \subset N : \alpha_S \leqslant \alpha_N,$$
   то C-ядро не пусто.

Отметим, что для симметричных игр сила коалиции определяется следующим образом:

$$\alpha_S = \frac{f(\{S\})}{\mid S \mid f(1)}.$$

Тогда для симметричных игр условие существования С-ядра примет следующий вид:

$$\forall\ S \subset N : \frac{f(\{S\})}{\mid S \mid f(1)} \leqslant \frac{f(\{N\})}{\mid N \mid f(1)} \text{ или } \frac{f(\{S\})}{\mid S \mid} \leqslant \frac{f(\{N\})}{\mid N \mid}.$$

Выделим также классы кооперативных игр, для которых С-ядро пусто. **Определение.** Кооперативную игру будем называть игрой *с постоянной суммой*, если для любой коалиции $S \subset N$ выполняется следующее условие:

$$v(S) + v(N \setminus S) = v(N).$$

Теорема 32. *В кооперативной игре с постоянной суммой С-ядро всегда пусто.*

5.14 Динамические кооперативные игры.

Отсутствие в кооперативной игре С-ядра делает невозможным создание общей коалиции, но не препятствует реализации дележа. Так, например, достаточно очевидно, что в игре "третий лишний"переговоры о создании той или иной выигрывающей коалиции не могут продолжаться сколь угодно долго и следовательно, рано или поздно, будет реализован один из дележей $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$, $(1/2, 0, 1/2)$ или $(0, 1/2, 1/2)$. Таким образом, чтобы реализовалось некоторое решение необходимо в правила игры ввести некоторые дополнения, которые бы позволили зафиксировать процедуру образования промежуточных коалиций, а также правила образования коалиционных конфигураций.

Для определённости будем считать, что в рассматриваемой кооперативной игре зафиксирован некоторый принцип оптимальности $H(i, S)$, который указывает каким образом распределяется гарантированный доход коалиции между игроками, составляющими эту коалицию. Естественно, доли $x_i = H(i, S)$, получаемые игроками коалиции S, будут удовлетворять следующим условиям:

1. $x_i \geqslant v(\{i\})$ (условие индивидуальной рациональности);
2. $\sum\limits_{i \in S} x_i = v(S)$ (условие локальной коллективной рациональности).

Пусть имеются две непересекающиеся коалиции S и T. В силу свойства супераддитивности объединение этих коалиций всегда выгодно, так как позволяет получить дополнительный доход. Однако, из–за того, что принцип оптимальности фиксирован, могут возникнуть проблемы с распределением этого дополнительного дохода. Так, в частности, может оказаться, что

$$\sum_{i \in S} H(i, S) = v(S) > \sum_{i \in S} H(i, S \cup T)$$

и следовательно весьма сомнительно, чтобы игроки коалиции S добровольно согласились бы на объединение. В качестве примера можно вспомнить компанию по укрупнению деревень и колхозов, когда старались объединить передовое и отстающее хозяйства в одно общее. Однако, когда объединение оказывается невыгодным для игроков одной из коалицией, то можно ограничиться соглашением между коалициями только о совместных действиях, при которых коалиции делят совместный доход пропорционально своим возможностям. В этом случае совместные действия принесут уже дополнительный доход каждому из игроков.

Поэтому будем считать, что если интересы ни одного из игроков не пострадают, т. е.

$$\forall i \in S \cup T : x_i' = H(i, S \cup T) \geqslant x_i, \text{ где } x_i = \begin{cases} H(i,S), & \text{если } i \in S; \\ H(i,T), & \text{если } i \in T. \end{cases},$$

то будет происходить *слияние* двух коалиций S и T. В противном случае коалиции образуют *союз*, в результате которого каждый из игроков получит следующую долю :

$$x_i' = \frac{v(S \cup T)}{v(S) + v(T)} \cdot x_i, \text{ где } x_i = \begin{cases} H(i,S), & \text{если } i \in S; \\ H(i,T), & \text{если } i \in T. \end{cases}$$

Примерами подобных союзов могут служить картели, синдикаты и монополии.

Определение различных форм сотрудничества позволяет рассматривать решение кооперативной игры в виде динамического процесса, результатом которого будет создание *коалиционной структуры.* Пусть имеется кооперативная игра $\Gamma =< N, v(S) >$ с фиксированным правилом распределения доходов $H(i,S)$ внутри образующихся коалиций, конечным множеством игроков $\mid N \mid= n$ и пустым С-ядром. На первом этапе происходит образование коалиций по следующему правилу. Игроки сначала формируют из своего состава наиболее *сильную* коалицию, исходя из решения следующей задачи оптимизации:

$$\max_{S \subset N} \frac{v(S)}{\sum\limits_{i \in S} v(\{i\})} = \max_{S \subset N} \alpha_S = \alpha_{S_1}.$$

Заметим, что $S_1 \neq N$. В противном случае образуется общая коалиция N, что противоречит условию пустоты С-ядра. Игроки, не вошедшие в коалицию S_1, из своего состава снова формируют наиболее *сильную* коалицию, решая задачу:

$$\max_{S \subset N \setminus S_1} \alpha_S = \alpha_{S_2}.$$

Оставшиеся игроки, не вошедшие в сформированные коалиции, продолжают создавать новые, пока множество игроков оказывается не исчерпанным. В результате осуществления первого этапа получаем разбиение множества игроков на непересекающиеся коалиции

$$N = S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_{m_1}, \text{ где } 2 \leqslant m_1 < n.$$

Обозначим через $N_1 = \{S_1, S_2, \ldots, S_{m_1}\}$ множество коалиций, образовавшихся на первом этапе.

На втором этапе начинается формирование *коалиционной структуры*. Так как *слияние* уже невозможно (в противном случае оно бы произошло на первом этпае), то коалиции начинают последовательно создавать *союзы*. В первую очередь образуется наиболее сильный союз, исходя из решения следующей задачи оптимизации:

$$\max_{T \subset N_1} \frac{v(T)}{\sum\limits_{S_k \in T} v(S_k)} = \max_{T \subset N_1} \beta_T = \beta_{T_1}.$$

Оставшиеся коалиции, решая задачу

$$\max_{T \subset N_1 \setminus T_1} \beta_T = \beta_{T_2},$$

снова образуют некоторый союз. Этот процесс продолжается до тех пор, пока не будет получено разбиение множества коалиций N_1 на непересекающиеся подмножества союзов, которое обозначим через $N_2 = \{T_1, T_2, \ldots, T_{m_2}\}$, где $1 \leqslant m_2 < m_1$. В содержательном плане, второй этап повторяет первый, но уже для кооперативной игры $\Gamma =< N_1, v(T) >$, в которой игроками являются коалиции, сформированные на первом этапе.

Рассмотрев на третьем этапе кооперативную игру $\Gamma =< N_2, v(Q) >$, где игроками являются союзы $Q \subset N_2$, аналогичным образом, решая задачи максимизации

$$\max_{Q \subset N_2} \frac{v(Q)}{\sum\limits_{T_k \in Q} v(T_k)} = \max_{Q \subset N_2} \gamma_Q = \gamma_{Q_1} \quad \text{и т. д.},$$

построим новые структуры отношений, в которые вступят коалиции.

Продолжая эту процедуру, мы рано или поздно, получим коалиционную структуру, объединяющую все коалиции и тем самым позволяющую реализовать делёж. При этом, если i-ый игрок на первом этапе войдёт в коалицию S, которая на втором этапе войдёт в союз T, который на третьем этапе войдёт в объединение Q и т. д., то окончательная доля этого игрока будет равна

$$x_i = \beta_T \gamma_Q \cdots H(i, S).$$

При осуществлении этой процедуры может возникнуть проблема связанная с тем, что некоторые из задач максимизации имеют несколько решений и тогда неясно, какие коалиции или союзы будут реализованы. В этом случае можно ввести дополнительные правила, которые позволили бы из множества решений выбирать единственное. В частности, этот выбор может быть реализован случайным образом. Смольяков Э.Р. предлагает рассматривать все варианты и в качестве решения кооперативной игры определяет всё множество возможных коалиционных структур.

Рассмотренная процедура образования коалиционной структуры и распределения доходов между коалициями позволяет раскрыть механизм дифференциации доходов в рыночной экономике. Для этого сравним доходы игроков при централизованной и рыночной системе управления экономикой считая, что в обоих случаях действует принцип распределения "по труду", но в одном случае глобально, а в другом локально. Тогда доля, получаемая игроком в централизованной экономике, не будет зависеть от коалиций, в которые он войдёт и будет равна $x_i = H(i, N) = \alpha_N \cdot v(\{i\})$. Доля, получаемая игроком в рыночной экономике будет уже зависеть от места, занимаемого данным игроком в коалиционной структуре и согласно будет равна

$$x_i = \alpha_S \beta_T \gamma_Q \cdots v(\{i\}).$$

Рассмотрим теперь доходы игроков, образовавших коалицию S_1. Так как $\alpha_{S_1} > \alpha_N$, то уже на первом этапе игроки коалиции S_1, хотя делёж ещё не реализован, получат больше, чем при окончательном дележе в централизованной экономике. Вхождение коалиции S_1 на последующих этапах в различные союзы каждый раз дополнительно увеличивает доходы игроков этой коалиции

$$\forall i \in S : x_i = \alpha_{S_1} \cdot \beta_T \cdot \gamma_Q \cdots v(\{i\}), \text{ так как } \beta_T > 1, \gamma_Q > 1, \ldots.$$

Таким образом в рыночной экономике доли игроков коалиции S_1 значительно возрастают. Однако и в той и в другой игре между игроками распределяется одна и та же сумма $v(N)$. Но тогда увеличение долей одних игроков автоматически приводит к снижению долей других игроков и как следствие к росту дифференциации доходов.

5.15 Дифференциальные игры.

Любые совместные действия отдельных субъектов предполагают наличие коллективного договора, который позволяет координировать усилия всех договаривающихся сторон для достижения общей цели и распределять получаемые доходы в зависимости от индивидуального вклада каждого. Часто добровольный характер подобного соглашения или отсутствие соответствующей законодательной базы не позволяют гарантировать выполнение каждым субъектом принятых на себя обязательств. Это приводит к тому, что договор нарушается, если это выгодно в какой-то момент времени хотя бы одному из участников. Таким образом, принятие соглашения ещё не гарантирует его выполнения и соответственно получения ожидаемых доходов.

Расширим понятие игры, включив в него временной промежуток $[t_0, T]$, на котором происходит процесс развития игры и игроки вынуждены уже принимать ряд последовательных решений в зависимости от изменяющихся состояний игры. Пусть динамика развития рассматриваемого процесса задается дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = f(x, t, u_1, u_2, \ldots, u_n),\ t \in [t_0, T], \tag{1}$$

с начальным условием $x(t_0) = x_0$, где $u_i \in U_i$ — управления выбираемые игроками в процессе игры; T — момент времени окончания игры.

Если в результате выбранных управлений реализуется траектория $x(t)$, то выигрыш каждого из игроков определяется следующей функцией:

$$K_i(t_0, T, x(t)) = \int\limits_{t_0}^{T} h_i(x(t))\, dt + H_i(x(T)), \tag{2}$$

где $\int\limits_{t_0}^{t} h_i(x(\tau))\,d\tau$ — *текущий выигрыш* отдельного игрока к моменту времени $t \in [t_0, T]$; $H_i(x(T))$ — *терминальный выигрыш*, получаемый игроком в момент окончания игры.

Так как заключаемые игроками соглашения не носят обязательный характер, то эту игру уже нельзя назвать кооперативной. Вместе с этим, возможность обмениваться доходами не позволяет данную игру рассматривать как бескоалиционную. Поэтому рассматриваемую игру будем называть просто *дифференциальной игрой n-лиц с фиксированной продолжительностью.*

Будем также считать, что потенциальные возможности различных коалиций в каждый момент времени задаются некоторой характеристической функцией $v(S, x(t))$, зависящей от реализуемой траектории. Поскольку существуют различные методы построения характеристической функции, укажем основные свойства, которыми она должна обладать:

1. $v(\emptyset, x(t)) = 0$;

2. $v(S \cup P, x(t)) \geqslant v(S, x(t)) + v(P, x(t))$, если$S \cap P = \emptyset$;

3. $v(N, x(t)) = \max\limits_{x(\tau)} \sum\limits_{i=1}^{n} K_i(t, T, x(\tau)) = \sum\limits_{i=1}^{n} K_i(t, T, x^*(\tau))$,
   где $x^*(\tau), t \leqslant \tau \leqslant T$ — оптимальная траектория игры, вдоль которой суммарный выигрыш игроков максимален.

Как и раньше, будем считать, что значение $v(S, x(t))$— это гарантированный доход (выигрыш) коалиции S.

Поскольку реализация оптимальной траектории игры требует согласованных действий всех игроков, но при этом интересы каждого из них будут удовлетворены в различной степени, то необходимым условием общего согласия становится перераспределение доходов, реализуемого в виде дележа $d = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$, где d_i — окончательный доход отдельного игрока, удовлетворяющий следующим условиям:

1. Условие индивидуальной рациональности
   $d_i \geqslant v(i, x_0)$, $i = 1, 2, \ldots, n$;

2. Условие коллективной рациональности
   $\sum\limits_{i=1}^{n} d_i = v(N, x_0)$.

Будем считать, что дележ d однозначно определяется некоторым принципом оптимальности, признаваемым всеми игроками. Реализация дележа (перераспределение доходов) осуществляется по ходу игры путем выплаты игроками *побочных платежей.*

Определение.Вектор-функцию $\mu(t)$ будем называть *побочными платежами*, если она обладает следующими свойствами:

1. $\mu_i(t_0) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$;

2. $\sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i(t) = 0$, $t \in [t_0, T]$;

3. $\mu_i(T) = d_i - H_i(x^*(T)) - \int\limits_{t_0}^{T} h_i(x^*(t))\,dt,$

где $\mu_i(t)$ — размер выплат отдельному игроку к моменту времени $t \in [t_0, T]$ остальными участниками игры (или наоборот, если значение функции оказывается отрицательным) .

Будем предполагать, что для осуществления побочных платежей каждый из игроков обладает определённым количеством q_i некоторого ресурса, одинаково полезного для всех игроков. Побочные платежи $\mu(t)$ назовём *реализуемыми*, если каждый из игроков в состоянии их осуществить, т. е.

$$q_i + \mu_i(t) \geqslant 0 \text{ для всех значений } t \in [t_0, T]\ . \tag{4}$$

Если предположить трансферабельность текущих доходов, то условие (4) можно заменить более слабым:

$$\int\limits_{t_0}^{t} h_i(x^*(\tau))\,d\tau + q_i + \mu_i(t) \geqslant 0. \tag{5}$$

Определённую таким образом дифференциальную игру n-лиц обозначим через $\Gamma(x_0, T)$. Под решением игры $\Gamma(x_0, T)$ будем понимать *коллективное соглашение*, содержащее в себе оптимальную траекторию, окончательный делёж и реализуемые побочные платежи. В дальнейшем *коллективное соглашение* будем задавать в виде тройки $< x^*(t), d, \mu(t) >$, содержащей все перечисленные элементы.

Для анализа устойчивости коллективного соглашения, наряду с игрой $\Gamma(x_0, T)$, рассмотрим порождаемые ею подыгры $\Gamma(x^*(t), T)$, которые отличаются от исходной игры только начальными условиями и продолжительностью. Обозначим через $v(S, x^*(t))$ и $d(t)$, соответственно, характеристическую функцию и дележ в подыгре $\Gamma(x^*(t), T)$, которые определяются по тем же правилам, что и в исходной игре. На основании уравнения Беллмана между значениями характеристических функций можно установить следующие соотношения:

$$v(N, x_0) = \int\limits_{t_0}^{t} \sum_{i=1}^{n} h_i(x^*(\tau))\,d\tau + v(N, x^*(t)) \tag{6}$$

$$\text{и} \qquad v(S, x^*(T)) = \sum_{i \in S} H_i(x^*(T)) = \sum_{i \in S} d_i(T). \tag{7}$$

Определение. Коллективное соглашение $< x^*(t), d, \mu(t) >$ будем называть *устойчивым*, если для любой коалиции $S \subset N$ в произвольный момент времени $t \in [t_0, T]$ выполняется неравенство:

$$v(S, x^*(t)) + \sum_{i \in S} \Big[\int\limits_{t_0}^{t} h_i(x^*(\tau))\,d\tau + \mu_i(t) \Big] \leqslant \sum_{i \in S} d_i\ . \tag{8}$$

Содержательный смысл этого неравенства состоит в том, что ни одной из коалиций невыгодно в ходе игры нарушить достигнутые соглашения и начать действовать самостоятельно. Хотя анализ неравенства (8) при неявно заданных значениях характеристических функций вызывает определенные трудности, однако можно сделать некоторые общие выводы. Рассмотрим частный случай, когда $t = t_0$. Тогда неравенство (8) примет следующий вид:

$$v(S, x_0) \leqslant \sum_{i \in S} d_i \ . \tag{9}$$

В теории кооперативных игр (см.)неравенство (9) известно как условие коалиционной рациональности и множество дележей, удовлетворяющих этому условию принято называть С-ядром игры. Следовательно можно сформулировать следующее утверждение

Теорема 33. *Необходимым условием устойчивости коллективного соглашения* $< x^*(t), d, \mu(t) >$ *является принадлежность вектора дележей* d *С-ядру игры* $\Gamma(x_0, T)$.

Рассмотрим другой частный случай. Для этого построим конкретную функцию побочных платежей $\mu^*(t)$ следующим образом:

$$\mu_i^*(t) = d_i - d_i(t) - \int\limits_{t_0}^{t} h_i(x^*(\tau))\, d\tau \ . \tag{10}$$

Соотношения (6) и (7) позволяют легко проверить, что вектор-функция $\mu^*(t)$ действительно является побочными платежами в игре $\Gamma(x_0, T)$. Непосредственная подстановка (10) в (8) приводит к выполнению условия коалиционной рациональности

$$v(S, x^*(t)) \leqslant \sum_{i \in S} d_i(t)$$

для подыгры $\Gamma(x^*(t), T)$

Теорема 34. *Если для всех значений* $t \in [t_0, T]$ *дележ* $d(t)$ *принадлежит ядру подыгры* $\Gamma(x^*(t), T)$ *и побочные платежи* $\mu^*(t)$ *реализуемы, то коллективное соглашение* $< x^*(t), d, \mu^*(t) >$ *является устойчивым.*

Если С-ядро игры $\Gamma(x_0, T)$ оказывается пустым, то побочные платежи $\mu^*(t)$ обеспечивают только равновесие по Нэшу (см.), т. е. на индивидуальном уровне ни одному из игроков невыгодно нарушать достигнутые соглашения.

К сожалению, большинство игр имеет пустое ядро и даже в тех случаях, когда оно не пусто, трудно расчитывать на то, что в нем содержится дележ, удовлетворяющий какому-либо разумному принципу оптимальности. Поэтому , как правило, коллективные соглашения , основанные исключительно на добровольной основе, оказываются неустойчивыми. Счастливое исключение представляют собой игры двух лиц, так как для них ядро всегда существует и совпадает со всем множеством дележей. Вопрос устойчивости соглашений в этих играх сводится к ресурсному обеспечению и отысканию реализуемых побочных платежей. Полученные результаты позволяют объяснить популярность и эффективность двусторонних соглашений как в семейных отношениях, так и при разрешении международных конфликтов. Многосторонние соглашения оказываются устойчивыми значительно реже и для их стабилизации оказывается необходимым создание соответствующих социальных институтов (право, суд, армия и т. п.).

Литература

[1] *Нефедов В. Н., Осипова В. А.* Курс дискретной математики: Учеб. пособие. — М.: Изд-во МАИ, 1992.

[2] *Петросян Л. А. и др.* Теория игр: Учеб. пособие для ун-тов:/Л. А. Петросян, Н. А. Зенкевич, У. А. Семина. — М.: Высш. шк., Книжный дом "Университет", 1998.

[3] *Воробьев Н. Н.* Теория игр для экономистов–кибернетиков. — М.: Наука, 1985.

[4] *Воробьев Н. Н.* Основы теории игр. Бескоалиционные игры . — М.: Наука, 1984.

[5] *Мулен Э.* Кооперативное принятие решений: Аксомы и модели. — М.: Мир, 1991.

[6] *Робертс Ф. С.* Дискретные математические модели с приложениями к социальным, биологическим и экологическим задачам . — М.: Наука,1986.

[7] *Вилкас Э. Й.* Оптимальность в играх и решениях. — М.: Наука, 1990.

[8] *Гиндинкин С. Г.* Алгебра логики в задачах. — М.: Наука, 1972.

[9] *Ожегов С. И.* Словарь русского языка. — М.: Рус. яз., 1988.

[10] *Клини С. К.* Математическая логика. — М.: Мир, 1973.

[11] *Пословицы русского народа*: Сборник В.Даля: В 3-х томах.— М.: Русская книга, 1993.

[12] *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и её приложения. В 2-х томах. — М.: Мир, 1984.

Оглавление