В.К.Кобушкин

МИНИМАЛЬНАЯ ФИЗИКА. Часть I

В книге излагается некоторый минимум знаний, который необходим для представления о физике в целом. Изложение проводится на уровне, доступном учащимся старших классов, знакомым с элементами векторной алгебры и высшей математики. Для тех, кто не знаком с ними, сделано дополнение.

Предполагается издание книги в двух частях со следующим содержанием: 1-я часть — механика, элементы теории силового поля, элементы теории относительности, колебания и волны и 2-я часть — элементы квантовой теории, кинетической теории вещества, термодинамика, элементы электрорадиотехники.

Книга предназначается в первую очередь для учащихся физико-математических школ, для которых пока нет учебника. Она будет также весьма полезна учителям физики, студентам первых курсов вузов и тем учащимся общеобразовательных школ, которые захотят получить более четкое представление об идеях физики, чем это пока возможно в обычной школе.

Содержание

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемая читателю книга представляет собой попытку изложить на современном уровне и в более или менее логической связи основные представления физики. Изложение весьма сжато и теоретизировано. Поэтому чтение книги будет, вероятно, непростой задачей и потребует от читателя определенного упорства.

Автор остановился на названии «Минимальная физика», желая этим подчеркнуть, что в книге дается некоторый минимум знаний, необходимый для представления о физике в целом.

Все изложенное в книге автор преподносил (частично на факультативных занятиях) учащимся физико-математических школ № 239 и № 45 г. Ленинграда в течение 1964—1969 гг. Опыт показал, что несмотря на сложность рассматриваемых вопросов, учащиеся вполне усваивали материал. Насыщенность математикой вызывает затруднения лишь в первые месяцы занятий, а в дальнейшем существенно облегчает и изложение материала и усвоение его учащимися. Следует отметить, что учащиеся ознакамливались с элементами векторной алгебры и высшей математики в процессе занятий и в большой мере «на пальцах», т. е. без всяких обоснований, а с «потребительским» уклоном, примерно на уровне, который дан в приложении к этой книге. Разумеется это делалось не из пренебрежения к математике, а из-за жесткого лимита времени — 6 часов в неделю это не так уж много.

В 1968/69 учебном году автор данной книги рискнул преподнести бо́льшую часть материала в обычной (не физико-математической) школе № 62 г. Ленинграда и, надо сказать, результаты оказались совсем неплохими — основной материал большинство учащихся усваивало. Автор склонен поэтому думать, что уровень преподавания физики в обычной школе вполне можно повысить в значительной мере по сравнению с уровнем существующего учебника. Это тем более похоже на правду, что опыт математиков показывает, что элементы векторной алгебры и понятия о производной и интеграле также вполне возможно излагать в современной школе. Использование же их позволяет излагать материал по физике и математике значительно строже.

Так или иначе, а попытки изложения физики в школе на современном уровне делать надо, не пугаясь трудностей, а преодолевая их и находя оптимальные выходы из сложных положений. Один из вариантов, одна из возможностей преподнесения физики в физико-математических (а в большой мере и в обычных) школах и излагается автором данной книги в довольно конспективной форме.

Книга будет полезной преподавателям физики, учащимся физико-математических школ, студентам первых курсов вузов (особенно педагогических), а также тем из учащихся обычных школ, которые не побоятся сделать значительное усилие для ознакомления с элементами математики.

Автор благодарен А. В. Тиморевой и Л. Т. Турбовичу за ряд критических замечаний, содействовавших улучшению книги.

ВВЕДЕНИЕ

1. Материя и ее движение. Материя есть объективная реальность, данная нам в ощущениях. Иными словами, материей мы называем все то, что, во-первых, существует независимо от нашего сознания и, во-вторых, воздействует на наши органы чувств при контакте с ними.

В настоящее время известны две формы материи: вещество (в твердом, жидком, газообразном, плазменном и сверхсжатом состояниях) и поле (гравитационное, действие которого существенно проявляется в мире больших тел; электромагнитное, проявляющееся и в макро- и микромире; специфические сильные и слабые поля, действующие заметным образом только в микромире между частицами, находящимися на малых расстояниях — 10^{-13} — 10^{-14} *см* — друг от друга).

Из вещества состоят все тела в природе. Поле — это такая форма материи, посредством которой осуществляются любые взаимодействия между любыми телами в природе.

В микромире, т. е. в самых глубинах материи, разница между веществом и полем стирается. Это подтверждает то, что материя едина, только свойства и проявления ее многообразны.

Движением материи называют любые ее изменения в пространстве и времени (перемещения планет, фотографирование, мышление и т. д.). Нельзя отрывать материю от пространства и времени, ибо всякий процесс протекает всегда где-то и когда-то. Понятия материя, пространство и время друг без друга смысла не имеют. Один из современных физиков, Хойл, специалист по теории пространства, времени и тяготения, на вопрос: «А что было бы, если б в мире ничего, кроме Солнца, не существовало?» ответил: «Солнце вобрало бы в себя все пространство и время». Это надо понимать так: если бы в мире было только Солнце, то материя существовала бы только на Солнце и процессы протекали бы только там; но поскольку вокруг Солнца материи не было бы, то и процессов никаких там протекать бы не могло, двигаться было бы нечему, а коль скоро так, то вне Солнца понятия пространства и времени не имели бы смысла. Действительно, понятие (пространство) связано с понятиями «ближе», «слева» и т. д. от такого-то тела; а этих тел-то и нет, — значит, нет и пространства в том смысле, в каком мы его понимаем. Аналогично и со временем: оно связано с понятиями «раньше», «позже», «одновременно» с каким-то событием, а событий-то и нет, поскольку нет тел, — значит, нет и времени в том смысле, в каком мы его понимаем.

Пространство не «мешок», а время не «река», как думали когда-то. Что такое пространство и время, каковы их свойства и структура — это фундаментальные и не решенные до конца проблемы. Но многие свойства пространства и времени нам уже известны, и, в частности, известно, что материя, пространство и время взаимосвязаны и взаимообусловлены — стоит измениться одному, как обязательно изменится другое. При этом «главным» объектом мира, определяющим свойства всех остальных объектов мира, является материя.

2. Предмет физики. Физика изучает простейшие виды движения материи, такие как механическое, волновое, атомно-молекулярное и т. д. Эти виды движения простейшие, но в то же время и фундаментальные, ибо они так или иначе входят в состав любых, сколь угодно сложных видов движения. Отсюда важность физики — основы современного естествознания. Физические методы исследования в силу их большой общности проникают в другие разделы естествознания (химию, биологию, астрономию и т. д.). Современные техника, индустрия, сельское хозяйство немыслимы в отрыве от физики.

3. Физика — наука опытная. Под этим надо понимать, что все установленные физические законы, все физические теории в основе своей почерпнуты из наблюдений и экспериментов. Результаты этих наблюдений и экспериментов обобщены и сформулированы в виде законов.

Даже «чистые теории», в основе которых казалось бы не лежит ни один опыт, где-то в своих истоках все же базируются (хотя бы косвенно) на опыте. Критерием же верности теории является опыт: если выводы теории не согласуются с опытом, противоречат ему, то теория явно не верна; если выводы теории согласуются с опытом, то это служит ее подтверждением, и нет нужды отвергать ее до, однако, тех пор, пока не появятся экспериментальные данные, не укладывающиеся в рамки этой теории; в этом случае теорию приходится пересматривать, а возможно и заменять новой, согласующейся со всеми известными к данному времени опытными данными.

4. Физика — наука точная. Это выражение надо понимать в том смысле, что физика имеет дело с количественными соотношениями, что языком физики является язык математических уравнений. И не надо это выражение понимать как утверждение того, что законы физики абсолютно точны. Как раз наоборот — все законы физики есть некоторое приближенное отображение действительных явлений, происходящих в мире.

5. Упрощение изучаемых объектов и явлений при их изучении — схематизация. В мире все явления настолько взаимосвязаны и взаимообусловлены, что отделить одно явление от другого в принципе нельзя. Изучать же всю совокупность явлений не представляется возможным. Компромиссная возможность изучения явлений заключается в том, что во всех явлениях есть существенные и несущественные характеристики, существенные и несущественные связи. Основой всякого изучения и является умение отделить существенное от несущественного в данных условиях и сконцентрировать внимание на главном. Например, нас интересует движение автомобиля. Совершенно очевидно, что характер движения автомобиля в данный момент, вообще говоря, зависит, например, от солнечной деятельности во времена Петра Великого, от настроения механика, осматривавшего автомобиль при выезде его на линию, от того, является ли день праздничным и т. д. Но почти наверняка мы не будем учитывать этих зависимостей, равно как и окраски автомобиля и числа гвоздей в подметке водителя. Будем ли мы учитывать качество бензина, мощность двигателя, размеры автомобиля, его массу, трение, профиль дороги? Очевидно, ответить на этот вопрос нельзя до тех пор, пока мы не поставим задачу более конкретно. Например, нас интересует, как скоро автомобиль пройдет большое расстояние по асфальту от A до B. Ясно, что здесь размеры автомобиля, наверное, роли не играют, и мы их учитывать не будем, равно как и прочность его бортов и т. д. Но может оказаться существенным качество бензина, мощность двигателя, профиль дороги и т. д. Если же нас заинтересует движение автомобиля по гаражу, то здесь весьма важным может оказаться как раз то, что мы не учитывали при его движении от A до B, например, размеры автомобиля и прочность его бортов.

При изучении уплотненного газа совершенно необходим учет сил взаимодействия между молекулами; при изучении же разряженного газа этими силами в определенном смысле пренебрегают.

Проведенная схематизация оправдывается совпадением сделанных из нее выводов с экспериментом. Нет возможности дать рецепт, по которому можно было бы отделять существенное от несущественного в любых явлениях. Эта возможность приходит постепенно с приобретением личного опыта исследователя. Но помнить о сказанном здесь надо всегда.

6. Определение и закон, их математическая формулировка. *Определением* физической величины называется соотношение, в котором подчеркивается основная ее особенность и дается способ определить ее численное значение. Например, определением среднего ускорения тела является равенство

$$\mathbf{a}_{\text{ср}} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}$$

и читается это равенство так: средним ускорением тела называется физическая величина, показывающая, как быстро меняется скорость тела с течением времени, и численно равная изменению скорости за единицу времени. Здесь сказано, что такое ускорение и дан способ его подсчета: надо изменение скорости разделить на то время, за которое оно произошло.

Еще примеры определений:

а. Средней силой тока называется количество электричества, прошедшего за единицу времени через сечение проводника:

$$J_{\text{ср}} = \frac{\Delta Q}{\Delta t}.$$

б. Давлением называется величина, численно равная силе, действующей перпендикулярно поверхности тела на единицу ее площади.

$$p = \frac{F_n}{S}.$$

Законом называется почерпнутый из **опытов** факт, справедливый для большого круга явлений. Например, закон Ома для однородного участка цепи читается так: сила тока в однородном участке цепи прямо пропорциональна напряжению на этом участке и обратно пропорциональна сопротивлению участка

$$I = \frac{-\Delta\varphi}{R} = \frac{U}{R}.$$

Например, второй закон Ньютона можно прочитать так: ускорение, сообщенное телу внешней силой, прямо пропорционально этой силе и обратно пропорционально массе тела:

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m}.$$

По виду все эти формулы очень похожи, но смысл их существенно различен: определение выражает в большей мере то, что нам захотелось выразить, закон — это соотношение, **навязанное** нам **опытом**, действительностью. Определение при желании можно было бы изменить; закон по своему произволу изменить нельзя, его можно уничтожить, когда **опыт** заставит нас это сделать и даст нам такую возможность.

7. Измерения и их точность. При любых исследованиях, наблюдениях, экспериментах приходится делать те или иные измерения. Очевидно, что точным никакое измерение быть не может, оно всегда является приближенным. Точность измерения определяется видом и качеством приборов, умением экспериментатора, характером измеряемого объекта и т. д. Кроме того, при всяком измерении в процессе самого измерения (прикладывание линейки, включение амперметра и т. д.) мы искажаем в большей или меньшей мере измеряемый объект (измеряя линейкой резинку, мы невольно ее деформируем; включая в цепь амперметр, мы изменяем сопротивление цепи, а значит, измеряем не тот ток, который протекал по цепи до включения прибора). Иногда эти искажения удается в какой-то мере уменьшить или учесть. Но в принципе невозможно избавиться совсем от ошибок при измерениях и от изменения состояния объекта. Это надо учитывать при исследованиях и вычислениях. Особенно существенным является учет этих искажений и ошибок при измерении в микромире, где объекты столь «нежны», что даже малейшее воздействие на них при измерениях существенным образом изменяет состояние объекта и не дает нам возможности получить полной и точной информации об объекте.

8. Векторы и скаляры. Это две основные категории физических величин, которыми пользуются в курсе общей физики. Математические операции над ними производятся по различным правилам. Является интересующая нас величина скаляром или вектором, определяется в конечном счете *опытом*, хотя при введении ее она заранее *определялась* так или иначе.

РАЗДЕЛ I. МЕХАНИКА

Механика — это тот раздел физики, который изучает простейший вид движения — перемещения тел или частей тела относительно друг друга. Совершенно очевидно, что *механическим движением* следует назвать изменение взаимного расположения разных тел или частей одного и того же тела с течением времени в пространстве. Поскольку каждое тело в природе меняет свое положение по отношению к одним телам и не меняет его по отношению к другим, то можно сказать, что каждое тело движется по отношению к одним телам и не движется по отношению к другим, т. е. механическое движение относительно. Поэтому при изучении и описании механических движений каких-либо тел надо указывать, по отношению к каким телам мы это движение описываем, на каких телах мы установили (или могли бы установить хотя бы мысленно) наши измерительные приборы, т. е. какое тело мы условно считаем неподвижным или, как говорят, с каким телом мы связали систему отсчета. Вопрос о выборе систем отсчета мы рассмотрим ниже.

Изучить механическое движение какого-либо тела и описать его — значит, уметь установить и дать в математической формулировке зависимость положения тела от времени в выбранной системе отсчета.

В зависимости от того интересуют или не интересуют нас причины изменения движения тела, механику можно условно разделить на две части: кинематику — формальную часть механики и динамику — ее причинную часть.

§ 1. Кинематика произвольного движения материальной точки

Материальной точкой в физике называют тело, размеры, форма и внутренняя структура которого в данной задаче несущественны. Например, при взаимном движении Земли и Солнца их размеры мало сказываются на характере их движения, и эти тела в данном случае можно считать материальными точками.

Если же нас интересует вращение Земли вокруг оси, приливы и отливы в ее водных бассейнах, то считать Землю материальной точкой нельзя. Часто тела считают материальными точками (или малыми телами), если линейные размеры тел малы по сравнению с расстояниями между ними, а вращение тел вокруг осей, проведенных через них, нас не интересует. Например, при подсчете сил электрического взаимодействия двух заряженных кубиков их можно считать точечными телами (материальными точками), если они очень далеки друг от друга, и необходимо учитывать их размеры и ориентацию при расстояниях между ними, сравнимых с ребрами кубиков. Эти кубики можно считать материальными точками, если мы интересуемся их поступательным движением, и нельзя, если мы изучаем различные повороты кубиков.

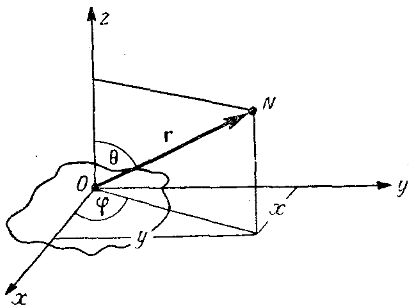

Рис. 1

Кинематика материальной точки описывает движение материальной точки (малого тела) формально, не вдаваясь в те причины, которыми обусловлен характер данного движения. Поэтому кинематику часто называют формальной или описательной частью механики в отличие от причинной части механики — динамики, изучающей как раз причины, вызвавшие именно такой характер движения, а не иной.

Что значит построить кинематику материальной точки? Это значит уметь ответить на вопрос, где она будет в такой-то момент времени.

Но для ответа на этот вопрос необходимо, исходя из определения механического движения, ввести некоторые предварительные понятия.

1. Очевидно, что слова «справа», «слева», «высоко», «низко», «на расстоянии 20 ед.» и т. д. лишены смысла, ибо не сказано, по отношению к какому телу они указываются. Поэтому надо прежде всего выбрать такое тело или систему взаимно-неподвижных тел, по отношению к которым мы будем задавать «адреса» всех остальных тел. Такое тело (тело отсчета) вместе с необходимыми измерительными приборами и системой ориентиров называют *системой отсчета*. Ясно, что из разных систем отсчета движение одного и того же тела выглядит по-разному; в этом и заключается относительность движения.

2. Выбрав систему отсчета, надо уметь определить положение других тел относительно нее. Для этого с некоторой точкой тела отсчета и системой ориентиров связывают систему координат

(например, прямоугольную декартову), как показано на рис. 1. Тогда положение любой материальной точки N вполне определится направленным отрезком, проведенным к ней из начала координат. Этот направленный отрезок называют *радиус-вектором точки* и обозначают буквой $\mathbf{r}$. Радиус-вектор обычно задают его модулем r и углами θ и φ.

Очевидно, вместо $\mathbf{r}$ можно задать координаты точки (или, что все равно, координаты конца радиус-вектора этой точки) x, y и z.

Задание положения точки ее радиус-вектором $\mathbf{r}$ и ее координатами x, y, z совершенно эквивалентны, ибо:

а) зная r, θ и φ, легко найти x, y, z,

б) через x, y, z нетрудно выразить r, θ и φ.

Действительно (рис. 1)

а) $x = r\sin\theta\cos\varphi$,
$y = r\sin\theta\sin\varphi$,
$z = r\cos\theta$;

б) $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$,
$\cos\theta = \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$,
$\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x}$.

Радиус-вектор $\mathbf{r}$ часто записывают в разложении по осям координат в виде

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k},$$

где $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ и $\mathbf{k}$ — единичные векторы (орты), указывающие положительные направления осей (рис. 2).

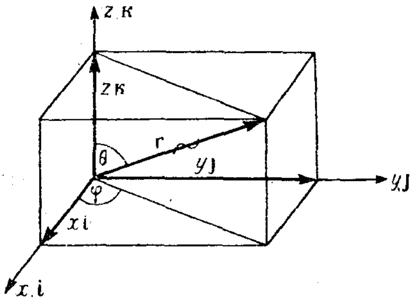

Рис. 2

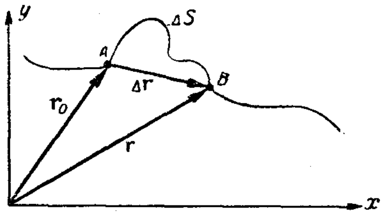

Рис. 3

3. *Механическое движение* — это изменение положения тела. Значит, для описания движения тела надо уметь определять изменение его положения. Для этого и вводят понятие перемещения тела (материальной точки) $\Delta\mathbf{r}$ и пути, пройденного им (ею) Δs (рис. 3).

Пусть материальная точка как-то двигалась в плоскости xy и переместилась из A в B. Тогда отрезок $\Delta\mathbf{r}$, соединяющий A с B и направленный из A в B, и называют *перемещением* материальной точки. Очевидно, $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$, где $\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{r}$ — радиус-векторы начального и конечного положений материальной точки.

Длина отрезка Δs кривой, вдоль которой двигалась материальная точка, называется *путем*, пройденным этой материальной точкой, а сама кривая, вдоль которой происходило движение, называется *траекторией* движения материальной точки.

Конечно, отрезок траектории дает значительно больше сведений о движении, чем $\Delta\mathbf{r}$, ибо он в отличие от $\Delta\mathbf{r}$ позволяет узнать не только то, где была и где оказалась материальная точка, но и как она попала из начального положения в конечное; соответственно и расчет траектории значительно труднее, чем вычисление $\Delta\mathbf{r}$, ибо рассчитать отрезок кривой, как правило, много труднее, чем отрезок прямой.

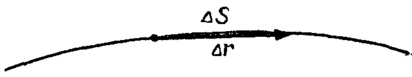

Рис. 4

Надо не путать $\Delta\mathbf{r}$ и Δs и помнить, что перемещение $\Delta\mathbf{r}$ — вектор, а путь Δs — скаляр!

Различие между $|\Delta\mathbf{r}|$ и Δs исчезают в двух случаях: когда движение происходит вдоль прямой в одном направлении и когда перемещение материальной точки столь мало, что трудно отличить дугу от стягивающей ее хорды (рис. 4). В тех случаях, когда $|\Delta\mathbf{r}|$ и Δs столь малы (говорят, элементарно малы) мы будем писать $d\mathbf{r}$ и ds и, поскольку ds практически не отличимо в этом случае от $|d\mathbf{r}|$, а $d\mathbf{r}$ — вектор, то и $\mathbf{ds}$ мы будем считать вектором, т. е. в этом случае $d\mathbf{r} = \mathbf{ds}$.

В разложении по осям векторы $d\mathbf{r}$ и $\mathbf{ds}$ запишутся в виде

$$d\mathbf{r} = \mathbf{ds} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}.$$

4. Поскольку изменение положения материальной точки происходит со временем, надо ввести понятие *быстроты изменения положения* или понятие *скорости движения* материальной точки.

Назовем *средней скоростью движения* материальной точки величину $\mathbf{v}_{\text{ср}} = \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}$, т. е. величину, характеризующую быстроту изменения радиус-вектора $\mathbf{r}$ с течением времени и численно равную изменению радиус-вектора материальной точки за единицу времени. Величину $\mathbf{v}_{\text{ср}}$ называют также средней скоростью изменения радиус-вектора материальной точки.

На перемещении $\Delta\mathbf{r}$ (или, что все равно, за время Δt) быстрота движения тела, вообще говоря, может существенно меняться. Но если $\Delta\mathbf{r}$ столь мало (а значит, и Δt очень мало), что быстрота движения практически на этом перемещении (за это время) не менялась, то можно говорить о мгновенной скорости тела в данной точке (или в данный момент времени)

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}.$$

Таким образом, мгновенная скорость материальной точки показывает, каково ее перемещение (или каково изменение ее радиус-вектора) за достаточно малую единицу времени (малую в том смысле, что за эту единицу времени быстрота движения, если и менялась, то так, что наши приборы зафиксировать этого изменения не смогли). Очевидно, такой малой единицей может быть и столетие, если мы изучаем движение Солнца в космосе. С другой стороны, и микросекунда будет совсем не малой единицей времени, если мы изучаем движение, например, молекулы в теле — за одну микросекунду молекула может много раз существенно изменить свою скорость в результате столкновения с другими молекулами.

Иногда наряду со средней скоростью перемещения приходится говорить о средней скорости прохождения пути

$$v_{\text{ср}s}=\frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Очевидно, между $\mathbf{v}_{\text{ср}}$ и $v_{\text{ср}s}$ та же разница, что и между $\Delta\mathbf{r}$ и Δs. С другой стороны, v_s и v практически неотличимы из-за отсутствия разницы между ds и $|d\mathbf{r}|$ и поэтому мгновенную скорость можно определять и как $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ и как $\frac{\mathbf{ds}}{dt}$.

Отличие $\Delta\mathbf{r}$ от Δs можно уяснить на примере движения материальной точки по замкнутой кривой. Если тело вышло из некоторой точки и в нее же вернулось, то $\Delta\mathbf{r}=0$ и, значит, $\mathbf{v}_{\text{ср}}=\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}=0$, в то время как $\Delta s\neq 0$, а соответственно и $v_{\text{ср}s}=\frac{\Delta s}{\Delta t}\neq 0$.

Поскольку $d\mathbf{r}$ или $\mathbf{ds}$ являются касательными к траектории, то и $\mathbf{v}$ направлена всегда по касательной к траектории. При этом надо помнить, что несмотря на малость числа, выражающего модуль перемещения $|\Delta\mathbf{r}|$, число, выражающее скорость, может быть и не малым (ибо значение дроби определяется не только ее числителем, но и знаменателем); например за $\Delta t=0{,}0001$ *сек* тело переместилось на $|\Delta\mathbf{r}|=0{,}001$ *м* и $v_{\text{ср}}=\frac{0{,}001\ \textit{м}}{0{,}0001\ \textit{сек}}=10\ \frac{\textit{м}}{\textit{сек}}$.

Предостерегаем от недоразумения:

По определению $\mathbf{v}_{\text{ср}}=\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}$ и $v_{\text{ср}s}=\frac{\Delta s}{\Delta t}$ и никак иначе. Поэтому, если тело проходит перемещение $\Delta\mathbf{r}=\Delta\mathbf{r}_1+\Delta\mathbf{r}_2+\ldots+\Delta\mathbf{r}_N$ за время $\Delta t=\Delta t_1+\Delta t_2+\ldots+\Delta t_N$, то $\mathbf{v}_{\text{ср}}=\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}=\frac{\Delta\mathbf{r}_1+\Delta\mathbf{r}_2+\ldots+\Delta\mathbf{r}_N}{\Delta t_1+\Delta t_2+\ldots+\Delta t_N}$ и никак не $\mathbf{v}_{\text{ср}}=\frac{\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2+\ldots+\mathbf{v}_N}{N}$. Аналогично и с $v_{\text{ср}s}=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{\Delta s_1+\Delta s_2+\ldots+\Delta s_N}{\Delta t_1+\Delta t_2+\ldots+\Delta t_N}$.

В разложении по зафиксированным осям выражение для скоростей $\mathbf{v}_{ср}$ и $\mathbf{v}$ запишется в виде

$$\mathbf{v}_{ср}=\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\mathbf{i}+\frac{\Delta y}{\Delta t}\mathbf{j}+\frac{\Delta z}{\Delta t}\mathbf{k},$$

$$\mathbf{v}=\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\frac{dx}{dt}\mathbf{i}+\frac{dy}{dt}\mathbf{j}+\frac{dz}{dt}\mathbf{k}.$$

5. Как уже сказано, скорость с течением времени может меняться, и для характеристики этого изменения вводят понятия *среднего ускорения*

$$\mathbf{a}_{ср}=\frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}$$

и *мгновенного ускорения*

$$\mathbf{a}=\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\frac{d}{dt}\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}.$$

Очевидно, ускорение показывает, как быстро меняется скорость. В разложении по зафиксированным осям ускорение запишется в виде

$$\mathbf{a}=a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}+a_z\mathbf{k}=\frac{dv_x}{dt}\mathbf{i}+\frac{dv_y}{dt}\mathbf{j}+$$
$$+\frac{dv_z}{dt}\mathbf{k}=\frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i}+\frac{d^2y}{dt^2}\mathbf{j}+\frac{d^2z}{dt^2}\mathbf{k}.$$

Подведем итоги сказанному. Научившись:

1) выбирать систему отсчета,
2) определять положение материальной точки (малого тела),
3) определять изменение положения материальной точки,
4) определять быстроту изменения положения и
5) определять быстроту изменения скорости,

мы сделали всю необходимую подготовку для решения основной задачи кинематики: зная ускорение, найти зависимость положения тела от времени в выбранной системе отсчета, т. е. найти зависимость $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$, или $x=x(t)$, $y=y(t)$ и $z=z(t)$.

Эта задача, вообще говоря, не простая, и мы можем ее решить только в общих чертах, т. е. не доводя до явного вида эту зависимость. Именно: из определения скорости $\mathbf{v}=\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ следует, что элементарно малое перемещение материальной точки за элементарно малый промежуток времени dt определится соотношением $d\mathbf{r}=\mathbf{v}(t)\,dt$. Если же нас интересует перемещение тела за конечный (не элементарно малый интервал) времени Δt, то разбивая промежуток времени Δt на очень малые интервалы dt, подсчитывая малые перемещения $d\mathbf{r}$ и суммируя их, получим $\Delta \mathbf{r}=$ $=\int\limits_{t_0}^{t}\mathbf{v}(t')\,dt'$, или $\mathbf{r}-\mathbf{r}_0=\int\limits_{t_0}^{t}\mathbf{v}(t')\,dt'$, откуда с учетом зависимости вектора $\mathbf{r}$ от времени получим

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{v}(t')\,dt'. \qquad (1)$$

Если движение *равномерное*, т. е. $\mathbf{v} = \mathrm{const}$, то вынося $\mathbf{v}$ за знак интеграла и учитывая, что $\int_{t_0}^{t} dt = t - t_0$, получим $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}(t - t_0)$, а если наблюдение начато в момент $t_0 = 0$, то

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}t. \qquad (1\text{а})$$

Аналогично найдем скорость $\mathbf{v}$ при переменном движении: из равенства $\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$ имеем $d\mathbf{v} = \mathbf{a}\,dt$, что приводит при интегрировании от $t = 0$ до t к равенству

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 + \int_{0}^{t} \mathbf{a}(t')\,dt'. \qquad (2)$$

Если движение *равнопеременное*, т. е. $\mathbf{a} = \mathrm{const}$, то

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}t. \qquad (2\text{а})$$

Наконец, можно просто найти $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ в случае $\mathbf{a} = \mathrm{const}$ в явном виде.

Именно:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{v}(t')\,dt' = \mathbf{r}_0 + \int_{t_0}^{t} (\mathbf{v}_0 + \mathbf{a}t')\,dt' =$$
$$= \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0(t - t_0) + \frac{\mathbf{a}(t^2 - t_0^2)}{2}$$

и при $t_0 = 0$ получаем:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{\mathbf{a}t^2}{2}. \qquad (1\text{б})$$

Формулы (1) и (2) позволяют решить любую кинематическую задачу. При этом остаются, однако, открытыми вопросы:

1) Почему при построении кинематики мы остановились на определении ускорения $\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$, а не раньше $\left(\text{на определении скорости } \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)$ и не позже $\left(\text{скажем, на определении величины } \mathbf{b} = \frac{d\mathbf{a}}{dt}\right)$?

2) Каковы причины появления ускорения у тел?

Ответы на эти вопросы дает динамика; оказывается, что в основной закон динамики входит именно ускорение $\mathbf{a}$, а не $\mathbf{v}$ или $\mathbf{b}$. Это и значит, что останавливаться на определении скорости рано, а определять скорость изменения ускорения $\left(\mathbf{b}=\right.$ $\left.=\frac{d\mathbf{a}}{dt}\right)$ просто ни к чему.

В динамике же вскрываются и причины появления ускорения у тела; каковы эти причины, будет ясно при изучении самой динамики.

Разобранная задача нахождения $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$ называется основной прямой задачей кинематики.

Основная обратная задача заключается в нахождении $\mathbf{a}(t)$ и $\mathbf{v}(t)$ по известной зависимости $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$. Именно, по определению: $\mathbf{a}(t)=\frac{d\mathbf{v}}{dt}$ и $\mathbf{v}(t)=\frac{d\mathbf{r}}{dt}$. Пользуясь таблицами дифференцирования, убедимся в том, что, например, из (2а) и (1б) следует

$$\mathbf{a}=\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\text{const} \text{ и } \mathbf{v}=\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\mathbf{v}_0+\mathbf{a}t,$$

как и должно быть.

Проектируя равенства (1б) и (2а), например, на ось Ox, получим $\Delta x=v_{0x}t+\frac{a_x t^2}{2}$ и $v_x=v_{0x}+a_x t$. Исключая из них время, получим $2a_x\Delta x=v_x^2-v_{0x}^2$; аналогично и для других проекций. Эти равенства весьма удобны для решения ряда задач при $\mathbf{a}=\text{const}$.

§ 2. Кинематика движения материальной точки по окружности

Если материальная точка движется по окружности, то для описания ее движения более удобен не изложенный выше способ, а несколько другой. Дело в том, что при движении точки по окружности ее положение при заданном радиусе окружности вполне определяется углом φ, который составляет радиус-вектор $\mathbf{r}$, проведенный из центра окружности, с осью, например, Ox (рис. 5).

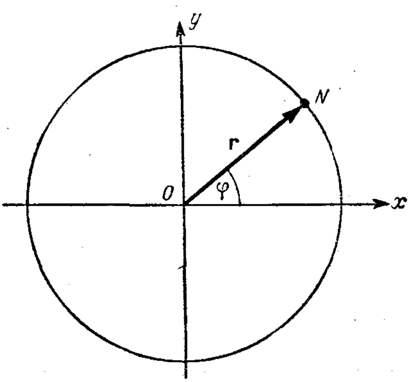

Рис. 5

Поэтому, если удастся найти $\varphi=\varphi(t)$, то тем самым будет найдена и зависимость $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$, ибо известный модуль радиус-вектора $\mathbf{r}$ и найденный угол φ вполне определяют $\mathbf{r}$ на плоскости.

Пусть радиус-вектор $\mathbf{r}$ повернулся на угол $d\varphi$, описав своим концом дугу dl. Введем вектор $\mathbf{d\varphi}$ элементарного поворота радиус-вектора $\mathbf{r}$ как вектор с модулем $d\varphi$ и направлением $\mathbf{n}$, определяемым правилом правого буравчика (рис. 6).

В этом случае имеем

$$\mathbf{dl} = \mathbf{d\varphi} \times \mathbf{r}.$$

И поскольку при бесконечно малых поворотах имеет место $\mathbf{dl} = d\mathbf{r}$, то

$$d\mathbf{r} = \mathbf{d\varphi} \times \mathbf{r}.$$

Отметим сразу, что это соотношение справедливо лишь при элементарных поворотах, когда $dl = |\mathbf{dr}|$. При конечных поворотах дуга Δl не равна стягивающей ее хорде, и не имеет места даже равенство $\Delta r = \Delta\varphi \cdot r$. Тем более лишено смысла равенство $\Delta\mathbf{r} = \Delta\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r}$. Лишено также смысла равенство $\Delta\mathbf{l} = \Delta\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r}$, хотя бы из-за того, что конечной величины дуга Δl вектором не является.

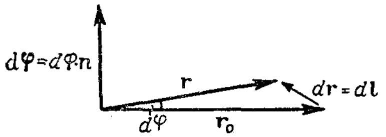

Рис. 6

Пусть материальная точка за время dt переместится на $d\mathbf{r}$. Тогда ее радиус-вектор $\mathbf{r}$ повернется на угол $\mathbf{d\varphi}$.

Величина

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\mathbf{d\varphi}}{dt}$$

называется *угловой скоростью вращения радиус-вектора* $\mathbf{r}$. Величина

$$\boldsymbol{\beta} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}$$

называется *угловым ускорением вращения радиус-вектора* $\mathbf{r}$.

Из последнего равенства следует $d\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\beta}\, dt$, что при интегрировании дает

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \boldsymbol{\omega}_0 + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{\beta}(t')\, dt'.$$

При вращении радиус-вектора $\mathbf{r}$ с постоянной угловой скоростью часто пользуются понятиями частоты вращения f и периодом оборота T, определяемыми равенствами

$$f = \frac{\Delta N}{\Delta t} \text{ и } T = \frac{\Delta t}{\Delta N},$$

где ΔN — число оборотов радиус-вектора $\mathbf{r}$ за время Δt.

Связь между $\boldsymbol{\omega}$, f и T очевидна:

$$\boldsymbol{\omega} = 2\pi f \cdot \mathbf{n} = \frac{2\pi}{T}\mathbf{n}.$$

Интегрируя равенство $\mathbf{d\varphi} = \boldsymbol{\omega}\, dt$, получим

$$\boldsymbol{\Phi}(t) = \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{\omega}(t')\, dt'.$$

Под вектором $\mathbf{\Phi}(t)$ в плоском случае надо понимать вектор с модулем, равным углу между $\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{r}$ и направленным как векторное произведение $\mathbf{r}_0 \times \mathbf{r}$. В общем же случае $\mathbf{\Phi}(t)$ есть вектор, проекции которого на оси x, y, z определим равенствами

$$\Phi_x(t) = \int_{t_0}^{t} \omega_x(t')\,dt',$$

$$\Phi_y(t) = \int_{t_0}^{t} \omega_y(t')\,dt',$$

$$\Phi_z(t) = \int_{t_0}^{t} \omega_z(t')\,dt'.$$

При этом вектор $\mathbf{\Phi}(t)$ при заданных $\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{r}$ зависит от того, как вектор $\mathbf{r}(t)$ перешел из начального положения в конечное

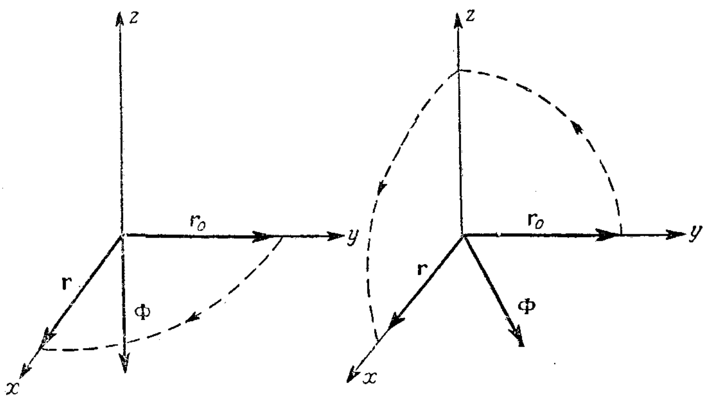

Рис. 7

(рис. 7). Это обусловлено тем, что вектор $\mathbf{d\varphi}$ не есть полный дифференциал какой-либо функции.

§ 3. Связь между угловыми и линейными характеристиками движения

Деля равенство $d\mathbf{r} = \mathbf{d\varphi} \times \mathbf{r}$ на время dt, за которое произошел поворот на $\mathbf{d\varphi}$, и учитывая $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}$ и $\frac{\mathbf{d\varphi}}{dt} = \boldsymbol{\omega}$, получим

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}.$$

Дифференцируя это равенство по времени, получим с учетом $\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{a}$ и $\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \boldsymbol{\beta}$ равенство

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}. \tag{1}$$

Так как $\mathbf{v}=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}$, то второе слагаемое приводится к виду

$$\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}=\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{r})-\mathbf{r}(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega})$$

(по свойству двойного векторного произведения).

Поскольку $\boldsymbol{\omega}\perp\mathbf{r}$, то $\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{r}=0$ и с учетом $\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega}=\omega^2$ получим $\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}=-\omega^2\mathbf{r}$. Но в таком случае равенство (1) запишется в виде

$$\mathbf{a}=\boldsymbol{\beta}\times\mathbf{r}-\omega^2\mathbf{r}. \tag{2}$$

Величину $\mathbf{a}_\tau=\boldsymbol{\beta}\times\mathbf{r}$ называют *касательным* или *тангенциальным ускорением*; поскольку оно направлено по касательной к окружности (траектории), то оно ответственно за изменение модуля скорости. Величина $\mathbf{a}_r=-\omega^2\mathbf{r}$ называется *радиальным*, или *центростремительным ускорением*; будучи направленным к центру окружности, оно нормально скорости и, значит, ответственно за изменение направления скорости.

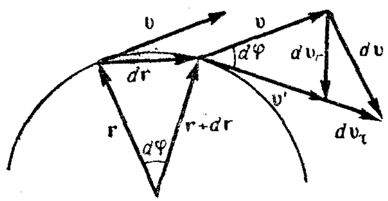

Рис. 8

Сделаем несколько иной вывод формулы (2). Пусть материальная точка за время dt переместилась из положения $\mathbf{r}$ в положение $\mathbf{r}+d\mathbf{r}$. При этом ее скорсть изменилась от $\mathbf{v}$ до $\mathbf{v}+d\mathbf{v}$. Раскладывая $d\mathbf{v}$ на составляющие по $\mathbf{v}$ и $\mathbf{r}$, получим

$$d\mathbf{v}=d\mathbf{v}_\tau+d\mathbf{v}_r.$$

Из рис. 8 видно, что в силу подобия треугольников со сторонами $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}+d\mathbf{r}$, $d\mathbf{r}$ и $\mathbf{v}$, $\mathbf{v}'$, $d\mathbf{v}_r$ имеем $\frac{|d\mathbf{r}|}{r}=\frac{|d\mathbf{v}_r|}{v}$, а так как $|d\mathbf{r}|=v\,dt$, то после очевидных преобразований приходим к формуле

$$\frac{v^2}{r}=\frac{|d\mathbf{v}_r|}{dt}, \text{ или } \frac{v^2}{r}=a_r.$$

Поскольку $v=\omega r$ (так как $\boldsymbol{\omega}\perp\mathbf{r}$), то $a_r=\frac{v^2}{r}=\omega^2 r$; с учетом же $\mathbf{a}_r\uparrow\downarrow\mathbf{r}$ получим

$$\mathbf{a}_r=-\omega^2\mathbf{r}.$$

Что касается a_τ, то $a_\tau=\frac{|d\mathbf{v}_\tau|}{dt}=\frac{dv}{dt}$. Но изменение модуля скорости обусловлено изменением быстроты вращения, т. е. изменением величины ω; это означает с учетом $v=\omega r$, что $dv=d\omega\cdot r$ и, значит, $a_\tau=\frac{dv}{dt}=\beta r$. С учетом же направлений $\mathbf{a}_\tau$, $\boldsymbol{\beta}$ и $\mathbf{r}$, получим:

$$\mathbf{a}_\tau=\boldsymbol{\beta}\times\mathbf{r}.$$

Суммарное ускорение материальной точки определится равенством

$$\mathbf{a}=\mathbf{a}_\tau+\mathbf{a}_r=\boldsymbol{\beta}\times\mathbf{r}-\omega^2\mathbf{r}.$$

Найдем быстроту вращения некоторого вектора. Пусть вектор $\mathbf{k}$ за время dt повернулся на угол $\mathbf{d\varphi}$. Тогда, как видно из рис. 9, $dk=k\cdot d\varphi$, а с учетом того, что $d\mathbf{k}\perp\mathbf{k}$ и $d\mathbf{k}\perp\mathbf{d\varphi}$, получим по правилу правого буравчика

$$d\mathbf{k}=\mathbf{d\varphi}\times\mathbf{k},$$

что при делении на dt приводит к

$$\frac{d\mathbf{k}}{dt}=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{k}.$$

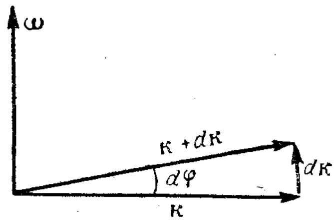

Рис. 9

Эта формула часто используется при нахождении производной по времени от единичных вектор-ортов.

На этом мы закончим кинематику вращения радиус-вектора в плоскости. Заметим, что причины углового ускорения, также как и причины линейного ускорения, рассматриваются в динамике.

§ 4. Замечания о терминологии

1. Мы уже пользовались термином «материальная точка» и будем им пользоваться в дальнейшем. Во избежание недоразумений мы еще раз напомним, что понятие «материальная точка» — это первое и грубое представление о теле, некоторая схема, более или менее напоминающая свойства движения объекта. Мы выше давали определение этого термина в предположении, что он будет применяться к макроскопическому телу, все части которого движутся одинаковым образом (все «точки» тела имеют одинаковые скорости). И значит, описание движения одной из таких частей (одной «точки» тела) вполне тождественно описанию движения всех других частей («точек»). В случае, например, вращательного движения все разные части («точки») движутся различным образом и уже знание движения одной части тела («точки») не позволяет судить о движении остальных частей без особых оговорок (см. I, § 14). Но это и означает, что в данном случае тело нельзя рассматривать как материальную точку.

Другой случай, когда этим термином без совершения грубых ошибок нельзя пользоваться — это случай описания движения микрообъектов. Дело в том, что у таких объектов микромира, как атомы и элементарные частицы, существенно проявляются волновые свойства, а это приводит к тому, что описывать микрообъекты с помощью понятия точка, координата, скорость и т.д. уже, вообще говоря, нельзя. Об этом будет идти речь ниже, но иметь сказанное в виду надо уже сейчас. Кстати, мы должны быть к этому готовы: мы ведь знаем, что наши представления о мире и описание его являются приближенными; мера же приближенности определяется и тем, о каких объектах мы говорим, и тем, каков уровень наших знаний и возможностей, какую схему применяем. Общеизвестно, что нет общих схем для всех процессов и объектов, для каждого — свое. Мы же не требуем описания, например, человека с помощью понятий длина, ширина, окраска, вес и т. д. Когда мы описываем человека, то, конечно, можно сказать, что человек — это объект таких-то линейных размеров, такого-то веса и такой-то раскраски. Но будет ли это описание подчеркивать самое существенное, что характеризует человека? Конечно нет! Для описания человека нужны другие характеристики. Для описания объектов микромира понятия материальная точка, координата, скорость являются тем более приближенными, чем «мельче» объект (точнее, чем меньше его масса). Какие именно нужны характеристики движения для микрочастиц, мы будем говорить в свое время. Но готовым к этому надо, повторяем, быть сейчас.

2. К понятию материальная точка близко примыкает понятие точки пространства (в физическом смысле), означающее вовсе не точку, а достаточно малую область пространства. Действительно, говоря: «в данной точке пространства происходит то-то», мы полагаем, что там находится некоторое тело, с которым происходит «то-то». И так как тела всегда протяженны, то и «точка пространства», конечно, понятие условное. Например, говорят: «Солнце находится в такой-то момент времени в такой-то точке небесной сферы». Хорошая «точка»!

3. Аналогично обстоит дело с понятием «данный момент времени». Имеется в виду не «точка» времени, а какой-то интервал времени, промежуток времени между какими-то двумя событиями, следующими достаточно быстро одно за другим.

4. Из сказанного выше следует, как надо понимать выражения «тело находится в данной точке пространства», «скорость тела в данной точке», «ускорение тела в данный момент» и т.д.

5. О границах применимости формул, полученных выше. Они справедливы для всех тех случаев, когда можно пользоваться понятием материальная точка, и если скорости движения тел весьма малы по сравнению со скоростью света.

§ 5. Основа динамики движения материальной точки — законы Ньютона

Выше говорилось, что кинематика не ставит перед собой задачу о выяснении причин движения и, естественно, ответ на этот вопрос в кинематике не был получен. Но и динамика не в силах ответить на этот вопрос, ибо вопрос о причинах, о происхождении движения — это вопрос философии. Материалистическая же философия, обобщая все опытные факты, все многовековые наблюдения естествоиспытателей, приходит к выводу, что поскольку на всем обозримом для человечества пространственно-временном интервале (нигде и никогда при жизни человечества) не наблюдалось ни рождения движения, ни его исчезновения, то приходится считать, что движение — это «врожденное» свойство материи, т.е. движение всегда существовало и всегда будет существовать, как и сама материя. Материя и ее движение вечны, они несозидаемы и неуничтожимы. Поскольку это так, то не следует ставить перед собой вопрос: «а откуда движение взялось, что послужило его причиной?».

Но зато правомерным является вопрос о том, как видоизменяется то или иное движение тех или иных тел, что послужило причиной превращения одной формы движения в другую, в каких соотношениях это происходит, каким закономерностям подчиняется и т. д.

Перед динамикой стоит вопрос о причине изменения скорости тела, о причине появления ускорения тел и о связи ускорения с этой причиной.

Таким образом, основная прямая задача динамики — это задача нахождения зависимости $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$.

Как решать эту задачу, или, как говорят, как построить динамику?

Способов построения механики множество, мы в этой книжке будем следовать великому Ньютону.

Вся совокупность опытов и наблюдений приводит к выводу о том, что:

1) Характер механического движения и его описание зависит в большой мере от выбора системы отсчета, т. е. от выбора того тела, на котором находится (хотя бы мысленно) наблюдатель с его приборами. Действительно, движение находящегося в саду дерева наблюдателю из качелей представляется весьма замысловатым; наблюдателю же, сидящему в плавно идущем вагоне — довольно простым, а сидящему на этом дереве мальчишке — и того лучше и проще — стоит дерево и все! Возникает естественный вопрос: а нет ли такой системы отсчета, в которой все механические движения выглядели бы наиболее просто и описывались бы наиболее простыми уравнениями?

Совершенно очевидно, что ответ на этот вопрос получить необходимо.

2) В уже выбранной системе отсчета скорость тела, характер его движения может меняться: дерево стояло-стояло, а потом (почему?) упало.

Естественно, надо ответить на вопрос: каковы те причины, которые привели к изменению характера движения тела в уже выбранной системе отсчета или, иными словами, чем вызывается ускорение в этой системе отсчета.

Ответить на эти два вопроса и значит построить ньютонову механику. (Напоминаем, что способов построения механики много.)

Но как отвечать на эти вопросы, из чего исходить в поисках ответа?

Опять же из опыта, который показывает, что в любой системе отсчета есть тела, которые ведут себя довольно просто (скорость меняется просто или совсем не меняется), а есть тела, которые ведут себя в отношении изменения скорости очень «плохо», так «плохо», что установить изменение скорости со временем очень трудно.

Попытаемся, естественно, начать исследования с поисков такого тела, движение которого является наиболее простым, т. е. таким, для которого зависимость $\mathbf{a}(t)$ наиболее проста. Опыт же показывает, что какой-нибудь, к примеру, шарик на земле лежит, пока на него не подействует какое-либо тело (рука, например); стронутый же шарик, прыгая по выбоинам поверхности, меняет свою скорость и рано или поздно остановится под действием этих выбоин; но тем дольше его скорость будет оставаться почти неизменной, чем меньше на него воздействуют другие тела; так пущенный по льду шарик очень слабо меняет свою скорость, получает очень малое ускорение. Возникает подозрение, что если бы на шарик вообще не действовали бы никакие другие тела, он своей скорости, быть может, и не менял бы.

Тело, на которое другие тела не действовали бы, можно было бы назвать свободным. Ясно, что таких тел не бывает, но где-нибудь в космосе наверное есть много таких тел, на которые заметным для нас образом другие тела не действуют. Будем называть для кратности *свободными* именно такие тела, хотя их следовало бы назвать *почти свободными*. Можно себе представить и такое тело, все воздействия на которое со стороны других тел взаимно скомпенсированы. Это надо понимать так: если эти тела убрать, то поведение интересующего нас тела существенно не изменится. Будем такое тело называть телом, по своему поведению похожим на свободное, кратко—*квазисвободным* (квази-подобный, похожий).

В соответствии со сказанным все тела можно разделить в каждый данный момент времени на квазисвободные и несвободные.

Будем теперь, опираясь на понятие свободного или квазисвободного тела, отыскивать «хорошие» системы отсчета, т. е. такие, в которых движение этого тела будет наиболее простым, а потом посмотрим, как будет себя вести в такой системе отсчета и несвободное тело.

Опыт показывает, что шарик, находящийся, например, на горизонтальной абсолютно гладкой полке вагона, т. е. будучи квазисвободным, ведет себя «хорошо» или «плохо» в зависимости от того, как движется вагон по отношению к Земле: если вагон с $\mathbf{v} = \mathrm{const}$ по отношению к ней, то у шарика по отношению к вагону $\mathbf{a} = 0$; если вагон движется с $\mathbf{v} \neq \mathrm{const}$, то у шарика $\mathbf{a} \neq 0$. Отсюда напрашивается мысль, что вагон, идущий с $\mathbf{v} = \mathrm{const}$

по отношению к Земле, есть «хорошая» система отсчета, а вагон, идущий с $v \neq const$ — «плохая» система отсчета. Правда, более тонкие опыты показывают, что вагон, идущий с $v = const$ по отношению к Земле, есть почти «хорошая» система отсчета: можно, например, сообщив вагону изрядную скорость, убедиться в том, что в таком вагоне у шарика $v \neq const$ по отношению к вагону. Значит, и в вагоне, идущем с небольшой постоянной скоростью относительно Земли, у шарика ускорение относительно вагона не нуль, а близко к нулю.

На примере вагона с шариком и других примерах мы приходим к выводу о том, что м о ж е т б ы т ь и действительно есть «самые хорошие» системы отсчета. А может быть и нет? Пока что мы убедились в том, что «почти хорошие» системы отсчета есть. Сделаем, как сделал Ньютон, поверим в то что:

> **Существуют такие системы отсчета, в которых свободное или квазисвободное тело скорости своей не меняет (ускорения по отношению к этой системе отсчета не имеет).**

Правда, этот закон Ньютон сформулировал так:

> **Всякое тело сохраняет состояние покоя или равномерного и прямолинейного движения пока и поскольку оно не понуждается другими телами выйти из этого состояния.**

Очевидно, что такая формулировка не соответствует опыту и наблюдениям. Действительно, стоит посмотреть из каруселей на мир, как сразу бросается в глаза что он «вертится», хотя его никто и не «понуждает». Поэтому более правильной является первая формулировка этого закона как отвечающая всем современным представлениям о мире.

Учитывая всю важность вопроса о выборе системы отсчета для физики мы сформулируем первый закон еще шире, а именно:

> **Существуют системы отсчета, из которых мир выглядит наиболее просто, а значит, описывается наиболее простыми уравнениями; это такие системы отсчета, по отношению к которым свободная материальная точка ускорения не имеет.**

В такой формулировке этот закон выходит за пределы механики и становится общефизическим законом. Заметим, что из таких систем отсчета не только проще изучать мир, но и вся деятельность человека в них протекает легче: нетрудно увидеть разницу между попытками сделать, например, операцию человеку на тверди земной (т. е. в «хорошей» системе отсчета) и на утлом кораблике, находящемся в бурном штормующем море (т. е. в «плохой» системе отсчета).

Итак, мы постулировали существование в природе «хороших» систем отсчета. Такие системы называются *инерциальными*. Совершенно очевидно, что абсолютно инерциальных систем отсчета нет. Но легко поверить в то, что есть системы, сколь угодно мало отличающиеся от них.

Как же отыскивать такие системы отсчета?

Первый закон Ньютона дает ответ на этот вопрос: надо из подозреваемой на инерциальность системы отсчета исследовать свободное или квазисвободное тело; если у него $\mathbf{v} = \mathrm{const}$ по отношению к этой системе, то она инерциальна. Правда, более точные приборы могут показать, что $\mathbf{v} \neq \mathrm{const}$. Какова же система на самом деле? А такова, что она инерциальна для одного комплекта сравнительно грубых приборов, почти инерциальна для более точных приборов и неинерциальна для еще более точных инструментов. Таким образом, первый закон Ньютона, утверждающий существование инерциальных систем отсчета, по существу есть приближенный закон.

Какой системой отсчета является Земля? Очевидно, неинерциальной — ведь весьма далекие звезды являются почти свободными телами (из-за колоссальных расстояний между ними они практически не взаимодействуют) и, однако, они шествуют по небесной сфере с $\boldsymbol{\omega} \neq 0$, т. е. вращаются по отношению к Земле. Правда, угловая скорость вращения их невелика — 2π радиан в сутки. Но все же $\mathbf{a}_r = -\boldsymbol{\omega}^2\mathbf{r}$ из-за большого $\mathbf{r}$ колоссально ($\mathbf{r}$ — расстояние от Земли до какой-либо звезды).

А нельзя ли, не глядя на небо, убедиться в неинерциальности Земли? Можно. Ведь всем известно, что падающие у поверхности Земли тела «беспричинно» отклоняются к востоку, знаменитый маятник Фуко тоже «беспричинно» меняет свою плоскость качания и т. д.

Земля — неинерциальная система отсчета. Но если движение по Земле интересующих нас тел происходит недолго, на небольших расстояниях, то заметить эту неинерциальность трудно. И, значит, для таких движений Земля будет почти инерциальной системой отсчета. В дальнейшем мы будем говорить, что Земля инерциальна именно в этом смысле.

Итак, мы разобрались с первым из двух вопросов, поставленных в начале этого раздела: ясно как выбирать «хорошие» системы отсчета.

Будем искать ответ на второй вопрос: чем и в какой мере определяется ускорение тела в инерциальной системе отсчета?

Исходя из опытов, поневоле приходим к выходу, что в инерциальных системах отсчета, во-первых, ускорение какого-либо тела, т. е. изменение его скорости, вызывается нескомпенсированными воздействиями других тел, и, во-вторых, это действие всегда взаимно: получает ускорение не только тело, которому мы хотим сообщить его, но и то, которым мы ускоряем. Возьмем за меру воздействия одного тела на другое, например, величину деформации какого-нибудь тела (проще всего пружины). Если теперь этой пружиной действовать на разные тела, то они будут получать разные ускорения при разных деформациях. И можно заметить, что для одного и того же тела ускорение прямо пропорционально деформации пружины (с определенной, конечно, точностью, зависящей от качества пружины, величины ее деформации, качества линейки и часов, которыми мы пользовались при измерениях, и т. д.).

Назовем меру воздействия на тело, определяемую деформацией пружины, силой $\mathbf{F}$ (опыт показывает, что сила — вектор) и будем считать, что сила прямо пропорциональна деформации пружины, т. е. $\mathbf{F} = -k(r - r_{\text{н}})\frac{\mathbf{r}}{r}$, где $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}_{\text{н}}$ — радиус-векторы конца пружины, соприкасающегося с телом, по отношению к другому концу пружины ($\mathbf{r}$ — деформированной, а $\mathbf{r}_{\text{н}}$ — недеформированной). Тогда опыт показывает, что

$$\mathbf{a} \sim \mathbf{F}. \tag{1}$$

Будем теперь действовать на разные тела одинаково деформированной пружиной, или, как теперь мы можем сказать, одинаковой силой $\mathbf{F}$. Убедимся в том, что разные тела получают при этом разные ускорения. Значит, тела обладают каким-то свойством, от которого зависит ускорение. Это свойство — «нежелание» тела менять свою скорость, этакое — «упрямство», инертность. Меру такой инертности тел называют массой m.

Прежде чем формулировать зависимость ускорения от массы, надо, естественно, научиться определять, вычислять ее. Мы определим способ измерения массы из того факта, что в природе не существует одностороннего действия, а всегда есть взаимодействие; всякому механическому воздействию тела A на тело B есть ответ — реакция со стороны тела B на тело A.

При этом для двух любых тел i и k, как бы они ни взаимодействовали: через пружину, посредством электрического или гравитационного (а иногда и магнитного) полей или еще каким-либо образом, имеют место соотношения

$$\frac{a_i}{a_k} = \text{const}, \quad \mathbf{a}_i \uparrow\downarrow \mathbf{a}_k.$$

Приписывая каждому из тел некую характеристику m (бóльшую тому телу, которое при взаимодействии получило меньшее ускорение), т. е. полагая $\text{const} = \frac{m_k}{m_i}$, получим

$$m_i\mathbf{a}_i = -m_k\mathbf{a}_k. \tag{2}$$

Полагая одно из тел эталонным, получим способ измерения массы:

$$m = m_э \frac{a_э}{a}.$$

Заметим, что равенство (2) — одна из возможных формулировок третьего закона Ньютона.

Перейдем теперь к окончательной формулировке второго закона Ньютона. Если действовать на тела разных масс одинаковой силой, то как показывает опыт,

$$a \sim \frac{1}{m}. \tag{3}$$

Объединяя (1) и (3), получим

$$\mathbf{a} = f\frac{\mathbf{F}}{m}, \tag{4}$$

где коэффициент f зависит от того, что мы взяли за эталоны ускорения, силы и массы. Очевидно, возможен такой подбор эталонов, что $f = 1$, тогда

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m}. \tag{5}$$

Равенства (4) или (5) называются вторым законом Ньютона и читают так:

В инерциальных системах отсчета ускорение, сообщенное телу силой, прямо пропорционально силе, действующей на тело, обратно пропорционально массе тела и направлено в сторону действия силы.

При этом остался открытым вопрос о том, а почему, например, деформированное тело способно вызвать ускорение у другого тела; почему магнит, даже не прикасаясь к железке, заряженное тело, не прикасаясь к другому заряженному телу, Солнце, не прикасаясь к планетам, и т. д. вызывают ускорения. Почему появляются те действия одних тел на другие, которые мы назвали силами? Короче — каково происхождение, какова природа сил? Это вопрос, изучением которого занимается другой раздел физики — теория силового поля, или просто — теория поля. Она дает способ подсчитывать эти силы.

Второй закон Ньютона, как и первый, приближенный закон. Именно: ускорение $\mathbf{a}$ определено для материальной точки, а тело не всегда можно считать материальной точкой; сила $\mathbf{F}$ считается пропорциональной деформации пружины, что похоже на правду лишь при малых деформациях пружин; как показывает теория относительности, масса тела не есть величина постоянная, а зависит от скорости тела (как, впрочем, и деформация пружины). Но все это вместе взятое и означает приближенность второго закона Ньютона.

При установленных (2) и (5) третий закон можно сформулировать в другом виде. Именно, полагая

$$m_i\mathbf{a}_i = \mathbf{F}_{ik},$$

$$m_k\mathbf{a}_k = \mathbf{F}_{ki},$$

где $\mathbf{F}_{ik}$ и $\mathbf{F}_{ki}$ — силы, действующие на i-е тело со стороны k-го и на k-е со стороны i-го соответственно, получим из (2)

$$\mathbf{F}_{ik} = -\mathbf{F}_{ki}. \tag{6}$$

Это и есть основная формулировка третьего закона Ньютона. Как показывает опыт, (2) и (6) верны лишь в том случае, если взаимодействие тел не зависит от скоростей этих тел по отношению к системе отсчета, из которой ведется наблюдение. Забегая вперед, скажем, что это означает неприменимость (2) и (6) для случая взаимодействия тел через переменное электромагнитное поле, т. е. для случая, когда существенным является излучение (изменение импульса поля). С учетом сказанного третий закон динамики формулируем так:

В инерциальных системах отсчета для случая сил, не зависящих от скорости по отношению к этим системам отсчета, силы, с которыми взаимодействуют две любые материальные точки, равны по величине, противоположны по направлению и действуют вдоль прямой, соединяющей их.

Эти силы взаимодействия $\mathbf{F}_{ik}$ и $\mathbf{F}_{ki}$ отличаются только противоположной направленностью и точками приложения (рис. 10). Если одна из этих сил — притяжение, то и другая — тоже, если одна из них электрическая, то и другая — тоже и т. д.

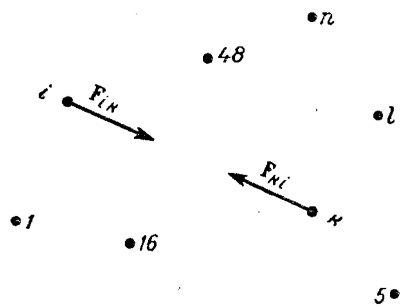

Рис. 10

С установлением трех законов Ньютона построение механики материальной точки в общих чертах закончено.

Подчеркнем кратко идейную сущность и взаимосвязь законов Ньютона — фундамента классической механики.

Первый закон утверждает, что есть «хорошие» системы отсчета и дает способ их отыскания.

Второй закон утверждает, что в таких «хороших» системах отсчета ускорения вызываются силами и зависят от свойства тела — его инертности.

Третий закон утверждает, что в этих «хороших» системах силы — это удобная мера взаимодействия материальных тел, при этом силы порождаются телами: не было бы тел, не было бы и сил.

Надо четко себе представлять, что законы Ньютона имеют смысл лишь в своей совокупности и все справедливы лишь в некоторых (инерциальных) системах отсчета. И только в них! И только приближенно! Именно:

1. Для наблюдателя с достаточно грубыми приборами (неспособными, например, измерять малые ускорения, силы, деформации, изменение массы при изменении скорости и т. д.).

2. Для случая таких взаимодействий тел, когда величины и направления сил не зависят от скоростей тел по отношению к данной системе отсчета.

3. Для случая движения макроскопических тел. (Для микрообъектов сами понятия положения, скорости, ускорения, силы можно употреблять весьма приближенно.)

4. Для случая движения тел со скоростями, малыми по сравнению со скоростью света.

Надо, однако, понимать, что огромное число механических задач, возникающих перед человеком, решаются с помощью законов Ньютона с колоссальной точностью, несмотря на приближенность этих законов. Примерами огромной точности этих (приближенных в принципе) законов могут быть: предсказание на основе этих законов существования планеты Нептун; оправдывающийся на опыте с колоссальной точностью расчет траекторий небесных тел; расчет и осуществление космических полетов и многое-многое другое.

Если вспомнить теперь, что основная прямая задача механики — это нахождение зависимости $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$, то ясно, что она нами в принципе решена. Действительно, зная массу тела m и силу $\mathbf{F}$, действующую на него, мы получим

$$\mathbf{v}(t)=\mathbf{v}_0+\int_{t_0}^{t}\mathbf{a}(t')\,dt'=\mathbf{v}_0+\int_{t_0}^{t}\frac{\mathbf{F}(t')}{m}\,dt' \tag{7}$$

и

$$\mathbf{r}(t)=\mathbf{r}_0+\int_{t_0}^{t}\mathbf{v}(t')\,dt'. \tag{8}$$

Найдя $\mathbf{v}(t)$ из (7) и подставляя в (8), получим (в принципе хотя бы) интересующую нас зависимость $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$.

В частном случае при $\mathbf{F}=\mathrm{const}$, очевидно, получим:

$$\mathbf{v}(t)=\mathbf{v}_0+\frac{\mathbf{F}}{m}(t-t_0),$$

$$\mathbf{r}(t)=\mathbf{r}_0+\mathbf{v}_0(t-t_0)+\frac{\mathbf{F}}{m}\cdot\frac{t^2-t_0^2}{2}.$$

Если же положить $t_0=0$, то

$$\mathbf{v}(t)=\mathbf{v}_0+\frac{\mathbf{F}}{m}t,$$

$$\mathbf{r}(t)=\mathbf{r}_0+\mathbf{v}_0t+\frac{\mathbf{F}}{m}\cdot\frac{t^2}{2}.$$

§ 6. Импульс и кинетическая энергия материальной точки. Законы их изменения

Сформулированный выше второй закон Ньютона называют основным законом механики, ибо использование его совместно с уравнениями кинематики позволяет в принципе решить любую задачу о механическом движении тела. Но в нем есть по меньшей мере два недостатка:

1. Не отображена в достаточно явном виде неуничтожимость движения, его сохранение.

2. Как показывает опыт решения задач, сила иной раз так сложно зависит от координат, скоростей и времени, что решить уравнение

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}=\frac{\mathbf{F}(\mathbf{r},\ \mathbf{v},\ t)}{m}$$

нет возможности. Иной же раз зависимость $\mathbf{F}=\mathbf{F}(\mathbf{r},\ \mathbf{v},\ t)$ просто неизвестна.

Возникает вопрос: нельзя ли как-нибудь «усовершенствовать» второй закон динамики или дополнить его?

Оказывается можно получить из него два (а в дальнейшем и еще одно) фундаментальнейших следствия — законы изменения импульса и энергии материальной точки (а в дальнейшем и закон изменения момента импульса материальной точки).

Получим сначала закон изменения импульса. Для этого умножим обе части равенства $\mathbf{F}=m\mathbf{a}$ на элементарное время dt, в течение которого сила действовала на материальную точку с массой m; при этом мы получим

$$m\mathbf{a}\,dt=\mathbf{F}\,dt \quad \text{или} \quad m\,d\mathbf{v}=\mathbf{F}\,dt.$$

Считая массу тела не зависящей от скорости, внесем m под знак дифференциала. Тогда имеем

$$d(m\mathbf{v})=\mathbf{F}\,dt.$$

Полагая

$$\mathbf{p}=m\mathbf{v}+\mathbf{const},$$

получим

$$d\mathbf{p}=\mathbf{F}\,dt. \qquad (1)$$

Это равенство и есть закон изменения импульса материальной точки.

Считая, что для неподвижной в данной системе отсчета материальной точки $\mathbf{p}=0$, получим $\mathbf{const}=0$, а тогда

$$\mathbf{p}=m\mathbf{v}.$$

Величина $\mathbf{p}$ называется *импульсом материальной точки* или *количеством ее движения*; величина $\mathbf{F}\,dt$ — *элементарным импульсом* *силы.* В соответствии с этим (1) называют *законом изменения импульса материальной точки* и читают так:

Элементарное изменение импульса материальной точки пропорционально импульсу силы, действующей на нее, и направлено в сторону действия силы.

По существу равенство (1) есть все тот же второй закон Ньютона, но записанный в более общей форме, содержащей сохраняющуюся в отсутствие внешних воздействий характеристику движения тела (при $\mathbf{F}=0$ получаем $d\mathbf{p}=0$ или $\mathbf{p}=\text{const}$). Именно в виде (1) и сформулировал Ньютон второй закон динамики.

Получим закон изменения кинетической энергии материальной точки, для чего равенство $m\mathbf{a}=\mathbf{F}$ умножим скалярно на перемещение $d\mathbf{r}$, сделанное материальной точкой под действием силы $\mathbf{F}$. Получим

$$\mathbf{F}\,d\mathbf{r}=m\mathbf{a}\cdot d\mathbf{r}$$

или с учетом того, что $\mathbf{a}=\frac{d\mathbf{v}}{dt}$ и $d\mathbf{r}=\mathbf{v}\,dt$,

$$\mathbf{F}\,d\mathbf{r}=m\cdot\frac{d\mathbf{v}}{dt}\cdot\mathbf{v}\cdot dt,$$

или

$$\mathbf{F}\,d\mathbf{r}=m\mathbf{v}\,d\mathbf{v}. \tag{2}$$

Но величина $m\mathbf{v}\,d\mathbf{v}$ есть дифференциал от величины $m\frac{\mathbf{v}^2}{2}$, т. е. $m\mathbf{v}\,d\mathbf{v}=m\frac{d\mathbf{v}^2}{2}$. Это позволяет записать равенство (2) в виде

$$\mathbf{F}\,d\mathbf{r}=\frac{m\,d\mathbf{v}^2}{2}.$$

Так как квадрат вектора равен квадрату его модуля, то $\mathbf{v}^2=v^2$. Полагая, кроме того, массу материальной точки постоянной, получим

$$\mathbf{F}\,d\mathbf{r}=d\left(\frac{mv^2}{2}\right). \tag{3}$$

Величину $E_к=\frac{mv^2}{2}+\text{const}$ называют *кинетической энергией материальной точки*. Полагая, что для покоящейся материальной точки $E_к=0$, получим $\text{const}=0$, а тогда

$$E_к=\frac{mv^2}{2}.$$

Часто используют обозначение $W=\frac{mv^2}{2}$, т. е. $W=E_к$. Величину $dA=\mathbf{F}\,d\mathbf{r}$ называют *элементарной работой силы* $\mathbf{F}$ *на пере-*

мещении $d\mathbf{r}$. С учетом сказанного равенство (3) запишется в виде

$$dA = dE_к$$

и читается так:

Элементарное изменение кинетической энергии материальной точки равно элементарной работе силы, действующей на нее.

Итак,

$$d\mathbf{p} = \mathbf{F}\, dt,$$

$$dE_к = \mathbf{F}\, d\mathbf{r}.$$

Первое из этих равенств описывает действие силы во времени, а второе — в пространстве. (Как мы увидим в IV, § 7 эти два равенства можно объединить в единый закон изменения импульса — энергии материальной точки.) Интегрируя эти равенства, получим:

$$\Delta\mathbf{p} = \int_{t_0}^{t} \mathbf{F}\, dt,$$

$$\Delta E_к = \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}\, d\mathbf{r}.$$

Если на тело действует постоянная во времени и в пространстве сила, то

$$\Delta\mathbf{p} = \mathbf{F}\Delta t,$$

$$\Delta\mathbf{E}_к = \mathbf{F}\Delta\mathbf{r}.$$

В еще более частном случае отсутствия сил

$$\Delta\mathbf{p} = 0 \quad \text{или} \quad \mathbf{p} = \mathrm{const},$$

$$\Delta E_к = 0 \quad \text{или} \quad E_к = \mathrm{const}.$$

Т. е. в отсутствие сил импульс и кинетическая энергия материальной точки сохраняются. Нетрудно установить связь между p и $E_к$. Именно:

$$E_к = \frac{mv^2}{2} = \frac{m^2v^2}{2m} = \frac{p^2}{2m}.$$

Формула

$$E_к = \frac{p^2}{2m}$$

отображает связь между тремя сохраняющимися в отсутствие внешних воздействий величинами $E_к$, p и m.

В начале этого параграфа были указаны две из целого ряда причины, заставившие сформулировать законы изменения импульса и энергии. Но пока что не видно преимуществ равенств $d\mathbf{p} = \mathbf{F}\, dt$ и $dE_к = \mathbf{F}\, d\mathbf{r}$ по сравнению с равенством $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$. Но эти преимущества, и весьма важные, есть. Только разговор о них необходимо отложить до § 16.

§ 7. Работа различных сил. Потенциальная энергия

Опыты показывают, что действие одних тел на другие зависит, вообще говоря, от их взаимного расположения ($\mathbf{r}$), относительной скорости ($\mathbf{v}_{\text{отн}}$) и времени (t), т. е. $\mathbf{F}=\mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}_{\text{отн}}, t)$, причем, как уже говорилось, эта зависимость может оказаться весьма замысловатой. Рассмотрим следующие частные случаи:

1. Сила, действующая на тело со стороны других тел, зависит только от положения этого тела, т. е. $\mathbf{F}=\mathbf{F}(\mathbf{r})$;

2. Сила зависит только от относительной скорости тел, причем сила направлена навстречу этой скорости, т. е.

$$\mathbf{F}=-f(\mathbf{v}_{\text{отн}})\frac{\mathbf{v}_{\text{отн}}}{v_{\text{отн}}}.$$

Примером первых сил могут служить сила тяжести, упругая сила в деформированной пружине, электростатическая сила. Примером вторых — сила сопротивления движущемуся в жидкости или газе телу, сила трения скольжения или сила трения качения.

Все прочие силы (не входящие в эти два частных случая) зависят, вообще говоря, от $\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$ и t и часто очень сложно. Примерами этих сил могут быть силы давления газов в цилиндре, трение покоя, переменные электромагнитные силы и т. д.

Разделение сил на такие группы с выделением сил, относящихся к двум частным случаям, обусловлено тем, что подсчет работы этих двух сил значительно проще подсчета работы остальных сил; кроме того, такая классификация сил позволит сформулировать закон об энергии наиболее удобным для решения ряда задач образом.

Рассмотрим подробно работу указанных сил.

1. Оказывается, что работа силы $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ редко (не будем оговаривать, когда именно) зависит от вида траектории, т. е. каким бы путем тело ни попало из начальной точки в конечную, работа силы $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ будет одной и той же. Это означает, что интеграл $\int_1^2 \mathbf{F}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r}$ зависит для данного тела, подверженного действию такой силы, только от его начального и конечного положений (в зафиксированной, конечно, системе отсчета).

Но это означает, что этот интеграл может быть представлен как разность значений некой величины, зависящей от начального и конечного положения тела в данной системе отсчета, т. е.

$$A_{1,2}=\int_1^2 \mathbf{F}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r}=\Phi(\mathbf{r}_2)-\Phi(\mathbf{r}_1).$$

Оказалось удобным (см. раздел I, § 8) ввести функцию $U(\mathbf{r})=-\Phi(\mathbf{r})$, а тогда

$$A_{1,2}=\int_1^2 \mathbf{F}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r}=-[U(\mathbf{r}_2)-U(\mathbf{r}_1)]. \qquad (1)$$

Величину $U(\mathbf{r})$ называют *потенциальной энергией тела*, подверженного действию силы $\mathbf{F}(\mathbf{r})$. Часто ее обозначают символом $E_п = U$.

Очевидно, для подсчета $U = U(\mathbf{r})$ надо знать явную зависимость $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$, но это уже относится к другому разделу физики — теории поля.

Подсчитаем, однако, $U = U(\mathbf{r})$ для случая силы, возникающей в пружине. В этом случае в силу пропорциональности силы, возникшей в пружине, ее деформации имеем

$$\mathbf{F} = -k(r - r_н)\frac{\mathbf{r}}{r},$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, определяющий положение одного конца пружины по отношению к другому (для простоты закрепленному); $\mathbf{r}_н$ — радиус-вектор этого же конца пружины, когда пружина недеформирована; $r - r_н$ — удлинение пружины; k — коэффициент

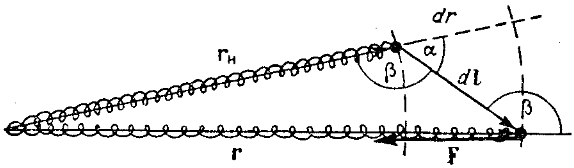

Рис. 11

жесткости пружины, показывающий какая сила возникает в пружине при ее единичной деформации. Очевидно, при растяжении пружины $r > r_н$ и, значит, $\mathbf{F}\uparrow\downarrow\mathbf{r}$, т. е. $\mathbf{F}$ и $\mathbf{r}$ противоположны по направлению, а при сжатии $r < r_н$ и, значит, $\mathbf{F}\uparrow\uparrow\mathbf{r}$, т. е. $\mathbf{F}$ и $\mathbf{r}$ направлены в одну сторону.

Если к подвижному концу пружины прикреплено тело, то деформированная пружина действует на него с силой $\mathbf{F} = -k(r - r_н)\frac{\mathbf{r}}{r}$ и при перемещении тела на $\mathbf{dl}$ пружина совершает работу

$$dA = \mathbf{F}\,\mathbf{dl} = F\,dl\cos\beta = -F\,dl\cos\alpha.$$

Из рис. 11 видно, что величина $dl\cos\alpha$ равна изменению длины пружины, т. е. изменению модуля $\mathbf{r}$ (ибо модуль $\mathbf{r}$ и есть у нас длина пружины). Обозначая $dr = dl\cos\alpha$ и учитывая, что в силу $r_н = \text{const}$ имеет место $dr = d(r - r_н)$, получим

$$dA = -F\,dl\cos\alpha = -F\,dr = -k(r - r_н)\,d(r - r_н).$$

Интегрирование этого равенства дает

$$A_{1,2} = -\int_1^2 k(r - r_н)\,d(r - r_н) = -\left[\frac{k(r_2 - r_н)^2}{2} - \frac{k(r_1 - r_н)^2}{2}\right], \qquad (2)$$

или в соответствии с равенством (1)

$$A_{1,2} = -[U(\mathbf{r}_2) - U(\mathbf{r}_1)]. \tag{3}$$

Сравнивая правые части равенств (2) и (3), имеем

$$\frac{k(r_2 - r_н)^2}{2} - \frac{k(r_1 - r_н)^2}{2} = U(\mathbf{r}_2) - U(\mathbf{r}_1).$$

Но это значит, что слагаемые правой части от слагаемых левой части этого равенства могут отличаться лишь на некоторую постоянную величину, а потому:

$$U(\mathbf{r}) = \frac{k(r - r_н)^2}{2} + \mathrm{const}.$$

Обычно у недеформированной пружины считают $U = 0$. Это означает, что $\mathrm{const} = 0$, а тогда

$$U(\mathbf{r}) = \frac{k(r - r_н)^2}{2},$$

т. е. потенциальная энергия пружины пропорциональна квадрату ее удлинения, а значит, не зависит от знака деформации (растяжение или сжатие), а также от того, каким образом и в каком направлении деформировалась пружина, т. е. $U = U(r - r_н)$.

В разделе «Теория поля» мы познакомимся с другими видами сил, работа которых не зависит от формы траектории и которым в соответствии с этим можно сопоставить понятие потенциальной энергии. Заметим, что такие силы называют потенциальными $\mathbf{F}_п$, а величину $\mathbf{F}_п\, d\mathbf{l}$ обозначают $-dU$, где dU называют элементарным изменением потенциальной энергии тела (в данном случае — пружины).

2. Перейдем к рассмотрению работы сил второго типа, т. е. сил вида $\mathbf{F} = -f(\mathbf{v}_{отн}) \frac{\mathbf{v}_{отн}}{v_{отн}}$. Остановимся на том простейшем случае, когда одно из тел взято за систему отсчета. Тогда, очевидно, для элементарной работы этой силы получим с учетом $\mathbf{v}_{отн} = \mathbf{v}$ и $\cos(\mathbf{F}, d\mathbf{l}) = -1$

$$dA = \boldsymbol{F}(\mathbf{v})\, d\mathbf{l} = \mathrm{F}(\mathbf{v})\, dl \cos(\boldsymbol{F}, d\mathbf{l}) = -F(\mathbf{v})\, dl.$$

Работа же на конечном участке пути будет выражаться равенством

$$A_{1,2} = -\int_1^2 F(\mathbf{v})\, dl.$$

Ясно, что даже в случае $F(\mathbf{v}) = \mathrm{const}$ этот интеграл зависит от того, каким путем — длинным или коротким — тело попало из точки (1) в точку (2).

Таким образом, работа сил, зависящих от относительной скорости, определяется не только силой, действующей на тело, не только начальным и конечным положением тела, но и длиной пути («формой» пути). Подсчет работы этой силы в общем случае — сложная задача и некоторым облегчением здесь служит то, что угол между $\mathbf{F}(\mathbf{v})$ и $d\mathbf{r}$ всегда 180°. Силы этого типа называют *диссипативными* (рассеивающими механическую энергию), ибо они механическую энергию превращают в другие виды (обычно в энергию хаотического движения частиц тела).

Все прочие силы достаточно сложны по своим зависимостям от своих аргументов и их работа считается просто в редких случаях.

Общим для всех сил является то, что при $(\boldsymbol{F}, d\mathbf{l}) = 90°$. ($\boldsymbol{F} \perp \mathbf{v}$ в каждый момент) или при $d\mathbf{l} = 0$ (тело не перемещается) работа силы равна нулю.

§ 8. Закон изменения механической энергии материальной точки

Пусть материальная точка движется под действием некоторых сил из точки (1) в точку (2). Тогда в каждый момент времени

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}_{п} + \mathbf{F}_{д} + \mathbf{F}, \tag{1}$$

где $\mathbf{F}_{п}$ — потенциальная сила, $\mathbf{F}_{д}$ — диссипативная сила, $\mathbf{F}$ — прочие силы.

Умножая (1) на элементарное перемещение $d\mathbf{l} = \mathbf{v}\,dt$ и интегрируя в пределах от первой точки до второй, получим с учетом сказанного в предыдущем параграфе

$$\int_1^2 m\frac{d\mathbf{v}}{dt}\mathbf{v}\,dt = \int_1^2 \mathbf{F}_{п} d\mathbf{l} + \int_1^2 \mathbf{F}_{д} d\mathbf{l} + \int_1^2 \mathbf{F} d\mathbf{l},$$

или

$$\int_1^2 m\mathbf{v}\,d\mathbf{v} = -(E_{п2} - E_{п1}) + A_{д} + A,$$

или

$$(E_{к2} - E_{к1}) = -(E_{п2} - E_{п1}) + A_{д} + A,$$

или

$$(E_{к2} + E_{п2}) - (E_{к1} + E_{п1}) = A_{д} + A. \tag{2}$$

Величина $E = E_{к} + E_{п}$, или $E = W + U$ называется механической энергией тела. Заметим, что если бы мы в разделе I, § 7 вместо функции $-U(\mathbf{r}) = -E_{п}(\mathbf{r})$ оставили функцию $\Phi(\mathbf{r})$, то полная энергия тела выразилась бы разностью $E = W - \Phi$, что выглядело бы довольно некрасиво, несимметрично.

Равенство (2) является наиболее общей формулировкой *закона изменения механической энергии тела* и читается так:

Работа, произведенная над телом непотенциальными силами, равна изменению механической энергии тела.

При $\mathbf{F} = 0$ получим

$$E_2 - E_1 = A_д,$$

и так как $A_д < 0$, то $E_2 < E_1$, т. е. диссипативные силы действительно уменьшают полную механическую энергию тела (переводя ее в другие виды энергии).

Если $\mathbf{F} = 0$ и $\mathbf{F}_д = 0$, то $E_2 - E_1 = 0$ или $E = \mathrm{const}$, и значит

если тело (материальная точка) **не подвергнуто действию непотенциальных** сил, **его полная механическая энергия не меняется.**

Чрезвычайно удобным и наглядным способом описания взаимодействий тел является графический способ, представляющий собой просто-напросто изображение графиков $U(\mathbf{r})$ и $E(\mathbf{r})$ и их внимательное рассмотрение. Такой способ весьма распространен в исследованиях, и мы его, естественно, рассмотрим. Кроме того, в этом способе используется специфическая и весьма выразительная (и распространенная) терминология, на которой не остановиться нельзя.

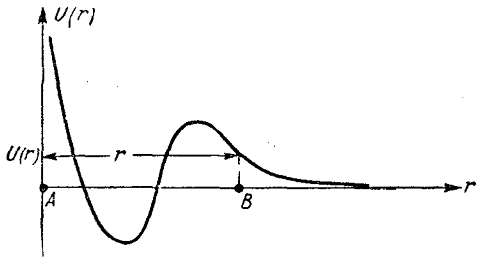

Рис. 12

Мы уже отмечали, что $U = U(\mathbf{r})$ или, что все равно, $U = U(x, y, z)$. Но в простых случаях, связанных с наличием симметрии, $U = U(r)$, т. е. потенциальная энергия взаимодействия двух тел зависит только от расстояния между ними, а от взаимной ориентации (от $\mathbf{r}$) не зависит. Рассмотрим случай $U = U(r)$.

Пусть некоторые два тела A и B взаимодействуют между собой так, что график $U(r)$ имеет вид, изображенный на рис. 12. Рисунок сделан в предположении, что за начало отсчета взято тело A, а тело B находится в рассматриваемый момент на расстоянии r от него, и энергия взаимодействия A и B равна указанной на графике $U(r)$, при этом за уровень отсчета энергии взаимодействия взята та энергия, которой обладают эти тела, находясь на бесконечном расстоянии друг от друга (иными словами, $U \to 0$ при $r \to \infty$).

Изображенный на рис. 13 график $U(r)$ наглядно показывает, что если тела A и B идут из бесконечности друг к другу, то $U(r)$ растет от нуля до некоторого $U_1(r_1)$; при изменении r от r_1 до r_3 $U(r)$ убывает от $U_1(r_1)$ до $U_3(r_3)$, а потом опять растет от $U_3(r_3)$ до $U(r) \to \infty$ при $r \to 0$. При $r_2 < r < \infty$ и $0 < r < r_4$ энергия взаимодействия положительна, а при $r_4 < r < r_2$ — отрицательна. Совершенно очевидно, что все сказанное сразу бросается в глаза при взгляде на график (рис. 13). Но при внимательном рассмотрении графика можно увидеть еще многое другое. Этим мы и займемся. При этом нас совершенно сейчас не интересует вопрос, почему $U(r)$ имеет вид, изображенный на рис. 13. Просто автору захотелось изобразить такую зависимость, или, как принято говорить, такую потенциальную кривую. Мы впоследствии будем иметь дело с целым рядом потенциальных кривых и там уже будет ставиться вопрос о том, почему они такие, а не иные, в каждом конкретном случае. Заодно отметим, что на графиках $U(r)$ взаимодействующие тела не изображают, как это сделано на рис. 12, но полагают, что одно из тел находится в начале координат, а другое — на некотором расстоянии r от него.

Напомним, что выражение «энергия взаимодействия (потенциальная энергия) при таком-то расстоянии r равна такому-то значению $U(r)$», означает, что указанная $U(r)$ больше того значения $U_0 = 0$, которое принято за уровень отсчета, на $U(r)$. В частности, если за $U_0 = 0$ принимают $U(\infty)$ (ту энергию взаимодействия, которой обладают бесконечно удаленные друг от друга тела), то выражение «в данной точке энергия взаимодействия равна $U(r)$» означает, что при данном значении расстояния r между взаимодействующими телами их энергия взаимодействия на $U(r)$ больше, чем при $r \to \infty$.

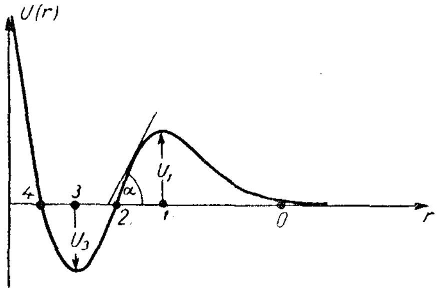

Рис. 13

Далее, надо четко представлять себе, что означает $U(r) > 0$ и $U(r) < 0$. Смысл выражений «положительная энергия взаимодействия» и «отрицательная энергия взаимодействия» следует из формулы для работы потенциальных сил, т. е. из формулы

$$A_{1,2} = -(U_2 - U_1).$$

Если нас интересует значение энергии при каком-то значении r, то, полагая $U_1 = U(r)$, а $U_2 = U(\infty) = 0$, получим

$$A_{r,\infty} = -(U_2 - U_1) = U_1 = U(r).$$

Отсюда ясно, что $U(r) > 0$ означает, что при изменении расстояния между телами от r до бесконечности потенциальные силы совершают положительную работу, а $U(r) < 0$ означает, что $A_{r,\infty} < 0$, т. е. при изменении взаимного расстояния от до r бесконечности потенциальные силы совершают отрицательную работу.

Часто вместо выражения «при изменении расстояния от r до бесконечности» употребляют выражение «при переходе тел из заданного расположения в положение, принятое за уровень отсчета потенциальной энергии».

На графиках $U(r)$ часто встречаются участки типа $4-3-2$ и участки типа $3-1-0$. Участки типа $4-3-2$ называют потенциальными ямами, а типа $2-1-0$ — потенциальными буграми (чаще — потенциальными барьерами). Такие названия даны, видимо, из-за сходства с теми изображениями ям и холмов, которые рисуют на картинках малыши. Можно было бы дать и другие названия или вообще не давать таким участкам специальных названий, но от этого едва ли кто выиграл бы. Поэтому примем эти названия, уточнив однако их смысл. Именно выражение «тело находится в потенциальной яме» означает, что интересующее нас тело B находится на таком расстоянии $r_4 < r < r_2$ от тела A, что зависимость $U(r)$ на данном интервале расстояний такова, как изображено на участке $4-3-2$. Выражение «тело находится на потенциальном бугре» означает, что тела B и A находятся на таком расстоянии $r_2 < r < r_0$ друг от друга, что на этом интервале расстояний $U(r)$ для этих тел имеет такую зависимость от r, как изображено на участке $0-1-2$.

Расстояния $r_2 - r_4$ и $r_0 - r_2$ называют *шириной потенциальной ямы и потенциального бугра* (барьера) соответственно.

Величины $U_3(r_3)$ и $U_1(r_1)$ называют *глубиной потенциальной ямы и высотой потенциального барьера* соответственно. Очевидно, U_3 и U_1 показывают, какую работу совершат потенциальные силы при перемещении тела B из r_3 или r_1 на бесконечность. Энергетическое расстояние между U_1 и U_3, равное $U_1 - U_3$, показывает, какую минимальную работу надо совершить внешним силам, чтобы перенести тело B из точки r_3 (со дна потенциальной ямы) в точку r_1 (на вершину потенциального барьера) в отсутствие непотенциальных сил и без изменения кинетической энергии тела B. Это следует, конечно, из формулы

$$A + A_{\text{д}} = \Delta E = \Delta U.$$

Из рис. 12 видно, что в разных местах (при разных r) график $U(r)$ имеет разный наклон. Каков физический смысл крутизны графика? Усмотрим его из того, что, с одной стороны, по определению производной

$$\frac{dU}{dr} = \operatorname{tg}\alpha, \text{ или } dU = dr\operatorname{tg}\alpha,$$

с другой стороны, работа потенциальных сил определяется равенством (с учетом того, что $\mathbf{r} \parallel \mathbf{F}_{\text{п}}$ в нашем случае)

$$F_{\text{п}}dr = -dU.$$

Сравнение этих двух формул приводит к тому, что

$$\operatorname{tg}\alpha = -F_{\text{п}},$$

т. е. тангенс угла наклона кривой $U(r)$ в каком-либо месте равен величине силы (с обратным, однако, знаком), с которой тело A действует на тело B, находящееся в точке r. При этом положительный наклон графика означает отрицательную силу, т. е. притяжение тела B к телу A, а отрицательный наклон — отталкивание. Так, на участках $0 < r < r_3$ и $r_1 < r < r_0$ $\operatorname{tg}\alpha < 0$, $F_п > 0$ и, значит, на тело B действует сила, направленная в сторону роста r. На участке же $r_3 < r < r_1$ $\operatorname{tg}\alpha > 0$ и $F_п < 0$, что означает притяжение тела B к телу A, или, что все равно, $\mathbf{F}_п$ направлена в сторону убывающих значений r.

Обычно совместно с графиком $U(r)$ рисуют и график полной энергии $E(r)$. Если на тело B действует только потенциальная сила со стороны тела A, то E не зависит от r, или, что все равно, $E = W + U = \text{const}$, и ее график изобразится прямой, параллельной оси r. Из того, что

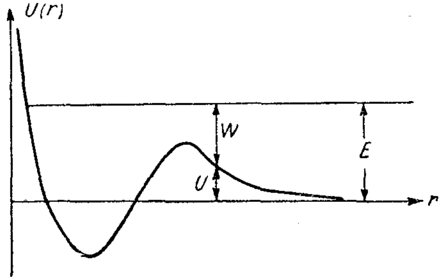

Рис. 14

$$E = W + U,$$

следует

$$W = E - U,$$

т. е. если нас заинтересует кинетическая энергия тела в какой-либо точке r, то она найдется как энергетическое расстояние между графиками E и $U(r)$ в точке r. На рис. 14 указаны значения E, U и W в некоторой точке r.

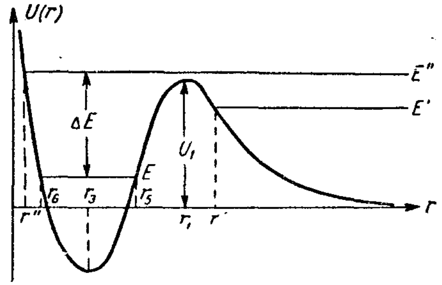

Рис. 15

Рассмотрим теперь характер движения тела B, обладающего энергией E' по отношению к телу A. Пусть тело B, имея энергию E', идет из бесконечности к телу A, создающему по отношению к телу B изображенное на рис. 15 поле $U(r)$. Если других сил, действующих на тело B, нет, то $E' = \text{const}$ и по мере приближения тела B к телу A $U(r)$ нарастает, а $W = E - U$ убывает; тело B движется замедленно и в некоторой точке r', где графики E' и $U(r)$ сходятся, тело останавливается, ибо в этой точке $W = E - U(r') = 0$. Поскольку на тело B со стороны A действует сила отталкивания (ибо здесь $\operatorname{tg}\alpha < 0$ и $F_п > 0$), то оно пойдет вправо с положительным ускорением и $W = E' - U(r)$ будет нарастать; при $r \to \infty$ $U(r) \to 0$ и $W = E - U(r) \to E$.

Если тело B имеет энергию $E'' > U_1$ (большую высоты барьера), то оно до точки r_1 будет из бесконечности двигаться замедленно, от точки r_1 до точки r_3 — ускоренно, и от r_3 до r'' — замедленно. При $r = r''$ $W = E'' - U(r'') = 0$, что означает остановку тела B

в точке r''. Поскольку на него действует сила $F_п > 0$, то оно пойдет на бесконечность, проходя все этапы в обратном порядке.

Может оказаться так, что во время прохождения телом B участка $r'' < r < r_1$, оно по какой-либо причине (например, из-за столкновения с каким-то телом C, оказавшимся рядом, или из-за каких-то возникших почему-либо диссипативных сил) потеряет часть энергии ΔE. Тогда энергия тела B может стать меньше высоты барьера U_1. Тело B теперь уже не сможет проникнуть за барьер и вынуждено будет двигаться около тела A в интервале $r_6 < r < r_5$ (рис. 14), величина которого определяется значением оставшейся у тела B энергии. Если, в частности, E окажется равной $U_3(r_3)$, то тело B будет покоиться в точке r_3, или, как говорят, оно будет покоиться на дне потенциальной ямы.

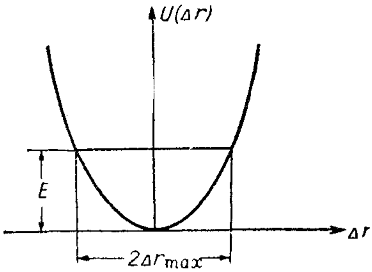

Рис. 16

Тело B, неспособное из-за малости энергии E уйти на бесконечность от тела A, называется *связанным* с телом A. Очевидно, для того, чтобы тело B стало вновь свободным, ему надо откуда-то сообщить энергию

$$\Delta E > U_1 - E.$$

Ясно также, что если тело находится в потенциальной яме, то оно будет колебаться в ней с размахом $r_5 - r_6$, определяемым запасом энергии E. Если при этом на тело будут действовать диссипативные силы, то E будет убывать, размах $r_5 - r_6$ — тоже и, возможно, при $E = U_3(r_3)$ наступит $r_5 - r_6 = 0$, т. е. прекращение колебаний.

Коль скоро мы уже знаем выражение для потенциальной энергии пружины, т. е. $U = \frac{k\Delta r^2}{2}$, где Δr — деформация, то не представляет труда изобразить потенциальную кривую для этого случая. Если один конец пружины закрепить, а к другому прикрепить тело B, то тело B будет двигаться (колебаться) около закрепленного конца, причем размах этих колебаний $2\Delta r_{max}$ определяется запасом энергии тела и пружины (запасом $E = \frac{mv^2}{2} + \frac{k\Delta r^2}{2}$); рис. 16 поясняет сказанное.

Заметим, что положение r_3 называется устойчивым, а положение r_1 неустойчивым равновесием; при этом сами названия говорят почему.

§ 9. Закон изменения импульса и энергии системы материальных точек

Пусть имеется система из N взаимодействующих между собой материальных точек, движущихся произвольным образом при наличии сил со стороны не входящих в эту систему тел, т. е. при наличии внешних для этой системы сил.

Для тела номер i по второму закону Ньютона имеем

$$d\mathbf{p}_i = (\mathbf{F}_{i,1} + \mathbf{F}_{i,2} + \ldots + \mathbf{F}_{i,k} + \ldots + \mathbf{F}_{i,N})\,dt + \varphi_i dt,$$

где $\mathbf{F}_{i,k}$ — сила, действующая на тело номер i со стороны тела номер k этой же системы; φ_i — внешняя сила, действующая на тело номер i.

Составляя такие уравнения для всех тел системы и складывая, получим

$$d\mathbf{p}_1 + \ldots + d\mathbf{p}_i + \ldots + d\mathbf{p}_N = (\mathbf{F}_{1,2} + \ldots + \mathbf{F}_{i,k} + \ldots + \mathbf{F}_{k,i} + \ldots$$
$$\ldots + \mathbf{F}_{N,N-1})\,dt + (\varphi_1 + \ldots + \varphi_N)\,dt,$$

или (группируя силы взаимодействия попарно)

$$d\mathbf{p}_1 + \ldots + d\mathbf{p}_N = [(\mathbf{F}_{1,2} + \mathbf{F}_{2,1}) + \ldots + (\mathbf{F}_{i,k} + \mathbf{F}_{k,i}) + \ldots$$
$$\ldots + (\mathbf{F}_{N-1,N} + \mathbf{F}_{N,N-1})]\,dt + (\varphi_1 + \ldots + \varphi_N)\,dt.$$

Выражения в квадратной скобке в соответствии с третьим законом Ньютона (когда он применим!) равны нулю, а тогда, обозначая сумму всех внешних сил через φ, имеем

$$d\mathbf{p}_1 + \ldots + d\mathbf{p}_N = \varphi dt$$

или, короче, с учетом $d\mathbf{p}_1 + \ldots + d\mathbf{p}_N = d\mathbf{p}$

$$d\mathbf{p} = \varphi dt. \tag{1}$$

Интегрируя это равенство, получим

$$\mathbf{p} - \mathbf{p}_0 = \int_{t_0}^{t} \varphi(t)\,dt, \tag{2}$$

где $\mathbf{p}_0$ и $\mathbf{p}$ — импульсы системы тел в моменты t_0 и t соответственно.

Равенства (1) и (2) называют *законом изменения* суммарного *импульса системы* и читают так:

Изменение суммарного импульса системы тел равно импульсу внешних сил.

Очевидно, при $\varphi = 0$ закон изменения импульса вырождается в закон его сохранения

$$\mathbf{p} - \mathbf{p}_0 = 0, \tag{3}$$

или

$$\mathbf{p} = \sum \mathbf{p}_i = \mathrm{const}. \tag{4}$$

Система тел, на которую не действуют внешние силы, называется *замкнутой*. Совершенно очевидно, что таких систем нет. Но есть системы тел, на которые действуют внешние силы, малые по сравнению с силами взаимодействия внутри системы, а также такие системы, на которые действуют хоть и не малые, но взаимоуравновешивающие друг друга силы. Такие системы называют *квазизамкнутыми*.

С учетом сказанного (3) и (4) можно прочитать так:

В замкнутой (квазизамкнутой) системе тел суммарный импульс не меняется, а лишь перераспределяется между телами системы при их взаимодействии.

Получим закон изменения механической энергии для системы N взаимодействующих материальных точек. Разобьем все силы, действующие на тело номера i, на

$\mathbf{F}_{i,k}$ — потенциальную силу со стороны тела номер k этой системы;

$\mathbf{f}_{i,k}$ — диссипативную силу со стороны тела номер k;

φ_i — диссипативную силу, действующую со стороны среды или извне;

$\mathbf{\Phi}_i$ — внешнюю непотенциальную и недиссипативную силу;

$\mathbf{Q}_i$ — внешнюю потенциальную силу.

При умножении уравнения второго закона Ньютона на элементарное перемещение $d\mathbf{r}_i$ тела номер i получим с учетом того, что $m_i\mathbf{a}_i\,d\mathbf{r}_i = m_i\mathbf{v}_i\,d\mathbf{v}_i = d\left(\frac{m_i v_i^2}{2}\right) = dW_i$,

$$dW_i = (\mathbf{F}_{i,1} + \ldots + \mathbf{F}_{i,N})\,d\mathbf{r}_i + (\mathbf{f}_{i1} + \ldots + \mathbf{f}_{i,N})\,d\mathbf{r}_i + \varphi_i\,d\mathbf{r}_i + \mathbf{\Phi}_i\,d\mathbf{r}_i + \mathbf{Q}_i\,d\mathbf{r}_i.$$

Составляя такие равенства для всех тел системы и группируя при суммировании равенств работы сил взаимодействия попарно, получим

$$dW_1 + \ldots + dW_N = [(\mathbf{F}_{1,2}\,d\mathbf{r}_1 + \mathbf{F}_{2,1}\,d\mathbf{r}_2) + \ldots + (\mathbf{F}_{N-1,N}\,d\mathbf{r}_{N-1} + \mathbf{F}_{N,N-1}\,d\mathbf{r}_N)] + [(\mathbf{f}_{1,2}\,d\mathbf{r}_1 + \mathbf{f}_{2,1}\,d\mathbf{r}_2) + \ldots + (\mathbf{f}_{N-1,N}\,d\mathbf{r}_{N-1} + \mathbf{f}_{N,N-1}\,d\mathbf{r}_N)] + (\varphi_1\,d\mathbf{r}_1 + \ldots + \varphi_N\,d\mathbf{r}_N) + (\mathbf{\Phi}_1\,d\mathbf{r}_1 + \ldots + \mathbf{\Phi}_N\,d\mathbf{r}_N) + (\mathbf{Q}_1\,d\mathbf{r}_1 + \ldots + \mathbf{Q}_N\,d\mathbf{r}_N). \quad (5)$$

Левая часть равенства, очевидно, представляет элементарное изменение кинетической энергии системы dW; первая квадратная скобка справа — элементарная работа потенциальных сил системы, которая равна изменению потенциальной энергии взаимодействия с обратным знаком, т. е. $-dU_{\text{вз}}$; вторая квадратная скобка — элементарная работа внутренних диссипативных сил системы $dA_{\text{д.внутр}}$; третья скобка — элементарная работа внешних диссипативных сил $dA_{\text{д.внешн}}$; четвертая — работа внешних непотенциальных и недиссипативных сил dA; последняя скобка — элементарная работа внешних потенциальных сил, равная взятому с обратным знаком изменению потенциальной энергии системы, находящейся под действием этих сил, т. е. $-dU_{\text{внешн}}$.

Следует отметить, что суммарная работа сил взаимодействия тел системы не равна, вообще говоря, нулю, ибо хоть силы взаимодействия и равны (с противоположными, конечно, знаками), но не равны перемещения взаимодействующих тел, т. е. $\mathbf{F}_{ik}\,d\mathbf{r}_i \neq \neq \mathbf{F}_{ki}\,d\mathbf{r}_k$ из-за $d\mathbf{r}_i \neq d\mathbf{r}_k$, хотя $\mathbf{F}_{ik} = -\mathbf{F}_{ki}$.

Учитывая сказанное, равенство (5) можно записать в виде

$$dW = -dU_{\text{вз}} + dA_{\text{д.внутр}} + dA_{\text{д.внешн}} + dA - dU_{\text{внешн}},$$

или

$$dW + dU_{\text{вз}} + dU_{\text{внешн}} = (dA_{\text{д.внутр}} + dA_{\text{д.внешн}}) + dA,$$

или

$$dW + dU = dA_{\text{д}} + dA,$$

или

$$dE = dA_{\text{непот}}.$$

Интегрируя последнее равенство, получим

$$E_2 - E_1 = A_{\text{непот}}.$$

Все эти равенства есть выражения *закона изменения энергии системы материальных точек*:

Работа, произведенная над системой всеми непотенциальными силами (как внутренними, так и внешними), равна изменению механической энергии системы.

При отсутствии внешних сил и диссипативных сил внутри системы закон изменения энергии вырождается в закон ее сохранения

$$E_2 - E_1 = 0,$$

или

$$(W_2 + U_2) - (W_1 + U_1) = 0,$$

или

$$E = W + U = \text{const}.$$

Закон сохранения энергии читается так:

В любой системе тел (как замкнутой, так и незамкнутой), неподвергнутых действию непотенциальных сил, полная механическая энергия не меняется, а лишь перераспределяется между телами системы и превращается из одного вида в другой за счет взаимодействия тел.

Как видно, изменение энергии системы более «привередливо» к классификации сил, чем изменение импульса. Это вызвано тем, что энергия может превращаться из одних видов в другие (в том числе и немеханические); для импульса подобные превращения не имеют места, поэтому импульс «безразличен» к роду сил, вызвавших его изменение.

§ 10. Уравнение движения тела переменной массы (уравнение Мещерского)

Второй закон Ньютона в уже записанной форме мало удобен для описания движения тел типа ракет, или иных реактивных устройств, т. е. таких тел, у которых масса во время движения не остается постоянной. (Такие тела явно меняют свою структуру, выбрасывая, например, что-то и потому их материальными точками считать нельзя, но их можно рассматривать как систему материальных точек.) В этом случае более удобным является уравнение Мещерского, которое мы и выведем.

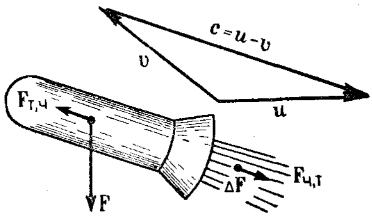

Рис. 17

Пусть тело (ракета) имеет в момент времени t массу m и скорость $\mathbf{v}$ в некоторой инерциальной системе отсчета, и пусть из этого тела непрерывным потоком вылетают частицы, после вылета имеющие скорость $\mathbf{u}$ относительно той же инерциальной системы отсчета, что и тело массы m (рис. 17).

Тогда на тело будут действовать, кроме некоторой внешней силы $\mathbf{F}$, еще и реактивная сила $\mathbf{F}_{т,ч}$ со стороны вылетающих частиц. По второму закону Ньютона имеем для тела

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_{т,ч}.$$

По третьему закону $\mathbf{F}_{т,ч} = -\mathbf{F}_{ч,т}$, поэтому

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} - \mathbf{F}_{ч,т}. \qquad (1)$$

Но по второму закону для вылетающих частиц получим

$$d\mathbf{p}_ч = (\mathbf{F}_{ч,т} + \Delta\mathbf{F})\, dt,$$

где $\Delta\mathbf{F}$ — сила, действующая на частицы извне. Поскольку частицы с ракетой во всех интересных случаях взаимодействуют много интенсивней, чем с любыми другими (обычно удаленными) телами, то $\Delta F \ll F_{ч,т}$, а потому

$$d\mathbf{p}_ч = \mathbf{F}_{ч,т}\, dt. \qquad (2)$$

Поскольку частицы массой $dm_ч$ при вылете из ракеты меняют свою скорость от $\mathbf{v}$ до $\mathbf{u}$, то

$$d\mathbf{p}_ч = dm_ч\,(\mathbf{u} - \mathbf{v}).$$

Но $(\mathbf{u} - \mathbf{v})$ — скорость частиц относительно ракеты; обозначая ее буквой **c**, получим

$$d\mathbf{p}_ч = dm_ч\mathbf{c}.$$

И, значит, в силу (2) имеет место равенство

$$dm_ч\mathbf{c} = \mathbf{F}_{ч,т}\,dt. \tag{3}$$

Учитывая неизменность массы системы тело — частицы, т. е. факт $m + m_ч = \text{const}$, получим $dm_ч = -dm$, что при подстановке в (3) дает

$$\mathbf{F}_{ч,т} = -\frac{dm}{dt}\mathbf{c}.$$

Подстановка этого значения $\mathbf{F}_{ч,т}$ в (1) даст

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} + \frac{dm}{dt}\mathbf{c}.$$

Величину $\frac{dm}{dt}$, являющуюся скоростью изменения массы тела, обозначают обычно буквой μ, а тогда

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} + \mu\mathbf{c}.$$

Если частицы вылетают из тела, то масса тела убывает и $\mu < 0$, а реактивная сила $\mu\mathbf{c}$ направлена противоположно вектору **c**. Если частицы налетают на тело, то масса тела растет, $\mu > 0$ и реактивная сила $\mu\mathbf{c}$ направлена в ту же сторону, что и вектор **c**. (Часто величину μ считают положительной и вместо $\frac{dm}{dt}$ пишут $\pm\mu$.)

Если одни частицы отделяются от тела, а другие налетают на него, то уравнение Мещерского удобно записать в виде

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} + \mu_н\mathbf{c}_н + \mu_в\mathbf{c}_в.$$

Значки «в» и «н» означают соответственно «вылетающие» и «налетающие».

Существенно помнить, что $d\mathbf{p}_ч = dm_ч(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = dm_ч\mathbf{c}$ верно лишь при абсолютно неупругом взаимодействии частиц с телом, т. е. когда или начальная скорость вылетающих частиц или конечная скорость налетающих частиц равна скорости тела.

§ 11. Центр масс (центр инерции) системы материальных точек и закон его движения

Пусть имеются N материальных точек, как угодно взаимодействующих меж собой и подверженных действию любых внешних сил. Если $\mathbf{r}_i$ — радиус-вектор точки номер i, то *центром масс* этой *системы материальных точек* называется точка, радиус-вектор которой определяется равенством

$$\mathbf{r}_c = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + \ldots + m_N\mathbf{r}_N}{m_1 + \ldots + m_N} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i\mathbf{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i\mathbf{r}_i}{m}. \tag{1}$$

В случае сплошного тела

$$\mathbf{r}_c = \frac{\int \mathbf{r}\, dm}{\int dm} = \frac{\int \mathbf{r}\, dm}{m}.$$

Можно показать, что центр масс системы — это такая точка (точка в геометрическом смысле), в которую сжалась бы система, подверженная только силам взаимного тяготения (тяготения, а не любого притяжения).

Дифференцируя равенство (1) по времени, получим

$$\mathbf{v}_c = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i\mathbf{v}_i}{m} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \mathbf{p}_i}{m} = \frac{\mathbf{p}}{m}. \tag{2}$$

Дифференцируя равенство (2) по времени, получим

$$\mathbf{a}_c = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \cdot \frac{1}{m}.$$

А так как $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}$ (где $\mathbf{F}$ — внешняя сила, действующая на систему N материальных точек), то

$$\mathbf{a}_c = \frac{\mathbf{F}}{m}. \tag{3}$$

Равенства (2) и (3) говорят о том, что центр масс системы материальных точек движется как материальная точка массы m, подверженная действию силы $\mathbf{F}$. В частности, если $\mathbf{F} = 0$, то $\mathbf{a}_c = 0$ и $\mathbf{v}_c = \mathrm{const}$, т. е. центр масс такой системы движется равномерно относительно инерциальной системы отсчета. Это позволяет связать с ним систему отсчета, которая будет тоже инерциальной. Большое число задач решается наиболее простым образом именно в системе отсчета, связанной с центром масс.

Заметим, что если систему поместить в однородное поле тяжести, то центр масс системы будет одновременно и центром тяжести системы (точкой приложения силы тяжести).

Проиллюстрируем теперь все сказанное выше на примере задачи о соударении двух тел. Решим эту задачу в системе отсчета, связанной с центром масс. При этом мы будем полагать, что при соударении тела во вращение не пришли (иначе к ним нельзя применять понятие материальная точка).

Определим удар как столь кратковременное взаимодействие тел, что внешние воздействия существенных изменений в соударяющихся телах не вызывают. Но это означает, что система соударяющихся тел есть *замкнутая* система и, значит, в ней закон сохранения импульса выполняется всегда, а закон сохранения механической энергии выполняется лишь в случае абсолютно упругого удара (это требование можно рассматривать, если угодно, как *определение абсолютно упругого* удара).

Заметим, что часто определяют абсолютно упругий удар как такое кратковременное взаимодействие, после которого форма соударившихся тел полностью восстанавливается. Такое определение верно лишь в рамках схемы протяженное упругое тело. В рамках же схемы материальная точка говорить о какой-либо форме тела бессмысленно (по определению термина материальная точка).

Рассмотрим абсолютно упругий удар двух материальных точек с массами m_1 и m_2. Перед ударом они имели скорости $\mathbf{v}_{1c}$ и $\mathbf{v}_{2c}$ по отношению к центру масс, а после удара — $\mathbf{u}_{1c}$ и $\mathbf{u}_{2c}$. В этом случае имеем

до удара

$$m_1\mathbf{v}_{1c}+m_2\mathbf{v}_{2c}=(m_1+m_2)\,\mathbf{v}_{cc}; \tag{4}$$

после удара

$$m_1\mathbf{u}_{1c}+m_2\mathbf{u}_{2c}=(m_1+m_2)\,\mathbf{u}_{cc}. \tag{5}$$

Так как $\mathbf{v}_{cc}$ и $\mathbf{u}_{cc}$ суть скорости (до и после удара) центра масс по отношению к центру масс, то $\mathbf{v}_{cc}=\mathbf{u}_{cc}=0$, а потому равенства (4) и (5) примут вид

$$m_1\mathbf{v}_{1c}+m_2\mathbf{v}_{2c}=0, \tag{6}$$

$$m_1\mathbf{u}_{1c}+m_2\mathbf{u}_{2c}=0. \tag{7}$$

Закон сохранения энергии дает

$$\frac{m_1v_{1c}^2}{2}+\frac{m_2v_{2c}^2}{2}=\frac{m_1u_{1c}^2}{2}+\frac{m_2u_{2c}^2}{2}. \tag{8}$$

Выражая из (7), например, $\mathbf{u}_{2c}=-\frac{m_1}{m_2}\mathbf{u}_{1c}$ и подставляя в (8), получим после очевидных преобразований

$$u_{1c}=\sqrt{\frac{v_{1c}^2+\frac{m_2}{m_1}v_{2c}^2}{1+\frac{m_1}{m_2}}}.$$

Подстановка $\mathbf{u}_{1c}=-\frac{m_2}{m_1}\mathbf{u}_{2c}$ в (8) даст

$$u_{2c}=\sqrt{\frac{v_{2c}^2+\frac{m_1}{m_2}v_{1c}^2}{1+\frac{m_2}{m_1}}}$$

Мы нашли модули скоростей. Но из (6) и (7) видно, что $\mathbf{v}_{1c} \uparrow\downarrow \mathbf{v}_{2c}$ и $\mathbf{u}_{1c} \uparrow\downarrow \mathbf{u}_{2c}$. При этом, поскольку при ударе тела друг сквозь друга не прошли, то ясно, что $\mathbf{u}_{1c} \uparrow\downarrow \mathbf{v}_{1c}$ и $\mathbf{u}_{2c} \uparrow\downarrow \mathbf{v}_{2c}$.

Таким образом,

$$\mathbf{u}_{1c} = -\sqrt{\frac{v_{1c}^2 + \frac{m_2}{m_1} v_{2c}^2}{1 + \frac{m_1}{m_2}}} \cdot \frac{\mathbf{v}_{1c}}{v_{1c}}, \tag{9}$$

$$\mathbf{u}_{2c} = -\sqrt{\frac{v_{2c}^2 + \frac{m_1}{m_2} v_{1c}^2}{1 + \frac{m_2}{m_1}}} \cdot \frac{\mathbf{v}_{2c}}{v_{2c}}. \tag{10}$$

В случае абсолютно неупругого удара (такого, в результате которого тела двигаются совместно — «слипаются») $\mathbf{u}_{1c} = \mathbf{u}_{2c}$ (по определению такого удара) и $m_1\mathbf{u}_{1c} = -m_2\mathbf{u}_{2c}$ (что следует из (7)). Эти два равенства дают $\mathbf{u}_{1c} = \mathbf{u}_{2c} = 0$. При этом механическая энергия после удара будет равна нулю. Очевидно, вся механическая энергия соударявшихся тел перешла во внутреннюю.

Уравнения (4)—(10) справедливы лишь в системе отсчета, связанной с центром масс!

Если нас заинтересуют, например, скорости тел в некоторой другой системе отсчета, по отношению к которой центр масс этих тел движется со скоростью $\mathbf{v}_c$ (или, как это следует из закона сохранения импульса при ударе, со скоростью $\mathbf{v}_c = \mathbf{u}_c$), то

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_c + \mathbf{v}_{1c}, \qquad \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_c + \mathbf{u}_{1c},$$

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_c + \mathbf{v}_{2c}, \qquad \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_c + \mathbf{u}_{2c}$$

со всеми вытекающими отсюда следствиями.

§ 12. Момент импульса системы материальных точек и закон его изменения

Часто приходится рассматривать такое движение материальной точки, при котором она обращается около некоторой точки — центра вращения. В этом случае удобно описывать движение материальной точки с помощью понятия *момента импульса* (момента количества движения) этой *материальной точки по отношению к центру обращения.*

Эта характеристика движения материальной точки определяется равенством

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p},$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор материальной точки по отношению к центру обращения O; $\mathbf{p}$ — ее импульс по отношению к системе отсчета, связанной с центром обращения O; $\mathbf{L}$ — момент импульса по отношению к той же точке — центру обращения.

При этом за начало отсчета берут ту точку, вокруг которой происходит движение интересующей нас материальной точки (рис. 18).

Изменение момента импульса определяется моментом сил, действующих на материальную точку. *Момент силы* **M** *по отношению к некоторой точке определяется равенством*

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F},$$

где **r** — радиус-вектор точки приложения силы, отсчитанный от центра вращения, т. е. все тот же радиус-вектор материальной точки, движение которой нас интересует.

Поскольку **F**, вообще говоря, не обязана совпадать по направлению с **p**, то в общем случае и **M** не совпадает по направлению с **L**.

Закон изменения момента количества движения материальной точки (момента импульса ее) имеет вид

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}.$$

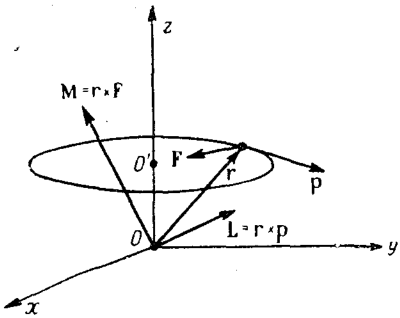

Рис. 18

В случае движения одной материальной точки этот закон может быть получен как следствие второго закона Ньютона. Действительно, умножая слева векторно на **r** уравнение

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F},$$

получим

$$\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}, \tag{1}$$

так как

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{v} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt},$$

то в силу $\mathbf{v} \times \mathbf{p} = 0$ (векторы **v** и **p** параллельны) имеем

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt}.$$

Поэтому равенство (1) может быть записано в виде

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad \text{или} \quad \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}.$$

Конечно, будучи полученным как следствие уравнения $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}$, уравнение $\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}$ ничего в принципе нового с собой не несет. Просто им часто удобнее пользоваться по сравнению с исходным уравнением.

При $\mathbf{M}=0$ закон изменения $\mathbf{L}$ превращается в закон его сохранения.

Если через центр обращения O провести какие-либо оси, то *составляющие векторов* $\mathbf{L}$ *и* $\mathbf{M}$ *вдоль этих осей* называют соответственно *моментами импульса* и *моментами силы относительно этих осей*. Из этого определения следует, что моменты $\mathbf{L}$ и $\mathbf{M}$ по отношению к какой-либо оси и по отношению к какой-либо точке — существенно различные величины. Правда, в случае оси, проведенной через центр вращения нормально плоскости, содержащей $\mathbf{r}$ и $\mathbf{p}$ (вдоль $\mathbf{L}$), момент импульса относительно этой оси равен моменту импульса относительно центра. Аналогично обстоит дело и с моментом силы $\mathbf{M}$: если провести ось через начало отсчета O' перпендикулярно плоскости, в которой лежат $\mathbf{r}$ и $\mathbf{F}$, то момент силы относительно такой оси совпадает с моментом этой силы относительно точки, от которой проводится $\mathbf{r}$.

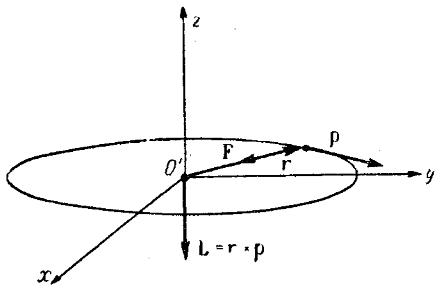

Рис. 19

Отметим, что момент импульса и момент силы суть величины, значения которых, как это следует из их определения, зависят не только от выбора тела отсчета, но и от выбора начала отсчета для $\mathbf{r}$. Кроме того, момент импульса $\mathbf{L}$ может быть неизменным для случая выбора начала координат (начала отсчета $\mathbf{r}$) в одной точке и будет переменным для случая выбора начала координат в другой точке; это следует из равенства $\mathbf{L}=\mathbf{r}\times\mathbf{p}$. Рис. 19 иллюстрирует сказанное на примере движения планеты вокруг неподвижного Солнца. Если взять за начало отсчета центр Солнца, то в силу $\mathbf{F}\uparrow\downarrow\mathbf{r}$ $\mathbf{M}=0$ и $\frac{d\mathbf{L}}{dt}$ планеты по отношению к Солнцу равен нулю. Но стоит взять начало отсчета $\mathbf{r}$ в любой другой точке, как $\mathbf{r}$ не будет лежать вдоль линии действия $\mathbf{F}$, момент силы, действующей на планету, уже не будет равен нулю (и даже будет, вообще говоря, переменным), а значит, момент импульса $\mathbf{L}$ планеты по отношению к такой точке будет переменным (рис. 18).

Из закона изменения момента импульса для одной материальной точки с помощью третьего закона Ньютона можно получить закон изменения момента импульса системы материальных точек. Покажем это.

Пусть имеется N материальных точек, как угодно взаимодействующих между собой и подвергнутых действию внешних сил.

Взяв за начало отсчета некоторую точку O в инерциальной системе, получим для i-й материальной точки

$$\frac{d\mathbf{L}_i}{dt}=\mathbf{r}_i\times\mathbf{F}_i+\mathbf{r}_i\times\sum_{k=1}^{N}\mathbf{f}_{i,k},$$

где $\mathbf{F}_i$ — сила, действующая на эту материальную точку i извне; $\sum\limits_{k=1}^{N}\mathbf{f}_{i,k}$ — суммарная сила, действующая на эту же материальную точку со стороны остальных материальных точек рассматриваемой системы.

Написав такие равенства для всех материальных точек и сложив их, получим

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{d\mathbf{L}_i}{dt}=\sum_{i=1}^{N}\mathbf{r}_i\times\mathbf{F}_i+\sum_{i=1}^{N}\mathbf{r}_i\times\sum_{k=1}^{N}\mathbf{f}_{i,k}. \tag{2}$$

Поскольку сумма производных равна производной от суммы, то

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{d\mathbf{L}_i}{dt}=\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{L}_i=\frac{d\mathbf{L}}{dt},$$

т. е. в левой части равенства стоит изменение суммарного момента импульса $\mathbf{L}$.

Первая сумма справа, очевидно, есть суммарный момент всех внешних сил, действующих на систему материальных точек. Двойная же сумма в правой части равенства равна нулю. Чтобы увидеть это, перепишем ее в развернутом виде:

$$\sum_{i=1}^{N}\mathbf{r}_i\times\sum_{k=1}^{N}\mathbf{f}_{i,k}=\mathbf{r}_1\times(\mathbf{f}_{1,2}+\mathbf{f}_{1,3}+\ldots+\mathbf{f}_{1,N})+\ldots$$
$$\ldots+\mathbf{r}_i\times(\mathbf{f}_{i,1}+\ldots+\mathbf{f}_{i,k}+\ldots+\mathbf{f}_{i,N})+\ldots$$
$$\ldots+\mathbf{r}_k\times(\mathbf{f}_{k,1}+\ldots+\mathbf{f}_{k,i}+\ldots+\mathbf{f}_{k,N})+\ldots$$
$$\ldots+\mathbf{r}_N\times(\mathbf{f}_{N,1}+\ldots+\mathbf{f}_{N,N-1}).$$

Видно, что в первой скобке есть произведение $\mathbf{r}_1\times\mathbf{f}_{1,N}$, а в последней — $\mathbf{r}_N\times\mathbf{f}_{N,1}$; в i-й скобке содержится $\mathbf{r}_i\times\mathbf{f}_{i,k}$, а в k-й — $\mathbf{r}_k\times\mathbf{f}_{k,i}$ и т. д. Группируя попарно такие произведения, получим

$$\sum_{i=1}^{N}\mathbf{r}_i\times\sum_{k=1}^{N}\mathbf{f}_{i,k}=(\mathbf{r}_1\times\mathbf{f}_{1N}+\mathbf{r}_N\times\mathbf{f}_{N,1})+\ldots$$
$$\ldots+(\mathbf{r}_i\times\mathbf{f}_{i,k}+\mathbf{r}_k\times\mathbf{f}_{k,i})+\ldots$$

По третьему закону Ньютона $\mathbf{f}_{i,k}=-\mathbf{f}_{k,i}$, а потому

$$(\mathbf{r}_i\times\mathbf{f}_{i,k}+\mathbf{r}_k\times\mathbf{f}_{k,i})=(\mathbf{r}_i\times\mathbf{f}_{i,k}-\mathbf{r}_k\times\mathbf{f}_{i,k})=(\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_k)\times\mathbf{f}_{i,k}.$$

Поскольку $(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k)$ направлен вдоль той же прямой, что и $\mathbf{f}_{i,k}$ (рис. 20), то каждое из этих векторных произведений равно нулю, а значит, равна нулю и вся сумма. Но тогда имеем из (2) с учетом $\sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \mathbf{M}$

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}, \tag{3}$$

где $\mathbf{L}$ — суммарный момент импульса системы по отношению к точке, принятой за начало отсчета; $\mathbf{M}$ — суммарный момент всех внешних сил относительно этой же точки. Видно, что в отсутствие момента внешних сил, т. е. при $\mathbf{M} = 0$ (это вовсе не означает, что внешние силы отсутствуют — просто их момент равен нулю) по отношению к этой точке момент импульса системы сохраняется: закон изменения $\mathbf{L}$ превращается в закон его сохранения.

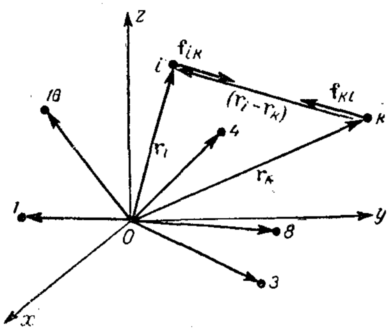

Рис. 20

Важно отметить, что закон изменения момента импульса $\mathbf{L}$ системы материальных точек удалось вывести из закона изменения $\mathbf{L}$ для одной материальной точки с использованием третьего закона Ньютона. Но в случае движения заряженных частиц (как мы увидим в разделе, посвященном электромагнитным взаимодействиям), третий закон Ньютона неприменим. Равенство же (3) остается верным и в этом случае. Закон изменения момента импульса системы материальных точек есть в общем случае самостоятельный закон, а не следствие законов Ньютона, но в пределах этой книги этого показать нельзя.

Равенство (3) можно расписать в составляющих на оси координат, проведенных из начала отсчета $\mathbf{r}$; при этом может оказаться, что вдоль какой-либо оси момент сил $\mathbf{M}$ не будет иметь составляющей. Тогда по отношению к этой оси $\frac{d\mathbf{L}_l}{dt} = 0$, т. е. момент импульса будет постоянным (подобно тому как в отсутствие составляющей силы $\mathbf{F}_l$ по какому-либо направлению импульс $\mathbf{p}_l$ в этом направлении сохраняется.)

§ 13. Элементарные сведения о плоском движении твердого тела

До сих пор рассматривались такие задачи, в которых тело считалось материальной точкой, т. е. в которых были несущественны размеры тела. Это означает, в частности, и то, что мы пренебрегали вращением тела вокруг оси, проходящей через него.

Рассмотрим теперь простейший случай вращения тела вокруг оси, которая не поворачивается по отношению к некоторой инерциальной системе отсчета A. В этом случае движение тела называется *плоским*, ибо каждая точка тела движется при этом в одной и той же плоскости по отношению к системе отсчета A', связанной с телом, а остальные точки тела — в параллельных друг другу плоскостях (рис. 21).

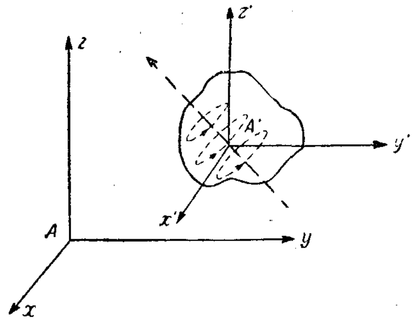

Рис. 21

Мы уже умеем решать задачу о движении системы материальных точек — надо просто решить N задач (о каждой материальной точке отдельно). Поскольку эти материальные точки взаимодействуют между собой, то написанные N уравнений образуют систему, которую либо удастся решить, либо нет. Таким образом, задача простая в идейном отношении становится трудной в отношении техники решения системы уравнений (в общем случае такая система не решается).

Проще обстоит дело в случае, когда материальные точки взаимно неподвижны, т. е. образуют жесткую конструкцию или абсолютно твердое тело (ясно, что это очередная схема, ибо абсолютно твердых тел не бывает). Упрощение задачи в этом случае связано с тем, что поскольку взаимное расположение точек тела неизменно, то, зная его и характер движения двух его точек (а в случае неплоского движения — трех точек), можно из чисто геометрических соображений найти характер движения всех остальных.

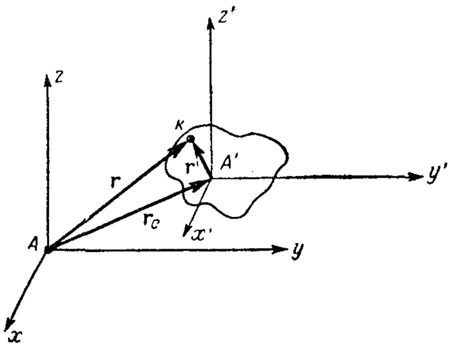

Рис. 22

Проще всего решить задачу такого типа можно, если рассматривать плоское движение как состоящее из двух: поступательного движения центра масс тела и вращательного движения вокруг оси, проходящей через центр масс нормально плоскостям, в которых происходит вращение точек тела в системе A'.

Пусть $\mathbf{r}_c$ — радиус-вектор центра масс тела в некоторой инерциальной системе отсчета A, а $\mathbf{r}'$ — радиус-вектор некоторой точки тела в системе отсчета A', связанной с центром масс. Тогда положение этой точки K тела в исходной системе отсчета A определится (рис. 22) равенством

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_c + \mathbf{r}'.$$

Что касается $\mathbf{r}_c$, то его находить мы уже умеем, пользуясь законами Ньютона для движения центра инерции (центра масс) системы материальных точек, а именно из уравнения:

$$\frac{d^2\mathbf{r}_c}{dt^2} = \frac{\mathbf{F}}{m}.$$

Если мы сможем найти $\mathbf{r}' = \mathbf{r}'(t)$, то тем самым будет решена задача нахождения $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, ибо

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_c(t) + \mathbf{r}'(t).$$

Но для заданной точки K ее радиус-вектор $\mathbf{r}'$ в силу жесткости тела меняется только по направлению, т. е. вращается вокруг оси $O'Z'$. Из рис. 23 видно, что если задано начальное положение этого вектора $\mathbf{r}_0'$ углами θ' (который не меняется в силу жесткости тела и неизменности ориентации оси вращения) и φ_0', то любое другое положение вектора $\mathbf{r}'$ будет от исходного отличаться на некоторый угол поворота $\Delta\varphi' = |\Delta\boldsymbol{\varphi}'|$ и будет определяться углом $\varphi' = \varphi_0' + \Delta\varphi'$.

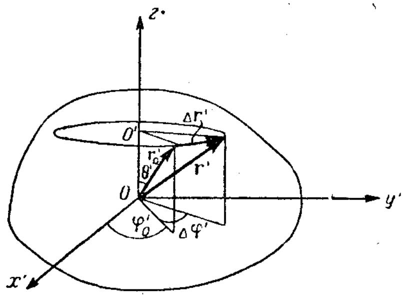

Рис. 23

Во избежание недоразумения сразу оговорим следующее: вектор $\mathbf{r}'$ вращается вокруг точки O с переменной по направлению угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_1' = \frac{d\boldsymbol{\varphi}_1'}{dt}$, определенной в кинематике. Но он же вращается и вокруг оси $O'z'$ с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}' = \frac{d\boldsymbol{\varphi}'}{dt}$. (Из рис. 24 видно, что в силу $dl' = d\varphi_1' \cdot r'$ и $dl' = d\varphi' \cdot \rho'$ имеет место равенство $d\varphi_1' \cdot r' = d\varphi' \cdot \rho'$ и так как $\rho' = r' \sin\theta'$, то $\omega_1' = \omega' \sin\theta'$.) Из-за жесткости тела $\boldsymbol{\omega}'$ не зависит от местоположения точки K, т. е. для всех точек тела $\boldsymbol{\omega}'$ одна и та же, в силу чего ее и называют *угловой скоростью вращения тела*. Направление ее совпадает с осью вращения. В дальнейшем именно $\boldsymbol{\omega}'$ нас и будет интересовать. Отметим, однако, что даже при $\boldsymbol{\omega}' = \mathbf{const}$, вектор $\boldsymbol{\omega}_1'$ не является величиной постоянной и для з а ф и к с и р о в а н н о й т о ч к и K, ибо вращается вокруг оси $O'z'$, описывая конус. Кроме того, как видно из $\omega_1' = \omega' \sin\theta'$, численное значение ω_1' для разных точек тела различно. Поэтому ω_1' не может, конечно, характеризовать вращение тела в целом.

Итак, если тело повернется за время dt на угол $d\boldsymbol{\varphi}'$ вокруг оси $O'z'$, то величина $\boldsymbol{\omega}' = \frac{d\boldsymbol{\varphi}'}{dt}$ будет являться угловой скоростью тела. Она, вообще говоря, меняется со временем (в случае фиксированной оси — только по величине). Величина $\boldsymbol{\beta}' = \frac{d\boldsymbol{\omega}'}{dt}$ называется *угловым ускорением тела.*

Если мы сумеем найти $\boldsymbol{\beta}' = \boldsymbol{\beta}'(t)$, то найдем и $\boldsymbol{\omega}' = \boldsymbol{\omega}'(t)$, а значит, и $\Delta\boldsymbol{\varphi}' = \Delta\boldsymbol{\varphi}'(t)$. Но тогда $\mathbf{r}'$ будет определен своими проекциями (рис. 23).

$$x' = r' \sin\theta' \cos(\varphi_0' + \Delta\varphi'), \qquad y' = r' \sin\theta' \sin(\varphi_0' + \Delta\varphi').$$

Поскольку r' и θ' определяются геометрией тела, т. е. суть заданные величины, то при найденном $\varphi' = \varphi_0' + \Delta\varphi'$ задача нахождения $\mathbf{r}'$, а значит, и $\mathbf{r}$ будет исчерпанной.

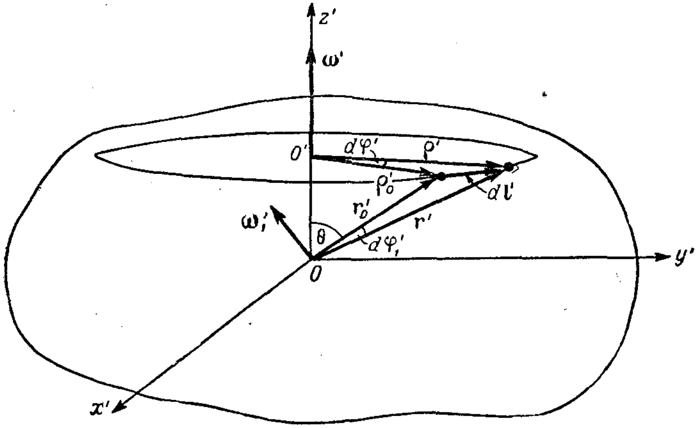

Рис. 24

Для нахождения $\boldsymbol{\beta}' = \boldsymbol{\beta}'(t)$ воспользуемся законом изменения момента импульса тела, т. е. равенством

$$\frac{d\mathbf{L}'}{dt} = \mathbf{M}'.$$

Рассмотрим при этом случай однородного симметричного тела, вращающегося вокруг оси симметрии (например, цилиндра, вращающегося вокруг своей оси). Разбивая такое тело мысленно на материальные точки с массами Δm_i, получим

$$\mathbf{L}' = \sum_{i=1}^{N} \Delta\mathbf{L}_i' = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_i' \times (\Delta m_i \cdot \mathbf{v}_i').$$

Из-за наличия указанной выше осевой симметрии для каждой материальной точки с массой Δm_i найдется симметричная ей по отношению к оси вращения точка с массой Δm_j, причем $\Delta m_i = \Delta m_j$ и $\mathbf{v}_i' = -\mathbf{v}_j'$. Но тогда

$$\Delta\mathbf{L}_i' + \Delta\mathbf{L}_j' = \mathbf{r}_i' \times (\Delta m_i \mathbf{v}_i') + \mathbf{r}_j' \times (\Delta m_j \mathbf{v}_j') = (\mathbf{r}_i' - \mathbf{r}_j') \times (\Delta m_i \mathbf{v}_i').$$

Как видно из рис. 25, $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j = 2\rho_i'$. Но в таком случае

$$\Delta \mathbf{L}_i' + \Delta \mathbf{L}_j' = 2\rho_i' \times (\Delta m_i \mathbf{v}_i') = 2\Delta m_i \rho_i' \times \boldsymbol{\omega}' \times \rho_i' = \\ = 2\Delta m_i [\boldsymbol{\omega}' \rho_i'^2 - \rho_i' (\boldsymbol{\omega} \cdot \rho_i')].$$

Поскольку $\boldsymbol{\omega}' \perp \rho_i'$, то второе слагаемое в квадратной скобке равно нулю, а потому

$$\Delta \mathbf{L}_i' + \Delta \mathbf{L}_j' = 2\Delta m_i \rho_i'^2 \boldsymbol{\omega}'.$$

Для момента импульса тела получим:

$$\mathbf{L}' = \sum_{i=1}^{N} \Delta \mathbf{L}_i' = \sum_{j=1}^{N} \Delta \mathbf{L}_j' = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{N} (\Delta \mathbf{L}_i' + \Delta \mathbf{L}_j') = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} 2\Delta m_i \rho_i'^2 \boldsymbol{\omega}'.$$

Поскольку $\boldsymbol{\omega}'$ для всех материальных точек (для всех ρ_i') одна и таже в силу жесткости тела, то ее можно вынести за знак суммы, а потому

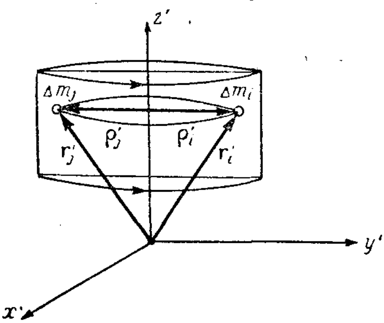

Рис. 25

$$\mathbf{L}' = \boldsymbol{\omega}' \sum_{i=1}^{N} \Delta m_i \rho_i'^2 = \boldsymbol{\omega}' I',$$

где введено обозначение

$$I' = \sum_{i=1}^{N} \Delta m_i \rho_i'^2.$$

Величина I' называется *моментом инерции симметричного тела относительно оси симметрии*. (В дальнейшем будет в тексте встречаться величина I — момент инерции тела в общем случае произвольного тела, движущегося произвольно. Аналогично будет обстоять дело и с терминами $\mathbf{M}'$, $\mathbf{L}'$ и $\mathbf{M}$, $\mathbf{L}$. Предостерегаем читателя: не путайте I' с I, $\mathbf{L}'$ с $\mathbf{L}$ и $\mathbf{M}'$ с $\mathbf{M}$.)

Закон изменения момента импульса тела в этом случае запишется в виде

$$\frac{d\mathbf{L}'}{dt} = \frac{d}{dt}(I'\boldsymbol{\omega}') = \mathbf{M}'.$$

В случае твердого тела распределение масс в нем не меняется, поэтому $I' = \text{const}$ и, значит,

$$\frac{d}{dt}(I'\boldsymbol{\omega}') = I' \frac{d\boldsymbol{\omega}'}{dt} = I'\boldsymbol{\beta}' \quad \text{и} \quad I'\boldsymbol{\beta}' = \mathbf{M}',$$

откуда

$$\boldsymbol{\beta}' = \frac{\mathbf{M}'}{I'}.$$

Найденное по $\mathbf{M}'$ и I' значение $\boldsymbol{\beta}'$ позволит найти (см. раздел I, § 2) $\Delta\boldsymbol{\varphi}(t)$, а вместе с тем и $\varphi = \varphi_0 + \Delta\varphi$, а значит, и $\mathbf{r}'$. Но тогда найдем и $\mathbf{r} = \mathbf{r}_c + \mathbf{r}'$ для любой точки тела.

По своей форме уравнение $\boldsymbol{\beta}' = \frac{\mathbf{M}'}{I'}$ совпадает с уравнением $\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m}$. Из этой аналогии легко усматривается *смысл момента инерции тела, — это мера его «неподатливости» изменению угловой скорости вращения*, подобно тому как масса тела m есть мера «неподатливости» тела попыткам изменить его скорость.

Из определения же момента инерции, т. е. из равенства $I' = \sum_{i=1}^{N} \Delta m_i \rho_i'^2$, следует, что он тем больше, чем дальше от оси вращения находятся элементы его с массами Δm_i. В случае сплошного тела удобно перейти к пределу и считать

$$I' = \int \rho'^2 \, dm = \int \rho'^2 D \, dV,$$

где D — плотность вещества тела.

Вычислим для примера момент инерции толстостенного цилиндра относительно его оси симметрии, разбив его мысленно на очень тонкие цилиндрики толщиной $d\rho$. В случае цилиндра высотой H $dV = 2\pi\rho' \, d\rho' \, H$ и интеграл примет вид

$$I' = \int_{R_0}^{R} \rho'^2 D 2\pi\rho' \, d\rho' \, H = 2\pi D H \int_{R_0}^{R} \rho'^3 \, d\rho' = 2\pi D H \left(\frac{R^4}{4} - \frac{R_0^4}{4} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \pi H (R^2 - R_0^2) D (R^2 + R_0^2) = \frac{1}{2} V D (R^2 + R_0^2) = m \frac{R^2 + R_0^2}{2}.$$

Отсюда сразу для сплошного цилиндра в силу $R_0 = 0$ имеем $I' = \frac{mR^2}{2}$, а для очень тонкого цилиндра в силу $R_0 = R$ $I' = mR^2$.

В случае выбора оси вращения, не совпадающей с осью цилиндра, выражение для I будет, конечно, другим. Вообще момент инерции тела по отношению к разным осям различен. Поэтому в случае произвольного вращения тела (когда ось вращения не сохраняет своей ориентации в пространстве) момент инерции тела уже нельзя охарактеризовать одним числом. Оказывается таких чисел нужно в общем случае девять. Подобного рода величины (они должны подчиняться определенным правилам преобразования при переходе от одной системы координат к другой) называют *тензорами второго ранга*. В этом смысле скаляр—это тензор нулевого ранга, вектор — первого и т. д. Вообще тензором k-го ранга в 3-мерном пространстве называют величину, характеризующуюся 3^k такими числами. В силу сказанного выше векторы $\mathbf{L}$ и $\boldsymbol{\omega}$, вообще говоря, не совпадают по направлению. Обозначая в общем случае тензор момента инерции тела символом $\{I\}$, мы можем написать равенство $\mathbf{L} = \{I\} \boldsymbol{\omega}$, верное всегда, но при этом $\mathbf{L} \uparrow\uparrow \boldsymbol{\omega}$ лишь в рассмотренном случае плоского движения тела. Неучет сказанного часто приводит к различным парадоксам.

Если, однако, говорить о моменте импульса тела не относительно точки, а относительно l-й оси, проходящей через эту точку, то $\mathbf{L}_l \uparrow\uparrow \boldsymbol{\omega}_l$ по определению $\mathbf{L}_l$ и $\boldsymbol{\omega}_l$. Но из этого не следует, что $\mathbf{L} \uparrow\uparrow \boldsymbol{\omega}$ в общем случае. Действительно, пусть тело вращается относительно некоторой точки O. Проводя через нее оси x, y, z, получим (рис. 26):

$$\begin{aligned} L_x &= I_x \omega_x, & & \mathbf{L}_i = I_i \boldsymbol{\omega}_i, \\ L_y &= I_y \omega_y, & \text{или}\quad & \mathbf{L}_j = I_j \boldsymbol{\omega}_j, \\ L_z &= I_z \omega_z, & & \mathbf{L}_k = I_k \boldsymbol{\omega}_k. \end{aligned} \tag{1}$$

Если бы $I_x = I_y = I_z = I$, то это привело бы к $\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$. Но $I_x \neq I_y \neq I_z$ и потому из (1) не следует $\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$, но следует $\mathbf{L} = \{I\}\boldsymbol{\omega}$. Обычно скобки у буквы I опускают и пишут всегда $\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$, помня, однако, что I не скаляр, а тензор.

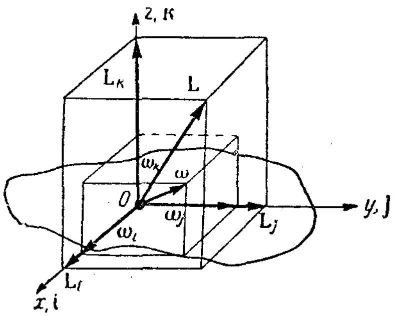

Рис. 26

Подводя итог сказанному, получим, что плоское движение твердого тела удобно описывать двумя уравнениями:

$$\mathbf{a}_c = \frac{\mathbf{F}}{m} \quad \text{или} \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F},$$

$$\boldsymbol{\beta}' = \frac{\mathbf{M}'}{I'} \quad \text{или} \quad \frac{d\mathbf{L}'}{dt} = \mathbf{M}'.$$

Интегрирование первого дает $\mathbf{r}_c = \mathbf{r}_c(t)$, а второго — $\boldsymbol{\beta}' = \boldsymbol{\beta}'(t)$, что приводит к возможности найти

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_c(t) + \mathbf{r}'(t)$$

для любой точки твердого тела.

Из всего вышеизложенного видна явная аналогия между поступательным движением материальной точки и вращательным движением твердого тела. Поэтому без дальнейших выкладок сопоставим описание этих двух видов движения в таблице.

Для поступательного движения материальной точки или движения центра инерции тела	Для плоского вращательного движения твердого тела вокруг оси симметрии
$\mathbf{r}$, $\Delta\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{a}$, m, $\mathbf{p}$, $\mathbf{F}$,	φ', $\Delta\boldsymbol{\varphi}'$, $\boldsymbol{\omega}'$, $\boldsymbol{\beta}'$, I', $\mathbf{L}'$, $\mathbf{M}'$
$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}$, $\frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = \mathbf{F}$, $\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m}$	$\frac{d\mathbf{L}'}{dt} = \mathbf{M}'$, $\frac{d(I'\boldsymbol{\omega}')}{dt} = \mathbf{M}'$, $\boldsymbol{\beta}' = \frac{\mathbf{M}'}{I'}$
$W_{\text{пост}} = \frac{mv^2}{2}$, $dW_{\text{пост}} = \mathbf{F}_{\text{рез}} d\mathbf{r}$,	$W'_{\text{вращ}} = \frac{I'\omega'^2}{2}$, $dW'_{\text{вращ}} = \mathbf{M}'_{\text{рез}} d\boldsymbol{\varphi}'$

$$dW_{\text{пост}} + dW_{\text{вращ}} = \mathbf{F}_{\text{рез}}\, d\mathbf{r} + \mathbf{M}'_{\text{рез}}\, d\boldsymbol{\varphi}'$$

Еще раз напоминаем, что значок «штрих» в характеристиках вращательного движения твердого тела означает, что все они отображают движение в системе A' и по отношению к оси симметрии тела. Часто для упрощения значок «штрих» опускают, но помнят, что описание вращения производится именно в системе, связанной с вращающимся телом и относительно оси, являющейся осью симметрии тела. (Более же общие случаи мы рассматривать не будем.)

В дальнейшем мы значок «штрих» тоже будем опускать там, где это не вызовет недоразумений.

§ 14. Качение

Остановимся на одном важном частном случае плоского движения твердого тела — качении. При этом рассмотрим случай, когда отсутствует скольжение, т. е. когда в месте соприкосновения катящегося тела с опорой их относительная скорость равна нулю. В этом случае имеют место соотношения:

$$v_c = \omega R, \qquad (1)$$

$$a_c = \beta R. \qquad (2)$$

Действительно, для скорости любой точки катящегося тела в системе координат, связанной с опорой, имеем (рис. 27)

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_c + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}. \qquad (3)$$

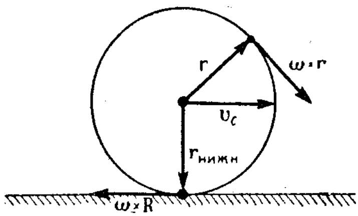

Рис. 27

В этом случае для той точки катящегося тела, которая соприкасается с опорой (для нее $r_{нижн} = R$), имеем $v = 0$. Но это означает по (3), что $\mathbf{v}_c = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}$, и так как $\boldsymbol{\omega} \perp \mathbf{R}$, то $v_c = \omega \cdot R$.

При качении тела на него действуют со стороны опоры три силы трения:

1. Сила тормозящего трения $\mathbf{F}_{тр}$, направленная всегда навстречу $\mathbf{v}_c$. Эта сила уменьшает v_c, но ее момент увеличивает ω. Таким образом, эта сила превращает энергию поступательного движения тела в энергию вращения. Сила $\mathbf{F}_{тр}$ в отсутствие скольжения является силой трения покоя, и, значит, не есть диссипативная сила.

2. Сила движущегося трения $\mathbf{F}_{дв}$, обусловленная тем, что активно вращающееся колесо (вращающееся под действием каких-то положительных моментов со стороны других тел), толкая опору с силой $\mathbf{F}'_{дв}$, само, в свою очередь, отталкивается опорой с силой $\mathbf{F}_{дв}$. Примером может быть колесо автомобиля, на которое действует положительный момент сил со стороны двигателя, а значит, и сила $\mathbf{F}_{дв} \uparrow\uparrow \mathbf{v}_c$ со стороны опоры. Эта сила увеличивает энергию поступательного движения тела, а ее момент уменьшает энергию вращения.

Обычно силы $\mathbf{F}_т$ и $\mathbf{F}_{дв}$ рассматривают совместно как одну касательную силу $\mathbf{F}_{тр}$.

3. Диссипативная сила трения качения $\mathbf{f}$, зависящая от скорости близких к опоре точек по отношению к этой опоре. На рис. 28 показана сила $\mathbf{f}$, являющаяся суммой

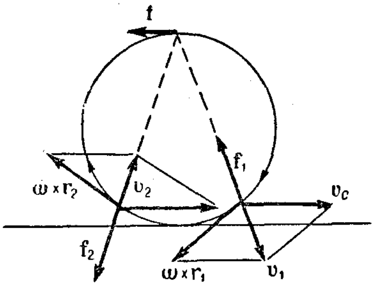

Рис. 28

$$\mathbf{f}_1 = -k(v_1)\,\mathbf{v}_1 \quad \text{и} \quad \mathbf{f}_2 = -k(v_2)\,\mathbf{v}_2,$$

где $\mathbf{f}_1$ и $\mathbf{f}_2$ — силы, действующие со стороны опоры на катящееся тело вблизи точки соприкосновения. При этом $\mathbf{f}_1$ мешает передней части колеса приближаться к опоре, а $\mathbf{f}_2$ мешает задней части колеса удаляться от опоры. ($\mathbf{f}_1$ и $\mathbf{f}_2$ носят электромагнитный характер, рассмотрение их происхождения выходит за рамки этой книги.) Видно, что $\mathbf{f}$ направлена навстречу $\mathbf{v}_c$, а ее точка приложения лежит выше оси катящегося тела. Поэтому $\mathbf{f}$ уменьшает v_c, а ее момент уменьшает ω. Сила трения качения уменьшает кинетическую энергию и поступательного и вращательного движений. Как и всякая диссипативная сила, $\mathbf{f}$ тем больше по модулю, чем больше относительная скорость тех тел, между которыми она действует. При небольших скоростях движения

$$\mathbf{f} = -\mu Q \mathbf{v}_c,$$

где μ — некоторый коэффициент, определяемый видом соприкасающихся тел, $\mathbf{Q}$ — сила, с которой тела прижаты друг к другу, т. е. сила нормальной реакции их.

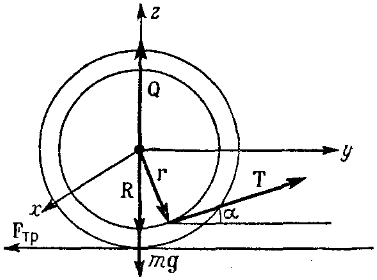

Рис. 29

Можно показать, что если результирующий момент положителен, то и результирующая сила положительна, а значит, при $\Delta\omega > 0$ обязательно $\Delta v_c > 0$ и наоборот. Действительно, в силу $v_c = \omega R$ рост ω сопровождается ростом v_c и наоборот. Но это верно лишь в отсутствие скольжения!

Решим две задачи на качение.

Задача 1. «Непослушная» катушка.

Если тянуть за нитку, намотанную на катушку, как указано на рис. 29, катушка начнет двигаться или вправо или влево, в зависимости от величины угла α. Для выяснения причин такого поведения катушки напишем ее уравнения движения:

$$m\mathbf{a}_c = \mathbf{T} + \mathbf{F}_{тр} + m\mathbf{g} + \mathbf{Q},$$
$$I\boldsymbol{\beta} = \mathbf{M}_т + \mathbf{M}_{тр} + \mathbf{M}_{mg} + \mathbf{M}_Q.$$

Поскольку в начале движения катушки $v_c \approx 0$, то сила трения качения мала по сравнению с остальными силами. Трение покоя $\mathbf{F}_{тр} = \mathbf{F}_т + \mathbf{F}_{дв}$ обусловлено «попытками» сдвинуть катушку силой $\mathbf{T}$. Поскольку, пока катушка не пришла в движение, сумма сил равна нулю, то сила $\mathbf{F}_{тр}$ направлена так, чтобы компенсировать действие $\mathbf{T}$. При малом изменении силы $\mathbf{T}$ соотношение направлений этих сил не изменится, хотя катушка и придет в движение. Проектируя первое равенство на ось Oy, а второе на ось Ox, получим с учетом равенств $a_{cy} = a_c$ и $\beta_x = \beta$ (остальные проекции векторов $\mathbf{a}$ и $\boldsymbol{\beta}$ равны нулю)

$$ma_c = T\cos\alpha - F_{тр},$$
$$I\beta = RF_{тр} - rT.$$

Исключая отсюда силу трения $F_{тр}$, получим после очевидных преобразований

$$a_c = \frac{T\left(\cos\alpha - \frac{r}{R}\right)}{m + \frac{I}{R^2}},$$

где учтено, что из-за отсутствия скольжения $\beta = \frac{a_c}{R}$. Из выражения для a_c следует:

$a_c > 0$, т. е. катушка пойдет вправо при $\cos\alpha > \frac{r}{R}$,

$a_c < 0$, т. е. катушка пойдет влево при $\cos\alpha < \frac{r}{R}$,

$a_c = 0$, т. е. катушка останется на месте при $\cos\alpha = \frac{r}{R}$.

Когда катушка начнет двигаться (неважно, в какую сторону), скорость ее будет нарастать, сила трения качения появится и будет тоже нарастать и ускорение будет (при постоянной $\mathbf{T}$, конечно) убывать, и при некотором значении $\mathbf{v}_c$ сумма сил обратится в нуль, сумма моментов этих сил тоже станет равной нулю, и катушка будет двигаться с $\mathbf{v}_c = \text{const}$ и $\boldsymbol{\omega} = \text{const}$.

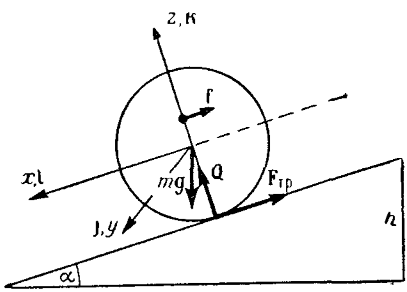

Рис. 30

Задача 2. Сплошной цилиндр, скатывается без скольжения с наклонной плоскости высотой h. Надо связать начальную скорость цилиндра $\mathbf{v}_{0c}$ с конечной $\mathbf{v}_c$.

Из рис. 30 видны действующие на цилиндр силы. Поскольку скорость цилиндра при его движении меняется, то сила трения качения будет непостоянной (а из-за нее и тормозящее трение покоя). Поэтому движение цилиндра не будет равнопеременным.

Опуская значки «среднее значение» у сил $\mathbf{f}$ и $\mathbf{F}_{тр}$ и у ускорений $\mathbf{a}_c$ и $\boldsymbol{\beta}$, напишем для средних значений этих величин уравнения

$$m\mathbf{a}_c = m\mathbf{g} + \mathbf{Q} + \mathbf{f} + \mathbf{F}_{тр},$$
$$I\boldsymbol{\beta} = \mathbf{M}_{mg} + \mathbf{M}_Q + \mathbf{M}_f + \mathbf{M}_{тр}.$$

Проектируя первое равенство на ось Ox, а второе на ось Oy, получим с учетом $a_{cx} = a_c$ и $\beta_y = \beta$:

$$ma_c = mg\sin\alpha - f - F_{тр},$$
$$I\beta = -rf + RF_{тр}.$$

Исключая отсюда силу трения покоя $F_{тр}$, получим с учетом $\beta = \frac{a_c}{R}$ и $I = \frac{mR^2}{2}$

$$\frac{3}{2}ma_c = mg\sin\alpha - f\left(1 + \frac{r}{R}\right). \tag{4}$$

Отсюда видно, что при $f\left(1 + \frac{r}{R}\right) > mg\sin\alpha$ $a_c < 0$, т. е. цилиндр будет двигаться замедленно; при $f\left(1 + \frac{r}{R}\right) < mg\sin\alpha$ $a_c > 0$, т. е. цилиндр будет двигаться ускоренно; при $f\left(1 + \frac{r}{R}\right) = mg\sin\alpha$ $a_c = 0$, т. е. цилиндр катится равномерно. Подставляя в (4) $a_c = \frac{v_c^2 - v_{0c}^2}{2l}$ и учитывая

$$l\sin\alpha = h,$$

получим

$$v_c^2 - v_{0c}^2 = \frac{4}{3}\left[gh - \frac{f}{m}\left(1 + \frac{r}{R}\right)l\right],$$

что и решает задачу.

Получим этот же результат, исходя из закона изменения энергии при качении. Именно:

$$\Delta W_{пост} + \Delta W_{вращ} = \mathbf{F}_{рез} \cdot \Delta\mathbf{r} + \mathbf{M}_{рез} \cdot \Delta\boldsymbol{\varphi}.$$

Раскрывая это выражение, получим

$$\left(\frac{mv_c^2}{2} - \frac{mv_{0c}^2}{2}\right) + \left(\frac{I\omega^2}{2} - \frac{I\omega_0^2}{2}\right) =$$
$$= (-fl - F_{тр}l + mg\sin\alpha \cdot l) + (-rf\Delta\varphi + RF_{тр}\Delta\varphi), \tag{5}$$

так как $I = \frac{mR^2}{2}$ и $\Delta\varphi = \frac{l}{R}$, то после очевидных преобразований приходим к выражению

$$v_c^2 - v_{0c}^2 = \frac{4}{3}\left[gh - \frac{f}{m}\left(1 + \frac{r}{R}\right)l\right]. \tag{6}$$

Из равенства (5) видно, что сила $\mathbf{F}_{тр}$ совершает отрицательную работу $-F_{тр}l$, уменьшая энергию поступательного движения и положительную работу $RF_{\text{тр}}\Delta\varphi = F_{\text{тр}}l$, увеличивая энергию вращения. Таким образом, сила тормозящего трения покоя в данном случае превращает энергию поступательного движения в энергию вращения. Из того же равенства видно, что сила трения качения совершает две отрицательные работы $-fl$ и $-rf\Delta\varphi = -fl\frac{r}{R}$, из которых $-fl$ уменьшает энергию поступательного, а $-fl\frac{r}{R}$ — энергию вращательного движения. Этим и обусловлено наличие члена $-\frac{f}{m}\left(1+\frac{r}{R}\right)l$ в равенстве (6). Из (6) видно также, что при качении по горизонтальной плоскости ($\alpha = 0$ и, значит, $h = 0$) энергия тела уменьшается за счет работы именно силы трения качения. Заметим еще, что поскольку при качении по горизонтальной подставке (без скольжения) тело движется замедленно, то момент силы трения качения больше момента тормозящего трения покоя, т. е. $rf > RF_{\text{тр}}$. Из этого, однако, нельзя сделать определенного вывода о том, какая из сил $-f$ или $F_{\text{тр}}$ — больше, ибо неизвестно соотношение между r и R — возможно и $r > R$ и $R < r$, а значит, возможно как $f < F_{\text{тр}}$, так и $f > F_{\text{тр}}$.

§ 15. Прецессия момента импульса

Рассмотрим пример неплоского движения твердого тела при $\mathbf{M} \perp \mathbf{L}$. Пусть волчок, изображенный на рис. 31, быстро вращается вокруг своей оси. Каково будет поведение волчка, если

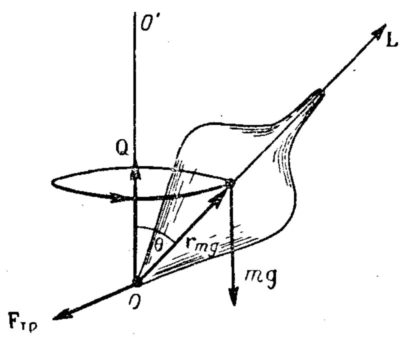

Рис. 31

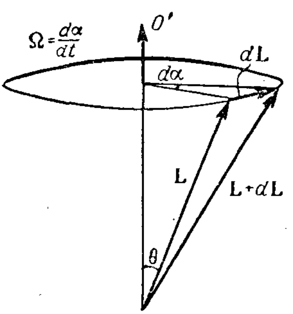

Рис. 32

его отклонить на угол θ от вертикали? Ответ, конечно же, содержится в уравнении $\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}$, написанном, например, относительно точки опоры волчка. В этом случае момент сил, действующих на волчок, определяется моментом силы тяжести, ибо момент сил со стороны опоры равен нулю в силу $\mathbf{r}_Q = \mathbf{r}_F = 0$. Момент же силы $m\mathbf{g}$ будет все время направлен перпендикулярно $\mathbf{L}$. Но это означает, что $\mathbf{L}$ будет меняться только по направлению, т. е.

будет, вращаясь, описывать конус с вершиной в точке опоры, как это изображено на рис. 32. Найдем угловую скорость Ω этого вращения, называемого *прецессией момента* $\mathbf{L}$ *вокруг оси* OO'. Из рис. 32 видно, что $|d\mathbf{L}|=L\sin\theta\, d\alpha$. Деля это равенство на время dt, за которое произошел поворот вектора $\mathbf{L}$ на угол $d\alpha$, получим $\left|\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right|=L\sin\theta\cdot\frac{d\alpha}{dt}$, а с учетом направлений векторов $d\mathbf{L}$, $\mathbf{L}$ и $\mathbf{\Omega}=\frac{\mathbf{d\alpha}}{dt}$

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt}=\mathbf{\Omega}\times\mathbf{L}.$$

С другой стороны, $\frac{d\mathbf{L}}{dt}=\mathbf{M}$ и, значит,

$$\mathbf{\Omega}\times\mathbf{L}=\mathbf{M}.$$

Заканчивая этим изложение механики твердого тела отметим, что **статика** есть тот частный случай динамики, когда из-за равенства нулю суммарной силы, действующей на тело, и суммарного момента всех сил относительно любой точки (или оси) ускорение и угловое ускорение обращаются в нуль. При этом чаще всего полагают равными нулю и начальные $\mathbf{v}_0$ и $\boldsymbol{\omega}_0$.

§ 16. Описание механических процессов с помощью законов Ньютона и законов сохранения

Как видно из самого вывода законов изменения $\mathbf{p}$, $\mathbf{L}$ и E для одной материальной точки, уравнения

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt}=\mathbf{F},\quad \frac{d\mathbf{L}}{dt}=\mathbf{M}\quad \text{и}\quad dE=dA_{\text{непот}}$$

суть следствия законов Ньютона для случая, когда масса тела (материальной точки) при движении не меняется. В этом случае они ничего в принципе нового по сравнению с законами Ньютона и не несут.

Если, однако, масса материальной точки зависит от времени, то без каких-либо предположений о поведении $\mathbf{p}$, $\mathbf{L}$ и E при переменной массе законы изменения $\mathbf{p}$, $\mathbf{L}$ и E из законов Ньютона получить нельзя.

При «выводе» законов изменения $\mathbf{p}$, $\mathbf{L}$ и E для системы взаимодействующих материальных точек мы пользовались третьим законом Ньютона, который, вообще говоря, неверен (именно неверен, а не приближен) в случае, например, некоторых магнитных взаимодействий. Значит ли это, что и законы изменения $\mathbf{p}$, $\mathbf{L}$ и E для системы частиц неверны? Нет, не значит. Просто законы изменения этих величин суть самостоятельные законы, не следующие из законов Ньютона. Мало того, они гораздо более общи, чем законы Ньютона, ибо применимы не только к макроскопическим телам, но и к силовым полям и к квантовым объектам.

тот же факт, что мы их «вывели» все же из законов Ньютона, есть результат того, что мы рассматривали лишь взаимодействие материальных точек, да и то в простейшем случае, когда силы не зависят от скоростей тел по отношению к системе отсчета.

Законами изменения $\mathbf{p}$, $\mathbf{L}$ и E пользуются обычно в интегральной форме, т. е. в форме

$$\mathbf{p}-\mathbf{p}_0=\int_{t_0}^{t}\mathbf{F}(t')\,dt',$$

$$\mathbf{L}-\mathbf{L}_0=\int_{t_0}^{t}\mathbf{M}(t')\,dt',$$

$$E-E_0=\sum_{i=1}^{N}\int_{\mathbf{r}_{0i}}^{\mathbf{r}_i}\mathbf{F}_{i\,\text{непот}}\,d\mathbf{r}_i'.$$

Мало того, ими чаще всего пользуются в тех случаях, когда они вырождаются в законы сохранения. (Заметим, что сохраняющиеся, несмотря на взаимодействия тел, величины называют интегралами движения.)

Законы сохранения говорят лишь о том, что значение такой-то величины в один момент времени (в одном месте) равно значению этой величины в другой момент времени (в другом месте). На вопрос же, что было между этими моментами, как протекал процесс, они, естественно, ответить не могут. Для ответа на вопрос, как шел процесс, надо использовать закон, описывающий поведение системы в течение любого элементарно малого промежутка времени, т. е. дифференциальный закон движения — второй закон Ньютона для каждого из тел (да еще и третий закон, там где это необходимо и где он верен).

Возникает вопрос — зачем нужны законы сохранения, если практически все задачи можно решать с помощью законов Ньютона?

Причин к тому несколько.

1. Даже в случае $m=\text{const}$, когда интегральные законы движения есть действительно следствия законов Ньютона, они чрезвычайно важны для решения огромного числа задач, связанных с нахождением скоростей и положений тел при их движении. Конечно, эти задачи можно было бы решить с помощью законов Ньютона. Но для этого надо уметь вычислять интегралы

$$\mathbf{v}(t)=\mathbf{v}_0+\int_{t_0}^{t}\frac{\boldsymbol{F}(t')}{m}\,dt' \quad \mathbf{r}(t)=\mathbf{r}_0+\int_{t_0}^{t}\mathbf{v}(t')\,dt',$$

что далеко не всегда просто. Законы же сохранения, не интересуясь характером сил, действующих на тела, утверждают, что соотношение между скоростями (входящими в кинетическую энергию и импульс) и положениями (входящими в потенциальную энергию) тел, таковы-то. Например, для случая упругого соударения двух шаров (без потери механической энергии) имеем

$$m_1\mathbf{v}_{01}+m_2\mathbf{v}_{02}=m_1\mathbf{v}_1+m_2\mathbf{v}_2,$$

$$\frac{m_1v_{01}^2}{2}+\frac{m_2v_{02}^2}{2}=\frac{m_1v_1^2}{2}+\frac{m_2v_2^2}{2},$$

каким бы ни был характер сил взаимодействия во время удара.

«Недостаток» законов сохранения обернулся их достоинством.

2. В случае $m \neq \text{const}$ интегральные законы не являются следствиями законов Ньютона и необходимо постулировать, что вид законов изменения энергии и импульса именно таков, а законы Ньютона лишь могут подсказать пути к установлению вида этих законов.

3. Как уже отмечалось в начале изложения динамики, механику можно строить самыми различными способами. В частности, существуют различные аналитические механики (в отличие от векторной механики Ньютона, например), в которых основную роль играют не понятия сила, ускорение, а понятия энергия (или ее аналоги) и импульс (или его аналоги). Такова, например, механика Гамильтона, о которой несколько слов будет сказано ниже.

Как показывается в этих механиках, фундаментальность понятий энергии, импульса и момента импульса связаны с определенными свойствами времени и пространства. Оказывается, из свойств однородности времени (из того, что один момент времени по своим свойствам не отличается от любого другого) вытекает существование сохраняющейся характеристики движения системы — энергии; из факта однородности пространства (из того, что одна точка пространства ничем не отличается от любой другой) вытекает существование другой сохраняющейся величины — импульса; из факта изотропности пространства (из того, что свойства его в данном месте одинаковы по всем направлениям) вытекает существование третьей сохраняющейся характеристики движения системы — момента импульса и т. д. Надо, однако, учесть, что не всегда и не везде свойства времени и пространства так хороши. Например, вблизи Земли пространство неоднородно, поэтому брошенные вблизи Земли тела своих импульсов и не сохраняют. Причина искажений свойств пространства в данном случае — сила тяготения Земли. И таких случаев немало. Можно сказать, что мерой неоднородности пространства, в котором протекает процесс, является внешняя сила, действующая на систему тел. Если эта внешняя сила невелика по сравнению с силами взаимодействия внутри системы тел, то неоднородностью той части пространства, в которой разыгрываются события, можно пренебречь.

В теории силового поля полагают, что ответственным за появление сил, действующих на тела, является силовое поле (гравитационное, электромагнитное и т. д.), искажающее свойства пространства в той области, где оно существует. Там, где поле велико, пространство явно неоднородно и (вообще говоря) неизотропно, поэтому **p** и **L** системы в таких областях существенно меняются. Там же, где заметных полей нет, **p** и **L** системы практически сохраняются. Такая (правда, не очень-то строгая) интерпретация связи свойств пространства с поведением импульса и момента импульса системы находится в соответствии с тем, как из законов изменения импульса и момента импульса вытекают законы их сохранения $\left(\text{как из } \frac{d\mathbf{p}}{dt}=\mathbf{F} \text{ и } \frac{d\mathbf{L}}{dt}=\mathbf{M} \text{ вытекает } \mathbf{p}=\text{const и } \mathbf{L}=\text{const при } \mathbf{F}=0 \text{ и } \mathbf{M}=0\right)$.

К сожалению, связь сохранения энергии с однородностью времени не допускает такого простого толкования.

Заметим, что в теории относительности сформулирован единый закон изменения энергии-импульса, а в квантовой механике понятия сила, скорость, ускорение становятся весьма расплывчатыми и плохо поддаются измерению (что для физиков весьма огорчительно, ибо физика — наука экспериментальная), в то время как импульсы и энергия объектов исследования становятся одними из основных, фундаментальных характеристик состояния их движения и вполне измеримы.

4. Такой важный раздел физики, как термодинамика, исходит при изучении свойств тел и полей из понятия энергии (или ее аналогов), а центральными ее положениями (началами) являются по существу некоторые утверждения о свойствах и превращениях энергии.

Из сказанного ясно, что понятия импульса, момента импульса и энергии являются действительно фундаментальными. Почему же тогда мы не изучаем фундаментальную аналитическую механику Гамильтона и Лагранжа вместо столь ограниченной механики Ньютона? Причин к тому много. Например, потому что аналитическая механика много трудней и по идейному своему содержанию и по тому математическому аппарату, который она использует, в то время как механика Ньютона проста и позволяет решать огромное количество задач довольно просто и изящно.

§ 17. О механике Гамильтона

В основе этой механики лежит утверждение, что в случае отсутствия диссипативных сил всю информацию о системе содержит гамильтониан системы — полная энергия системы, выраженная через импульсы и координаты материальных точек, входящих в систему. В случае, например, одной материальной точки, прикрепленной к одному концу невесомой пружины, другой конец которой закреплен в начале координат, гамильтониан имеет вид

$$H=\frac{p_x^2+p_y^2+p_z^2}{2m}+k\frac{(x-x_{\text{н}})^2+(y-y_{\text{н}})^2+(z-z_{\text{н}})^2}{2}.$$

Законы движения в этой механике — уравнения Гамильтона — имеют для одной материальной точки следующий вид:

$$\frac{dp_x}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \tag{1}$$

$$\frac{dp_y}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y}, \tag{2}$$

$$\frac{dp_z}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial z}, \tag{3}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_x}, \tag{4}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_y}, \tag{5}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_z}. \tag{6}$$

Если положить $-\frac{\partial H}{\partial x} = F_x$, $-\frac{\partial H}{\partial y} = F_y$ и $-\frac{\partial H}{\partial z} = F_z$, то уравнения (1) — (3) эквивалентны второму закону Ньютона. Эта эквивалентность, однако, имеет место лишь при отсутствии диссипативных сил, ибо механика Гамильтона с самого начала не рассматривает систем с такими силами. В этом ограниченность механики Гамильтона по сравнению, например, с механикой Ньютона.

Для того чтобы написать гамильтониан системы в общем виде, введем понятие о числе степеней свободы системы как о числе независимых координат, полностью определяющих положение системы (если к тому же известны и импульсы, то определено не только **положение**, но и состояние **движения** системы или коротко — состояние системы). В случае одной материальной точки, способной двигаться по: а) некоторой фиксированной кривой, степеней свободы — одна; б) зафиксированной поверхности — две; в) в общем случае — три.

В случае двух материальных точек, связанных жестко между собой, число степеней свободы от одной (обе материальные точки двигаются по зафиксированной кривой) до пяти (в общем случае). Если имеется система из N материальных точек, движущихся произвольным образом, то число степеней свободы системы составляет $3N$, ибо для задания положения одной материальной точки надо задать три координаты, а для N материальных точек — $3N$. Если некоторые из материальных точек связаны между собой жестко или вынуждены двигаться по зафиксированным линиям или поверхностям, т. е. если на систему наложены некоторые ограничения — связи, — то число степеней свободы составит $3N - n$, где n — число связей.

С учетом сказанного гамильтониан системы запишется в виде

$$H = H(q_1, q_2, \ldots, q_{3N-n}, p_1, p_2, \ldots, p_{3N-n}, t).$$

Если число степеней свободы обозначить через k, то

$$H = H(q_i, p_i, t), \text{ где } i = 1, 2, \ldots, k.$$

Уравнения движения системы — уравнения Гамильтона — имеют простой и довольно симметричный вид

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \text{где } i = 1, 2, \ldots, k.$$

Заметим, что величины q_i суть так называемые **обобщенные** координаты. Они могут быть и не декартовыми и вообще не прямолинейными и не ортогональными — любыми; p_i — соответствующие таким (обобщенным) координатам импульсы (обобщенные).

Прежде чем показывать как поведение системы зависит от свойств пространства и времени договоримся о способах измерения положений и моментов времени.

Положения материальных точек мы могли бы измерять просто — с помощью, например, радиолокатора.

Для измерения же времени постулируем наличие периодических процессов, длительность любого из которых (период) можно взять за единицу времени. Здесь, однако, чрезвычайно важно отметить одно обстоятельство: если система движется произвольным образом, в произвольных условиях, то соотношение между периодами может не только не быть постоянным, но даже может меняться произвольным образом. Рассмотрим, например, периоды колебаний:

1) пружинного маятника на стержне — T_1,

2) нитяного маятника, подвешенного в кабине лифта — T_2,

3) кварцевой пластины, находящейся в электрическом поле — T_3.

Очевидно, возможен такой подбор условий, что $T_1 = T_2 = T_3$.

Если теперь менять температуру пружины, ускоренно двигать лифт, менять электрическое поле, то, вообще говоря, равенство $T_1 = T_2 = T_3$ не будет соблюдаться, а это означает, что процессы 1, 2 и 3 станут неэквивалентными в отношении использования их в качестве эталонов для измерения времени. Возможен, очевидно, такой подбор условий, что будет иметь место

$$T_1 = T_2 \neq T_3 \text{ или } T_1 \neq T_2 = T_3 \text{ или } T_1 = T_3 \neq T_2 \text{ или } T_1 \neq T_2 \neq T_3.$$

При этом возможно такое изменение условий, что нельзя сказать, какой из периодов изменился, а какой не изменился. Но это означает, что у нас нет возможности гарантировать неизменность выбранной единицы времени. Чтобы такую единицу времени все же иметь в своем распоряжении, постулируем, что удаленные от всех тел («изолированные») пружинные, например, часы хода своего не меняют (а у нас, разумеется, есть способ сверять длительность повторяющихся в нашей системе процессов с длительностью качаний маятника этих часов, т. е. сверять показания любых часов нашей системы с этими удаленными часами).

Назовем пространство, окружающее нашу систему, однородным и изотропным, если переход системы из одной части пространства в другую или поворот ее не меняет хода процессов в нашей системе, если мы, находясь в этой системе, даже не сможем обнаружить такого перемещения или поворота. Грубо говоря, само пространство в случае однородности и изотропности его никак на нашу систему не влияет. Поскольку же гамильтониан системы есть носитель информации о состоянии системы, то при перемещениях системы из одной части пространства в другую (а также при поворотах системы) он не должен в этом случае меняться, т. е. должно иметь место равенство

$$H(q_i,\ p_i,\ t) = H(q_i + \Delta q_i,\ p_i,\ t).$$

Но это равносильно тому, что гамильтониан системы имеет одно и то же значение при любых q_i, что возможно лишь в том случае, если он вообще от координат не зависит. Но это означает $\frac{\partial H}{\partial q_i} = 0$, что в соответствии с уравнением $\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$ означает $\frac{dp_i}{dt} = 0$, или $p_i = \text{const}$. Таким образом, как следствие однородности и изотропности пространства появляется сохранение импульса и момента импульса системы (последнее в случае угловых координат q_i).

Назовем время однородным, если смещение системы во времени (время измеряется по «изолированным» часам) не влияет на нашу систему. Это, в частности, означает, что длительности повторяющихся процессов в нашей системе с течением времени не меняются (эти длительности мы тоже проверяем по «изолированным» часам) и, значит, любой из таких процессов мы можем взять за эталонный для изготовления часов.

Но если смещение системы во времени не влияет на ход процессов в ней, то это означает (в соответствии со смыслом гамильтониана, как носителя информации о состоянии системы), что имеет место равенство

$$H(q_i,\ p_i,\ t) = H(q_i,\ p_i,\ t + \Delta t),$$

а это возможно лишь в том случае, если гамильтониан системы не зависит от времени явно, т. е. $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$.

По определению полной производной имеем

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} \right)$$

и так как $\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{dp_i}{dt}$ и $\frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{dq_i}{dt}$, то

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N} \left(-\frac{dp_i}{dt} \frac{dq_i}{dt} + \frac{dq_i}{dt} \frac{dp_i}{dt} \right) = \frac{\partial H}{\partial t}.$$

Поскольку же однородность времени приводит к $\frac{\partial H}{\partial t}=0$, то в силу $\frac{dH}{dt}=\frac{\partial H}{\partial t}$ имеем $\frac{dH}{dt}=0$, или $H=\text{const}$.

Таким образом, однородность времени проявляется в сохранении энергии системы.

В общем же случае пространство и время, в которых пребывает интересующая нас система, неоднородны. Эта неоднородность может вызываться как внешними по отношению к нашей системе телами, так и телами самой системы (точнее — силовыми полями тел либо входящих, либо не входящих в рассматриваемую систему).

Заметим теперь, что если учесть сказанное выше, то первый закон Ньютона можно рассматривать как утверждение о наличии таких систем отсчета, которые сами пребывают в однородных пространстве и времени. (Это не означает, однако, что эта однородность простирается как угодно далеко. Такой гарантии, разумеется, быть не может, но около тела, взятого за тело отсчета, пространство — время однородно.)

Второй же закон Ньютона можно рассматривать, как утверждение о том, что изменение импульса материальной точки обусловлено неоднородностью пространства в той его части, где она движется в данный момент времени.

Третий закон Ньютона можно трактовать, как утверждение о том, что нарушение однородности пространства вызывается телами, и что это нарушение всегда взаимное (если тело номер i нарушило однородность пространства около тела номер k, то последнее «в долгу» не осталось).

Отметим еще одно обстоятельство.

В механике Гамильтона состояние системы описывают обычно вектором $\mathbf{G}$ в воображаемом $2k$-мерном пространстве (k — число степеней свободы системы). Положение точки в этом пространстве описывается $2k$ числами, из которых k чисел — обобщенные координаты, другие k — обобщенные импульсы. Так как со временем обобщенные координаты и импульсы изменяются, то и вектор $\mathbf{G}$ со временем изменяется. При этом, если энергия системы сохраняется, то конец вектора $\mathbf{G}$ движется по «поверхности» $H=E=\text{const}$. В очень важном частном случае, когда $H(q_i,\ p_i)=\sum_{i=1}^{k} q_i^2+\sum_{i=1}^{k} p_i^2$, поверхность $H=E$ представляет собой «сферу» в $2k$-мерном пространстве.

В случае трех степеней свободы уравнение этой поверхности имеет вид

$$H=p_1^2+p_2^2+p_3^2+q_1^2+q_2^2+q_3^2$$

или, полагая «радиус сферы» равным $\sqrt{H}=|\mathbf{G}|$,

$$|\mathbf{G}|^2=p_1^2+p_2^2+p_3^2+q_1^2+q_2^2+q_3^2.$$

В случае, например, материальной точки с пружиной, о которой говорилось в начале параграфа, при введении координат и импульсов

$$q_1=(x-x_н)\sqrt{\frac{k}{2}},\quad q_2=(y-y_н)\sqrt{\frac{k}{2}},\quad q_3=(z-z_н)\sqrt{\frac{k}{2}}, \tag{7}$$

$$p_1=p_x\sqrt{\frac{1}{2m}},\qquad p_2=p_y\sqrt{\frac{1}{2m}},\qquad p_3=p_z\sqrt{\frac{1}{2m}} \tag{8}$$

вектор **G** будет описывать в 6-мерном пространстве некую *фазовую траекторию* на поверхности 6-мерной сферы.

Рис. 33 представляет собой случай одномерного движения этой материальной точки на пружине (например, случай движения ее по оси x). В этом случае гиперсфера есть обычная окружность радиуса $G=\sqrt{H}=\sqrt{p_1^2+q_1^2}$, а проекции вектора **G** на оси q_1 и p_1 суть обобщенные координата q_1 и импульс p_1 материальной точки, которые по (7) и (8) легко пересчитать в обычные координату x и импульс p_x.

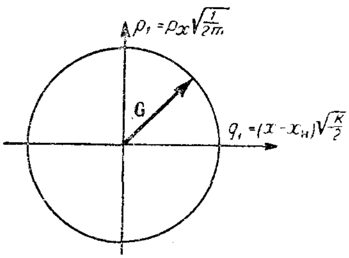

Рис. 33

Это движение материальной точки (гармонические колебания с частотой $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$) отображаются на нашем графике вращением вектора **G** с угловой скоростью $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$.

§ 18. Понятие о связях

Уже говорилось, что решение задачи о движении тела предполагает знание закона его движения, а также начальных условий ($\mathbf{v}_0$ и $\mathbf{r}_0$). Важно также знать и так называемые граничные условия. Дело в том, что часто интересующее нас тело движется в некоторой ограниченной области пространства и не может покинуть эту область из-за того, что на это тело действуют некоторые другие тела, не дающие движущемуся телу покинуть эту область.

Такие тела, ограничивающие свободу движения интересующего нас тела, называются *связями* (часто и силы, действующие на движущиеся тела со стороны связей — силы связи — для краткости тоже называют связями или реакциями).

Примером такого ограниченного (финитного) движения является движение любого тела в ящике, движение гирьки, привязанной к одному концу нити с закрепленным другим концом, движение маятника и т. д. В этих примерах ящик, нитка, храповик маятника суть связи, ограничивающие свободу движения тела.

Наличие связей в большинстве случаев весьма усложняет задачу о движении тела, ибо, как правило, силы связи очень сложны по своей зависимости от координат, скоростей и времени.

Для решения задач при наличии связей необходимо ко второму закону Ньютона еще дописывать уравнение связи, т. е. уравнение той линии или поверхности, по которой может двигаться материальная точка. Эти уравнения и определяют граничные условия движения и бывают часто неразрешимыми.

Рассмотрим пример идеальных абсолютно жестких связей. (Заметим, что идеальность означает отсутствие диссипативных сил, а жесткость — недеформируемость связей.)

Поскольку связи не деформируются и идеальны, то работа таких сил связи равна нулю. Действительно, обозначая силу связи **R**, а перемещение материальной точки $d\mathbf{r}$, получим

$$dA_{\text{св}} = \mathbf{R}d\mathbf{r} = Rdr\cos\alpha,$$

а так как в рассматриваемом случае идеальных жестких связей силы связи действуют перпендикулярно скорости (диссипативных-то сил нет!), то $\alpha = \frac{\pi}{2}$ и, значит, $dA_{\text{св}} = 0$.

Если связи жестки, но есть диссипативные силы (например, сухое трение), то ясно, что

$$dA_{\text{св}} = \mathbf{R}d\mathbf{r} = Rdr\cos\alpha < 0,$$

ибо $\mathbf{F}_{\text{тр}}$ направлена навстречу скорости, а значит, и перемещению. Обобщая оба случая, получим, что для жестких связей

$$dA_{\text{св}} \leqslant 0.$$

Часто силу реакции **R** представляют в виде двух составляющих; нормальной перемещению составляющей **Q** (часто **N**), являющейся

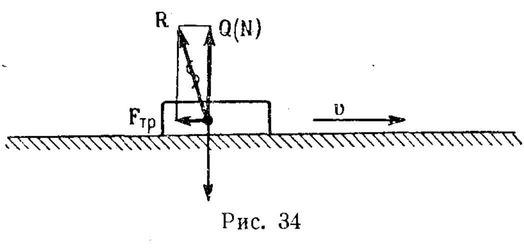

Рис. 34

по существу упругой силой, и продольной (направленной вдоль перемещения) составляющей $\mathbf{F}_{\text{тр}}$. При этом $\mathbf{Q}d\mathbf{r} = 0$, а $\mathbf{F}_{\text{тр}}d\mathbf{r} < 0$, откуда и следует $dA_{\text{св}} < 0$ при $\mathbf{F}_{\text{тр}} \neq 0$. Рис. 34 поясняет сказанное.

Если связи не жестки (например, пружина), то работа сил связи может быть и положительной.

Вопрос о нахождении сил связей (реакции связей) — это весьма сложный вопрос. Лишь в очень простых случаях мы можем их находить. Примером таких задач с легко находимыми реакциями связей являются задачи о скольжении тела по плоскости при наличии сухого трения, задачи о натяжениях невесомых нерастяжимых нитей, связывающих движущиеся тела, и т. д. Сравнительно легко решаются задачи в случае наличия идеальных (без диссипативных сил) пружин и ряд статических задач.

Мы говорили выше о том, что решение задач при наличии связей требует написания уравнений связи. Как они выглядят? И как ими надо пользоваться? Приведем примеры.

Пример 1. Один конец жесткого стержня закреплен, а на другом — гирька. Ясно, что так укрепленная гирька может двигаться лишь по сфере радиуса l, где l — длина стержня. Выбирая начало отсчета в точке, где закреплен конец стержня, получим уравнение связи в виде

$$x^2+y^2+z^2=l^2,$$

а в случае плоского движения вокруг оси z (например, плоский или конический маятник) для $z=h$:

$$x^2+y^2=l^2-h^2.$$

Последнее уравнение означает, что гирька может двигаться лишь по окружности радиуса $\sqrt{l^2-h^2}$ в плоскости xy.

Пример 2. Для случая двух брусков, связанных нерастяжимой нитью и движущихся как указано на рис. 35, уравнения связи имеют вид (для так выбранной системы координат)

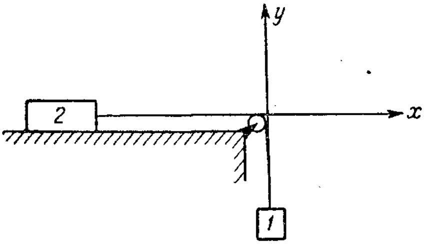

Рис. 35

$$x_1=0, \quad y_2=0, \qquad (1)$$

$$|x_2|+|y_1|=l, \qquad (2)$$

где l — длина нити.

При решении ряда задач, помещенных в различных задачниках, мы неявно пользуемся уравнениями связи. Так например, при решении задач типа двух брусков, изображенных на рис. 35, мы вместо написания уравнений связи говорим, что первое тело движется по вертикали, второе по горизонтали и что модули скоростей и ускорений обоих тел равны, что, конечно, следует из (1) и (2) при их дифференцировании.

Некоторые идеальные связи способны создавать при наличии потенциальных сил положение с минимумом потенциальной энергии (положение устойчивого равновесия). Примером тому могут быть положение бруска в круглой чашке, гирьки на нитке, бруска на пружине (рис. 36). Такие связи (совместно с потенциальными силами) стремятся удержать тело, попавшее в положение с минимумом потенциальной энергии, в этом положении, поэтому они называются *удерживающими* (иногда их неудачно называют двусторонними). Не все связи таковы. Например, плоскость, не удерживающая связь (иногда употребляют термин — односторонняя связь).

Про связи можно говорить много очень важного и интересного, но это выходит за рамки нашей книжки.

Подчеркнем еще раз тот факт, что силы связи ничем в принципе не отличаются от других сил, просто их оказалось удобным выделить в особую группу по таким, например, причинам:

а) они ограничивают область движения тел (определяют собой граничные условия движения тел);

б) зависимости сил связи от координат (а для очень сложных связей и от скорости тела) очень часто чрезвычайно сложны, и уравнения, в которые они входят (например, уравнение второго закона Ньютона), решаются с трудом, а то и совсем не имеют точных решений.

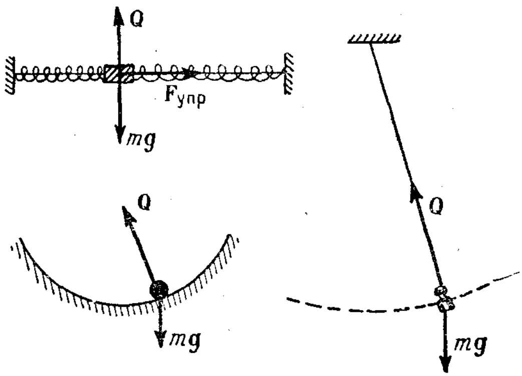

Рис. 36

В тех случаях, когда нас силы связи не интересуют, их из уравнений исключают, а в аналитических механиках приводятся способы писать уравнения движения тела с исключенными **жесткими идеальными** связями (например, уравнения Гамильтона).

Приведем еще один пример сил связи — силу тяготения. Она своеобразна вот в каком отношении: если энергия движущегося тела отрицательна ($E<0$), то движение тела будет финитным, т. е. тело не уйдет за пределы тяготения (брошенные камни, спутники); если же энергия тела положительна ($E>0$), то движение тела будет инфинитным (например, космические станции «Марс», «Венера»). Соответственно для тел с $E<0$ тяготение есть удерживающая, а для тел с $E>0$ — неудерживающая связь. Далее, в случае, например, солнечной системы для станции «Марс» тяготение планет — неудерживающая связь, а тяготение со стороны Солнца — удерживающая. Но если и по отношению к Солнцу $E>0$, то тело уйдет за пределы Солнечной системы (напомним, что за $U=0$ принято значение U на бесконечном удалении от центра тяготения). Таким образом, область движения тела под действием тяготения зависит от энергии тела.

Из рассмотренных примеров видно, что силы связи — это довольно сложная вещь, особенно в общем случае нежестких неидеальных связей. Это и есть одна из важных причин, по которым силы связей выделены в особую группу.

Иногда возникает вопрос, а где же примеры не сил связей, а «обычных», «хороших» сил? Вот некоторые из них: сила сопротивления среды, реактивная сила струи, сила удара ногой по мячу, сила ветра, дующего на крыльчатку ветряка или на ветви деревьев, сила давления газов на поршни в цилиндрах и т. д.

§ 19. Принцип относительности Галилея

Уже отмечалось, что описание механического движения безотносительно к какой-либо системе отсчета бессмысленно. Отмечалось также и то, что, вообще говоря, характер движения тела и его описание существенным образом зависят от выбора системы отсчета. Первый закон Ньютона утверждает, что существует класс систем, в которых движение тел описывается наиболее простыми уравнениями (теми, например, с которыми мы уже познакомились — уравнениями ньютоновой механики).

Спрашивается, чем отличаются инерциальные системы друг от друга? Нет ли среди них «самой лучшей», а если не «самой лучшей», то обладающей хоть какими-нибудь преимуществами по сравнению с другими? Ответ на этот совсем не праздный вопрос содержится в принципе Галилея. Однако прежде чем его формулировать, сделаем некоторые предварительные замечания.

Именно вспомним, что скорость тела и его положение в пространстве в какой-либо момент времени определяются не только действующей на тело силой, но и начальными условиями, т. е. значениями $\mathbf{v}_0$ и $\mathbf{r}_0$. Действительно, уже показывалось, что

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{a}(t')\,dt' = \mathbf{v}_0 + \int_{t_0}^{t} \frac{\mathbf{F}(t')}{m}\,dt'$$

и

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{v}(t')\,dt'.$$

Таким образом, конкретный характер движения тела в уже выбранной системе отсчета определяется законами движения $\left(\text{в данном случае вторым законом Ньютона в форме } \mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m}\right)$ и начальными условиями.

Если мы теперь стали бы наблюдать за движением некоторого тела из разных систем отсчета (для определенности, только инерциальных), то, вообще говоря, $\mathbf{v}(t)$ и $\mathbf{r}(t)$ будут в разных системах отсчета различными. Но из-за чего и в какой мере?

Во-первых, конечно, из-за различия в начальных условиях, т. е. из-за того, что $\mathbf{v}_0$ и $\mathbf{r}_0$ для данного тела в разных системах отсчета различны. Во-вторых, из-за возможных различий в остальных величинах — m, $\mathbf{F}$ и t.

Первое совершенно очевидно, второе подлежит выяснению.

Обратимся к знаменитому труду Галилео Галилея «Диалоги о двух главнейших системах мира». Устами одного из участников «Диалогов» Галилей говорит:

«Уединитесь с кем-либо из друзей в просторное помещение под палубой какого-нибудь корабля, запаситесь мухами, бабочками и другими подобными мелкими летающими насекомыми; пусть будет у нас там также большой сосуд с водой и плавающими в нем маленькими рыбками; подвесьте, далее, наверху ведерко, из которого вода будет падать капля за каплей в другой сосуд с узким горлышком, подставленный внизу. Пока корабль стоит неподвижно, наблюдайте прилежно, как мелкие летающие животные с одной и той же скоростью движутся во все стороны помещения; рыбы, как вы увидите, будут плавать безразлично во всех направлениях; все падающие капли попадут в подставленный сосуд, и вам, бросая какой-нибудь предмет, не придется бросать его с большей силой в одну сторону, чем в другую, если расстояния будут одни и те же; и если вы будете прыгать сразу двумя ногами, то сделаете прыжок на одинаковое расстояние в любом направлении. Прилежно наблюдайте все это, хотя у нас не возникает никакого сомнения в том, что пока корабль стоит неподвижно, все должно происходить именно так. Заставьте теперь корабль двигаться с любой скоростью и тогда (если только движение будет равномерным и без качки в ту и другую сторону) во всех названных явлениях вы не обнаружите ни малейшего изменения и ни по одному из них не сможете установить, движется ли корабль или стоит неподвижно».

Далее Галилей подчеркивает: «И причина согласованности всех этих явлений заключается в том, что движение корабля общее всем находящимся в нем предметам, так же как и воздух; поэтому-то я и сказал, что вы должны находится под палубой, так как если бы вы были на ней, т. е. на открытом воздухе, не следующем за бегом корабля, то должны были бы видеть более или менее заметные различия в некоторых из названных явлений».

Таким образом, Галилей утверждает, что в корабле, сначала неподвижном по отношению к Земле, а затем идущем по отношению к ней с постоянной скоростью, все явления протекают совершенно одинаково. Очевидно, то же самое можно сказать и про два корабля, один из которых стоит, а другой движется с постоянной скоростью по отношению к Земле (а значит, и к первому кораблю). Еще более обще можно сказать:

В любых системах отсчета, движущихся по отношению друг к другу с постоянными скоростями, все механические явления протекают одинаково при, однако (что не сказано явно Галилеем), одинаковых начальных условиях и одинаковой окружающей обстановке (одинаковые силы, одинаковые среды, воздействия и т. д.)

Из этого следует прежде всего, что если одна из систем инерциальна, то и все остальные, движущиеся равномерно по отношению к первой, тоже будут инерциальными. И таких систем, очевидно, бесчисленное множество.

Если теперь наблюдать за движением некоего тела из двух инерциальных систем отсчета, то при одинаковости начальных условий ($\mathbf{v}_0$ и $\mathbf{r}_0$) по отношению к этим двум системам отсчета движение интересующего нас тела в обеих системах отсчета будет выглядеть совершенно одинаково. Таким образом мы с необходимостью приходим к выводу о том,

что с точностью до начальных условий движения наблюдаемого тела все инерциальные системы отсчета эквивалентны.

Это и есть принцип Галилея в самой краткой формулировке. Далее, пусть имеется некоторая инерциальная система отсчета A и по отношению к ней другая система A' движется с постоянной скоростью (рис. 37), так что оси координат систем A и A' параллельны. Далее, пусть где-то движется материальная точка N, которая имеет в системе A скорость $\mathbf{v}$, вообще говоря, непостоянную. Проведем к N радиус-векторы $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$, определяющие положение тела N в системах A и A' (рис. 37) и $\mathbf{R}$, определяющий положение начала отсчета системы A' в системе A. Очевидно

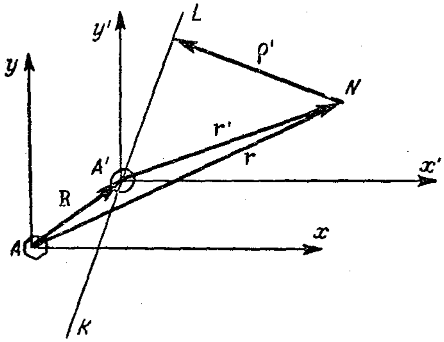

Рис. 37

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{r}'. \tag{1}$$

Дифференцируя во времени это равенство, получим, полагая, что $t = t' + \text{const}$, а значит, $dt = dt'$:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{R}}{dt} + \frac{d\mathbf{r}'}{dt'},$$

или

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} + \mathbf{v}', \tag{2}$$

где $\mathbf{v}$ — скорость тела N по отношению к системе A, $\mathbf{v}'$ — скорость этого же тела по отношению к системе A', $\mathbf{V}$ — скорость системы A' отношению к системе A.

Дифференцируя (2) по времени, получим

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\mathbf{V}}{dt} + \frac{d\mathbf{v}'}{dt'},$$

а так как $V = \text{const}$, то $\frac{dV}{dt} = 0$, а потому $\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\mathbf{v}'}{dt'}$, или

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}', \tag{3}$$

т. е. для наблюдателей, находящихся в двух любых системах отсчета, движущихся по отношению друг к другу со скоростью $\mathbf{V} = \text{const}$, ускорения всех наблюдаемых тел одинаковы. Уравнения (2) и (3) получены в предположении, что $\Delta t = \Delta t'$, т. е. интервалы времени между двумя одними и теми же событиями в системах A и A' совпадают. Обычно полагают $t = t'$, т. е. считают, что часы в системах отсчета A и A' идут одинаково, а $\mathbf{R} = \mathbf{V}t$ (или $\mathbf{R}_0 = 0$). Соотношения

$$\mathbf{r} = \mathbf{V}t + \mathbf{r}', \tag{4}$$

$$t = t' \tag{5}$$

называются *преобразованиями Галилея* и позволяют, зная $\mathbf{r}$ тела в одной системе A, найти $\mathbf{r}'$ этого же тела в другой системе A', движущейся по отношению к первой системе со скоростью $\mathbf{V} = \text{const}$.

Уравнение (5) утверждает, что время течет в обеих системах A и A' одинаково. В частности, если двое совершенно одинаковых часов однажды синхронизированы в системах A и A', то показания этих часов будут всегда одинаковы. Если теперь, пользуясь этими часами, измерять длительность протекания какого-либо процесса (подъем камня, выполнение какой-либо работы и т. д.), то она окажется одинаковой и по часам системы A и по часам системы A', т. е.

$$\Delta t = \Delta t'.$$

Кроме того, в классической механике считается, что масса тела во всех системах отсчета (и в неинерциальных тоже) одна и та же, т. е.

$$m = m'. \tag{6}$$

Далее, расстояния между любыми двумя телами (материальными точками), измеренные в один и тот же момент времени из любых двух инерциальных систем, одинаковы. Действительно, пусть имеются две материальные точки 1 и 2, радиус-векторы которых суть $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_1'$ и $\mathbf{r}_2'$ в системах A и A' соответственно. Тогда для них имеем

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{V}t + \mathbf{r}_2',$$
$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{V}t + \mathbf{r}_1'.$$

Вычитая, получим

$$\Delta\mathbf{r}_{2,1} = \Delta\mathbf{r}_{2,1}',$$

т. е. относительное положение двух любых материальных точек одно и то же во всех инерциальных системах отсчета в один и тот же момент времени.

Дифференцируя это равенство по времени, получим

$$\mathbf{v}_{2,1} = \mathbf{v}'_{2,1},$$

т. е. относительная скорость этих материальных точек, измеренная одновременно в нескольких системах, тоже не зависит от выбора инерциальной системы отсчета.

Чрезвычайно важно отметить, что входящие в (1) — (5) величины надо измерять, пользуясь для этого какими-то сигналами, идущими от наблюдателя к измеряемому объекту, и наоборот. За время же прохождения сигнала эти величины как-то изменятся, т. е. информация о движении будет приходить к исследователю с запаздыванием. Поэтому надо было бы вносить соответствующие поправки в эти равенства, тем бо́льшие, чем медленнее распространяется сигнал. В уравнениях же (1) — (5) этих поправок нет. Но это означает, что мы предполагаем существование сигналов, способных распространяться с бесконечной скоростью. Таких же сигналов, как показывает опыт, не существует. Поэтому ясно, что преобразования Галилея, не учитывающие конечности скорости распространения сигналов, являются приближенными и верными лишь тогда, когда скорости всех тел ничтожны по сравнению со скоростью сигналов, с помощью которых производилось получение информации о движении тел. По этой же причине равенства (1) — (4), являющиеся с математической точки зрения просто следствием правила сложения векторов и правил дифференцирования их, с физической точки зрения, преполагающей измерение входящих в (1) — (4) величин, являются вовсе не тривиальными. Они есть обобщение опытных фактов, накопленных к моменту создания классической механики. Они являются в той же мере приближенными утверждениями, что и законы Ньютона.

В классической механике Ньютона все силы взаимодействия между телами считались зависящими только от относительных положений и относительных скоростей этих тел, а это значит, что для любых двух тел силы их взаимодействия одинаковы во всех инерциальных системах отсчета, т. е.

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}'.$$

Но тогда из

$$m = m', \quad \mathbf{a} = \mathbf{a}' \quad \text{и} \quad \mathbf{F} = \mathbf{F}'$$

следует фундаментальный вывод, что вид второго закона динамики во всех инерциальных системах отсчета одинаков, т. е. для любого тела имеют место равенства

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m} \quad \text{и} \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F} \tag{7}$$

из какой бы галилеевой системы отсчета мы не наблюдали тело.

То же самое относится и к третьему закону, т. е. $\mathbf{F}_{ik} = -\mathbf{F}_{ki}$ в любой инерциальной системе отсчета для любых двух тел i и k.

Отсюда следует еще одна формулировка принципа Галилея:

Во всех инерциальных системах отсчета вид законов динамики одинаков.

Мало того, входящие во второй закон Ньютона величины имеют одинаковое численное значение во всех инерциальных системах отсчета (чего, конечно, нельзя сказать про $\mathbf{v}$ и $\mathbf{r}$), т. е. инвариантны по отношению к преобразованиям Галилея.

Возвращаясь к сказанному в начале этого параграфа, т. е. к уравнениям

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 + \int_{t_0}^{t} \frac{\mathbf{f}}{m}\, dt',$$

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{v}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{v}(t')\, dt',$$

мы видим, что $\mathbf{v}$ и $\mathbf{r}$ в различных инерциальных системах отсчета отличаются только из-за начальных условий.

От скоростей и положений зависят импульсы тел и их энергия. Значит, в разных системах отсчета импульсы тел и их энергия различны. **Однако законы изменения импульса и энергии во всех инерциальных системах отсчета имеют одинаковую форму.**

В отношении закона изменения импульса это ясно (см. (7)).

Покажем, что и закон изменения кинетической энергии имеет один и тот же вид (форму) в двух разных инерциальных системах отсчета A и A'. Пусть в системе A закон имеет форму

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = d\left(\frac{m\mathbf{v}^2}{2}\right). \tag{8}$$

Поскольку в соответствии с преобразовниями Галилея имеют место равенства

$$d\mathbf{r} = d\mathbf{R} + d\mathbf{r}',$$
$$\mathbf{v} = \mathbf{V} + \mathbf{v}',$$

то, подставляя эти значения $d\mathbf{r}$ и $\mathbf{v}$ в равенство (8), получим

$$\mathbf{F}d\mathbf{R} + \mathbf{F}d\mathbf{r}' = d\left[\frac{m}{2}(\mathbf{V}^2 + 2\mathbf{V}\cdot\mathbf{v}' + \mathbf{v}'^2)\right]$$

или с учетом того, что $\mathbf{V} = \mathbf{const}$,

$$\mathbf{F}d\mathbf{R} + \mathbf{F}d\mathbf{r}' = d(m\mathbf{V}\cdot\mathbf{v}') + d\left(\frac{m\mathbf{v}'^2}{2}\right).$$

Так как

$$d(m\mathbf{V}\mathbf{v}') = m\mathbf{V}d\mathbf{v}' = m\mathbf{V}\mathbf{a}'dt = m\mathbf{a}'\mathbf{V}dt = m\mathbf{a}d\mathbf{R} = \mathbf{F}d\mathbf{R},$$

то

$$\mathbf{F}d\mathbf{R}+\mathbf{F}d\mathbf{r}'=\mathbf{F}d\mathbf{R}+d\left(\frac{m\mathbf{v}'^2}{2}\right).$$

Приводя подобные члены, получим с учетом $\mathbf{F}=\mathbf{F}'$ и $m=m'$ равенство

$$\mathbf{F}'d\mathbf{r}'=d\left(\frac{m'\mathbf{v}'^2}{2}\right),$$

которое отличается от (8) только наличием штрихов (Ясно, что везде можно было бы писать v^2 и v'^2 вместо $\mathbf{v}^2$ и $\mathbf{v}'^2$.)

Таким образом, закон изменения кинетической энергии имеет одинаковый вид в обеих инерциальных системах A и A'. Ясно, что и в интегральной форме он будет иметь в системах A и A' одинаковый вид; именно: в системе A

$$A+Ag=\Delta E,$$

в системе A'

$$A'+A'g=\Delta E'.$$

Итак, законы динамики не меняют своей формы при изменении координат, обусловленном сменой A на A', или, как говорят,

законы динамики ковариантны по отношению к преобразованиям Галилея.

Поэтому законы механики, установленные в одной инерциальной системе отсчета, справедливы и в любой другой инерциальной системе, и нет надобности отыскивать новые законы механики для новых наблюдателей в новых системах отсчета. В этом отношении все инерциальные системы отсчета эквивалентны. Надо только помнить, что они не эквивалентны в отношении начальных условий и тех величин, которые от начальных условий зависят.

Чрезвычайно важно отметить тот факт, что в этом параграфе всюду фигурировали лишь силы, не зависящие от скоростей тел по отношению к системе отсчета.

Если же учесть такие силы, то надо сделать оговорку о том, что для них сказанное выше неверно, а потому принцип Галилея следует читать так:

Для сил, не зависящих от скоростей тел по отношению к системе отсчета, законы динамики ковариантны по отношению к преобразованиям Галилея.

В теории относительности ограничение, обусловленное наличием сил $\mathbf{F}=\mathbf{F}(\mathbf{v})$, снимается.

Можно сказать, что принцип относительности Галилея делит все физические величины на абсолютные (не зависящие от выбора системы отсчета, одинаковые для всех инерциальных наблюдателей) и относительные (такие, значение которых зависит от выбора системы отсчета). К первым относятся, например, длина тела, его объем, относительные положения и относительные скорости различных тел, ускорение, масса, сила, энергия взаимодействия; ко вторым — положение тел и их скорости по отношению к системе отсчета, импульсы, кинетическая энергия.

Мы так подробно разбирали принцип относительности и связанные с ним соотношения из-за того, что принцип относительности в физике играет исключительно важную роль. Принцип относительности Галилея, обобщенный Эйнштейном на немеханические явления, пронизывает все здание современной физики, и, в частности, он есть один из краеугольных камней одной из важнейших физических теорий — теории относительности.

Все дальнейшие соотношения и законы изложенные в книге (кроме особо оговоренных и приведенных в § 20) имеют место в инерциальных системах отсчета.

§ 20. Неинерциальные системы отсчета. Силы инерции

Не всегда удается на практике наблюдать интересующее нас движение из инерциальных систем отсчета, и стало быть, надо уметь описывать движение и с точки зрения наблюдателей, находящихся в неинерциальных системах отсчета. Для расчета движения материальной точки надо знать ее уравнение движения, которым при описании движения в инерциальных системах является второй закон Ньютона. Получим аналогичное уравнение движения, верное в неинерциальных системах отсчета, для чего будем сопоставлять движению материальной точки N в неинерциальной системе отсчета A' ее же движение в инерциальной системе отсчета A (рис. 37).

Пусть начало отсчета системы A' задается в системе A радиус-вектором $\mathbf{R}$, а положение точки N радиус-вектором $\mathbf{r}$. Положение же точки N относительно системы A' задается радиус-вектором $\mathbf{r}'$. Тогда связь между ними определится равенством

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{r}'. \tag{1}$$

Пусть система A' движется произвольным образом и, например, вращается вокруг оси KL с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$. Найдем теперь связь между абсолютной (по отношению к A) и относительной (по отношению к A') скоростями материальной точки N, для чего продифференцируем (1), расписав предварительно $\mathbf{r}'$ по ортам системы A', т. е. учтя, что

$$\mathbf{r}' = x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}' + z'\mathbf{k}'. \tag{2}$$

При этом получим из (1)

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{R}}{dt} + \left(\frac{dx'}{dt}\mathbf{i}' + \frac{dy'}{dt}\mathbf{j}' + \frac{dz'}{dt}\mathbf{k}'\right) + \left(x'\frac{d\mathbf{i}'}{dt} + y'\frac{d\mathbf{j}'}{dt} + z'\frac{d\mathbf{k}'}{dt}\right). \tag{3}$$

Очевидно, $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ — это абсолютная скорость точки N, а $\frac{d\mathbf{R}}{dt}$ — скорость начала отсчета A' в системе A. Величина $\mathbf{v}' = \frac{dx'}{dt}\mathbf{i}' + \frac{dy'}{dt}\mathbf{j}' + \frac{dz'}{dt}\mathbf{k}'$ есть быстрота изменения координат x', y' и z' точки N в той системе отсчета, оси которой направлены по ортам $\mathbf{i}'$, $\mathbf{j}'$ и $\mathbf{k}'$, т. е. в системе A'. Таким образом, $\mathbf{v}'$ — это относительная скорость точки N. Для уяснения смысла последней скобки в (3) учтем, что производная орта по времени равна векторному произведению этого орта на угловую скорость его вращения. Но тогда, обозначая сумму трех членов во второй скобке буквой $\mathbf{v}_e$, получим

$$\mathbf{v}_e = x'\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i}' + y'\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{j}' + z'\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}'.$$

Вынося за скобки общий множитель $\boldsymbol{\omega}$, получим

$$\mathbf{v}_e = \boldsymbol{\omega} \times (x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}' + z'\mathbf{k}') = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'.$$

Таким образом, если система A' вращается с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$, то величина $\mathbf{v}_e = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$ есть ни что иное как скорость конца вектора $\mathbf{r}'$ по отношению к системе A, т. е. скорость вращательного движения в системе A той точки системы A', радиус-вектор которой равен в данный момент $\mathbf{r}'$. Иными словами, $\mathbf{v}_e$ — это скорость (по отношению к A) той точки системы A', которую в данный момент времени проходит материальная точка N, причем $\mathbf{v}_e$ обусловлено только вращением системы A'. Но точка, определяемая радиус-вектором $\mathbf{r}'$, участвует не только во вращательном движении по отношению к A, а еще и в поступательном со скоростью $\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{R}}{dt}$. Суммарная скорость точки системы A', определенной радиус-вектором $\mathbf{r}'$, есть сумма обеих скоростей, т. е.

$$\mathbf{v}_{\text{п}} = \mathbf{V} + \mathbf{v}_e = \frac{d\mathbf{R}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'.$$

Эта скорость называется *переносной скоростью*. Смысл ее, подчеркиваем, в том, что это есть скорость (по отношению к A) той точки системы A', которую в данный момент времени проходит интересующая нас материальная точка N.

Из изложенного ясно, что $\frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_e$ не является относительной скоростью точки N, ибо содержит в себе слагаемое $\mathbf{v}_e$, которое характеризует не движение материальной точки N в системе A', а вращение вектора $\mathbf{r}'$ в системе A.

Учитывая сказанное, равенство (3) запишем в виде

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\text{п}} + \mathbf{v}'. \tag{4}$$

Опуская довольно длинные выкладки, приведем сразу результат дифференцирования равенства (4) по времени

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \left(\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{r}' - \omega^2\boldsymbol{\rho}'\right) + \left(\frac{d^2x'}{dt^2}\mathbf{i}' + \frac{d^2y'}{dt^2}\mathbf{j}' + \frac{d^2z'}{dt^2}\mathbf{k}'\right) + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}',$$

где ρ' — расстояние от материальной точки N до оси вращения KL (рис. 37).

Величину

$$\mathbf{a}_{\text{п}} = \frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{r}' + \omega^2 \boldsymbol{\rho}',$$

характеризующую ускорение точки $\mathbf{r}'$ системы A' по отношению к A (ускорение в системе A той точки системы A', которую проходит в данный момент материальная точка N), называют *переносным ускорением.*

Величину

$$\mathbf{a}' = \frac{d^2x'}{dt^2}\mathbf{i}' + \frac{d^2y'}{dt^2}\mathbf{j}' + \frac{d^2z'}{dt^2}\mathbf{k}',$$

характеризующую быстроту изменения скорости материальной точки в системе A', называют *относительным ускорением.*

Величину

$$\mathbf{a}_{\text{к}} = 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'$$

называют *кориолисовым*, или *поворотным ускорением* материальной точки. Оно обусловлено тем, что материальная точка N движется в системе A', которая, в свою очередь, вращается по отношению к системе A.

Полное же ускорение материальной точки N в системе A будет складываться из переносного ускорения точки $\mathbf{r}'$ системы A', кориолисова ускорения $\mathbf{a}_{\text{к}}$ материальной точки N и ее относительного ускорения $\mathbf{a}'$:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_{\text{п}} + \mathbf{a}_{\text{к}} + \mathbf{a}'. \qquad (5)$$

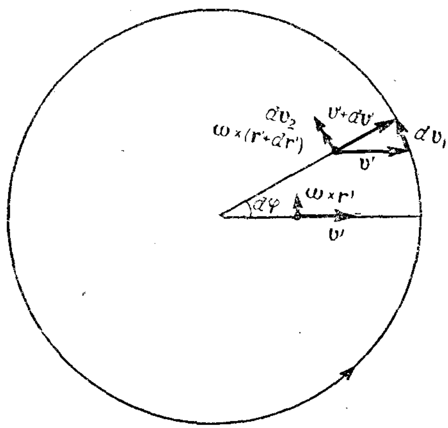

Рис. 38

Выведем выражение для кориолисова ускорения из наглядных геометрических соображений для частного случая движения материальной точки N по вращающемуся диску.

Пусть материальная точка N движется в системе A' (диск, вращающийся с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$) с постоянной в этой системе скоростью $\mathbf{v}' \uparrow\uparrow \mathbf{r}'$ и за время dt переместится из положения $\mathbf{r}'$ в положение $\mathbf{r}' + d\mathbf{r}'$ по отношению к диску (рис. 38).

В системе A' скорость $\mathbf{v}'$ постоянна, а по отношению к системе A эта скорость за время dt повернется на угол $d\varphi = \omega\, dt$, т. е. изменится на $dv_1 = v'\, d\varphi = v'\omega\, dt$, или с учетом направлений (правило буравчика)

$$d\mathbf{v}_1 = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'\, dt.$$

Но это не все. За время dt материальная точка N ушла от центра диска на dr', а значит, стала двигаться с большей скоростью по отношению к системе A, чем в момент t; при этом $dv_2 = \omega\, dr' = \omega v'\, dt$, а с учетом направлений

$$d\mathbf{v}_2 = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'\, dt.$$

Как видно, $d\mathbf{v}_1$ и $d\mathbf{v}_2$ равны друг другу. Деля их на dt, мы получим

$$\mathbf{a}_\text{к} = \frac{d\mathbf{v}_1 + d\mathbf{v}_2}{dt} = 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}',$$

что и является кориолисовым ускорением материальной точки N.

Итак, если в системе A некоторая материальная точка N имеет ускорение $\mathbf{a}$, а в системе A' — ускорение $\mathbf{a}'$, то в общем случае эти ускорения не равны друг другу, а связаны формулой (5) или в развернутом виде — следующей формулой:

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{r}' - \omega^2 \boldsymbol{\rho}' + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' + \mathbf{a}'. \tag{6}$$

Видно, что за счет вращения системы A' правая часть формулы (6) содержит три слагаемых. При $\boldsymbol{\omega} = 0$ формула сразу существенно упрощается. В этом случае

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} + \mathbf{a}' = \frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} + \frac{d^2\mathbf{r}'}{dt^2},$$

причем переносное ускорение $\mathbf{a}_\text{п} = \frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2}$ одинаково для всех точек системы, а относительное $\mathbf{a}' = \frac{d^2\mathbf{r}'}{dt^2}$ (если бы $\boldsymbol{\omega} \neq 0$, то орты $\mathbf{i}'$, $\mathbf{j}'$ и $\mathbf{k}'$ вращались бы и производные от них не были бы равны нулю и тогда не имело бы места равенство $\mathbf{a}' = \frac{d^2\mathbf{r}'}{dt^2}$).

Составим теперь уравнение движения материальной точки N в системе A. Оно имеет вид

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}.$$

Подставляя сюда выражение для $\mathbf{a}$ из (5), получим

$$m(\mathbf{a}_\text{п} + \mathbf{a}_\text{к} + \mathbf{a}') = \mathbf{F},$$

или

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F} - m(\mathbf{a}_\text{п} + \mathbf{a}\text{к}).$$

Величину $-m(\mathbf{a}_\text{п} + \mathbf{a}_\text{к})$ называют *силой инерции*, действующей на материальную точку N в системе A'. Обозначая эту силу инерции буквой $\boldsymbol{\Phi}$, получим

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F} + \boldsymbol{\Phi}. \tag{7}$$

Слева стоит произведение массы тела на его относительное (по отношению к A') ускорение, а справа — суммарная сила, действующая на это тело с точки зрения наблюдателя системы A'. Поэтому уравнение (7) естественно считать уравнением движения материальной точки в системе A' (при этом, однако, $\mathbf{a}' = \frac{d^2x'}{dt^2}\mathbf{i}' + \frac{d^2y'}{dt^2}\mathbf{j}' + \frac{d^2z'}{dt^2}\mathbf{k}'$, а не $\frac{d^2\mathbf{r}'}{dt^2}$ при вращении системы A' относительно $\mathbf{v}$ системы A).

Таким образом, закон движения материальной точки в неинерциальной системе отсчета A' отличается от закона ее движения в инерциальной системе A, кроме $\mathbf{a}' \neq \mathbf{a}$, еще и дополнительной силой $\mathbf{\Phi} = -m(\mathbf{a}_п + \mathbf{a}_к)$ — силой инерции. Из определения силы $\mathbf{\Phi}$ следует, что она целиком определяется для данной материальной точки N характером движения системы A' по отношению к A и величиной $\mathbf{v}'$.

Если A' движется по отношению к A равномерно и без вращения, то $\mathbf{a}_п = \mathbf{a}_к = 0$ и $\mathbf{\Phi} = 0$, т. е. в инерциальных системах отсчета сила инерции отсутствует. В этом случае, естественно,

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{a}'.$$

В силу сказанного можно считать, что инерциальные системы отсчета — это тот частный случай неинерциальных систем, когда $\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} = 0$ и $\omega = 0$; в этом случае $\mathbf{a}_п = \mathbf{a}_к = 0$, $\mathbf{a} = \mathbf{a}'$, $\mathbf{\Phi} = 0$ со всеми вытекающими отсюда следствиями.

Полезно иметь в виду следующее:

1. Сила инерции $\mathbf{\Phi} = -m(\mathbf{a}_п + \mathbf{a}_к)$ не вызывается действием какого-либо тела на материальную точку N, а обусловлена характером движения системы A' по отношению к A, т. е. неинерциальностью системы A', из которой наблюдают движение материальной точки N. «Настоящие» же силы $\mathbf{F}$, порождаемые взаимодействием тел, не зависят, разумеется, от характера движения системы A'. Ясно, что силы инерции $\mathbf{\Phi}$ как не обусловленные взаимодействием тел не укладываются в третий закон Ньютона в отличие от «настоящих» сил $\mathbf{F}$, для которых справедливо «как ты меня, так и я тебя, только в противоположную сторону».

2. Замечательной особенностью сил инерции является то, что они пропорциональны массе тела, на которое они действуют (и для которого пишется уравнение движения).

Известно, что таким же свойством обладает и сила тяжести. Поэтому Эйнштейн предложил их не различать и считать эквивалентными (правда в таких малых областях пространства, в пределах которых сила инерции и сила тяжести, вообще говоря, зависящие от положения материальной точки, существенно не меняются).

Это положение называется локальным (местным) принципом эквивалентности сил инерции и сил тяжести.

Но тогда можно сделать фундаментальный вывод:

В неинерциальных системах отсчета все явления в малых областях пространства протекают так же, как и в инерциальных, но с добавочной силой «тяжести» Ф.

Это одна из возможных формулировок принципа эквивалентности Эйнштейна. Она чрезвычайно удобна для решения задач в неинерциальных системах отсчета.

3. Уравнение $m\mathbf{a}' = \mathbf{F} + \mathbf{\Phi}$ есть обобщение второго закона динамики на неинерциальные системы отсчета и переходит в «обычный» второй закон при $\mathbf{\Phi} = 0$.

I. Обобщая сказанное, сформулируем теперь основные положения динамики для неинерциальных систем отсчета:

а) существуют такие системы отсчета, по отношению к которым свободные материальные точки имеют ускорения;

б) в этих системах отсчета ускорения, получаемые телами, вызываются силами (так же как и в инерциальных системах);

в) не всякая сила отражает взаимодействие тел, есть силы, обусловленные характером движения данной системы отсчета.

II. Законы изменения $\mathbf{p}'$, $\mathbf{L}'$ и E' выполняются, но с учетом действия сил инерции $\mathbf{\Phi}$. При этом, если сумма всех сил (включая силы инерции) равна нулю, то законы изменения $\mathbf{p}'$, $\mathbf{L}'$, E' вырождаются в законы их сохранения.

Заметим, что если начало координат O' системы A' поместить в центр инерции системы тел, то момент силы инерции $\mathbf{r}_c \times \mathbf{\Phi}$ по отношению к точке O' будет равен нулю из-за $\mathbf{r}_c' = 0$. Это значит, что в такой системе отсчета ($\mathbf{r}_c' = 0$) силы инерции $\mathbf{\Phi}$ не меняют момента импульса системы тел по отношению к началу координат системы A'. Такой выбор системы отсчета A' существенно облегчает решение задач на вращение твердого тела. Именно поэтому при выводе закона изменения $\mathbf{L}'$ мы и не учитывали момента сил $\mathbf{\Phi}$ (и даже не упоминали об их существовании).

Рассмотрим в качестве примера движение гирьки, насаженной на равномерно вращающийся вокруг точки O стержень и прикрепленный к концу пружины (рис. 39). Пусть инерциальная система A и неинерциальная система A', связанная со стержнем, имеют общее начало координат — точку O. Пусть гирька движется по стержню от точки O. В системе A на гирьку действует растянувшаяся пружина с силой $\mathbf{F}_1$, направленной к точке O и деформировавшийся в результате взаимодействия с гирькой стержень с силой $\mathbf{F}_2$, направленной перпендикулярно стержню (рис. 39, *а*). Под действием этих сил гирька будет иметь ускорение

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2}{m}.$$

Это ускорение составляет некоторый угол $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ с вектором скорости $\mathbf{v}$, поэтому траектория гирьки в системе A будет представлять некоторую кривую.

В системе A' на гирьку, кроме сил $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$, действуют еще и силы инерции

$$\mathbf{\Phi} = -m(\mathbf{a}_{\text{п}} + \mathbf{a}_{\text{к}}) = -m(\omega^2 \boldsymbol{\rho}' + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}').$$

Так как в данном случае $\rho' = -\mathbf{r}'$, то

$$\mathbf{\Phi} = -m(-\omega^2\mathbf{r}' + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}').$$

Первое слагаемое — центробежная сила инерции, второе — кориолисова сила инерции (рис. 39, *б*).

Первая сила направлена от оси вращения, вторая антипараллельна силе $\mathbf{F}_2$.

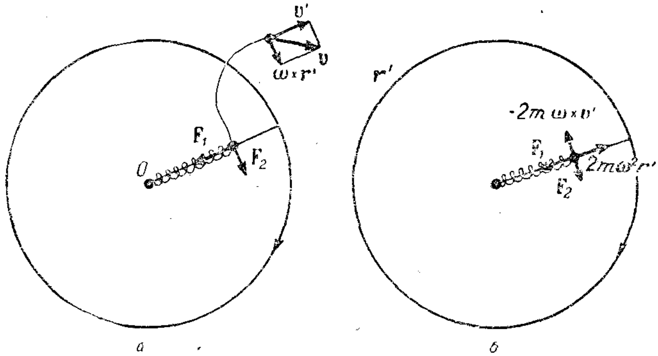

Рис. 39

В системе A' закон движения гирьки имеет вид

$$\mathbf{a}' = \frac{\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \Phi_{\text{ц. б}} + \Phi_{\text{к}}}{m}.$$

Поскольку в системе A' гирька движется в д о л ь стержня, то составляющая $\mathbf{a}'$, перпендикулярная стержню, равна нулю, что приводит к $\mathbf{F}_2 + \mathbf{\Phi}_{\text{к}} = 0$, но тогда

$$\mathbf{a}' = \frac{\mathbf{F}_1 + \Phi_{\text{ц. б}}}{m}.$$

Так как и относительное ускорение $\mathbf{a}'$ и относительная скорость гирьки $\mathbf{v}'$ направлены все время по прямому стержню, то траектория движения гирьки в системе A' есть прямая линия.

Читатель сам может рассмотреть случай $\mathbf{F}_1 = 0$, $\mathbf{F}_2 = 0$ (когда нет пружины или стержня), а также случай $\mathbf{v}' = 0$.

Рекомендуем рассмотреть движение тела по поверхности Земли из двух систем отсчета: инерциальной A, не связанной с Землей, и неинерциальной A', связанной с Землей, и сравнить характер движения этого тела в системах A и A'.

Полезно также рассмотреть движение тела, находящегося в кабине спутника Земли из этих же систем отсчета.

§ 21. Элементы механики идеальных жидкостей и газов

В механике жидкости и газы рассматриваются как некоторые непрерывные (сплошные) среды, характерными особенностями которых являются их текучесть, отсутствие собственной формы. Это, естественно, сказывается и на их поведении.

Части жидкости или газа, двигаясь друг относительно друга, испытывают силы трения и давления. Если действием трения (его часто называют внутренним) можно пренебречь, то жидкость или газ называют идеальным. На любой участок такой жидкости или газа могут действовать (согласно определению идеальных жидкостей и газов в механике) только силы нормальные их поверхностям.

При решении динамических задач часто оказывается более удобным пользоваться не понятием силы, действующей на жидкость, а понятием давления, которое определяется следующим образом: если на площадку $\mathbf{dS}$ действует сила $d\mathbf{F}$, то величина $p=\frac{dF\cdot\cos\alpha}{dS}$ (рис. 40) и будет называться *давлением* на эту площадку. Очевидно, указанное определение можно записать иначе: $p=\frac{dF\cdot n\cdot\cos\alpha}{dS}$, где n — модуль орта $\mathbf{n}$. Но тогда давление можно рассматривать как скалярное произведение $d\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}$, деленное на величину dS

$$p=\frac{d\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}}{dS}=\frac{d\mathbf{F}\,\mathbf{dS}}{dS^2}.$$

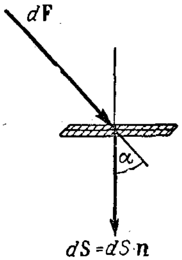

Рис. 40

Обычно орт $\mathbf{n}$ и вектор площадки $d\mathbf{S}\uparrow\uparrow\mathbf{n}$ выбирают направленными во внутрь рассматриваемой области; это означает для сжатой жидкости $\cos\alpha>0$ и $p>0$, а для растянутой $\cos\alpha<0$ и $p<0$. По определению идеальной жидкости на нее не могут действовать касательные силы, поэтому для нее угол α может быть или 0 или π, и, значит, сила, действующая на участок $\mathbf{dS}$ сжатой идеальной жидкости (или газа), определится через давление формулой

$$d\mathbf{F}=p\,\mathbf{dS},\text{ где } p>0.$$

Далее, оказалось удобным ввести понятие элементарного потока вектора скорости через площадку $\mathbf{dS}$ соотношением

$$d\Phi_v=\mathbf{v}\,\mathbf{dS}.$$

Нетрудно уяснить смысл введенной величины. Именно:

$$d\Phi_v=\mathbf{v}\,\mathbf{dS}=\frac{d\mathbf{r}}{dt}\mathbf{dS}=\frac{d\mathbf{r}\,\mathbf{dS}}{dt}=\frac{dV}{dt},$$

где dV — объем жидкости, прошедшей за время dt через сечение dS. Таким образом $d\Phi_v$ показывает, какой объем жидкости протечет через $\mathbf{dS}$ за малую единицу времени. Умножая равенство $d\Phi_v=\mathbf{v}\,\mathbf{dS}$ на плотность жидкости ρ, получим $\rho\, d\Phi_v=\rho\mathbf{v}\,\mathbf{dS}$. Величину $\rho\mathbf{v}=\frac{dm}{dV}\mathbf{v}=\frac{dm\cdot\mathbf{v}}{dV}=\frac{d\mathbf{p}}{dV}$ называют *плотностью импульса* (объемной плотностью импульса), а величину $d\Phi_{\rho v}=\rho\, d\Phi_v=\frac{d\mathbf{p}}{dV}\mathbf{dS}$ — *элементарным потоком вектора плотности импульса через площадку* $\mathbf{dS}$. Очевидно, он показывает, какая масса жидкости проходит через площадку dS за малую единицу времени. Дей-

...твительно,

$$d\Phi_{\rho v} = \rho\, d\Phi_v = \rho \frac{dV}{dt} = \frac{dm}{dt}.$$

Понятие потока вектора оказалось весьма удобным для описания ряда процессов, в чем мы еще будем иметь возможность убедиться. Заметим, что поток некоторого вектора **A** через поверхность S конечных размеров определится интегралом

$$\Phi_A = \iint_S d\Phi_A = \iint_S \mathbf{A}\, d\mathbf{S}.$$

Читатель сам может уяснить смысл этого интеграла для случаев $\mathbf{A} = \mathbf{v}$ и $\mathbf{A} = \rho\mathbf{v}$.

Далее, введем понятие *линии тока* как кривой, касательная к которой в каждой точке указывает направление скорости частиц жидкости в этой точке. (Ясно, что так определенная линия тока есть просто траектория частицы жидкости.) *Трубкой тока* называется область пространства, ограниченная линиями тока.

Установим теперь основные закономерности механики жидкостей (и газов), причем уже сейчас следует обратить внимание на то, что вся механика идеальных жидкостей и газов основана все на тех же законах Ньютона или на их следствиях. Поэтому целый ряд соотношений, когда-то ниоткуда, кроме как из опыта, не следовавших и бывших, стало быть, законами, теперь перейдут в разряд соотношений, являющихся следствиями истинных законов. За такими соотношениями термин «закон» сохранился лишь по традиции.

а) «Закон» Паскаля

«Закон» Паскаля гласит, что давление, оказываемое жидкостью на погруженную в нее малую площадку, не зависит от ориентации последней, или, как говорили когда-то, давление, производимое на жидкость (или газ), передается ею одинаково во все стороны. Для доказательства этого утверждения выделим мысленно в жидкости прямоугольную призмочку, изображенную на рис. 41. Передняя грань ее $d\mathbf{S}$ будет иметь на оси x, y, z отрицательные проекции dS'_x, dS'_y и dS'_z, а боковые грани $d\mathbf{S}_i$, $d\mathbf{S}_j$ и $d\mathbf{S}_k$ — положительные проекции dS_x, dS_y и dS_z.

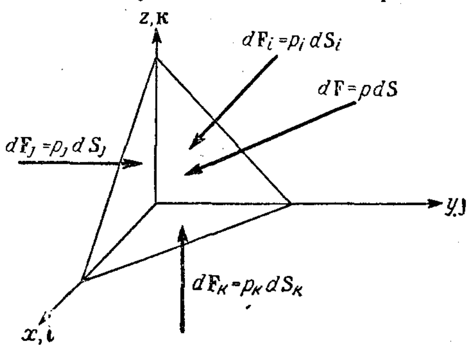

Рис. 41

Пусть на грани призмочки действуют силы давления

$$d\mathbf{F} = p\,d\mathbf{S},\quad d\mathbf{F}_i = p_i\,d\mathbf{S}_i,\quad d\mathbf{F}_j = p_j\,d\mathbf{S}_j \text{ и } d\mathbf{F}_k = p_k\,d\mathbf{S}_k.$$

Если масса призмочки равна dm и она имеет ускорение **a**, то по второму закону Ньютона:

$$d\mathbf{F} + d\mathbf{F}_i + d\mathbf{F}_j + d\mathbf{F}_k + dm \cdot \mathbf{g} = dm \cdot \mathbf{a},$$

или

$$d\mathbf{F} + d\mathbf{F}_i + d\mathbf{F}_j + d\mathbf{F}_k + dm\,(\mathbf{g} - \mathbf{a}) = 0,$$

или

$$p d\mathbf{S} + p_i d\mathbf{S}_i + p_j d\mathbf{S}_j + p_k d\mathbf{S}_k + \rho dV\,(\mathbf{g} - \mathbf{a}) = 0,$$

где ρdV — масса призмочки; dV — ее объем; p_i, p_j и p_k — давления на грани $d\mathbf{S}_i$, $d\mathbf{S}_j$ и $d\mathbf{S}_k$ соответственно.

Поскольку при малых размерах тела его объем уменьшается с уменьшением линейных размеров быстрее, чем поверхность, то членами, содержащими dV, можно пренебречь по сравнению с членами, содержащими dS. Но в таком случае наше равенство примет вид

$$p d\mathbf{S} + p_i d\mathbf{S}_i + p_j d\mathbf{S}_j + p_k d\mathbf{S}_k = 0.$$

В проекциях на оси координат получим с учетом $dS'_x = -dS_x$, $dS'_y = -dS_y$ и $dS'_z = -dS_z$:

$$p\,(-dS_x) + p_i dS_x = 0,$$

$$p\,(-dS_y) + p_j dS_y = 0,$$

$$p\,(-dS_z) + p_k dS_z = 0,$$

откуда $p_i = p_j = p_k$, что и требовалось показать.

б) Уравнение Бернулли

Уравнение Бернулли устанавливает связь между скоростью жидкости в каком-либо месте, давлением жидкости в этом месте и высотой этого места в случае *стационарного потока*, т. е. такого *потока, в котором за любые равные промежутки времени через любое сечение трубки тока протекает одинаковое количество жидкости*. По определению стационарного потока, имеем: в любых двух сечениях $d\mathbf{S}_i$ и $d\mathbf{S}_k$ трубки тока: $\frac{dm_i}{dt} = \frac{dm_k}{dt}$, или $\frac{\rho_i dV_i}{dt} = \frac{\rho_k dV_k}{dt}$, что с учетом $dV = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{S}$ приводит к

$$\frac{\rho_i d\mathbf{r}_i d\mathbf{S}_i}{dt} = \frac{\rho_k d\mathbf{r}_k d\mathbf{S}_k}{dt},$$

или

$$\rho_i d\mathbf{r}_i d\mathbf{S}_i = \rho_k d\mathbf{r}_k d\mathbf{S}_k.$$

Равенство $\rho_i d\mathbf{r}_i d\mathbf{S}_i = \rho_k d\mathbf{r}_k d\mathbf{S}_k$ или $\rho d\mathbf{r} d\mathbf{S} = \mathrm{const}$ называют *уравнением неразрывности потока* (струи).

Рассмотрим часть жидкости в трубке тока, ограниченную сечениями $d\mathbf{S}_i$ и $d\mathbf{S}_j$ (рис. 42). За время dt жидкость переместится из положения 1—1 в положение 2—2. Так как жидкость идеальная, то все силы со стороны «стенок» трубки тока действуют на нее нормально к поверхности трубки тока и, значит, они работы не совершают. И вся работа совершается силами, действующими в сечениях $\mathbf{dS}_i$ и $\mathbf{dS}_k$.

В соответствии с законом изменения энергии имеем

$$d\mathbf{F}_i d\mathbf{r}_i + d\mathbf{F}_j d\mathbf{r}_j = dE,$$

где $d\mathbf{F}_i$ и $d\mathbf{F}_j$ — силы, действующие на рассматриваемую часть жидкости в i-м и j-м сечениях; $d\mathbf{r}_i$ и $d\mathbf{r}_j$ — перемещения жидкости около сечений $\mathbf{dS}_i$ и $\mathbf{dS}_j$ за время dt. dE — изменение энергии этой части жидкости за время dt.

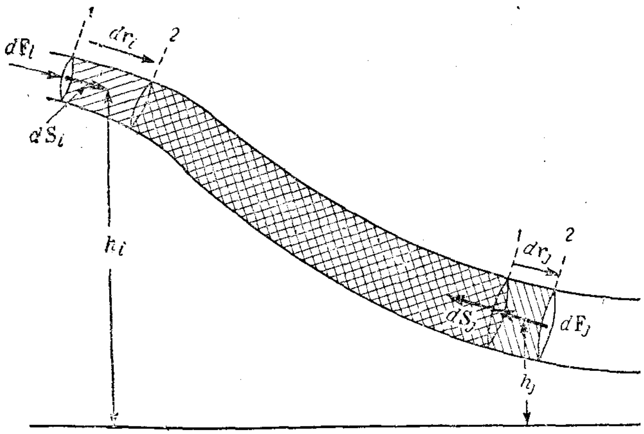

Рис. 42

Подсчитаем dE, для чего учтем, что $dE = E_2 - E_1$, где E_1 — энергия рассматриваемой части жидкости в положении 1—1 (горизонтальная штриховка), а E_2 — в положении 2—2 (вертикальная штриховка) через время dt. Поскольку течение стационарное, то в дважды заштрихованной области распределение скоростей частиц, распределение плотности, а значит, и энергия не изменились (просто вместо одних частиц жидкости пришли другие, совершенно идентичные ушедшим). Обозначим энергию этой части жидкости E_0. Тогда $E_2 = E_0 + dE_j$ и $E_1 = E_0 + dE_i$, где dE_i и dE_j — энергии однократно заштрихованных кусочков жидкости около сечений $\mathbf{dS}_i$ и $\mathbf{dS}_j$. Соответственно с этим

$$dE = E_2 - E_1 = (E_0 + dE_j) - (E_0 + dE_i) = dE_j - dE_i.$$

Закон изменения энергии примет теперь вид

$$d\mathbf{F}_i d\mathbf{r}_i + d\mathbf{F}_j d\mathbf{r}_j = dE_j - dE_i.$$

Поскольку жидкость течет от i-го сечения к k-му, то $\mathbf{dS}_i \uparrow\uparrow d\mathbf{r}_i$, а $\mathbf{dS}_j \uparrow\downarrow d\mathbf{r}_j$. С учетом этого и того, что $dm = \rho dV$ приходим к равенству:

$$p_i \frac{dm_i}{\rho_i} + dm_i\left(\frac{v_i^2}{2} + gh_i\right) = p_j \frac{dm_j}{\rho_j} + dm_j\left(\frac{v_j^2}{2} + gh_j\right).$$

В силу стационарности потока $dm_i = dm_j$, поэтому деля левую часть равенства на dm_i, а правую на dm_j, получим:

$$\frac{p_i}{\rho_i} + \frac{v_i^2}{2} + gh_i = \frac{p_j}{\rho_j} + \frac{v_j^2}{2} + gh_j.$$

Поскольку это равенство получено для двух произвольных сечений, то отсюда следует, что для выбранной трубки тока, в которой стационарно течет идеальная жидкость (или газ), имеет место равенство

$$\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gh = \text{const}.$$

Если при этом сжимаемостью жидкости можно пренебречь (для газа это исключительный случай), то $\rho = \text{const}$ и равенство может быть записано в виде

$$p + \frac{\rho v^2}{2} + \rho gh = B.$$

Величину B называют *константой Бернулли*. В левой части этого равенства фигурируют следующие физические величины: p — давление в выбранном сечении; $\frac{\rho v^2}{2}$ — кинетическая энергия единицы объема жидкости около этого сечения (а не динамическое, ударное и т. п. давление, как иногда считают); ρgh — потенциальная энергия единицы объема жидкости около сечения (а не гидростатическое давление, как иногда считают); v — скорость жидкости относительно стенок сосуда.

Заметим, что уравнение Бернулли справедливо и для жидкости, движущейся по трубе, которая сама движется ускоренно (в простейшем случае — без вращения); только в этом случае вместо g следует поставить в равенство величину $g' = |\mathbf{g} - \mathbf{a}|$, где $\mathbf{a}$ — ускорение сосуда, а вместо h — величину h', измеренную не по $\mathbf{g}$, а по $\mathbf{g}'$ (см. в разделе «Тяготение» о принципе эквивалентности сил инерции и тяготения).

В случае покоющейся относительно сосуда жидкости за часть трубки тока можно взять любую часть жидкости. Обычно берут за ограничивающие трубку сечения свободную поверхность жидкости и сечение на нужной глубине. Уравнение Бернулли при этом примет вид

$$p + \rho gh = p_0 + \rho gh_0.$$

Обычно высоту измеряют от поверхности жидкости. В этом случае $h_0 = 0$, а $h < 0$ (напоминаем, что $h > 0$, если точка лежит над уровнем отсчета, и $h < 0$ в противном случае) и мы получаем

$$p = p_0 - \rho gh = p_0 + \rho gH,$$

где обозначено $H = -h = |h| > 0$ — глубина.

Отметим еще раз, что уравнение Бернулли справедливо для идеального потока. Если в потоке трение существенно, то уравнение Бернулли дает тем большую погрешность, чем больше скорости в потоке (трение в потоке зависит от скорости частиц жидкости). Если же жидкость или газ покоятся относительно сосуда, то уравнение вéрно в случае любых жидкостей (ибо $\mathbf{F}_{\text{тр}}=0$ при $\mathbf{v}=0$. Сказанное следует из вывода уравнения Бернулли, которое просто есть следствие закона изменения энергии для случая отсутствия диссипативных сил. Поэтому в случае возникновения каких-либо недоразумений при разборе конкретных примеров надо писать сам закон изменения энергии. Особенно часто недоразумения и парадоксы возникают при попытках применять уравнение Бернулли для случая движущихся в потоке тел. Эти попытки почти всегда приводят к парадоксам, ибо в них, как правило, неверно выбирается трубка тока, и, кроме того, в этих случаях являются существенными перепады давления в тонком слое около тела из-за существенного трения в этом слое, а значит, уравнение Бернулли, вообще говоря, и применять-то нельзя, поскольку оно этого трения не учитывает. В случае неидеального потока максимум на что мы способны — это делать (в соответствии с опытом) заявления типа «в тех частях потока, где скорость меньше, давление больше, а в местах с большей скоростью давление меньше». Подобные утверждения можно делать и для случая движущихся в жидкости (газе) тел. При этом имеется в виду какая-то средняя скорость жидкости относительно тела в данном месте — средняя, потому что в пределах тонкого слоя около тела существует большой перепад (градиент) скоростей и давлений. Кроме того, в реальных потоках из-за наличия касательных к слоям потока сил могут возникать вращательные моменты, и жидкость в этих областях может закручиваться — возникают вихри.

Наконец отметим, что практически невозможно сделать точный расчет для случая движения реального потока или (тем более) для движения тел в потоках, особенно при больших скоростях движения; ошибки при расчетах столь велики, что предпочитают пользоваться эмпирическими формулами, получаемыми на моделях. Поэтому гидроаэродинамику реальных жидкостей и газов называют часто «наукой об опытно устанавливаемых коэффициентах».

в) «Закон» Архимеда

Известно, что на погруженное в жидкость или газ тело действует выталкивающая (архимедова) сила, равная весу жидкости или газа в объеме погруженной части тела. Не следует путать объем погруженной части тела с объемом «вытесененной» жидкости. Кстати совершенно неясно, что такое «вытесненная» жидкость, если она никуда из сосуда не вытекает. Поясним это на примере. Пусть в сосуде имеется небольшое количество жидкости. Если в такой сосуд погрузить тело, размеры которого мало отличаются от размеров сосуда, то при погружении тела уровень жидкости может весьма значительно подняться и погруженной окажется большая часть тела, в то время как жидкость вообще не вытесняется из сосуда (рис. 43). Если же под термином «вытесненная» жидкость понимать переместившуюся часть жидкости, то она по объему тоже отличается от объема погруженной части тела. Короче говоря, что такое объем погруженной в жидкость части тела, ясно, а понятие «объем вытесненной жидкости» — в данном случае просто неопределено.

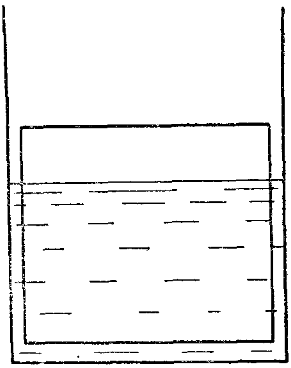

Рис. 43

Определим выталкивающую силу, как сумму всех сил давления, действующих на тело со стороны идеальной жидкости, т. е. как силу, определенную равенством:

$$\mathbf{F}_A = \oiint p d\mathbf{S}.$$

Рассмотрим для простоты случай тела, полностью погруженного в однородную жидкость. В этом случае получим

$$\mathbf{F}_A = \oiint p d\mathbf{S} = \oiint (p_0 + \rho g H)\, d\mathbf{S} = = p_0 \oiint d\mathbf{S} + \oiint \rho g H d\mathbf{S}.$$

Первый интеграл есть нуль, поскольку для замкнутой поверхности $\oiint d\mathbf{S} = 0$ (подобно тому, как для замкнутой линии $\oint d\mathbf{l} = 0$). Получившееся равенство

$$\mathbf{F}_A = \oiint \rho g H d\mathbf{S} = \rho g \oiint H d\mathbf{S}$$

распишем в проекции на горизонталь и вертикаль. При этом получим

$$F_{A\ \text{гориз}} = \rho g \oiint H dS_{\text{гориз}},$$

$$F_{A\ \text{верт}} = \rho g \oiint H dS_{\text{верт}}.$$

Для вычисления этих интегралов сделаем следующее: на произвольном элементе $d\mathbf{S}$ поверхности тела как на основании построим две цилиндрические поверхности, образующая одной из которых горизонтальна, а второй — вертикальна (рис. 44). Первая вырежет на поверхности элемент $d\mathbf{S}_1$, лежащий на одном уровне с $d\mathbf{S}$, а вторая — элемент $d\mathbf{S}_2$, лежащий на $H_2 \neq H$.

Как известно, результат интегрирования от выбора элемента интегрирования $d\mathbf{S}$ не зависит. Поэтому мы первый интеграл будем вычислять, взяв за подынтегральное выражение сумму $(H\mathbf{dS}+H_1\mathbf{dS}_1)_{\text{гориз}}$ вместо $HdS_{\text{гориз}}$ и $HdS_{1\,\text{гориз}}$ порознь (рано или поздно мы от площадки $\mathbf{dS}$ добрались бы до площадки $\mathbf{dS}_1$, поскольку интеграл надо брать по всей поверхности тела). Но поскольку, по построению $H_1=H$, то $(\mathbf{dS}+\mathbf{dS}_1)_{\text{гориз}}=0$ и, значит, $(H\mathbf{dS}+H_1\mathbf{dS}_1)_{\text{гориз}}=H(\mathbf{dS}+\mathbf{dS}_1)_{\text{гориз}}=0$, в силу чего первый интеграл равен нулю.

Для вычисления второго интеграла за элемент интегрирования возьмем сразу пару площадок $\mathbf{dS}$ и $\mathbf{dS}_2$. При этом получим подынтегральное выражение в виде $(H\mathbf{dS}+H_2\mathbf{dS}_2)_{\text{верт}}$. Из построения $\mathbf{dS}_2$ следует $(\mathbf{dS}+\mathbf{dS}_2)_{\text{верт}}=0$ или

$$dS_{\text{верт}}=-dS_{2\,\text{верт}},$$

поэтому

$$(H\mathbf{dS}+H_2\mathbf{dS}_2)_{\text{верт}}=HdS_{\text{верт}}+H_2dS_{2\,\text{верт}}=(H-H_2)\,dS_{\text{верт}}.$$

Но $|H-H_2|$ есть высота цилиндра, а $|dS_{\text{верт}}|$ — его поперечное сечение, и, значит, $|H-H_2|\,|dS_{\text{верт}}|=dV$, где dV — объем вертикального цилиндра. Но в таком случае

$$F_A=F_{\text{верт}}=\rho g\iint|(H\mathbf{dS}+H_2\mathbf{dS}_2)_{\text{верт}}|=\rho g\iint dV=\rho gV,$$

где V — объем погруженной части тела (в данном случае всего тела), а $\rho V=m$ — масса жидкости в объеме погруженной части тела. Окончательно, с учетом направлений $m\mathbf{g}$ и $\mathbf{F}_A$, получаем

$$\mathbf{F}_A=-m\mathbf{g}.$$

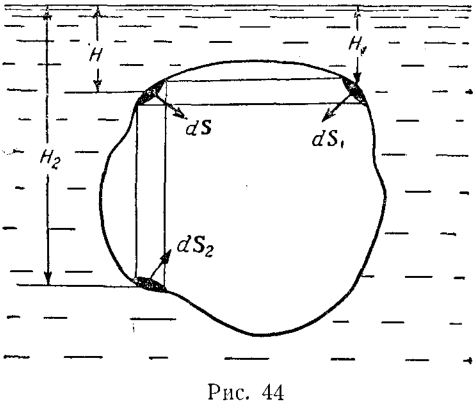

Рис. 44

К такому же выводу можно прийти и в более общем случае тела, погруженного в несколько несмешивающихся жидкостей (расположенных слоями). Этот же результат будет иметь место и для тела, *движущегося* в *идеальной* жидкости или *идеальном* газе.

Если тело покоится относительно жидкости или газа, то $\mathbf{F}_A=-m\mathbf{g}$ и в случае неидеальных жидкостей и газов; это следует из того, что вязкость жидкости проявляется лишь при ее движении; когда же она покоится относительно тела, то касательные силы между телом и жидкостью (газом) отсутствуют и наш вывод справедлив и для этого случая. В общем же случае для тела, движущегося в вязкой жидкости (или газе) однозначным образом определить выталкивающую силу нельзя, ибо величина

$\oiint pdS$ будет зависеть для данной жидкости от формы тела и скорости его движения относительно жидкости, т. е. в этом случае $\oiint pdS$ не есть то, что называют выталкивающей (архимедовой) силой.

Заметим, что в случае ускоренного (но без вращения) движения жидкости следует заменить $\mathbf{g}$ на $\mathbf{g}' = \mathbf{g} - \mathbf{a}$, а тогда

$$\mathbf{F}'_A = -m\mathbf{g}' = -m(\mathbf{g} - \mathbf{a}).$$

Как можно убедиться на примере разобранного материала, механика жидкости (идеальной во всяком случае) строится на законах Ньютона, о чем мы и говорили в начале изложения этого раздела.

Раздел II. КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

§ 1. Колебания

В природе и в технике часто приходится встречаться с повторяющимися процессами — колебаниями. Эти повторения могут быть регулярными (периодическими) и нерегулярными (апериодическими). При этом колебательные процессы могут быть описаны одинаковыми по форме уравнениями независимо от того, какова природа этих колебаний. Нечто подобное уже встречалось нам в механике; в пределах выбранной схемы, независимо от того, каково движущееся тело, его движение описывалось совершенно одинаковыми уравнениями — законами механики. Теперь перед нами несколько более сложная задача — описать (хотя бы в простейшем случае) одинаковыми уравнениями различные по природе колебания. Впрочем, задача не так уж и трудна по своей формально-математической идее — не все ли равно, что колеблется — шарик на нитке, или ток в цепи, или еще что-нибудь? Если посмотреть на графики рис. 45, то видно, что в обоих случаях что-то плавно колеблется, какая-то функция принимает повторяющиеся значения при возрастании своего аргумента. И только названия осей позволяют сказать, что в одном случае отображены колебания положения шарика в зависимости от времени, а в другом — изменение тока со временем.

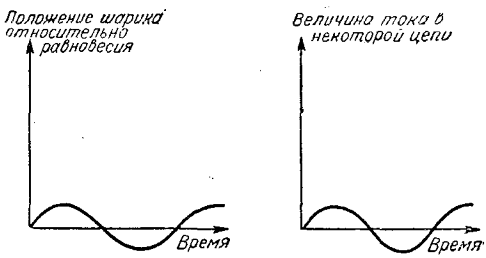

Рис. 45

Не вдаваясь в математические подробности, примем на веру, что самые простые колебательные процессы описываются с помощью функций «синус» и «косинус» какого-то аргумента (такие колебания называют гармоническими, или монохроматическими).

Поверим также в то, что любое сложное колебание может быть представлено как какая-то совокупность простых или гармонических колебаний. Отсюда следует, что если мы сможем хорошо изучить простые колебания, то в изучении сложных колебаний идейных трудностей практически не будет, все будет упираться в знание математики (кстати, соответствующий раздел ее называется гармоническим анализом).

Пусть какая-то величина, являющаяся функцией переменной φ, гармонически колеблется около некоторого значения $z_{\text{ср}}=0$, принимая наибольшее значение Z. Тогда ее мгновенное значение z, т. е. ее значение при каком-то произвольном значении аргумента, определится согласно сказанному выше равенствами

$$z=Z\sin\varphi \text{ или } z=Z\cos\varphi'. \tag{1}$$

В свою очередь, аргумент φ часто является линейной функцией времени, т. е.

$$\varphi=\omega t+\varphi_0 \text{ или } \varphi'=\omega t+\varphi_0'.$$

Тогда окончательно имеем:

$$z=Z\sin(\omega t+\varphi_0), \text{ или } z=Z\cos(\omega t+\varphi_0'), \tag{2}$$

где Z — амплитуда колебаний — максимальное значение колеблющейся величины z; z — ее мгновенное значение, т. е. значение в момент t; $\varphi=\omega t+\varphi_0$ или $\varphi'=\omega t+\varphi_0'$ — фаза колебания; φ_0 или φ_0' — начальная фаза колебания, т. е. ее значение в момент $t=0$; при этом, очевидно, $\varphi_0'=\varphi_0-\frac{\pi}{2}$ (ибо, чтобы z было одинаково в равенствах (1) и (2) в один и тот же момент времени, необходимо соблюдение равенства $\sin\varphi=\cos\varphi'$, что и приводит к $\varphi'=\varphi-\frac{\pi}{2}$ или $\varphi_0'=\varphi_0-\frac{\pi}{2}$). Если $\frac{\Delta N}{\Delta t}$ — число колебаний в единицу времени — обозначим f (частота колебаний), то выражение $2\pi f$, часто встречающееся в теории колебаний, краткости ради, обозначают буквой ω и называют угловой, круговой или циклической частотой колебаний. Очевидно, что период колебания $T=\frac{\Delta t}{\Delta N}$ есть величина обратная частоте колебаний, т. е. $T=\frac{1}{f}$. Учитывая сказанное, получим следующие выражения для фазы при использовании функции «синус»:

$$\varphi=\omega t+\varphi_0=2\pi ft+\varphi_0=\frac{2\pi t}{T}+\varphi_0.$$

Если описывать колебания с помощью функции «синус», то:

$$z=Z\sin(\omega t+\varphi_0)=Z\sin(2\pi ft+\varphi_0)=Z\sin\left(\frac{2\pi t}{T}+\varphi_0\right).$$

Слово «фаза» означает «состояние», «положение». Смысл фазы заключается, очевидно, в том, что знание ее (совместно с амплитудой) позволяет знать значение колеблющейся величины; мало того, знание фазы позволяет сказать, что происходит в данный момент с колеблющейся величиной, т. е. фаза определяет состояние колеблющейся системы в каждый момент времени. Действительно, если некоторое колебание описывается уравнением $z = Z \sin \varphi$ и если, например, в какой-то момент фаза колебания равна $\frac{\pi}{6}$, то очевидно, что $z = \frac{Z}{2}$, т. е. колеблющаяся величина имеет значение в половину амплитуды; мало того, в этот момент z возрастает. Это видно также из графика $z = z(\varphi)$ на рис. 46.

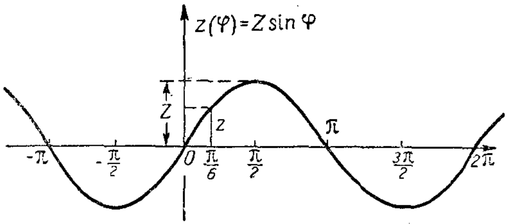

Рис. 46

Из сказанного о фазе ясно, что начальная фаза φ_0 показывает, каково состояние колебания при $t = 0$. Например, если $\varphi_0 = \frac{7}{6}\pi$, то это значит, что колебания начались из состояния, когда колеблющаяся величина имела значение $z_0 = -\frac{Z}{2}$ и в первые мгновения убывала.

Полезно помнить, что график колебаний z в координатах $z, \omega t$ не совпадает с графиком этих же колебаний в координатах $z, \omega t + \varphi_0$. Чтобы из первого получить второй, надо первый сдвинуть на φ_0. На рис. 47 это показано для случая, когда сдвиг на $\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}$ уже сделан. При таком сопоставлении графиков отчетливо видно, что $\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}$ и что́ это означает. (Несколько позже мы увидим, что фаза несет не только эту, но и другую информацию; оказывается, например, что сложение нескольких колебаний дает тот или иной результат в зависимости от того, каково соотношение фаз составляющих колебаний.)

Часто приходится рассматривать одновременно два гармонических колебания и вводить понятие сдвига по фазе этих колебаний (или, что все равно, разности фаз этих колебаний) $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$. Смысл сдвига по фазе особенно легко уяснить, когда начальные фазы рассматриваемых колебаний равны ($\varphi_{02} = \varphi_{01}$); в этом случае

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi f_2 t_2 - 2\pi f_1 t_1 = 2\pi (f_2 t_2 - f_1 t_1) = \\ = 2\pi (N_2 - N_1) = 2\pi \Delta N,$$

т. е. сдвиг по фазе, деленный на 2π, показывает просто-напросто на сколько колебаний вторая величина (z_2) совершила больше, чем первая (z_1).

Дальнейшее разъяснение смысла фазы и фазовых соотношений отложим до рассмотрения конкретных примеров.

Рассмотрим теперь один частный случай гармонических колебаний. Именно, пусть материальная точка движется с постоянной по модулю скоростью по окружности радиуса R. Тогда ее радиус-вектор **r** будет равномерно вращаться, а его проекции x и y будут гармонично колебаться. При этом

$$x = R\cos(\omega t + \varphi_0),$$
$$y = R\sin(\omega t + \varphi_0) = R\cos\left(\omega t + \varphi_0 - \frac{\pi}{2}\right).$$

Видно, что $\Delta\varphi_{x,\,y} = \varphi_x - \varphi_y = (\omega t + \varphi_0) - \left(\omega t + \varphi_0 - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$, т. е. x и y колеблются со сдвигом фаз $\Delta\varphi_{x,\,y} = \frac{\pi}{2} = -\Delta\varphi_{y,\,x}$.

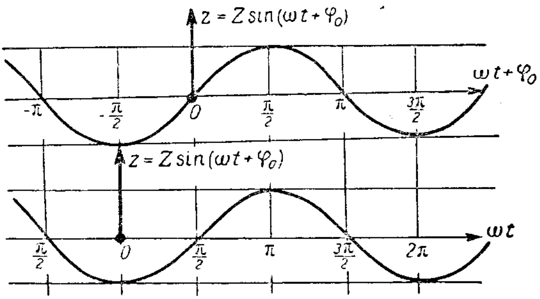

Рис. 47

Таким образом, движение материальной точки с $v = \text{const}$ по окружности эквивалентно тому, что эта материальная точка участвует в двух взаимно-перпендикулярных гармонических колебательных движениях с постоянным во времени сдвигом фаз этих колебаний на $\pm\frac{\pi}{2}$.

Очевидно и обратное: два взаимно-перпендикулярных гармонических колебания одинаковых амплитуд и с постоянным сдвигом по фазе в $\pm\frac{\pi}{2}$ дают в результате движение материальной точки по окружности с постоянной по модулю скоростью.

Вывод можно обобщить на колебания любой природы. Именно, если некоторый вектор **A** вращается с постоянной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ и не меняет своего модуля, то его проекции A_x и A_y на оси, нормальные $\boldsymbol{\omega}$, колеблются гармонично (рис. 48)

$$A_x = A\cos(\omega t + \varphi_0),$$
$$A_y = A\sin(\omega t + \varphi_0).$$

Обратно, если проекции некоторого вектора колеблются гармонично, со сдвигом по фазе в $\pm\frac{\pi}{2}$, то вектор будет вращаться, описывая своим концом окружность.

Можно показать, что движение материальной точки по любой замкнутой кривой может быть представлено как совокупность какого-то числа гармонических колебаний (уже не одинаковых частот). На рис. 49 представлены некоторые случаи подобных движений — фигуры Лиссажу.

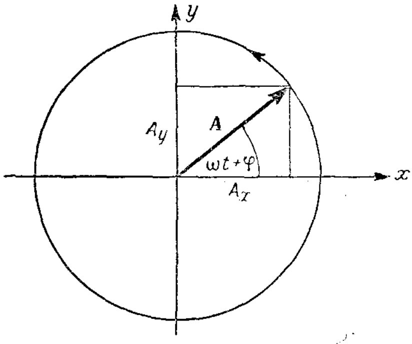

Рис. 48

Часто бывает необходимо складывать не взаимно-перпендикулярные колебания, а колебания одинаково направленные. Примером таких колебаний может быть гармоническое колебание гирьки относительно тележки, колеблющейся, в свою очередь, гармонично относительно земли. В этом случае имеем

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}_{п}+\mathbf{r}', \quad \text{или} \quad \mathbf{r}=\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2,$$

где $\mathbf{r}_п=\mathbf{r}_1$ — радиус-вектор переносного движения, т. е. радиус-вектор тележки относительно земли; $\mathbf{r}'=\mathbf{r}_2$ — радиус-вектор относительного движения, т. е. радиус-вектор гирьки относительно тележки; $\mathbf{r}$ — радиус-вектор «абсолютного» движения гирьки (относительно земли).

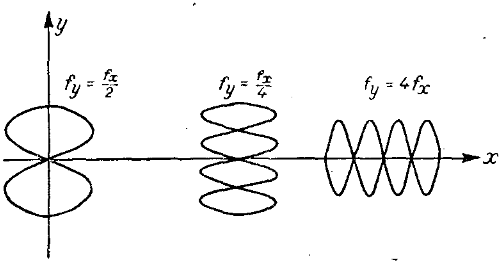

Рис. 49

Спроектировав все эти векторы, например, на ось Ox, получим

$$x=x_1+x_2.$$

И поскольку x_1 и x_2 колеблются гармонично, то

$$x=X_1\cos(\omega_1 t+\varphi_{01})+X_2\cos(\omega_2 t+\varphi_{02}).$$

Полагая для простоты $X_1=X_2=X$, получим

$$x=2X\cos\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t+\frac{\varphi_{02}-\varphi_{01}}{2}\right)\cos\left(\frac{\omega_2+\omega_1}{2}t+\frac{\varphi_{02}+\varphi_{01}}{2}\right).$$

Таким образом, результирующее колебание уже не будет гармоническим, а будет произведением двух гармонических колебаний с частотами $(\omega_2 - \omega_1)$ и $(\omega_2 + \omega_1)$. На рис. 50 представлен график таких колебаний. Их можно трактовать как колебания с частотой $\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}$ и амплитудой $2X\left|\cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t + \frac{\varphi_{02} - \varphi_{01}}{2}\right)\right|$, в свою очередь, колеблющейся с частотой $\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}$. Такие колебания большой частоты $\omega_1 + \omega_2$, амплитуда которых меняется с малой частотой $\omega_1 - \omega_2$, называют *модулированными по амплитуде колебаниями*. Если, однако, $\omega_2 = \omega_1 = \omega$, то результирующее колебание

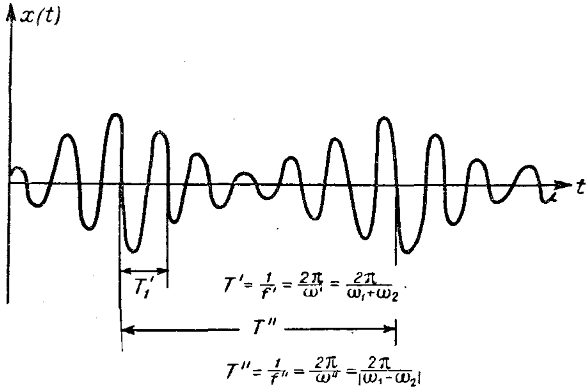

Рис. 50

будет гармоничным с той же частотой ω. Действительно, в этом случае

$$x = 2X \cos\left(\frac{\varphi_{02} - \varphi_{01}}{2}\right) \cos\left(\omega t + \frac{\varphi_{02} + \varphi_{01}}{2}\right).$$

Очевидно, постоянная величина $2X\left|\cos\left(\frac{\varphi_{02} - \varphi_{01}}{2}\right)\right|$ играет роль амплитуды результирующего колебания, а $\frac{\varphi_{02} + \varphi_{01}}{2}$ — начальной фазы этого колебания. (Амплитуда всегда величина существенно положительная.)

В более общем случае неравных амплитуд и частот получим

$$x = x_1 + x_2 = X \cos\alpha,$$

где

$$X = \sqrt{X_1^2 + X_2^2 + 2X_1X_2 \cos\left[\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}\right)t + \frac{\varphi_{02} - \varphi_{01}}{2}\right]},$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{X_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_{01}) + X_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_{02})}{X_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_{01}) + X_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_{02})}.$$

Этот результат следует из правила сложения косинусов с неравными амплитудами. Графический способ такого сложения изображен на рис. 51. При вращении векторов $\mathbf{R}_1$ и $\mathbf{R}_2$ с угловыми частотами ω_1 и ω_2 их проекции колеблются, отображая колебания складываемых величин x_1 и x_2 (или y_1 и y_2).

Из сказанного ясно, что результат сложения двух одинаково направленных гармонических колебаний зависит и от амплитуд и от фаз составляющих колебаний. При этом в случае $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ получается гармоническое колебание той же частоты, что и составляющие, но его амплитуда X при зафиксированных X_1 и X_2 определяется сдвигом фаз составляющих колебаний и имеет место соотношение

$$|X_1 - X_2| \leqslant X \leqslant |X_1 + X_2|$$
при $\pi \geqslant |\varphi_{02} - \varphi_{01}| \geqslant 0$.

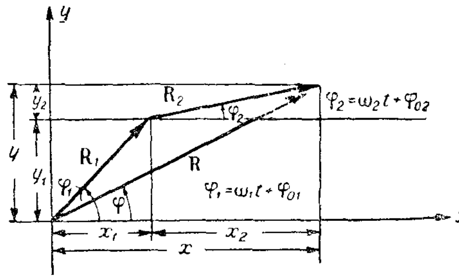

Рис. 51

В случае же неодинаковых частот ω_1 и ω_2 результирующее колебание получается негармоничным с меняющейся во времени амплитудой. При этом и амплитуда и фаза результирующего колебания зависят от всех характеристик составляющих колебаний.

Если складываются колебания $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ неодинаковых направлений, то, проектируя все слагаемые колебания на оси x и y, получим для проекций этих колебаний

$$x = x_1 + x_2 \quad \text{и} \quad y = y_1 + y_2,$$

что эквивалентно

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2.$$

Сказанное можно обобщить на случай сложения любого числа любых колебаний.

Обратим внимание читателя на то, что во всех случаях результат сложения колебаний зависит от фазовых соотношений составляющих колебаний. Фаза колебания — важнейшая его характеристика!

§ 2. Механические колебания

а) Собственные колебания

Уравнение $z = Z\cos(\omega t + \varphi_0)$ описывает колебание в простейшем случае и лишь формально, не вдаваясь в причины, приведшие к такому изменению $z(t)$. Это уравнение является, в свою очередь, решением некоторого причинного уравнения движения, которое в случае механических колебаний есть второй закон Ньютона.

Действительно, пусть маленькая гирька массой m движется без трения по горизонтальному стержню под действием пружины с коэффициентом жесткости k вдоль оси Oz. Тогда, по второму закону Ньютона, $m\mathbf{a}=\mathbf{F}$. Выбирая начало отсчета в положении равновесия, т. е. там, где $\mathbf{F}=0$, получим с учетом того, что $\mathbf{F}=-k\mathbf{r}$,

$$m\mathbf{a}=-k\mathbf{r}, \quad \text{или} \quad m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}=-k\mathbf{r}.$$

В проекции на ось Oz (рис. 52)

$$ma_z=-kz, \quad \text{или} \quad m\frac{d^2z}{dt^2}=-kz. \qquad (1)$$

Если бы могли решить это уравнение, то получили бы, что

$$z=Z\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t+\varphi_0'\right), \quad \text{или} \quad z=Z\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t+\varphi_0\right).$$

В этом легко убедиться прямой подстановкой этого решения в уравнение (1).

Это решение совпадает с $z=Z\cos(\omega t+\varphi_0)$, если положить

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Таким образом, частота собственных колебаний гирьки оказалась зависящей от массы гирьки и жесткости пружины, т. е. целиком определяется собственно свойствами системы, в которой происходят колебания.

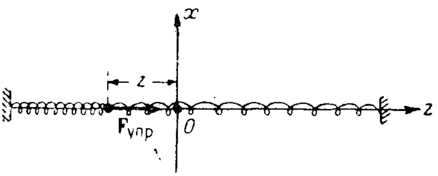

Рис. 52

Видно, что $z=Z\cos(\omega t+\varphi_0)$ удовлетворяет уравнению (1), т. е. является его решением при любых Z и φ_0. Это означает, что амплитуда собственных колебаний и начальная фаза колебаний определяются не свойствами системы (которые только и фигурируют в причинном уравнении (1)), а чем-то другим, внешним. Но чем именно? Ответ следует из рассмотрения энергии системы. Поскольку в ней действуют только потенциальные силы, то энергия системы постоянна, причем $E=W+U=\frac{mv_z^2}{2}+\frac{kz^2}{2}$; но $v_z=-\omega Z\sin(\omega t+\varphi_0)$, поэтому

$$E=\frac{m\omega^2Z^2\sin^2(\omega t+\varphi_0)}{2}+\frac{kZ^2\cos^2(\omega t+\varphi_0)}{2}$$

и с учетом $m\omega^2=k$ получим

$$E=\frac{1}{2}kZ^2\sin^2(\omega t+\varphi_0)+\frac{1}{2}kZ^2\cos^2(\omega t+\varphi_0)=\frac{1}{2}kZ^2.$$

Откуда $Z=\sqrt{\frac{2E}{k}}$, т. е. для данной системы Z определяется ее энергией, которую ей сообщили когда-то, приводя в состояние движения.

Что касается начальной фазы φ_0, то она, очевидно, определяется состоянием колебания к моменту включения часов, т. е. к моменту $t=0$. Например, если часы включены одновременно с выводом системы из равновесия в положительную сторону, то, очевидно, $\varphi_0=-\frac{\pi}{2}$.

В разделе «Динамика» уже говорилось, что состояние движения материальной точки определяется не только причинным уравнением, но и начальными условиями $\mathbf{v}_0$ и $\mathbf{r}_0$. Это относится к колебаниям гирьки — для описания ее движения надо знать не только явный вид второго закона для этого случая, но и начальные условия v_{0z} и z_0. Но $z_0=Z\cos\varphi_0$, а $v_{0z}=-\omega Z\sin\varphi_0$, т. е. v_{0z} и z_0 можно найти, зная φ_0 и Z. Принято называть φ_0, z_0 и v_{0z} — начальными условиями, а Z — граничным. В данном случае начальные и граничные условия выражаются друг через друга, но так бывает далеко не всегда.

Заметим заодно теперь, что поведение любой физической величины, характеризующей некоторую систему, определяется уравнениями движения, а также начальными и граничными условиями (состоянием системы в некоторый момент t_0 и какими-то ограничениями, накладываемыми на нее чем-то).

Поскольку z и v_z $\left(\text{или, что все равно, } z \text{ и } \frac{dz}{dt}\right)$ колеблются, то колеблются и все величины, которые выражаются через них. В рассмотренном случае колебаний гирьки колеблются сила, действующая на гирьку, ее ускорение, кинетическая энергия гирьки, потенциальная энергия пружинки и т. д. При этом не все величины колеблются так же, как z и v_z. Например, кинетическая энергия гири и потенциальная энергия пружины колеблются в соответствии с равенствами

$$W=\frac{mv_z^2}{2}=\frac{m\omega^2Z^2}{2}\sin^2(\omega t+\varphi_0),$$

$$U=\frac{kz^2}{2}=\frac{kZ^2}{2}\cos^2(\omega t+\varphi_0).$$

Поскольку $\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}$ и $\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$, то колебания W и U можно рассматривать как колебания с частотой 2ω около положения $\frac{W_{\max}}{2}$ и $\frac{U_{\max}}{2}$ соответственно.

В любой системе, в которой происходят колебания, часть характеристик может колебаться синусоидально с частотой ω, а часть иначе, более сложно, или с другими частотами.

Важным примером колебаний является колебание гирьки, подвешенной на нити невесомой ($m_{\text{гири}} \gg m_{\text{нити}}$), длинной ($l_{\text{нити}} \gg l_{\text{гири}}$) и нерастяжимой (растяжение $\Delta l_{\text{нити}}$ пренебрежимо мало по сравнению с амплитудой колебаний); при этом колебания в простейшем случае считаются малыми ($Z \ll l_{\text{нити}}$).

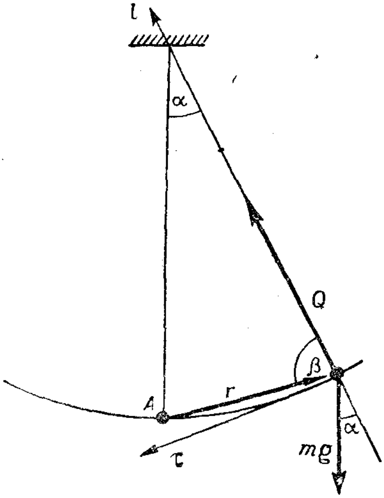

Рис. 53

В этом случае имеем (рис. 53)

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + \mathbf{Q}. \qquad (2)$$

Поскольку $m\mathbf{g} + \mathbf{Q}$ направлено куда-то во внутрь кривой, по которой движется гирька, то уравнение (2) не имеет вида

$$m\mathbf{a} = -k\mathbf{r}, \quad \text{или} \quad m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -k\mathbf{r}$$

(за начало отсчета принято положение равновесия A) и, значит, решением уравнения (2) не будет зависимость $\mathbf{r} = \mathbf{R}\cos(\omega t + \varphi_0)$, т. е. колебания $\mathbf{r}$ не будут, вообще говоря, гармоническими. Но если не интересоваться поворотами $\mathbf{r}$, которые вызываются силами перпендикулярными $\mathbf{v}$, и спроектировать уравнение (2) на направление касательной $\boldsymbol{\tau}$, то получим уравнение

$$ma_\tau = mg_\tau + Q_\tau. \qquad (3)$$

Если амплитуда колебаний мала ($R \ll l$), то $\alpha \approx 0$ и $\beta \approx \frac{\pi}{2}$. В этом случае уравнение (3) примет вид

$$ma_\tau = -mg\sin\alpha, \quad \text{или} \quad m\frac{d^2 r_\tau}{dt^2} = -mg\sin\alpha. \qquad (4)$$

Поскольку $\sin\alpha \approx \frac{r}{l}$ из-за $\alpha \approx 0$ (это видно из рис. 53), то (4) запишется в виде

$$m\frac{d^2 r_\tau}{dt^2} = -\frac{mg}{l} r_\tau.$$

Полагая $\frac{mg}{l} = k$, получим уравнение

$$m\frac{d^2 r_\tau}{dt^2} = -kr_\tau,$$

решением которого является уравнение

$$r_\tau = R\cos(\omega t + \varphi_0),$$

где $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{g}{l}}$.

Таким образом, величина смещения гирьки от положения равновесия колеблется гармонично с угловой частотой ω. Ясно, что если не интересоваться изменением направления скорости, то

$$v_\tau = \frac{dr_\tau}{dt} = -\omega R \sin(\omega t + \varphi_0).$$

Аналогично обстоит дело и с касательным ускорением

$$a_\tau = \frac{dv_\tau}{dt} = -\omega^2 R \cos(\omega t + \varphi_0).$$

Составляющая же ускорения нормальная скорости (a_l) колеблется иначе:

$$a_l = \frac{v^2}{l} = \frac{\omega^2 R^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0)}{l} = \frac{\omega^2 R^2}{l} \cdot \frac{1 - \cos(2\omega t + 2\varphi_0)}{2} =$$
$$= \frac{\omega^2 R^2}{2l} - \frac{\omega^2 R^2}{2l} \cos(2\omega t + 2\varphi_0).$$

Итак, частота колебаний a_l вдвое превышает частоту колебаний r, v_τ и a_τ.

В силу всего сказанного выше колебания нитяного маятника в рассмотренном случае в целом не гармоничны, ибо составляющие его колебания происходят с различными частотами. Обычно интересуются колебаниями r_τ, v_τ и a_τ, а все эти величины колеблются по одинаковому закону с одинаковыми частотами, поэтому колебания нитяного маятника считают гармоническими (при малых, разумеется, амплитудах).

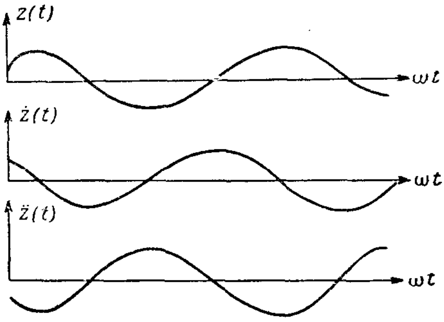

Рис. 54

Для совместного рассмотрения колебания величин z, $\frac{dz}{dt}$ и $\frac{d^2z}{dt^2}$ их удобно изображать графически. На рис. 54 изображены гармонические колебания этих величин (например, смещения, скорости и касательного ускорения гирьки на пружине) как функции времени при $\varphi_0 \approx \frac{\pi}{4}$. Видно, что графики этих величин сдвинуты во времени (а значит, и по фазе).

Сдвиг по фазе у колеблющихся величин удобно вычислять, сведя их все к одной тригонометрической функции. Например,

$$z = z \sin(\omega t + \varphi),$$

$$\dot{z} = \frac{dz}{dt} = \omega Z \cos(\omega t + \varphi_0) = \omega z \sin\left(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right), \qquad (5)$$

$$\ddot{z} = \frac{d^2z}{dt^2} = -\omega^2 Z \sin(\omega t + \varphi_0) = \omega^2 Z \sin(\omega t + \varphi_0 + \pi). \qquad (6)$$

Отсюда отчетливо видно, что фаза $\dot{z}$ больше фазы z на $\frac{\pi}{2}$, фаза $\ddot{z}$ больше фазы $\dot{z}$ тоже на $\frac{\pi}{2}$ и больше фазы z на π. Говорят, что $\dot{z}$ опережает z по фазе на $\frac{\pi}{2}$, и отстает от $\ddot{z}$ по фазе на $\frac{\pi}{2}$ и т. д.

Ясно, что сдвиги по фазе между различными колебаниями могут быть самыми различными.

На рис. 55 отрезок ординаты при $t=0$ соответствует начальному значению колеблющейся величины; для случая колебаний z это будет z_0. Из $z_0 = Z\sin\varphi_0$ легко находим $\sin\varphi_0 = \frac{z_0}{Z} = \frac{1}{2}$, а тогда и $\varphi_0 = \arcsin\frac{z_0}{Z} = \frac{\pi}{6}$.

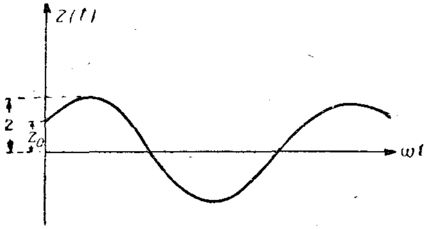

Рис. 55

Очевидно, что в уравнениях (5) и (6) величины ωZ и $\omega^2 Z$ являются амплитудными значениями $\frac{dz}{dt}$ и $\frac{d^2z}{dt^2}$ соответственно, а $\left(\varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right)$ и $(\varphi_0 + \pi)$ — начальными фазами для $\frac{dz}{dt}$ и $\frac{d^2z}{dt^2}$.

в) Затухающие колебания

Рассмотрим теперь случай колебаний гирьки на горизонтальном стержне с учетом силы сопротивления, которую мы будем считать пропорциональной скорости (и обратно, разумеется, ей направленной), т. е. $\mathbf{F}_{\text{сопр}} = -b\mathbf{v}$.

Совершенно ясно, что теперь сила сопротивления будет уменьшать энергию гири и амплитуда колебаний будет поэтому уменьшаться; колебания будут затухающими. Но как именно в этом случае будет выглядеть зависимость $\mathbf{r}(t)$? Очевидно, ответ даст решение уравнения второго закона Ньютона, написанного для этого случая. Имеем (рис. 56)

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -k\mathbf{r} - b\frac{d\mathbf{r}}{dt} + \mathbf{Q} + m\mathbf{g}$$

или в проекции на ось z

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = -kz - b\frac{dz}{dt}. \qquad (7)$$

Деля это равенство на m, получим, обозначая $\frac{k}{m} = \omega^2$ (это квадрат уже встречавшейся нам круговой частоты собственных колебаний) и $\frac{b}{m} = 2\beta$:

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -\omega^2 z - 2\beta\frac{dz}{dt}, \qquad (8)$$

или

$$\ddot{z} = -\omega^2 z - 2\beta\dot{z}.$$

Это уравнение удовлетворяется функцией

$$z = Ze^{-\beta t}\cos\left(\sqrt{\omega^2 - \beta^2}\,t + \varphi_0\right). \tag{9}$$

Величину $Ze^{-\beta t}$ называют «амплитудой» затухающих колебаний; видно, что она очень быстро уменьшается с течением времени

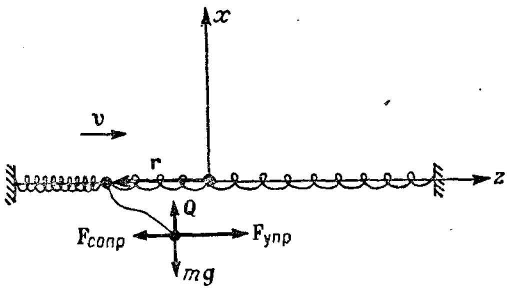

Рис. 56

и, значит, колебания в этом случае уже не гармоничны. (По определению у гармонических колебаний амплитуда постоянна).

Величина $\omega' = \sqrt{\omega^2 - \beta^2}$, очевидно, есть круговая частота этих колебаний, а величина $T' = \frac{2\pi}{\omega'}$ — их период. График на рис. 57 отображает наглядно зависимость $z = z(t)$ в этом случае.

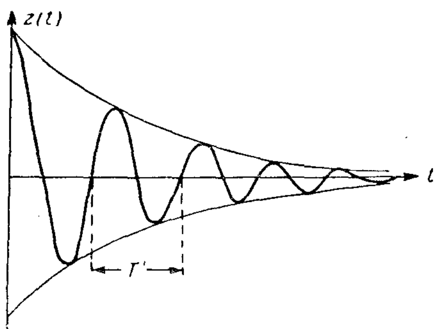

Рис. 57

Видно, что в отсутствие сопротивления ($b = 0$) уравнение (7) переходит в уравнение (1), а его решение $z = Ze^{-\beta t}\cos\left(\sqrt{\omega^2 - \beta^2}\,t + \varphi_0\right)$ — в решение $z = Z\cos(\omega t + \varphi_0)$. Таким образом, этот случай включает в себя собственные колебания как один из предельных случаев. Другой предельный случай — это случай большого сопротивления $\beta > 0$; при этом $\omega' = \sqrt{\omega^2 - \beta^2}$ будет мнимой величиной, что физически означает отсутствие колебаний. В этом случае выведенная из равновесия гирька просто вернется в положение равновесия.

Заметим, что в случае затухающих колебаний скорость выражается уже не так просто, как в случае собственных колебаний, именно:

$$v_z = \dot{z} = -\beta Z e^{-\beta t} \cos\left(\sqrt{\omega^2 - \beta^2}\, t + \varphi_0\right) -$$
$$- \sqrt{\omega^2 - \beta^2}\, Z e^{-\beta t} \sin\left(\sqrt{\omega^2 - \beta^2}\, t + \varphi_0\right).$$

При $\beta = 0$ это выражение, конечно, даст $v_z = -\omega Z \sin(\omega t + \varphi_0)$.

b) Вынужденные колебания

Наконец, рассмотрим еще более общий случай, когда, кроме указанных сил, на гирьку действует еще некая раскачивающая (ее называют вынуждающей) сила, колеблющаяся гармонично, т. е. $\mathbf{f} = \mathbf{F} \cos(\omega_в t - \Delta\varphi)$. В этом случае имеем в проекции на ось z

$$m\ddot{z} = -kz - b\dot{z} + F_z \cos(\omega_в t - \Delta\varphi) \qquad (10)$$

или, после деления равенства на m

$$\ddot{z} = -\omega^2 z - 2\beta\dot{z} + \frac{F_z}{m} \cos(\omega_в t - \Delta\varphi).$$

Отметим сразу вклад каждой из сил в энергию системы.

Возвращающая сила $-k\mathbf{r}$ потенциальна и потому энергии системы не меняет, а лишь превращает ее из потенциальной в кинетическую (при движении системы к равновесию) и наоборот (при движении системы от равновесия).

Диссипативная сила $-b\mathbf{v}$ все время направлена против скорости колеблющегося тела и непрерывно уменьшает механическую энергию системы.

Вынуждающая сила призвана пополнять энергию системы, для чего должна быть хоть иногда направлена по скорости $\mathbf{v}$ («подталкивая» тело), а в лучшем случае — все время по скорости.

Из энергетических соображений ясно, что если за период работа диссипативной силы будет больше работы вынуждающей силы, т. е. при $\int\limits_t^{t+T} \mathbf{F}_{сопр}\, d\mathbf{r} > \int\limits_t^{t+T} \mathbf{f}\, d\mathbf{r}$, то амплитуда колебаний будет убывать, и наоборот.

Ясно, что по истечении достаточного времени колебания установятся, амплитуда их будет постоянной и при этом, очевидно,

$$\int\limits_t^{t+T} \mathbf{F}_{сопр}\, d\mathbf{r} = \int\limits_t^{t+T} \mathbf{f}\, d\mathbf{r}.$$

Решением уравнения (10) может быть функция $z = Z_в \cos \omega_в t$. Убедимся в этом подстановкой этой функции в уравнение (10), учтя, что $\dot{z} = -\omega_в Z_в \sin \omega_в t$ и $\ddot{z} = -\omega_в^2 Z_в \cos \omega_в t$. Тогда получим

$$-\omega_в^2 Z_в \cos \omega_в t = -\omega^2 Z_в \cos \omega_в t + 2\beta\omega_в Z_в \sin \omega_в t +$$
$$+ \frac{F_z}{m} [\cos \omega_в t \cdot \cos \Delta\varphi + \sin \omega_в t \cdot \sin \Delta\varphi].$$

Это равенство должно выполняться в любой момент времени; полагая в нем один раз $t=0$, а другой — $t=\frac{\pi}{2\omega_в}$, получим после очевидных преобразований два равенства:

$$Z_в(\omega^2-\omega_в^2)=\frac{F_z}{m}\cos\Delta\varphi\,, \tag{11}$$

$$2\beta\omega_в Z_в=-\frac{F_z}{m}\sin\Delta\varphi. \tag{12}$$

Деля второе равенство на первое, получим

$$\operatorname{tg}\Delta\varphi=-\frac{2\beta\omega_в}{\omega^2-\omega_в^2}=\frac{2\beta\omega_в}{\omega_в^2-\omega^2}. \tag{13}$$

Возводя оба равенства (11) и (12) в квадрат, складывая и извлекая корень квадратный из суммы, получим

$$Z_в=\frac{F_z}{m\sqrt{(\omega^2-\omega_в^2)^2+4\beta^2\omega_в^2}}. \tag{14}$$

Таким образом, функция $z=Z_в\cos\omega_в t$ является действительно решением уравнения (10) при условии, что $\Delta\varphi=\varphi_z-\varphi_f$ определяется равенством (13), а $Z_в$ — равенством (14) соответственно.

Обычно вынуждающую силу задают не в виде $\mathbf{f}=\mathbf{F}\cos(\omega_в t-\Delta\varphi)$, а в виде $\mathbf{f}=\mathbf{F}\cos\omega_в t$, решение же ищут не в виде $\mathbf{r}=\mathbf{R}\cos\omega_в t$, а в виде $\mathbf{r}=\mathbf{R}\cos(\omega_в t+\Delta\varphi)$. Соответственно поступают и с проекциями этих векторов на ось z. Смысл $\Delta\varphi=\varphi_z-\varphi_f$ остается все тем же — это сдвиг по фазе между колебаниями смещения $\mathbf{r}$ и вынуждающей силы $\mathbf{f}$ (или между колебаниями z и f_z).

Вообще говоря, решением уравнения (10) является функция

$$z=Z_в\cos\omega_в t+Ze^{-\beta t}\cos\left(\sqrt{\omega^2-\beta^2}\,t+\varphi_0\right). \tag{15}$$

Видно, что z представляет собой сумму двух колебаний разных частот. При $F=0$ уравнение (10) переходит в уравнение (7), а его решение — уравнение (15) — в решение уравнения (7). В еще более частном случае $\beta=0$ (сопротивления нет), уравнение (10) переходит в уравнение (1), а его решение — в решение (1).

С другой стороны, если $F\neq 0$, то по прошествии достаточно большого времени второе слагаемое (15) обратится из-за множителя $e^{-\beta t}$ в нуль и тогда $z(t)$ примет вид

$$z=Z_в\cos\omega_в t=\frac{F}{m\sqrt{(\omega^2-\omega_в^2)^2+4\beta^2\omega_в^2}}\cos\omega_в t.$$

Значит, функция $z=Z_в\cos\omega_в t$ описывает *установившиеся* колебания.

Из (14) видно, как $Z_в$ зависит от F_z, m, ω, $\omega_в$ и β. Обычно рассматривают $Z_в=Z_в(\omega_в)$ при зафиксированных F_z, m, ω и β. На рис. 58 изображена графически такая зависимость при различных β. Видно, что $Z_в(\omega)$ при некотором значении $\omega_в$ имеет максимум. Явление максимального роста $Z_в(\omega)$ при приближении $\omega_в$ к такому значению называется *резонансом*, а значение частоты, при которой $Z_в = Z_{вmax}$, называется *резонансным* — $\omega_{рез}$. Значение $\omega_{рез}$ определяется из условия минимума подкоренного выражения для $Z_в(\omega)$. Это условие приводит к

$$\omega_в = \omega_{рез} = \sqrt{\omega^2 - 2\beta^2}.$$

Отсюда видно, что значение $\omega_{рез}$ зависит от свойств системы (от ω) и от среды, в которой происходят колебания (от β). При $\omega^2 < 2\beta^2$ $\omega_в$ становится мнимой величиной; это означает, что резонанса не будет. Из (14) видно, однако, что при любом β колебания все же будут; при очень большом сопротивлении $\left(\beta^2 \gg \frac{(\omega^2 - \omega_в^2)^2}{4\omega_в^2}\right)$ имеем $Z_в = \frac{F_z}{2m\beta\omega_в}$.

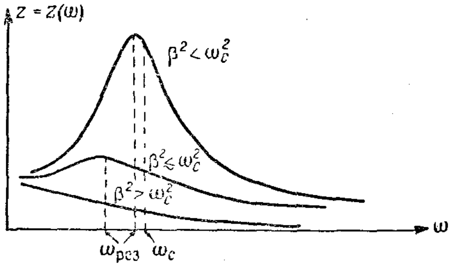

Рис. 58

Из (13) видно, что $\Delta\varphi$ $(\Delta\varphi = \varphi_z - \varphi_F)$ зависит от β, ω и $\omega_в$. В частности, при резонансе имеем в силу $\omega_в^2 = \omega_{рез}^2 = \omega^2 - 2\beta^2$

$$\operatorname{tg}\Delta\varphi = -\frac{\omega_в}{\beta}.$$

Если сопротивление мало, то $\Delta\varphi_{рез} \approx -\frac{\pi}{2}$. Это означает, что колебания z отстают по фазе на $\frac{\pi}{2}$ от колебаний F_z, или, что все равно, F_z опережает по фазе z на $\frac{\pi}{2}$. Но v_z тоже опережает z на $\frac{\pi}{2}$. Значит, при резонансе вынуждающая сила **f** колеблется так же, как **v**, или, что все равно, **f** $\uparrow\uparrow$ **v** во все время колебаний, а значит, все время совершает положительную работу над колеблющимся телом, увеличивая его энергию. (Но при этом сила сопротивления совершает отрицательную работу и энергия тела, как уже говорилось выше, может и не возрастать.) При большом значении β $\Delta\varphi \neq -\frac{\pi}{2}$ и **f** уже не все время совершает положительную работу. Из сказанного ясно, почему при $\omega_в = \omega_{рез}$ амплитуда $Z_в$ максимальна: при этой частоте вынуждающая сила **f** совершает максимальную положительную работу, поскольку **f** $\uparrow\uparrow$ **v** почти все время.

Заметим, что скорость тела $v_z = \dot{z}$ резонирует на частоте не равной $\sqrt{\omega_в^2 - 2\beta^2}$. Именно, из $V_z = \omega_в Z_в$ следует с учетом (14)

$$V_z = \frac{F_z}{m\sqrt{\left(\frac{\omega^2}{\omega_в} - 1\right)^2 + 4\beta^2}}.$$

Отсюда сразу видно, что $V_z = V_{z\max}$ при $\omega_в = \omega$, т. е. колебания скорости резонируют на частоте, равной собственной частоте колебаний системы ω.

Заканчивая этим рассмотрение вынужденных механических колебаний, заметим, что и в некоторых других случаях, о которых будет идти речь в дальнейшем, вынужденные колебания описываются уравнением движения той же формы, что и вынужденные механические колебания, т. е. уравнением

$$\ddot{z} = -\omega^2 z - 2\beta\dot{z} + \mathrm{const}\cdot\cos(\omega_в t - \Delta\varphi).$$

Но параметры ω, β и const будут, конечно, уже определяться не механическими, а какими-то другими свойствами колеблющейся системы. В дальнейшем нам придется встретиться, например, с электрическими колебаниями в контуре, где параметрами будут электрические характеристики контура.

§ 3. Распространение колебаний — волны

Если какую-либо часть веревки, пружинки, жидкости или газа, или твердого тела, одним словом, часть какой-либо среды привести в колебательное движение, то из-за наличия сил связи между частицами среды возбужденная часть среды будет передавать импульс и энергию соседям, соседи своим соседям и т. д.; колебания, возбужденные в некоторой части среды, будут передаваться другим частям, будут распространяться — побегут волны.

Механизм этой передачи сложен, поэтому мы его описывать не будем, тем более, что интуитивно ясно, что эта передача быть должна, а простое наблюдение за волнами, например, на воде, это подтверждает. Ограничимся только описанием волн, оставляя без рассмотрения механизм их образования.

Введем некоторые определения и понятия.

1. Волны, распространяясь от источника, к некоторому моменту времени достигают поверхности, отделяющей область, в которой волны уже есть или были, от области, где волн еще не было; эта поверхность называется *фронтом волны*. Форма этой поверхности может быть самой различной в зависимости от формы и размеров источника колебаний и свойств среды. В случае однородной и изотропной среды от точечного источника распространяются сферические волны, т. е. фронт волны есть сфера. Если источник колебаний — плоскость, то вблизи нее любой участок фронта волны мало отличается от части плоскости, поэтому волны с таким фронтом называют *плоскими*.

С течением времени фронт волны перемещается. Если за время dt некоторый участок фронта волны переместится на $d\mathbf{r}$, то величина $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ называется скоростью распространения фронта волны в данном месте, или, короче, — скоростью волны в данном месте (рис. 59).

Скорость волны определяется в основном свойствами среды, причем скорость упругих волн в веществе определяется упругими свойствами среды и ее плотностью, а скорость электромагнитных волн, естественно, — электрическими и магнитными свойствами среды. Скорость волны в данной среде может зависеть от частоты колебаний в волне (от частоты колебаний в источнике).

2. Линию, в каждой точке нормальную к фронту волны, называют лучом. В однородной и изотропной среде лучи суть прямые линии; вообще же говоря, они есть некоторые кривые.

3. За период колебаний в источнике волна (ее фронт) переместится на расстояние, называемое длиной волны. Из этого определения ясно, что $\lambda = vT$, или с учетом $T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$

$$\lambda = vT = \frac{v}{f} = \frac{2\pi v}{\omega}.$$

4. Колебания в источнике могут быть как гармоническими, так и негармоническими. Соответственно от источника бегут волны моно-

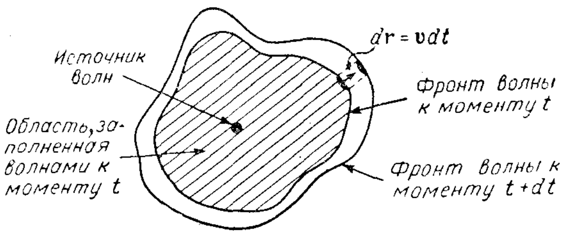

Рис. 59

хроматические или немонохроматические (колебания в них синусоидальны или несинусоидальны). Подобно тому как сложное негармоническое колебание может быть разложено на простые (гармонические), так и немонохроматическая волна может быть разложена на простые (монохроматические) волны. Процесс разложения немонохроматической волны (содержащей колебания разных частот) на монохроматические волны (каждая из которых содержит колебания одной частоты) называют дисперсией волн. Практическое осуществление дисперсии обусловлено тем, что скорость волны зависит от ее частоты. Эта зависимость, вообще говоря, сложна и не надо думать, что она отображена в формуле $v = \frac{\lambda}{f}$. Дисперсией часто называют и самый факт зависимости скорости волны от частоты.

Понятие монохроматической волны есть, конечно, некоторая абстракция, схема. Монохроматических (синусоидальных) волн не бывает, ибо такая волна должна была бы быть бесконечно протяжена во времени и в пространстве. Обычно называют монохроматической волной нечто вроде большого отрезка, куска монохромы, подобно тому как в математике часто, рисуя длинный отрезок синусоиды, называют его (кусок синусоиды) синусоидой. Несколько позже будет дано еще одно определение «монохромы».

5. Если волна распространяется со скоростью **v**, то колеблющаяся в ней величина **z** в частных случаях ориентирована или вдоль **v** или нормально **v**. В случае $\mathbf{z} \parallel \mathbf{v}$ волну (и колебания в ней) называют *продольной*. В случае $\mathbf{z} \perp \mathbf{v}$ — *поперечной*. Все

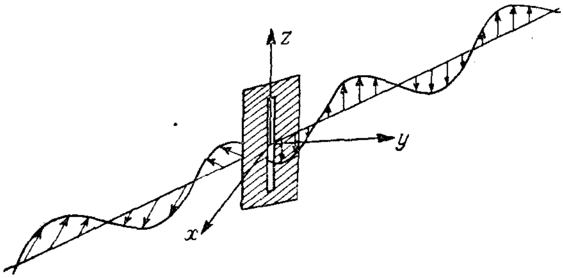

Рис. 60

остальные случаи (например, сдвиговые, поверхностные и другие волны) сводятся к каким-то комбинациям продольных и поперечных волн.

Поперечным волнам свойственно явление поляризации, заключающееся в выделении колебаний определенного направления. Дело в том, что вектор **z** в некоторой точке пространства может меняться так, что его конец описывает некоторую кривую, вообще говоря, не замкнутую. Из этих-то сложных колебаний и можно выделить колебания какого-либо направления. Явление выделения таких колебаний называют *поляризацией*, а сами так выделенные колебания и волны — *линейно-поляризованными*. На рис. 60 показано, как в шнуре перед щелью колебания происходят в различных направлениях, а за щелью распространяются лишь колебания параллельные щели, ибо щель не пропустила колебания перпендикулярные себе. Перед щелью — неполяризованные колебания, а за щелью — линейно-поляризованные (вектор смещения **z** своим концом выписывает прямую линию).

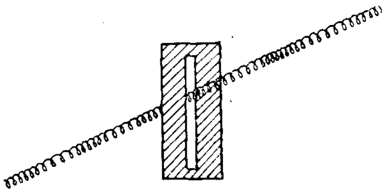

Рис. 61

Продольным колебаниям это явление не свойственно. На рис. 61 показано, как продольные колебания пружины проходят за щель, «не обращая на нее внимания».

Поскольку поперечные упругие колебания связаны с возникновением упругих сил при изменении ф о р м ы тела, что свойственно лишь твердым телам, то в н у т р и жидкостей и газов поперечные волны возникнуть не могут (не путать п о в е р х н о с т н ы е волны с поперечными волнами в н у т р и среды). Продольные упругие волны суть сгущения и разрежения среды, т. е. связаны с возникновением упругих сил при изменении объема, что имеет место в любых упругих средах, а потому продольные волны могут возникать и распространяться и в твердых, и в жидких, и в газообразных средах.

§ 4. Энергия волн

1. В среде, заполненной волнами (колебаниями), как-то распределена энергия этих колебаний с некоторой объемной плотностью $\rho_E = \frac{dE}{dV}$. Распространяясь, волны переносят с собой энергию. Этот перенос энергии волн характеризуют *вектором Умова, определяемым соотношением* (рис. 62):

$$\mathbf{P} = \frac{d^2E}{dS_v\,dt} \cdot \frac{\mathbf{v}}{v}, \qquad (1)$$

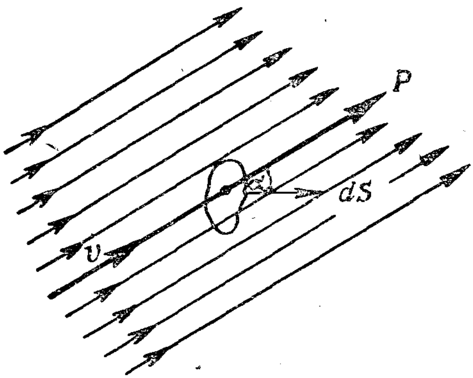

Рис. 62

где $d\mathbf{S}$ — вектор элементарной площадки, через которую переносится энергия; dS_v — проекция этого вектора на направление $\mathbf{v}$ (или $\mathbf{P}$); d^2E — энергия, перенесенная за время dt через площадку $d\mathbf{S}$.

Выражение для $\mathbf{P}$ можно преобразовать, учтя, что

$$d^2E = \rho_E\,dV = \rho_E\,d\mathbf{S}\,d\mathbf{r} = \rho_E\,d\mathbf{S}\cdot\mathbf{v}\,dt = \rho_E\,dS_v v\,dt,$$

где $d\mathbf{r}$ — перемещение участка фронта волны за время dt около $d\mathbf{S}$.

Подставляя это значение d^2E в формулу для $\mathbf{P}$, получим

$$\mathbf{P} = \rho_E \mathbf{v}. \qquad (2)$$

Как видно из определения, вектор Умова показывает, какая энергия переносится за единичное время через единичную площадку, расположенную нормально скорости распространения волны.

Очевидно, величина $d\Phi_P = \mathbf{P}\,d\mathbf{S}$, называемая элементарным потоком вектора $\mathbf{P}$ через площадку $d\mathbf{S}$, показывает, какая энергия переносится волной за единичное время через площадку $d\mathbf{S}$. Очевидно также, что $d\Phi_P$ — это мощность потока волн около $d\mathbf{S}$. Действительно,

$$d\Phi_P = \frac{d^2E}{dS_v\,dt} \cdot \frac{\mathbf{v}}{v}\,d\mathbf{S} = \frac{d^2E v\,dS_v}{dS_v\,dt\,v} = \frac{d^2E}{dt} = dN.$$

2. Источник волн излучает, вообще говоря, с различной интенсивностью в разных направлениях, т. е. неизотропно. Для

характеристики излучения в зависимости от направления вводят понятие силы излучения источника в данном направлении. Ограничимся определением силы излучения точечного источника волн.

Проведем от источника прямую в интересующем нас направлении и малый конус, осью которого является эта прямая, а вершина совпадает с источником; внутри этого конуса содержится некоторый телесный угол $d\Omega$ (рис. 63). *Силой излучения источника в данном направлении* называется величина

$$I = \frac{d^2E}{d\Omega\, dt}, \tag{3}$$

показывающая, какая энергия излучается источником за единицу времени в единичный телесный угол, проведенный в данном направлении. Если I не зависит от направления, излучение называется изотропным.

Нетрудно связать вектор Умова $\mathbf{P}$ с силой излучения I. Именно, из $d\Phi_P = \frac{d^2E}{dt}$ следует $d^2E = d\Phi_P\, dt$, что при подстановке в (3) дает

$$I = \frac{d^2E}{d\Omega\, dt} = \frac{d\Phi_P}{d\Omega} = \frac{\mathbf{P}\, d\mathbf{S}}{d\Omega},$$

так как $d\Omega = \frac{dS\cos\alpha}{R^2}$ (см. стр. 144),

то $I = \frac{P\, dS\cos\alpha}{d\Omega} = PR^2$,

откуда $P = \frac{I}{R^2}$, или с учетом $\mathbf{P} \uparrow\uparrow \mathbf{R}$

$$\mathbf{P} = \frac{I}{R^3}\mathbf{R}.$$

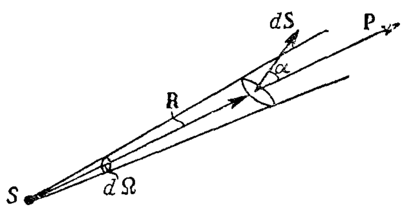

Рис. 63

Часто бывает удобным проводить радиус-вектор не от источника к интересующей нас точке, а наоборот; тогда, вводя $\mathbf{r} = -\mathbf{R}$, получим

$$\mathbf{P} = -\frac{I}{r^3}\mathbf{r}.$$

Если источник протяженный, то, разбивая его на элементарные источники, получим

$$\mathbf{P} = \int d\mathbf{P} = -\int \frac{\mathbf{r}}{r^3}\, dI.$$

При этом $I = I\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right)$, поскольку в разных направлениях источник излучает по-разному.

3. Часто плотность энергии ρ_E оказывается полезным выразить через параметры волны — амплитуду и частоту. Сделаем это для случая монохроматических волн, предположив, что пространство, заполненное волнами, можно рассматривать как совокупность вибраторов, каждый из которых обладает энергией ε. Если

в объеме dV находится dN таких источников, то $dE = \varepsilon\, dN$. Вводя понятие числовой плотности источников $n = \frac{dN}{dV}$, показывающей сколько источников содержится в единице объема, получим

$$\rho_E = \frac{dE}{dV} = \frac{\varepsilon\, dN}{dV} = \varepsilon n.$$

В случае упругих волн под ε можно понимать механическую энергию колебаний источника с массой m, частотой ω и амплитудой Z; тогда $\varepsilon = \frac{m\omega^2 Z^2}{2}$ и, значит, $\rho_E = n\frac{m\omega^2 Z^2}{2}$. Поскольку nm — это масса источников, содержащихся в единице объема, т. е. обычная плотность вещества ρ, то

$$\rho_E = \frac{\rho\omega^2 Z^2}{2}.$$

Пользуясь полученным выражением для ρ_E, можно, если необходимо, выразить $\mathbf{P}$ и I через ε и n, а в случае упругих волн — через ω, ρ и Z:

$$\mathbf{P} = \rho_E \mathbf{v} = \frac{\rho\omega^2 Z^2}{2}\mathbf{v},$$

$$I = PR^2 = \frac{\rho\omega^2 Z^2}{2} vR^2.$$

§ 5. Уравнения плоской и сферической волн

Получим уравнение волны, т. е. уравнение, связывающее координату точки, в которой нас интересуют колебания, с колеблющейся в ней величиной (например, смещением частиц среды в этой точке). Ограничимся при этом случаями сферической и плоской монохроматических волн, распространяющихся в однородной и изотропной среде.

В точке N, отстоящей на расстоянии R от источника с силой излучения I, колебания, пришедшие от источника, будут, очевидно, в указанном случае гармоническими, но отстающими по фазе от колебаний в источнике на

$$\Delta\varphi = 2\pi\frac{\Delta t}{T} = 2\pi\frac{R}{\lambda},$$

где Δt — время в течение которого колебания от I дойдут до N. Но тогда в точке N колебания отобразятся уравнением

$$z = Z\cos\varphi = Z\cos(\varphi_{\text{ист}} - \Delta\varphi) = Z\cos\left(\omega t + \varphi_0 - \frac{2\pi R}{\lambda}\right).$$

Определим амплитуду колебаний Z, исходя из закона сохранения энергии (считая среду не поглощающей энергию, не переводящей ее, например, в энергию хаотического движения частиц). Положим, что мы знаем амплитуду Z_0 в некоторой точке N_0, находящейся на R_0 от источника. Проведем две сферы радиусов R и R_0 с центрами в I. Считая источник и среду изотропными, имеем $I_0=I$ (так как излучает и в точку N_0 и в точку N один и тот же источник) или

$$\frac{\rho_0\omega^2 Z_0^2}{2} v_0 R_0^2 = \frac{\rho\omega^2 Z^2}{2} v R^2.$$

С учетом однородности среды ($\rho_0=\rho$ и $v_0=v$) получим $Z_0^2R_0^2= =Z^2R^2$, а тогда уравнение упругой сферической монохроматической волны, распространяющейся в однородной и изотропной среде, будет иметь вид

$$z=\frac{Z_0R_0}{R}\cos\left(\omega t+\varphi_0-\frac{2\pi R}{\lambda}\right).$$

Аналогичный вид имеет уравнение сферической волны любой другой природы.

Обычно начальную фазу колебаний в источнике полагают равной нулю. В этом случае

$$z=\frac{Z_0R_0}{R}\cos\left(\omega t-\frac{2\pi R}{\lambda}\right).$$

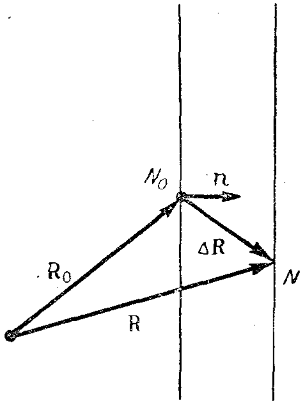

Рис. 64

Читатель может, рассматривая два положения фронта плоской волны (рис. 64), получить аналогичным образом уравнение плоской волны в виде

$$z=Z\cos\left(\omega t_0-\frac{2\pi\Delta\mathbf{R}\mathbf{n}}{\lambda}\right), \tag{1}$$

где t_0 — время, в течение которого наблюдают колебания в точке N_0, $\mathbf{n}$ — нормаль к фронту волны. Заметим, что величину $\frac{2\pi}{\lambda}\mathbf{n}$ называют *волновым вектором* и обозначают буквой $\mathbf{k}$. В этом случае уравнение (1) примет вид $z=Z\cos(\omega t_0-\mathbf{k}\Delta\mathbf{R})$, а если начало отсчета выбрать в точке N_0, то еще проще

$$z=Z\cos(\omega t_0-\mathbf{kR}).$$

При этом пишут вместо t_0 просто t, помня, однако, что оно характеризует время, в течение которого наблюдают колебания в точке N_0.

Конечно, уравнение плоской волны может быть получено как тот частный случай сферической волны, когда точки N_0 и N очень далеки от источника и, значит, $R\approx R_0$, а тогда $Z\approx Z_0$.

В случае колебаний векторной величины $\mathbf{z}$ получим для плоской поляризованной волны

$$\mathbf{z}=\mathbf{Z}\cos(\omega t-\mathbf{kR}),$$

а для сферической

$$\mathbf{z}=\frac{\mathbf{Z}_0 R_0}{R}\cos(\omega t-\mathbf{kR}).$$

При этом для сферической волны $\mathbf{k}\uparrow\uparrow\mathbf{R}$, причем $\mathbf{R}$ проводят от места расположения источника.

§ 6. Интерференция волн

Мы уже знаем, что колебания могут складываться. Это, разумеется, относится и к колебаниям распространяющимся, т. е. к волнам. Процесс наложения волн друг на друга в местах их встречи называют *интерференцией*. Для случая двух колеблющихся гармонично и одинаково направленных величин (например, смещений частиц в среде) имеем в проекции на направление колебаний

$$z=z_1+z_2=Z_1\cos\varphi_1+Z_2\cos\varphi_2=Z\cos\varphi,$$

где

$$Z=\sqrt{Z_1^2+Z_2^2+2Z_1Z_2\cos\Delta\varphi} \tag{1}$$

и

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{Z_1\sin\varphi_1+Z_2\sin\varphi_2}{Z_1\cos\varphi_1+Z_2\cos\varphi_2}.$$

Подставляя сюда выражения для Z_1, Z_2, φ_1 и φ_2 например из формулы для плоской волны, получим выражения для Z и $\operatorname{tg}\varphi$ через параметры встретившихся волн. Как видно, Z зависит от сдвига фаз составляющих колебаний z_1 и z_2, т. е. от $\Delta\varphi$. При $2\pi n\leqslant\Delta\varphi\leqslant 2\pi(n+1)$ имеем $|Z_1+Z_2|\geqslant Z\geqslant|Z_1-Z_2|$. Поскольку $\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1=(\omega_2 t_2+\varphi_{02}-\mathbf{k}_2\mathbf{R}_2)-(\omega_1 t_1+\varphi_{01}-\mathbf{k}_1\mathbf{R}_1)$, т. е. $\Delta\varphi=\Delta\varphi(t_2, t_1)$, то и $Z=Z(t_2, t_1)$, т. е., вообще говоря, результирующее колебание будет негармоничным, поскольку его амплитуда зависит от времени а $\varphi\neq\omega t+\varphi_0$.

Но если складываются гармонические колебания одинаковых частот, то $\omega_2=\omega_1=\omega$ и

$$\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1=\omega(t_2-t_1)+(\mathbf{k}_2\mathbf{R}_2-\mathbf{k}_1\mathbf{R}_1)+\Delta\varphi_0.$$

И так как $t_2-t_1=\text{const}$, то $\Delta\varphi$ не зависит от t, а значит, и Z — тоже. Такие колебания называют *когерентными*. Обычно полагают $t_2-t_1=0$; в этом случае $\Delta\varphi=(\mathbf{k}_2\mathbf{R}_2-\mathbf{k}_1\mathbf{R}_1)+\Delta\varphi_0$, и, значит, Z зависит тоже от $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$, $\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2$ и $\Delta\varphi_0$. В случае $\mathbf{k}_1\uparrow\uparrow\mathbf{R}_1$ и $\mathbf{k}_2\uparrow\uparrow\mathbf{R}_2$ имеем $\mathbf{k}_2\mathbf{R}_2-\mathbf{k}_1\mathbf{R}_1=k_2R_2-k_1R_1$ и так как при $\omega_1=\omega_2=\omega$ имеет место и $k_1=k_2=k$, то $k_2R_2-k_1R_1=k\Delta R$. Величина $\Delta R=R_2-R_1$ называется *разностью хода* волн от источников до точки встречи. Так как разность хода волн от точки к точке меняется, то и Z тоже меняется от точки к точке. Такое зависящее от местоположения точки распределение амплитуд результирующих колебаний называется *интерференционной картиной*. Если при этом $\Delta\varphi=\Delta\varphi(t)$, то интерференционная картина со временем меняется, а если $\Delta\varphi \neq \Delta\varphi(t)$, т. е. волны когерентны, то картина устойчива во времени.

Часто приходится иметь дело со случаем $Z_1 = Z_2$ и $\varphi_{01} = \varphi_{02}$ (и, значит, $\Delta\varphi = k\Delta R + \Delta\varphi_0 = k\Delta R$).

В этом специальном случае, очевидно, из (1) следует

$$Z = Z_1\sqrt{2 + 2\cos\Delta\varphi} = 2Z_1\left|\cos\frac{\Delta\varphi}{2}\right| = 2Z_1\left|\cos\frac{\pi\Delta R}{\lambda}\right|. \qquad (2)$$

Читатель может сам написать выражения для Z и φ в случае сферических волн и убедиться, что получится выражение несколько громоздкое, почему мы и не стали его приводить.

Изложенное можно обобщить на случай встречи не двух, а нескольких волн. И в этом случае интерференционная картина будет характеризоваться наличием максимумов и минимумов, причем эта картина не будет меняться со временем лишь при условии когерентности волн, т. е. при условии, что разности фаз для всех волн не зависят от времени.

§ 7. Стоячие волны

Частным, но важным случаем интерференции волн является наложение двух волн одинаковых амплитуд и длин, распространяющихся в противоположных направлениях. Установившееся распределение амплитуд и называют *стоячей волной*. Термин «стоячая» обусловлен тем, что через любое сечение среды, где установилась стоячая волна, за равные промежутки времени переносятся равные количества энергии в противоположных направлениях, т. е. не происходит переноса энергии, энергия не «бежит» (как в бегущей волне), а «стоит» лишь превращаясь в каждой точке среды из потенциальной энергии деформации среды в кинетическую энергию движения ее частиц. Действительно, из определений вектора Умова и стоячей волны имеем для любой точки среды

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 = \rho_{E1}\mathbf{v}_1 + \rho_{E2}\mathbf{v}_2.$$

Так как волны в этом случае отличаются только знаками скоростей, то эта сумма равна нулю.

Из определения же стоячей волны следует, что результат наложения этих волн приводит к равенству (с учетом $\mathbf{k}_1 = -\mathbf{k}_2$)

$$z = z_1 + z_2 = Z_1\cos(\omega_1 t - \mathbf{k}_1\mathbf{r}) + Z_2\cos(\omega_2 t - \mathbf{k}_2\mathbf{r}) =$$
$$= Z[\cos(\omega t - \mathbf{kr}) + \cos(\omega t + \mathbf{kr})] = 2Z\cos\mathbf{kr}\cos\omega t, \qquad (1)$$

где Z — амплитуда одной из интерферирующих волн; $\mathbf{r}$ — радиус-вектор той точки среды, где нас интересует интерференция. $\Delta\varphi_0$ положено для простоты равным нулю. Множитель $2Z\cos\mathbf{kr}$ является амплитудой стоячей волны. Он отображает колебания амплитуды от точки к точке — распределение амплитуд в пространстве. Видно, что в точках, определяемых равенством $\mathbf{kr} = n\pi$, амплитуда максимальна и равна $\pm 2Z$; эти точки называются *пучностями*. В точках же, где $\mathbf{kr} = \pi\left(n + \frac{1}{2}\right)$, амплитуда равна нулю, это — *узлы*.

Каков смысл отрицательной амплитуды? Дело в том, что при переходе через значение аргумента $\pi\left(n + \frac{1}{2}\right)$ косинус меняет знак, а это означает, что при переходе через узел направление колебаний меняется на противоположное или, что все равно, фаза колебания меняется на π, а это формально эквивалентно изменению знака амплитуды колебаний.

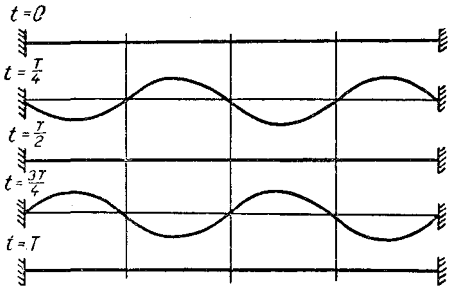

Рис. 65

Расстояние между соседними пучностями или узлами определится из условия

$$\mathbf{k}\Delta\mathbf{r} = \pi \quad \text{или}$$

$$k\,|\Delta\mathbf{r}|\cos\alpha = \pi,$$

откуда с учетом $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ получаем

$$|\Delta\mathbf{r}| = \frac{\lambda}{2\cos\alpha}.$$

При $\mathbf{k} \parallel \mathbf{r}$ $\alpha = 0$ и $|\Delta\mathbf{r}|$ имеет наименьшее значение, равное $\lambda/2$. Это расстояние часто называют длиной стоячей волны.

Множитель $\cos\omega t$ в уравнении (1) отображает протекание колебаний во времени. Видно, что фаза колебания не зависит от $\mathbf{r}$, это означает, что колебания в стоячей волне происходят в одинаковой фазе во всех точках **между двумя соседними узлами**; при переходе же через узел, как отмечено выше, амплитуда колебания меняет знак на противоположный, что эквивалентно изменению фазы колебания на π.

На рис. 65 изображены состояния колебаний в стоячей волне для моментов $t = 0$, $t = \frac{T}{4}$, $t = \frac{T}{2}$, $t = \frac{3T}{4}$ и $t = T$.

Если, например, в шнуре с закрепленными концами возбудить колебания, то в нем могут установиться лишь волны, длина которых отвечает требованию

$$\frac{l}{\lambda_{\text{ст}}} = \frac{2l}{\lambda} = m,$$

где l — длина шнура, m — целое число.

Это следует из того, что на концах шнура обязательно должны быть узлы, коль скоро концы его закреплены.

Этот вывод можно обобщить на случай стоячих волн любой природы, установившихся в ограниченной области: если l_i — линейный размер области в каком-либо направлении, то в этом направлении имеет место

$$\frac{2l_i}{\lambda}=m.$$

Таким образом, если стоячие волны заполняют ограниченную область, то спектр длин волн (набор возможных значений длин волн) будет дискретным (не непрерывным), ибо возможны лишь такие волны, длины которых определены равенством

$$\lambda=\frac{2l_i}{m}.$$

Поскольку все линейные размеры области зафиксированы, а m — натуральное число, то λ не может принимать любые значения, что и означает дискретность спектра.

§ 8. Группы волн и волновые пакеты

Как уже говорилось в предыдущем параграфе, волны неодинаковых частот дают интерференционную картину, которая во времени не постоянна. Рассмотрим это явление подробней.

Начнем со случая двух плоских волн одинаковых амплитуд и одинаково направленных колебаний. Полагая для простоты, что в момент t оба фронта этих волн совпали ($\mathbf{r}_1=\mathbf{r}_2=\mathbf{r}$) и $\varphi_{01}=\varphi_{02}=0$, получим

$$z=Z\left[\cos(\omega_1 t-\mathbf{k}_1\mathbf{r})+\cos(\omega_2 t-\mathbf{k}_2\mathbf{r})\right]=$$
$$=2Z\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t-\frac{\Delta\mathbf{k}\mathbf{r}}{2}\right)\cos(\omega_{\text{ср}}t-\mathbf{k}_{\text{ср}}\mathbf{r}).$$

Величину $2Z\left|\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t-\frac{\Delta\mathbf{k}\mathbf{r}}{2}\right)\right|$ называют *амплитудой результирующей волны*. Видно, что ее значение зависит и от времени и от положения точки, в которой происходит интерференция. Она максимальна там, где $\left(\frac{\Delta\omega}{2}t-\frac{\Delta\mathbf{k}\mathbf{r}}{2}\right)=n\pi$. Если в момент времени t максимум приходился на точку с координатной $\mathbf{r}$, то через время dt он окажется в точке $\mathbf{r}+d\mathbf{r}$, т. е. переместится. Нетрудно найти скорость перемещения этого максимума. Ограничимся случаем $d\mathbf{r}\upuparrows\mathbf{k}$. Тогда, дифференцируя равенство $\left(\frac{\Delta\omega}{2}t-\frac{\Delta kr}{2}\right)=n\pi$ по времени, получим с учетом независимости $\Delta\omega$ и Δk от времени:

$$\Delta\omega\, dt-\Delta k\,|d\mathbf{r}|=0,$$

откуда

$$\frac{|d\mathbf{r}|}{dt}=\frac{\Delta\omega}{\Delta k}.$$

Можно показать, что и в случае интерференции не двух, а целой группы волн, частоты которых лежат в небольшом интервале $\Delta\omega = \omega_{max} - \omega_{min}$ около $\omega_{min} < \omega_{cp} < \omega_{max}$, имеет место то же самое выражение (при $\Delta\omega \to 0$)

$$\frac{|d\mathbf{r}|}{dt} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d\lambda}{dT}.$$

Величину $\frac{|d\mathbf{r}|}{dt}$, равную $\frac{d\omega}{dk}$ и характеризующую быстроту движения максимальной амплитуды колебаний интерферирующих волн, называют *модулем групповой скорости* этих волн. Именно с этой скоростью связан перенос энергии волнами. В случае монохроматической волны $\Delta\omega = 0$ и $\Delta k = 0$ и величина $\frac{|d\mathbf{r}|}{dt} = \frac{0}{0}$ не определена, что означает отсутствие групповой скорости. Оно и понятно: групповая скорость есть скорость распространения максимальной амплитуды интерферирующих волн, частоты которых близки друг другу, но не равны. Скорость же монохроматической волны мы определили ранее как $v_{\text{ф}} = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k}$. Эта скорость, которую мы в параграфе 3 назвали просто скоростью волны, называется *фазовой скоростью* волны. Из определения скорости монохроматической волны (или, что все равно, фазовой скорости) следует, что она показывает, с какой скоростью распространялась бы монохрома, если бы она существовала. Реально, как уже говорилось, отдельных монохром не существует. Всякая реальная волна есть группа волн, состоящая из большего или меньшего числа интерферирующих монохроматических волн. Но тогда имеем для любой реальной волны:

$$z = \sum_{i=1}^{N} z_i = \sum_{i=1}^{N} Z_i \cos(\omega_i t - \mathbf{k}_i \mathbf{r}). \qquad (1)$$

Может оказаться, что среди интерферирующих волн одна из монохром имеет амплитуду подавляюще большую по сравнению с амплитудами всех остальных монохром. В этом случае и получается волна, напоминающая монохрому; именно такую волну в физике часто и называют *монохроматической* (опуская слово «почти»).

Можно показать также, что в случае интерференции большого числа монохром результирующая амплитуда будет иметь значительную величину лишь в небольшой области пространства — образуется волновой пакет, движущихся со скоростью $\mathbf{v}_{\text{гр}} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$. Можно также показать, что чем больше $\Delta\omega$, тем меньше линейные размеры области, в которой заметна амплитуда волны. Именно, для волн, распространяющихся в направлении $\mathbf{r}$, получается $|\Delta'\mathbf{r}|\Delta\omega \approx c$, где $\mathbf{c}$ — максимальная групповая скорость распространения волн. Видно, что для монохромы $|\Delta\mathbf{r}| \approx \frac{c}{\Delta\omega} \to \infty$, т. е. монохрома, если бы она существовала, была бы неограничено протяжена. Но это означает, что монохрома — это фикция, это **самая грубая схема** реальной волны, подобно тому как материальная точка — это самая первая, самая грубая модель реального тела. Как говорилось выше, монохромой часто называют волну, для которой $|\Delta \mathbf{r}| \gg \lambda$.

Можно показать, что хотя фазовая скорость не связана с переносом энергии, она определяет путь волны (ход луча). Например,

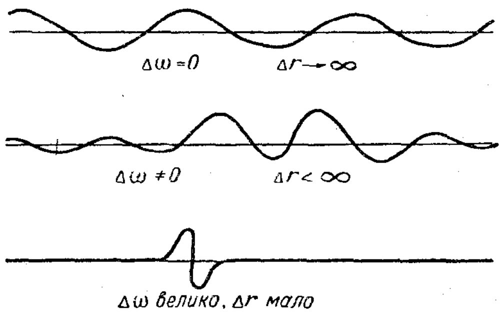

Рис. 66

на границе раздела двух сред изменение направления луча при преломлении определяется именно фазовой скоростью. Однако время движения по этому пути зависит все-таки не от $v_ф$, а от $v_{гр}$.

На рис. 66 изображены схематично различные группы волн в зависимости от интервала частот $\Delta\omega$.

Отметим, что при интерференции волны не усиливают и не ослабляют друг друга — они просто накладываются одна на другую, «не помогая» и «не мешая» друг другу. Именно поэтому колебание в результирующей волне определяется равенством (1).

§ 9. Принцип Гюйгенса и Френеля

Вернемся к вопросу о распространении волн. Не вдаваясь в механизм того, как именно осуществляется передача колебаний от одного места к другому, мы все же формально можем описать характер распространения волн, опираясь на принцип Гюйгенса и Френеля, который читается так:

> **Каждая точка среды, до которой дошло колебание, сама становится источником вторичных волн той же частоты; эти вторичные волны, интерферируя, «усиливают» друг друга в направлении распространения и «гасят» в обратном. Огибающая этих вторичных волн есть новый фронт волны.**

Из формулировки принципа видно, что он дает возможность по фронту волны в какой-либо момент t построить фронт этой же волны в момент $t+dt$. В этом большая ценность принципа, ибо опираясь на него, мы можем описать ход фронта волны в среде и на границах раздела; вывести «законы» отражения, преломления и дифракции, о которых будет идти речь ниже и т. д.

На рис. 67 показано несколько последовательных положений фронта какой-то волны в некоторой среде общего типа (т. е. неоднородной и неизотропной).

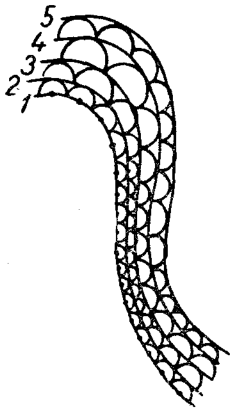

Рис. 67

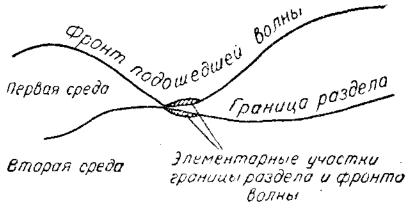

Рис. 68

Выведем, опираясь на рецепт Гюйгенса—Френеля, «законы» отражения и преломления волны на границе раздела двух сред.

Пусть к некоторой границе (рис. 68) приходит волна произвольного вида. Рассмотрим столь малый участок границы, что его можно считать плоским; аналогично выделяется и элемен-

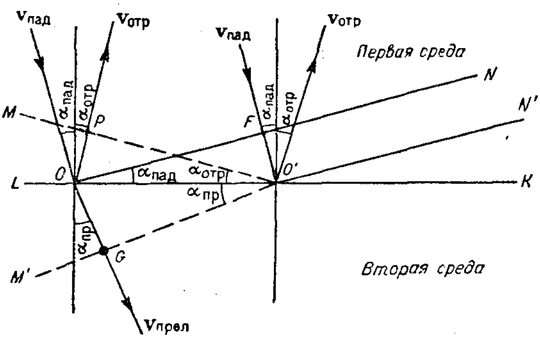

Рис. 69

тарный участок фронта волны. В этом случае можно считать и границу раздела и фронт подошедшей волны в данном месте плоскими, как это и показано на рис. 69.

Пусть ON — плоский участок фронта волны, подошедший к границе LK так, что точка O фронта находится на границе раздела. Передвигаясь в направлении $\mathbf{v}_{пад}$ участок ON фронта падающей волны займет через время dt положение $O'N'$. За это же время фронт волны последовательно «зацепит» все точки границы от O до O', возбудив в них вторичные волны, которые станут распространяться и в среде I и в среде II со скоростями $\mathbf{v}_{\text{отр}}$ и $\mathbf{v}_{\text{пр}}$.

Огибающая волн, идущих в среде I (MO'), будет фронтом отраженной волны, а огибающая прошедших в среду II — ($M'O'$) — фронтом преломленной волны.

Из соображений симметрии (фронт упавшей волны плоский, граница плоская, среда на малом участке практически однородна и изотропна) следует, что фронты отраженной и упавшей волн будут плоскими. Это можно показать и прямым расчетом, чего, однако, мы делать не будем.

С учетом сказанного и того, что $v_{\text{пад}} = v_{\text{отр}}$, приходим к выводу о том, что прямоугольные треугольники OPO' и OFO' равны, откуда следует равенство углов $\alpha_{\text{пад}}$ и $\alpha_{\text{отр}}$, составляемых соответствующими участками фронта с границей раздела. Очевидно, вместо равенства этих углов можно говорить о равенстве углов, которые составляют лучи упавший и преломленный с нормалью, проведенной к границе раздела на участке, где рассматривается падение волны.

Далее, выражая OO' из прямоугольных треугольников OFO' и OGO', получим

$$OO' = \frac{v_{\text{пад}}\, dt}{\sin \alpha_{\text{пад}}} \text{ и } OO' = \frac{v_{\text{прел}}\, dt}{\sin \alpha_{\text{пр}}},$$

откуда следует $\frac{\sin \alpha_{\text{пад}}}{\sin \alpha_{\text{пр}}} = \frac{v_{\text{пад}}}{v_{\text{пр}}}$ или $\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{v_1}{v_2}$. Величина $n_{2,1} = \frac{v_1}{v_2}$ называется *показателем преломления второй среды относительно первой*. Так как скорость волны есть некоторая функция частоты колебаний, то и $n_{2,1}$ тоже зависит от частоты падающих на границу волн.

Поскольку частота колебаний в волне целиком определяется частотой колебаний источника (мы считаем, что источник колебаний и граница раздела взаимно не перемещаются), то частота волны при отражении и преломлении не меняется.

Можно также показать, что лучи упавший, отраженный и преломленный лежат в одной плоскости с нормалью, проведенной к границе раздела в точке падения луча; эта плоскость называется *плоскостью падения* (для рис. 69 она совпадает, очевидно, с плоскостью чертежа).

§ 10. Дифракция волн

Как уже говорилось, в однородной и изотропной средах волны распространяются с постоянной скоростью. Естественно, что на неоднородностях среды скорость будет как-то изменяться. Очень важным случаем подобного рода является дифракция — изменение направления скорости волны на границах резких неоднородностей, вкрапленных в среду, — всякого рода препятствиях. Фронт волны около этих препятствий может существенно изменить свою форму, в какой-то мере «обволакивая», «огибая»

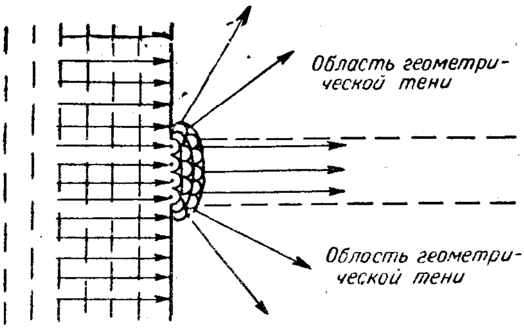

Рис. 70

это препятствие. Хороший способ расчета дифракционных явлений дает все тот же принцип Гюйгенса и Френеля.

Разберем сначала суть явления дифракции с помощью рисунков. Так, на рис. 70 показано, как часть фронта плоской волны подошла к отверстию в экране. Затем, в соответствии с принци-

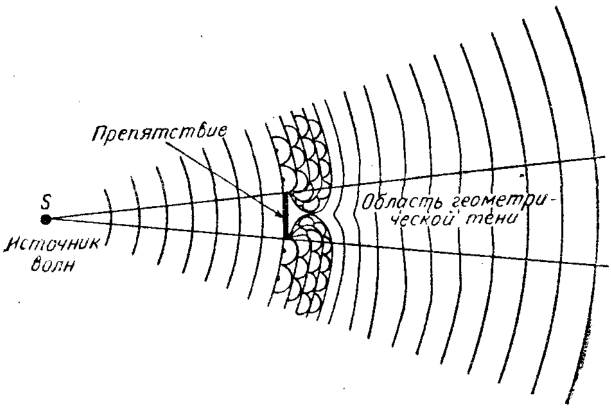

Рис. 71

пом Гюйгенса, нарисовано несколько новых положений той части фронта, которая прошла сквозь отверстие. Видно, что фронт волны за отверстием уже не есть часть плоскости, он исказился на краях отверстия, а волны заполняют за отверстием и часть пространства, лежащего в области геометрической тени. На рис. 71 изображено, как сферическая волна «огибает» препятствие.

На этих двух примерах уже видна основная суть дифракции — отклонение волн от прямолинейного распространения на препятствиях. Поскольку при дифракции лучи уже не есть прямые линии (они около препятствий искривляются, как показано на рис. 70), то в тех случаях, когда дифракционные явления сказываются существенно, понятием луча предпочитают не пользоваться. Наиболее простые случаи в дифракции имеют место, когда линейные размеры препятствий порядка длины волны. За такими препятствиями или отверстиями практически нет области, незаполненной волнами (рис. 71).

Сказанное выше описывает дифракцию в самых общих чертах. Принцип Гюйгенса и Френеля способен описать ее более детально.

Прежде всего, задача ставится так: известна амплитуда колебаний волны, подошедшей к препятствию, известны форма и размеры препятствия (отверстия); найти распределение амплитуд за препятствием (отверстием) на расстояниях, значительно превышающих линейные размеры препятствия. Решение задачи в смысловом отношении несложно. Именно, разбивая фронт волны, подошедшей к отверстию, на малые участки и считая каждый такой участок «точечным» источником волн с амплитудой, пропорциональной площади участка, получим много «точечных» источников, излучающих в однородной среде сферические волны, которые, подходя к интересующей нас точке, дадут некоторое суммарное колебание, определяемое равенством

$$z = \int dz = \int dZ \cos(\omega t - \mathbf{kr}).$$

Этот интеграл в общем случае не так-то просто взять. Задача, однако, упрощается при наличии какой-либо симметрии. Одним из простых примеров является расчет дифракционной картины от круглого отверстия. Правда, мы и этого здесь не сможем сделать, но наметить путь решения и сделать несколько правдоподобных предложений в наших силах. Начнем с того, что оценим амплитуду колебания в точке, лежащей на оси симметрии и достаточно далеко от отверстия. Пусть к отверстию подошла сферическая волна. Разобьем часть фронта, «проглянувшую» в отверстие, на кольцевые участки — зоны Френеля — следующим образом (рис. 72): ширина кольца должна быть такой, чтобы разность хода волн (лучей) его краев до точки наблюдения была равна $\lambda/2$. Такое разбиение фронта приводит к тому, что волны от соседних зон приходят в точку наблюдения в противофазе (именно из-за $\Delta r = \lambda/2$), и амплитуда колебания в точке наблюдения оказывается при этом очень близкой к нулю (амплитуда приходящей от зоны волны пропорциональна площади зоны, а площади зон при таком разбиении, как может при желании показать читатель, практически равны). Но тогда мы приходим к выводу, что если число зон, уместившихся на фронте волны в отверстии, четно, то в точке наблюдения амплитуда близка к нулю, при нечетном числе зон — амплитуда наибольшая, а при дробном числе — нечто среднее. Положим для определенности, что число зон четное. Тогда в точке O амплитуда минимальна. Если сдвинуться теперь от точки O по нормали к оси симметрии картины, например, в точку O', то в этой точке амплитуда будет больше из-за того, что туда волны от зон придут с более благоприятными фазовыми соотношениями. Можно также полагать, что по мере удаления от оси будут встречаться точки, в которые волны от зон будут приходить то с менее, то с более благоприятными фазовыми соотношениями, и, значит, амплитуда волн по мере движения от оси симметрии будет то убывать, то воз-

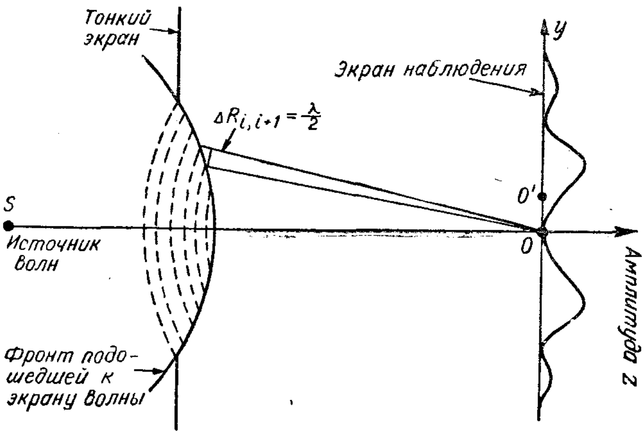

Рис. 72

растать и распределение амплитуд будет примерно таким, как показано на графике рис. 72. При этом (и это уже с несомненностью следует из соображений симметрии) такое распределение будет обладать симметрией с осью симметрии OS.

Если экран с отверстием в нем заменить препятствием той же формы, что и отверстие, то из соображений симметрии можно ожидать, что картина распределения амплитуд в том же месте сменится на дополнительную. И прямой расчет и эксперимент это подтверждают.

Из приведенного весьма приближенного рассмотрения дифракции на круглом отверстии видна достаточная сложность расчета картины даже в этом симметричном случае.

Видно также, что (во всяком случае в рамках принципа Гюйгенса-Френеля) явление дифракции есть по существу результат интерференции волн, исходящих от зон, что и проявляется в чередовании максимумов и минимумов амплитуд за отверстием.

§ 11. Материальная точка и волна

Сопоставим теперь некоторые свойства материальной точки и волны — двух основных схем классической физики.

Материальная точка	Волна
Это модель, схема, образ тела	Это модель, образ, схема состояния среды, в которой распространяются колебания
Пренебрежимые размеры	Размеры области, занятой волной, существенны
В каждый момент она может со всей определенностью находиться в некоторой резко очерченой области (в «точке»)	Это нечто размытое, совершенно неочерченное, не имеющее резких границ. Бессмысленно говорить «волна находится в некоторой точке»
В каждый момент она обладает вполне оределенной скоростью	Разные компоненты (монохромы) волны движутся, вообще говоря, с разными скоростями и понятие «скорость» в значительной мере неопределенное понятие для волны в целом
При движении деформаций не претерпевает	Сложная немонохроматическая волна (пакет) с течением времени обязательно «расползается» из-за различия скоростей ее компонент

Из перечисленного, а также из рассмотрения таких явлений как интерференция волн, дифракция, поляризация, со всей очевидностью следует, что перепутать волну с материальной точкой — задача, требующая пылкой фантазии. Любой из объектов или уж волна, или не волна, или материальная точка или нет!

Вот эта-то кажущаяся очевидность и категоричность деления объектов мира на тела и волны принесла физикам начала XX столетия не мало огорчений.

Забвение того факта, что материальный объект это одно, а наши представления о нем — существенно другое, забвение приближенности наших представлений о мире дали о себе знать. Как именно и в чем — разговор будет идти в главе, посвященной квантовомеханическим представлениям (см. «Минимальная физика», ч. II).

Заметим, что наряду с явными различиями между телом и волной есть и сходство: **и тело и волна суть материальные образования и носители энергии, импульса и момента импульса.**

Раздел III. ТЕОРИЯ ПОЛЯ

Как уже говорилось во введении, та форма материи, посредством которой осуществляются все взаимодействия между телами, называется полем. В этом разделе мы и будем говорить о свойствах гравитационного и электромагнитного полей. Классическая физика рассматривает поле как некоторую непрерывную среду, способную воздействовать на помещенные в нее тела. Именно по тем воздействиям, которые поле оказывает на помещенные в него тела, и судят о свойствах поля. Сами тела, с помощью которых исследуют поле, часто называют *пробными телами*. Они должны быть точечными (ибо исследуют свойства поля в каждой «точке») и не должны своим присутствием существенно искажать исследуемое поле, т. е. изменять существенным образом взаимодействия других тел, уже взаимодействующих меж собой посредством этого поля.

Заметим, что самого механизма воздействия силового поля на помещенное в него тело классическая физика описать не может. Все имевшие место модели этого воздействия (с помощью, например, воображаемых колесиков, пружинок, силовых линий и т. д.) успеха не имели. Теория дает способ лишь рассчитать силовое поле и тем самым заранее предсказать, каким будет воздействие интересующего нас поля на интересующее нас тело.

Введение понятия силового поля избавило физиков навсегда от предположения о возможности дальнодействия, т. е. о передаче воздействия одного тела на другое через «ничего» и «ничем»; дальнодействие явно не вяжется с общими положениями естествознания, считающего все процессы, протекающие в природе, материальными. Релятивистская теория поля вообще не делает различия между веществом и полем, тем самым понимая поле не как удобный способ описания взаимодействий, а как самую настоящую физическую реальность, не менее «весомую», чем вещество.

А. ГРАВИТАЦИОННОЕ ПОЛЕ

Опыт показывает, что всем телам в природе присуще взаимодействие, называемое *гравитацией* или *тяготением*. При зафиксированном расстоянии между телами сила взаимодействия оказывается пропорциональной произведению масс этих тел. Это означает, что именно масса тел и ответственна за создание гравитации, она есть тот параметр, заряд, который создает гравитационное поле. В этом проявляется совсем другое свойство массы, нежели в динамике. Масса здесь выступает не как мера инертности, а как источник и объект тяготения. В силу этого массу как параметр гравитационных взаимодействий называют гравитационным зарядом или гравитационной (тяжелой) массой μ в отличие от инертной массы m, фигурирующей в динамике.

Вся совокупность наблюдений и опытов (некоторых из них мы коснемся ниже) заставили физиков сформулировать принцип эквивалентности тяжелой и инертной масс, утверждающий, что между μ и m нет принципиальной разницы — и то и другое есть два проявления одной и той же сути — всякое тело обладает и инертностью и способностью создавать тяготение, и оба проявления обусловлены тем, что мы называем массой. Оказалось удобным, однако, вместо $\mu = m$ считать $\mu = \sqrt{\gamma}\, m$, где γ — гравитационная постоянная, одна из немногих фундаментальных констант физики.

§ 1. Закон тяготения

Исаак Ньютон, исследуя движения планет и падающих около поверхности Земли тел, пришел к выводу, что для двух материальных точек, массы которых m_i и m_k, имеет место равенство

$$F_{ik} = \gamma \frac{m_i m_k}{4\pi r_{ik}^2},$$

где $r_{i,k}$ — расстояние между материальными точками i и k.

Полагая в этом равенстве $m_i = m_k = 1$ и $r_{ik} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}$, получим $F_{ik} = \gamma$, т. е. гравитационная постоянная γ показывает, с какой силой притягиваются друг к другу два точечные тела единичных масс, находясь на расстоянии $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. Ясно, что численное значение γ зависит от выбора единиц для m и r. Множитель $\frac{1}{4\pi}$ введен для удобства в ряде расчетов.

С учетом векторного характера входящих в закон тяготения величин получим

$$\mathbf{F}_{ik} = -\gamma \frac{m_i m_k}{4\pi |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|^3} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k),$$

$$\mathbf{F}_{ki} = -\gamma \frac{m_k m_i}{4\pi |\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i|^3} (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i).$$

На рис. 73 указаны входящие в эти равенства величины $\mathbf{F}_{ik}$, $\mathbf{F}_{ki}$, $\mathbf{r}_i$ и $\mathbf{r}_k$. Знак минус означает, что $\mathbf{F}_{ik}$ с $(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k)$ противоположно друг другу направлены, равно как и $\mathbf{F}_{ki}$ с $(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i)$.

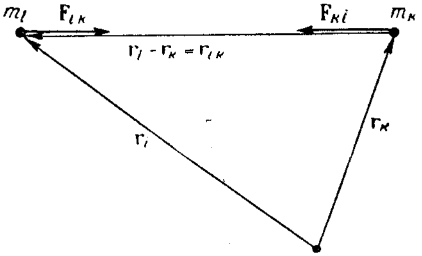

Рис. 73

Обозначая $\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i = \mathbf{r}_{ki}$, получим более краткую запись закона в виде

$$\mathbf{F}_{ki} = -\gamma \frac{m_k m_i}{4\pi r_{ki}^3} \mathbf{r}_{ki},$$

аналогично

$$\mathbf{F}_{ik} = -\gamma \frac{m_i m_k}{4\pi r_{ik}^3} \mathbf{r}_{ik}.$$

Учитывая соотношение между μ и m, можно написать закон тяготения в виде

$$\mathbf{F}_{ik} = -\frac{\mu_i \mu_k}{4\pi r_{ik}^3} \mathbf{r}_{ik},$$

$$\mathbf{F}_{ki} = -\frac{\mu_k \mu_i}{4\pi r_{ik}^3} \mathbf{r}_{ki}.$$

§ 2. Напряженность гравитационного поля

В указанных формулировках закона тяготения не используются понятия поля, а только констатируется факт зависимости сил тяготения от масс и расстояний.

Перейдем к полевой формулировке закона тяготения.

Пусть имеется некоторое тело массы M (или с гравитационным зарядом μ). Будем в разные точки пространства, окружающего это тело, помещать пробные тела m (или μ). При этом мы убедимся в том, что в каждой точке пространства на пробные тела будут действовать силы, причем на разные m (или μ) действуют разные силы, т. е. при $m_1 \neq m_2 \neq \ldots \neq m_N$ $(\mu_1 \neq \mu_2 \neq \ldots \ldots \neq \mu_N)$ имеет место $F_1 \neq F_2 \neq \ldots \neq F_N$. Но оказывается, что величина F/m не зависит от F и m и для данной точки пространства есть величина постоянная. Это значит, что указанное отношение F/m характеризует ту точку, в которую помещено пробное тело m.

Из этого следуют выводы:

а) Вокруг M есть что-то, с помощью чего M действует на m. Это что-то и есть гравитационное поле, созданное телом M. Если тела M менять, то поле будет действовать на тела m иначе, с другими силами; изменится и $\frac{F}{m}$.

б) Отношение $\frac{F}{m}$ характеризует с силовой стороны поле в той точке, где находится пробное тело. То же можно сказать и про отношение $\frac{F}{\mu}$.

Величину

$$\mathbf{G}=\frac{\mathbf{F}}{\mu}\quad\left(\text{иногда } \mathbf{g}=\frac{\mathbf{F}}{m}\right)$$

называют *напряженностью гравитационного поля* в данной *точке*. Очевидно, $\mathbf{G}$ показывает, какая сила действует на единичный малый точечный гравитационный заряд в данной точке со стороны поля, созданного телом μ. Под словом «малый» здесь разумеется такой заряд μ, который при своем внесении в исследуемое поле не изменяет существенным образом взаимодействия тел, уже имеющихся в этом поле. Из общих соображений следует, а опыт подтверждает, что $\mathbf{G}=\mathbf{G}(\mu, \mathbf{r})$.

В случае, если μ — точечное тело, то

$$\mathbf{G}=\frac{\mu}{4\pi r^3}\mathbf{r},$$

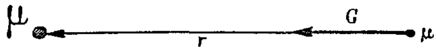

Рис. 74

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, проведенный из исследуемой точки к точечному телу μ.

Такое же выражение для $\mathbf{G}$ следует из закона тяготения Ньютона в силовой форме. Действительно, по определению $\mathbf{G}=\frac{\mathbf{F}}{\mu}$, с другой стороны, для тел μ и μ по Ньютону $F=\frac{\mu\mu}{4\pi r^2}$. Но тогда $G=\frac{F}{\mu}=\frac{\mu}{4\pi r^2}$. Вектор же $\mathbf{G}$ направлен всегда в сторону μ и для $\mathbf{r}$, проведенного из исследуемой точки к μ, $\mathbf{G}\uparrow\uparrow\mathbf{r}$, и значит, $\mathbf{G}=\frac{\mu}{4\pi r^3}\mathbf{r}$. В законе же $\mathbf{F}_{ik}=-\frac{\mu_i\mu_k}{4\pi r_{ik}^3}\mathbf{r}_{ik}$ полагают, что радиус-вектор $\mathbf{r}_{ik}$ проведен не из точки, где находится пробное тело i, а к ней, чем и обусловлено $\mathbf{F}_{ik}\uparrow\downarrow\mathbf{r}_{ik}$ и знак минус в формуле для $\mathbf{F}_{ik}$. Если же в нее поставить вместо $\mathbf{r}_{ik}$ вектор $\mathbf{r}_{ki}$, то, естественно, знак минус исчезает, но зато не будет полной симметрии в значках: $\mathbf{F}_{ik}=\frac{\mu_i\mu_k}{4\pi r_{ik}^3}\mathbf{r}_{ki}$. Это все легко уясняется с помощью рис. 73 и 74.

Индексы, конечно, усложняют запись; проще записывать закон в виде

$$\mathbf{F}=\frac{\mu\mu}{4\pi r^3}\mathbf{r},$$

$$\mathbf{F}=\gamma\frac{mM}{4\pi r^3}\mathbf{r},$$

где $\mathbf{F}$ — сила, действующая на материальную точку $\mu(m)$; при этом $\mathbf{r}$ проводится от $\mu(m)$ к $\mu(M)$.

§ 3. Суперпозиция полей и поле протяженного тела

Как показывает опыт, поле $\mathbf{G}$, созданное несколькими телами, есть геометрическая сумма отдельных полей $\mathbf{G}_j$, т. е.

$$\mathbf{G}=\sum_{j=1}^{N}\mathbf{G}_j.$$

Это положение часто называют **принципом суперпозиции** (наложения) **полей**. Оно отображает тот факт, что отдельные $\mathbf{G}_j$ не «мешают» друг другу и не «помогают», а просто складываются в суммарное $\mathbf{G}$, «не обращая внимания» друг на друга. Иными словами, поля между собой не взаимодействуют, а действуют лишь на тела, в них помещенные.

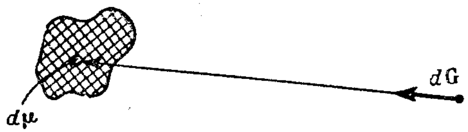

Рис. 75

В случае точечных тел, очевидно:

$$\mathbf{G}=\sum_{j=1}^{N}\frac{\mu_j}{4\pi r_j^3}\mathbf{r}_j,$$

где все $\mathbf{r}_j$ проведены из исследуемой точки к точечным телам, создающим поле, т. е. к μ_j.

Если тело μ не есть точечное тело, т. е. расстояние от точек этого тела до интересующей нас точки поля сопоставимо с линейными размерами тела (рис. 75), то, разбивая тело μ на кусочки $\Delta\mu$ или в пределе $d\mu$, получим

$$\mathbf{G}=\sum_{j=1}^{N}\frac{\Delta\mu_j}{4\pi r_j^3}\mathbf{r}_j,$$

или

$$\mathbf{G}=\int\frac{d\mu}{4\pi r^3}\mathbf{r}.$$

Если тело мало, то $\mathbf{r}_j$ (или $\mathbf{r}$), проведенные из исследуемой точки к различным частям тела, будут практически постоянны, т. е. величинами не зависящими от того, к какому кусочку тела они проведены; тогда $\mathbf{r}_j$ (или $\mathbf{r}$) можно вынести из-под знака суммы (или интеграла) и мы получим

$$\mathbf{G}=\frac{\mathbf{r}}{4\pi r^3}\sum_j\Delta\mu_j=\frac{\mu}{4\pi r^3}\mathbf{r},$$

или

$$\mathbf{G} = \frac{\mathbf{r}}{4\pi r^3} \int d\mu = \frac{\mu}{4\pi r^3} \mathbf{r},$$

т. е. выражение для **G**, созданное точечным зарядом μ.

Из определения **G** следует, что на помещенное в поле тело μ действует сила $\mathbf{F} = \mu\mathbf{G}$ (или $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$). Поэтому, если нам известно $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathbf{r})$, то нетрудно найти силу $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$, столь необходимую в динамике для решения задач. Расчет $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathbf{r})$ для заданного распределения масс есть основная (прямая) задача теории гравитационного поля, хотя, разумеется, далеко не единственная.

§ 4. Потенциал гравитационного поля

Оказалось удобным ввести еще одну характеристику поля в каждой его точке — потенциал.

Дело в том, что работа гравитационных сил по переносу некоторого тела из одной точки поля в другую не зависит от формы траектории и равна разности значений некоторой функции в этих точках (см. раздел I, § 7) — разности значений потенциальной энергии тела в конечной и начальных точках. Убедимся в этом прямым расчетом для

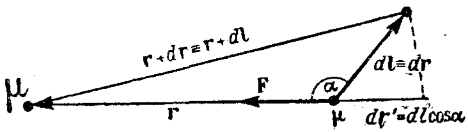

Рис. 76

случая поля, созданного точечным гравитационным зарядом μ. Обозначая элементарное перемещение тела μ символом $d\mathbf{r}$ или $d\mathbf{l}$ (рис. 76), получим

$$dA = \mathbf{F}\, d\mathbf{l} = F\, dl \cos\alpha = F\, dr' = \frac{\mu\mu}{4\pi r^2} dr',$$

где dr' — проекция перемещения на направление вектора **F** (а значит, и на направление вектора **G**). Из рис. 76 видно, что $dr' = -dr$, где dr — изменение модуля **r**. С учетом этого

$$dA = \frac{\mu\mu}{4\pi r^2} dr' = -\frac{\mu\mu}{4\pi r^2} dr. \qquad (1)$$

Отметим, во избежание недоразумений, что часто в литературе символом dr обозначают:

1) модуль изменения **r**, т. е. величину $|d\mathbf{r}|$,

2) изменение модуля **r**, т. е. величину $d|\mathbf{r}|$,

3) проекцию перемещения на направление силы, т. е. величину $|d\mathbf{r}|\cos\alpha$ (то, что мы обозначили $dr' = dl\cos\alpha$, где $dl = |d\mathbf{r}|$, — модуль перемещения).

Что именно имеется в виду, обычно говорится в тексте.

Интегрируя равенство (1), получим

$$A_{1,2}=\int_1^2 dA=-\int_1^2 \frac{\mu\mu}{4\pi r^2}dr=-\frac{\mu\mu}{4\pi}\int_1^2\frac{dr}{r^2}=$$

$$=-\frac{\mu\mu}{4\pi}\left[\left(-\frac{1}{r_2}\right)-\left(-\frac{1}{r_1}\right)\right]=-\mu\left[\left(\frac{-\mu}{4\pi r_2}\right)-\left(\frac{-\mu}{4\pi r_1}\right)\right]=-\mu(\chi_2-\chi_1),$$

где обозначено $\chi_2=-\frac{\mu}{4\pi r_2}+\text{const}$ и $\chi_1=-\frac{\mu}{4\pi r_1}+\text{const}$. Видно, что работа $A_{1,2}$ не зависит от вида траектории, а определяется только начальным и конечным положением переносимой материальной точки μ. Это и позволяет каждой точке поля приписывать энергетическую характеристику $\chi=-\frac{\mu}{4\pi r}+\text{const}$. Ее называют *гравитационным потенциалом поля в точке* r, а величину $U(r)=$ $=\mu\chi=\mu\left(\frac{\mu}{4\pi r}+\text{const}\right)$ — *потенциальной энергией тела* μ *в этой точке гравитационного поля.* Выбор константы обусловлен тем, что полагают χ и U на бесконечности равными нулю. Но тогда из $\chi=-\frac{\mu}{4\pi r}+\text{const}$ при $r\to\infty$ и $\chi\to 0$ следует $\text{const}=0$, и, значит, для поля, созданного точечным зарядом μ, имеем

$$\chi=-\frac{\mu}{4\pi r}.$$

Если поле создано системой точечных зарядов, то, очевидно,

$$\chi=\sum_{j=1}^{N}\chi_j=-\sum_{j=1}^{N}\frac{\mu_j}{4\pi r_j}.$$

Если же поле создано протяженным телом μ, то

$$\chi=\int d\chi=-\int\frac{d\mu}{4\pi r}.$$

§ 5. Связь напряженности поля с потенциалом

Итак, мы ввели две характеристики гравитационного поля, в каждой его точке — силовую характеристику $\mathbf{G}=\frac{\mathbf{F}}{\mu}$ и энергетическую $\chi=\frac{U}{\mu}$. Между ними, естественно, существует связь, которую мы сейчас и установим. Именно для элементарной работы гравитационного поля имеем, с одной стороны

$$dA=\mathbf{F}\,d\mathbf{l}=\mu\mathbf{G}\,d\mathbf{l}=\mu G\,dl\cos\alpha=\mu G\,dr'.$$

С другой стороны, эта же работа

$$dA = -dU = -\mu\, d\chi.$$

Приравнивая правые части этих равенств и сокращая на μ, получим

$$d\chi = -\mathbf{G}\, d\mathbf{l} \quad \text{или} \quad d\chi = -G\, dr',$$

где dr' — проекция перемещения на направление гравитационной силы (или на $\mathbf{G}$).

Для модуля вектора $\mathbf{G}$ получим

$$G = -\frac{d\chi}{dr'}.$$

Поскольку $G > 0$ (как модуль вектора), то $-\frac{d\chi}{dr'} > 0$ и, значит, $\frac{d\chi}{dr'} < 0$. Таким образом, $d\chi$ и dr' всегда разных знаков. Это отображает тот факт, что при совершении полем положительной

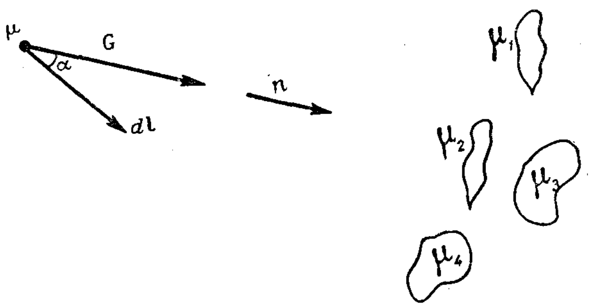

Рис. 77

работы, его энергия взаимодействия с телом μ убывает. Этот же факт можно трактовать иначе: $\mathbf{G}$ направлено в сторону (наибыстрейшего) убывания потенциала χ. Все сказанное поясняет рис. 77.

Если обозначить через орт $\mathbf{n}$ направление наибыстрейшего убывания потенциала χ, то для вектора $\mathbf{G}$ имеет место равенство

$$\mathbf{G} = -\frac{d\chi}{dr'}\,\mathbf{n}.$$

Подобное же соотношение имеет место для поля, созданного любым распределением масс (а не только в случае поля точечного тела).

Геометрическое место точек с $\chi = \text{const}$ называют *эквипотенциальной областью* (областью одинакового потенциала). Внутри такой области, очевидно, $\mathbf{G} = 0$, но на границе такой области, т. е. у поверхности $\chi = \text{const}$, поле $\mathbf{G} \neq 0$ и $\mathbf{G}$ нормально этой поверхности. Действительно, для любого перемещения по этой поверхности $d\chi = 0$, значит, и $G\,dl \cos\alpha = 0$, а поскольку $dl \neq 0$ и $G \neq 0$, то $\cos\alpha = 0$, что и означает $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Сказанное пояснено на рис. 78.

Из формулы $\mathbf{G} = -\frac{d\chi}{dr'}\mathbf{n}$ следует, что при известном $\chi = \chi(\mathbf{r})$ простым дифференцированием находится $\mathbf{G}(\mathbf{r})$.

С другой стороны, как видно из $d\chi = -\mathbf{G}\,d\mathbf{l}$, по известной $\mathbf{G}(\mathbf{r})$ можно найти интегрированием

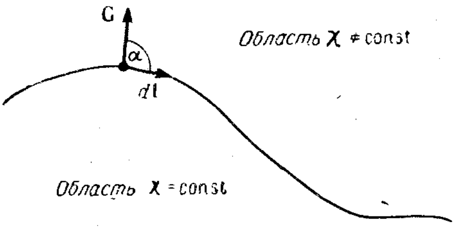

Рис. 78

$$\chi_2 - \chi_1 = -\int_1^2 \mathbf{G}\,d\mathbf{l} = -\int_1^2 \mathbf{G}\,d\mathbf{r}.$$

Поскольку операция дифференцирования значительно проще операции интегрирования, то предпочитают находить сперва $\chi = \chi(\mathbf{r})$ из некоторых уравнений, а потом в случае необходимости и $\mathbf{G} = -\frac{dx}{dr'}\mathbf{n}$.

§ 6. Теорема Остроградского—Гаусса

В некоторых, однако, случаях проще найти сразу $\mathbf{G}(\mathbf{r})$. Примером таких задач являются те, в которых имеет место та или иная симметрия. Нахождение $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathbf{r})$ основано здесь на теореме Остроградского—Гаусса, которую мы сейчас выведем.

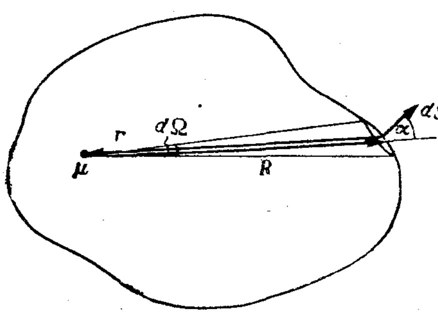

Рис. 79

Введем величину $d\Phi_G = \mathbf{G}\,d\mathbf{S}$, называемую *элементарным потоком вектора* $\mathbf{G}$ через площадку $d\mathbf{S}$ (это величина $d\Phi_G$ никакого особенного физического смысла не имеет и вводится исключительно ради нахождения $\mathbf{G}(\mathbf{r})$ способом, указанным ниже).

Введем также понятие *элементарного телесного угла*, как пространственного угла, содержащегося внутри малого конуса и *определенного равенством*

$$d\Omega = \frac{dS\cos\alpha}{R^2} = \frac{\mathbf{R}\,d\mathbf{S}}{R^3},$$

где $d\mathbf{S}$ — вектор площадки, секущей этот конус, а $\mathbf{R}$ — радиус-вектор, проведенный из вершины конуса к этому сечению (рис. 79). Ясно, что $dS\cos\alpha$ есть часть сферы радиуса R, на которую опирается этот конус, подобно тому, как центральный плоский угол опирается на элемент dl окружности. Полный плоский угол, описанный около точки, равен 2π радиан, а полный телесный (пространственный) угол, описанный около точки, равен 4π радиан.

Теорема Остроградского—Гаусса для случая поля, созданного точечным телом, доказывается так (рис. 79):

$$\Phi_G = \oiint d\Phi_G = \oiint \mathbf{G}\, d\mathbf{S} = \oiint \frac{\mu}{4\pi r^3}\, d\mathbf{r}\, d\mathbf{S} =$$

$$= -\oiint \frac{\mu}{4\pi R^3}\, \mathbf{R}\, d\mathbf{S} = -\frac{\mu}{4\pi} \oiint \frac{R\, dS \cos\alpha}{R^3} = -\frac{\mu}{4\pi} \oiint d\Omega = -\mu.$$

Здесь произведена замена $\mathbf{r}$ на $-\mathbf{R}$ по той причине, что $\mathbf{r}$, фигурирующий в законе тяготения, проводится из точки нахождения $d\mathbf{S}$ к точке нахождения заряда μ, а вектор $\mathbf{R}$, фигурирующий в определении телесного угла $d\Omega = \frac{\mathbf{R}\, d\mathbf{S}}{R^3}$, — наоборот. Знак минус в формуле отображает тот факт, что вектор $\mathbf{G}$ направлен в область нахождения μ. Формально минус следует из того, что мы провели $\mathbf{R}$ направленным из поверхности S, в то время как $\mathbf{G}$ направлен во внутрь S.

Если поле создано системой точечных зарядов μ_j, то

$$\Phi_G = \oiint \mathbf{G}\, d\mathbf{S} = \oiint (\mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_2 + \ldots + \mathbf{G}_N)\, d\mathbf{S} =$$

$$= \oiint \mathbf{G}_1\, d\mathbf{S} + \oiint \mathbf{G}_2\, d\mathbf{S} + \ldots + \oiint \mathbf{G}_N\, d\mathbf{S} =$$

$$= -(\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_N) = -\mu.$$

Если поле $\mathbf{G}$ создано протяженным телом, то, рассматривая тело как систему точечных тел с зарядами $d\mu$, прийдем опять к $\Phi_G = -\mu$.

Таким образом, во всех случаях $\Phi_G = -\mu$, где μ — гравитационный заряд, находящийся внутри замкнутой поверхности, охватывающей этот заряд.

Очевидно, если поверхность S пронизывается потоком, созданным зарядами, находящимися вне этой поверхности, то $\Phi_G = 0$. Это следует как из приведенного доказательства теоремы для случая заряда μ, находящегося внутри S, так из прямого доказательства для случая заряда, находящегося вне S, которое предоставляется сделать читателю.

Итак, поток напряженности гравитационного поля сквозь любую замкнутую поверхность S равен $-\mu$, где μ — суммарный гравитационный заряд внутри области, ограниченной поверхностью S.

Еще раз подчеркнем, что указанная теорема пригодна для нахождения $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathbf{r})$ лишь совместно с соображениями симметрии, что видно будет из дальнейшего.

Воспользуемся теперь этой теоремой для нахождения $\mathbf{G}(\mathbf{r})$.

а) Поле создано однородным шаровым слоем (рис. 80).

Подсчитаем $\mathbf{G}$ в некоторой точке N внутри области, ограниченной этим слоем. Проведем через N сферу, концентричную шаровому слою. Из соображений симметрии следует, что в разных точках этой сферы модуль вектора $\mathbf{G}$ один и тот же; но тогда из того, что внутри нее $\mu=0$, следует $\Phi_G=0$, а значит,

$$0=\oiint \mathbf{G}\, d\mathbf{S}=\oiint G\, dS\cdot\cos 180^\circ=-G\oiint dS=-GS,$$

т. е. $GS=0$. Но так как $S\neq 0$, то $G=0$. Таким образом, поле в области, ограниченной однородным шаровым слоем, равно нулю.

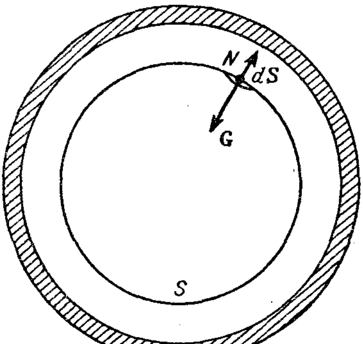

Рис. 80

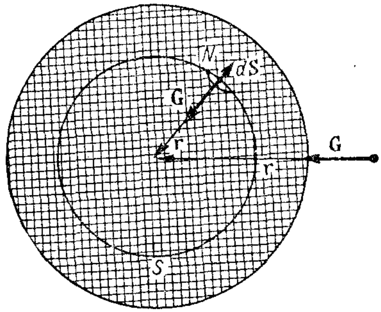

Рис. 81

б) Поле внутри однородного шара или шара, образованного однородными концентричными слоями (рис. 81).

Проводя через некоторую точку N поверхность S, получим для потока вектора $\mathbf{G}$ через нее

$$\Phi_G=-\mu,$$

где μ — тяжелая масса (гравитационный заряд) внутри поверхности S.

Из соображений симметрии следует, что $\mathbf{G}$ радиально и на поверхности S по модулю одно и то же, поэтому из $\Phi_G=-\mu$ или из $-\oiint G\,dS=-\mu$ имеем $G\,4\pi r^2=\mu$, откуда $G=\frac{\mu}{4\pi r^2}$, или с учетом направлений векторов $\mathbf{G}$ и $\mathbf{r}$,

$$\mathbf{G}=\frac{\mu}{4\pi r^3}\mathbf{r}.$$

Таким образом, поле внутри указанного шара таково, как если бы оно создавалось точечным зарядом μ, сосредоточенным в центре сферы, на поверхности которой ищется $\mathbf{G}$.

Заметим, что если шар однороден, т. е. $\rho_\mu = \frac{d\mu}{dV} = \text{const}$, то $\mu = \rho_\mu V = \rho_\mu \frac{4}{3}\pi r^3$ и, значит,

$$\mathbf{G} = \frac{\rho_\mu}{3}\mathbf{r}.$$

в) Поле вне однородного или слоистого шара (рис. 81). Рассуждая аналогично предыдущему получим

$$\mathbf{G} = \frac{\mu}{4\pi r^3}\mathbf{r}.$$

Читателю предлагается найти $\mathbf{G}(\mathbf{r})$ в случае поля, созданного однородной большой пластиной (рис. 82) постоянной толщины. При отыскании указанного $\mathbf{G}(\mathbf{r})$ надо воспользоваться кроме теоремы Остроградского — Гаусса, соображениями симметрии. Для облегчения решения задачи на рис. 82 указан рациональный выбор вспомогательной поверхности S, сквозь которую и рассматривается поток $\mathbf{G}$. В случае каких-либо затруднений читатель может заглянуть в раздел III, Б, § 1, где производится аналогичный расчет для вектора напряженности электрического поля.

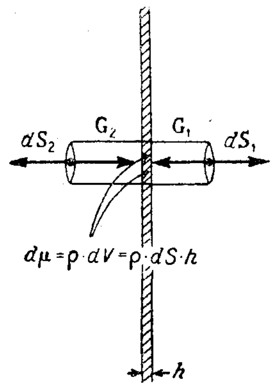

Рис. 82

§ 7. О роли тяготения в природе

Скажем несколько слов о роли тяготения в природе.

Пока что никакого существенного проявления тяготения в микромире не наблюдалось. Но зато в космических масштабах роль тяготения огромна. Тяготением обусловлены: удержание тел у поверхностей планет, приливы и отливы, движение планет около своих солнц, движение спутников планет, астероидов, комет и других небесных тел. Тяготение есть та причина, которая, как ныне полагают, заставляет колоссальные массы межзвездного газа сжиматься в более плотные образования, дающие начало звездам; при этом сжатие газа сопровождается выделением энергии тяготения и переходом ее в энергию движения частиц газа, что приводит к разогреву звезды, дающему, в свою очередь, начало термоядерным реакциям; полагают также, что при выгорании ядерного горючего внутри звезды начинается дальнейшее сжатие звезды до весьма малых размеров, а если звезда достаточна массивна, то может наступить явление гравитационного коллапса — звезда, сжимаясь неудержимо, «проваливается сама в себя» — тяготение становится около нее столь сильным, что никакая частица, никакой свет, никакой сигнал вырваться из пределов тяготения такой звезды не может; такая звезда способна только захватывать своим полем все, что ей встретится, ничего не выпуская наружу; при встрече же ее с массивным космическим телом может произойти грандиозный взрыв с выделением энергии, обусловленной слиянием этих гигантских масс, звезда вспыхнет, а затем опять ничем, кроме гравитационного поля, себя не проявляет. Структура звездных скоплений и галактик определяется в большой мере тяготением, равно как и структура всей Вселенной. Как утверждает общая теория относительности (теория пространства, времени и тяготения), в тех местах, где сосредоточены большие массы, свойства пространства и времени существенно отличаются от свойств пространства и времени в тех местах, где нет больших скоплений вещества. Оказывается, в присутствии больших масс ход всех процессов замедляется (говорят: замедляется само течение времени), пространство искривляется, т. е. становится таким, что кратчайшее расстояние между двумя точками уже не есть прямая, сумма углов треугольника меньше 2π и т. д.; становятся неприменимыми положения геометрии Евклида. Таким образом, теория относительности показывает, что материя, пространство и время не независимые объекты мира, как считала классическая физика, а суть объекты взаимосвязанные. Поскольку в мире ничего кроме движущейся в пространстве и времени материи нет, то получается, что свойства пространства и времени в некотором месте определяются тем, какие процессы там протекают, т. е. свойства пространства и времени определяются происходящими явлениями, а последние — свойствами пространства и времени, в котором они происходят. Получается своего рода «заколдованный круг». Это в общем и понятно: все в мире взаимосвязано и взаимообусловлено в силу единства мира.

§ 8. О принципе эквивалентности тяжелой и инертной масс

Теперь о некоторых явлениях, изучение которых привело к принципу эквивалентности.

а) Для данного места Земли ускорение свободного падения тел оказалось независящая от вида вещества и от массы падающего тела. Но сила тяготения, сообщающая ускорение, пропорциональна т я ж е л о й массе падающего тела, т. е. $\mathbf{F}=\mu\mathbf{G}$, а ускорение, получаемое телом, обратно пропорционально его и н е р т н о й массе, т. е. $\mathbf{a}=\frac{\mathbf{F}}{m}$. Поскольку, как показывает опыт, для данного места у поверхности Земли $\mathbf{a}=\mathbf{const}$, то из $\mathbf{a}=\frac{\mathbf{F}}{m}=\frac{\mu\mathbf{G}}{m}$, в силу $\mathbf{G}=\mathbf{const}$, следует $\frac{\mu}{m}=\mathbf{const}$, т. е. $\mu\sim m$.

Полагают, как уже говорилось $\mu=\sqrt{\gamma}m$; при соответствующем же подборе единиц измерения можно положить $\mu=m$, чего, однако, не делают.

Аналогично обстоит дело и с движением планет: сила тяготения, сообщающая им ускорение, пропорциональна μ, а ускорение обратно пропорционально m, откуда с учетом законов Кеплера следует $\mu = \sqrt{\gamma}\, m$.

Указанные и другие соображения привели физиков к принципу эквивалентности (или пропорциональности) тяжелой и инертной масс, т. е. к тому, что $\mu = \sqrt{\gamma}\, m$.

б) В разделе «Механика» говорилось о том, что в неинерциальных системах отсчета удобно для упрощения решения задач ввести понятие силы инерции, которая оказалась во всех случаях пропорциональной инертной массе тел m. Но в силу $\mu = \sqrt{\gamma}\, m$ следует, что эти силы инерции пропорциональны тяжелой массе μ и тем самым сходны с силами тяготения, что и послужило основанием считать силы инерции эквивалентными силам тяготения. Однако это не совсем так. Дело в том, что силы тяготения имеют своим источником тела, в то время как силы инерции обусловлены ускорением неинерциальной системы отсчета. Поэтому при переходе от неинерциальной системы отсчета к инерциальной силы инерции исчезают. От сил же тяготения никаким выбором системы отсчета не избавиться, ибо нельзя никаким переходом в другую систему отсчета избавиться от тел, создающих тяготение. В этом п р и н ц и п и а л ь н о е отличие сил инерции от сил тяготения. Кроме того, сила тяготения не зависит от скорости тел, а сила инерции может зависеть (например, кориолисова сила инерции $-2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'$). Силы тяготения и силы инерции по разному зависят от координат. Именно, сила тяготения всегда убывает с удалением от центра тяготения (от тела создавшего поле тяготения). У сил инерции не всегда есть центр. Но в случае, когда неинерциальная система, в которой действуют интересующие нас силы инерции, вращается, то, например, сила инерции $-m\omega^2\rho$ тем больше, чем дальше тело от оси вращения — геометрического места точек центров «тяготения».

Тем не менее в столь малых областях пространства, в пределах которых сила, действующая на тело, существенно не меняется от места к месту, имеет смысл считать силы инерции и силы тяготения эквивалентными. Это связано с тем, что если наблюдатель находится в некоторой лаборатории, из которой он не может или не хочет выйти, то никакими опытами, проведенными внутри этой лаборатории, он не может отличить сил инерции от сил тяготения. Это можно проиллюстрировать, например, нижеследующим.

Вагон идет с $a_п = \text{const}$ относительно Земли. На каждое тело, находящееся внутри вагона, будут действовать среди прочих сил силы тяжести и инерции. Поскольку они обе пропорциональны массам тел (почему эти силы и называют иногда массовыми силами), то любое тело под действием их будет себя вести так, как если бы на них действовала некая суммарная тяжесть

$(\mathbf{F}_{гр}+\mathbf{\Phi})$. В частности, брошенные в этом вагоне тела двигались бы с ускорением

$$\mathbf{g}'=\frac{\mathbf{F}_{гр}+\mathbf{\Phi}}{m}=\frac{m\mathbf{g}+(-m\mathbf{a}_п)}{m}=\mathbf{g}-\mathbf{a}_п,$$

причем $\mathbf{g}\neq\mathbf{g}(m)$, как и в обычном поле тяжести. Траектории таких тел были бы параболами с осью симметрии, направленной по $\mathbf{g}'$, подобно тому как в обычном поле тяжести ось симметрии параболы направлена по $\mathbf{g}$.

Если некоторое тело подвесить на пружине к потолку такого вагона (или лифта), который имеет ускорение $\mathbf{a}_п=\mathbf{g}$ относительно Земли, т. е. движется под действием только силы тяжести Земли (как, например, спутники Земли за пределами атмосферы), то натяжение такой пружины (динамометра) было бы равно нулю, или, как говорят, подвешенное тело (а вместе с ним и все остальные тела, находящиеся в этом спутнике) стало бы «невесомым», «невесомым» в том смысле, что $\mathbf{F}_{гр}+\mathbf{\Phi}=0$. Действительно наблюдатель, находящийся в кабине (лифте, спутнике), в соответствии со вторым законом динамики получил бы для такого тела (рис. 83)

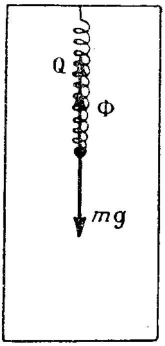

Рис. 83

$$m\mathbf{a}'=\mathbf{F}_{гр}+\mathbf{\Phi}+\mathbf{Q}.$$

И если подвешенное тело не имеет ускорения относительно кабины ($\mathbf{a}'=0$), то

$$\mathbf{F}_{гр}+\mathbf{\Phi}+\mathbf{Q}=0.$$

И поскольку в этом случае $\mathbf{\Phi}=-m\mathbf{a}_п=-m\mathbf{g}$, то $\mathbf{F}_{гр}+\mathbf{\Phi}=m\mathbf{g}+(-m\mathbf{g})=0$. Разумеется, сила натяжения $\mathbf{Q}$ динамометра при этом будет равна нулю. Стоит, однако, нарушиться равенству $\mathbf{a}=\mathbf{g}$, как тела снова станут «весовыми» в том смысле, что $\mathbf{F}_{гр}+\mathbf{\Phi}$ уже не будет нулем ни для одного тела, находящегося в кабине (лифте, спутнике).

Сказанное позволяет понять, почему силу инерции и силу тяжести считают эквивалентными (в малых, однако, областях пространства), а их сумму — эффективной, суммарной «тяжестью», напряженность поля которой

$$\mathbf{G}_{эфф}=\frac{\mathbf{F}_{гр}+\mathbf{\Phi}}{\mu}=\frac{\mu\mathbf{G}-m(\mathbf{a}_п+\mathbf{a}_к)}{\mu}=$$

$$=\mathbf{G}-\frac{m}{\mu}(\mathbf{a}_п+\mathbf{a}_к)=\mathbf{G}-\frac{1}{\sqrt{\gamma}}(\mathbf{a}_п+\mathbf{a}_к).$$

Часто вместо понятия $\mathbf{G}_{эфф}$ рассматривают $\mathbf{g}_{эфф}$. Тогда

$$\mathbf{g}_{эфф}=\frac{\mathbf{F}_{гр}+\mathbf{\Phi}}{m}=\frac{m\mathbf{g}-m(\mathbf{a}_п+\mathbf{a}_к)}{m}=\mathbf{g}-(\mathbf{a}_п+\mathbf{a}_к).$$

Следует отметить, что принцип эквивалентности сил тяжести и сил инерции есть явно приближенный принцип, тем более, однако, точно выполняющийся, чем в меньшей области протекает явление. Принцип же пропорциональности тяжелой и инертной масс есть более общий принцип, для которого ограничений пока не найдено. Из него можно получить принцип эквивалентности сил инерции и тяготения.

Принцип эквивалентности сил тяготения и сил инерции сформулирован Альбертом Эйнштейном и положен им в основу своей теории тяготения.

§ 9. О терминологии

В заключение несколько слов относительно терминологии

μ — гравитационная или тяжелая масса (гравитационный заряд).

m — инертная масса. (В силу принципа эквивалентности ($\mu=\sqrt{\gamma}\,m$) между ними часто не делают различия, называя и то и другое массой.)

$\mathbf{G}$ — напряженность гравитационного поля.

$\mathbf{g}$ — ускорение свободного падения, также часто называемое напряженностью гравитационного поля.

Если считать $m=\mu$, то $\mathbf{g}=\mathbf{G}$, а если $\mu=\sqrt{\gamma}\,m$, то

$$\mathbf{g}=\frac{\mathbf{F}_{\text{гр}}}{m}=\frac{\mu\mathbf{G}}{m}=\sqrt{\gamma}\,\mathbf{G}.$$

Некоторая неоднозначность существует в связи с терминами «вес» и «невесомость». Существует по крайней мере три определения веса и невесомости.

а) Вес — это просто сила тяжести $m\mathbf{g}$, а невесомость — ее отсутствие. Очевидно, такая невесомость тел может существовать лишь вдали от небесных тел, где-то в межзвездных далях.

б) Вес — это сумма силы тяжести и силы инерции, а невесомость — случай, когда в силу того, что система отсчета имеет ускорение $\mathbf{a}_{\text{п}}=\mathbf{g}$, суммарная тяжесть $\mathbf{F}_{\text{гр}}+\mathbf{\Phi}=0$ равна нулю (полагаем кориолисово ускорение отсутствующим).

в) Часто весом называют силу, с которой тело давит на горизонтальную опору или растягивает вертикальную нить, на которой оно подвешено. Невесомостью в этом случае называют тот случай, когда динамометр, закрепленный в кабине, имеющей $\mathbf{a}_{\text{п}}=\mathbf{g}$, показывал отсутствие натяжения его пружины.

Конечно, вес во всех случаях можно измерять динамометром. Именно из условия равновесия груза относительно кабины, в которой он подвешен (рис. 83), следует

$$m\mathbf{g}+\mathbf{\Phi}+\mathbf{Q}=0, \text{ или } \mathbf{P}+\mathbf{Q}=0,$$

откуда $\mathbf{Q}=-\mathbf{P}$, что бы ни называли весом тела $\mathbf{P}$.

Разница в том, что для случая 1) $\mathbf{P}=m\mathbf{g}$, для случаев же б) и в) $\mathbf{P}=m\mathbf{g}_{\text{эфф}}=m(\mathbf{g}-\mathbf{a}_{\text{п}}-\mathbf{a}_{\text{к}})=m\mathbf{g}+\mathbf{\Phi}$.

Очевидно также, что при $a_п + a_к = 0$ все три определения веса совпадают.

Невесомость в случае 1) бывает лишь при $g = 0$, а в случаях б) и в) при $g_{эфф} = g - a_п - a_к = 0$.

Б. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

§ 1. Поле неподвижных зарядов

Опыт показывает, что телам можно сообщить такое состояние, что между ними появится взаимодействие, не являющееся гравитационным. (Примером этому может служить потертые друг о друга ткань и янтарь.)

Явление сообщения телам такого состояния называется *электризацией*. Наэлектризованность может передаться от одних тел другим, что говорит о перетекании «чего-то» с одного тела на другое.

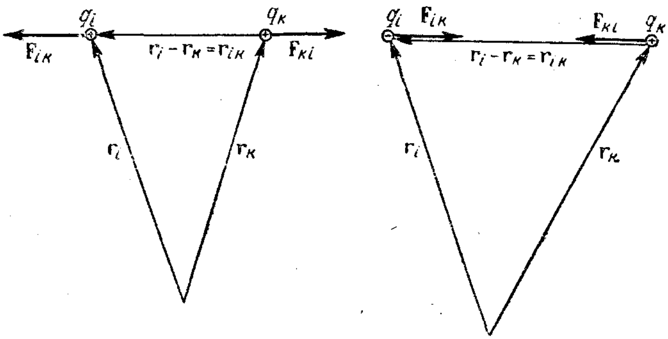

Рис. 84

Это «что-то» называется *электрическим зарядом*. В отличие от гравитационного взаимодействия, которое всегда является притяжением, электрическое взаимодействие бывает и отталкиванием. Этот и огромное количество других фактов привели физиков к выводу о том, что электрические заряды бывают двух знаков.

Заряд, возникший на стеклянной палочке, потертой о сукно, был назван положительным, а заряд возникший на эбонитовой палочке, потертой о кожу — отрицательным. Две так наэлектризованные стеклянные палочки или две так наэлектризованные эбонитовые — отталкиваются. Стеклянная же и эбонитовая — притягиваются. Это означает, что одноименно заряженные тела отталкиваются, а разноименно — притягиваются.

Определим точечный заряд, как заряженную материальную точку. Тогда для двух покоящихся в вакууме зарядов имеет место закон Кулона (рис. 84)

$$F_{ik} = \frac{q_i q_k}{4\pi\varepsilon_0 |r_i - r_k|^3} (r_i - r_k),$$

или, короче,

$$\mathbf{F}_{ik}=\frac{q_i q_k}{4\pi\varepsilon_0 r_{ik}^3}\mathbf{r}_{ik},$$

где q_i и q_k — параметры электрического взаимодействия — электрические заряды тел.

Опуская индексы, можно закон записать в виде

$$\mathbf{F}=-\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\mathbf{r},$$

где $\mathbf{F}$ — сила, действующая на заряд q, при этом $\mathbf{r}$ проводится от q к Q.

Полагая, что каждый заряд создает вокруг себя электрическое поле напряженностью $\mathbf{E}=\frac{\mathbf{F}}{q}$, можно дать полевую формулировку закона Кулона (рис. 85)

$$\mathbf{E}=-\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\mathbf{r},$$

где Q — заряд создающий исследуемое поле; $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, проведенный из точки, в которой нас интересует поле $\mathbf{E}$, к точечному заряду Q, создавшему это поле; ε_0 — диэлектрическая проницаемость вакуума, являющаяся некоторой константой, значение которой определяется выбором системы единиц.

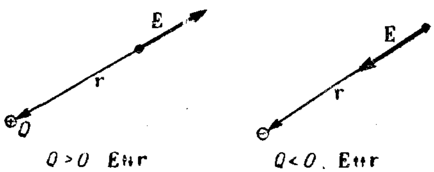

Рис. 85

Множитель $\frac{1}{4\pi}$ введен из соображений удобства. Видно, что по форме своей закон Кулона совпадает с законом тяготения Ньютона. Разница в знаке отображает тот факт, что одноименные гравитационные заряды притягиваются, а одноименные электрические — отталкиваются. В остальном формализм электростатики (заряды покоятся) совпадают с формализмом гравистатики. Природа же электрических и гравитационных взаимодействий, их происхождение, конечно же, различна.

Пользуясь формальной аналогией указанных законов, выпишем сразу некоторые соотношения, характеризующие электрическое поле.

1. Электростатический потенциал поля, созданного точечным зарядом, определяемый как $\varphi=\frac{U}{q}$ (U — потенциальная энергия точечного заряда q в интересующей нас точке) дается формулой:

$$\varphi=\frac{Q}{4\pi r}$$

для случая $\varphi\to 0$ при $r\to\infty$.

В случае протяженных заряженных тел

$$\mathbf{E}=\int d\mathbf{E}=-\int\limits_Q \frac{dQ}{4\pi r^3}\mathbf{r}=-\int\limits_S \frac{\sigma dS}{4\pi r^3}\mathbf{r}-\int\limits_V \frac{\rho dV}{4\pi r^3}\mathbf{r},$$

$$\varphi=\int d\varphi=\int\limits_Q \frac{dQ}{4\pi r}=\int\limits_S \frac{\sigma dS}{4\pi r}+\int\limits_V \frac{\rho dV}{4\pi r},$$

где $\sigma=\frac{dQ}{dS}$ и $\rho=\frac{dQ}{dV}$ — объемная и поверхностная плотности зарядов тел, создающих исследуемое поле.

Имеет место равенство, связывающее $\mathbf{E}$ и φ:

$$\mathbf{E}=-\frac{d\varphi}{dr'}\mathbf{n},$$

где $\mathbf{n}$ — орт, указывающий направление наибыстрейшего убывания φ в некоторой точке; dr' — проекция перемещения на направление кулоновой силы, действующей на положительный заряд, помещенный в эту точку; $d\varphi$ — разность потенциалов на перемещении $d\mathbf{l}=d\mathbf{r}$; $\mathbf{E}$ — напряженность поля в этой точке.

Для любых двух близких точек поля

$$d\varphi=-\mathbf{E}d\mathbf{l}, \text{ или } d\varphi=-\mathbf{E}d\mathbf{r}.$$

Если точки далеки друг от друга ($\mathbf{E}$ при переходе от одной точки к другой меняется заметным образом), то

$$\Delta\varphi_{2,1}=-\int\limits_1^2 \mathbf{E}d\mathbf{r}.$$

Очевидно также, что $\mathbf{E}$ нормально поверхности $\varphi=\text{const}$.

2. Теорема Остроградского — Гаусса имеет в случае электростатического поля вид

$$\Phi_E=\oint\!\!\oint \mathbf{E}d\mathbf{S}=\frac{Q}{\varepsilon_0},$$

т. е. поток вектора напряженности сквозь замкнутую поверхность, окружающую заряд Q, равен $\frac{Q}{\varepsilon_0}$.

В случае поля, созданного равномерно заряженным шаром или шаровым слоем, теорема дает результаты, аналогичные уже полученным в разделе «Тяготение», и читатель может сам написать необходимые соотношения.

Рассмотрим весьма важный в электростатике случай поля, созданного равномерно заряженными плоскостями.

Пусть имеется заряженная с $\sigma=\frac{dQ}{dS}=\text{const}$ тонкая пластинка (под dS разумеется площадь любой из сторон пластинки — правая или левая на рис. 86). Если интересующая нас точка поля близка к середине пластины, то пластину называют большой (бесконечно большой). Именно этот случай нас сейчас и интересует. Из соображений симметрии ясно, что равномерно заряженная пластина вблизи своей середины будет создавать поле, нормальное своей поверхности. Если мы проведем через интересующую нас точку поля площадку dS, параллельную пластине, и на ней как на основании построим прямой цилиндр (рис. 86), то получим замкнутую поверхность с общей площадью $2dS + dS_{бок}$. Внутри нее заряд $dQ = \sigma dS$ (для определенности положительный). Поток вектора **E** будет пронизывать только основания цилиндра, ибо вектор **E** параллелен образующей цилиндра (**E** перпендикулярно пластине из соображений симметрии, а образующая цилиндра — по построению). По теореме Остроградского — Гаусса получим

$$d\Phi_{осн} + d\Phi_{бок} = \frac{dQ}{\varepsilon_0},$$

или из-за $d\Phi_{бок} = 0$:

$$d\Phi_{осн} = \frac{dQ}{\varepsilon_0},$$

или

$$\mathbf{E}_1 d\mathbf{S}_1 + \mathbf{E}_2 d\mathbf{S}_2 = \frac{\sigma dS}{\varepsilon_0}.$$

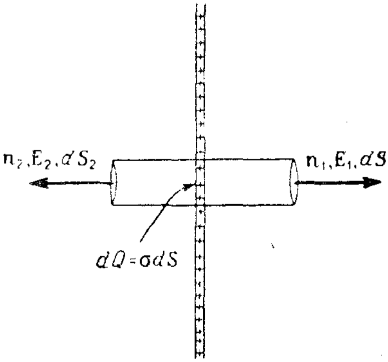

Рис. 86

Поскольку $\mathbf{E}_1 \uparrow\uparrow d\mathbf{S}_1$ и $\mathbf{E}_2 \uparrow\uparrow d\mathbf{S}_2$, то, сокращая на $dS_1 = dS_2 = dS$, получим

$$E_1 + E_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$

Но из соображений симметрии поле по обе стороны от пластины по модулю одно и то же, а значит, $E_1 = E_2 = E$. И тогда

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.$$

Договоримся в случае замкнутой поверхности за положительное направление нормали **n** к ней брать внешнюю нормаль, направленную из поверхности, а не во внутрь ее. Кроме того, поскольку пластина положительна, то это означает, что **E** направлено от пластины, создающей поле, к интересующей нас точке. Тогда в векторном виде результат будет иметь вид

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\mathbf{n}.$$

Результат нетрудно обобщить на случай N параллельных больших пластин

$$\mathbf{E} = \sum_{j=1}^{N} \mathbf{E}_j = \sum_{j=1}^{N} \frac{\sigma_j}{2\varepsilon_0}\mathbf{n}_j.$$

Интересным является случай двух разноименно, но одинаково по модулю (т. е. $|\sigma_1| = |\sigma_2| = \sigma$) заряженных пластин. В этом случае

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}\mathbf{n}_1 + \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}\mathbf{n}_2.$$

Полагая первую пластину положительно заряженной ($\sigma_1 = -\sigma_2 = \sigma > 0$), получим

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(\mathbf{n}_1 - \mathbf{n}_2).$$

Между пластинами $\mathbf{n}_1 - \mathbf{n}_2 = 2\mathbf{n}_1 = 2\mathbf{n}_+$, где $\mathbf{n}_+$ — орт, направленный от положительной пластины. Поэтому

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(\mathbf{n}_1 - \mathbf{n}_2) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\mathbf{n}_+.$$

Вне пространства между пластинами $\mathbf{n}_1 - \mathbf{n}_2 = 0$ и, значит, $\mathbf{E}$ там равно нулю.

Ясно, что формула $\mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\mathbf{n}$ является приближенной и верной лишь для точек, близких к середине пластины. У краев пластин поле будет сильно отличаться от $\mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\mathbf{n}$, а далеко от пластины (на расстояниях много больших линейных размеров пластин) будет полем точечного заряда. При $r \approx l$ (на расстояниях от пластины по порядку равных линейным ее размерам) $\mathbf{E}$ будет сложной функцией координат.

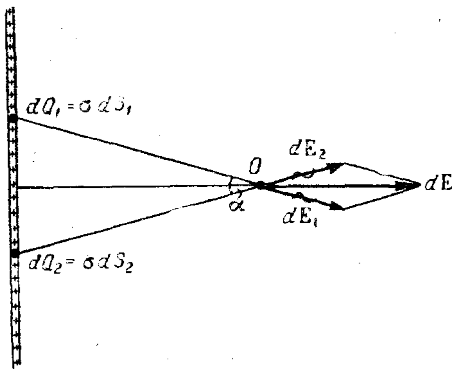

Рис. 87

Может показаться странным, что $\mathbf{E} \neq \mathbf{E}(\mathbf{r})$ вблизи пластины. Но из уже сказанного следует, что это просто результат приближенного рассмотрения. На самом же деле $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r})$, но эта зависимость вблизи середины пластины очень слаба, вдали от нее $\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi r^3}\mathbf{r}$, а на $r \sim l$ — нечто среднее. Поясним еще качественно отсутствие зависимости $\mathbf{E}$ от $\mathbf{r}$ вблизи середины пластин. На рис. 87 указано поле $d\mathbf{E} = d\mathbf{E}_1 + d\mathbf{E}_2$, созданное двумя одинаковыми участками пластин в симметричной точке O. Видно, что с удалением O от пластин модули dE_1 и dE_2 убывают, но одновременно убывает и угол α между $d\mathbf{E}_1$ и $d\mathbf{E}_2$. Первое приводит к убыли, а второе к увеличению $d\mathbf{E}$. Оба же фактора приводят к очень слабому изменению модуля $d\mathbf{E}$. Вдали от пластины $\alpha \approx 0$ и поведение модуля $d\mathbf{E}$ уже определяется только удалением, что и приводит к уменьшению dE с ростом r вдали от пластины. То же самое и с суммарным полем $\mathbf{E}$.

3. Подобно тому как величину $m\mathbf{r}$ называют моментом массы материальной точки относительно начала координат, так и величину $q\mathbf{r}$ называют *моментом электрического заряда относительно точки*, из которой проведен $\mathbf{r}$. В случае N зарядов общий элект-

рический момент системы будет суммой $q_j \mathbf{r}_j$, т. е.

$$\mathbf{p}_э = \sum_{j=1}^{N} q_j \mathbf{r}_j.$$

Если имеется заряженное протяженное тело, то

$$\mathbf{p}_э = \int \mathbf{r} dq = \int_S \mathbf{r} \sigma dS + \int_V \mathbf{r} \rho dV.$$

Можно показать, что поле, созданное нейтральной системой зарядов $\left(\sum_{j=1}^{N} q_j = 0\right)$, вдали от нее определяется именно ее электрическим моментом.

Рассмотрим важный частный случай электронейтральной системы — два равных по модулю и противоположных по знаку заряда, находящихся на некотором расстоянии l один от другого. Такая система называется *диполем*. Найдем поле диполя вдали от него, т. е. на расстоянии $r \gg l$.

Момент диполя (рис. 88) определится равенством:

$$\mathbf{p}_э = Q_+ \mathbf{r}_+ + Q_- \mathbf{r}_- = Q_+ \mathbf{r}_+ - Q_+ \mathbf{r}_- = \\ = Q_+ (\mathbf{r}_+ - \mathbf{r}_-) = Q_+ \mathbf{l}.$$

Обычно вместо Q_+ пишут просто Q, а тогда

$$\mathbf{p}_э = Q\mathbf{l}.$$

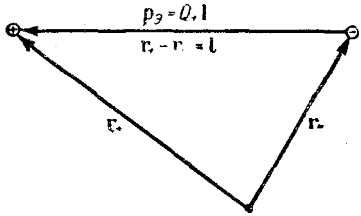

Рис. 88

Как видно, электрический момент диполя не зависит от выбора начала координат (то же и для любого нейтрального тела).

Потенциал диполя вдали от него подсчитывается так (рис. 89).

$$\varphi = \varphi_+ + \varphi_- = \frac{Q_+}{4\pi\varepsilon_0 r_+} + \frac{Q_-}{4\pi\varepsilon_0 r_-} = \frac{Q_+}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}\right) = \frac{Q(r_- - r_+)}{4\pi\varepsilon_0 r_+ r_-} =$$

$$= -\frac{Q(r_+ - r_-)}{4\pi\varepsilon_0 r_+ r_-} \approx -\frac{Ql\cos\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = -\frac{Qlr\cos\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = -\frac{Q\mathbf{lr}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = -\frac{\mathbf{p}_э \mathbf{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}.$$

Отсюда можно было бы найти $\mathbf{E} = -\frac{d\varphi}{dr'}\mathbf{n}$, но поскольку такие операции мы производить не научились, то подсчитаем $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r})$, что называется «в лоб». Именно:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_- = -\frac{Q_+ \mathbf{r}_+}{4\pi\varepsilon_0 r_+^3} - \frac{Q_- \mathbf{r}_-}{4\pi\varepsilon_0 r_-^3} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\mathbf{r}_+}{r_+^3} - \frac{\mathbf{r}_-}{r_-^3}\right).$$

Из рис. 89 видно, что $r_+ = r + \frac{l\cos\alpha}{2}$ и $r_- = r - \frac{l\cos\alpha}{2}$. Учитывая $r \gg l$, получим $r_+^3 = \left(r + \frac{l\cos\alpha}{2}\right)^3 \approx r^3 + 3r^2\frac{l\cos\alpha}{2}$ и $r_-^3 = (r -$

$-\frac{l\cos\alpha}{2}\Big)^3 \approx r^3 - \frac{3}{2} r^2 \cos\alpha$. Но тогда

$$\frac{\mathbf{r}_+}{r_+^3} - \frac{\mathbf{r}_-}{r_-^3} \approx \frac{\mathbf{r}_+\left(r^3 - 3r^2\frac{l\cos\alpha}{2}\right) - \mathbf{r}_-\left(r^3 + 3r^2\frac{l\cos\alpha}{2}\right)}{\left(r^3 + 3r^2\frac{l\cos\alpha}{2}\right)\cdot\left(r^3 - 3r^2\frac{l\cos\alpha}{2}\right)} =$$

$$= \frac{(\mathbf{r}_+ - \mathbf{r}_-)r^3 - (\mathbf{r}_+ + \mathbf{r}_-)3r^2\frac{l\cos\alpha}{2}}{r^6 - 9\frac{r^4 l^2\cos^2\alpha}{4}}.$$

Пренебрегая отличием $\mathbf{r}_+$ и $\mathbf{r}_-$ в их сумме и слагаемым $\frac{9}{4} r^4 l^2 \cos^2\alpha$ по сравнению с r^6, получим

$$\frac{\mathbf{r}_+}{r_+^3} - \frac{\mathbf{r}_-}{r_-^3} \approx \frac{\mathbf{l}}{r^3} - \frac{3lr\cos\alpha}{r^4}\cdot\frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{\mathbf{l}}{r^3} - \frac{3(\mathbf{l}\mathbf{r})\,\mathbf{r}}{r^5}.$$

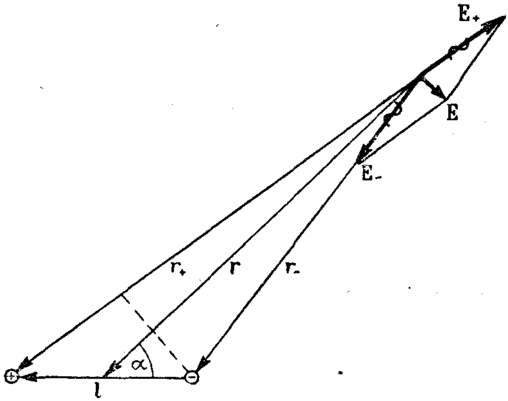

Рис. 89

Для $\mathbf{E}$ получим с учетом $Q\mathbf{l} = \mathbf{p}_э$ и найденного значения разности $\frac{\mathbf{r}_+}{r_+^3} - \frac{\mathbf{r}_-}{r_-^3}$

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\mathbf{p}_э}{r^3} - \frac{3(\mathbf{p}_э\mathbf{r})\,\mathbf{r}}{r^5}\right].$$

Видно, что E довольно сильно убывает с ростом r. То, что в частных случаях имеем

а) при $\alpha = \frac{\pi}{2}$ $\quad \mathbf{E} = -\frac{\mathbf{p}_э}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$,

б) при $\alpha = 0$ $\quad \mathbf{E} = \frac{2\mathbf{p}_э}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$,

в) при $\alpha = \pi$ $\quad \mathbf{E} = -\frac{2\mathbf{p}_э}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$,

читатель легко покажет сам, учтя взаимные направления $\mathbf{p}_э$ и $\mathbf{r}$.

Если диполь помещен в поле $\mathbf{E}$, то а) на него действует сила (рис. 90)

$$\mathbf{F}=\mathbf{F}_{+}+\mathbf{F}_{-}=Q_{+}\mathbf{E}_{+}+Q_{-}\mathbf{E}_{-}=Q\left(\mathbf{E}_{+}-\mathbf{E}_{-}\right).$$

То, что эта сила направлена в сторону возрастания модуля $\mathbf{E}$, читатель может убедиться на том частном случае, когда $\mathbf{p}_э \parallel \mathbf{E}$.

б) он обладает энергией

$$U=U_{+}+U_{-}=Q_{+}\varphi_{+}+Q_{-}\varphi_{-}=Q\left(\varphi_{+}-\varphi_{-}\right)=$$
$$=Q\Delta\varphi=-Q\mathbf{E}\mathbf{l}=-Q\mathbf{l}\mathbf{E}=-\mathbf{p}_э\mathbf{E}.$$

в) на него действует вращательный момент (рис. 90)

$$\mathbf{M}=\mathbf{r}_{+}\times\mathbf{F}_{+}+\mathbf{r}_{-}\times\mathbf{F}_{-}.$$

Если поле однородно, то $\mathbf{F}_{+}=\mathbf{F}_{-}$, а тогда

$$\mathbf{M}=\left(\mathbf{r}_{+}-\mathbf{r}_{-}\right)\times\mathbf{F}=\mathbf{l}\times Q\mathbf{E}=Q\mathbf{l}\times\mathbf{E}=\mathbf{p}_э\times\mathbf{E}.$$

Из рассмотренного видно, что и собственное поле диполя и его поведение во внешнем поле определяется его электрическим моментом $\mathbf{p}_э$. Можно показать, что и для любой электронейтральной системы с электрическим моментом $\mathbf{p}_э$ ее свойства и поведение во внешнем поле в большой мере определяется ее моментом $\mathbf{p}_э$.

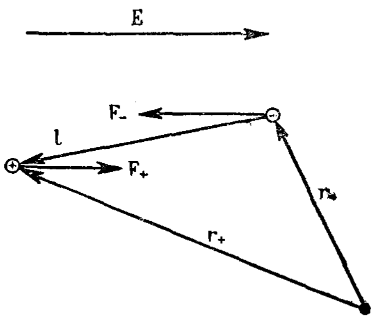

Рис. 90

Забегая вперед, скажем, что поле $\mathbf{E}$ может создаваться не только неподвижными зарядами Q, но и переменным магнитным полем (вспомним явление электромагнитной индукции). Иногда первый вид поля называют кулоновским ($\mathbf{E}_к$), а второй — сторонним ($\mathbf{E}_{ст}$). При этом $\mathbf{E}_к$ мы уже умеем считать, а с $\mathbf{E}_{ст}$ придется подождать. Надо сказать, что деление $\mathbf{E}$ на $\mathbf{E}_к$ и $\mathbf{E}_{ст}$ является непринципиальным, а просто удобным для решения ряда задач. Это обусловлено тем, что поле, созданное неподвижными зарядами, является потенциальным, сравнительно легко считается и для него $\oint \mathbf{E}\,d\mathbf{l}=0$.

§ 2. Электрический ток. Закон Ома

Электрические заряды могут перемещаться на макроскопические расстояния. Это явление называют *электрическим током* (опуская слово «макроскопический»).

Линией электрического тока, как и в случае течения жидкости, называют кривую, по касательной к которой направлена скорость заряда. Область, ограниченная линиями тока, называется *трубкой тока*.

Величина $J = \frac{dQ}{dt}$, показывающая, какой заряд (какое количество электричества) переносится за единицу времени через сечение трубки тока, называют *силой тока в этом сечении* или просто — током в данном сечении. Мы будем рассматривать только тот случай, когда ток одинаков по всем сечениям данной трубки тока, хотя со временем может и меняться, т. е. случай $J \neq J(S)$, но $J = J(t)$.

Если $\mathbf{v}$ — скорость движения положительных зарядов в данном месте, то величину (рис. 91)

$$\mathbf{j} = \frac{dJ}{dS\cos\alpha}\frac{\mathbf{v}}{v},$$

а по модулю

$$j = \frac{dJ}{dS\cos\alpha},$$

показывающую, какой ток приходится на единичное сечение трубки, нормальное скорости движения зарядов, называют *плот-*

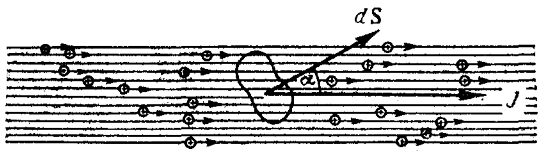

Рис. 91

ностью тока в данной точке. Из определения j следует $dJ = \mathbf{j}\,d\mathbf{S}$, а в случае сечения конечных размеров

$$J = \iint_S \mathbf{j}\,d\mathbf{S}.$$

Как следует из определения силы тока, J — это скалярная величина и направлением охарактеризована быть не может. Поэтому, когда говорят о «направлении» тока, то имеют в виду некоторое усредненное по сечению трубки тока направление плотности тока $\mathbf{j}$.

Как всякое движение в среде, движение зарядов встречает со стороны среды сопротивление R, именуемое электрическим (или омическим). Если удельное сопротивление среды (сопротивление трубки тока единичной длины и единичного поперечного сечения) обозначить через ρ, то по закону Ома

$$\mathbf{j} = \frac{1}{\rho}\mathbf{E} = \frac{1}{\rho}(\mathbf{E}_{\text{к}} + \mathbf{E}_{\text{ст}}). \qquad (1)$$

Часто вместо $\frac{1}{\rho}$ пишут величину λ — удельную проводимость среды. Закон Ома примет в этом случае вид

$$\mathbf{j} = \lambda \mathbf{E} = \lambda (\mathbf{E}_к + \mathbf{E}_{ст}). \tag{2}$$

Эта форма закона называется дифференциальной, поскольку описывает процесс в «точке» (в элементарно малой области, столь малой, что в ее пределах изменения $\mathbf{E}$, λ и $\mathbf{j}$ нас или не интересуют или недоступны измерению). Формально это отображено тем, что равенство содержит производную

$$\mathbf{j} = \frac{dJ}{dS \cos \alpha} \frac{\mathbf{v}}{v}.$$

Часто более удобной является интегральная форма закона Ома, описывающая протекание тока в макроскопической области. Выведем ее. Умножая равенство (1) скалярно на перемещение положительного заряда $\mathbf{dl}$, получим

$$\mathbf{j}\,\mathbf{dl} = \frac{1}{\rho} (\mathbf{E}_к\,\mathbf{dl} + \mathbf{E}_{ст}\mathbf{dl}).$$

По определению $\mathbf{j}$, угол между $\mathbf{j}$ и $\mathbf{dl}$, равен нулю, а $\mathbf{E}_к\,\mathbf{dl} = -d\varphi$ и, значит,

$$j\,dl = \frac{1}{\rho} (-d\varphi + \mathbf{E}_{ст}\,\mathbf{dl}),$$

или

$$j\rho dl = -d\varphi + \mathbf{E}_{ст}\,\mathbf{dl},$$

так как $j = \frac{dJ}{dS \cdot \cos \alpha}$ или $j = \frac{J}{S_n}$ (для $J \neq J(S)$), то

$$J \frac{\rho dl}{S_n} = -d\varphi + \mathbf{E}_{ст} dl.$$

Интегрируя это равенство по части трубки тока от одного поперечного сечения до другого, получим с учетом независимости J от положения сечения

$$J \int_1^2 \frac{\rho dl}{S} = -\int_1^2 d\varphi + \int_1^2 \mathbf{E}_{ст}\mathbf{dl}.$$

Величину $\int_1^2 \frac{\rho dl}{S}$ обозначают $\mathfrak{R}_2$ и называют сопротивлением трубки тока на участке *1—2*; $-\int_1^2 d\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ — удельная $\left(\frac{dA_к}{dQ}\right)$ работа кулоновских сил (это следует из определения разности потенциалов); ее часто обозначают буквой U; $\int_1^2 \mathbf{E}_{ст}\mathbf{dl}$ — удельная работа $\left(\frac{dA_{ст}}{dQ}\right)$ некулоновских сил. Ее обозначают $\mathfrak{E}$ и называют неудачно электродвижущей силой. С учетом этих обозначений получаем:

$$J\mathfrak{R} = U + \mathcal{E}, \quad \text{или} \quad J\mathfrak{R} = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}.$$

Если области действия сторонних и кулоновских сил не совпадают, то полагают $\mathfrak{R} = R + r$, где R — сопротивление участка, на котором действуют кулоновские силы, а r — сопротивление участка, на котором действуют некулоновские силы. (Ясно, что это деление весьма условное.) При таком делении сопротивления на R и r получим

$$J = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}}{R + r}, \quad \text{или} \quad J = \frac{U + \mathcal{E}}{R + r}.$$

Работа сторонних сил может быть (как и работа любых других сил) и положительной и отрицательной. То же относится и к удель-

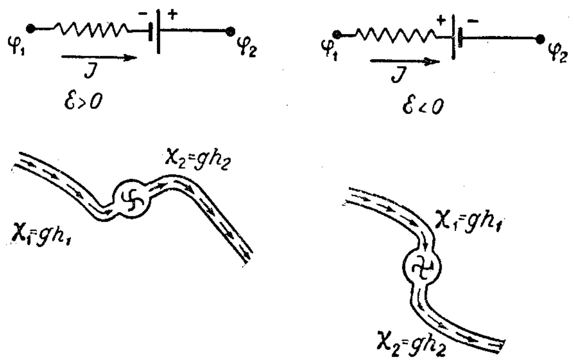

Рис. 92

ной работе. Полагают $\mathcal{E} > 0$, если она повышает потенциал в направлении протекания тока (увеличивает потенциальную энергию зарядов) и наоборот. На рис. 92 изображены оба случая. Для наглядности картина протекания тока сопровождается картиной протекания жидкости. Аналогом электростатического поля служит гравитационное поле, а аналогом сторонних сил — силы, действующие на жидкость в насосе.

Иногда знак э. д. с. выносят и пишут

$$J = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 \pm |\mathcal{E}|}{R + r}, \quad \text{или} \quad J = \frac{U \pm |\mathcal{E}|}{R + r}. \tag{3}$$

Полезно помнить, что на участке, где действуют только кулоновские силы, ток течет от точки с бо́льшим к точке с меньшим потенциалом. В области действия сторонних сил это необязательно.

Из (3) следуют частные случаи:

а) однородный участок цепи (действуют силы одного рода — кулоновские); поскольку при этом $\mathcal{E} = 0$ и $r = 0$, то

$$J = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R}, \quad \text{или} \quad J = \frac{U}{R};$$

б) замкнутая цепь (точка *1* соединена с точкой *2*). При этом $\varphi_1 - \varphi_2 = U = 0$ и

$$J = \frac{\mathscr{E}}{R + r}.$$

Предостережем читателя от часто встречающегося неверного утверждения о том, что для протекания тока нужна разность потенциалов и замкнутая цепь. Как видно из закона Ома, ток может течь и в отсутствие разности потенциалов (достаточно наличия $\mathscr{E}$) и в незамкнутой цепи.

Для протекания тока в среде с сопротивлением (исключаются из рассмотрения движения заряженных частиц по инерции, например, в некоторых участках космоса) необходимо:

1) наличие поля $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{к} + \mathbf{E}_{ст} \neq 0$ (или, что эквивалентно, $\varphi_1 - \varphi_2 + \mathscr{E} \neq 0$),

2) наличие зарядов, способных перемещаться на макроскопические расстояния — носителей тока $\left(\text{или, что все равно, } \frac{1}{\rho} = \lambda \neq 0\right)$.

§ 3. Магнитное поле постоянного тока

1. Как показывают опыты, если заряды движутся относительно системы отсчета, то сила взаимодействия между ними не описывается полностью законом Кулона; нужна поправка тем большая, чем больше скорости зарядов относительно системы отсчета. Мало того, электронейтральные системы способны взаимодействовать меж собой весьма заметным образом, причем это взаимодействие и не гравитационное, разумеется, и не электрическое (не кулоново).

Примером такого взаимодействия служит взаимодействие проводников с током. Этот вид взаимодействия называется магнитным и его удается отделить от кулоновского (электрического) взаимодействия, если проводники электронейтральны и по ним течет постоянный ток $J \neq J(t)$. Тем самым создается возможность подробно и без помех изучить это взаимодействие.

Поскольку причиной этого взаимодействия являются движущиеся относительно системы отсчета заряды (токи), то и исследовать его надо с помощью движущихся зарядов (токов).

Если полагать, что ток создает некоторое поле (его называют магнитным), то интересно знать характеристику этого поля в каждой точке (малой области), а для этого необходимо малое пробное тело с током. За такое тело удобно брать виток с током. Оказывается при этом, что характер взаимодействия такого витка с исследуемым полем зависит от его магнитного момента, *определяемого равенством*

$$d\mathbf{p}_м = J\, d\mathbf{S},$$

где J — ток, текущий по витку; $\mathbf{dS}$ — вектор площадки, охваченной контуром проводника; направление ее определяется правилом правого буравчика (рис. 93).

Если такой виток поместить в магнитное поле, то под действием только этого поля его магнитный момент $\mathbf{dp}_м$ ориентируется в каждой точке этого поля единственным образом. Это направление и *принято* считать направлением исследуемого магнитного поля в данной точке.

Далее, если в некоторую точку поля помещать разные витки, различным образом ориентированные по отношению к направлению поля, то оказывается, что на витки действуют разворачивающие его механические моменты $\mathbf{dM}$, причем для $dp_1 \neq dp_2 \neq \ldots \neq dp_N$ и $\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \ldots \neq \alpha_N$ имеет место $dM_1 \neq dM_2 \neq \ldots \neq dM_N$.

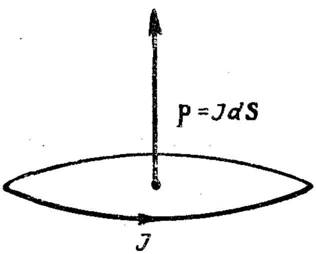

Рис. 93

Величина же $\frac{dM_j}{dp_j \sin \alpha_j}$ постоянна для данной точки данного поля. Величину, модуль которой определяется этим отношением, т. е. величиной $\frac{dM}{dp_м \sin \alpha}$, называют *вектором магнитной индукции в данной точке исследуемого поля* и обозначают буквой $\mathbf{B}$. Направление этого вектора мы уже определили как то, в котором указывает вектор $\mathbf{dp}_м$, подтвержденный действию только этого магнитного поля. Из $B = \frac{dM}{dp_м \sin \alpha}$ следует $dM = dp_м B \sin \alpha$ или с учетом направлений векторов $d\mathbf{M}$, $\mathbf{dp}_м$ и $\mathbf{B}$

$$d\mathbf{M} = \mathbf{dp}_м \times \mathbf{B}.$$

Это равенство называют *законом Ампера для витка с током.*

2. Менее удобно для экспериментаторов, но часто употребляемой формулой закона Ампера является

$$d\mathbf{F} = J\,\mathbf{dl} \times \mathbf{B},$$

где J — ток в трубке тока; $\mathbf{dl}$ — элемент ее, находящийся в магнитном поле $\mathbf{B}$; $d\mathbf{F}$ — сила, действующая на этот элемент со стороны исследуемого поля.

Неудобство этой формулы для экспериментаторов обусловлено тем, что довольно трудно отделить действие силы $d\mathbf{F}$ на элемент $\mathbf{dl}$ от действия сил на этот же $\mathbf{dl}$ со стороны граничащих с ним участков проводника. Однако этой формуле можно придать удобный для экспериментальной проверки вид, сделав ее пригодной для вычисления силы, действующей на отдельный заряд dQ, движущийся в поле $\mathbf{B}$. Именно, если за время dt через некоторое сечение трубки тока переместится заряд dQ, то при этом каждый из зарядов за это же время переместится на $\mathbf{dl}$; поэтому

$$J = \frac{dQ}{dt} = \frac{dQ}{\frac{dl}{v}} = \frac{dQ}{dl} v$$

и, значит,

$$d\mathbf{F} = J\,\mathbf{dl} \times \mathbf{B} = \frac{dQ}{dl} v\,\mathbf{dl} \times \mathbf{B} = \frac{dQ}{dl}\,\mathbf{dl}\,\mathbf{v} \times \mathbf{B} = dQ\,\mathbf{v} \times \mathbf{B}.$$

Может быть более простым является другой вывод:

$$\mathbf{dF} = J\,\mathbf{dl} \times \mathbf{B} = \frac{dQ}{dt}\,\mathbf{v}\,dt \times \mathbf{B} = dQ\,\mathbf{v} \times \mathbf{B}.$$

Эту силу называют *силой Лоренца* и записывают в виде

$$d\mathbf{F}_{Л} = dQ\mathbf{v} \times \mathbf{B}.$$

Часто вместо dQ пишут просто Q, разумея под ним точечный заряд; тогда для силы Лоренца получается выражение

$$\mathbf{F}_{Л} = Q\mathbf{v} \times \mathbf{B}. \qquad (1)$$

3. Видно, что для нахождения силы, действующей на движущийся в магнитном поле заряд, надо уметь находить $\mathbf{B}$.

Как сумели угадать Био, Саввар и Лаплас, каждый элемент $\mathbf{dl}$ весьма узкой трубки тока вносит в общее поле $\mathbf{B}$, созданное всей трубкой, вклад $d\mathbf{B}$, определяемый равенством:

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{J\mathbf{r} \times \mathbf{dl}}{r^3},$$

где J — ток в трубке тока (в проводнике); $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, проведенный из интересующей нас точки к элементу $\mathbf{dl}$ (рис. 94); μ_0 — некоторая константа, значение которой определяется выбором системы единиц и называемая магнитной проницаемостью вакуума; $\frac{1}{4\pi}$ — введено,

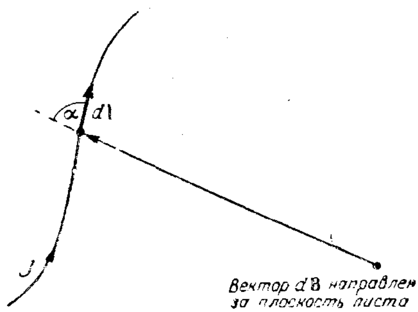

Рис. 94

как и в предыдущих случаях, для удобства и для подчеркивания осевой (а в законе тяготения и законе Кулона — сферической) симметрии поля, созданного элементарным источником поля ($d\mu$, dQ или $J\mathbf{dl}$).

Совершенно очевидно, что в такой дифференциальной форме закон не может быть подвергнут опытной проверке, ибо на опыте невозможно в принципе измерять вклад $d\mathbf{B}$ — любой прибор измеряет только суммарное, результирующее поле. Но в интегральной форме, т. е. в виде

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{J\mathbf{r} \times \mathbf{dl}}{r^3}$$

закон опытной проверке поддается. Кстати, обычно в интегральной форме им и пользуются при практических расчетах.

4. От дифференциальной формы закона Био-Соввара-Лапласа нетрудно перейти к форме, отображающей поле, созданное точечным зарядом dQ, который движется со скоростью $\mathbf{v}$ относительно системы отсчета. Действительно:

$$d\mathbf{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{J\mathbf{r}\times\mathbf{dl}}{r^3}=\frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{\frac{dQ}{dt}\mathbf{r}\times\mathbf{v}\,dt}{r^3}=\frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{dQ\,\mathbf{r}\times\mathbf{v}}{r^3}.$$

Часто вместо dQ пишут Q, тогда

$$\mathbf{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Q\mathbf{r}\times\mathbf{v}}{r^3}. \qquad (2)$$

Если в (1) подставить (2), то получим для зарядов Q_i и Q_j, движущихся со скоростями $\mathbf{v}_i$ и $\mathbf{v}_j$ по отношению к системе отсчета (рис. 95)

$$\mathbf{F}_{ij}=\frac{\mu_0 Q_i Q_j}{4\pi r_{ij}^3}\mathbf{v}_i\times\mathbf{r}_{ij}\times\mathbf{v}_j,$$

$$\mathbf{F}_{ji}=\frac{\mu_0 Q_j Q_i}{4\pi r_{ji}^3}\mathbf{v}_j\times\mathbf{r}_{ji}\times\mathbf{v}_i.$$

Как следует из этих формул, $\mathbf{F}_{ij}$ и $\mathbf{F}_{ji}$, вообще говоря, не направлены навстречу друг другу. $\mathbf{F}_{ij}=-\mathbf{F}_{ji}$ лишь при $\mathbf{v}_i \parallel \mathbf{v}_j$. Рис. 95 иллюстрирует сказанное.

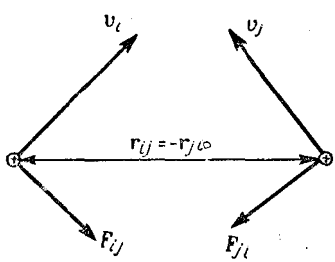

Рис. 95

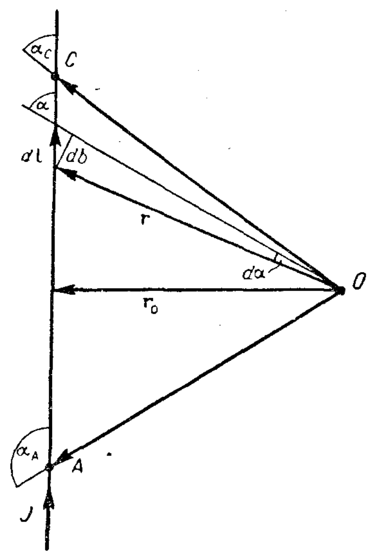

Рис. 96

5. Подсчитаем поле $\mathbf{B}$, созданное отрезком прямой тонкой трубки тока. Из рис. 96 видно, что поле, созданное отрезком AC, около точки O направлено за плоскость чертежа и, как видно из рисунка, по модулю равно:

$$|\mathbf{B}|=\int_A^C |d\mathbf{B}|=\int_A^C \frac{\mu_0}{4\pi}J\frac{r\,dl\,|\sin\alpha|}{r^3}=\frac{\mu_0 J}{4\pi}\int_A^C\frac{dl\,|\sin\alpha|}{r^2}=$$

$$=\frac{\mu_0 J}{4\pi}\int_A^C\frac{db}{r^2}=\frac{\mu_0 J}{4\pi}\int_A^C\frac{r\,|d\alpha|}{r^2}=\frac{\mu_0 J}{4\pi}\int_A^C\frac{d\alpha}{r}=$$

$$=\frac{\mu_0 J}{4\pi}\int_A^C\frac{|d\alpha|\,|\sin\alpha|}{r_0}=\frac{\mu_0 J}{4\pi r_0}|\cos\alpha_C-\cos\alpha_A|.$$

Вводя орт $\boldsymbol{\tau}$, направленный по $d\mathbf{l}$, получим

$$\mathbf{B}=\frac{\mu_0 J}{4\pi r_0^2}(\cos\alpha_C-\cos\alpha_A)\,\mathbf{r}_0\times\boldsymbol{\tau}.$$

В случае точек, близких к середине отрезка AC (для которых трубка AC «бесконечно» длинна), $\alpha_C=0$, $\alpha_A=\pi$ и, значит,

$$\mathbf{B}=\frac{\mu_0 J}{2\pi r_0^2}\,\mathbf{r}_0\times\boldsymbol{\tau}.$$

6. Подсчитаем поле витка на его оси (рис. 97). Удобнее это сделать, подсчитывая вклад в $\mathbf{B}$, внесенный одинаковыми dl, находящимися на противоположных концах диаметра. Тогда

$$d\mathbf{B}=d\mathbf{B}_1+d\mathbf{B}_2=2\,|dB_1|\cos\alpha\,\mathbf{n},$$

где $\mathbf{n}$ — орт, направленный по оси витка вверх. Ясно, что

$$\mathbf{B}=\frac{1}{2}\oint d\mathbf{B}=\oint|dB_1|\cos\alpha\,\mathbf{n}=\mathbf{n}\oint|dB_1|\frac{R}{r}=$$
$$=\mathbf{n}\oint\frac{\mu_0 J\,dl_1\,r}{4\pi r^3}\cdot\frac{R}{r}=\mathbf{n}\frac{\mu_0 JR}{4\pi r^3}\oint dl_1=\mathbf{n}\frac{\mu_0 J2\pi R^2}{4\pi r^3},$$

где учтено, что угол между $d\mathbf{l}_1$ и $\mathbf{r}$ равен $\frac{\pi}{2}$. Поскольку мы считали поле от Jdl_1 и Jdl_2 совместно, то перед интегралом и стоит множитель $\frac{1}{2}$; поэтому окончательно

$$\mathbf{B}=\frac{\mu_0 J\pi R^2}{2\pi r^3}\,\mathbf{n}=\frac{\mu_0 JS\,\mathbf{n}}{2\pi r^3}=\frac{\mu_0\mathbf{p}_\text{м}}{2\pi r^3}.$$

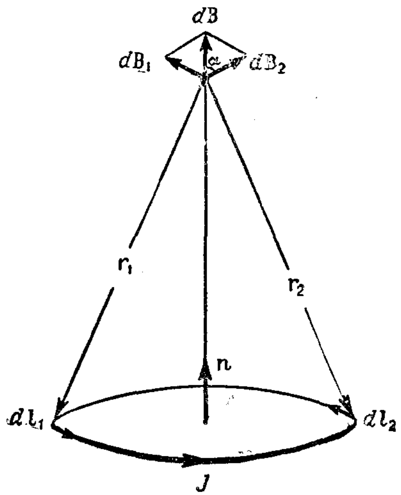

Рис. 97

Заметим, что на большом расстоянии от витка (магнитного диполя) поле $\mathbf{B}$ дается формулой (приводится без вывода):

$$\mathbf{B}=-\frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{\mathbf{p}_\text{м}}{r^3}-\frac{3(\mathbf{p}_\text{м}\mathbf{r})}{r^5}\,\mathbf{r}\right].$$

Эта формула весьма сходна с формулой для поля $\mathbf{E}$, созданного электрическим диполем вдали от него.

7. Можно показать, что аналогия между электрическим диполем с моментом $\mathbf{p}_\text{э}$ и витком с моментом $\mathbf{p}_\text{м}$ простирается дальше:

а) на магнитный момент $\mathbf{p}_\text{м}$ действует со стороны неоднородного поля сила, втягивающая его в область, где поле больше;

б) на магнитный момент $\mathbf{p}_\text{м}$ действует со стороны поля момент сил $\mathbf{M}=\mathbf{p}_\text{м}\times\mathbf{B}$;

в) магнитный момент $\mathbf{p}_м$ обладает в поле $\mathbf{B}$ энергией положения

$$U = -\mathbf{p}_м\mathbf{B}.$$

§ 4. Прецессия магнитного момента в магнитном поле

Рассмотрим подробней воздействие магнитного поля на виток с током. Учтем при этом, что движущиеся по витку заряды обладают некоторым моментом количества движения $\mathbf{L} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}$ по отношению к оси витка. При этом, если ток в витке обусловлен движением положительных зарядов, то $\mathbf{p}_м \uparrow\uparrow \mathbf{L}$, а в противном случае $\mathbf{p}_м \uparrow\downarrow \mathbf{L}$. Рассмотрим для определенности случай $\mathbf{p}_м \uparrow\uparrow \mathbf{L}$.

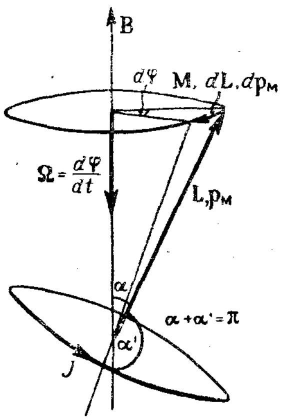

Рис. 98

Из определения $\mathbf{B}$ следует

$$\mathbf{M} = \mathbf{p}_м \times \mathbf{B},$$

а по закону изменения момента импульса

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}$$

и, следовательно,

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{p}_м \times \mathbf{B}. \qquad (1)$$

Отсюда видно, что $\frac{d\mathbf{L}}{dt}$ будет все время перпендикулярно $\mathbf{p}_м$ и $\mathbf{B}$. Но это означает, что вектор $\mathbf{L}$ (а значит, и вектор $\mathbf{p}_м$) будет вращаться вокруг $\mathbf{B}$. Действительно, вектор $\frac{d\mathbf{L}}{dt}$, перпендикулярный вектору $\mathbf{p}_м$, согласно (1) будет перпендикулярен также и вектору $\mathbf{L}$ в силу $\mathbf{L} \uparrow\uparrow \mathbf{p}_м$. Но если $\frac{d\mathbf{L}}{dt} \perp \mathbf{L}$, то это означает, что $\mathbf{L}$ меняется только по направлению, т. е. вращается. Поскольку из (1) видно, что $\frac{d\mathbf{L}}{dt} \perp \mathbf{B}$, то это вращение и будет происходить вокруг $\mathbf{B}$. Найдем угловую скорость Ω этого вращения, называемого прецессией векторов $\mathbf{p}_м$ и $\mathbf{L}$ вокруг вектора магнитной индукции $\mathbf{B}$.

Из рис. 98 видно, что модуль изменения вектора $\mathbf{L}$ за время dt определится равенством

$$|d\mathbf{L}| = |L \sin\alpha' \, d\varphi|.$$

Деля это равенство на dt, получим

$$\left|\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right| = \left|L \sin\alpha' \frac{d\varphi}{dt}\right|. \qquad (2)$$

Но $\frac{d\varphi}{dt}$ есть угловая скорость вращения вектора $\mathbf{L}$ вокруг $\mathbf{B}$.

Обозначая $\frac{d\varphi}{dt} = \Omega$ и сравнивая по модулю правые части (1) и (2), получим с учетом $\sin\alpha' = \sin\alpha$

$$L \sin\alpha' \, \Omega = p_м \sin\alpha \, B. \qquad (3)$$

Это равенство можно записать в векторном виде:

$$\mathbf{L} \times \mathbf{\Omega} = -\mathbf{p}_м \times \mathbf{B},$$

откуда в силу $\mathbf{L} \uparrow\uparrow \mathbf{p}_м$ следует $\mathbf{\Omega} \uparrow\downarrow \mathbf{B}$. Из (3) можно определить при желании Ω — модуль угловой скорости вращения векторов $\mathbf{p}_м$ и $\mathbf{L}$. Направление этой скорости, как видно из рис. 98, противоположно направлению $\mathbf{B}$.

Таким образом, заряды, двигающиеся по витку с некоторой угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$, будут еще участвовать во вращении вокруг $\mathbf{B}$ вместе с витком, а значит, их результирующая скорость вращения будет определяться равенством (рис. 99).

$$\vec{\omega}_{рез} = \boldsymbol{\omega} + \mathbf{\Omega}.$$

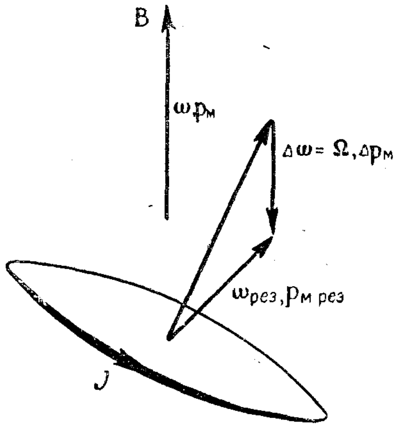

Рис. 99

Но изменение угловой скорости движения зарядов на $\mathbf{\Omega}$ ведет к изменению магнитного момента $\mathbf{p}_м$ на $\Delta\mathbf{p}_м$. Значит, виток с током, помещенный в магнитное поле $\mathbf{B}$, при взаимодействии с этим полем получает добавочный магнитный момент $\Delta\mathbf{p}_м$. Эта добавка имеет в случае тока, обусловленного положительными зарядами, такое же направление, как и $\mathbf{\Omega}$ и, значит, направлена навстречу $\mathbf{B}$. Если ток в витке обусловлен движением отрицательных зарядов, то $\mathbf{p}_м \uparrow\downarrow \mathbf{L}$ и из $\mathbf{L} \times \mathbf{\Omega} = -\mathbf{p}_м \times \mathbf{B}$ следует $\mathbf{\Omega} \uparrow\uparrow \mathbf{B}$, а так как при движении отрицательных зарядов $\mathbf{p}_м \uparrow\downarrow I\boldsymbol{\omega}$, то и изменение $\mathbf{p}_м$ направлено навстречу $\Delta\boldsymbol{\omega}$, т. е. навстречу $\mathbf{\Omega}$. Читатель, сделав аккуратный рисунок, может убедиться в том, что это именно так.

Таким образом, во всех случаях помещенный в магнитное поле $\mathbf{B}$ магнитный момент $\mathbf{p}_м$ получает добавку $\Delta\mathbf{p}_м \uparrow\downarrow \mathbf{B}$.

§ 5. Электромагнитная индукция. Закон Фарадея

Ранее уже говорилось о том, что электрическое поле может создаться не только нескомпенсированными неподвижными зарядами («кулоновское» поле), но и другими причинами. Такие «некулоновские» электрические поля часто называют «сторонними».

Как установил Фарадей, такие поля возникают в двух случаях: 1) при наличии переменного во времени магнитного поля,

2) при движении относительно той системы отсчета, в которой имеется какое-нибудь (даже постоянное) магнитное поле.

Проще всего в этом убедиться, поместив в переменное магнитное поле неподвижный проводящий контур или как-нибудь деформируя этот контур в постоянном (например) магнитном поле. В контуре потечет ток. Воспользовавшись законом Ома, нетрудно найти э. д. с. этого поля в контуре

$$\mathscr{E} = Jr,$$

где J — ток в контуре, а r — сопротивление контура. Сразу же сделаем оговорку о том, что наличие материального контура (например, проводника) вовсе не обязательно. Поле $\mathbf{E}_{\text{ст}}$ возникает не в контуре, а в любой точке пространства, в которой имеется переменное **B**. Проводящий же контур просто позволяет легко обнаруживать возникшее электрическое поле.

Явление возникновения таких «сторонних» электрических полей называется *электромагнитной индукцией*. Оно описывается законом Фарадея — одним из основных законов электродинамики. Он гласит:

При всяком изменении магнитного потока (потока вектора магнитной индукции B) сквозь поверхность, опирающуюся на замкнутый контур, в нем возникает э. д. с. индукции, пропорциональная скорости изменения этого потока.

В математической формулировке этот закон имеет вид

$$\mathscr{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

или

$$\oint \mathbf{E}_{\text{ст}}\, d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt}\iint_S \mathbf{B}\, d\mathbf{S},$$

где $\mathscr{E} = \oint \mathbf{E}_{\text{ст}}\, d\mathbf{l}$ — э. д. с. «сторонних» сил, показывающая, какую работу совершает «стороннее» поле по переносу единицы количества электричества по замкнутому контуру l. $\Phi_B = \iint_S \mathbf{B}\, d\mathbf{S}$ — магнитный поток (поток вектора **B**) сквозь поверхность, натянутую на этот контур. $\frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{d}{dt}\iint_S \mathbf{B}\, d\mathbf{S}$ — быстрота изменения этого потока.

Направление обхода контура (направление элемента $d\mathbf{l}$) выбирают произвольно, но при этом направление вектора $d\mathbf{s}$ определяется правилом буравчика.

Необходимо помнить, что э. д. с. индукции возникает в контуре, как за счет переменного **B**, т. е. за счет $\frac{d\mathbf{B}}{dt}$ в пределах контура, так и за счет $\frac{d\mathbf{S}}{dt}$ — изменения поверхности S при деформациях контура l, т. е. за счет $\frac{d\mathbf{S}}{dt} \neq 0$. Проще всего это увидеть в случае плоского контура, в пределах которого **B** существенно от места к месту не меняется. Тогда

$$\frac{d}{dt}\iint_S \mathbf{B}\,d\mathbf{S} = \frac{d}{dt}\mathbf{B}\iint_S d\mathbf{S} = \frac{d}{dt}\mathbf{B}\cdot\mathbf{S}$$

и, значит,

$$\mathscr{E} = -\frac{d}{dt}\mathbf{BS} = -\left(\frac{d\mathbf{B}}{dt}\,\mathbf{S} + \mathbf{B}\,\frac{d\mathbf{S}}{dt}\right). \qquad (1)$$

Первое слагаемое справа отображает возникновение э. д. с. индукции за счет $\frac{d\mathbf{B}}{dt} \neq 0$, а второе — за счет $\frac{d\mathbf{S}}{dt} \neq 0$. На рис. 100

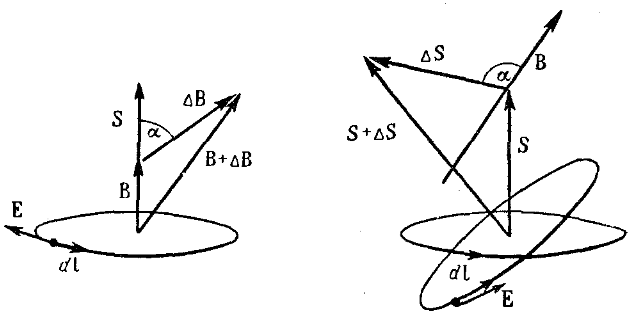

Рис. 100

приведены примеры возникновения э. д. с.

В более общем случае произвольного поля **B**, пронизывающего произвольный контур l, имеет место равенство

$$\mathscr{E} = \oint \mathbf{E}_{\text{ст}}\,d\mathbf{l} = -\iint_S \frac{d\mathbf{B}}{dt}\,d\mathbf{S} - \iint_{\Delta S} \mathbf{B}\,\frac{d^2\mathbf{S}}{dt}, \qquad (2)$$

где $d\mathbf{S}$ — элемент плоской поверхности, натянутой на плоский контур, $\frac{d^2\mathbf{S}}{dt}$ — быстрота изменения площади контура за счет движения элемента $d\mathbf{l}$ при деформациях контура или его движения в целом; $\Delta\mathbf{S}$ — изменение поверхности натянутой на контур при его деформации или движении в целом; $\frac{d\mathbf{B}}{dt}$ — быстрота изменения поля **B** в пределах элемента $d\mathbf{S}$, **B** — поле около элемента контура $d\mathbf{l}$.

Смысл интегралов в правой части равенства (2) тот же, что и у слагаемых в правой части равенства (1).

Поскольку для кулоновского поля $\oint \mathbf{E}_{\text{к}}d\mathbf{l} = 0$, то добавка такого слагаемого к левой части закона Фарадея, естественно, его не нарушит; однако левая часть его примет вид

$$\oint \mathbf{E}_{\text{ст}}\, d\mathbf{l} + \oint \mathbf{E}_{\text{к}}\, d\mathbf{l} = \oint (\mathbf{E}_{\text{ст}} + \mathbf{E}_{\text{к}})\, d\mathbf{l} = \oint \mathbf{E}\, d\mathbf{l}$$

и обычно закон Фарадея пишут в виде

$$\oint \mathbf{E}\, d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt}\iint_S \mathbf{B}\, d\mathbf{S}.$$

Знак «минус» отображает правило Ленца:

Индукционный ток, возникший в контуре, создает свой магнитный поток, препятствующий изменению того магнитного потока, который вызвал этот индукционный ток.

По существу изложенным выше и исчерпывается содержание закона Фарадея.

Надо отметить, однако, один существенный недостаток закона Фарадея в приведенной формулировке. Дело в том, что закон Фарадея в такой форме (в интегральной форме) не учитывает того существенного факта, что всякие изменения в чем-либо материальном (например, в силовом поле), всякая передача чего-либо материального происходят не мгновенно, а с некоторой конечной скоростью c. (Об этом уже говорилось в связи с принципом Галилея.) Применительно к закону Фарадея факт конечности скорости распространения возмущений в поле приводит к следующему.

Пусть в некоторой точке O за время от t до $t+dt$ магнитное поле изменилось на $d\mathbf{B}$. За время dt это изменение в поле способно переместиться на расстояние $c\,dt$ от точки O. Если линейные размеры интересующего нас контура больше, чем $c\,dt$, то до него изменения поля $\mathbf{B}$ не успеют дойти за время dt, и, значит, в нем никакой э. д. с. возникнуть не может в течение времени от t до $t+dt$, а возникнет лишь спустя время $\frac{\Delta r}{c}$, где Δr — расстояние от точки O до элемента контура $d\mathbf{l}$. Мало того, если контур не есть окружность с центром в O, то в разных частях контура в один и тот же момент времени будут возникать разные $\mathbf{E}$. Кроме этого, информация об измерениях $\mathbf{E}$ в разных частях контура до наблюдателя (или соответствующих приборов) будет приходить не в момент времени от t до $t+dt$, а в другие моменты, разные для разных участков контура. Из сказанного следует, что для контуров, линейные размеры которых сравнимы с величиной $c\,dt$ или больше $c\,dt$, закон Фарадея в указанной форме неприменим, поскольку в этом случае совершенно неясно, в какой момент времени надо считать интегралы в левой и правой частях. Очевидно, однако, что этот закон будет верным для случая, когда размеры контура ничтожны по сравнению с $c\,dt$. Но это означает необходимость формулировки закона электромагнитной индукции в дифференциальной форме, в форме, описывающей явление в «точке» (в элементарно малой области, линейные размеры которой пренебрежимы в сравнении с $c\,dt$). Это и было в прошлом веке сделано Джеймсом Кларком Максвеллом, сумевшим написать свои знаменитые уравнения, о которых ниже будет идти речь.

Как показывают опыты, магнитное поле **B** порождается не только движущимися зарядами, но и переменным во времени электрическим полем. Симметрии ради с электромагнитной индукцией это явление можно было бы назвать магнитоэлектрической индукцией. Описывается оно уравнением

$$\oint \mathbf{B}\,d\mathbf{l} = \frac{d}{dt}\iint_S \varepsilon_0\mu_0\,\mathbf{E}\,d\mathbf{S}.$$

§ 6. Уравнения Максвелла

Подобно тому как с помощью уравнений Ньютона можно решить любую задачу о механическом движении тела (при заданных начальных и граничных условиях), так и любая задача электродинамики решается с помощью уравнений Максвелла (при заданных начальных и граничных условиях). Эти уравнения имеют в интегральной форме вид

$$\oint \mathbf{E}\,d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt}\iint_S \mathbf{B}\,d\mathbf{S}, \tag{1}$$

$$\oiint \mathbf{E}\,d\mathbf{S} = \iiint_V \rho\,dV, \tag{2}$$

$$\oint \mathbf{B}\,d\mathbf{l} = \frac{d}{dt}\iint_S \varepsilon_0\mu_0\,\mathbf{E}\,d\mathbf{S} + \iint_S \mu_0\mathbf{j}\,d\mathbf{S}, \tag{3}$$

$$\oiint \mathbf{B}\,d\mathbf{S} = 0. \tag{4}$$

В такой форме они, как уже говорилось выше, из-за конечности скорости распространения сигналов c неверны и их пишут обычно в дифференциальной форме, т. е. для очень малой области (для «точки»).

Рассмотрим небольшую площадку, вектор которой $\Delta\mathbf{S}$ направлен в первый октант осей координат. В этом случае проекции $\Delta\mathbf{S}$ на оси координат будут положительными и соответственно равны (рис. 101)

$$\Delta S_x = \Delta y\Delta z;\quad \Delta S_y = \Delta x\Delta z,\quad \Delta S_z = \Delta x\Delta y,$$

где Δx, Δy и Δz положительны. Составляющие вектора $\Delta\mathbf{S}$ будут иметь в этом случае такие же направления, как орты **i**, **j**, **k**. При так выбранной площадке $\Delta\mathbf{S}$ направления обходов площадок $\Delta\mathbf{S}_i$, $\Delta\mathbf{S}_j$ и $\Delta\mathbf{S}_k$ в соответствии с правилом буравчика должны быть такими, как указано на рис. 101. Если площадка мала и не деформируется, то

$$\frac{d}{dt}\iint \mathbf{B}d\mathbf{S} = \frac{d}{dt}(\mathbf{B}\Delta\mathbf{S}) = \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\Delta\mathbf{S}. \tag{5}$$

(Замена $\frac{d}{dt}$ на $\frac{\partial}{\partial t}$ обусловлена тем, что площадка зафиксирована и, значит, поток через нее меняется за счет изменения вектора **B** только со временем в зафиксированном месте.)

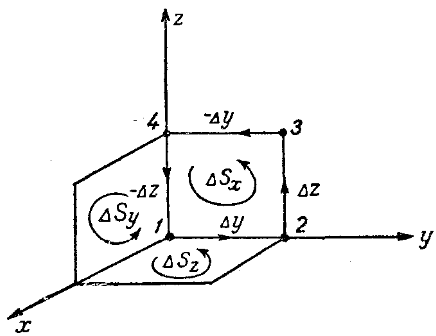

Рис. 101

Очевидно, поток вектора $\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$ через площадку $\Delta\mathbf{S}_x$ будет равен $\frac{\partial B_x}{\partial t}\Delta S_x = \frac{\partial B_x}{\partial t}\Delta y\Delta z$. С учетом (5) эта же величина равна изменению потока вектора **B** через площадку $\Delta\mathbf{S}_x$. Таким образом,

$$\frac{d}{dt}\iint\limits_{\Delta S_x} \mathbf{B}\,d\mathbf{S} = \frac{d}{dt}(B_x\Delta S_x) = \frac{\partial B_x}{\partial t}\Delta y\Delta x. \tag{6}$$

Подсчитаем величину $\oint \mathbf{E}d\mathbf{l}$ вдоль контура 1 — 2 — 3 — 4, ограничивающего площадку $\Delta\mathbf{S}_x$:

$$\oint\limits_{1-2-3-4} \mathbf{E}\,d\mathbf{l} = (E_y)_{1,2}\Delta y_{1,2} + (E_z)_{2,3}\Delta z_{2,3} + (E_y)_{3,4}\Delta y_{3,4} + (E_z)_{4,1}\Delta z_{4,1}.$$

Но $\Delta y_{1,2} = -\Delta y_{3,4}$ и $\Delta z_{2,3} = -\Delta z_{4,1}$. Обозначая $\Delta y_{1,2} = -\Delta y_{3,4} = \Delta y$ и $\Delta z_{2,3} = -\Delta z_{4,1} = \Delta z$, получим

$$\oint\limits_{1-2-3-4} \mathbf{E}d\mathbf{l} = [(E_y)_{3,4} - (E_y)_{1,2}](-\Delta y) + [(E_z)_{2,3} - (E_z)_{4,1}](\Delta z).$$

Так как $(E_y)_{3,4}$ отличается от $(E_y)_{1,2}$ только за счет изменения координаты z, а $(E_z)_{2,3}$ от $(E_z)_{4,1}$ только за счет изменения координаты y, то по определению частной производной

$$[(E_y)_{3,4}-(E_y)_{1,2}]=\frac{\partial E_y}{\partial z}\Delta z \text{ и } [(E_z)_{2,3}-(E_z)_{4,1}]=\frac{\partial E_z}{\partial y}\Delta y$$

и, значит,

$$\int\limits_{1-2-3-4}\mathbf{E}\,d\mathbf{l}=\left(\frac{\partial E_y}{\partial z}\Delta z\right)(-\Delta y)+\left(\frac{\partial E_z}{\partial y}\Delta y\right)\Delta z=\left(\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\Delta y\Delta z. \tag{7}$$

По равенству (1) имеем

$$\oint\limits_{1-2-3-4}\mathbf{E}\,d\mathbf{l}=-\frac{d}{dt}\iint\limits_{\Delta S_x}\mathbf{B}\,d\mathbf{S}.$$

Подставляя сюда $\oint\limits_{1-2-3-4}\mathbf{E}\,d\mathbf{l}$ из (7), а $\frac{d}{dt}\iint\limits_{\Delta S_x}\mathbf{B}\,d\mathbf{S}$ из (6) и сокращая на $\Delta y\Delta z$, получим

$$\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}=-\frac{\partial B_x}{\partial t}. \tag{8}$$

Рассматривая аналогичным образом поток вектора $\mathbf{B}$ сквозь площадки $\Delta\mathbf{S}_y$ и $\Delta\mathbf{S}_z$, а также циркуляцию вектора $\mathbf{E}$ вдоль ограничивающих их контуров, мы получили бы

$$\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}=-\frac{\partial B_y}{\partial t}, \tag{9}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}=-\frac{\partial B_z}{\partial t}. \tag{10}$$

Умножая равенства (8), (9), (10) на орты $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ соответственно и складывая, получим

$$\left(\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\mathbf{i}+\left(\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\mathbf{j}+\left(\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\mathbf{k}=-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \tag{11}$$

Стоящий в левой части равенства (11) вектор принято называть *ротором* (*вихрем*) вектора $\mathbf{E}$ и обозначать символом $\operatorname{rot}\mathbf{E}$, а тогда равенство (11) запишется в виде

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}=-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \tag{12}$$

Согласно (14) и (8)—(10), проекции $\operatorname{rot}\mathbf{E}$ на оси x, y, z суть величины, показывающие, какая циркуляция вектора $\mathbf{E}$ приходится на контур, охватывающий единичную малую площадку ΔS_x, ΔS_y и ΔS_z соответственно.

Очевидно, уравнение (3) аналогичными рассуждениями сведется к уравнению

$$\operatorname{rot}\mathbf{B}=\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}+\mu_0\mathbf{j}. \qquad (13)$$

Рассмотрим теперь столь малый объем ΔV, что в его пределах плотность зарядов ρ не меняется. Тогда уравнение (2) примет вид

$$\oint\!\!\!\oint \mathbf{E}\,d\mathbf{S}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}\Delta V \quad \text{или} \quad \frac{\oint\!\!\oint \mathbf{E}\,d\mathbf{S}}{\Delta V}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

Стоящая слева величина показывает, какой поток вектора $\mathbf{E}$ пронизывает поверхность, ограничивающую малый единичный объем. Эту величину принято обозначать символом $\operatorname{div}\mathbf{E}$. Тогда это равенство можно записать в символическом виде

$$\operatorname{div}\mathbf{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}. \qquad (14)$$

Можно показать, что $\operatorname{div}\mathbf{E}=\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}$. Уравнение (4) запишется в виде

$$\operatorname{div}\mathbf{B}=0. \qquad (15)$$

С учетом сказанного уравнения Максвелла запишем в виде

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t},\quad \operatorname{rot}\mathbf{B}=\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}+\mu_0\mathbf{j},$$

$$\operatorname{div}\mathbf{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0},\quad \operatorname{div}\mathbf{B}=0.$$

В случае необходимости к этим уравнениям дописывают закон Ома

$$\mathbf{j}=\lambda\mathbf{E}$$

(который, однако, в вакууме не справедлив) и уравнение движения заряженной частицы (второй закон Ньютона)

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}=q\mathbf{E}+q\mathbf{v}\times\mathbf{B}=q(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B}).$$

В уравнениях Максвелла заключена вся информация о классических электромагнитных явлениях (при известных, конечно, начальных и граничных условиях для входящих в эти уравнения величин $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$).

Всю классическую электродинамику можно было бы получить, постулировав эти уравнения. При этом нужно было только определить смысл входящих сюда величин. Никакой надобности в законах Кулона, Био — Саввара — Лапласа, Фарадея и т. д. не было бы, ибо все они содержатся в указанных уравнениях. В этом смысле уравнения Максвелла следовало бы считать законами природы и называть их законами электродинамики.

Эти уравнения позволяют в частности:

I. По известному распределению зарядов $\rho(\mathbf{r}, t)$ и токов $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ найти $\mathbf{E}(\mathbf{r}', t')$ и $\mathbf{B}(\mathbf{r}', t')$, где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор области dV, в которой имеется заряд и ток плотности ρ и $\mathbf{j}$ соответственно; $\mathbf{r}'$ — радиус-вектор той области dV', где нас интересует и $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$; t — момент времени, в который в объеме dV плотность заряда и тока равны ρ и $\mathbf{j}$ соответственно; t' — момент времени, в который в объеме dV' скажется поле, созданное зарядами и токами объема dV в момент t.

Ясно, что в силу того, что поле распространяется со скоростью c, имеет место $|\mathbf{r}' - \mathbf{r}| = c(t' - t)$.

Интервал времени $t' - t = \frac{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|}{c}$ называется временем запаздывания.

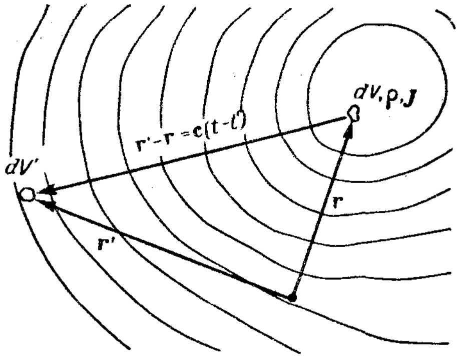

Рис. 102

Смысл его, очевидно, в том, что это есть время, необходимое для того, чтобы электромагнитному полю, созданному в объеме dV, добраться до объема dV' (рис. 102).

II. По известным $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ найти в этом же месте (в «точке») и $\rho(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ простым дифференцированием $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ и по координатам, как это видно из уравнений Максвелла.

При этом по $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ в какой-то момент в каком-то месте определяются ρ и $\mathbf{j}$ в этот же момент в этом же месте. (Поэтому не поставлены в предыдущих строках значки «штрихи» у $\mathbf{r}$ и t.)

Решение задачи о нахождении $\mathbf{E}(\mathbf{r}', t')$ и $\mathbf{B}(\mathbf{r}', t')$ по уравнениям Максвелла в общем случае до конца не доводится и получается лишь с тем или иным приближением.

Отметим, что главные идеи электродинамики отчетливо видны из этих красивых уравнений. Действительно, если бы мы ничего не знали об электромагнитном поле (кроме самих понятий о $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$), то могли бы при взгляде на уравнения сразу сказать:

1. Электрическое поле $\mathbf{E}$ порождается как нескомпенсированными зарядами, так и переменным во времени магнитным полем $\mathbf{B}$ (уравнения (14) и (12)).

2. Магнитное поле **B** порождается, как видно из (13), токами **j** и переменным во времени электрическим полем **E**.

3. Поскольку всякое электрическое поле в самом исходном случае порождается все-таки зарядами, то в конечном счете источниками всякого электрического и магнитного поля являются заряды.

4. Поскольку в каждое из уравнений (12) и (13), описывающих поведение полей **E** и **B** в пространстве и времени, входят и **E** и **B**, то это означает, что **E** и **B** друг без друга в общем случае существовать не могут и надо говорить не о **E** и **B** отдельно, а о едином электромагнитном поле **E**, **B**.

5. В случае постоянных во времени **E** и **B** имеет место $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}=0$ и $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}=0$ и уравнения (15) и (16) принимают вид

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}=0,\ \operatorname{rot}\mathbf{B}=\mu_0\mathbf{j}.$$

В каждое из этих уравнений входит или **E** или **B**, а это означает, что в данном случае можно говорить о **E** и **B**, разделенных между собой, существующих независимо друг от друга (при заданном распределении токов **j**).

6. Из уравнений (12) и (13) следует, что чем быстрее меняется в какой-либо точке магнитное поле **B** $\left(\text{чем больше } \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right)$, тем больше циркуляция возникающего электрического поля **E** вокруг этой точки (тем больше $\operatorname{rot}\mathbf{E}$), т. е. тем оно сильнее меняется от точки к точке. Аналогично обстоит дело и с магнитным полем **B**, возникающим при изменении во времени поля **E**.

Поскольку эти уравнения суть дифференциальные уравнения, т. е. справедливы в очень малой области (в «точке»), то ясно, что изменения **B** в какой-либо момент в какой-либо точке скажется в этот же момент на поведении **E** только в окрестностях этой же точки и т. д. Т. е. уравнения (12) и (13) утверждают, что возможна передача возмущений в поле на большие расстояния только последовательными этапами — от точки к точке, от точки к точке...; для каждой такой передачи возмущения на элементарное расстояние нужно элементарное время, а для передачи возмущения на конечное расстояние Δr — конечное время Δt. Говорят еще иначе: уравнения Максвелла несовместимы с дальнодействием (мгновенной передачей возмущений на конечные расстояния), а требуют существования близкодействия (конечного Δt при конечных Δr).

Сказанным, конечно, не исчерпывается содержание уравнений Максвелла. Но и уже сказанное получено без решения уравнений, а только по внешнему их виду! В этом обилии информации при идейной простоте и лаконичности и заключается красота и прелесть уравнений Максвелла.

§ 7. Электромагнитные волны

Пусть в некоторой точке O пространства возникло (неважно по какой причине) переменное поле **B**.

Тогда в соответствии с (12) вблизи этой точки возникнет **E**, которое тоже будет переменным во времени (ибо его только что не было, и оно появилось). Но тогда в соответствии с (13) это переменное **E** создаст в соседних точках меняющееся от точки к точке **B**, которое будет переменным во времени, и т. д.

Иными словами, от точки O, в которой возникло **B**, будут распространяться совокупности переменных **E** и **B** — электромагнитное поле.

При этом, если $\mathbf{B}(t)$ будет колебаться, то и $\mathbf{E}(t)$ будет колебаться. Эти колеблющиеся $\mathbf{B}(t)$ и $\mathbf{E}(t)$ будут меняться и от места к месту. Побегут электромагнитные волны $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$.

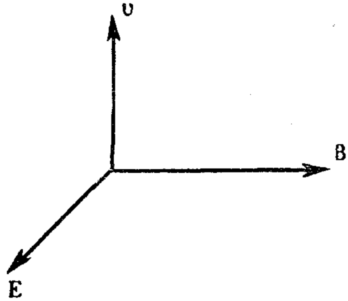

Рис. 103

Примером этому может быть следующее: заряд Q, покоившийся в точке O, приводят в колебательное (а значит, ускоренное) движение. В соседних с этим зарядом точках возникнут переменные **B** и **E**; они породят **E** и **B** в соседних с собой точках и т. д. Если теперь заряд Q остановить, ушедшие от него волны все равно уж не вернуть, они будут скитаться, пока не будут поглощены некоторым другим телом. Таким образом, от ускоренно движущегося заряда бегут электромагнитные волны, уносящие от него энергию, или, как говорят, ускоренно движущийся заряд излучает. Можно показать, что электромагнитные волны всех частот распространяются в вакууме со скоростью

$$|\mathbf{v}| = c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \approx 300\,000 \ \frac{км}{сек}.$$

Можно также показать, что векторы **E**, **B** и **v** образуют правовинтовую тройку взаимноперпендикулярных векторов, т. е. тройку векторов, ориентированных друг по отношению к другу, как показано на рис. 103.

Электромагнитные волны обладают всеми общими свойствами волн, перечисленными в разделе «Колебания и волны», поэтому мы на них подробно останавливаться не будем, за исключением некоторых оптических явлений, о которых речь будет впереди.

Заметим здесь, что оказалось очень удобным писать уравнение плоской, сферической или цилиндрической *монохроматической* волны не в виде

$$z = Z(\mathbf{r})\cos(\omega t - \mathbf{kr}),$$

а в виде

$$z = Z(\mathbf{r})\, e^{i(\omega t - kr)},$$

а затем брать от этой функции ее действительную или мнимую часть.

Такой прием обусловлен, с одной стороны, соображениями удобства (функция $e^{i\varphi}$ легко дифференцируется, интегрируется и т. д.), а с другой стороны — желанием соблюсти некоторую формальную аналогию в описаниях распространения волн и движения квантовых объектов.

Всякая реальная волна будет в этом случае представляться некоторой суперпозицией (суммой) монохроматических волн, т. е. суммой типа

$$z = \sum_{j=1}^{N} z_j = \sum_{j=1}^{N} Z_j(\mathbf{r})\, e^{i(\omega_j t - \mathbf{k}_j \mathbf{r})}$$

§ 8. Свет

Световые волны — это электромагнитные волны, способные воздействовать на человеческий глаз. Они обладают всеми свойствами электромагнитных волн, но тем не менее световые явления часто выделяют в отдельную группу электромагнитных явлений по ряду причин, в частности:

1. По традиции (до Максвелла и Герца об электромагнитных волнах естествоиспытатели не имели понятия, а свет — объект давно известный).

2. Важность этой части шкалы электромагнитных волн в повседневной деятельности человека.

3. Свет излучается отдельными атомами совершенно хаотично и (если исключить лазеры) управлять излучением совокупности атомов не представляется возможным; поэтому все источники света некогерентны друг другу.

4. Длина световых волн весьма мала.

Имеются и другие причины, заставляющие световые волны выделить в особую группу волн.

Из-за малой длины световых волн и некогерентности источников света приходится в экспериментах, связанных со светом, прибегать к разного рода ухищрениям, к использованию тонких и порой сложных установок.

§ 9. Интерференция световых волн

Поскольку различные источники света некогерентны друг другу, то исходящие от них волны не могут дать устойчивой интерференционной картины. Она столь быстро меняется со временем, что не представляется возможным заметить какие-либо намеки на нее. И тем не менее устойчивую интерференционную картину света получить можно по способу, предложенному Френелем. Он заключается в том, что свет от одного и того же источника (обычно точечного) пускают по разным путям, а потом эти пучки света сводят в некоторую область, где они, интерферируя, дают устойчивую картину, ибо с большой степенью точности волны от одного и того же точечного источника когерентны друг другу. Примером такой установки может быть бизеркало Френеля, изображенное на рис. 104. Свет от источника S, расположенного на биссектрисе угла $(180° - \beta)$, падает на зеркала A и B, составляющую меж собой угол $\alpha = (180° - \beta)$, и, отражаясь от них, попадает в область D, где, поставив экран наблюдения (э. н.), мы и сможем исследовать интерференционную картину. Прежде чем делать ее расчет заметим следующее:

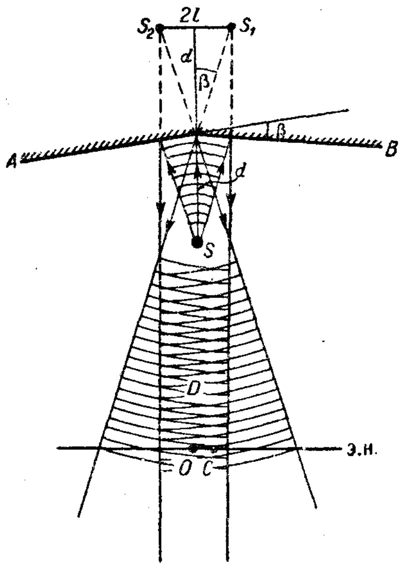

Рис. 104

а) формально можно рассматривать интерференцию в области D как полученную от двух мнимых источников S_1 и S_2,

б) воспользовавшись законами отражения можно увидеть, что расстояние между этими мнимыми источниками определится соотношением $2l = 2d \sin\beta$ или $l = d \cdot \sin\beta$, а при весьма малых β имеем $l = d \cdot \beta$, или, что все равно, $l = d \cdot (\pi - \alpha)$.

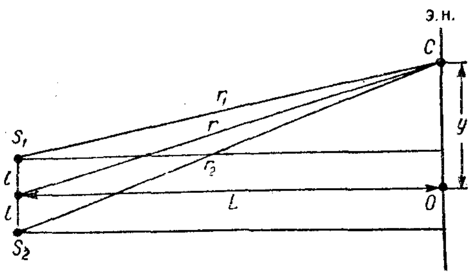

Рис. 105

На рис. 105 изображена схема указанной установки. Рассчитаем интерференционную картину на э. н., т. е. найдем $Z = Z(\mathbf{r})$, или, что удобнее, $Z = Z(y)$, где y — координата, задающая положение той точки C, где нас интересует амплитуда результирующей волны Z.

Считая амплитуды волн, приходящих в точку C от S_1 и S_2, одинаковыми, получим в соответствии с (2) (см. раздел II, § 6)

$$Z = 2Z_1 \left| \cos \frac{\pi \Delta r}{\lambda} \right|. \tag{1}$$

Из этого выражения видно, что при известном Z_1 амплитуда Z зависит от Δr. Подсчитаем разность хода волн Δr, воспользовавшись рис. 105. Видно, что

$$r_2^2 = (y + l)^2 + L^2,$$
$$r_1^2 = (y - l)^2 + L^2,$$

и значит, вычитая, получим

$$r_2^2 - r_1^2 = 4ly,$$

или

$$(r_2 - r_1)(r_2 + r_1) = 4ly,$$

откуда

$$\Delta r = r_2 - r_1 = \frac{4ly}{r_2 + r_1}.$$

Обычно в установках $l \ll L$ и $y \ll L$, а потому $r_2 + r_1 \approx 2r \approx 2L$, и значит, $\Delta r = \frac{2ly}{L}$. Подставляя это значение для Δr в (1), получим

$$Z = 2Z_1 \left| \cos \frac{2\pi l}{L\lambda} y \right|,$$

что и является решением задачи. Из решения видно, что максимум амплитуды Z будет при значениях аргумента $\frac{2\pi l}{L\lambda} y = n\pi$, откуда координата соответствующей точки определится равенством

$$y = n \frac{L\lambda}{2l}. \quad (2)$$

Расстояние между соседними максимумами (или ширина интерференционной полосы) определится как разница между y_n и y_{n-1}, т. е.

$$\Delta y = y_n - y_{n-1} = n \frac{L\lambda}{2l} - (n - 1) \frac{L\lambda}{2l} = \frac{L\lambda}{2l},$$

а поскольку $l = d \cdot (\pi - \alpha)$, то

$$\Delta y = \frac{L\lambda}{2d \cdot (\pi - \alpha)}, \quad (3)$$

т. е. расстояние между максимумами будет тем больше, чем ближе источник S к вершине бизеркала и чем ближе угол α к π. Благодаря $\alpha \to \pi$ и весьма большому L, удается получить интерференционные картины с весьма удаленными друг от друга максимумами, что и является условием, необходимым для детального рассмотрения картины.

Из (2) и (3) видно, что y и Δy зависит от λ. А это значит, что если на установку падает немонохроматический свет, то он будет разложен ею в спектр, т. е. на монохромы. При этом в каждой полосе та монохрома будет тем дальше отклонена от центра картины O, чем больше ее длина волны.

Отметим, что на э. н. интерференционная картина будет представлять собой полосы, параллельные ребру бизеркала. Это естественным образом следует из соображений симметрии, строгое же доказательство этого достаточно громоздко.

Кроме того, расчет сделан в предположении $r \gg l$ и $r \gg y$. Это означает, что формула (2) и следующая из нее (3) верны при небольших n (обычно $n < 10$).

Рассмотрим в общих чертах интерференцию от двух источников, используя комплексные выражения для уравнения волны, т. е. полагая

$$z = Z(\mathbf{r})\, e^{i(\omega t - \mathbf{kr})}.$$

Пусть от источников S_1 и S_2 идут волны, вообще говоря, некогерентные и неравных амплитуд, но одинаково направленных колебаний. Результирующее колебание в точке наблюдения определится в соответствии с принципом суперпозиции формулой

$$z = z_1 + z_2 = Z_1(\mathbf{r}_1) e^{i(\omega_1 t - \mathbf{k}_1\mathbf{r}_1)} + Z_2(\mathbf{r}_2)\, e^{i(\omega_2 t - \mathbf{k}_2\mathbf{r}_2)}.$$

Квадрат амплитуды этого колебания определится равенством

$$|z|^2 = zz^* = (z_1 + z_2)(z_1^* + z_2^*) = z_1 z_1^* + z_2 z_2^* +$$
$$+ z_1 z_2^* + z_2 z_1^* = Z_1^2 + Z_2^2 + 2Z_1 Z_2 \cos[(\omega_2 - \omega_1) t - (\mathbf{k}_2\mathbf{r}_2 - \mathbf{k}_2\mathbf{r}_1)],$$

где Z_1 и Z_2 суть убывающие функции от $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$. Для выбранной точки наблюдения r_1 и r_2 суть величины постоянные, равно как и Z_1 и Z_2. Но результирующая амплитуда, вообще говоря, для заданной точки не есть величина постоянная, ибо она зависит от сдвига по фазе интерферирующих волн. Если источники весьма некогерентны, то сдвиг по фазе есть хаотическая функция входящих в нее величин ω_j и k_j. Но это значит, что среднее за большой промежуток времени значение величины $\cos[(\omega_2 - \omega_1) t - (\mathbf{k}_2\mathbf{r}_2 - \mathbf{k}_1\mathbf{r}_1)]$ будет равно нулю и, значит,

$$Z_{\mathbf{r}}^2 = Z_1^2(\mathbf{r}_1) + Z_2^2(\mathbf{r}_2).$$

При $2l \ll L$ имеет место $r_1 \approx r_2 \approx r$, а тогда картина распределения $Z(\mathbf{r})$ будет примерно такой, как изображено на рис. 106.

В случае же когерентных источников $\omega_1 = \omega_2$, $k_1 = k_2$ и $\Delta\varphi = (\omega_2 - \omega_1) t - (\mathbf{k}_2\mathbf{r}_2 - \mathbf{k}_1\mathbf{r}_1) = -(\mathbf{k}_2\mathbf{r}_2 - \mathbf{k}_1\mathbf{r}_1)$ и в этом случае из-за $\mathbf{k}_1 \uparrow\uparrow \mathbf{r}_1$ и $\mathbf{k}_2 \uparrow\uparrow \mathbf{r}_2$ будет иметь место $\Delta\varphi = -(kr_2 - kr_1) = -k\,\Delta r$, и значит,

$$Z^2(\mathbf{r}) = Z_1^2(\mathbf{r}_1) + Z_2^2(\mathbf{r}_2) + 2Z_1(r_1) \cdot Z_2(\mathbf{r}_2) \cos k\,\Delta r.$$

Картина распределения $Z(\mathbf{r})$ по экрану наблюдения будет иметь вид, изображенный на рис. 107.

Таким образом, для случая интерференции от двух источников распределения амплитуд в двух частных случаях:

1) когда хаотически меняются ω_j и k_j.

2) когда ω_j и k_j не меняются

существенно различаются. Поскольку энергия волны пропорциональна квадрату амплитуды, то приходим к выводу, что в этих случаях соответственно имеем:

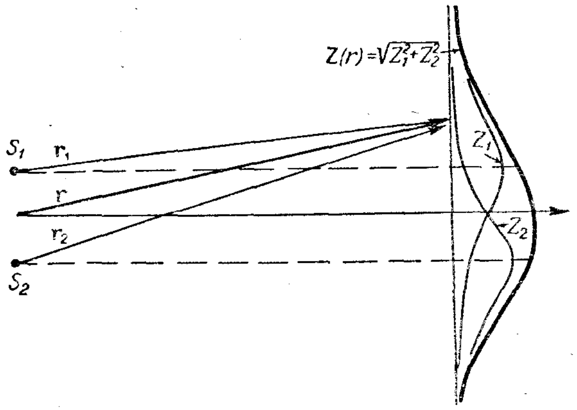

Рис. 106

1) Энергии встретившихся волн в зафиксированном месте просто складываются без перераспределения энергии между точками среды.

2) Энергии встретившихся волн не складываются, а из-за интерференции перераспределяются между разными точками среды.

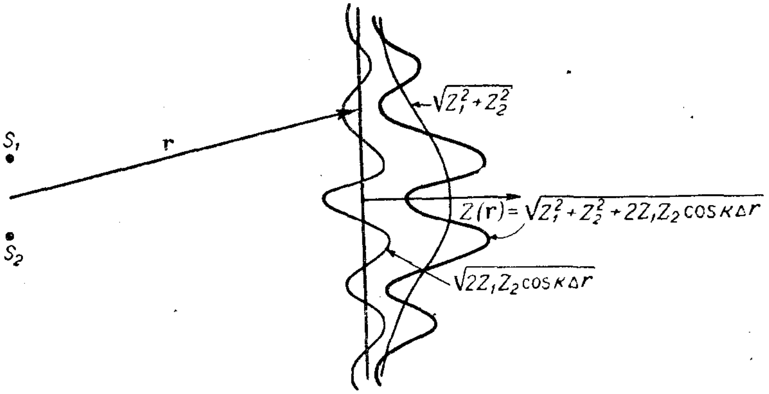

Рис. 107

И может статься так, что в некоторой точке, где $\cos k\Delta r > 0$, энергия результирующей волны больше, чем суммарная энергия пришедших волн; в точках же, где $\cos k\Delta r < 0$, — наоборот. Это, однако, не означает нарушения закона сохранения энергии: энергия результирующей волны все же в среднем равна сумме энергий пришедших волн, но не в точке, а по такой области, где в среднем $\cos k\Delta r=0$. Это находится в полном соответствии с тем, что энергия может превращаться из одних форм в другие и передаваться от одних тел (точек среды) другим.

Очевидно, сказанное будет справедливым и для случая, когда на экран наблюдения идут волны не непосредственно от источников S_1 и S_2, а через отверстия в непрозрачном экране, на который падает какой-то свет. Отверстия в экране и будут играть (в соответствии с принципом Гюйгенса) роль источников света S_1 и S_2.

§ 10. Фотометрические понятия

1. Источник света излучает электромагнитные волны разных длин (частот). Ту часть потока электромагнитных волн, которая, воздействуя на нормальный человеческий глаз, вызывает зрительные ощущения, называют *световым потоком*. Если соответствующую этому потоку часть вектора Умова обозначить $\mathbf{P}_{\text{св}}$, то $\mathbf{P}_{\text{св}}\,\mathbf{dS}=d\Phi_{\text{св}}$ будет *элементарным потоком световой части вектора Умова*, или *элементарным световым потоком* через площадку $\mathbf{dS}$.

2. Очевидно, *силой света* точечного источника в каком-либо направлении следует назвать (по аналогии с силой излучения источника волн, определенной в разделе «Колебания и волны») величину

$$I_{\text{св}}=\frac{d\Phi_{\text{св}}}{d\Omega}=\frac{P_{\text{св}}\,dS\cos\alpha}{d\Omega}=P_{\text{св}}R^2. \qquad (1)$$

Поскольку источник в разных направлениях посылает, вообще говоря, разную энергию, то $I_{\text{св}}=I_{\text{св}}\left(\frac{\mathbf{R}}{R}\right)$, т. е. он может быть неизотропным. Из (1) следует

$$P_{\text{св}}=\frac{I_{\text{св}}}{R^2},$$

или с учетом того, что $\mathbf{P}_{\text{св}}\uparrow\uparrow\mathbf{R}$ или $\mathbf{P}_{\text{св}}\uparrow\downarrow\mathbf{r}$:

$$\mathbf{P}_{\text{св}}=\frac{I_{\text{св}}}{R^3}\mathbf{R}, \text{ или } \mathbf{P}_{\text{св}}=-\frac{I_{\text{св}}}{r^3}\mathbf{r}.$$

3. *Освещенностью площадки dS* называют величину

$$E_{\text{св}}=\frac{d\Phi_{\text{св}}}{dS}=\frac{P_{\text{св}}\,dS\cos\alpha}{dS}=P_{\text{св}}\cos\alpha, \qquad (2)$$

т. е. освещенность площадки равна проекции световой части вектора Умова на нормаль к площадке (проекции $\mathbf{P}_{\text{св}}$ на $\mathbf{dS}$). Поскольку освещенность считают величиной существенно положительной, то направление $\mathbf{dS}$ выбирают так, чтобы угол α был острым. Если источник точечный, то $P_{\text{св}}=\frac{I_{\text{св}}}{R^2}$ и тогда

$$E_{\text{св}}=\frac{I_{\text{св}}}{R^2}\cos\alpha. \qquad (3)$$

Вводя орт $\mathbf{n} \uparrow\uparrow \mathbf{dS}$, можно это равенство, называемое «законом» освещенности от точечного источника, записать в виде

$$E_{\text{св}} = \frac{I_{\text{св}}}{R^3} \mathbf{Rn}, \text{ или } E_{\text{св}} = -\frac{I_{\text{св}}}{r^3} \mathbf{rn}. \tag{4}$$

Равенство (2), очевидно, запишется в виде

$$E_{\text{св}} = \mathbf{P}_{\text{св}} \mathbf{n}. \tag{5}$$

Совершенно очевидно, что равенства (3) — (5) следуют из определения $\mathbf{P}_{\text{св}}$, $I_{\text{св}}$ и $E_{\text{св}}$, а потому законами не являются, и законами их называют по традиции, так же как законы Архимеда, Паскаля, законы отражения и пр.

Если источник протяженный, то разбивая его на элементарные кусочки и интегрируя по ним, получим:

$$E_{\text{св}} = \mathbf{P}_{\text{св}} \mathbf{n} = -\int \frac{dI_{\text{св}}}{r^3} \mathbf{rn}.$$

4. *Яркостью поверхности* протяженного источника света называют величину

$$B_{\text{св}} = \frac{d^2 \Phi_{\text{св}}}{dS \cos\alpha \, d\Omega},$$

показывающую, какой световой поток посылает каждая единица светящейся поверхности в единичный телесный угол, проведенный в направлении перпендикулярном элементу поверхности dS. Поскольку $\frac{d^2\Phi_{\text{св}}}{d\Omega} = dI_{\text{св}}$, т. е. есть сила света от элемента $\mathbf{dS}$ в направлении, определенном углом α, то

$$B = \frac{dI_{\text{св}}}{dS \cos\alpha},$$

т. е. яркость источника численно равна силе света от единицы площади источника в направлении нормали к этой площадке.

Именно яркость поверхности источника (светящего или собственным или отраженным светом) есть та характеристика объекта, которая производит впечатление на глаз.

Через яркость источника можно выразить, очевидно, и его силу света, и освещенность, и излученный им полный световой поток. Читатель может это сделать при желании сам.

Раздел IV. ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

§ 1. Эфир и принцип относительности

Уже неоднократно говорилось о том, что все наши познания приближенны. Это означает, что законы физики, являющиеся обобщениями наших представлений о тех или иных явлениях природы, тоже приближенны.

Как показывает все тот же опыт наших исследований, рано или поздно мы открываем такие стороны явлений (а то и сами явления), которые не укладываются в полюбившуюся нам схему, противоречат уже установившимся нашим взглядам на этот класс явлений. И вот тогда-то наши законы, наши представления о вещах (а иногда и о мире в целом) приходят в противоречие с явлениями, в которых принимают участие эти вещи. И тут начинаются попытки «деформации» того или другого с целью «подогнать» их друг к другу. «Победа», конечно, остается за самими вещами, явлениями. Они заставляют нас пересмотреть наши представления о них. А это значит, что надо найти ошибки в наших представлениях и либо исправить их (если это удастся без противоречий с самими явлениями), либо (если не удалось «отремонтировать» взгляды), заменить наши представления о вещах другими, порой в корне отличающимися от прежних. Однако эта замена взглядов не должна быть произвольной, она сама должна удовлетворять следующим основным требованиям:

1. Новая теория (новые представления) не должна «начисто» отметать старую теорию (старые представления), а должна включать в себя ее как некоторый частный случай, некоторое приближение, — иначе новая теория не будет более общей, чем старая.

2. Новая теория должна объяснить те стороны явления, которые не объясняла старая, — иначе зачем же нужна новая теория?

3. Новая теория должна предсказывать новые черты явления (или новые явления), — иначе она не будет руководящей идеей в последующих исследованиях, а без перспективы, без идеи какое же исследование?

Конечно, новые теории создаются не потому, что кому-то захотелось изменить старую. Пока старая теория объясняет все, что мы наблюдаем, нет нужды ее менять.

Как обстояло дело к концу XIX и началу XX вв. в этом отношении? Механика Ньютона блестяще описывала движение тел. Уравнение Максвелла несли исчерпывающее объяснение всем электромагнитным явлениям. Уравнения термодинамики в полном соответствии с опытом описывали процессы, происходящие с телами при изменении их температуры, агрегатного состояния и т. д. Что касается атомистики, то несмотря на явные ее успехи в объяснении ряда свойств тел, отношение к ней было весьма снисходительное — «мало ли, мол, какие теории можно придумывать для ради развлечения!».

По выражению одного из крупнейших физиков того времени лорда Кельвина (Томсона) надо было признать горизонты тогдашней физики совершенно ясными, слегка лишь омраченными двумя крохотными облачками — неполадками с эфиром (который тогда считали абсолютной системой отсчета, той самой, по отношению к которой происходило движение всех тел и волнами в которой считался свет) и неполадками с излучением и поглощением энергии (в частности, световой) телами.

Но, как оказалось, эти-то два облачка и разрослись в тучи, из которых грянули сокрушающие все старые представления о мире теории — теория относительности и квантовая теория.

В этом разделе речь пойдет о теории относительности.

Прежде всего выясним, с чего все началось, что заставило физиков создать эту теорию и принять ее на вооружение.

Дело в том, что все известные к концу XIX в. оптические явления с несомненностью говорили о том, что свет — это волны. Но волны, как тогда полагали, «должны распространяться в чем-то». Это «что-то» и было названо эфиром или светоносным эфиром.

Этот эфир, как и всякая среда, должен был характеризоваться по представлениям того времени какой-то плотностью ρ и какой-то упругостью G, а как показывает теория упругих сред, скорость распространения волн в ней дается формулой

$$v=\sqrt{\frac{G}{\rho}}.$$

В случае обычных упругих волн типа звуковых эта формула не вызывала никаких осложнений и вполне подтверждалась опытом. Но дело существенно менялось в случае световых волн. Скорость света огромна — $3\cdot 10^5$ *км/сек.* Но это означает, что $\frac{G}{\rho}=9\cdot 10^{10}\frac{км^2}{сек^2}$, т. е. G чрезвычайно велико при малом ρ. А это непонятно, ибо выходит, что эфир, заполнявший мировое пространство, был много более упруг, чем любое из известных веществ, и в то же время не оказывал заметного сопротивления движущимся в нем телам (камням, людям, планетам) и не обладал сколько-нибудь заметной плотностью.

Уже одно это весьма шокировало физиков, но кроме этих необычных свойств пришлось эфиру приписывать и другие не менее необычные и противоречивые: например, поперечность световых волн заставляла считать эфир твердым телом!

Ставилось много опытов для выяснения свойств эфира. Одними из них пытались ответить на вопрос, какова увлекаемость эфира движущимися в нем телами, другие преследовали цель определить скорость тел по отношению к эфиру, — как полагали иные — абсолютную скорость.

Если подытожить результаты всех опытов, то оказывается, что эфир ведет себя по-разному по отношению к телам и к свету. По отношению к телам он ведет себя так, как будто его и нет, а свет без этого эфира вроде бы и существовать не должен был, ибо не в чем ему было бы «волноваться». Но так или иначе, а подавляющее большинство физиков держалось за этот эфир и считало его абсолютной и совсем неподвижной системой отсчета, подобно тому как древние жрецы считали абсолютно неподвижными те скалы, которые окаймляли океан с плавающими в нем китами, на спинах которых покоилась Земля. Физики XIX в. безусловно веровали в эфир и изо всех сил старались его обнаружить, а он ускользал от них.

Кроме эфира, физиков конца XIX и начала XX в. смущало еще одно обстоятельство. Принцип относительности Галилея утверждал, что все явления протекают во всех инерциальных системах отсчета одинаково (с точностью до начальных условий). Но это означает, как уже говорилось в разделе «Механика», что законы физики должны быть ковариантны относительно тех преобразований координат, которые отображают переход от одной инерциальной системы отсчета к другой. Мы показали в разделе «Механика», что основной закон динамики — второй закон Ньютона — ковариантен по отношению к преобразованиям Галилея. Таким образом, законы механики вполне согласуются с преобразованиями Галилея. Но вот уравнения Максвелла, которые описывают электромагнитные явления, не ковариантны по отношению к этим преобразованиям. И кроме того, сила Лоренца, зависящая от скоростей заряженных частиц, по отношению к системе отсчета оказывалась различной в различных системах отсчета и потому даже второй закон Ньютона для взаимодействующих по Лоренцу заряженных частиц тоже был нековариантен по отношению к преобразованиям Галилея.

Таким образом, или преобразования Галилея неверны или неверны уравнения Максвелла — такой вывод надо было сделать. Сейчас-то нам ясно, что преобразования Галилея неверны хотя бы из-за того, что они предполагают наличие бесконечно быстрых сигналов; но тогда такой вопрос даже и не возникал, и в преобразования Галилея верили безусловно. Только Лоренцу и Эйнштейну пришла в голову идея о необходимости замены преобразований Галилея какими-то новыми.

Итак, неувязки со свойствами эфира и нековариантность уравнений электродинамики по отношению к преобразованиям

Галилея — основные причины, породившие целый ряд недоразумений и парадоксов у физиков XIX века. Выход из этого «безвыходного» положения, как уже говорилось, был найден великим Эйнштейном.

§ 2. Опыт Майкельсона и Морли

Прежде чем излагать найденный Альбертом Эйнштейном выход из всех этих противоречий, рассмотрим опыт Майкельсона и Морли, попытки объяснения которого сыграли важнейшую роль в создании теории относительности. Целью опыта было определение скорости движения Земли относительно эфира. Упрощенная схема опыта такова (рис. 108). С помощью одной и той же линейки отмерялись расстояния $l_{\parallel}$ и $l_{\perp}$ от полупрозрачной пластины C и в точках B и A устанавливались зеркала. Свет от источника падал на пластину C, частично отражался и шел к зеркалу A, а частично преломившийся — к зеркалу B. Отражаясь от зеркал A и B, свет снова шел к пластине C и после преломления (от зеркала A) и отражения (от зеркала B) на ней давал на экране D некоторую интерференционную картину.

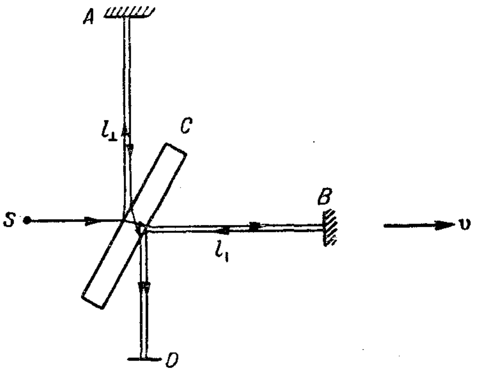

Рис. 108

Вид этой картины зависел, естественно, от того, какая разность фаз появилась между пучками света при их прохождении по путям $l_{\parallel}$ (вдоль движения Земли) и $l_{\perp}$ (поперек движения Земли). Разность же фаз этих двух пучков зависела от разности времен $t_{\parallel}$ и $t_{\perp}$, которые необходимы свету для прохождения путей $l_{\parallel}$ и $l_{\perp}$. По виду картины можно было найти $t_{\parallel} - t_{\perp}$. Эту же разность можно вычислить и так, как мы это сделаем ниже. Приравнивая эти разности, получали выражение, из коего и предполагалось найти скорость Земли v относительно эфира.

Для вычисления $t_{\parallel}$ и $t_{\perp}$ учтем, что при прохождении светом продольного расстояния, ему приходится сперва «догонять» зеркало B, а после отражения от него двигаться навстречу «набегающей» на него пластине C; при прохождении же светом поперечного расстояния ему приходится все время «забирать» вправо, т. е. в сторону движения Земли (все это по отношению к эфиру).

Таким образом, при продольном движении со скоростью $c_{\parallel}$ свету приходится проходить расстояния (по отношению к эфиру)

(рис. 108)

$$c_{\parallel} t_1 = l_{\parallel} + v t_1,$$
$$c_{\parallel} t_2 = l_{\parallel} - v t_2,$$

откуда

$$t_{\parallel} = t_1 + t_2 = \frac{2 l_{\parallel} c_{\parallel}}{c_{\parallel}^2 - v^2} = \frac{2 l_{\parallel}}{c_{\parallel}\left(1 - \frac{v^2}{c_{\parallel}^2}\right)}.$$

При движении в поперечном направлении свету приходится проходить два одинаковых расстояния (по отношению к эфиру), определяемых равенством

$$\frac{c_{\perp}^2 t_{\perp}^2}{4} = l_{\perp}^2 + \frac{v^2 t_{\perp}^2}{4},$$

откуда

$$t_{\perp} = \frac{2 l_{\perp}}{c_{\perp}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c_{\perp}^2}}}.$$

Вид же интерференционной картины был таков, что $t_{\parallel} - t_{\perp} = 0$. Но это означает, что $t_{\parallel} = t_{\perp}$, а значит,

$$\frac{l_{\parallel}}{c_{\parallel}\left(1 - \frac{v^2}{c_{\parallel}^2}\right)} = \frac{l_{\perp}}{c_{\perp}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c_{\perp}^2}}}. \qquad (1)$$

Напоминаем, что $l_{\parallel}$ и $l_{\perp}$ это расстояния, отмеренные **одной и той же линейкой** вдоль движения Земли и поперек этого движения, т. е. с точки зрения классических представлений $l_{\parallel} = l_{\perp}$. Входящие в равенство (1) $c_{\parallel}$ и $c_{\perp}$ — скорости света **относительно эфира** в направлениях вдоль $\mathbf{v}$ и поперек $\mathbf{v}$. Если эфир считать однородной и изотропной средой, то, согласно, всё тем же классическим представлениям $c_{\parallel} = c_{\perp}$. Но если это так, то, полагая $l_{\parallel} = l_{\perp} = l$ и $c_{\parallel} = c_{\perp} = c$, получим из (1)

$$1 - \frac{v^2}{c^2} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

откуда следует либо $v = 0$, либо $v = c$, что одинаково непонятно. Результат станет выглядеть еще более удивительным, если учесть, что опыт Майкельсона — Морли можно было бы проделать (пока мысленно) на любой планете или в ракете или в иной системе отсчета. Поскольку в каждой из них результат был бы тот же, то получилось бы, что все тела по отношению к эфиру имеют одинаковую скорость (или $v = 0$ или $v = c$), в то время как по отношению друг к другу они движутся с самыми различными скоростями. Полагая, однако, что эфир «прилипает» к движущемуся телу («увлекается» им, как тогда говорили) можно было бы «объяснить» $v=0$ (поскольку «прилипший» к телу эфир относительно тела не движется). Однако произведенные, например, Физо опыты «показывали», что эфир «увлекается» телом хотя и в весьма небольшой мере $\left(\text{порядка } \frac{v^2}{c^2}\right)$, но это значит, что $v \neq 0$. Воистину свойства эфира оказывались непостижимыми и загадочными!

§ 3. Постулаты Эйнштейна

Было сделано много попыток «втиснуть» результаты опыта Майкельсона (факт $t_{\parallel}=t_{\perp}$) в теорию, базирующуюся на представлениях об эфире и преобразованиях Галилея, но безрезультатно. Надо было искать нечто новое. Но на чем основываться, на что опираться в поисках новой теории? Великий Эйнштейн предположил, что надо за исходное взять 1) принцип относительности (распространив, однако, его на все явления природы) и 2) тот факт, что никто не мог обнаружить бесконечно большой скорости сигналов.

Второе ясно — переход от одной системы отсчета к другой и всякие измерения связаны с обменом сигналами, информацией, а она, хочется нам этого или нет, распространяется с конечной скоростью, и это надо учитывать в преобразованиях координат, связанных с переходом от одной системы отсчета к другой.

Но почему надо придерживаться принципа относительности, который, будучи тесно связан с, вообще говоря, неточными преобразованиями Галилея, вроде бы сам-то не очень верен? Вот тут-то и надо понимать, что одно дело преобразования Галилея, а другое — принцип относительности. Правильно сформулированный принцип относительности звучит примерно так:

все явления природы в своих главных чертах одинаковы во всех инерциальных системах отсчета.

Поскольку главные-то черты явлений и отображены в законах природы, то

законы природы должны не менять своей формы при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой.

Это означает, что они должны быть сформулированы в форме, ковариантной относительно преобразований координат, сопровождающих переход от одной инерциальной системы отсчета к другой (только эти преобразования не есть преобразования Галилея). При этом и понятие инерциальной системы отсчета следует расширить — инерциальной следует назвать такую систему отсчета, в которой не только механические, но и электромагнитные процессы выглядят и описываются наиболее простыми уравнениями. **В этом смысле первый закон Ньютона, постулирующий существование таких систем, выходит за рамки закона механики и становится одним из фундаментальных законов природы.**

Учитывая такую формулировку принципа относительности (он носит название специального или частного принципа относительности Галилея — Эйнштейна), мы сразу понимаем всю его необходимость для исследователей — отказ от него означал бы, что в каждой инерциальной системе отсчета — с в о и законы природы, а это по существу означает отказ от возможности исследовать мир общими усилиями, объективно, с чем, конечно, примириться нельзя.

Исходя из сказанного выше постулируют следующие основные положения теории относительности:

1. Все законы природы должны быть сформулированы в виде, ковариантном относительно преобразований координат, отображающих переход от одной инерциальной системы отсчета к другой.

В этом смысле не существует привилегированных систем отсчета (отсюда сразу следует, что надобности в эфире, как абсолютной системе отсчета, никакой нет). Иногда удобно давать другую формулировку этого принципа:

Явления, наблюдаемые из разных инерциальных систем отсчета, отличаются только из-за разных начальных условий, поэтому в законы природы начальные условия не должны входить.

2. Существует предельная скорость распространения сигналов, величина которой одна и та же во всех инерциальных системах отсчета (а значит, преобразования Галилея неверны!). **Эта скорость совпадает со скоростью распространения электромагнитных волн в вакууме и не зависит ни от направления распространения сигнала, ни от движения источника и приемника этого сигнала.**

Перед последовательным изложением теории Эйнштейна рассмотрим с точки зрения его постулатов результаты опыта Майкельсона и Морли. Казалось бы, что коль скоро нет эфира, то входящие в формулу (1) § 2 величины $c_\perp$, $c_\parallel$ и v бессмысленны, поскольку они характеризуют скорости света и Земли относительно несуществующего эфира. Но нет! Они имеют смысл, хотя не тот, который в них вкладывался вначале. Под c надо понимать именно ту скорость, о которой говорится во втором постулате. В частности, это скорость света относительно, например, Земли. Под v надо понимать скорость движения Земли относительно какой-либо инерциальной системы отсчета, например, Солнца (приближенно, конечно, — абсолютно инерциальных систем не бывает). Под $l_{\|}$ надо разуметь длину линейки, которой отмерялось расстояние вдоль v, а под $l_{\perp}$ — длину той же линейки, но расположенной перпендикулярно v. Но тогда из (1) получим в силу $c_{\|}=c_{\perp}=c$ (по второму постулату)

$$l_{\|}=l_{\perp}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}.$$

Т. е. длина некоторого предмета (например, линейки) не есть величина постоянная, как полагалось по классическим представлениям, а зависит от ее ориентации по отношению к скорости ее движения $\mathbf{v}$ и от величины скорости v. Но это эквивалентно тому, что в разных системах отсчета одна и та же линейка, один и тот же предмет имеет разные размеры! Это казалось столь неожиданным, ужасным, что вначале этому никто не верил, и Эйнштейна всерьез не принимали, тем более, что в его работе «К электродинамике движущихся сред», где была изложена эта идея, были и другие не менее крамольные — не только размеры тела, но и интервалы времени между двумя событиями в разных системах отсчета различны!

Но мало ли что нам кажется ужасным, мало ли что нам не нравится — законы природы должны отражать не вкусы наши, а обобщение всех известных нам опытных данных, они должны быть непротиворечивой системой наших взглядов на мир. Так вот для всего этого со всей необходимостью надо было признать идеи Эйнштейна, что и было сделано.

§ 4. Координаты Минковского, четырехмерный мир, мировая линия

Перейдем к систематическому изложению специальной (или частной) теории относительности, формулирующей явления с точки зрения наблюдателей, находящихся в инерциальных системах отсчета.

Нам надо формулировки законов физики привести в соответствие с постулатами Эйнштейна, для чего прежде всего надо выяснить, какие преобразования координат и времени сопровождают переход от одной инерциальной системы отсчета к другой. Во всем дальнейшем изложении мы будем придерживаться того изложения идей Эйнштейна, которое предложил Генрих Минковский. Этот способ изложения довольно абстрактен и потому иногда вызывает из-за непривычности нашей к таким абстракциям несколько неприятные ощущения. Но зато он исключительно лаконичен и приводит к цели кратчайшим путем. Идея метода Минковского такова: поскольку все явления протекают в пространстве и времени, то каждое мгновенное (точечное) событие должно характеризоваться четверкой чисел — x, y, z и t. При таком обозначении координат и времени они выглядят очень неравноправно. Минковский предложил следующие обозначения:

$$x_1 = x,\ x_2 = y,\ x_3 = z,\ x_4 = ict.$$

Но тогда совокупность четверки чисел $x_1 x_2$, x_3 и x_4 может характеризовать с точки зрения геометрии положение точки в некотором (сперва, повторяем, непривычном из-за абстрактности, но не надо из-за этого горевать!) четырехмерном пространстве. Это четырехмерное пространство по Минковскому и есть «мир», в котором его трехмерная часть есть самое обычное привычное нам пространство. В этом геометрическом четырехмерном мире каждое мгновенное событие характеризуется точкой — мировой точкой — с координатами x_1, x_2, x_3 и x_4 (на самом деле, конечно, не точкой, а некоторой областью около x_1, x_2, x_3, x_4). Развитие же событий, происходящих с материальной точкой, отобразится в этом мире некоторой линией — мировой линией данной материальной точки (вернее, некоторой трубкой из-за протяженности тела). Поскольку пытаться представить себе этот четырехмерный мир — задача весьма унылая, то мы рассмотрим упрощенный случай — двумерное пространство x_1, x_4, а потом трехмерное — x_1, x_2 и x_4.

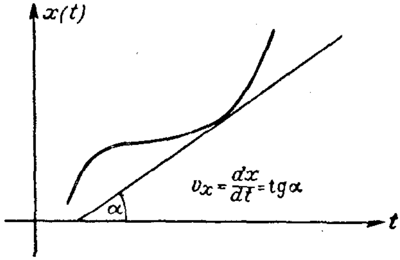

Рис. 109

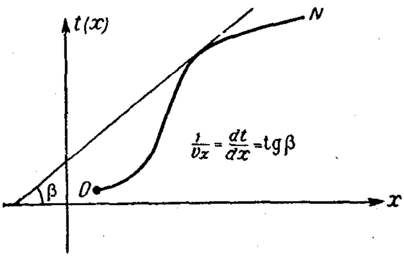

Рис. 110

Предположим, что некоторая материальная точка может двигаться только вдоль прямой x. Тогда график ее движения $x = x(t)$ изобразится некоторой линией (рис. 109). Очевидно, двойка чисел x и t характеризует положение материальной точки в нашем пространстве x (на прямой, по которой движется материальная точка) и времени. Наклон этой кривой в какой-либо точке есть скорость $v_x = \frac{dx}{dt}$. Если мы повернем график $x(t) = x(t)$ вокруг биссектрисы угла между осями, то получим график $t = t(x)$ (рис. 110). Очевидно, он отображает все то же движение все той же материальной точки: по-прежнему числа t и x будут характеризовать положение нашей материальной точки все в том же пространстве x-ов и во времени, а наклон кривой $\frac{dt}{dx}$ будет величиной, обратной v_x. Введем теперь оси x и ict и попытаемся в этих осях отобразить движение нашей материальной точки. Как это сделать? Очень просто. Надо каждую точку графика $t=t(x)$ перенести на график в осях ict и x. При этом размеры переносимой линии ON вдоль оси x не изменятся, а вдоль оси t они увеличатся по модулю в c раз. Полученная кривая $O'N'$ (на рис. 111 изменение масштаба в c раз вдоль оси t не отображено — как никак, а $c=3\cdot10^5\frac{км}{сек}$!). Каков смысл этой кривой? А тот, что каждая точка этой кривой характеризует

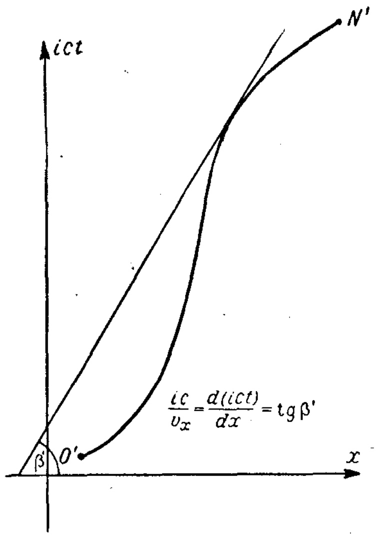

Рис. 111

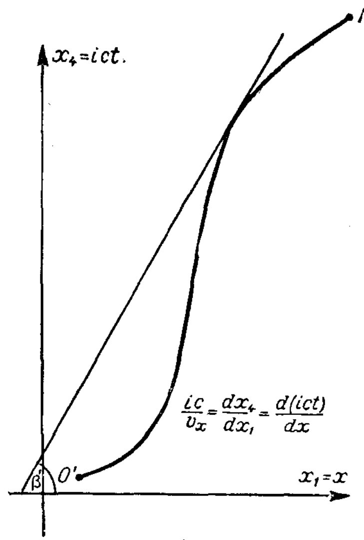

Рис. 112

положение нашей материальной точки в пространстве x-ов и ict: абсцисса каждой точки кривой есть самая обычная x-я координата материальной точки, а ордината, поделенная на ic, т. е. $\frac{ict}{ic}=t$, есть тот момент времени, в который материальная точка имеет координату x. Наклон кривой $O'N'$ в некоторой точке есть $\frac{d\,ict}{dx}=ic\frac{dt}{dx}=\frac{ic}{v_x}$. Если поделить этот наклон на ic, то получим $\frac{1}{v_x}$. Если теперь заменить название оси x на x_1, а оси ict на x_4, то суть дела, естественно, не изменится. Но только теперь линию $O'N'$ принято называть *мировой линией материальной точки*. А смысл ее все тот же: $x_1=x$, а $\frac{x_4}{ic}=t$, т. е. это все тот же график движения нашей материальной точки только не в координатах x и t, а в координатах x_1 и x_4 (рис. 112).

Нарисуем теперь мировую линию какой-нибудь планеты солнечной системы. Проведем оси x и y в плоскости орбиты, а ось

t перпендикулярно ей. Тогда график $t=t(x,y)$ изобразится винтовой линией (рис. 113), проекцией которой на плоскость xy будет эллипс. Если теперь вместо оси t ввести ось ct, то движение той же планеты изобразится винтовой линией, которая в отличие от линии в координатах x,y,t будет вытянута вдоль оси t в c раз. Наконец, вводя оси $x_1=x$, $x_2=y$, $x_4=ict$, мы получим ту же винтовую линию, что и в координатах x,y,ct, но с одной мнимой осью ict. Этой мнимостью смущаться не следует, надо помнить, что поделив x_4 на ic_4, мы получим самую обычную временнýю координату t (рис. 114).

Аналогично обстоит дело и с мировыми линиями материальных точек в четырехмерном пространстве x_1, x_2, x_3, x_4 с той лишь разницей, что наглядно себе пред-

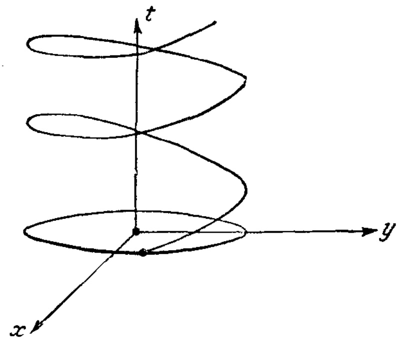

Рис. 113

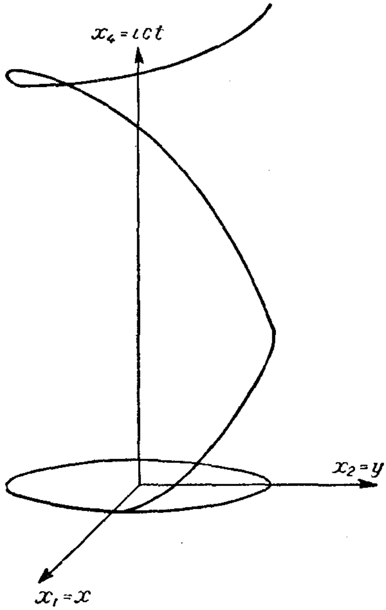

Рис. 114

ставить пространство четырех измерений или изобразить четыре оси x_1, x_2, x_3, x_4, нормальные друг другу, нельзя, да и не нужно.

В этом четырехмерном пространстве можно ввести четырехмерный радиус-вектор точки $S=S(x_1, x_2, x_3, x_4)$. Смысл этого радиус-вектора очевиден — его три проекции на оси x_1, x_2 и x_3 есть обычные координаты материальной точки в момент времени $t=\frac{x_4}{ic}=\frac{ict}{ic}$, т. е. в момент времени, который есть четвертая проекция вектора S, деленная на ic. (Если угодно, можно считать этот вектор S не имеющим никакого смысла, но проекции его имеют указанный выше смысл.)

Если материальная точка за время Δt переместится на $\Delta \mathbf{r}$ (на Δx, Δy, Δz), то в четырехмерном мире Минковского это отобразится четырехмерным перемещением ΔS, первые три проекции которого есть Δx, Δy, Δz (отображают перемещение материальной точки в обычном пространстве), а четвертая проекция, деленная на ic, будет равна Δt.

Таким образом, введение четырехмерного пространства, четырехмерного радиус-вектора S и четырехмерного расстояния ΔS позволяет формально протекание процесса в пространстве и времени описывать «единым махом». Но это далеко не все. Преимущества такого описания будут видны в дальнейшем, а пока перейдем к выводу преобразований Лоренца, т. е. тех преобразований координат и времени, которые должны заменить собой в теории Эйнштейна преобразования Галилея, имевшие место в классической механике. Заметим, что преобразования Галилея оставляли относительные расстояния (а значит, размеры и форму предметов) неизменными, т. е. во всех инерциальных системах отсчета размеры и форма тела одни и те же. То же и с временем протекания процесса Δt — оно одно и то же для всех наблюдателей в инерциальных системах отсчета. Как показывает ныне вся совокупность опытных данных и в частности опыт Майкельсона и Морли, это неверно: размеры тел и времена протекания процессов различны в различных системах отсчета. Правда, это отличие зависит от отношения $\frac{v^2}{c^2}$ (здесь v скорость одной системы отсчета — «движущейся», относительно другой — «неподвижной»). При $v \ll c$, это отношение невелико и изменение размеров тел и времен ничтожно. Но оно есть!

Возникает вопрос, а есть ли что-нибудь такое, что является независящим от выбора системы отсчета, что-нибудь такое, на что можно опираться без трепета душевного? Как сумел угадать Эйнштейн, неизменным для всех инерциальных наблюдателей является четырехмерное расстояние ΔS между двумя точечными событиями, т. е. длина четырехмерного перемещения ΔS. Проекции же этого перемешения на оси x_1, x_2, x_3 и x_4 в разных системах отсчета различны. Именно из инвариантности (неизменности) пространственно-временного интервала ΔS (так его называют) мы и будем исходить при выводе преобразований Лоренца.

§ 5. Интервал и преобразования Лоренца

Покажем теперь, опираясь на постулаты Эйнштейна, что ΔS есть инвариант перехода от одной инерциальной системы отсчета к другой.

Рассмотрим два точечных события:

1) вспышка точечного источника света в некоторой точке пространства в один момент времени;

2) достижение малым участком фронта световой волны некоторого тела N в пространстве к некоторому другому моменту времени.

Пусть эти два события описывают в двух инерциальных системах отсчета A и A', причем система A' движется с постоянной скоростью относительно системы отсчета A (рис. 115), а оси координат взаимно параллельны (это для простоты расчетов).

С точки зрения наблюдателя A вспышка произошла в момент времени t в точке x, y, z, а тело N в точке $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $z+\Delta z$ было достигнуто фронтом волны к моменту времени $t+\Delta t$. С точки же зрения наблюдателя A' вспышка произошла в момент времени t' в точке x', y', z', а тело N было достигнуто фронтом волны в момент времени $t'+\Delta t'$ в точке $x'+\Delta x'$, $y'+\Delta y'$, $z'+\Delta z'$. Приборы системы A зафиксируют прохождение светом расстояния $\Delta r = c\Delta t$, а приборы системы A' — расстояния $\Delta r' = c\Delta t'$. В этих равенствах Δr и $\Delta r'$ Δt и $\Delta t'$, вообще говоря, не равны друг другу, почему они и помечены различно. Что касается c, то по второму постулату оно одно и то же во всех системах отсчета.

Выражая Δr и $\Delta r'$ через приращения координат, получим $\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2=c^2\Delta t^2$, или $\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2-c^2\Delta t^2=0$. Аналогично $\Delta x'^2+\Delta y'^2+\Delta z'^2-c^2\Delta t'^2=0$.

Приравнивая левые части этих равенств, получим

$$\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2-c^2\Delta t^2= \\ =\Delta x'^2+\Delta y'^2+\Delta z'^2-c^2\Delta t'^2,$$

или коротко

$$\Delta r^2-c^2\Delta t^2=\Delta r'^2-c^2\Delta t'^2.$$

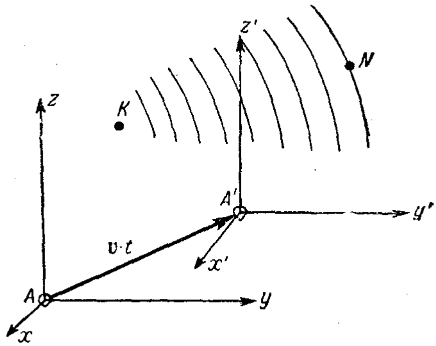

Рис. 115

Здесь Δr и $\Delta r'$ — пространственные интервалы между двумя точками — источником света и телом N, замеренные приборами системы A и A' соответственно; Δt и $\Delta t'$ — временной интервал между двумя событиями (вспышкой света в источнике и достижением фронтом волны тела N), замеренный из A и A'. Величины же $\Delta r^2-c^2\Delta t^2$ и $\Delta r'^2-c^2\Delta t'^2$ называют *пространственно-временным интервалом*, разделяющим два события — вспышку света в источнике в некоторый момент времени и достижение фронтом волны некоторого тела N в другой момент времени. В случае распространения света этот пространственно-временной интервал равен нулю. Но для других пар событий он не равен нулю. Например, если одно событие — бросание камня в некоторый момент времени, в некотором месте, а другое событие — смерть Чичикова в некоторый другой момент времени в другом месте, то для этих событий $\Delta r^2-c^2\Delta t^2\neq 0$.

Принято обозначать $\Delta r^2-c^2\Delta t^2$ через ΔS^2 (иногда делают наоборот — полагают $c^2\Delta t^2-\Delta r^2=\Delta S^2$, — это дело вкуса).

Так вот, если ΔS, разделяющий два события, связанные с распространением света, один и тот же в разных системах отсчета, то, опираясь на первый постулат, мы можем надеяться, что и интервал ΔS, разделяющий любые другие два события тоже будет одинаков для всех инерциальных систем отсчета, поскольку в него не входят начальные условия. Поэтому предположим, что для двух любых событий имеет место:

$$\Delta S = \Delta S' \text{ или } \Delta S^2 = \Delta S'^2,$$

где ΔS и $\Delta S'$ — пространственно-временной интервал между этими событиями в системах A и A' соответственно.

В обозначениях Минковского это равенство примет вид

$$\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \Delta x_3^2 + \Delta x_4^2 = \Delta x_1'^2 + \Delta x_2'^2 + \Delta x_3'^2 + \Delta x_4'^2.$$

Обратим внимание читателя на то, что мы положили $\Delta S = \Delta S'$, а не $\Delta \mathbf{S} = \Delta \mathbf{S}'$. Направления $\Delta \mathbf{S}$ в разных системах отсчета различны, что и приводит к тому, что Δx_i и $\Delta x_i'$ друг другу, вообще говоря, не равны.

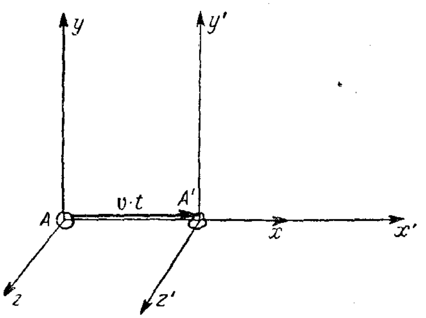

Рис. 116

Рассмотрим случай движения системы отсчета A' относительно системы отсчета A со скоростью $\mathbf{v}$ в сторону положительных значений оси Ox; при этом оси Ox и $O'x'$ пусть совпадают, а оси Oy и $O'y'$, Oz и $O'z$ соответственно параллельны, и в момент $t = 0$ начала координат A и A' совпадали (рис. 116).

Как можно усмотреть в любом курсе линейной алгебры, это значит, что для любой точки соотношение между ее координатами в так выбранных штрихованной и нештрихованной системах координат имеет вид

$$x_1' = ax_1 + bx_4, \tag{1}$$

$$x_2' = x_2, \tag{2}$$

$$x_3' = x_3, \tag{3}$$

$$x_4' = d \cdot x_1 + fx_4. \tag{4}$$

Но тогда равенство $\Delta S^2 = \Delta S'^2$, или, что все равно,

$$\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \Delta x_3^2 + \Delta x_4^2 = \Delta x_1'^2 + \Delta x_2'^2 + \Delta x_3'^2 + \Delta x_4'^2$$

примет вид

$$\Delta x_1^2 + \Delta x_4^2 = \Delta x_1'^2 + \Delta x_4'^2.$$

Подставляя сюда значения x_1' и x_4' из (1) и (4), получим

$$\Delta x_1^2 + \Delta x_4^2 = a^2\Delta x_1^2 + 2ab\Delta x_1\Delta x_4 + b^2\Delta x_4^2 + d^2\Delta x_1^2 + 2df\Delta x_1\Delta x_4 + f^2\Delta x_4^2,$$

или

$$\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 = (a^2 + d^2)\,\Delta x_1^2 + 2\,(ab + fd)\,\Delta x_1 \Delta x_4 + (b^2 + f^2)\,\Delta x_4^2.$$

Поскольку это равенство должно иметь место при любых Δx_1 и Δx_2, то коэффициенты при одинаковых переменных должны быть равны, т. е.

$$1 = a^2 + d^2,$$
$$0 = ab + fd,$$
$$1 = b^2 + f^2.$$

Поскольку $a^2 + d^2 = 1$, то можно положить $a = \cos\varphi$ и $d = \sin\varphi$ (или наоборот), где φ — некоторый угол, который придется находить. То же самое можно сказать и про b и f; полагая $b = \sin\alpha$ и $f = \cos\alpha$, получим в силу $ab + fd = 0$ или $\cos\varphi\cdot\sin\alpha = -\sin\varphi\cdot\cos\alpha$, что $\alpha + \varphi = n\pi$. Но тогда имеем

$$a = \cos\varphi, \qquad d = \sin\varphi,$$
$$b = -\sin\varphi, \quad f = \cos\varphi$$

и преобразования координат примут вид

$$x_1' = x_1\cos\varphi - x_4\sin\varphi,$$
$$x_2' = x_2,$$
$$x_3' = x_3,$$
$$x_4' = x_1\sin\varphi + x_4\cos\varphi.$$

Параметр φ найдем из того, что начало координат системы A' движется со скоростью v относительно системы A. Тогда из $x_1' = x_1\cos\varphi - x_4\sin\varphi$ при $x_1' = 0$ (такова координата начала координат A') следует $\operatorname{tg}\varphi = \left(\frac{x_1}{x_4}\right)_{x_1'=0}$ и так как $x_1 = x$, а $x_4 = ict$, то

$$\operatorname{tg}\varphi = \left(\frac{x_1}{x_4}\right)_{x_1'=0} = \left(\frac{x}{ict}\right)_{x_1'=0} = \frac{v}{ic} = -i\,\frac{v}{c}\,.$$

Отношение $\frac{v}{c}$ принято обозначать буквой β, а тогда $\operatorname{tg}\varphi = -i\beta$.

Выражая $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$ через $\operatorname{tg}\varphi = -i\beta$, получим для преобразования координат:

$$x_1' = \frac{x_1 + i\beta x_4}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{5}$$

$$x_2' = x_2, \tag{6}$$

$$x_3' = x_3, \tag{7}$$

$$x_4' = \frac{x_4 - i\beta x_1}{\sqrt{1-\beta^2}}\,. \tag{8}$$

Или, переходя к обычным координатам, т. е. заменяя везде x_1, x_2, x_3 и x_4 на x, y, z и ict соответственно (так же и со штрихованными координатами), получим после очевидных упрощений

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

$$y' = y,$$

$$z' = z,$$

$$t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Поскольку системы A и A' отличаются друг от друга только направлением относительной скорости $\mathbf{v}$, то нештрихованные координаты через штрихованные будут выражаться равенствами

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \tag{9}$$

$$y = y', \tag{10}$$

$$z = z', \tag{11}$$

$$t = \frac{t' + \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \tag{12}$$

в чем можно было бы убедиться и непосредственным расчетом.

Эти преобразования координат, сопровождающие переход от одной инерциальной системы отсчета к другой, впервые получил голландский физик Лоренц (из других, впрочем, соображений и с другим смыслом входящих в формулы t и t'), почему они и носят его имя.

Сразу обратим внимание читателя на пять обстоятельств:

1) Несмотря на то, что по пути к формулам Лоренца мы пользовались и мнимыми и весьма абстрактными величинами, к финишу пришли только действительные величины с вполне понятным, «ощутимым» смыслом.

2) Величины x_1, x_2, x_3 и x_4 суть проекции четырехмерного вектора $\boldsymbol{S}$ на оси координат, поэтому формулы можно рассматривать, как способ пересчета (преобразования) этого вектора при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой. Но ведь известно, что операции над скалярами производятся по одному и тому же рецепту независимо от того, какого рода этот скаляр: путь или число ящиков или еще что. Аналогично обстоит дело и с правилами обращения с векторами: какова бы ни была

природа вектора, а сложение, умножение, пересчет от одной системы координат к другой производятся по общим для всех векторов правилам. Поэтому, если четыревектор $\boldsymbol{S}$ преобразуется в $\boldsymbol{S}'$ по формулам (5) — (8), то и любой другой четыревектор $\boldsymbol{K}$ преобразуется в $\boldsymbol{K}'$ по тем же правилам (5) — (8). Мы уже знаем два четыревектора — радиус-вектор мировой точки $\boldsymbol{S}$ и ее перемещение (пространственно-временной интервал) $\Delta\boldsymbol{S}$. Ниже мы познакомимся с целым рядом других четыревекторов. Для любого из них при переходе от инерциальной системы A к движущейся относительно нее вдоль оси Ox со скоростью v системе A' (при $O'y' \uparrow\uparrow Oy$ и $O'z' \uparrow\uparrow Oz$) имеет место рецепт

$$K_1' = \frac{K_1 + i\beta K_4}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad K_1 = \frac{K_1' - i\beta K_4'}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

$$K_4' = \frac{K_4 - i\beta K_1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad K_4 = \frac{K_4 + i\beta K_1}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

причем $K_2' = K_2$, $K_3' = K_3$.

Из сказанного ясно, что если длина четыревектора $\Delta\boldsymbol{S}$ во всех инерциальных системах отсчета одна и та же, то это относится и к любому четыревектору $\boldsymbol{K}$. Читатель может убедиться в этом на непосредственном подсчете, найдя R^2 и K'^2 по формулам, приведенным выше.

3) Изложенные весьма формальные и абстрактные понятия довольно часто у неискушенного читателя вызывают ряд вопросов типа: «да на что он нужен этот четыремир, четыревекторы? А каков смысл у этого четыревектора, раз его и представить-то себе нельзя?» Ответ: можно было бы обойтись и без понятия четырехмерного мира Минковского, без введения четыревекторов, но от этого едва ли бы что стало понятней, а вот тяжеловесности в рассуждениях прибавилось бы.

Что касается смысла того или иного четыревектора, так он заключается в том, что три его проекции K_1, K_2 и K_3 находятся в некотором соответствии с аналогичными проекциями трехмерных векторов (обычно они пропорциональны друг другу), а четвертая проекция K_4 имеет чисто мнимый характер, но в конечном счете тоже находится в некотором соответствии с некоторой «обычной» величиной трехмерного мира (в каждом отдельном случае это соотношение свое).

В утешение читателю можно сказать, что когда-то читателю не нравились отрицательные числа, потом комплексные, потом обычные векторы ... А теперь читатель, почти наверное, относится к ним с любовью и уважением. Привык и оценил! Так и с четыревекторами — ничего особенного здесь нет, просто к ним надо привыкнуть. А оценить их можно будет уже вскоре.

4) Часто неискушенные люди говорят: «Как же это так — ни одно тело не может двигаться со скоростью, большей скорости света? Вот опровержение: одна пулька летит вправо по отноше-

нию к Земле со скоростью, к примеру, $u' = \frac{3}{4}c$, а другая влево со скоростью $v = \frac{3}{4}c$. Тогда скорость одной пули по отношению к другой будет $u = u' + v = 1{,}5c$, т. е. больше c!»

Ответ: неправильно произведен пересчет скоростей. Правило пересчета скоростей получим, полагая, например, направления движения пулек вдоль оси x-в. Тогда из (9) и (12) следует

$$dx = \frac{dx' + vdt'}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

$$dt = \frac{dt' + \frac{vdx'}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

и, значит, $u = u_x = \frac{dx}{dt} = \frac{dx' + vdt'}{dt' + \frac{vdx'}{c^2}}$. Деля числитель и знаменатель дроби на dt', получим с учетом того, что $\frac{dx'}{dt'} = u'_x = u'$,

$$u = u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}} = \frac{u' + v}{1 + \frac{vu'}{c^2}}.$$

Подставляя сюда значения $u' = \frac{3}{4}c$ и $v = \frac{3}{4}c$, получим $u = \frac{24}{25}c$.

Таким образом, классическое правило пересчета скоростей неверно.

5) Из выражения для интервала $\Delta S = \sqrt{\Delta r^2 - c^2\Delta t^2}$ видно, что он может быть и действительным (при $\Delta r > c\Delta t$) и мнимым (при $\Delta r < c\Delta t$). Каков смысл того и другого?

Очевидно, действительность интервала, имеющая место при $\Delta r > c\Delta t$, означает, что события произошли в точках, столь отдаленных друг от друга, что за время Δt, разделяющее эти два события во времени, никакой сигнал не успевает пройти это расстояние. Но это значит, что *второе событие не является и не может являться следствием первого, а первое — причиной второго*. Говорят, что такие события не могут быть связаны причинной связью. Примером таких событий могут быть, скажем, такие два события:

1. Выстрел космонавта из пистолета в $t_1 = 00.00.00$ на Марсе.
2. Смерть серого волка в сибирской тайге в $t_2 = 00.0010$.

Ясно, что даже световая «пуля» не успела бы за 10 сек. домчаться от Марса до Сибири. Так что волк умер по другой какой-то причине, а не из-за стрельбы космонавта на Марсе. Эта стрельба *не была и не могла быть* причиной смерти волка.

Если же интервал ΔS между двумя событиями мнимый, то это означает $\Delta r < c\Delta t$, т. е. события произошли невдалеке друг от друга в том смысле, что за время, разделяющее эти два события, сигнал мог дойти от места, где совершилось первое событие, до места, где произошло второе. В этом случае второе событие могло быть следствием первого, а первое — причиной второго. Например:

1. Космонавт стреляет на Луне в $t_1 = 00.00.00$.

2. Волк умирает в Сибири в $t_2 = 00.00.10$. Ясно, что за 10 сек. радиосигнал мог дойти от Луны до тайги, и смерть волка могла быть следствием выстрела на Луне; не обязательно есть, но могла быть! Действительно, если установить на Луне передатчик, а в тайге приемник с могучим репродуктором, то звук выстрела дошел бы до приемника и, усиленный им, так мог бы напугать волка, что тот умер бы от разрыва сердца.

Совершенно очевидно, что интервал, разделяющий два причинно-обусловленных события, будет мнимым. В частности, для движения любого тела $\Delta r < c\Delta t$, а значит, интервал ΔS будет мнимым для любых двух событий с этим телом.

Во избежание недоразумений еще раз напомним, что входящие в $\Delta S^2 = \Delta r^2 - c^2\Delta t^2$ величины Δr и Δt измерены по отношению к той системе отсчета, которая нас интересует; в разных системах отсчета они различны.

Отметим здесь, что при произвольной ориентации скорости системы A' по отношению к A (но оси координат взаимно параллельны) преобразования Лоренца имеют вид

$$\mathbf{r}' = (\mathbf{r} - \mathbf{v}t) + \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right)(\mathbf{v}\cdot\mathbf{r} - v^2 t)\frac{\mathbf{v}}{v^2},$$

$$t' = \frac{t - \frac{\mathbf{vr}}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

где $\beta = \frac{v}{c}$. Переход от $\mathbf{r}'$ и t' к $\mathbf{r}$ и t осуществляется переменной в этих формулах $\mathbf{v}$ на $-\mathbf{v}$, $\mathbf{r}$ на $\mathbf{r}'$ и t на t'.

Читатель помнит, что преобразования Галилея были получены в предположении наличия бесконечно большой скорости передачи сигналов. В преобразованиях же Лоренца учтена конечность этой скорости — c. Отсюда ясно, что преобразования Лоренца как более точные и общие должны содержать в себе преобразования Галилея как некоторый частный случай, как некоторое приближение. Очевидно также, что это приближение получится формально при $c \to \infty$ (а точнее — при $\beta \to 0$, что имеет место при $c \gg v$). Читатель может убедиться в этом сам и получить при указанном условии из преобразований Лоренца преобразования Галилея.

§ 6. Кинематика материальной точки

Перейдем к построению механики специальной теории относительности (с. т. о.). Ее, как и классическую механику, можно строить различными способами. Мы будем вести изложение в таком виде, чтобы было максимум сходства с механикой Ньютона.

Нам придется в дальнейшем иметь дело с четырескоростью U и четыреускорением a, а они получаются в результате дифференцирования четыреперемещения по так называемому собственному времени движущегося тела τ, интервал которого $d\tau$ вводится следующим образом.

Пусть некоторое тело имеет в системе отсчета A скорость $\mathbf{u}$ (обычная трехмерная скорость по отношению к системе A). За время dt по часам системы A это тело, как-то двигаясь, переместится на $d\mathbf{r}$ (обычное трехмерное перемещение). Тогда четыреинтервал будет иметь вид

$$dS = \sqrt{dr^2 - c^2 dt^2}.$$

Производя очевидные преобразования и учитывая, что $\frac{|d\mathbf{r}|}{dt} = u$, получим

$$dS = \sqrt{-c^2 dt^2\left(1 - \frac{dr^2}{dt^2}\frac{1}{c^2}\right)} = icdt\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}},$$

откуда

$$\frac{dS}{ic} = dt\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}.$$

Так как в левой части равенства стоят величины, не зависящие от выбора системы отсчета, то и правая часть равенства не зависит от выбора системы отсчета, т. е. является инвариантом перехода от одной инерциальной системы отсчета к другой.

Эта величина имеет размерность времени и называется *интервалом собственного времени движущегося тела*, т. е. это тот промежуток времени $d\tau$, который отметят часы, находящиеся на этом теле, в то время как часы системы A, по отношению к которой тело движется со скоростью u, отметят время dt. Итак, $d\tau = dt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$.

Определим теперь *четырескорость* этого тела формулой

$$\boldsymbol{U} = \frac{d\boldsymbol{S}}{d\tau}.$$

Чтобы уяснить смысл этой скорости распишем ее по проекциям. Тогда

$$U_1 = \frac{dS_1}{d\tau} = \frac{dx_1}{d\tau} = \frac{dx}{dt\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{u_x}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}.$$

Аналогично

$$U_2=\frac{u_y}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}},$$

$$U_3=\frac{u_z}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}},$$

$$U_4=\frac{ic}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}.$$

Видно, что первые три проекции четырескорости суть величины в $1\Big/\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$ раз отличающиеся от обычных проекций u_x, u_y и u_z обычной скорости $\mathbf{u}$, а четвертая проекция — чисто мнимая величина, физического смысла не имеющая.

Так как dS и $d\tau$ для данного процесса не зависит от выбора системы отсчета, то и модуль четырескорости $\boldsymbol{U}$ не зависит от выбора системы отсчета, хотя модуль соответствующей ей трехмерной скорости $\mathbf{u}$ имеет величину разную в разных системах отсчета. Мало того, в е л и ч и н а U одна и та же для всех тел и равна ic. Действительно: $U=\frac{dS}{d\tau}$, а так как $d\tau=\frac{dS}{ic}$, то $U=ic$.

Четыреускорение $\boldsymbol{a}$ *определятся* формулой

$$\boldsymbol{a}=\frac{d\boldsymbol{U}}{d\tau}.$$

В дальнейшем нам пригодится знание того факта, что $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{U}$. Покажем это. Так как U есть постоянная для всех тел, то $\boldsymbol{U}$ может изменяться лишь по направлению, что и означает $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{U}$, или $\boldsymbol{a}\boldsymbol{U}=0$, или в проекциях на оси $a_1U_1+a_2U_2+a_3U_3+$ $+a_4U_4=0$.

Не надо пытаться себе представлять, как это «выглядит». Надо просто знать, что скалярное произведение $\boldsymbol{a}$ на $\boldsymbol{U}$ равно нулю и все! Если угодно, можно вообще не употреблять термин «перпендикулярны друг другу».

Читатель мог заметить, что кинематика с.т.о. нами излагалась подобно классической кинематике материальной точки. Именно:

1) выбиралась система отсчета,

2) вводился четырехмерный радиус-вектор $\boldsymbol{S}$, определяющий положение мировой точки в этой системе отсчета,

3) вводилось четырехмерное перемещение мировой точки $\Delta\boldsymbol{S}$ (можно было бы ввести и четырехмерный отрезок мировой линии ΔL, подобно тому как в классической кинематике вводился отрезок траектории),

4) определялась четырескорость $U = \frac{dS}{d\tau}$,

5) определялось четыреускорение $a = \frac{dU}{d\tau}$.

Очевидно, что по известному $a(\tau)$ можно найти $U(\tau)$ и $S(\tau)$; именно:

$$U = U_0 + \int_0^\tau a(\tau')\, d\tau',$$

$$S = S_0 + \int_0^\tau U(\tau')\, d\tau'.$$

Отличие кинематики с.т.о от кинематики материальной точки в классической механике заключается в том, что:

а) с.т.о. имеет дело с четыревекторами, описывающими поведение материальной точки в четырехмерном пространстве — времени; классическая же кинематика имела дело с тривекторами, описывающими поведение материальной точки в трехмерном пространстве.

б) То, что $\Delta S = \Delta S'$ мы догадались, опираясь на постулаты Эйнштейна. Для того чтобы $U = U'$ (это гораздо приятней, чем $U \neq U'$), надо было их определить как отношение dS и dS' к такому времени $d\tau$, для которого имело бы место $d\tau = d\tau'$, иначе при равных числителях и неравных знаменателях дроби $\frac{dS}{d\tau}$ и $\frac{dS'}{d\tau'}$ не были бы равны. Для этой цели и было введено нами собственное время τ. По аналогичной причине и a определялось как производная от U по собственному времени частицы τ.

в) Модули классических векторов $\mathbf{r}$, $\mathbf{u}$ и $d\mathbf{r}$ имели различные значения в различных системах отсчета. Модули же четыревекторов S, dS, U и другие для одной и той же мировой точки одинаковы во всех инерциальных системах отсчета. Иными словами, переход от A к A' сопровождается поворотом четыревекторов S, ΔS, U, a и т. д., описывающих поведение мировой точки, на некоторые мнимые углы.

§ 7. Динамика материальной точки

Первый закон динамики с.т.о. утверждает существование в природе систем отсчета сколь угодно близких к инерциальным. При этом полагается, что не только механические, но и всякие другие явления выглядят в таких системах наиболее просто и описываются наиболее простыми уравнениями. Отыскивать такие системы отсчета можно так же, как и в случае механики Ньютона: если свободное тело в некоторой системе отсчета не имеет по отношению к ней ускорения, то эта система отсчета инерциальна.

Поскольку второй закон более обще формулируется с помощью понятия импульса тела, то и в с.т.о. закон движения материальной точки мы сформулируем аналогично, для чего определим сперва понятие четыреимпульса. Хотя классическая физика и утверждала, что масса тела не зависит от скорости, но уверенности в этом теперь нет, поэтому договоримся обозначать через m_0 массу тела в той системе отсчета, по отношению к которой тело покоится; поэтому величину m_0 и называют массой покоя тела.

С учетом сказанного *определим четыреимпульс* тела равенством $\boldsymbol{P}=m_0\boldsymbol{U}$. Расписывая это равенство по проекциям, получим

$$P_1=m_0U_1=\frac{m_0u_x}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}},$$

$$P_2=m_0U_2=\frac{m_0u_y}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}},$$

$$P_3=m_0U_3=\frac{m_0u_z}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}},$$

$$P_4=m_0U_4=\frac{m_0ic}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}.$$

Если положить $\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}=m$ и считать, что из системы отсчета, по отношению к которой тело движется со скоростью u, замер массы тела даст не m_0, а m, то величины

$$\frac{m_0u_x}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}},\quad \frac{m_0u_y}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \text{ и } \frac{m_0u_z}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

будут ни чем иным как проекциями обычного импульса материальной точки в той системе отсчета, по отношению к которой ее скорость равна $\mathbf{u}$. Но тогда

$$P_1=mu_x=p_x,$$

$$P_2=mu_y=p_y,$$

$$P_3=mu_z=p_z,$$

$$P_4=imc.$$

В последнее равенство пока что трудно вложить какой-либо определенный смысл, а смысл первых трех очевиден: первые три проекции четыреимпульса есть просто проекции обычного импульса на оси x, y и z. Правда, по пути нам пришлось предположить, что $m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$. Это предположение подтверждается всей совокупностью опытов, а потому действительно

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}.$$

Остается теперь угадать вид уравнения движения для материальной точки. Это удастся сделать, если мы учтем, что оно должно быть ковариантно по отношению к преобразованиям Лоренца, т. е. и справа и слева должны стоять четыревекторы. А для сходства с законом Ньютона необходимо, чтобы слева стояла быстрота изменения импульса (четырехмерного, однако), а справа — сила (четырехмерная, конечно). С четыреимпульсом $\boldsymbol{P}$ мы знакомы. Его изменение за малое время $d\tau$, конечно же, тоже четыревектор, ибо $d\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}_0$, т. е. разность четыревекторов. Чтобы быстрота изменения $\boldsymbol{P}$ была тоже четыревектором, надо $d\boldsymbol{P}$ поделить на время, за которое он изменился, но на такое, которое для всех систем отсчета было бы одно и тоже, т. е. на $d\tau$. Но тогда $\frac{d\boldsymbol{P}}{d\tau}$ будет четыревектором, который мы приравняем к четырехмерной силе, смысл которой выясним потом. Итак, по нашему предположению:

$$\frac{d\boldsymbol{P}}{d\tau}=\boldsymbol{F}. \tag{1}$$

Теперь надо разобраться в написанном равенстве, для чего заменим $d\tau$ на $dt\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$ и перепишем в виде

$$\frac{d\boldsymbol{P}}{dt}=\boldsymbol{F}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}.$$

А теперь, конечно, это равенство распишем в проекциях с учетом $P_1=p_x$, $P_2=p_y$, $P_3=p_z$ и $P_4=imc$:

$$\frac{dp_x}{dt}=F_1\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}, \tag{1a}$$

$$\frac{dp_y}{dt}=F_2\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}, \tag{2}$$

$$\frac{dp_z}{dt}=F_3\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}, \tag{3}$$

$$\frac{d\,(imc)}{dt}=F_4\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}. \tag{4}$$

В первых трех равенствах слева стоят производные от проекций импульса по обычному времени, т. е. по часам той системы, в которой скорость интересующего нас тела равна $\mathbf{u}$. Но тогда, естественно, предположить, что справа должна быть проекция обычной трехмерной силы. А это означает, что

$$F_1\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}=f_x,$$

$$F_2\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}=f_y,$$

$$F_3\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}=f_z.$$

Таким образом, первые три проекции четыресилы $\boldsymbol{F}$ отличаются от проекций обычной силы просто множителем $\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$, а первые три проекции релятивистского уравнения движения есть просто закон изменения трехмерного импульса, т. е. второй закон Ньютона, расписанный в проекциях на оси x, y и z с учетом

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}.$$

Для выяснения смысла четвертой проекции подсчитаем скалярное произведение $\boldsymbol{U}$ на $\boldsymbol{F}$. Именно:

$$\boldsymbol{UF}=\boldsymbol{U}\frac{d\boldsymbol{P}}{d\tau}=\boldsymbol{U}\frac{d}{d\tau}m_0\boldsymbol{U}=m_0\boldsymbol{U}\frac{d\boldsymbol{U}}{d\tau}=m_0\boldsymbol{U}\boldsymbol{a}=0$$

или через проекции

$$U_1F_1+U_2F_2+U_3F_3+U_4F_4=0.$$

Отсюда

$$F_4=-\frac{U_1F_1+U_2F_2+U_3F_3}{U_4}. \tag{5}$$

Подставляя в правую часть равенства (5) вместо проекций четыревекторов их выражения через проекции трехмерных векторов, получим

$$F_4=-\frac{\frac{u_x}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\cdot\frac{f_x}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}+\frac{u_y}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\cdot\frac{f_y}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}+\frac{u_z}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\cdot\frac{f_z}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}}{\frac{ic}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}}=$$

$$=-\frac{f_xu_x+f_yu_y+f_zu_z}{ic\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}=-\frac{\mathbf{fu}}{ic\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}=\frac{i}{c}\cdot\frac{\mathbf{fu}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}.$$

Подставляя полученное выражение для F_4 в четвертую проекцию релятивистского уравнения движения (в (4)), получим

$$\frac{d}{dt} imc = \frac{i}{c} \frac{\mathbf{fu}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} = \frac{i}{c} \mathbf{fu},$$

или, умножая получившееся равенство на $-ic$

$$\frac{d}{dt} mc^2 = \mathbf{fu}. \tag{4a}$$

Но $\mathbf{fu} = \mathbf{f}\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dA}{dt}$

и, значит, $\frac{d}{dt} mc^2 = \frac{dA}{dt}$.

Чтобы это равенство имело смысл, необходимо считать, что

$$mc^2 = E.$$

Тогда равенство (4a) записывается в виде $\frac{dE}{dt} = \frac{dA}{dt}$ и есть не что иное, как закон изменения энергии материальной точки.

Окончательно приходим к выводу, что релятивистское уравнение движения

$$\frac{dP}{d\tau} = F \quad \text{или} \quad \frac{dP}{dt} = F\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$$

есть закон изменения энергии и импульса, а сам четыреимпульс есть вектор энергии-импульса, ибо, как показано выше, первые три его проекции образуют обычный трехмерный импульс, а четвертая проекция, как теперь ясно, отличается от энергии тела на множитель $\frac{i}{c}$. Действительно, $P_4 = imc = \frac{i}{c} mc^2 = \frac{i}{c} E$ в силу $mc^2 = E$.

Установим теперь связь между трехмерным импульсом и энергией. Проще всего это сделать, возведя в квадрат равенство

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}.$$

Тогда после очевидных преобразований

$$m^2c^2 = m_0^2c^2 + m^2u^2.$$

Так как $mu = p$, то

$$m^2c^2 = m_0^2c^2 + p^2.$$

Умножая это равенство на c^2 и учитывая $mc^2 = E$, получим

$$E^2 = m_0^2c^4 + p^2c^2 \tag{6}$$

вместо имевшегося в классической физике соотношения

$$W=\frac{p^2}{2m}. \tag{7}$$

Можно показать, что из (6) при $u^2 \ll c^2$ вытекает (7). Впрочем и из многих релятивистских формул при малых скоростях движений тел, т. е. при $u^2 \ll c^2$, вытекают соответствующие классические формулы, хотя это и не всегда просто показать — надо знать математику в несколько большем объеме, чем пользуемся мы в этой книге.

Следует отметить, что работу $dA=dE$ совершает результирующая сила $\mathbf{f}$, а это значит, что величина $E=mc^2=\sqrt{m_0^2c^4+p^2c^2}$ есть энергия, обусловленная движением тела, т. е. это аналог кинетической энергии в классической механике. Можно показать, что полная энергия частицы, движущейся в электрическом и гравитационном полях, выражается формулой

$$E=mc^2+q\varphi+\mu\chi.$$

Частицу, не находящуюся в силовых полях, называют свободной, а потому энергию $E=mc^2$ часто называют энергией свободной частицы.

Третий закон Ньютона в с. т. о. имеет вид

$$\boldsymbol{F}_{\mu,n}=-\boldsymbol{F}_{n,\mu}, \tag{8}$$

т. е равными и противоположными являются не трисилы, а четыресилы взаимодействия.

С помощью равенств (1) и (8), написанных для системы материальных точек, можно получить закон изменения четыреимпульса системы в виде

$$\frac{d\boldsymbol{P}}{d\tau}=\boldsymbol{F}, \tag{9}$$

где $\boldsymbol{P}$ — четыреимпульс системы, $\boldsymbol{F}$ — внешняя четыресила, действующая на систему.

В случае замкнутой системы из N материальных точек имеем

$$d\boldsymbol{P}=0 \text{ или } \boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_0, \tag{10}$$

$$\boldsymbol{P}=\text{const}, \tag{11}$$

где $\boldsymbol{P}_0$ и $\boldsymbol{P}$ — импульсы до и после взаимодействия.

Таким образом, в замкнутой системе материальных точек четыреимпульс сохраняется.

Для компактной записи четыревекторов удобно ввести орт $\mathbf{l}$ нормальный обычным ортам $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$. Тогда любой четыревектор $\mathbf{B}$ запишется в виде

$$\mathbf{B}=B_1\mathbf{i}+B_2\mathbf{j}+B_3\mathbf{k}+B_4\mathbf{l},$$

или

$$\mathbf{B}=\mathbf{b}+B_4\mathbf{l},$$

где $\mathbf{b}$ — трехмерная часть четыревектора $\boldsymbol{B}$, а $B_4\mathbf{l}$ — его мнимая часть. С учетом сказанного векторы $\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{P}$ запишутся в виде

$$\boldsymbol{S} = \mathbf{r} + ict\mathbf{l},$$

$$\boldsymbol{U} = \frac{\mathbf{u} + ic\mathbf{l}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}},$$

$$\boldsymbol{P} = m_0\boldsymbol{U} = \mathbf{p} + imc\mathbf{l}.$$

Теперь равенства (10) и (11) запишутся так:

$$\sum_{\gamma=1}^{N} (\mathbf{p}_\gamma + im_\gamma c\mathbf{l}) = \sum_{n=1}^{N+M} (\mathbf{p}_n + im_n c\mathbf{l}), \tag{12}$$

$$\boldsymbol{P} = \sum_{\gamma=1}^{N} (\mathbf{p}_\gamma + im_\gamma c\mathbf{l}) = \text{const}.$$

Здесь справа и слева указано разное число частиц, ибо при ударе могли образоваться новые частицы.

Учитывая правила сравнения комплексных чисел, равенство (12) можно переписать в виде двух равенств:

$$\sum_{\gamma=1}^{N} \mathbf{p}_\gamma = \sum_{n=1}^{N+M} \mathbf{p}_n, \tag{13}$$

$$\sum_{\gamma=1}^{N} im_\gamma c\mathbf{l} = \sum_{n=1}^{N+M} im_n c\mathbf{l}, \tag{14}$$

с учетом постоянства c и $\mathbf{l}$ (14) запишется в виде

$$\sum_{\gamma=1}^{N} m_\gamma = \sum_{n=1}^{N+M} m_n. \tag{15}$$

Равенство (13) есть закон сохранения релятивистского импульса, а равенство (15) — закон сохранения релятивистской массы (а значит, и энергии).

Отметим, что равенства (8) — (15), строго говоря, справедливы лишь при взаимодействии всех материальных точек в одной и той же точке пространства. Если же материальные точки в пространстве-времени разделены, то равенство (8) становится вообще говоря, неверным, равно как и равенство (9).

Равенство (9) запишется с учетом сказанного о компактной записи четыревекторов в виде

$$\frac{d}{d\tau}(\mathbf{p} + imc\mathbf{l}) = \boldsymbol{F},$$

или

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{p} + imc\mathbf{l}) = \boldsymbol{F}\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}.$$

С учетом того, что

$$(F_1\mathbf{i}+F_2\mathbf{j}+F_3\mathbf{k})\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}=\mathbf{f}$$

и

$$F_4\mathbf{l}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}=i(\mathbf{f}\cdot\mathbf{u})\frac{1}{c}$$

получим

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt}=\mathbf{f}, \tag{16}$$

$$\frac{d(imc\mathbf{l})}{dt}=i(\mathbf{fu})\frac{1}{c}. \tag{17}$$

Равенство (16) есть трехмерная часть четырехмерного закона движения или закон изменения трехмерной части импульса. Равенство же (17) в проекции на орт l дает, очевидно,

$$\frac{d(mc^2)}{dt}=\mathbf{f}\cdot\mathbf{u},$$

что является законом изменения энергии («кинетической» энергии).

То, что равенство (8) описывает взаимодействие, происходящее в одной и той же точке пространства-времени (т. е. мгновенный удар при непосредственном контакте обеих материальных точек), следует из самого равенства (8). Именно, представляя силу $\boldsymbol{F}$ в виде двух слагаемых, получим

$$\boldsymbol{F}=\frac{\mathbf{f}+i(\mathbf{fu})\frac{1}{c}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}.$$

Но тогда (8) распадается на два равенства:

$$\frac{\mathbf{f}_{\mu,n}}{\sqrt{1-\frac{u_\mu^2}{c^2}}}=-\frac{\mathbf{f}_{n,\mu}}{\sqrt{1-\frac{u_n^2}{c^2}}},\qquad \frac{\mathbf{f}_{\mu,n}\mathbf{u}_\mu}{\sqrt{1-\frac{u_\mu^2}{c^2}}}=-\frac{\mathbf{f}_{n,\mu}\mathbf{u}_n}{\sqrt{1-\frac{u_n^2}{c^2}}}.$$

Эти два равенства не противоречат друг другу лишь при $\mathbf{u}_\mu=\mathbf{u}_n$, а это и означает, что обе взаимодействующие материальные точки движутся совместно, т. е. их взаимодействие происходит в точке.

§ 8. Электромагнитное поле в теории относительности

В этой книге у нас нет возможности говорить сколько-нибудь серьезно о теории поля в с. т. о. Для подобного разговора нужно обладать более тяжеловесным математическим аппаратом, чем тот, которым пока что располагали мы.

Скажем, однако, что уравнения Максвелла им написаны в форме, ковариантной относительно преобразований Лоренца, только увидеть это нам пока трудно. Читатель может принять на веру следующие формулы (верные для случая движения A' вдоль оси x-в относительно системы A со скоростью $\mathbf{v}$):

$$E'_x = E_x, \tag{1}$$

$$E'_y = \frac{E_y - vBz}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{2}$$

$$E'_z = \frac{E_z + vB_y}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{3}$$

$$B'_x = B_x, \tag{4}$$

$$B'_y = \frac{B_v + \frac{v}{c^2} E_z}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{5}$$

$$B'_z = \frac{B_z - \frac{v}{c^2} E_v}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{6}$$

Где $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ — векторы электрического и магнитного полей в инерциальной системе A, а $\mathbf{E}'$ и $\mathbf{B}'$ — векторы того же поля в системе A', движущейся по отношению к системе A со скоростью $\mathbf{v}$ вдоль оси x-в.

Таким образом, понятия электрического и магнитного полей суть понятия относительные в том смысле, что в разных системах отсчета одно и то же электромагнитное поле имеет разные значения $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$. Из приведенных формул видно, что если, например, в системе A $\mathbf{E}=0$, то в системе A' $\mathbf{E}'\neq 0$ и т. д.

Понятие единого электромагнитного поля уже абсолютно, т. е. если оно есть в одной системе отсчета, то оно есть и в другой. Можно показать, что несмотря на относительность величин $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ существует целый ряд их комбинаций, являющихся инвариантами преобразований Лоренца, т. е. не меняющихся при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой. Пользуясь формулами (1) — (6), читатель прямым вычислением может убедиться, например, в том, что

$$\mathbf{E}\mathbf{B} = \mathbf{E}'\mathbf{B}' \quad \text{и} \quad c^2B^2 - E^2 = c^2B'^2 - E'^2.$$

Вводя четырехмерную плотность тока равенством

$$\boldsymbol{f} = \rho_0 \boldsymbol{U} = \frac{\rho_0(\mathbf{u} + ic\mathbf{l})}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \rho(\mathbf{u} + ic\mathbf{l}), \tag{7}$$

приходим к необходимости полагать

$$\rho = \frac{\rho_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \quad \text{и} \quad \mathbf{j} = \rho\mathbf{u}. \tag{8}$$

Но тогда с учетом того, что объем тела при движении уменьшается в соответствии с равенством $V = V_0 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$, получаем, что

$$q = \rho V = \frac{\rho_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} V_0 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = \rho_0 V_0 = q_0, \tag{9}$$

т. е. заряд тела есть инвариант преобразований Лоренца.

Выражение для силы Лоренца совпадает с обычным, т. е. имеет вид

$$\mathbf{f}_Л = q(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}). \tag{10}$$

Но величины **E**, **B** и **u** в разных системах отсчета различны, что при учете (9) означает неинвариантность силы Лоренца по отношению к преобразованиям Лоренца.

Наконец дифференциальная форма закона Ома для случая неподвижной среды, в которой заряды движутся со скоростью **u** в полях **E** и **B**, имеет вид

$$\mathbf{j} = \lambda_0 \frac{\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}.$$

Заметим, что фигурирующие в этом параграфе величины **E** и **B** (равно как **E′** и **B′**) определены так же, как в классической электродинамике, т. е. по существу равенством (10).

§ 9. Об измерениях в теории относительности

Прежде всего, отметим еще раз, что каждый наблюдатель для получения информации об интересующих его телах пользуется в теории относительности световыми или радиолокационными сигналами. (Конечно же в случае тел, движущихся относительно него с очень малыми скоростями, наблюдатель может производить измерения и «по старинке», т. е. классическими методами.)

1. Расстояние r до интересующей его материальной точки N наблюдатель системы A определяет так: он посылает к этой точке сигнал (например, радиолокатора) в момент времени t_1; отраженный материальной точкой сигнал возвращается в момент t_2. Очевидно, $(t_2 - t_1)_N$ есть время прохождения сигнала туда и обратно с одинаковой (по второму постулату) скоростью c, а поэтому

$$r_N = \frac{c(t_2 - t_1)_N}{2}.$$

При этом, очевидно, сигнал достиг материальной точки в момент $t_N = \frac{(t_3 + t_1)_N}{2}$ по часам системы A.

2. Для определения скорости **u** некоторого тела N раскладывают **u** на лучевую (на направление, определенное прямой ON на рис. 117) $\mathbf{u}_л$ и поперечную $\mathbf{u}_п$.

Лучевую определяют так: $u_л = \frac{\Delta r_л}{\Delta t} = \frac{r_D - r_B}{t_D - t_B}$.

С учетом сказанного в предыдущем пункте получим:

$$u_л = \frac{(t_2 - t_1)_D - (t_2 - t_1)_B}{(t_2 + t_1)_D - (t_2 + t_1)_B} c,$$

где индексы B и D означают показания часов системы A при определении r_B, r_D, t_B и t_D по способу, указанному выше.

Из рис. 117 видно, что

$$u_п = \frac{\Delta r_п}{\Delta t} = \frac{r_D \Delta\alpha}{\Delta t} = r_D \frac{\Delta\alpha}{\Delta t},$$

где $\Delta\alpha$ — угол поворота луча радиолокатора (линии ON) за время Δt, равное времени перемещения тела N из точки B в точку D.

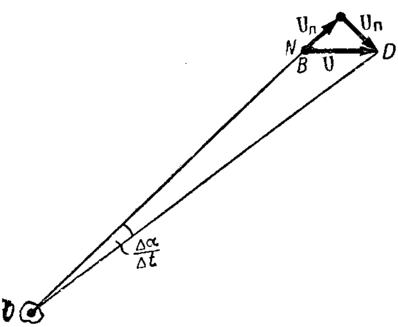

Рис. 117

(Очевидно, что один радиолокатор может «не угадать», где будет тело в какой-то момент времени. Но можно поставить миллион локаторов, повернутых друг по отношению к другу на малые углы и работающих синхронно, т. е. посылающих сигналы одновременно. Такая система эквивалентна некоторому «умеющему» следить за обстановкой в мире одному локатору.)

Но в таком случае

$$u_п = \frac{c\,(t_2 - t_1)_D}{2} \cdot \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \frac{c(t_2 - t_1)_D}{2}\,\omega,$$

где ω — угловая скорость вращения локатора. При расчете полагалось, конечно же, что $\Delta r \ll r$. Совокупность $u_л$ и $u_п$ вполне определяет скорость тела.

3. Снятие показания часов системы A' из системы A производится так. Телевизионный радиолокатор системы A посылает сигнал к часам системы A' в момент t_1, а отраженный сигнал, несущий телеизображение часов системы A', приходит в момент t_2. Сигнал достиг часов A', показывающих t', в момент $t = \frac{(t_2 + t_1)_{A'}}{2}$ по часам системы A. Можно часы в A' поставить заранее на $t' = 0$ с тем, чтобы пришедший из A сигнал пустил их в ход. При этом если $t_1 = 0$, то $t = \frac{(t_2 + t_1)_{A'}}{2} = \frac{t_2}{2}$ в то время,

когда сигнал из A достиг системы A' и пустил в ней часы, показывающие в этот момент $t'=0$. Таким образом, мы можем приводить в соответствие t и t' экспериментально и сравнить это соотношение с тем, которое дают преобразования Лоренца.

4. Аналогично обстоит дело с определением соотношений между x и x' некоторой точки N. В системе A измеряют ее положение по отношению к себе в момент t, а локатор системы A приносит снимок локатора системы A', который измерил координату этой же точки N в момент t' по отношению к системе A'.

Полученные экспериментально значения сопоставляют с теми, которые фигурируют в преобразованиях Лоренца.

5. Существенно сложнее обстоит дело в случае экспериментальной проверки динамических соотношений типа $m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$.

Но можно сослаться здесь на то, что ускорители элементарных частиц, построенных с учетом релятивистских эффектов, прекрасно работают, что и служит экспериментальным подтверждением динамики теории относительности. Одновременно работа таких ускорителей позволяет косвенно производить измерения динамических величин, которые непосредственно измерить невозможно (не на весы же подвешивать частицу, движущуюся с колоссальной скоростью).

6. Измерение интервалов Δx и их сопоставление с $\Delta x'$ производится аналогично x и x'. Из преобразований Лоренца и из способа измерения Δx и $\Delta x'$ следует, что соотношение между Δx и $\Delta x'$ зависит от взаимного движения систем A и A', а также от характера движения интересующегося нас тела.

Введем понятие собственного расстояния dx' в системе A' как расстояния между некоторыми точками M и N, неподвижными в системе A' и расположенными вдоль оси $O'x'$ (а значит, вдоль Ox и относительной скорости $\mathbf{v}$ систем A и A'). При этом измеряется dx' из системы A'.

Возникает вопрос о том, как измерять это расстояние из системы A. Очевидно, что если посылать сигнал из A к точке N в некоторый момент t, а к точке M через некоторое произвольное время dt, то полученное значение dx будет для одного и того же расстояния зависеть от dt, что довольно бессмысленно. Очевидно, dx — это расстояние между точками M и N в один и тот же момент по часам системы A. Таким образом, надо так отправить сигналы к интересующим нас точкам, чтобы они пришли к этим точкам одновременно по часам системы A (а значит, отправлять эти сигналы надо не одновременно, а так, чтобы $t_M=t_N$ или $\frac{(t_1+t_2)_M}{2}=\frac{(t_1+t_2)_N}{2}$). Но это значит, что dx выразится той формулой преобразований Лоренца, в которую входит dx' (измеренное из A'), и dx (измеренное из A) при условии $dt=0$

(по часам A). Т. е. из двух формул, связывающих dx и dx'

$$dx = \frac{dx' + v\,dt'}{\sqrt{1-\beta^2}} \text{ и } dx' = \frac{dx - v\,dt}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

следует воспользоваться той, куда входит dt, т. е. второй формулой. Это приводит при $dt = 0$ к тому, что

$$dx' = \frac{dx}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Такое значение dx' и называют *собственным расстоянием* между точками M и N, расположенными вдоль оси $O'x'$ в системе A'. Поскольку указанные точки не движутся по отношению к системе A', то можно положить $u'_N = u'_M = u' = 0$, а тогда $u = v$ в силу $u = \dfrac{u' + v}{1 + \dfrac{vu'}{c^2}}$, и значит, если некоторое тело движется по отношению к системе A со скоростью u вдоль оси Ox, то собственное расстояние между двумя точками этого тела вдоль оси Ox выразится формулой

$$dx' = \frac{dx}{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}}.$$

При $u = 0$ имеем, естественно, $dx = dx'$.

Из определения dx' следует, что dx' есть инвариант преобразований Лоренца, т. е. собственная длина, собственные расстояния в системе отсчета не зависят от скорости движения этой системы по отношению к другим системам отсчета.

Зависеть от выбора системы отсчета будет dx, измеряемый из системы A, а не dx', измеряемый из A'.

Что касается поперечных расстояний в теле (его поперечных скорости движения u размеров), то они вообще для всех систем отсчета одинаковы в силу

$$dy' = dy, \quad dz' = dz.$$

Интервалом собственного времени в системе A' называют тот промежуток времени dt', который отмеряют часы неподвижные по отношению к этой системе ($dx' = 0$ для этих часов).

Но тогда из двух формул преобразования времени по Лоренцу

$$dt = \frac{dt' + \dfrac{v\,dx'}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} \text{ и } dt' = \frac{dt - \dfrac{v\,dx}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

собственное время надо вычислять по той формуле, в которую входит dx', т. е. по первой. Из нее для случая $dx' = 0$ следует

$$dt' = dt\sqrt{1-\beta^2}.$$

Так определенное dt' обозначают $d\tau$ и тогда

$$d\tau = dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}.$$

В силу $u'=0$ имеем $u'=v$, а тогда

$$d\tau = dt\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}},$$

где u — скорость движения часов по отношению к некоторой системе A. Так определенное собственное время совпадает с введением ранее

$$d\tau = \frac{ds}{ic} = dt\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}.$$

Вообще *собственным значением какой-либо физической величины* в системе A', движущейся по отношению к A, называют значения этих величин, измеренных в системе A' при условии, что тело, характеристики которого измеряют, по отношению к A' не движется.

В этом смысле то, что мы называли массой покоя частицы, есть собственная масса частицы.

Следует обратить внимание на то, что разные собственные величины могут быть как больше «несобственных», так и меньше их. Например:

$$dx' = dx_{\text{собств}} = \frac{dx}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

$$dt' = dt_{\text{собств}} = dt\sqrt{1-\beta^2},$$

$$m_0 = m_{\text{собств}} = m\sqrt{1-\beta^2}.$$

§ 10. Абсолютные и относительные величины

Рассмотрим один пример. Пусть имеются две совершенно одинаковые лаборатории A и A', снабженные совершенно одинаковыми приборами. Пусть в каждой из них будет по линейке, по гире, по экземпляру часов и по заряженному шарику. Когда лаборатории покоятся одна относительно другой, то наблюдатель из A видит у себя и в системе A' совершенно одинаковые со своими линейку, гирю, часы, шарик. То же самое видит и наблюдатель из системы A'. Если теперь эти системы будут двигаться равномерно одна относительно другой со скоростью v, то наблюдатель системы A не заметит у себя никаких перемен, но заметит, что в системе A' линейка укоротилась в направлении v в $1/\sqrt{1-\beta^2}$ раз, масса гири увеличилась в $1/\sqrt{1-\beta^2}$ раз, часы стали «тикать» медленнее в $1/\sqrt{1-\beta^2}$ раз и что в системе A' появилось вдобавок к электрическому полю еще и магнитное.

Наоборот, наблюдатель системы A' будет считать (и приборы это подтвердят, как и в системе A), что у него ничего не изменилось, а вот в системе A линейка укоротилась в направлении $\mathbf{v}$, масса гири увеличилась, часы идут медленнее (все это в $1/\sqrt{1-\beta^2}$ раз), и к электрическому полю добавилось магнитное.

А как на самом деле? Этот вопрос лишен смысла в той же мере, как лишен смысла вопрос: кто из двух идущих навстречу друг другу людей впереди? Или, когда они идут один мимо другого, кто из них слева и кто справа? Или, скажем, из одной точки некий предмет виден под углом α, а из другой — под углом α'; а на самом деле под каким же углом виден предмет? Эти вопросы надо ставить иначе — как обстоит дело с точки зрения наблюдателя A (или, наоборот, A')? Кто из двух идущих навстречу друг другу людей (Иван и Петр) впереди по отношению к Ивану (или, наоборот, к Петру)? Под каким углом виден предмет из такой-то точки и т. д.?

Дело в том, что такие понятия, как длина, масса, интервалы времени, электрическое и магнитное поле (порознь), понятия «впереди» и «сзади», «справа» и «слева», «угол зрения», «скорость», «перемещение», «сила» и т. д. относительны и для разных наблюдателей различны. Поэтому, говоря о них, надо указывать по отношению к какой системе отсчета они измерены.

Есть, однако, и такие величины, которые для всех наблюдателей имеют одинаковое значение. Это, например, величины c, ΔS, U, $\mathbf{B}\cdot\mathbf{E}$, $c^2B^2-E^2$ и ряд других. Говоря о таких величинах совершенно нет необходимости делать оговорку о том, в какой системе они измерены (хотя, конечно, следует указать, о каком событии, теле, явлении и т. д. идет речь).

§ 11. Значение теории относительности

Подведем коротко главные итоги. Теория относительности, сменившая теорию, созданную Галилеем, Ньютоном и другими учеными

1) вывела физику из казалось бы безвыходного положения с эфиром, нековариантностью уравнений по отношению к преобразованиям координат, связанных с переходом от одной системы к другой и др.,

2) установила границы применимости законов классической механики — они верны при движениях со скоростями, много меньшими скорости света,

3) позволила глубже понять электромагнитные явления, в частности показала относительность понятий $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$,

4) заставила пересмотреть укоренившиеся в течение веков представления о пространстве и времени: оказалось, что понятия «размер» и «форма» тела, понятие «раньше», «позже» — относительны, или, как говорят, метрические соотношения в пространстве относительны, временные промежутки — тоже. Однако расстояния ΔS

в четыремире выражаются через приращения координат Δx_1, Δx_2, Δx_3 и Δx_4 так же, как и в обычной трехмерной евклидовой геометрии. То же самое можно сказать и про углы, линии, поверхности и т. д. Все геометрические соотношения, как говорят, вся метрика этого мира такая же, как и в геометрии Евклида на плоскости (только на таком плоском многообразии всего два измерения, два взаимноперпендикулярных направления, а в «мире» Минковского — четыре). По этой причине и говорят, что «мир» Минковского — это евклидов мир, плоский мир, неискривленный мир, мир с евклидовой метрикой. Основанием для такого названия (можно было бы, конечно, придумать и другие) служит еще и то, что свободное тело в таком мире движется по прямой линии в трехмерном пространстве, а мировая линия такого тела в четырехмерном мире Минковского — тоже прямая линия. Переход, однако, от четырехмерного многообразия Минковского (x_1, x_2, x_3, x_4) к реальному многообразию (x, y, z, t), к «настоящему» миру приводит к тому, что квадрат пространственно-временного расстояния (квадрат интервала) есть не сумма квадратов приращений координат, а сумма-разность:

$$\Delta S^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - c^2 \Delta t^2.$$

Из-за наличия знака «минус» в этой «теореме Пифагора» имеются существенные отличия геометрии мира (x_1, x_2, x_3, x_4) от мира (x, y, z, t). Поэтому геометрию многообразия (x_1, x_2, x_3, x_4) называют похожей на евклидову — псевдоевклидовой.

5. Установила совершенно неожиданные с точки зрения классических представлений связи между массой и энергией и между массой покоя, энергией и импульсом.

Ни одна из теорий ныне не может вызвать серьезного к себе отношения, если она не согласуется с теорией относительности.

Возникают, естественно, вопросы:

1) Каковы экспериментальные подтверждения частной теории относительности?

2) Какова ее практическая значимость?

На эти вопросы можно ответить так: нет ни одного факта или явления, противоречащего этой теории. А подтверждения, например, таковы: формула $E = mc^2$, данная этой теорией, позволила использовать внутриядерную энергию. Современные ускорители строятся с учетом того, что $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$ для ускоряемых частиц; если не учесть этой зависимости при постройке ускорителя, то он просто не будет работать. Некоторые элементарные частицы мы только потому и успеваем зафиксировать, что по отношению к нашей системе отсчета (Земле, например) они живут дольше, чем по «своим часам». Так например μ-мезоны, имеющие весьма малое собственное время жизни порядка 10^{-8} *сек*, все же достигают поверхности Земли, проходя сквозь толщу атмосферы путь порядка 10^7 *см*. Так как они не могут двигаться со скоростью, большей c, то для прохождения такого расстояния им необходимо $\Delta t > \frac{10^7}{3 \cdot 10^8} \approx 0{,}3 \cdot 10^{-2}$ *сек*, что явно больше, чем 10^{-8} *сек*; правда, живя по «своим часам» $\Delta t' \approx 10^{-8}$ *сек*, они проходят путь не 10^7 *см*, а меньший. Это происходит потому, что проходимое ими расстояние для них «сжимается». Таким образом, в системе отсчета, связанной с Землей, и в системе отсчета, связанной с мезоном, события:

1) вход мезона в атмосферу,

2) достижение им поверхности Земли

оцениваются различными Δt и $\Delta t'$, Δr и $\Delta r'$, как это и следует из с. т. о. Но опять же в согласии с с. т. о. $\Delta r^2 - c^2\Delta t^2 = \Delta r'^2 - c^2\Delta t'^2$.

Уже то, что теория относительности на многое нам «открыла глаза» имеет огромное принципиальное значение как с точки зрения познавания мира, так и в практическом отношении, а что касается сугубо практических применений, то все читали об использовании ядерной энергии, к сожалению, во всяких целях. Трагедия Хиросимы и Нагасаки и нынешнее взрывоопасное время — это прямые практические следствия использования выводов теории. Но если быть оптимистом и считать, что все образуется, то только ядерная энергия позволит человеку жить долго и безбедно. Не будь ее, запасов угля, нефти, торфа, сланцев, дров, т. е. обычного топлива, хватило бы при нынешних темпах расхода на какую-нибудь тысячу лет. А дальше? Вот тут-то и выручит энергия, выделяющая при ядерных реакциях в соответствии с формулой $\Delta E = \Delta mc^2$.

НЕКОТОРЫЕ КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ПО МАТЕМАТИКЕ

§ 1. Векторы

Векторы — это *направленные отрезки прямых.* Целый ряд физических величин характеризуется направлением в пространстве, а потому геометрически могут быть интерпретированы некими направленными отрезками, т. е. векторами. Такая их геометрическая интерпретация очень наглядна и ею широко пользуются. Векторы можно проектировать на любые прямые (в частности, и на направленные), при этом (рис. 1) $a_l = a\cos\alpha$. Часто приходится проектировать векторы на оси координат x, y, z.

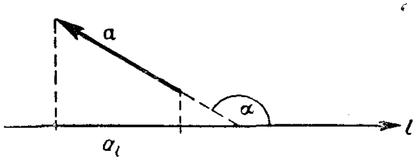

Рис. 1

Совершенно очевидно, что (рис. 2)

$$a_x = a\cos\alpha,$$
$$a_y = \cos\beta,\quad a_z = \cos\gamma.$$

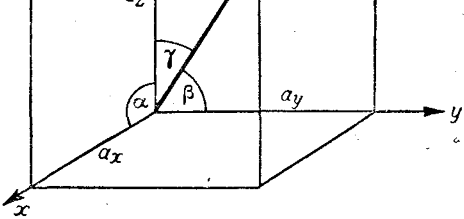

Рис. 2

Часто, однако, проекции вектора **a** выражают не через модуль a и углы α, β, γ, которые вектор составляет с осями, а иначе (рис. 3)

$$a_x = a\sin\vartheta\sin\varphi,$$
$$a_y = a\sin\vartheta\cos\varphi,\quad a_z = a\cos\vartheta.$$

Совершенно очевидно, что тройка чисел a_x, a_y, a_z вполне определяет вектор **a** в том смысле, что по ним можно однозначно построить направленный отрезок **a** в трехмерном пространстве. Сказанное можно обобщить на случай пространства с любым числом измерений.

Для векторов *определены* следующие операции:

а) Умножение вектора **а** *на скаляр* n дает вектор **с**, в n раз больший по модулю и направленный в сторону **а** ($\mathbf{c}\uparrow\uparrow\mathbf{a}$) при $n>0$ и в противоположную ($\mathbf{c}\uparrow\downarrow\mathbf{a}$) при $n<0$.

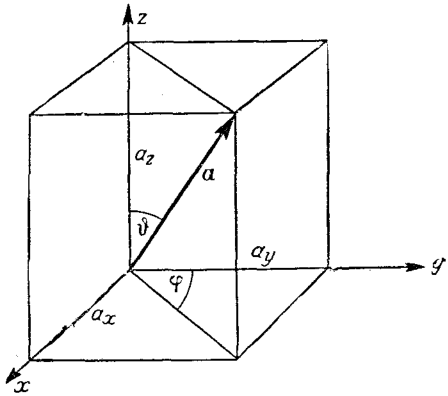

Рис. 3

б) Сложение. Если векторы **a**, **b**, **c**, ..., **k** последовательно пристраивать один за другим (рис. 4), то вектор **f**, замыкающий получившуюся ломаную, есть сумма векторов **a**, **b**, **c**, ..., **k**. Это записывается символически в виде равенства

$$\mathbf{f}=\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\ldots+\mathbf{k}.$$

в) Вычитание. Чтобы из вектора **a** вычесть вектор **b**, надо к вектору **a** прибавить вектор $-\mathbf{b}$.

г) Скалярное произведение векторов **a** и **b** — $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ — есть скаляр, равный $ab\cos\alpha$, где α — угол между **a** и **b**. Можно показать, что

$$\mathbf{ab}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.$$

В более общем случае n-мерного пространства

$$\mathbf{ab}=a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n.$$

д) Векторное произведение векторов **a** и **b** — $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ — есть вектор с модулем $ab\sin\alpha$ и направленный по правилу правого бу-

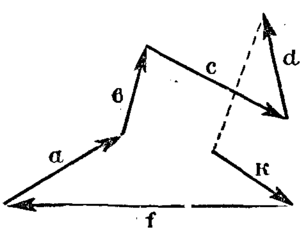

Рис. 4

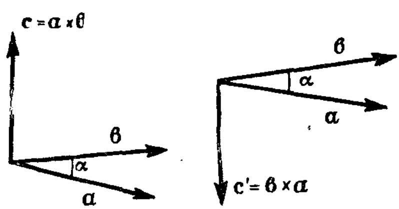

Рис. 5

равчика (рис. 5). Очевидно, что $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=-\mathbf{b}\times\mathbf{a}$. Можно показать, что

$$c_x=a_yb_z-a_zb_y,\quad c_y=a_zb_x-a_xb_z,\quad c_z=a_xb_y-a_yb_x.$$

Оказалось удобным ввести векторы с единичным модулем — единичные векторы или орты. Их назначение — указывать направление векторов. Обозначают орты обычно буквами **i**, **j**, **k**, **n**, **τ**, При этом орты $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, как правило, указывают направления осей x, y, z, а орты $\boldsymbol{\tau}$ и $\mathbf{n}$ — направления, касательные и нормальные чему-либо. С учетом сказанного любой вектор можно записать символически как произведение модуля вектора на его орт: $\mathbf{a} = a \cdot \mathbf{a}_0$ ($\mathbf{a}_0$ — орт, указывающий направление вектора $\mathbf{a}$). Часто векторы записывают в разложении по ортам $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ (по осям x, y, z):

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$$

или в разложении по ортам $\mathbf{n}$ и $\boldsymbol{\tau}$:

$$\mathbf{a} = a_n\mathbf{n} + a_\tau\boldsymbol{\tau}.$$

При этом, если величины a_x, a_y, a_z, a_n, a_τ (проекции вектора $\mathbf{a}$ на соответствующие направления) положительны, то $a_x\mathbf{i}$, $a_y\mathbf{j}$, ..., $a_\tau\boldsymbol{\tau}$ направлены так же, как $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, ..., $\boldsymbol{\tau}$; если же a_x, a_y, ..., a_τ отрицательны — то навстречу векторам $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, ..., $\boldsymbol{\tau}$ (рис. 6).

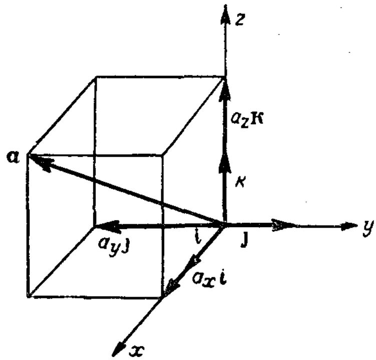

Рис. 6

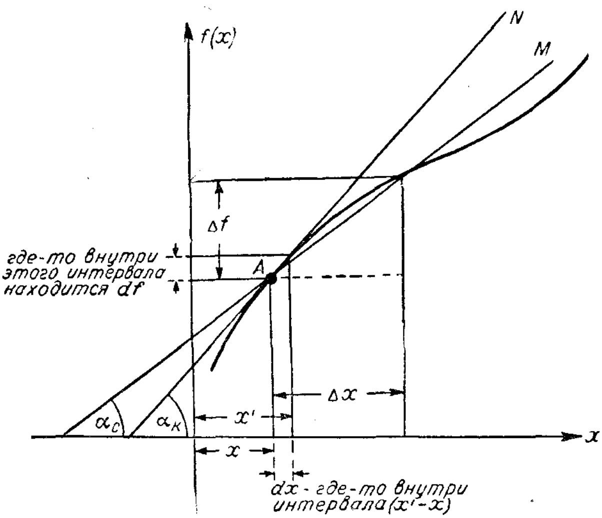

Рис. 7

Поскольку любой вектор вполне определяется своими проекциями на оси, то всякому векторному равенству

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \ldots, \mathbf{l}, t, \varphi) \tag{1}$$

вполне однозначно сопоставляется в n-мерном пространстве n

скалярных равенств проекций этих векторов

$$f_m = f_m(u_1, u_2, \ldots, u_n; \ldots l_1, l_2, \ldots, l_n, t, \varphi), \text{ где } m = 1, 2, \ldots, n. \quad (2)$$

Это чрезвычайно важное следствие определения вектора позволяет всегда при желании от символического равенства (1) перейти к системе привычных скалярных равенств (2) (хотя они тоже, конечно, символические, как и вся математика).

В основном тексте книги используется свойство двойного векторного произведения

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}),$$

которое мы приводим здесь без вывода.

§ 2. Производная

Пусть имеется некая $f(x)$. По определению функции всякое изменение x на Δx приводит к тому, что f изменится на Δf. Величина

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

называется средней скоростью изменения функции на интервале значений аргументов от x до $x + \Delta x$ и показывает, насколько в среднем изменяется функция $f(x)$ на этом интервале, если ее аргумент изменится на единицу. Можно сказать иначе: $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ показывает, какое Δf (какое изменение функции) приходится на единичное изменение аргумента (т. е. если бы $\Delta x = 1$).

Полезно помнить, что всякое отношение величин *разного рода* показывает, сколько того, что стоит в числителе, приходится на единицу того, что стоит в знаменателе. Например, отношение $\frac{a}{b \cdot c \cdot d \ldots l}$ показывает, какая доля от a приходится на $b = 1$, $c = 1$, $d = 1$ и т. д.

На интервале Δx функция $f(x)$ может существенно менять свой ход (отличаться от хода линейной функции). А это значит, что на этом интервале скорость изменения функции будет от места к месту меняться. Но совершенно ясно, что всегда можно выбрать интервал Δx столь малым, что на нем ход $f(x)$ практически будет неотличим от хода линейной функции. Такие интервалы значений аргументов мы будем называть *элементарными* (или малыми) и обозначать dx. Соответствующие изменения функции обозначают df и называют элементарными (или малыми). Такого рода малые величины dx, df, ... называют еще дифференциалами от величин x, f и т. д.

Величина $f' = \frac{df}{dx}$ называется *производной от функции f по ее аргументу x, а ее смысл — «мгновенная» скорость изменения функции*, т. е. по существу все та же средняя скорость ее изменения, но на столь малом интервале dx, на котором ход $f(x)$ не отличается существенно от хода линейной функции. На рис. 7 даны сопоставления Δx и dx, Δf и df, а также $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ и $\frac{df}{dx}$. Следует отметить, что dx и df не есть числа, а есть переменные величины, но такие, что, как это следует из определения производной, df есть линейная функция от dx. Иными словами, dx и df есть такие переменные на каком-то интервале Δx, что $\frac{df}{dx}$ на этом интервале есть величина постоянная. Совершенно очевидно, что при зафиксированном значении x величина $\frac{df}{dx}$ будет некоторым числом, хотя dx и df суть переменные величины. Если теперь переходить от одного значения аргумента x к другому, то $\frac{df}{dx}$, конечно же, будет меняться, т. е. $\frac{df}{dx}=f'(x)$.

Из рис. 7 видно, что по геометрическому своему смыслу $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ и $\frac{df}{dx}$ суть тангенсы угла наклона секущей и «касательной» к графику $f(x)$ соответственно. Таким образом, производная от $f(x)$ по x геометрически характеризует крутизну графика $f(x)$ в каждой той точке x, которая нас заинтересует.

Пусть имеется некая $f(x, y, z, t)$, где x, y, z и t независимые переменные. Если менять какую-либо одну из переменных x, y, z или t при зафиксированных остальных переменных, то величины

$$\frac{f(x+\Delta x, y, z, t)-f(x, y, z, t)}{\Delta x}, \ldots, \frac{f(x, y, z, t+\Delta t)-f(x, y, z, t)}{\Delta t} \qquad (3)$$

показывают, какова средняя скорость изменения $f(x, y, z, t)$ на интервалах Δx, Δy, Δz, Δt соответственно, т. е. показывают, насколько изменится $f(x, y, z, t)$ при единичном изменении или только x, или только y, или только z, или только t *при зафиксированных остальных переменных*. Если интервалы Δx, Δy, Δz, Δt столь малы, что на них ход $f(x, y, z, t)$ не отличается существенно от хода линейной функции, то отношения (3) называются *частными производными от* $f(x, y, z, t)$ *по* x, y, z, t соответственно. Они обозначаются символами $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$, $\frac{\partial f}{\partial t}$. Смысл частных производных тот же, что и у отношений (3), *т. е. они характеризуют быстроту изменения функции при изменении какого-либо одного из ее аргументов.* Конечно, вместо переменных x, y, z, t, мы могли бы взять и другой набор переменных и в любом их количестве.

Если x, y и z суть функции от t, то при изменении t от t до $t+dt$ другие переменные x, y, z получат вполне определенные приращения dx, dy и dz. Величина

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt} \qquad (4)$$

называется *полной производной от f по ее основному аргументу t и показывает, как быстро меняется $f(x, y, z, t)$ с изменением ее основного аргумента t* (при изменении которого как-то меняются и остальные аргументы x, y, z). Возможен такой случай, когда какая-либо из переменных x, y, z или даже все они вместе не меняются при изменении t. Тогда соответствующие величины $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ или $\frac{dz}{dt}$ будут равны нулю и равенство (4) становится «короче». При $\frac{dx}{dt}=\frac{dy}{dt}=\frac{dz}{dt}=0$ оно принимает вид

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial t}.$$

Возможен, разумеется, и такой случай, когда f не зависит от какой-либо из переменных x, y, z, t. Тогда соответствующая частная производная будет равна нулю и (4) опять «укоротится».

Заметим, что $\frac{\partial f}{\partial t}$ характеризует быстроту изменения f при $x=\text{const}$, $y=\text{const}$, $z=\text{const}$, т. е. при зафиксированной точке. Величина же $\frac{df}{dt}$ характеризует быстроту изменения f с учетом изменения x, y и z, т. е. действительно полную быстроту, в отличие от $\frac{\partial f}{\partial t}$, $\frac{\partial f}{\partial x}$ и т. д., где часть переменных зафиксирована, т. е. не меняется.

Нам в тексте встречаются следующие свойства производных, которые мы приводим без вывода:

1. $\frac{dc}{dt}=0$ (c — некая постоянная),
2. $\frac{d(uv)}{dx}=\frac{du}{dx}v+u\frac{dv}{dx}$.

   Отсюда следует $\frac{d(cu)}{dx}=c\frac{du}{dx}$.
3. $\frac{d(u+v)}{dx}=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}$.
4. Если $u=u(v)$, $v=v(z)$, ..., $y=y(x)$, то $\frac{du}{dx}=\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dz}\cdots\frac{dy}{dx}$.

Ясно, что из $f'=\frac{df}{dx}$ следует $df=f'dx$.

То, что сказано про производную и дифференциал скалярной функции $f(x)$, вполне применимо и к векторной функции $\mathbf{u}=\mathbf{u}(\varphi)$, где φ — некоторый скаляр. Это следует из того, что вместо функции $\mathbf{u}=\mathbf{u}(\varphi)$ мы можем всегда рассматривать $u_x(\varphi)$, $u_y(\varphi)$ и $u_z(\varphi)$, а тогда при зафиксированных ортах $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ имеем

$$\frac{d\mathbf{u}}{d\varphi}=\frac{d}{d\varphi}(u_x\mathbf{i}+u_y\mathbf{j}+u_z\mathbf{k}).$$

Часто под производной $\frac{d\mathbf{u}}{d\varphi}$ понимают

$$\frac{d\mathbf{u}}{d\varphi}=\frac{d}{d\varphi}(u\cdot\mathbf{n})=\frac{du}{d\varphi}\mathbf{n}+u\frac{d\mathbf{n}}{d\varphi},$$

где $\frac{du}{d\varphi}$ показывает, как быстро меняется модуль вектора $\mathbf{u}$, а $\frac{d\mathbf{n}}{d\varphi}$ — как быстро меняется направление вектора $\mathbf{u}$, т. е. как быстро он поворачивается ($\mathbf{n}$ — орт вектора $\mathbf{u}$).

Разумеется, что $f' = f'(x)$ есть тоже функция от x, поэтому от $f'(x)$ можно вычислить производную $\frac{df'}{dx}$. При этом $\frac{df'}{dx}$ обозначают символом $\frac{d^2f}{dx^2}$ и называют второй производной от $f(x)$ по x и т. д.

Величина $d^nf = f^{(n)}dx^n = \frac{d^nf}{dx^n}dx^n$ называется дифференциалом n-го порядка; при этом $d^nf = d(d^{n-1}f)$; ясно также, что $\frac{d^3f}{dx^2} = df$, ..., $\frac{d^nf}{dx^k} = d^{n-k}f$, причем $n > k > 0$ (n и k — натуральные числа).

Аналогично обстоит дело с векторными функциями от скалярного аргумента.

Встречающиеся в тексте этой книги величины типа $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ можно рассматривать как $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, z)$, а величины типа $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ — как $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, z, v_x, v_y, v_z, t)$ и т. д.

Отметим еще одно обстоятельство. Если имеется некая $f(x, y, z, t)$, то величина

$$df = \frac{df}{dt}\cdot dt = \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}dt + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}dt + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}dt = \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz \qquad (5)$$

называется полным дифференциалом от функции f. Справа в (5) слагаемые называются частными дифференциалами от f. Если в правой части (5) отсутствует хотя бы одно из слагаемых, то сумма частных дифференциалов уже не есть полный дифференциал df, а нечто отличное от него. Точно так же, если в правой части равенства (4) отсутствует хотя бы одно из слагаемых, то эта сумма уже не есть полная производная от функции f, а значит, не полностью описывает быстроту ее изменения. Часто неполные дифференциалы обозначают символом $đf$. Например,

$$đ_1f = \frac{\partial f}{\partial t}dt, \quad đ_2f = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial z}dz,$$

$$đ_3f = \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial y}dy \quad \text{и т. д.}$$

Если $f = f(x, y, z, t)$, то в данном случае $đ_2f + đ_3f = df$. Но если, например, $f = f(x, y, z, t, \varphi)$, то $đ_2f + đ_3f$ не есть df, ибо в сумме $đ_2f + đ_3f$ отсутствует частный дифференциал $\frac{\partial f}{\partial \varphi}d\varphi$. Но ясно также, что $đ_2f + đ_3f + \frac{\partial f}{\partial \varphi}d\varphi$ уже есть df для функции $f(x, y, z, t, \varphi)$.

По самому своему смыслу полная производная и полный дифференциал описывают изменение функции полно и однозначно в отличие от частной производной и неполного дифференциала.

§ 3. Интеграл

Пусть имеется некоторая $f(x)$, заданная в интервале Δx от x_1 до x_2. Разбивая этот интервал $(x_2 - x_1)$ на столь малые интервалы Δx_i, что на них $f(x)$ существенно не меняется, образуем сумму

$$\sum_{i=1}^{i=N} f(x_i)\,\Delta x_i.$$

Если Δx_i столь малы, что на каждом из таких интервалов $f(x) \approx \approx \text{const}$, то эту сумму принято обозначать символом $\int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$ и называть *определенным интегралом от функции* $f(x)$ *на интер-*

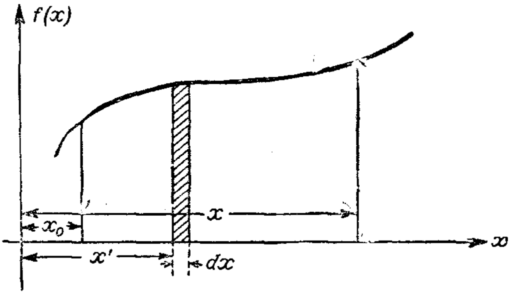

Рис. 8

вале от x_1 *до* x_2. Как видно из рис. 8, смысл этого интеграла — это площадь под кривой $f(x)$. Можно точки x_1 и x_2 не фиксировать. Тогда говорим об интеграле с переменными пределами (границами) интегрирования. Принято при этом ту переменную, от которой зависит f, обозначать x', а переменную границу интегрирования — x, т. е. записывать интеграл в виде

$$\int\limits_{x_0}^{x} f(x')\,dx'. \tag{6}$$

Можно, разумеется, ввести обозначения

$$\int\limits_{x'_0}^{x'} f(x)\,dx \tag{7}$$

или еще какие-либо другие. Важно лишь понимать, что стоящая под знаком интеграла переменная принимает все возможные значения в пределах от $x'=x_0$ до $x'=x$ (для случая обозначений в равенстве (6)) или от $x=x_0'$ до $x=x'$ (для случая обозначений в равенстве (7)). Ясно, что при зафиксированных границах интегрирования интеграл есть число, а при незафиксированных — функция от границ интегрирования. Часто нижнюю границу, т. е. x_0, фиксируют, а верхнюю оставляют переменной. Тогда интеграл (6) есть функция от x, т. е. $\int\limits_{x_0}^{x} f(x')\,dx' = \Phi(x)$.

Именно такого типа интегралы и фигурируют чаще всего в основном тексте данной книги.

Можно говорить и об интеграле от функции многих переменных, т. е. от $f(x, y, z, t)$. При этом в интересующих нас случаях это интегралы типа

$$\int\limits_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{f}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r} = \int\limits_{x_1 y_1 z_1}^{x_2 y_2 z_2} [f_x(x, y, z)\,dx + f_y(x, y, z)\,dy + f_z(x, y, z)\,dz].$$

Можно показать, что если величина

$$f_x dx + f_y dy + f_z dz$$

есть полный дифференциал от некоей функции $\Phi(x, y, z)$, т. е. если

$$f_x dx + f_y dy + f_z dz = d\Phi,$$

то значение интеграла

$$\int\limits_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} (f_x dx + f_y dy + f_z dz) = \int\limits_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} d\Phi$$

может быть выражено как разность функции $\Phi(x, y, z)$ на границах интегрирования, т. е.

$$\int\limits_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{f}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r} = \int\limits_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} d\Phi = \Phi(\mathbf{r}_2) - \Phi(\mathbf{r}_1).$$

Принято говорить, что в данном случае результат интегрирования не зависит от пути интегрирования, т. е. от того, каким образом мы «добирались» от точки 1 до точки 2.

Если же f такова, что

$$f_x dx + f_y dy + f_z dz \neq d\Phi,$$

то результат интегрирования зависит от пути интегрирования. В данной книге это обычно (обычно, но не всегда!) означает, что f есть функция не только от x, y, z, но и от каких-то других переменных (например от v_x, v_y, v_z, t и т. д.).

Именно поэтому элементарная работа $\mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)\,d\mathbf{r}$ не есть полный дифференциал, т. е. $\mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)\,d\mathbf{r} = \text{đ}A$. И значит, величина работы зависит от формы траектории (от «формы пути»).

Исключение составляет тот случай, когда $\mathbf{F}=\mathbf{F}(\mathbf{r})$ или, что все равно $\mathbf{F}=\mathbf{F}(x, y, z)$, а тогда $\mathbf{F}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r}=d\Phi$ и значит:

$$\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F}(\mathbf{r}')\,d\mathbf{r}'=\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} d\Phi=\Phi(\mathbf{r}_2)-\Phi(\mathbf{r}_1).$$

Как говорилось в тексте, оказалось удобным вместо функции $\Phi(\mathbf{r})$ употребить функцию $U(\mathbf{r})=-\Phi(\mathbf{r})$.

Интегралы типа $\int_1^2 \mathbf{f}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)\,d\mathbf{r}$ называют *контурными* или *линейными*, поскольку элемент переменной, по которой ведется интегрирование, т. е. $d\mathbf{r}$, есть отрезок линии.

Можно образовывать интегралы *поверхностные*

$$\iint_S \mathbf{f}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)\,d\mathbf{S}, \quad \iint_S \varphi(x, y, z, t)\,d\mathbf{S},$$

и *объемные*

$$\iiint_V \mathbf{f}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t,)\,dV \text{ или } \iiint_V \varphi(x, y, z, t)\,dV$$

и т. д.

Надо понимать самое главное — *интеграл это всегда сумма каких-то элементарно-малых слагаемых*. Смысл же интеграла усматривается каждый раз в каждом конкретном случае. О смысле написанных в тексте данной книги интегралов всегда говорится непосредственно в самом тексте книги.

Отметим, что пределы интегрирования помечают самыми различными способами:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx, \quad \int_{x_0}^{x} f(x')\,dx', \quad \int_1^2 f(x)\,dx, \quad \int_A^B \mathbf{f}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)\,d\mathbf{r} \text{ и т. д.}$$

Поверхностные интегралы обозначают

$$\iint_S f(x, y, z, t)\,dS, \quad \int_S \mathbf{f}(x, y, z, t)\,d\mathbf{S} \text{ и т. д.,}$$

объемные интегралы:

$$\iiint_V f(x, y, z, t)\,dV, \quad \int_V \mathbf{f}(x, y, z, t)\,dV \text{ и т. д.}$$

Если интегрирование ведется по замкнутой кривой, то пишут символ

$$\oint f(x, y, z)\,dl, \quad \oint \mathbf{f}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)\,d\mathbf{l}, \quad \oint f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)\,d\mathbf{r},$$

если по замкнутой поверхности, то

$$\oiint f(x, y, z, t)\,dS, \quad \oiint \mathbf{f}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)\,d\mathbf{S}.$$

В таблицах интегралов от одной переменной дают обычно значения неопределенных интегралов, т. е. интегралов, границы которых не указаны. Например,

$$\int f(x)\,dx = \Phi(x) + C.$$

Это означает, что определенный интеграл $\int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$ будет равен $\Phi(x_2) - \Phi(x_1)$.

В данной книге чаще всего встречаются интегралы вида $\int f(x)\,d\mu$, т. е. подынтегральная функция зависит от переменной x, а интегрирование ведется по переменной μ. Такие интегралы вычисляются так:

а) выражают $\mu = \mu(x)$, причем оказывается, что $d\mu = \varphi(x)\,dx$, а тогда интеграл принимает вид $\int f(x)\,\varphi(x)\,dx$, т. е. $\int Q(x)\,dx$,

б) выражают $x = x(\mu)$, а тогда $f(x) = P(\mu)$ и интеграл принимает вид $\int P(\mu)\,d\mu$.

Из определения интеграла следует, что

1) $\int (f + \varphi)\,dx = \int f\,dx + \int \varphi\,dx$,

2) $\int \mathrm{const}\, f(x)\,dx = \mathrm{const} \int f(x)\,dx$,

чем в основном тексте книги часто приходилось пользоваться.

Чрезвычайно важно помнить, что величины типа df, dx, dy, d^3z, d^2u и т. д., т. е. дифференциалы любых порядков суть величины переменные, все время стремящиеся к нулю. Поэтому бессмысленными являются равенства $dx = 0{,}1$, $d^2y = 0{,}001$ и т. д., ибо переменная величина не может быть равна постоянной. Аналогично обстоит дело и с величинами $f(x)\,dx$, $\mathbf{v}(t)\,dt$ и т. д., которые тоже суть дифференциалы, т. е. малые переменные величины, стремящиеся к нулю. Поэтому, разумеется, интегрировать можно только переменные величины, так как интеграл есть сумма бесконечно большого числа бесконечно малых слагаемых. Отсюда следует, что выражения «проинтегрировать число столов в комнате» и «проинтегрировать количество песчинок в мешке» надо понимать как юмористические.

Однако в физике часто встречаются выражения типа «интегрируя что-либо по всему заряду», «интегрируя по всем молекулам» и т. д., т. е. предлагается проинтегрировать именно конечные, дискретные величины. Как же понимать это — тоже как своеобразный юмор? В какой-то мере, конечно, так.

Однако эти выражения означают и другое. Именно, эксперимент всегда приводит к показаниям каких-то приборов. Эти показания всегда конечны. При этом иногда приборы в пределах какой-либо области дают показания, от места к месту, от «точки» к «точке», не меняющиеся существенным образом. Такие области физик называет малыми и их обозначают Δx, Δy, $\Delta \mathbf{r}$, Δt, $\Delta \mathbf{v}$ и т. д. Часто нас интересуют величины $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, $\frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}$ и т. д., а также величины типа $\sum f_i \Delta z_i$, $\sum \mathbf{v}_i \Delta t_i$ и т. д. Но такие величины трудно считать. С другой стороны, величины типа $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d\mathbf{v}}{dt}$, $\int f(x)\,dx$, $\int v(t)\,dt$ и т. д. считать значительно проще. Во всяком случае, математики разработали приемы счета таких величин — исчисление бесконечно малых. Что делает физик? Он при расчетах, полученных на опыте, конечные величины Δx, Δt, $f_i \Delta x_i$ и т. д. заменяет на бесконечно малые величины dx, dt, $f dx$ и т. д. При этом он, конечно, совершает ошибку, но тем меньшую, чем меньше величины Δx, Δt, $f_i \Delta t_i$ и т. д. Что от такой замены? Проигрыш в истине (допущение ошибки), но выигрыш в облегчении расчетов, в быстроте их.

Аналогично обстоит дело с заменой термина «значение какой-либо величины в некоторой малой области» термином «значение этой величины в точке». Раньше мы уже говорили об этом. Но для подчеркивания того, что на самом деле мы всегда имеем дело с областями, а не с точками, мы употребляли термин «точка», понимая под ним столь малую область Δt, $\Delta \mathbf{r}$, ΔS, ΔV и т. д., в пределах которой интересующая нас величина существенно не меняется. При расчетах мы заменяли Δt, $\Delta \mathbf{r}$, ΔS, ΔV и т. д. на dt, $d\mathbf{r}$, dS, dV и т. д.

Сказанное выше есть частное отражение того факта, что любая теория, любая схема, любой язык всегда лишь приближенно описывают явления, события, вещи. Переход от конечных величин, полученных в эксперименте, к переменным, фигурирующим в расчетах, есть одна из часто используемых в науке абстракций.

§ 4. Комплексные числа и функции

Комплексным числом называется число $a + ib$, где a и b — действительные числа, а $i = \sqrt{-1}$. *Простейшей комплексной функцией* является функция $z = x + iy$. Более общей *комплексной функцией* называется функция

$$\psi(z) = \psi(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

$u(x, y)$ называют *действительной*, а $iv(x, y)$ — *мнимой* частями комплексной функции $\psi(x + iy)$. Удобно на плоскости x, iy изображать комплексные числа векторами с проекциями x и iy (рис. 9).

В более общем случае $\psi(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ можно трактовать как вектор с составляющими $u(x, y)$ и $iv(x, y)$. При этом не принято ставить стрелки над u, v и ψ.

Функция $\psi^*(x + iy) = u(x, y) - iv(x, y)$ называется *комплексно-сопряженной функцией для функции* $\psi(x + iy)$. Ясно, что $\psi\psi^*$ есть действительная функция от действительных переменных

x и y. Это легко видеть в случае

$$\psi = u(x, y) + iv(x, y) \quad \text{и} \quad \psi^* = u(x, y) - iv(x, y),$$

где прямое умножение приводит к равенству

$$\psi\psi^* = u^2(x, y) + v^2(x, y).$$

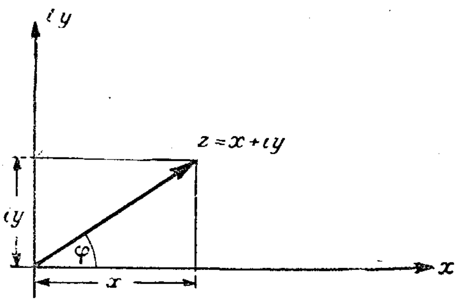

Рис. 9

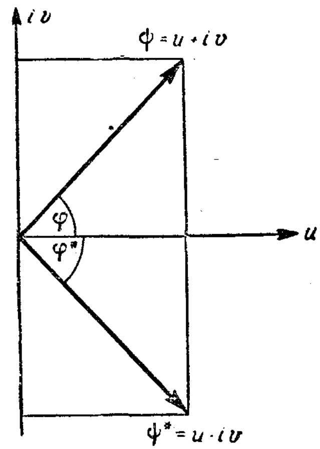

Рис. 10

Величина $|\psi| = \sqrt{\psi\psi^*} = \sqrt{u^2 + v^2}$ называется модулем вектора ψ. Из рис. 10 видно, что

$$u = |\psi| \cos \varphi, \quad v = |\psi| \sin \varphi,$$

или, что все равно,

$$\psi = |\psi| (\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

По формуле Эйлера

$$\cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi},$$

а тогда

$$\psi = |\psi| e^{i\varphi}.$$

Введение комплексных чисел, комплексной переменной $z = x + iy$ и комплексной функции $\psi = u + iv$ кроме того, что оно расширяет понятие о числе и о функции, позволяет упрощать записи и вычисления в целом ряде важных в физике случаев.

§ 5. Перечень встречающихся в тексте производных и интегралов

$$\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1},$$

$$\frac{d}{dx} \sin ax = a \cos ax,$$

$$\frac{d}{dx} \cos ax = - a \sin ax,$$

$$\frac{d}{dx} e^{ax} = ae^{ax},$$

$$\int x^n dx = \frac{1}{n} x^{n+1},$$

$$\int \sin ax \, dx = - \frac{1}{a} \cos ax,$$

$$\int \cos ax \, dx = \frac{1}{a} \sin ax,$$

$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax}.$$

СОДЕРЖАНИЕ