Здесь же мы главным образом рассматриваем применения теории моделирования. Ее важным приложением является обоснование изменения вертикального масштаба в гидравлических моделях [1]). Мы рассмотрим этот вопрос в § 77.

§ 75. Аэродинамические трубы

В настоящее время многие ведущие лаборатории в первую очередь занимаются проведением и истолкованием опытов на моделях. В связи с этим на практике были выработаны некоторые простые положения относительно подобия, вроде описанных в этой главе. Однако первоначально простые идеи были значительно усовершенствованы с развитием этих работ, и мы получили бы весьма искаженное представление о моделировании, если бы не рассмотрели некоторые практические аспекты этой темы. Поэтому в заключение мы дадим краткий исторический обзор развития экспериментальной техники некоторых специальных видов моделирования.

Аэродинамические трубы представляют, быть может, наиболее совершенные устройства для проведения экспериментов с моделями. Полученные в них данные первоначально истолковывались только с помощью инерциального масштабирования, например в случае замеров коэффициентов C_D, C_L, C_M для препятствия или крыла заданной *формы* при заданном угле атаки. К тому же, эти грубые данные требовали «поправок тарирования» на влияние державок модели, а также поправок на влияние стен и падение давления (§ 102). Поскольку опыты проводились при различных числах Рейнольдса, часто возникали расхождения, в особенности в окрестности $\mathrm{Re}_{\text{кр.}}$, и конкурирующие лаборатории иногда заявляли, что это результат ошибок эксперимента [2]).

Остроумная идея, позволяющая получать разные числа Re на малых моделях, состоит в том, чтобы использовать аэродинамические трубы с переменной плотностью ([3], разд. 102); так как вязкость μ не зависит от давления, то число $\mathrm{Re} = VL/\nu = \rho VL/\mu$ пропорционально плотности.

Однако опыты показывают, что идеи, изложенные в § 71, не безупречны и в том отношении, что турбулентность в аэродинамической трубе может влиять на величину $C_D(\mathrm{Re})$. Чтобы это учесть, было предложено для всякой данной аэродинамической трубы определить такой множитель λ, чтобы в этой трубе

---

[1]) Craya A. [50], Doodson A. T. [51], стр. 148.

[2]) По воспоминаниям профессора В. Прагера. Конечно, шероховатость модели также представляет собой параметр, который подлежит учету.

«эффективное» число Рейнольдса $\mathrm{Re}_{\text{эф.}}$ было равно $\lambda VL/\nu$. В настоящее время в связи с созданием аэродинамических труб натуральных размеров с малой турбулентностью, не говоря уже об исследованиях в свободном полете и о стандартных наборах профилей, эксперименты в аэродинамических трубах с малой скоростью в значительной мере избавились от былой своей неопределенности.

Техника использования *сверхзвуковых* аэродинамических труб имеет гораздо меньшую историю. Первые такие трубы были введены в действие во время второй мировой войны, и их бичом было непредвиденное возникновение скачков конденсации и даже образование снега — явления, которые трудно исследовать с помощью только анализа размерностей.

Анализ размерностей указывает на то, что в сверхзвуковых аэродинамических трубах (и во внешней баллистике) нужно считать C_D функцией от чисел M и Re. Однако практически число Рейнольдса, по-видимому, играет второстепенную роль, вопреки широко распространенной противоположной точке зрения [1]. Так, поверхностное трение обычно составляет только 10% от полного сопротивления при движении снаряда, а это, скорее всего, именно та составляющая, на которую влияют шероховатость поверхности и вязкость. Однако величина $\mathrm{Re}_{\text{эф.}}$ оказывает влияние и на различные менее существенные явления, скажем, на толщину ударных волн и на λ-образные ударные волны, открытые Аккеретом [2].

§ 76. Опытовые бассейны

Наиболее важным применением моделирования по числу Фруда являются испытания моделей судов, хотя оно также применяется при моделировании волн и сейшей, вхождения в воду (§ 78) и используется для гидравлических турбин, имеющих свободную поверхность [3].

Уже давно спорят о том, кого надо считать автором «моделирования по числу Фруда» при исследовании на моделях сопротивления судов, — Рича или Фруда. Поскольку факты довольно любопытны, мы приведем их.

---

[1] Теоретические выводы в The Mechanical Properties of Fluids, Blackie и др., 1935, основаны на одной-единственной таблице, приведенной на стр. 37 в [5]. В баллистических опытах, проведенных в США, не обнаружили чего-либо даже отдаленно напоминающего данные этой таблицы.

[2] Ackeret J., *Mitt. Inst. Aerodynamik Zürich*, № 10, 1944.

[3] См. Bertrand J., *J. de l'Ecole Polyt.*, 19 (1948), 189—197.

В 1831 г. Рич[1]) предложил в точности то, что обычно называют «законом Фруда», а именно испытывать модели кораблей при равных числах Фруда и оценивать сопротивление объекта с помощью преобразования подобия (22). Большая заслуга Фруда состоит в том, что он пошел дальше этого простого закона.

У большинства торговых кораблей 90% величины сопротивления приходится на трение, и, следовательно, для них пригодно не моделирование по числу Фруда, а моделирование по числу Рейнольдса. Чтобы оценить сопротивление корпуса корабля по испытаниям на моделях, нужно его представить в виде двух составляющих: волновое сопротивление и сопротивление трения. Впервые это было предложено в 1874 г. Фрудом[2]), и это основное допущение можно представить в виде формулы

$$C_D = C_W(\mathrm{Fr}) + C_f(\mathrm{Re}). \qquad (42)$$

А у торговых кораблей обычно превалирует $C_f(\mathrm{Re})$!

Однако точные «законы» моделирования еще далеко не выяснены. Начиная с 1935 г. $C_f(\mathrm{Re})$ обычно расчленяют на «поверхностное трение» и «сопротивление формы» (сопротивление, вызванное наличием следа или вихрей).

Переход от сопротивления формы модели к моделируемому сопротивлению в значительной мере основывается на личной интуиции исследователя. Начиная примерно с 1945 г. обычным приемом стало создание искусственной шероховатости поверхности модели, с тем чтобы получить «эффективное число Рейнольдса» $\mathrm{Re}_{\text{эф.}}$ и коэффициент сопротивления формы более близкими к соответствующим коэффициентам для реального корабля. Автору не известен ни один теоретический принцип, позволяющий определить, какая именно требуется шероховатость модели, особенно если учесть, что «обрастание» корпуса сильно изменяет поверхностное сопротивление трения у реального корабля за время его службы.

Недавно было предложено *вычислять* волновое сопротивление корабля теоретически, а сопротивление трения (и формы) рассматривать как некий остаток. Такие вычисления пока не проведены: нелинейность краевых условий на «свободной границе» делает их устрашающими.

В случае линеаризованного приближения «тонкого корабля» (§ 74) теоретическое вычисление коэффициента $C_W(\mathrm{Fr})$ приводит к пятикратному интегралу (интеграл Мичелля). В несколь-

---

[1]) Reech F., Cours de l'Ecole d'Application du Génie Maritime, Lorient, 1831.

[2]) *Trans. Inst. Nav. Arch.*, 15 (1874), 36—59.

ких простых случаях он был подсчитан. Однако до сих пор не ясно, чем объясняется расхождение между вычисленным значением $C_W(\mathrm{Fr})$ и получаемым из опытов значением $C_D - C_f(\mathrm{Re})$ — нелинейностью или наличием следа [1].

§ 77. Модели рек и гаваней

Объяснение результатов, полученных при моделировании гаваней, рек, устьев, плотин, водосливов и т. д. [2]), еще более зависит от практического опыта и интуиции. Достаточно сложно также моделирование потока жидкости в так называемых «неподвижных ложах»; еще более трудно с помощью простых математических понятий инспекционного анализа осуществить моделирование эрозийного действия и отложений в случае «подвижного ложа».

При изучении движения жидкости на малых моделях неподвижных русел в первом приближении можно использовать моделирование по числу Фруда. Это значит, что если уменьшение длин равно $L:1$, то скорость должна уменьшиться в отношении $\sqrt{L}:1$, а объемный расход — в отношении $L^{5/2}:1$, как предполагалось в § 72, но все это весьма приближенно. (Периоды отливов и приливов тоже изменяются в отношении $\sqrt{L}:1$.)

Однако практика моделирования по числу Фруда скоро заставляет признать необходимыми различные ограничения. Так, затухание волн и другие эффекты вязкости оказываются завышенными на моделях малых размеров. В небольших моделях гаваней волны не разбиваются так, как настоящие волны: решающим оказывается действие капиллярности [3]). Кроме того, захват воздуха в небольших по размеру моделях водосливов и водопадов гораздо меньше, чем в естественных условиях [4]).

Более важен тот факт, что (§ 71) силы вязкости в моделях относительно велики и, следовательно, турбулентность («вихревая вязкость») сравнительно с ними мала. Чтобы этого избежать, обычно в моделях *индуцируют* турблентность, искусственно увеличивая шероховатость поверхностей или даже создавая

---

[1]) Birkhoff G., Kotik J., Korvin-Kroukovsky B. V., *Trans. Soc. Nav. Arch. Marine Eng.*, **62** (1954), 359—396.

[2]) Компетентное изложение обычных подходов см. Warnock H., Engineering Hydraulics, Hunter Rouse ed., гл. II; см. также Am. Soc. Civ. Eng. Manual of Engineering Practice, № 25.

[3]) Чтобы их моделировать, нужно оставлять неизменным «число Вебера» $W = \gamma/\rho V^2 L$, где γ — поверхностное натяжение [см. Bashforth, Adams, Capillary Action (1883 г.)].

[4]) См. Escande L., Génie Civile, 16 dec. 1939; Camishel C. and Escande L., Similitude Hydrodynamique et Technique des Modèles Reduits, Paris, 1938 (редкая книга).

препятствия движению жидкостей в виде вертикальных пластинок или жестких проволочных сеток. Это увеличивает вихревую вязкость, так что силы вязкости в модели становятся даже относительно бóльшими, чем в других условиях.

Впрочем, при достаточно больших числах Рейнольдса, такую до некоторой степени парадоксальную практику можно частично обосновать с помощью инспекционного анализа, на что указал автору С. Рой. В указанных условиях силы вязкости гораздо меньше, чем «напряжения Рейнольдса» $\overline{u_i' u_j'}$, где $\mathbf{u}'$ — вектор турбулентной скорости, а черта означает усреднение (см. [5], стр. 192). Поэтому, если относительная турбулентность во всех точках одна и та же, можно рассчитывать на то, что распределения средних скоростей на модели и в натуре сходны.

Перенос твердых частиц (загрязнений, песка, гравия) движущейся водой в силу его большого практического значения для рек, гаваней и устьев часто изучают на моделях типа «подвижного ложа». Использование таких моделей требует большого индивидуального искусства и связано с очень тонкими соображениями [1]).

Моделирование по числу Фруда весьма приближенно сохраняет как скорости, вызванные силой тяжести, так и волновые движения (в моделях гаваней), но только в случае турбулентного режима течения или в случае, когда можно пренебречь вязкостью [2]).

На модели часто завышают относительные размеры частиц, отчасти, чтобы избежать силы сцепления, отчасти, чтобы сохранить число Re, а также, чтобы облегчить изготовление модели. Такое завышение размеров препятствует увлечению частиц модели водой. Это явление компенсируется [3]) уменьшением их отрицательной плавучести $\rho_1 - \rho$.

Заслуживает упоминания также обычное в таких моделях использование *различных масштабов по горизонтали и по вертикали*. В Англии принято завышать вертикальный масштаб (следуя Рейнольдсу и Гибсону), чтобы избежать чрезмерного мелководья. Обоснованность такого завышения часто оспарива-

---

[1]) Подробное рассмотрение некоторых трудностей можно найти в работе *Proc. Am. Soc. Civ. Eng.*, 71 (1944), *Trans.* № 3, ч. 2. В некоторых моделях приливов силу Кориолиса нужно моделировать посредством изменения кривизны русла; см. [49], стр. 78.

[2]) Можно завысить наклон дна реки или устья, чтобы получить подходящие средние скорости течения, когда число Re мало. Шероховатость представляет собой важный фактор.

[3]) См. Camichel C., Escande L., *Comptes Rendus*, 199 (1934), 992. Отличное изложение законов масштабирования в случае переноса ила см. Einstein H. A., Müller R., *Schweiz. Archiv*, 5 (1939), № 8.

лась[1]) во Франции, где имеется тенденция применять модели больших размеров. Это можно истолковать как нечто вроде асимптотического масштабирования (§ 74).

На практике при изучении гидравлических моделей рек и гаваней редко обращаются к теоретическим доводам. Надежности добиваются тем, что воспроизводят различные аспекты режима, наблюдаемого в реальных условиях. При этом надеются, что изменения в условиях обтекания также будут воспроизведены в новом масштабе — хотя не имеется никаких теоретических доводов в поддержку такого предположения.

§ 78. Моделирование входа в воду

Для подводной баллистики может иметь большое значение моделирование явлений поверхностного и глубинного смыкания, которые сопровождают вход в воду, как указано в § 53. Поэтому возникает проблема, как воспроизвести эти явления в другом масштабе.

На основании экспериментальной аналогии можно поддаться искушению использовать попросту моделирование по числу Фруда с пониженным давлением при постоянных числах Fr и Q или Q^*; и действительно, такое предложение было сделано. Однако мы рады заявить, что на этот раз правильное решение в случае поверхностного смыкания, по-видимому, было дано не инженером, исходившим из физического опыта, а с помощью инспекционного анализа «математиком в его кабинете», именно автором этой книги[2]). Решение было подсказано следующими соображениями.

Простое размышление приводит к мысли, что поверхностное смыкание обусловлено плотностью воздуха: имеет место снижение давления в горловине каверны на величину $\rho' v'^2/2$ (ρ' — плотность воздуха, v' — скорость воздуха), и это вызывает всплеск и сужение горловины. Такое явление невозможно воспроизвести на модели, если плотность ρ' уменьшается вследствие понижения давления; но если давление не понижается, то, по-видимому, не моделируются размеры пузыря, образующегося после смыкания каверны.

---

[1]) Camichel C., Fischer E., Escande L., *Comptes Rendus*, **199** (1934), 594. Экспериментальный контрпример, приведенный ими, не является примером почти горизонтального потока.

[2]) Birkhoff G., Modeling of entry into water, Applied Math. Panel, National Defense Research Council, May, 1945 (рассекречено); Waugh J. C., Stubstad G. W., Water-entry cavity modeling, *Navord Rep.* **5365**, December, 1957. Относительно моделирования входа твердого тела в воду см. также May A., *J. Appl. Phys.*, **19** (1948), 127—139; Levy J., Rep. E-12.19, Hydrodynamics Lab., Caltech., August 1956.

Поскольку мы имеем дело не с водяным паром, уравнение состояния уже не имеет вида (33), а выражается приближенно соотношением

$$p' = k\rho'^{\gamma}. \tag{43}$$

Приближенно это уравнение удовлетворяется для подводных пузырьков газа, и если только мы не имеем дела с насыщенным газом, равенство $p' = p_v + k\rho'^{\gamma}$ не выполняется. По этой причине надо использовать число Q^* вместо числа Q.

С математической точки зрения, уравнения неразрывности, состояния и движения сохраняются при преобразовании

$$\begin{array}{llll} \mathbf{x}_1 = \alpha\mathbf{x}, & t_1 = \sqrt{\alpha}\, t, & \mathbf{u}_1 = \sqrt{\alpha}\,\mathbf{u}, & p_1 = \alpha p, \\ p'_1 = \alpha p', & \rho_1 = \rho, & \rho'_1 = \rho', & k_1 = \alpha k, \end{array}$$

где индексом обозначены преобразованные переменные. Итак, мы можем получить модель, если у нас будет газ, уравнение состояния которого имеет вид $p'_1 = \alpha k \rho_1'^{1,408}$, где $p' = k\rho'^{1,408}$ есть уравнение состояния воздуха. Таким газом, например, вполне может быть воздух при низкой температуре, но это непрактично с технической точки зрения.

По-видимому, практичнее использовать фреон или какой-либо другой «тяжелый газ», у которого $\gamma \neq 1{,}4$, но плотность которого в несколько раз больше плотности воздуха при пониженном давлении и при температуре атмосферы; в малом масштабе такое моделирование было выполнено (ср. [29]). Остается только выполнить моделирование ρ и $dp/d\rho$ для газа.

Моделирующий процесс, описанный выше, по-видимому, не отражает глубинного смыкания. Если оно представляет собой эффект вязкости, как мы предположили в § 53, его можно моделировать, лишь сохраняя число Re, что практически невозможно. Однако, поскольку максимально возможное понижение давления уменьшается до нуля вместе с Q^* (в предположении, что растяжение $p < 0$ невозможно в течение рассматриваемого промежутка времени), глубинное смыкание должно получаться хотя бы и не совсем точно при моделировании по числу Фруда с пониженным давлением, с применением или без применения тяжелого газа.

Необходимость более аккуратного анализа, чем обычный анализ размерностей, видна и на примере безразмерного параметра $N = \sqrt{\mathrm{Fr}}\,\rho'/\rho$. Этот параметр, как недавно[1]) было

[1]) Birkhoff G., Isaacs R., Transient cavities in air-watter entry, *Navord Rep.*, **1490**, January 1951.

показано, весьма приближенно определяет вид смыкания при входе в воду: поверхностное или глубинное.

Использование параметра N в качестве необходимого критерия доказывают следующие опытные данные. Согласно экспериментам время $T_{\text{г.с.}}$, необходимое для глубинного смыкания, в грубом приближении пропорционально величине $\sqrt{L/g}$. С другой стороны, установлено (например, с помощью инспекционного анализа инерциального механизма поверхностного смыкания), что продолжительность $T_{\text{п.с.}}$ поверхностного смыкания пропорциональна $\rho L/\rho' V$, где L — характерная длина, а V — характерная скорость. Поэтому для поверхностного смыкания условие $T_{\text{г.с.}} > T_{\text{п.с.}}$ принимает вид $N > N_{\text{кр}}$.

При обычном использовании анализа размерностей мы пришли бы к выводу, что средние разности давлений, вызывающие поверхностное и глубинное смыкание, должны быть пропорциональны соответственно величинам $\rho' V^2/2$ и $2\rho g L$, а это привело бы к предложению использовать безразмерное отношение $N' = \mathrm{Fr}\ \rho'/\rho$ в качестве критерия поверхностного смыкания. Последнее резко расходится с наблюдениями.

Глава V

ТЕОРИЯ ГРУПП И ГИДРОМЕХАНИКА

§ 79. Введение

В гл. IV было показано, что понятие группы ценно для гидромеханики в трех отношениях. Во-первых, это понятие помогает математически обосновать моделирование с помощью инспекционного анализа, который более соответствует сути дела, чем обычно применяемый анализ размерностей. Во-вторых, с помощью понятия группы можно проверять справедливость математических теорий гидромеханики даже в тех случаях, когда невозможно проинтегрировать теоретически выведенные уравнения в частных производных. И наконец, как и анализ размерностей (но более общим образом), оно часто дает средство снизить число подлежащих рассмотрению параметров; тем самым понятие группы вносит значительные упрощения.

Теперь мы обсудим возможности применения этого понятия к *интегрированию* дифференциальных уравнений гидромеханики и, конечно, уравнений математической физики вообще. Большая часть того, что мы намерены высказать в связи с этим, в том или ином виде уже имеется в других работах. Но если, как мы полагаем, применение понятия группы в теории дифференциальных уравнений только начинается, то, по-видимому, целесообразно свести воедино относящиеся к этому вопросу соображения.

Сначала мы опишем то, что можно назвать методом *поиска симметричных решений* уравнений в частных производных. Предположим, что система уравнений в частных производных Σ инвариантна над группой G, элементами которой являются входящие в систему зависимые и независимые переменные. Метод состоит в отыскании решения, инвариантного над некоторой подгруппой группы G. Другими словами, он состоит в отыскании *автомодельных* решений, обладающих *внутренней симметрией* относительно G.

Этот метод так часто применялся при решении отдельных физических задач, что удивительно, почему он не был более отчетливо сформулирован гораздо раньше[1]). Мы покажем сейчас его эффективность на нескольких частных примерах.

§ 80. Симметричные решения уравнения теплопроводности

Метод «поиска симметричных решений» применим к континуальной физике вообще. Совсем просто его применение к уравнению диффузии; и это мы рассмотрим прежде всего. Для плоско-параллельного течения уравнения Навье — Стокса сводятся к уравнению диффузии[2]), но наиболее известно применение уравнения диффузии в теории теплопроводности. Ввиду того что переносу тепла и переносу количества движения в вязкой жидкости соответствует одна и та же группа симметрии, в некоторых задачах, относящихся *и* к теплопроводности *и* к конвекции, можно применять аналогичные рассуждения. Например, можно рассматривать задачи с изменением фазы на подвижных границах (задача Стефана) или задачи о росте сферических пузырьков пара в равномерно перегретой воде.

Итак, рассмотрим диффузию тепла из *точечного источника* в среде с постоянной теплопроводностью $\varkappa$. Уравнение теплопроводности для твердых тел имеет вид

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \varkappa \nabla^2 U = \varkappa \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 U}{\partial x_i^2}, \qquad (n = 1,\ 2 \text{ или } 3), \tag{1}$$

где U — температура в точке $x = (x_1, \ldots, x_n)$ в момент времени t.

Ввиду сферической симметрии задачи будем искать решение вида $U(r, t)$, где $r^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$. Этим исчерпывается использование в задаче чисто *геометрической симметрии* явления. Но тут еще имеется *физическая симметрия* в том смысле, что дифференциальное уравнение (1) инвариантно относительно группы преобразований пространства, времени и температуры

$$r' = \alpha r, \qquad t' = \alpha^2 t, \qquad U' = \beta U + \gamma, \tag{1*}$$

зависящей от трех произвольных параметров α, β, γ. Этой группой обобщается классический закон времени, согласно которому

[1]) Впервые он был высказан Бехертом [62]. Более полная формулировка была дана Л. И. Седовым [72] и [57], гл. IV, § 1; см. также К. П. Станюкович [73] и [74].

[2]) [7], п. 345—347. Результаты этого параграфа были опубликованы в [63], прежде чем нам стало известно о работах, названных в примечании 1. Относительно применения к исследованию роста пузырьков пара см. Birkhoff G., Horning W. A., Margulies R., *Physics of Fluids*, 1 (1958), 201—204.

время, требующееся для распространения тепла, пропорционально квадрату расстояния. При любом положительном числе m трехпараметрическая группа (1*) содержит однопараметрическую подгруппу, определяемую соотношениями

$$r' = \alpha r, \qquad t' = \alpha^2 t, \qquad U' = \alpha^m U. \tag{2}$$

Так как $\gamma = 0$, то эта подгруппа сохраняет следующее краевое условие $U(\infty, t) = 0$. *Мы будем искать решения $U(r, t)$ уравнения* (1), *инвариантные относительно подгрупп вида* (2).

В рассматриваемом случае, ввиду того что группа (2) состоит из скалярных умножений, можно применить П-теорему. Переменные $\chi = r^2/t$ и $U/t^{m/2}$ инвариантны относительно преобразований (2). Поэтому, согласно П-теореме, всякое решение (1), инвариантное относительно преобразований (2), должно иметь вид

$$U = t^{m/2} f(\chi), \quad \chi = r^2/t. \tag{3}$$

В § 89 мы покажем, что уравнение (1) всегда имеет решения симметричной формы (3) (автомодельные), по крайней мере локально.

Пока мы ограничимся исследованием одного частного случая. Подставляя соотношение (3) в уравнение (1) и деля на подходящую степень величины t, получаем уравнение

$$4\varkappa\chi f'' + (2\varkappa n + \chi) f' - \frac{m}{2} f = 0. \tag{4}$$

Переход к переменной $\xi = r^2/4\varkappa t$ (которая *безразмерна* в обычном смысле, т. е. инвариантна относительно группы преобразований (22) из гл. IV) дает более простые выражения:

$$U = t^{m/2} F(\xi), \quad \text{где} \quad \xi F_{\xi\xi} + \left(\xi + \frac{n}{2}\right) F_\xi - \frac{m}{2} F = 0. \tag{4'}$$

После подстановки $x = -\xi$ последнее уравнение переходит в конфлуэнтное гипергеометрическое уравнение[1]). Однако не это главное; главное то, что *решения уравнения* (1) *можно найти, интегрируя обыкновенное дифференциальное уравнение,* что всегда можно проделать численно.

Не все «симметричные» решения уравнения (1) [т. е. (4)] представляют одинаковый физический интерес. Преимущественно интересны решения, для которых $U \to 0$ при $r \to \infty$, так что

$$\lim_{\chi \to \infty} f(\chi) = 0.$$

[1]) Камке Э., Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. изд. 2-е, М., Физматгиз, 1961, уравнение 2.113.

Нас также интересует *полное количество тепла*, которое пропорционально интегралу $\int_0^\infty U(r, t) r^{n-1}\, dr$, а следовательно, и величине $\alpha^m \alpha^n = \alpha^{m+n}$, или $t^{(m+n)/2}$.

В частности, интересен случай, когда полное количество тепла *постоянно*, что соответствует распространению ограниченного количества тепловой энергии из начала координат. Тогда $m = -n$; если положить $n = 2h$, то уравнение (4′) после приведения подобных членов сводится к виду

$$0 = \xi F_{\xi\xi} + (\xi + h) F_\xi + hF = \xi (F_\xi + F)_\xi + h (F_\xi + F), \quad h = \frac{n}{2}. \tag{4*}$$

Уравнение (4*) можно проинтегрировать в замкнутом виде. Чтобы получить $U(\infty, t) = 0$, функции F и F_ξ должны стремиться к нулю при $\xi \to +\infty$, и, следовательно, $F(\xi) = e^{-\xi}$. Мы получили решение Лапласа

$$U = Ct^{-n/2} e^{-r^2/4\varkappa t}, \tag{5}$$

которое в большинстве учебников выводится с помощью преобразования Фурье.

Другой интересный случай — это случай *точечного источника*, выделяющего тепло (за счет химического или радиоактивного процесса) с постоянной скоростью начиная с момента $t = 0$. Здесь $m + n = 2$, т. е. $m = 2 - n$, вследствие чего уравнение (4′) принимает вид

$$\xi F_{\xi\xi} + (\xi + h) F_\xi + (1 - h) F = 0, \quad h = \frac{n}{2} = \frac{1 - m}{2}.$$

Интегралы такого вида конфлуэнтного гипергеометрического уравнения (они были получены другим путем) могут быть выражены в замкнутом виде [1]). Однако это не столь важно, как то обстоятельство, что полученное дифференциальное уравнение является обыкновенным.

§ 81. Спиральные течения вязкой жидкости

Теперь мы проиллюстрируем метод «поиска симметричных решений» на классическом примере «спиральных течений» несжимаемой вязкой жидкости. Впервые окончательные формулы

---

[1]) См. Carslaw and Jaeger, «Conduction of Heat in Solids». Особенно прост случай $n = 2$, так как тогда $(1 - h) = 0$. [На русск яз. Карслоу, Теория теплопроводности, М.—Л., ГТТИ, 1947. — *Прим. перев.*]

были получены Джеффри и Хамелем [1]). Наибольшее значение для приложений имеют частные случаи вырождения: радиальное течение в канале и круговое течение Куэтта. Все же мы рассмотрим общий случай, так как он представляет интерес с математической точки зрения.

Хорошо известно, что в случае плоских несжимаемых потоков уравнение неразрывности эквивалентно введению «функции тока» $V=\int(u\,dy-v\,dx)$, так что $(\partial V/\partial y,\ -\partial V/\partial x)$ есть вектор скорости. Тогда выражение $-\nabla^2 V=\partial v/\partial x-\partial u/\partial y$ дает *завихренность*. Кроме того, уравнения движения Навье — Стокса для таких плоских течений эквивалентны [2]) уравнению

$$\nu\nabla^4 V=\frac{\partial(\nabla^2 V,\ V)}{\partial(x,\ y)}=\frac{1}{r}\frac{\partial(\nabla^2 V,\ V)}{\partial(r,\ \theta)}=$$

$$=\frac{1}{r}\left[\frac{\partial V}{\partial\theta}\frac{\partial(\nabla^2 V)}{\partial r}-\frac{\partial V}{\partial r}\frac{\partial(\nabla^2 V)}{\partial\theta}\right], \tag{6}$$

где $\partial(p,\ q)/\partial(x,\ y)=p_x q_y-q_x p_y$ — обычное обозначение якобиана, а ν, как обычно, кинематическая вязкость μ/ρ.

Анализ размерностей показывает, что при геометрически подобных условиях поведение несжимаемых вязких жидкостей зависит только от безразмерного параметра Re. Теперь мы будем искать *автомодельные* плоские течения для однопараметрических подгрупп группы подобия

$$r'=e^{\alpha}r,\qquad \theta'=\theta+\beta.$$

Это значит, что мы будем рассматривать течения, инвариантные относительно некоторой *спиральной* подгруппы

$$r'=e^{\alpha}r,\qquad \theta'=\theta+c\alpha, \tag{7}$$

где параметр c характеризует спираль.

Преобразования (7) переводят плоскость саму в себя. Так как ρ постоянно, формулы (7) дают автомодельное движение при постоянном числе Re тогда и только тогда, когда значения ru_r и ru_θ в соответствующих точках одинаковы. Но дифференциалы значений функции тока V пропорциональны произведениям расстояний на скорости, так как $dV=(\partial V/\partial x)dx+(\partial V/\partial y)dy$. Поэтому дифференциалы V будут *инвариантны* относительно спиральной группы (7). Итак, при заданном в полярных коорди-

---

[1]) Jeffery G. B., *Proc. Lond. Math. Soc.*, **14** (1915), 327—338; Hammel G., *Jahr. Deutsche Math. Ver.*, **25** (1916), 34—60.

[2]) Это можно вывести из гл. II (11), так как $\mathrm{rot}\,\mathbf{g}=0$ в консервативном поле и $\xi\cdot\nabla=0$ в силу того, что $\xi_1=\xi_2=\partial/\partial z=0$. Этот результат можно найти также в [8], стр. 573, пример 7.

натах соотношении $(r, \theta) = (e^\lambda, \theta)$ посредством преобразования (7) при $\alpha = -\lambda$ получаем соотношения

$$V(e^\lambda, \theta) - V(e^\lambda, c\lambda) = V(1, \theta - c\lambda) - V(1, 0) = F(\chi), \quad \chi = \theta - c\lambda. \tag{8}$$

По той же причине в случае автомодельных относительно группы (7) течений равные изменения λ вызывают равные изменения $V(e^{-\lambda}, c\lambda)$; поэтому $V(e^\lambda, c\lambda) = a\lambda + b$ есть линейная функция от λ. (Постоянная b не влияет на скорость, и ее можно положить равной нулю.) Комбинируя этот результат с соотношением (8), мы получим формулу

$$V(r, \theta) = a\lambda + F(\chi), \quad \lambda = \ln r, \qquad \chi = \theta - c\lambda. \tag{9}$$

Согласно этой формуле, течение определяется произвольной постоянной a и функцией одной переменной F. Наиболее интересен случай, когда *линии тока — спирали*, т. е. когда $a = 0$ в формуле (9).

Как и раньше, мы сделаем подстановку в дифференциальное уравнение общего вида (6); далее следуют выкладки.

В общем виде получается уравнение

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2} + \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right), \tag{10}$$

откуда, в силу формулы (9), $\nabla^2 V = e^{-2\lambda}(c^2+1)F''$.

Снова дифференцируя, получаем следующие уравнения:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial\lambda}(\nabla^2 V) = -e^{-2\lambda}(c^2+1)[cF''' + 2F''], \\ &\frac{\partial}{\partial\theta}(\nabla^2 V) = e^{-2\lambda}(c^2+1)F'''. \end{aligned} \tag{10'}$$

Из формулы, дающей отношение площадей в якобианах, $\partial/\partial(x, y) = r^{-2}\partial/\partial(\lambda, \theta)$ следует, что уравнения Навье — Стокса (6) эквивалентны уравнению

$$\frac{\nu}{r^2}\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2} + \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\nabla^2 V\right] = \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial V}{\partial\theta}\frac{\partial(\nabla^2 V)}{\partial\lambda} - \frac{\partial V}{\partial\lambda}\frac{\partial(\nabla^2 V)}{\partial\theta}\right].$$

Выполняя указанные действия, используя равенства (10), (10′) и сокращая на общий множитель $(c^2+1)/r^4 = e^{-4\lambda}(c^2+1)$, мы получаем уравнение

$$\nu[(c^2+1)F^{\mathrm{IV}} + 4cF''' + 4F''] + aF''' + 2F'F'' = 0. \tag{11}$$

Это и есть обыкновенное дифференциальное уравнение, полученное Озееном [1]); трудно найти другой столь же простой его вывод. С помощью подстановки $G = F'$ можно придать уравнению (11) несколько более привлекательный вид; кроме того, оно удовлетворяется всегда, когда $F'' = 0$. Во всяком случае, решения можно получать численным интегрированием.

§ 82. Пограничные слои у клиньев

Рассмотрим теперь задачу интегрирования уравнений ламинарного пограничного слоя в случае стационарного плоского течения; они уже были приведены в § 27. Эти уравнения имеют вид

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=u_\infty\frac{du_\infty}{dx}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\qquad \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0, \tag{12}$$

а краевые условия таковы:

$$u=v=0 \quad \text{при} \quad y=0,\quad x\geqslant 0 \tag{13}$$

и

$$\lim_{y\to\infty} u(x,\, y)=u_\infty(x). \tag{13'}$$

Как было отмечено в § 74, приведенные уравнения выведены в *асимптотическом* приближении. Это подсказывает нам мысль рассматривать масштабы x и y как независимые измерения и искать решения, симметричные относительно нетривиальных подгрупп четырехпараметрической группы аффинных преобразований

$$x\to\alpha x,\quad y\to\beta y,\quad u\to\gamma u,\quad v\to\delta v. \tag{14}$$

Можно надеяться на успех в случае обтекания бесконечного симметричного *клина*. В этом случае с помощью элементарного конформного преобразования можно показать, что эйлерово течение вне пограничного слоя имеет вид [2]) $u_\infty(x) = cx^m$ при подходящих значениях постоянных c и m. Случай $m = 0$ соответствует плоской пластинке, параллельной потоку; случай $m = 1/2$ соответствует плоской пластинке, перпендикулярной потоку.

Проверяя условия (12) и (13′) на инвариантность относительно группы (14) при $u_\infty(x) = cx^m$, мы получаем однопараметрическую подгруппу, определяемую соотношениями

$$\beta=\alpha^{(1-m)/2},\quad \gamma=\alpha^m \text{ (тривиально)},\quad \delta=\alpha^{m-1}\beta=1/\beta. \tag{14*}$$

---

[1]) См. Oseen C. W., *Arkiv for Mat.*, 1—11, 1927—1928, или [71], гл. II. Относительно асимптотического поведения при малом ν см. Kuerti G., *J. Math. Phys.* MIT, 30 (1951), 106—115.

[2]) Доказательство дали Falkner и Skan [77]; см. также [3], § 64. Случай плоской пластинки впервые рассмотрел Blasius [65]; см. также Weyl [66], Geis [67].

Переменная $\eta = (u_\infty/x)^{1/2}y$ инвариантна относительно этой подгруппы; поскольку величина $V = \int u\,dy$ получается в виде $\alpha^{(m+1)/2}V$, то инвариантна также и функция f, определяемая равенством $V = f(x, y)$. Поэтому мы ищем решение частного вида $V = x^{(m+1)/2}f(\eta)$, т. е. решение, инвариантное относительно подгруппы (14*).

Всякое решение V такого вида удовлетворяет условиям (13), (13') и второму уравнению из формул (12), если $f'(\infty) = c$. Для того чтобы удовлетворялось оставшееся уравнение, необходимо и достаточно, чтобы функция $f(\eta)$ удовлетворяла уравнению

$$m(f'^2 - 1) - \frac{m+1}{2}ff'' = \nu f'''. \tag{15}$$

Последнее уравнение можно проинтегрировать численно [1]) при краевых условиях $f(0) = f'(0) = 0$, $f'(\infty) = c$.

§ 83. Струи и следы в вязкой жидкости

С помощью рассуждений, аналогичных предыдущим, можно рассчитать, в приближении пограничного слоя, асимптотический профиль скоростей ламинарных вязких струй как для плоского, так и для осесимметричного течений.

Ввиду инвариантности уравнения пограничного слоя и уравнения неразрывности (12) относительно аффинных преобразований мы будем искать профили скоростей, удовлетворяющие гипотезе подобия

$$u = x^{-p}f(\eta), \qquad \eta = \frac{y}{x^q}, \tag{16}$$

где y обозначает расстояние от оси x на плоскости или в пространстве. Для того чтобы уравнения (12) были инвариантны относительно преобразования (16), необходимо и достаточно, чтобы $2q = p + 1$.

Мы опускаем выкладки [2]), однако заметим, что в ходе вычислений подтверждается формула $\beta = \alpha^{(1-m)/2} = \alpha^q$ из группы (14*) для рассмотренного в § 82 случая $p = -m$.

Для того чтобы определить p, нужно также использовать закон сохранения полного *количества движения струи*, равно как закон сохранения количества движения следа, рассмотренный в § 57. На плоскости этот закон сохранения эквивалентен соот-

---

[1]) См. Hartree D. R., *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 33 (1937); 223—229; Goldstein S., там же, 35 (1939), 338—341; Stewartson K., там же, 50 (1954), 454—465.

[2]) [17], стр. 271.

ношению $2p = q$, а в пространстве — соотношению $p = q$ в предположении, что справедливо соотношение (16).

Решая предыдущие уравнения, мы получим для пространственного случая $p = q = 1$. Это весьма примечательно, так как полная система уравнений Навье — Стокса инвариантна относительно найденной частной группы подобия, что впервые было получено Яцеевым и Сквайром [1]). Уравнения Навье — Стокса в сферических координатах эквивалентны уравнению

$$f^2 = 4\gamma f + 2(1-\gamma^2)f' - 2(c_1\gamma^2 + c_2\gamma + c_3), \quad \gamma = \frac{x}{r} = \cos\theta, \tag{17}$$

где c_1, c_2, c_3 — постоянные интегрирования. Кроме того, из естественных физических краевых условий следует, что $c_1 = c_2 = c_3 = 0$; в таком случае уравнение (17) можно легко проинтегрировать и получить следующий результат:

$$f = \frac{2\sin^2\theta}{a + 1 - \cos\theta} \tag{17'}$$

при произвольном a. Поведение этих решений «в большом» будет рассмотрено в § 89.

Аналогично можно рассмотреть ламинарные следы в вязкой жидкости, если u считать возмущением скорости свободного потока U, так чтобы $U + u$ представляло собой локальную скорость. В этом случае, кроме гипотезы подобия (16), надо привлечь закон сохранения *количества движения следа* (§ 57), что дает $p = q = \frac{1}{2}$ для плоских следов и $p = 1$, $q = \frac{1}{2}$ для следов в пространстве. Можно также вычислить и профили скоростей по-прежнему в приближении ламинарного пограничного слоя.

Примерно таким же образом исследуются турбулентные струи и следы. Однако в настоящее время общепризнано, что допущения, использующие понятие «длины перемешивания», для подобия в турбулентном случае, принятые в опубликованных теоретических работах, весьма сомнительны (см. [17], гл. XIV, § 11).

§ 84. Течения Прандтля — Мейера

В качестве еще одного примера применения метода «поиска симметричных решений» в задачах континуальной физики мы перейдем теперь к установившимся безвихревым течениям сжимаемых невязких жидкостей. Дифференциальные уравнения

[1]) Яцеев В. Л., *ЖЭТФ*, **20** (1950), 1031—1034; Squire H. B., *QJMAM*, **4** (1951), 321—329. Относительно краевых условий см. [17], стр. 278.

таких течений инвариантны, как мы видели в § 73, относительно однопараметрической группы моделирования по числу Маха:

$$x_i \to \alpha x_i, \quad t \to \alpha t; \quad p,\ \rho,\ \mathbf{u} \quad \text{не изменяются.} \tag{18}$$

Следуя методу поиска симметричных решений, будем искать течения, инвариантные относительно группы (18); стационарные же течения будут инвариантны и относительно группы преобразований

$$t \to t + \tau \tag{18'}$$

при неизменности всех прочих переменных.

При рассмотрении течений, инвариантных относительно преобразований (18) и (18′), удобно пользоваться полярными (r, θ) и сферическими (r, θ, φ) координатами. Пусть u_r и u_θ — соответствующие радиальная и трансверсальная составляющие скорости. Мы рассмотрим лишь случай $u_\varphi = 0$, т. е. случай отсутствия циркуляции в стационарном (безвихревом) плоском и осесимметричном течении.

Допущение инвариантности относительно преобразований (18) и (18′) означает для таких течений, что нижеследующие величины зависят только от угловой переменной (дополнения широты):

$$\begin{gathered} u_r = g(\theta), \qquad u_\theta = h(\theta), \qquad \rho = \rho(\theta), \\ p = f(\rho), \qquad \frac{dp}{d\rho} = f'(\rho) = c^2. \end{gathered} \tag{19}$$

Плоские течения, удовлетворяющие условиям (19), называются *течениями Прандтля — Мейера*; в § 92 мы дадим их обобщение (см. там рис. 26). Пространственные течения, удовлетворяющие условиям (19), называются осесимметричными *коническими* течениями.

Предположение об отсутствии вихрей равносильно условию $\oint u_r\,dr + u_\theta r\,d\theta = 0$ для всех замкнутых кривых, откуда $0 = \partial(ru_\theta)/\partial r - \partial u_r/\partial\theta = h - g'$, и мы получаем равенство

$$h = g'. \tag{20}$$

Так как течение безвихревое, то уравнения движения эквивалентны уравнению Бернулли, которое можно записать в виде

$$\frac{1}{2}u^2 + \int \frac{dp}{\rho} = \frac{1}{2}(g^2 + g'^2) + \int \frac{dp}{\rho} = \text{const}, \tag{21}$$

или как дифференциальное уравнение

$$0 = u\,du + \frac{dp}{\rho} = g'(g + g'') + c^2\left(\frac{\rho'}{\rho}\right). \tag{21'}$$

При *политропном* уравнении состояния $p = k\rho^\gamma + p_0$, $c^2 = \gamma k \rho^{\gamma-1}$, и так как $\int dp/\rho = k\gamma\rho^{\gamma-1}/(\gamma-1) = c^2/(\gamma-1) + \mathrm{const}$, то, следовательно, в этих условиях получаем уравнение

$$\frac{1}{2}(g^2 + g'^2) + \frac{c^2}{\gamma - 1} = \mathrm{const} = C. \tag{21*}$$

Все сказанное до сих пор справедливо и для конических течений.

Для течений Прандтля — Мейера уравнение неразрывности $\mathrm{div}(\rho \mathbf{u}) = 0$ можно записать в виде

$$0 = \frac{\partial}{\partial r}(\rho r u_r) + \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho u_\theta) = \rho u_r + (\rho u_\theta)' = \rho\,(u_r + u_\theta') + \rho' u_\theta.$$

Использовав (19) и (20), мы получим уравнение

$$(g + g'') + \left(\frac{\rho'}{\rho}\right) g' = 0. \tag{22}$$

Умножая уравнение (22) на g' и вычитая полученное уравнение из равенства (21′), придем к результату

$$(c + g')(c - g')\left(\frac{\rho'}{\rho}\right) = 0. \tag{22′}$$

Соотношения (22) и (22′), очевидно, эквивалентны уравнениям движения и неразрывности. Мы получаем, таким образом, два семейства решений.

Случай I. $\rho' = 0$. Тогда, согласно уравнению (22), получаем $g'' + g = 0$, откуда $u_r = A\cos(\theta - \alpha)$. Чтобы получить u_θ, мы используем формулы (19) и (20) и находим, что течение *равномерное* с постоянным вектором скорости.

Случай II. $c^2 = g'^2$, или $c = \pm g'$. Мы видим, что радиусы $\theta = \mathrm{const}$ являются характеристиками в том смысле, что перпендикулярная к ним составляющая скорости всегда равна скорости звука c. Это так называемые *волны разрежения Прандтля — Мейера* [1]); они могут заполнять клиновидные области, плавно переходящие на границе в области равномерного течения. Мы часто видим такие области на фотографиях действительных течений; таким образом, предположение, что $\rho = \rho(\theta)$, непосредственно подтверждается экспериментом.

В политропном случае, подставляя $c^2 = g'^2$ в уравнение (21*), мы сразу получаем дифференциальное уравнение

$$(\gamma + 1) g'^2 + (\gamma - 1) g^2 = 2(\gamma - 1) C. \tag{23}$$

1) [69]; Meyer T., *VDI Forschungsheft*, 62 (1908), 31—67.

Оно легко интегрируется в замкнутом виде, причем качественно характер решений в адиабатическом случае $\gamma > 1$ совершенно отличен от характера решений при $\gamma = 1$, при $-1 < \gamma < 1$ или при $\gamma = -1$ (круговое течение).

В общем (неполитропном) случае уравнение (22) и соотношение $c = \pm g'$ остаются справедливыми. В силу симметрии достаточно рассмотреть случай $c = g'$. С помощью уравнения (21) мы получаем сначала $\ln \rho = \psi(c) = \psi(g')$, а затем уравнение

$$(g+g'')+g'g''\psi'(g')=0, \tag{23'}$$

которое интегрируется численно ([14], раздел 7.1). (Если $g'\psi'(g') = -1$, то имеется особенность.) Следовательно, *волны разрежения Прандтля — Мейера математически возможны для общего вида уравнения состояния.*

§ 85. Конические течения Тейлора — Маккола

В пространстве n измерений (физически, разумеется, представляет интерес случай $n = 3$) уравнение неразрывности для стационарных осесимметричных течений принимает вид

$$0 = \frac{\partial}{\partial r}(\rho r^{n-1}\cos^{n-2}\theta u_r) + \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho r^{n-2}\cos^{n-2}\theta u_\theta) =$$
$$= \rho r^{n-2}(\cos^{n-2}\theta u_\theta)' + [(n-1)\rho u_r + \rho' u_\theta]\, r^{n-2}\cos^{n-2}\theta.$$

Разделив все члены уравнения на выражение $\rho r^{n-2}\cos^{n-2}\theta$ и воспользовавшись соотношениями (19) и (20) (напомним, что уравнения (19)—(21′) справедливы для пространственных течений), вместо уравнения (22) мы получим следующее уравнение:

$$(n-1)g-(n-2)g'\operatorname{tg}\theta+g''+g'\left(\frac{\rho'}{\rho}\right)=0. \tag{24}$$

Уравнение (21′) в данном случае все еще справедливо, оно эквивалентно уравнению (21*) в политропном случае, и учитывая уравнения (21) и (21*), мы получаем соотношение

$$\left(\frac{\rho'}{\rho}\right) = -\frac{g'(g+g'')}{c^2} = \frac{g'(g+g'')}{(\gamma-1)}\left[\frac{1}{2}(g^2+g'^2)-C\right]^{-1}.$$

Подставив это соотношение в уравнение (24), которое можно записать в виде

$$(g''+g)+(n-2)(-g'\operatorname{tg}\theta+g)+g'\left(\frac{\rho'}{\rho}\right)=0, \tag{24'}$$

мы получим следующий результат:

$$(g''+g)\left\{1+\frac{g'^2}{(\gamma-1)}\left[\frac{1}{2}(g^2+g'^2)-C\right]^{-1}\right\}+ \\ +(n-2)(-g'\operatorname{tg}\theta+g)=0. \qquad (25)$$

Последнее уравнение было численно проинтегрировано при $\gamma = 1{,}408$ (воздух) в известной работе Тейлора и Маккола [75].

Для баллистики (см. рис. 24) представляют интерес однородные и плоско-параллельные вначале течения, искажаемые затем конической ударной волной постоянной интенсивности, соглас-

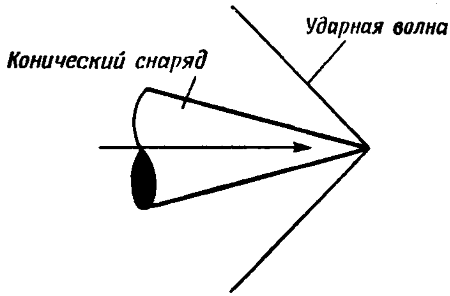

Рис. 24. Коническое течение Тейлора и Маккола.

но уравнениям Рэнкина — Гюгонио [также инвариантным относительно преобразований (18)]. Далее эти течения происходят в областях, где выполняется уравнение (25) [1]), пока они не становятся чисто радиальными ($g' = 0$), т. е. касательными к идеализированной конической головке снаряда, полуугол при вершине которой равен β, а ось направлена по скорости невозмущенного течения. Для заданных β, γ уравнение (25) можно проинтегрировать численно при начальных условиях, а именно: задается $g'(\beta) = 0$ и любое значение безразмерного отношения $g^2(\beta)/C$ в уравнении (21*). Имеется только одно значение угла ударной волны α и соответствующего числа Маха M, для которых уравнения Рэнкина — Гюгонио совместимы с плоско-параллельным движением вверх по течению от ударной волны. Поэтому мы можем записать $\alpha = \alpha(M, \beta, \gamma)$. Для заданных β, γ такое решение с «присоединенной ударной волной» (ср. § 11) теоретически существует только при $M > M(\beta, \gamma)$. Если $M < M(\beta, \gamma)$, то никакое коническое течение невозможно, и, следовательно, теория

[1]) В случае плоскости линии тока в этой области — прямые (§ 84, случай I), на что впервые указал А. Busemann, *ZAMM*, 9 (1929), 496—498.

предсказывает существование течения с «отошедшей ударной волной».

Подобные течения будут рассмотрены в § 88. Здесь достаточно отметить, что теоретически вычисленные границы конического режима, давление на коническую головку и угол присоединенной ударной волны (как функции числа Маха и угла при вершине конуса) ненамного отличаются от экспериментальных данных.

§ 86. Расходящиеся волны давления

Существуют также важные семейства нестационарных течений, обладающие внутренней симметрией (18). Из таких семейств особенно заслуживают упоминания расходящиеся волны — плоские, цилиндрические и сферические. Плоские расходящиеся волны возникают, например, когда в ударной трубе рвется диафрагма в области позади слоя взрывчатки, взорванного с одной из сторон, или позади поршня, который мгновенно начинает двигаться с постоянной скоростью в бесконечно длинном цилиндре [1]). Сферические волны возникают при равномерном расширении сферы.

Интересно отметить, что с расходящимися волнами давления связано одно из первых сознательных применений метода поиска симметричных решений [2]). Мы рассмотрим их лишь с математической точки зрения.

Здесь удобнее перейти к переменным Лагранжа. Обозначим через a массу, определяемую путем интегрирования от какой-либо фиксированной материальной точки (например, от стационарного центра симметрии). Для *плоских* волн, если определять положение координатой $x = f(a, t)$ и обозначать плотность через $\rho = \rho(a, t)$, уравнение неразрывности эквивалентно соотношению $\sigma = \partial f/\partial a$ между удельным объемом $\sigma = 1/\rho$, величиной x и массой a. Поэтому допустимые для данного уравнения состояния $p = p_0 - F(\sigma) = p_0 + k\rho^{\gamma}$ течения соответствуют решениям уравнений движения. Последние сводятся к уравнению

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = F'(\sigma)\frac{\partial^2 f}{\partial a^2} = k\gamma\left(\frac{\partial f}{\partial a}\right)^{-\gamma-1}\frac{\partial^2 f}{\partial a^2}, \tag{26}$$

---

[1]) По поводу расходящихся плоских волн («центрированные волны разрежения») см. [6], § 46. О волнах давления, возникающих при расширении сферы, см. Taylor G. I., *Proc. Roy. Soc.*, A 186 (1946), 273—292.

[2]) См. [62], [72] и [74]. О них идет речь и в [57], гл. IV. В [57], гл. II, § 13, приводится ссылка на более раннюю работу об автомодельных гравитационных волнах Н. Е. Кочина, Труды Мат. Института им. Стеклова, 9 (1935); см. также [7], п. 277.

как указано в [6], § 18. (Легко проверить, что $u = \partial f/\partial t$ есть скорость, $\partial^2 f/\partial t^2$ — субстанциональное ускорение и что правая часть представляет собой $-\partial p/\rho\partial x$.)

Так как скорость $u = \partial f/\partial t$, то автомодельность относительно преобразований (18) эквивалентна соотношению $f(\alpha a, \alpha t) = \alpha f(a, t)$ для всех $\alpha > 0$ и, следовательно, соотношению $f(\alpha, \alpha t) = \alpha f(1, t) = \alpha g(t)$. Полагая $\tau = t/a$, получим равенства:

$$x = f(a, t) = af\left(1, \frac{t}{a}\right) = ag(\tau), \quad \tau = \frac{t}{a}. \tag{26'}$$

Таким образом, равенства (26′) служат выражением инвариантности относительно преобразований (18).

Подставив формулу (26′) в уравнение (26), получим соотношение

$$0 = a^{-1} g''(\tau) \{1 - \gamma k \rho^{\gamma+1} \tau^2\}, \tag{27}$$

так как прямой подсчет показывает, что $\partial^2 f/\partial a^2 = t^2 g''(t/a)/a^3$. Итак, «центрированные» плоские волны, обладающие симметрией расширения (18), представляют собой решения обыкновенного дифференциального уравнения (27). (Парадокс Эрншоу утверждает, что таких решений, обладающих симметрией переноса, нет.) Уравнение (27) имеет два семейства решений. Если $g'' = 0$, то $f = a\ [C_1 + C_2(t/a)] = C_1 a + C_2 t$. Это тривиальный случай, когда имеем равномерное течение с постоянными u и σ.

Во втором случае, $1 = \gamma k \rho^{\gamma+1} \tau^2$, откуда следует соотношение

$$\left(\frac{\partial f}{\partial a}\right)^{\gamma+1} = \sigma^{\gamma+1} = \gamma k \tau^2. \tag{28}$$

Согласно формуле (26′), $\partial f/\partial a = g(t/a) - (t/a) g'(t/a)$, и, следовательно, получаем условие в виде

$$g - \tau g' = [\gamma k \tau^2]^{1/(\gamma+1)} \tag{29}$$

если $\gamma \neq -1$. Это линейное неоднородное обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка легко проинтегрировать формально. Его общее решение имеет вид

$$g(\tau) = C\tau + A\tau^{2/(\gamma+1)}, \tag{29'}$$

где $A = [(\gamma + 1)/(\gamma - 1)] [\gamma k]^{1/(\gamma+1)}$, а C произвольно при условии, лишь если $|\gamma| \neq 1$. Если $\gamma = -1$, то решения не существует, так как тогда ввиду соотношения (28), $\tau = \text{const}$. Если $\gamma = 1$, то общее решение имеет вид $g(\tau) = C\tau - \sqrt{\gamma k}\, \tau \ln \tau$.

Аналогично можно разобрать случаи центрированных цилиндрических и сферических волн. Для случая $m + 1$ измерений уравнения движения записываются в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = r^m F'(\sigma) \frac{\partial}{\partial a}\left[r^m \frac{\partial r}{\partial a}\right], \quad \sigma = r^m \frac{\partial r}{\partial a}. \tag{30}$$

Условие автомодельности относительно преобразований (18) эквивалентно следующим соотношениям, аналогичным формуле (26′):

$$r = bg(\tau), \quad \tau = \frac{t}{b}, \quad b = a^{1/(m+1)}. \tag{30'}$$

Подставив соотношения (30′) в уравнение (30), мы снова получим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, решения которого представляют собой цилиндрические и сферические волны.

Как и в § 84 и 85, можно получить волны, аналогичные описанным выше для общего уравнения состояния, не требуя условия политропности[1]).

§ 87. Политропная симметрия

В политропном случае $p - p_0 = k\rho^\gamma$ (ср. гл. IV, теорема 9), а уравнения сжимаемого невязкого баротропного течения обладают двухпараметрической группой симметрии. Она представляет собой подгруппу трехпараметрической группы преобразований:

$$\begin{gathered} \mathbf{x} \to \alpha\mathbf{x}, \quad t \to \beta t, \quad \mathbf{u} \to (\alpha/\beta)\mathbf{u}, \\ \rho \to \delta\rho, \quad (p - p_0) \to \delta^\gamma (p - p_0). \end{gathered} \tag{31}$$

Политропное уравнение состояния и уравнение неразрывности $\partial\rho/\partial t + \operatorname{div}(\rho\mathbf{u}) = 0$ инвариантны относительно всякого преобразования вида (31). Уравнения движения (невязкой жидкости) инвариантны относительно группы (31) тогда и только тогда, когда $\delta^{\gamma-1} = \alpha^2/\beta^2$. Отсюда, двухпараметрическая подгруппа группы (31), сохраняющая неизменными уравнения движения Эйлера, определяется условием $\delta = (\alpha/\beta)^{2/(\gamma-1)}$.

За исключением тривиального случая $\beta \equiv 1$, во всякой однопараметрической подгруппе группы (31) справедливо равенство $\alpha = \beta^\tau$ при некотором постоянном показателе τ. Поэтому, если уравнения движения Эйлера инвариантны относительно такой подгруппы, то $\delta = \beta^{2(\tau-1)/(\gamma-1)}$, и мы получаем следующие соотношения:

$$\begin{gathered} \mathbf{x} \to \beta^\tau \mathbf{x}, \quad t \to \beta t, \quad \mathbf{u} \to \beta^{\tau-1}\mathbf{u}, \\ \rho \to \beta^{2(\tau-1)/(\gamma-1)}\rho, \quad (p - p_0) \to \beta^{2\gamma(\tau-1)/(\gamma-1)}(p - p_0). \end{gathered} \tag{32}$$

[1]) Относительно материалов § 86 см. оригинальную литературу на русском языке [8*], [14*]. — *Прим. ред.*

Автомодельным течениям из § 84—86 соответствует выбор $\tau = 1$, и тогда вторая строчка из соотношений (32) сводится к $\rho \to \rho$, $p \to p$, так что соотношения (32) вырождаются в формулы (18).

Орбитами группы (32) (ее «множествами транзитивности») в системе координат пространство — время называются кривые, на которых постоянна величина $\chi = \mathbf{x}/t^\tau$. Следовательно, невязкие сжимаемые течения, которые группа (32) переводит самих в себя, определяются соотношениями

$$u_i(\mathbf{x};\ t) = t^{\tau - 1} f_i(\chi), \qquad \rho = t^{2(\tau-1)/(\gamma-1)} e(\mathbf{x}), \tag{33}$$

а также и зависимостью $p - p_0 = k\rho^\gamma$. Сделав подстановку в уравнения движения, получим необходимое и достаточное условие для того, чтобы течение было автомодельным относительно этой частной группы моделирования по числу Маха.

Важным примером такого течения является асимптотическое течение газов в результате взрыва в стволе орудия при сообщении ускорения снаряду постоянной массы [1]). Пользуясь переменными Лагранжа, можно исключить уравнение неразрывности. Кроме того, как и в первом примере из § 80, имеется особая «точка концентрации» начальной энергии при $t = 0$. Это соответствует случаю высокой концентрации взрывчатки в «длинноствольном» орудии; в данном случае можно предполагать, что течение *адиабатично*.

Указанный пример связан с примером чрезвычайно интенсивных сферических и цилиндрических взрывных волн, когда можно пренебречь давлением вне области взрыва [2]). В этом случае энтропия зависит от силы ударной волны и убывает со временем; чтобы сохранялась величина полной энергии, нужно положить $\tau = 2/5$.

Окончательные формулы для этих случаев читатель может найти в литературе, на которую мы ссылались.

§ 88. Конические течения

Течения, которые мы до сих пор рассматривали, обладают достаточной физической симметрией в пространстве и времени, так что все характеризующие их величины каждый раз можно выразить функциями *одной* независимой переменной. В этих условиях уравнения в частных производных механики жидкостей

[1]) Love A. E., Pidduck F. B., *Phil. Trans.*, **A222** (1922), 167—226; Kent R. H., *Physics*, 7 (1926), 319—324. Ускорение $a \sim t^{\tau-2}$. См. также [6], § 160.

[2]) См. [6], § 161; такую модель дал Taylor G. I., *Proc. Roy. Soc.*, **A201** (1950), 159—186. Относительно дальнейших результатов см. [57], гл. IV. [В русской литературе такие волны называются «сильными ударными волнами». — *Прим. ред.*]

сводятся к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Однако имеются другие важные приложения метода поиска симметричных решений, когда задача сводится к уравнениям *в частных производных*. Наиболее очевидный пример представляют собой «конические течения» без осевой симметрии, которые впервые ввел и исследовал А. Буземан[1]). Это — стационарные течения с полем скоростей (в сферических координатах)

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\varphi, \theta). \tag{34}$$

Подобные течения получаются, например, около дельтавидных крыльев, так как такие крылья обладают конической симметрией.

Более аккуратное применение метода к расширяющемуся автомодельному течению необходимо при рассмотрении входа в воду клина или конуса с постоянной скоростью (см. рис. 25),

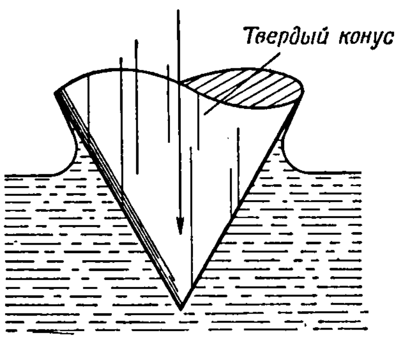

Рис. 25. Вертикальный удар конуса о воду.

причем скорость должна быть достаточно велика, чтобы на входе преобладали силы инерции. Сначала мы рассмотрим случай клина[2]). Как и раньше, преобразование:

$$x_i \to \alpha x_i, \qquad t \to \alpha t, \qquad \text{величины } p, \rho, u_i \text{ не изменяются} \tag{35}$$

оставляет инерциальную гидромеханику неизменной; мы даже можем считать жидкость сжимаемой! Поэтому метод «поиска симметричных решений» в случае клина предсказывает нам выбор решений вида

$$U(x, y; t) = t\varphi\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}\right). \tag{36}$$

[1]) См. *NACA Tech. Memo.* 1100 (1947) и данную там библиографию; см. также [10], § 10.5; Ферри А., статья в книге Общая теория аэродинамики больших скоростей (ред. Сирс У. Р.), Воениздат, 1962

[2]) Этот вопрос был исследован Л. И. Седовым [14*]. — *Прим. ред.*

Этот метод сведения трех независимых переменных к двум использован в известной работе Г. Вагнера об ударе гидроплана при посадке на воду[1]). Рассуждая, как в гл. III, § 2 мы можем свести задачу к функциям *одной* комплексной переменной, но при этом усложнятся краевые условия.

Очевидно, тот же метод применим к задаче о конусе, входящем в воду с постоянной скоростью, и решение имеет вид

$$U(x,\ y,\ z;\ t)=t\varphi\left(\frac{x}{t},\ \frac{y}{t},\ \frac{z}{t}\right), \tag{37}$$

т. е. мы перешли от *четырех* независимых переменных к *трем*.

В случае прямого *кругового* конуса, вертикально входящего в воду, задача имеет осевую симметрию и решение можно построить с помощью функции

$$U(x,\ y,\ \theta;\ t)=t\varphi\left(\frac{x}{t},\ \frac{y}{t}\right),$$

т. е. одной единственной функции *двух* независимых переменных.

В случае несжимаемой жидкости теорию потенциала можно использовать для создания поля течения с помощью *распределения источников* на свободной поверхности, положение и интенсивность которых являются искомыми функциями одной переменной (длины дуги). Использовав эту идею, Шиффман и Спенсер[2]) показали, что условие постоянства давления на «свободной поверхности» приводит к системе интегральных уравнений относительно функций *одной* переменной. Значительным достижением, которое принадлежит Хиллману, было приближенное численное интегрирование этих уравнений для конуса с углом в 60°.

§ 89. Локальные и глобальные решения

Приведенные выше примеры показывают, что во многих случаях для задач, имеющих данную симметрию в пространстве и времени, существуют автомодельные математические решения. Однако сформулировать и доказать общую теорему существования гораздо труднее.

Когда имеется симметрия, достаточная для того, чтобы общие дифференциальные уравнения течения жидкости сводились к *обыкновенным* дифференциальным уравнениям, мы можем использовать стандартные *локальные* теоремы существования.

---

[1]) Wagner H., *Zeits. ang. Math. Mech.*, 12 (1932), 193—215.

[2]) *Comm. Pure Appl. Math.*, 4 (1951), 379—417; в этой же статье изложены результаты Hillman; см. также [17], гл. XI, § 9.

Однако существование *глобальных* решений, удовлетворяющих соответствующим краевым условиям, предсказать гораздо труднее. Ярким примером встречающихся здесь трудностей может служить сжимаемое невязкое плоское течение с симметрией вращения (спиральные линии тока). Как впервые показал Ринглеб[1]), такое течение невозможно в «большом», поскольку его радиальная составляющая меняет свое направление на противоположное вдоль «предельной окружности».

Такую неопределенность наглядно можно продемонстрировать на течениях Тейлора — Маккола (§ 85), для которых режим конической симметрии типа присоединенной ударной волны ограничен условием достаточной малости угла при вершине конуса (при данном числе Маха). Для общего класса стационарных осесимметричных течений, удовлетворяющих уравнению (25), очень трудно строго определить существование решения в «большом», и опубликованные результаты не всегда надежны[2]).

Подобным образом, хотя существование безударных центрированных волн разрежения возможно, волны сжатия связаны с ударными волнами, из-за чего весьма усложняется исследование существования решения в «большом» для автомодельных волн взрыва.

Другой интересный пример трудности определения глобального решения представляют собой осесимметричные *струи* (ламинарные, вязкие). Как показано в § 83, уравнения Навье — Стокса можно свести к обыкновенным дифференциальным уравнениям, если использовать автомодельное поле скоростей, имеющее в сферических координатах вид

$$\mathbf{u} = r^{-1}\mathbf{f}(\theta). \tag{38}$$

К сожалению, как показал Беран[3]), результирующее обыкновенное дифференциальное уравнение (17) не имеет глобальных решений, удовлетворяющих естественным краевым условиям для струи, вытекающей из круглого отверстия в плоской стенке или из какого-либо другого конического отверстия. Вопреки некоторым опубликованным результатам, по-видимому, только струя, вытекающая из труб с параллельными стенками, математически совместима в «большом» с требуемой симметрией (38) и естественными краевыми условиями.

Локальная теорема существования. Даже общие *локальные* теоремы существования нелегко доказать. Один

---

[1]) *ZAMM*, **20** (1940), 185—198; см. также [15], гл. V § 4 и VII § 8.

[2]) Наиболее аккуратное исследование проведено автором и Уолшем, Walsh J. M., Riabouchinsky Jubilee Volume, Paris, 1954, 1—12.

[3]) Beran M., *Quar. Appl. Math.*, **14** (1956), 213—214.

из положительных результатов формулирует следующая[1]) теорема (мы просим прощения у читателя за абстрактную математическую терминологию, которой мы воспользуемся ради краткости).

Теорема 1. *Пусть $X = \Gamma \times E$ есть прямое произведение своих подпространств Γ и E и пусть для каждого фиксированного $\alpha \in E$ группа G преобразований пространства X транзитивна*[2]) *на множестве (γ, α), где переменная $\gamma \in \Gamma$. Если дифференциальное уравнение $D[u] = 0$, определенное в X, инвариантно относительно G, то на E существует дифференциальное уравнение $\Delta[U] = 0$ порядка не более чем $D[u] = 0$ и такое, что $u(\mathbf{x}) = u(\gamma, \xi) = U(\xi)$ удовлетворяет уравнению $D[u] = 0$ тогда и только тогда, когда $U(\xi)$ удовлетворяет $\Delta[U] = 0$ для $\xi \in E$.*

Доказательство. В окрестности каждой точки $\mathbf{x} = (\gamma, \xi)$ из X можно ввести в X локальные координаты $\gamma_1, \ldots, \gamma_r$ и $\xi_1, \ldots, \xi_{n-r}$. Всякая p-я частная производная $X^{(p)}[u]$ по этим координатам будет иметь простой вид $\Gamma^{(m)}[u]E^{(p-m)}[u]$, где $\Gamma^{(m)}$ и $E^{(p-m)}$ — частные производные по координатам $\gamma_1, \ldots, \gamma_r$ и $\xi_1, \ldots, \xi_{n-r}$ для Γ и E соответственно. Отсюда всякий оператор в частных производных $D = \Phi\{X_1^{(p_1)}, \ldots, X_s^{(p_s)}\}$ порядка q на функциях $u(\mathbf{x})$, определенных на X, можно записать в виде соотношения

$$D = \Psi\{\Gamma_1^{(m_1)}, \ldots, \Gamma_s^{(m_s)}; \; E_1^{(p_1-m_1)}, \ldots, E_s^{(p_s-m_s)}\}, \tag{39}$$

которое представляет собой функцию частных производных на E порядка не больше q.

Но те функции $U(\xi) = u(\gamma, \xi)$, значение которых в любой точке $\mathbf{x} = (\gamma, \xi)$ зависит только от γ (т. е. функции, инвариантные относительно G), оператор E_j переводит в другие функции того же класса, а оператор Γ_j (группа G транзитивна) переводит их в 0. Поэтому для таких функций оператор D эквивалентен дифференциальному оператору на E, полученному отбрасыванием всех членов, в которых $m_j > 0$. Этим теорема доказана.

Следствие. Если задача $D[u] = 0$ корректна для некоторого класса краевых условий, инвариантного относительно G, то корректна и задача $\Delta[u] = 0$.

Хотя при доказательстве локальных теорем существования

---

[1]) См. также Morgan J. A., *Quar. J. Math.*, 3 (1952), 250—259. Если дифференциальные уравнения линейны и группа G компактна, можно подойти к вопросу иначе — с точки зрения интегрирования на группах.

[2]) Это означает, что для данных (γ, α) и (γ', α) в G существует такое g, что $g(\gamma, \alpha) = (\gamma', \alpha)$. Мы предполагаем, что Γ и E — дифференцируемые многообразия.

для обыкновенных дифференциальных уравнений аналитичность несущественна [1]), в теоремах существования для уравнений в частных производных такое условие часто существенно.

В случае *аналитических* уравнений с частными производными (и аналитическими группами симметрии) уравнение (39) также будет аналитично. В этом случае для многих задач *с начальными условиями* мы располагаем хотя бы *локальными* теоремами существования. Так, предположим, что все производные *по времени* входящих в уравнение функций $\varphi_i(\mathbf{x};\, t)$, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ выражаются через φ_i и их первые производные *по пространственным* координатам, так что можно записать уравнение

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} = F_i\left(\varphi_j, \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k}\right). \tag{40}$$

Тогда теорема существования Коши — Ковалевской [2]) утверждает, что уравнение (40) имеет одно и только одно локальное аналитическое решение для данных аналитических начальных условий $\varphi_i(\mathbf{x};\, 0)$ при $t = 0$.

А теперь предположим, что уравнение (40) инвариантно относительно группы G. Пусть $\varphi_i(\mathbf{x};\, 0) = G_i(\mathbf{x})$ есть множество аналитических начальных условий, инвариантное относительно G. Тогда единственное локальное решение, которое существует, согласно предыдущей теореме, тоже будет инвариантно относительно G. Следовательно, мы имеем локальную теорему *существования* (и единственности) для приведенного дифференциального уравнения, полученного методом поиска симметричных решений, если только таковая теорема имеется для первоначальных дифференциальных уравнений.

Кажущееся незначительным ограничение, что производные по пространственным координатам в уравнениях (40) должны быть *первого* порядка, на самом деле оказывается весьма сильным. Так, из него следует, что система (40) должна быть гиперболического типа. В случае сжимаемой невязкой жидкости это выполняется, чего нельзя сказать, например, о несжимаемой невязкой жидкости или любой вязкой жидкости. Для того чтобы строго установить даже локальную корректность метода поиска симметричных решений, нужны дальнейшие исследования в теории уравнений в частных производных.

---

[1]) Автор не изучал вопроса, какие требуются условия для того, чтобы избавиться от трудностей, которые могут возникнуть в случае таких обыкновенных дифференциальных уравнений, как $y'^2 + y^2 + 1 = 0$, «степени» выше первой.

[2]) Hadamard J., Le problème de Cauchy, Paris, 1932, гл. I [или Степанов В. В., Курс дифференциальных уравнений; М.—Л., 1950. — *Прим. ред.*]

§ 90. Теория групп и метод разделения переменных

Решения физических задач, обладающие внутренней симметрией относительно некоторой группы, можно математически упростить с помощью связанного с этой группой выбора переменных. Мы покажем теперь, каким образом это приводит к методу «разделения переменных», который широко применяется в гидродинамике.

Рассмотрим, например, инвариантность уравнений Эйлера — Лагранжа для невязкой сжимаемой жидкости относительно группы

$$t \to at, \quad x_i \to ax_i; \quad p, \ \rho, \ \mathbf{u} \text{ без изменений.} \tag{18}$$

По определению, частные «автомодельные» течения, инвариантные относительно группы (18), можно выразить в виде

$$u_i = f_i(\chi), \quad p = p(\chi), \quad \rho = \rho(p) = \rho(p(\chi)), \tag{41}$$

где

$$\chi = (\chi_1, \chi_2, \chi_3) = \left(\frac{x_1}{t}, \frac{x_2}{t}, \frac{x_3}{t}\right) = \frac{\mathbf{x}}{t}. \tag{42}$$

Очевидно, (42) есть частный случай соотношения

$$\chi = h(t)\,\mathbf{x}. \tag{43}$$

Найдем теперь все нестационарные течения невязкой жидкости, формально допускающие разделение переменных по формулам (41) и (43).

Наш первый результат будет отрицательного характера. Оказывается, что всякое такое течение инвариантно относительно группы (18): обобщение соотношения (42) до вида (43) ничего не дает.

Очевидно, что для любой дифференцируемой функции $F(\chi)$ из соотношения (43) следуют равенства:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{h'}{h} \sum \chi_k \frac{\partial F}{\partial \chi_k} \quad \text{и} \quad \frac{\partial F}{\partial x_i} = h \frac{\partial F}{\partial \chi_i}, \tag{44}$$

где суммирование производится по индексу k. Поэтому уравнение неразрывности $\partial\rho/\partial t + \operatorname{div}(\rho\mathbf{u}) = 0$ эквивалентно уравнению

$$h\left[\left(\frac{h'}{h^2}\right) \sum \frac{\chi_k \,\partial\rho}{\partial \chi_k} + \sum \frac{\partial(\rho u_k)}{\partial \chi_k}\right] = 0, \tag{45}$$

если справедливо соотношение (43). Аналогично, если пренебречь силой тяжести, уравнения движения невязкой жидкости эквивалентны уравнениям

$$h\left[\left(\frac{h'}{h^2}\right) \sum \frac{\chi_k \,\partial u_i}{\partial \chi_k} + \sum \frac{u_k \,\partial u_i}{\partial \chi_k} + \frac{\partial p}{\rho\, \partial \chi_i}\right] = 0. \tag{46}$$

Если h'/h^2 — постоянная, не зависящая от времени и не равная нулю, скажем $-C$, то $\frac{1}{h}=C(t-t_0)$. Поэтому посредством очевидного изменения начала отсчета и единицы измерения времени можно свести наш случай к случаю течений, удовлетворяющих соотношению (42) и, следовательно, обладающих симметрией относительно группы (18).

В противном случае, как можно показать частным дифференцированием соотношений (45), (46) по времени при фиксированном χ, будем иметь $\sum \chi_k \partial\rho/\partial\chi_k = \sum \chi_k \partial u_i/\partial\chi_k = 0$. В этом случае, в силу равенств (44) $\partial\rho/\partial t = \partial \mathbf{u}/\partial t = 0$ и, следовательно, $\rho = \rho(\mathbf{x})$, $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x})$. Отсюда, частный выбор переменной h'/h^2 в формуле (45) дает как раз стационарные *конические* течения из § 88. Такие течения удовлетворяют соотношениям (41) и (43) при *любом* $h(t)$, в частности при $h(t) = 1/t$, как в формуле (42); все они являются автомодельными относительно группы (18).

Итак, методом поиска решений, симметричных относительно группы (18), можно получить *все* невязкие течения, допускающие (кажущееся более общим) «разделение переменных» вида (41) и (43).

Для *безвихревых* течений соотношения (41) и (42) эквивалентны предположению, что потенциал скоростей $U(\mathbf{x}, t)$ допускает разделение переменных

$$U = tF(\chi) = tF(\mathbf{x}/t), \tag{47}$$

что уже сделано в соотношениях (36) и (37). При этом для безвихревых *баротропных* течений можно применить обобщенное уравнение Бернулли из § 4, $\partial U/\partial t + \frac{1}{2}\nabla U \nabla U + \int dp/\rho = C(t)$.

Последнее ввиду равенств (44) сводится к уравнению

$$F(\chi) - \sum \chi_k \frac{\partial F}{\partial \chi_k} + \frac{1}{2}\nabla F \nabla F + \int \frac{\partial p}{\rho} = C. \tag{47'}$$

В случае *несжимаемой* жидкости ($\rho = \rho_0$) можно получить расширение класса подобных решений, положив $C = C(t)$.

Дальнейшие обобщения. Разделение переменных вида (47), хотя и эквивалентно формуле (41), наводит на мысль, что формально следует рассмотреть вообще все течения, которые *автомодельны* по времени в том смысле, что для них справедливо соотношение:

$$\mathbf{u} = g(t)\mathbf{f}(\chi), \quad \text{где} \quad \chi = h(t)\mathbf{x}. \tag{48}$$

В этот класс течений входят также течения, рассмотренные в § 87, для которых [как сказано в замечании после формулы (32)] инвариантность относительно (18) эквивалентна равенству $\tau = 1$.

В него также входит новый класс *несжимаемых* безвихревых струйных течений, введенный Карманом [1]). Последние определяются условием подобия

$$U = (\mathbf{x};\ t) = \frac{1}{t}\varphi(\mathbf{x}), \tag{49}$$

которое соответствует постоянному коэффициенту ускорения.

§ 91. Случай вязкой жидкости

Интересно было бы определить самое общее течение невязкой жидкости, удовлетворяющее условию подобия (48), и проверить течение на инвариантность относительно подгрупп группы подобия. Вместо этого мы в виде компенсации определим *несжимаемые вязкие* течения, удовлетворяющие условию (48).

Как и в § 3, уравнения состояния и неразрывности для несжимаемого течения, взятые вместе, эквивалентны одному условию $\operatorname{div}\mathbf{u} = 0$. Так как g и h не обращаются в нуль, то это равносильно равенству

$$\sum \frac{\partial f_k}{\partial \chi_k} = 0, \tag{50}$$

из которого исключено t.

Остается рассмотреть уравнения движения Навье — Стокса. По теореме 1 из § 21 силой тяжести можно пренебречь. С учетом этого и после непосредственной подстановки условия (48) в уравнения Навье — Стокса из гл. II, формула (3), мы получим соотношения:

$$\frac{\partial u_l}{\partial t} = g'f_l + \sum gh'x_k\left(\frac{\partial f_l}{\partial \chi_k}\right) = g'f_l + \sum\left(\frac{gh'}{h}\right)\chi_k\frac{\partial f_l}{\partial \chi_k},$$

$$\sum u_k\frac{\partial u_l}{\partial x_k} = \sum gf_kgh\left(\frac{\partial f_l}{\partial \chi_k}\right) = \sum (g^2h)f_k\frac{\partial f_l}{\partial \chi_k},$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_l} = \left(\frac{a(t)\,h(t)}{\rho_0}\right)\frac{\partial p}{\partial \chi_l}, \quad \text{если} \quad p = a(t)\,p(\chi),$$

$$\nu\nabla^2 u_l = \nu(gh^2)\sum_k \frac{\partial^2 f_l}{\partial \chi_k^2}.$$

[1]) *Annali di Mat.*, 29 (1949), 247—249; см. также [17], стр. 248.

Следовательно, дифференциальные уравнения Навье — Стокса можно записать, разделив переменные, в виде

$$\sum_{j=1}^{5} F_j(t)\,G_j(\chi)=0, \qquad (51)$$

где

$$F_1=g', \quad F_2=gh'/h, \quad F_3=g^2h, \quad F_4=ah, \quad F_5=gh^2$$

и

$$G_1=f_l, \quad G_2=\chi_k\frac{\partial f_l}{\partial \chi_k}, \quad G_3=f_k\frac{\partial f_l}{\partial \chi_k},$$

$$G_4=\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial \chi_l}, \quad G_5=-\nu\sum\frac{\partial^2 f_l}{\partial \chi_k^2}.$$

Очевидно, что условие (51) эквивалентно требованию, чтобы векторы $\mathbf{F}=(F_1, F_2, F_3, F_4, F_5)$ и $\mathbf{G}=(G_1, G_2, G_3, G_4, G_5)$ принадлежали взаимно *ортогональным подпространствам*. В зависимости от числа линейно независимых соотношений, которым удовлетворяет G_j, «F-подпространство», натянутое на векторы F_i, может, как видим, иметь 1, 2, 3 и 4 измерения. Сначала мы рассмотрим тот невырожденный случай, когда все F_j пропорциональны, так что «F-подпространство» имеет одно измерение.

Мы можем сделать F_4 пропорциональным F_3, положив $a=\alpha g^2$. Как и раньше, наличие равенства $g=h$ (постоянные множители можно опустить) эквивалентно пропорциональности F_1 и F_2. Остается еще условие, что F_1 должно быть пропорционально F_3 или должно выполняться равенство $g'=(-\beta/2)g^2h$ для некоторой постоянной β. Так как $g=h$, то это условие равносильно тому, что $-2g'/g^3=\beta$, или $1/g^2=\beta(t-t_0)$. Надлежащим выбором начала координат и шкалы времени последнее условие можно свести к $g=1/\sqrt{t}$ и, следовательно, к условиям

$$u_l(\mathbf{x};\ t)=\frac{1}{\sqrt{t}}f_l(\chi) \quad \text{и} \quad p=\frac{p(\chi)}{t}, \quad \left[\chi=\frac{\mathbf{x}}{\sqrt{t}}\right], \qquad (52)$$

$$-\frac{1}{2}\left(f_l+\chi_k\frac{\partial f_l}{\partial \chi_k}\right)+f_k\frac{\partial f_l}{\partial \chi_k}+\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial \chi_l}=\nu\sum_k\frac{\partial^2 f_l}{\partial \chi_k^2}. \qquad (52')$$

Итак, в поисках более общего типа симметричных решений мы снова снизили число независимых переменных на единицу! Рассматривать соотношения (52′) сами по себе здесь мы не будем [1]).

---

[1]) На плоскости условие (50) эквивалентно существованию функции тока, а из соотношения (52′) можно исключить p, используя $\mathrm{rot}\,(\mathrm{grad}\ p)=0$. При этом уравнение четвертого порядка в частных производных (6) не изменяется.

Это соответствует инвариантности уравнений Навье — Стокса относительно преобразования $t \to \alpha t$ и $\mathbf{x} \to \beta \mathbf{x}$ при условии, что число Рейнольдса $\mathrm{Re} = vd/\nu \sim (\beta/\alpha)\beta$, $[\nu = \mathrm{const}]$ не изменяется, так что $\beta \sim \sqrt{\alpha}$. Решения (52) — в точности те течения, которые инвариантны относительно этой группы.

Уравнение (51) имеет также «вырожденные» решения. Например, рассмотрим течения, параллельные оси x, тогда можно записать равенства:

$$u_1 = g(t) f_1(y, z), \quad u_2 = u_3 = p = 0. \tag{53}$$

В этом случае условие (50) всегда удовлетворяется. Так как $h = 1$, то $F_2 = 0$; из $p = 0$ следует $F_4 = 0$. Большое значение имеет то, что $G_4 = f_1 \partial u_i / \partial x = 0$ при всех i; поэтому для F_3 нет ограничений. Остается удовлетворить условию $g' f_1 = \nu g (\partial^2 f_1/\partial y^2 + \partial^2 f_1/\partial z^2)$, которое, поскольку g зависит от t, а f_1 зависит от $\mathbf{x} = (y, z)$, сводится к равенству $g'/g = -k$ и соотношению

$$u_1 = e^{-kt} f_1(y, z), \quad \text{где} \quad \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial z^2} = -\nu k f_1. \tag{53'}$$

Последнее соотношение определяет хорошо известное[1]) экспоненциальное затухание параллельных вязких течений, например, течения в двумерном канале $-a \leqslant y \leqslant a$ при $u_1 = e^{-kt} \cos \pi y/2a$ и $k = \pi^2/4a^2\nu$.

§ 92. Обратные методы

Предыдущие примеры характеризуют метод «разделения переменных» как обобщение «метода поиска симметричных решений». В свою очередь метод разделения переменных представляет собой частный случай более широкого класса «обратных методов», систематически изученных П. Неменьи[2]). Положение в этом вопросе нестрого можно описать следующим образом. Всякий раз, когда теория групп указывает на существование течений с разделенными переменными или течений, обладающих каким-либо другим свойством P, *априорно* постулируя свойство P, мы получим по меньшей мере те же решения, но, возможно, и какие-либо другие.

---

[1]) См. Taylor G. I., *Phil. Mag.*, 46 (1923), 671—674. Аналогичное экспоненциальное затухание возможно и для круговых течений, когда $p'(r)$ достаточно велико для создания центростремительного ускорения; ср. [71] и Berker R., Sur quelques cas d'intégration des équations du mouvement d'un fluide visqueux incompressible, Lille, 1936.

[2]) Неменьи П. Ф., сб. Проблемы механики, ИЛ, М., 1955, стр. 234—257. [См. также [44]. — *Прим. ред.*]

Например, согласно теории групп, существуют (локально) волны расширения Прандтля — Мейера, для которых

Векторная скорость постоянна вдоль всякой прямой некоторого однопараметрического семейства. P1

«Обратный метод» состоит в нахождении всех стационарных безвихревых течений сжимаемой невязкой жидкости, обладающих свойством P1. Это получается следующим образом.

Мы знаем (§ 5), что уравнения движения в случае стационарного безвихревого потока эквивалентны уравнению Бернулли $u^2/2 + \int dp/\rho = C$. Поэтому с помощью численного интегрирования для каждого значения «давления торможения» (т. е. постоянной интегрирования) получим одну и только одну пару функций $\rho(u)$ и $p[\rho(u)]$, удовлетворяющих как уравнению состояния, так и уравнениям движения. Кроме того, течения со свойством P1 — это течения, у которых такие $\rho(u)$ и $p[\rho(u)]$, что *вихри отсутствуют* и *уравнение неразрывности* (т. е. закон сохранения массы) удовлетворяется.

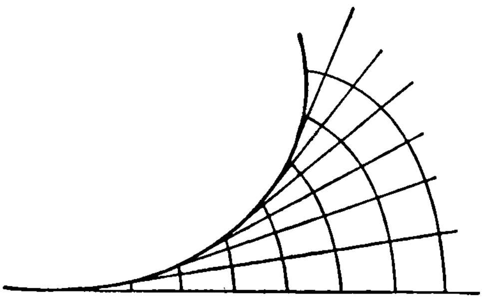

Рис. 26. Координаты для волны разрежения Прандтля — Мейера.

В рассматриваемой задаче можно достаточно хорошо разобраться геометрически, используя специальную систему координат, связанную с нашим однопараметрическим семейством прямых. В качестве специальной системы координат рассмотрим угол θ, образуемый осью x с прямыми, и направленное расстояние h вдоль линии, ортогонально пересекающей прямые и отсчитываемой от некоторой фиксированной кривой, как показано на рис. 26. Если вспомнить, что заданные прямые представляют собой, «вообще говоря», касательные к некоторой плоской кривой Г, то сразу видно: (1) линии $\theta = \text{const}$ суть данные прямые; (2) линии $h = \text{const}$ образуют ортогональное семейство эволют кривой Г; (3) $ds^2 = dh^2 + r^2 d\theta^2$, где $r = h + s(\theta)$ есть радиус кривизны эволюты, а s означает длину дуги вдоль Г.

В этой естественной геометрической системе координат легко записать условие незавихренности и условие сохранения массы.

По определению, незавихренность означает, что циркуляция по любой замкнутой кривой γ равна нулю. Если α обозначает угол между прямой $\theta = \theta_0$ и вектором скорости $\mathbf{u}(\theta_0)$ с модулем q, то циркуляция по γ равна

$$\oint \sum u_k\, dx_k = \oint q(\cos\alpha\, dh + \sin\alpha\, r d\theta).$$

По теореме Грина, этот интеграл обращается тождественно в нуль тогда и только тогда, когда

$$\frac{\partial}{\partial\theta}(q\cos\alpha) = \frac{\partial}{\partial h}(rq\sin\alpha).$$

Так как $r = h + s(\theta)$, то $\partial r/\partial h = 1$; далее, в силу свойства P1, величины q и α суть функции только θ. Поэтому условие незавихренности эквивалентно условию

$$\frac{d}{d\theta}(q\cos\alpha) = q\sin\alpha. \tag{54}$$

Положив $g(\theta) = q\cos\alpha$ и $h(\theta) = q\sin\alpha$, будем иметь $g' = h$, что обобщает формулу (20) из § 84.

Для того чтобы записать условие сохранения массы, заметим, что поток массы во *внешнюю область* через кривую γ равен

$$\oint_\gamma \rho q(-\sin\alpha\, dh + \cos\alpha r\, d\theta).$$

По теореме Грина, этот интеграл тогда и только тогда обращается в нуль, когда

$$\frac{\partial}{\partial\theta}(-\rho q\sin\alpha) = \frac{\partial}{\partial h}(r\rho q\cos\alpha) = \rho q\cos\alpha. \tag{55}$$

В только что введенных обозначениях последнее условие сводится к уравнению $(-\rho h)' = \rho g$, где штрих означает дифференцирование по θ. После подстановки $h = g'$ и упрощений получим $\rho' g' + \rho g'' + \rho g = 0$, или $(g'' + g) + (\rho'/\rho)g' = 0$, т. е. уравнение (22) из § 84.

Следовательно, *все течения, удовлетворяющие условию* P1, *можно получить из течений Прандтля — Мейера* заменой лучей, исходящих из вершины фиксированного угла, касательными к фиксированной кривой Г, причем векторная скорость в соответствующих точках остается той же[1]).

---

[1]) Этот результат получил L e s s F. H., *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **22** (1924), 350—362; см. также [6], стр. 273—278, и приведенную там библиографию.

Предыдущий пример является частным случаем более общей «обратной задачи» нахождения всех течений с одномерными годографами, т. е. таких течений, для которых векторы скорости описывают одну-единственную *кривую* [1]). (В общем случае годографом называется геометрическое место всех векторов скорости потока.)

§ 93. Общие замечания

Очевидно, что метод поиска симметричных решений как раз является одним из таких методов, при которых задаются произвольные функциональные соотношения и затем находятся удовлетворяющие им течения. Другим таким методом является разделение переменных. Таким образом, класс «обратных методов» включает в себя в качестве частных случаев метод поиска симметричных решений и метод разделения переменных.

Большим преимуществом метода поиска симметричных решений по сравнению с остальными двумя является то, что для него мы располагаем теоремами существования симметричных решений, по меньшей мере в малом (ср. § 89). А когда разделение переменных приводит к нетривиальным решениям, то последние обычно связаны с теорией групп.

Это положение можно проиллюстрировать на примере уравнения Лапласа $\nabla^2 U = 0$ для стационарных течений Эйлера в пространстве и на примере уравнения Гельмгольца $\nabla^2 U + k^2 U = 0$. Было показано [2]), что в обоих случаях системы координат, в которых имеет место разделение переменных, принадлежат к нескольким известным классам, большая часть которых при преобразованиях над группой, порождаемой инверсиями относительно сфер, переходит в семейство параллельных плоскостей, в пучок плоскостей, проходящих через одну прямую, и в семейство концентрических сфер, т. е. в одну из систем координатных поверхностей для декартовых, цилиндрических или сферических координат. Это наводит на мысль, что к данной задаче можно непосредственно применить метод конформных преобразований, рассматривая инвариантность относительно конформной группы.

Однако утверждение, что всякое разделение переменных в гидромеханике связано с группами (внутренняя симметрия),

---

[1]) Случай несжимаемой вязкой жидкости см. Müller W., Einführung in die Theorie der zähen Flüssigheiten, Leipzig, 1932; также *Zeits ang. Math. Mech.*, **13** (1938), 395—408. Случай сжимаемой невязкой жидкости см. [72], а также Giese J. H., *Quar. Appl. Math.*, **9** (1951), 237—246.

[2]) См. [70], а также Moon P., Spencer D. E., *Proc. Am. Math. Soc.*, **3** (1952), 635—642 и **4** (1953), 302—307 и приведенную там литературу.

было бы преувеличением. Несмотря на то что решение[1]) Кармана уравнений Навье — Стокса для течения вблизи вращающегося диска не изменяется при аффинном преобразовании

$$r \to \alpha r, \qquad z \to z, \qquad u_r \to \alpha u_r, \qquad u_\theta \to \alpha u_\theta, \qquad u_z \to u_z,$$

уравнения Навье — Стокса не инвариантны относительно этого преобразования.

Аналогично «обратные» допущения относительно постоянства величины скорости или завихренности на линиях тока и т. д. не имеют никакого отношения к группам[2]). Было бы желательно определить, как это сделано для уравнений Лапласа и Гельмгольца (см. прим. 2) на стр. 188), все системы координат, в которых решения уравнений нестационарного движения жидкостей можно найти методом разделения переменных.

§ 94. Метод годографа

С помощью преобразований годографа можно значительно упростить уравнения сжимаемого невязкого течения. Мы уже видели [гл. I, уравнение (10)], что стационарные безвихревые плоские течения сжимаемой невязкой жидкости взаимно однозначно соответствуют потенциалам скоростей U, которые удовлетворяют *нелинейному* уравнению в частных производных:

$$\nabla^2 U = \frac{1}{c^2}\{U_x U_x U_{xx} + 2U_x U_y U_{xy} + U_y U_y U_{yy}\}. \tag{56}$$

Здесь индексы означают дифференцирование по соответствующим переменным, а c^2 есть местная скорость звука.

Напомним[3]), что уравнение (56) эквивалентно одному из следующих *линейных* уравнений в частных производных: либо уравнению

$$q^2 V_{qq} + q\left(1 + \frac{q^2}{c^2}\right)V_q + \left(1 - \frac{q^2}{c^2}\right)V_{\theta\theta} = 0, \tag{57a}$$

либо уравнению

$$q^2 \varphi_{qq} + q\left(1 - \frac{q^2}{c^2}\right)\varphi_q + \left(1 - \frac{q^2}{c^2}\right)\varphi_{\theta\theta} = 0. \tag{57б}$$

Здесь V — функция тока; $qe^{i\theta}$ — комплексный вектор скорости, так что $U_x = q\cos\theta$ и $U_y = q\sin\theta$; c^2 — однозначная функция

[1]) Karman Th., *ZAMM*, **1** (1921), 233—252; Batchelor G., *Quar. J. Math. Appl. Mech.*, **4** (1951), 29—41. По поводу дальнейших обобщений см. Berker R., работу, цитир. в прим. 1) на стр. 185.

[2]) Kampé de Fériet J., Proc. Int. Math. Congress, Zürich (1932), т. 2, 298—299; Nemenyi P., Prim R., *J. Math. Phis. MIT*, **27**, (1948), 130—135.

[3]) См. [6], гл. IVA или Seifert H., *Math. Annalen*, **120** (1947), 75—126.

переменной q, согласно уравнению Бернулли, и $\varphi = U - xU_x - yU_y$ — зависимая переменная в лежандровом контактном преобразовании, посредством которого получено уравнение (57б).

Теперь нетрудно получить уравнения (57а) и (57б), исходя из уравнения (56) и только что указанных определений, но вовсе не ясно, почему нужно было использовать эти переменные годографы, чтобы получить линейные уравнения. Одним из мотивов могло быть то соображение, что метод годографа успешно применяется в задачах со свободными линиями тока (как в § 38). Сейчас мы приведем другую мотивировку, использующую три соображения из теории групп.

Первым из них является инвариантность законов динамики невязкой жидкости относительно группы (18) преобразований Ланжевена:

$$\mathbf{x} \to \lambda\mathbf{x}, \qquad \mathbf{u} \to \mathbf{u}, \qquad U \to \lambda U, \qquad V \to \lambda V, \qquad \varphi \to \lambda\varphi.$$

Оказывается, что уравнение в частных производных, выражающее эти законы, как правило, должно быть *неоднородным* (и поэтому нелинейным), если в качестве независимых переменных брать x_i, а в качестве зависимых переменных — U, V или φ; но это уравнение будет *однородным*, если принять за независимые переменные[1]) u_i, а в качестве зависимых переменных U, V или φ.

Нам остается не ясным a priori, почему это однородное уравнение должно быть линейным, когда в качестве зависимых переменных взяты V и φ.

Второе соображение из теории групп — очевидная инвариантность законов движения жидкости относительно группы *поворотов* $\theta \to \theta + \alpha$, когда q, U, V, φ остаются фиксированными. Из этого следует, что в формулах (57а) и (57б) величина θ должна входить только в дифференциальные операторы и не входить в коэффициенты. Следовательно, мы имеем теоретико-групповое оправдание использования в качестве независимых переменных q и θ[2]) вместо $u = U_x$ и $v = U_y$. Благодаря этому коэффициенты нашего дифференциального уравнения зависят только от *одной* из двух независимых переменных.

Третье теоретико-групповое соображение — это очевидная инвариантность законов движения жидкости относительно груп-

[1]) Это возможно в малом, кроме случая (упомянутого в § 92) одномерного годографа. По причинам, аналогичным описанным в § 89, вообще говоря, это невозможно в большом.

[2]) Использование переменной $\varpi = \ln q$ вместо q подсказывается теорией функций комплексного переменного: $\varpi + i\theta = \ln (u + iv)$.

пы *переноса* $x \to x + a$, когда u, U, V, φ остаются фиксированными (§ 67). Это эквивалентно тому, что x и y в уравнении (56) входят лишь в дифференциальные операторы и не содержатся в коэффициентах.

§ 95. Инерциальное плоское движение

Теорию групп можно использовать не только для упрощения уравнений движения жидкости, с ее помощью можно также приводить интегрирование уравнений движения к квадратурам [1]. Важное подтверждение этого положения дает движение снаряда в плоскости под действием только *инерциальных* сил. (Приблизительно такой характер имеет движение во многих задачах баллистики, а также движение подводной лодки при фиксированной установке рулей, когда гидростатическая плавучесть уравновешивает силу тяжести.) Это значит, что мы будем рассматривать группу из § 70.

Пусть $x = q_1$ и $y = q_2$ обозначают координаты снаряда, а $\varphi = q_3$ — угол между осью x и некоторой осью, жестко связанной со снарядом. Мы *предполагаем*, что координаты мгновенного положения снаряда определяют его будущее движение под действием сил реакции и согласно законам Ньютона, так что (при обычных ограничениях относительно дифференцируемости) получим уравнения:

$$\ddot{q}_i = F_i(q_1, q_2, q_3; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3) = F_i(\mathbf{q}; \dot{\mathbf{q}}). \tag{58}$$

Это, очевидно, система обыкновенных, вообще говоря, нелинейных дифференциальных уравнений *шестого* порядка.

Мы сейчас покажем, как с помощью теории групп ее можно свести к системе *второго* порядка и четырем квадратурам. Метод, который мы опишем, в основном обобщает обычный метод «циклических координат» при переходе от лагранжевых динамических систем к нелагранжевым системам. После того как будет описан этот переход, мы укажем схему дальнейшего обобщения — на случай обыкновенных дифференциальных уравнений, инвариантных относительно некоторой группы.

Прежде всего можно ожидать, что система (58) будет инвариантна относительно *переноса* пространственных координат $x \to x + x_0$, $y \to y + y_0$ [2]. Это обстоятельство очень просто интер-

[1] Строгое современное математическое исследование этой ставшей классической связи с теорией групп в случае обыкновенных однородных *линейных* дифференциальных уравнений см. в работе Kolchin E. R., *Annals of Math.* 49 (1958), 1—42. Относительно нелинейного случая, см. Dickson [68].

[2] Практически это означает, что можно пренебречь такими факторами, как изменение плотности с высотой.

претировать математически: оно позволяет нам заменить систему (58) системой *четвертого* порядка:

$$\frac{d\dot{q}_1}{dt} = F_1(q_3;\ \dot{\mathbf{q}}), \qquad \frac{d\dot{q}_2}{dt} = F_2(q_3;\ \dot{\mathbf{q}}),$$
$$\frac{dq_3}{dt} = \dot{q}_3, \qquad \frac{d\dot{q}_3}{dt} = F_3(q_3;\ \dot{\mathbf{q}}) \tag{59}$$

и двумя квадратурами

$$q_1 = \int \dot{q}_1\,dt, \qquad q_2 = \int \dot{q}_2\,dt. \tag{59'}$$

Таким образом, с помощью двухпараметрической группы можно снизить порядок нашей системы на две единицы, заменив интегрирование уравнений квадратурами. Далее, система (58) изотропна, т. е. инвариантна относительно *поворотов* координатной системы. Чтобы выразить этот факт аналитически, удобно в качестве новых переменных использовать модуль скорости $v = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{1/2}$ и угол наклона θ траектории к оси x. Тогда $\dot{x} = v\cos\theta$ и $\dot{y} = v\sin\theta$. Очевидно, что v и «угол тангажа» $\varphi = \psi - \theta$ инвариантны относительно вращений; поэтому система (59) эквивалентна[1]) (если она изотропна) системе:

$$\frac{dv}{dt} = G_1(v,\ \varphi,\ \dot{\varphi}), \qquad \frac{d\theta}{dt} = G_2(v,\ \varphi,\ \dot{\varphi}),$$
$$\frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}, \qquad \frac{d\dot{\varphi}}{dt} = G_3(v,\ \varphi,\ \dot{\varphi}), \tag{60}$$

у которой второе уравнение сводится к квадратуре $\varphi = \int \dot{\varphi}\,dt$.

Наконец, предположение, что все силы «инерциальны», означает, что они пропорциональны квадрату скорости, т. е. геометрические траектории инвариантны относительно группы изменений масштаба времени. Но очевидно, что φ и *расстояние* $s = \int v\,dt$ инвариантны относительно этой группы. Отсюда, заменив t независимой переменной s, получим уравнение

$$\frac{d\varphi}{ds} = \varphi', \quad \frac{d\varphi'}{ds} = H(\varphi,\ \varphi'), \quad \frac{dv}{v\,ds} = H^*(\varphi,\ \varphi'). \tag{61}$$

(Например, $mv\,dv/ds$ есть касательная составляющая силы; она равна произведению v^2 на силу $mG_1(v/v, \varphi, \dot{\varphi}/v) = mG_1(1, \varphi, \varphi') = H^*(\varphi, \varphi')$, которая действовала бы на снаряд, если бы все скорости были изменены в отношении $v:1$.) В итоге система

[1]) Строго говоря, пока v не обращается в нуль.

(58) *эквивалентна системе второго порядка* (61), *пяти квадратурам:* (59′) *и следующим соотношениям*

$$v = v_0 e^{\int H^* ds}, \quad t = \int \frac{ds}{v}, \quad \varphi = \int \dot{\varphi}\, dt. \tag{62}$$

§ 96. Теорема Бьянки

Предыдущее рассуждение можно существенно обобщить. Пусть Σ — любая система обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка:

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(x_1, \ldots, x_n), \qquad [i = 1, \ldots, n]. \tag{63}$$

Предположим, что Σ инвариантна относительно группы Γ преобразований $\mathbf{x} \to \gamma(\mathbf{x})$ в пространстве $(x_1, \ldots, x_n)$. Это значит, что если функция $x(t)$ удовлетворяет системе (63), то ей удовлетворяет и преобразованная функция $\gamma(\mathbf{x}(t))$ при всех $\gamma \in \Gamma$ Мы покажем, что это обстоятельство значительно облегчает интегрирование системы (63).

Это легко показать, если Γ — однопараметрическая группа. В данном случае, за исключением окрестностей особых точек, группа Γ локально сводится [1]) посредством замены координат к группе переносов $y_1 \to y_1 + a$; $y_2, \ldots, y_n$ без изменений. Система (63) запишется в этих координатах в виде $dy_i/dt = G_i(y_1, \ldots, y_n)$. Так как вычитание постоянной из y_1 не изменяет ни одной из производных dy_i/dt, то, очевидно, G_i фактически не зависят от y_1, поэтому можно записать уравнение

$$\frac{dy_i}{dt} = G_i(y_2, \ldots, y_n), \qquad [i = 1, \ldots, n]. \tag{64}$$

Таким образом, мы сведем интегрирование системы (63) к интегрированию системы $(n-1)$-го порядка $dy_j/dt = G_j(y_2, \ldots, y_n)$, $[j = 2, \ldots, n]$ и одной квадратуре $y_1 = \int G_1(y_2(t), \ldots, y_n(t))\, dt$.

Обобщая сказанное, отметим следующее: пусть Γ — любая r-параметрическая разрешимая группа Ли преобразований пространства $(x_1, \ldots, x_n)$, относительно которой инвариантна система (63). Тогда, почти по определению, группа Γ имеет локальные [2]) подгруппы Ли $S_1 < S_2 < \ldots < S_r = \Gamma$, такие, что 1) S_{i-1} нормальна в S_i; 2) S_i порождается подгруппой S_{i-1} и некоторой однопараметрической подгруппой Γ_i.

---

[1]) См. [78], стр. 34. Вообще мы здесь не даем подробных указаний относительно используемых результатов теории групп Ли.

[2]) Понятие локальной подгруппы разъясняется в книге Шевалле К., Теория групп Ли, М., ИЛ, тт. 1—2, 1948—1958 гг

Рассматривая все в малом, предположим, что подмножества транзитивности подгруппы S_{i-1} представляют собой h-мерные подпространства постоянных $y_{n+1}, \ldots, y_n$, т. е. они параллельны гиперплоскости $(y_1, \ldots, y_h)$ для некоторого h. Предположим, далее, что ввиду инвариантности системы (63) относительно S_{i-1} можно свести интегрирование системы (63) к интегрированию системы

$$\frac{dy_j}{dt} = G_j(y_{h+1}, \ldots, y_n), \qquad [j = h+1, \ldots, n] \tag{65}$$

и квадратурам. Мы покажем, что тогда аналогичное утверждение справедливо для S_i.

Возможны два случая. Если подмножества транзитивности группы S_i h-мерны, то наше утверждение тривиально. В противном случае, поскольку S_{i-1} нормальная (т. е. инвариантная) подгруппа группы S_i, множества транзитивности[1]) подгруппы S_{i-1} нетривиально преобразуются подгруппой Γ_i. Выбрав надлежащим образом систему координат, мы можем предположить, что Γ_i осуществляет переносы $y_{h+1} \to y_{h+1} + a$; $y_{h+2}, \ldots, y_n$ не изменяются. Следовательно, как и для системы (64), мы можем свести интегрирование системы (65) к интегрированию системы

$$\frac{dy_j}{dt} = G_j(y_{h+2}, \ldots, y_n), \qquad [j = h+2, \ldots, n] \tag{65$'$}$$

и квадратуре $y_{h+1} = \int G_{h+1}(y_{h+2}(t), \ldots, y_n(t))\,dt$. Этим завершается доказательство по индукции следующей теоремы.

Теорема 2 (Бьянки)[2]). *Пусть система обыкновенных дифференциальных уравнений Σ порядка n инвариантна относительно некоторой разрешимой группы Ли, обладающей m-мерными множествами транзитивности. Тогда интегрирование системы Σ можно свести к интегрированию системы порядка $(n-m)$ и к квадратурам.*

В § 95 Γ_1 это группа $x \to x + a$, Γ_2 — группа $y \to y + b$, Γ_3 — группа $\theta \to \theta + \alpha$, $x \to x\cos\alpha - y\sin\alpha$, $y \to x\sin\alpha + y\cos\alpha$, Γ_4 — группа $t \to t/\lambda$, $x \to x$, $v \to \lambda v$ и т. д.

---

[1]) По определению, «множество транзитивности» группы S_{i-1} для некоторой точки y есть множество Y всех $\sigma(y)[\sigma \in S_{i-1}]$. Так как $\gamma \in \Gamma_i$ и из $\sigma \in S_{i-1}$ следует $\gamma^{-1}\sigma\gamma \in S_{i-1}$, то множество всех $\gamma(\sigma(y)) = (\sigma\gamma)(y)$ совпадает с множеством всех $\sigma(\gamma(y))$, и, следовательно, тоже является множеством транзитивности группы S_{i-1}.

[2]) См. [78], [34, V].

§ 97. Заключение

Просматривая снова гл. IV и V, мы начинаем понимать, какое большое значение имеет для гидродинамики понятие группы.

Так, это понятие лежит в основе всего анализа размерностей и моделирования; оно дает также значительное обобщение этих теорий в виде инспекционного анализа.

Далее, группы симметрии позволяют уменьшить число независимых переменных, входящих в уравнения в частных производных, непосредственно с помощью метода поиска симметричных решений и метода «отделения переменной времени» и косвенно — с помощью обратных методов. Кроме того, метод поиска симметричных решений в общем случае заведомо дает решения в малом (§ 89).

Даже после того, как число независимых переменных сведено к одному, так что дальнейшее упрощение с помощью предыдущих методов уже невозможно, полученную систему обыкновенных дифференциальных уравнений часто легче всего проинтегрировать, используя теоретико-групповые соображения.

Указанные выше методы применимы к уравнениям как аналитическим, так и неаналитическим, как линейным, так и нелинейным; таким образом, они свободны от ограничений, накладываемых на обычные методы разложения в ряды или представления интегралами. Поэтому теория групп играет фундаментальную роль в решении дифференциальных уравнений гидромеханики.

Наконец, в гл. VI мы попытаемся показать, что теория групп лежит также в основе классических уравнений движения твердого тела в идеальной (т. е. несжимаемой невязкой) жидкости.

Мы надеемся, что в будущем в еще большей мере выяснится связь гидромеханики с теорией групп.

Глава VI

ПРИСОЕДИНЕННЫЕ МАССЫ

§ 98. Присоединенная масса сферы

Качественно представление о присоединенной массе общеизвестно. Например, пусть мы опустили легкое весло в спокойную воду и затем сделали гребок. Всем известно из опыта, что кажущаяся инерция (т. е. сопротивление ускорению движения) весла при движении его в воде значительно увеличивается. Эта увеличившаяся инерция как раз и называется «кажущейся массой» весла, а разность между кажущейся и действительной массой называют «индуцированной» или «присоединенной массой».

Точное математическое определение присоединенной массы впервые дали Грин и Стокс более ста лет назад[1]). Ход их рассуждений был примерно таков.

Рассмотрим сферу массы m и радиуса a, движущуюся со скоростью v в *несжимаемой невязкой* жидкости плотности ρ (на протяжении всей этой главы мы будем рассматривать лишь безвихревые течения такой «идеальной жидкости»). Не ограничивая общности, мы можем считать, что движение направлено по оси сферической системы координат. Потенциал скоростей для жидкости, покоящейся на бесконечности, совпадает с потенциалом диполя, который в сферических координатах имеет вид

$$U = \frac{-a^3 v \cos\theta}{2r^2}. \tag{1}$$

Действительно, легко проверить, что нормальная производная потенциала $\partial U/\partial r = v\cos\theta$ представляет собой нормальную составляющую скорости точек на поверхности сферы (§ 4). Радиальная и трансверсальная составляющие скорости в произвольной точке жидкости равны соответственно

$$u_r = \frac{a^3 v \cos\theta}{r^3}, \quad u_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{a^3 v \sin\theta}{2r^3}.$$

---

[1]) Green G., Mathematical Papers, стр. 315 (1833); [13], т. 1, стр. 17 (1843). Более полную библиографию см. в [7], п. 92.

Поэтому полная кинетическая энергия жидкости выражается формулой

$$T=\iiint \frac{1}{2}\rho\left(u_r^2+u_\theta^2\right)r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi=$$

$$=\pi\rho v^2a^6\int\limits_{r=a}^{\infty} r^2\,dr\int\limits_0^{\pi}\sin\theta\left[\frac{\cos^2\theta}{r^6}+\frac{\sin^2\theta}{4r^6}\right]d\theta=$$

$$=\frac{\pi\rho v^2a^6}{4}\int\limits_{r=a}^{\infty}\frac{dr}{r^4}\int\limits_0^{\pi}\left[1+3\cos^2\theta\right]\sin\theta\,d\theta=$$

$$=\frac{\pi\rho v^2a^6}{4}\left[\frac{-1}{3r^3}\right]_a^{\infty}\left[-\cos\theta-\cos^3\theta\right]_0^{\pi}=$$

$$=\frac{\pi\rho v^2a^3}{3}=\frac{1}{2}\,\frac{2\pi\rho a^3}{3}\,v^2=\frac{1}{2}\,m'v^2.$$

Так мы получаем следующий классический результат: кинетическая энергия жидкости равна кинетической энергии частицы, движущейся с той же скоростью, что и сфера, и имеющей массу m', равную *половине массы вытесненной сферой жидкости.*

Кроме того, очевидно, что в невязкой жидкости вращение сферы не оказывает на окружающую жидкость никакого влияния; следовательно, момент инерции сферы остается неизменным. Это наводит на мысль, что (если пренебречь влиянием сил тяжести) сфера в такой жидкости динамически эквивалентна более тяжелой сфере в вакууме, кажущаяся масса $m^*=m+m'$ которой есть сумма массы сферы m и присоединенной массы m', равной половине массы вытесненной воды, но момент инерции которой не изменяется. Это будет строго доказано в § 109, где мы покажем, что все динамические характеристики всякого безвихревого несжимаемого течения можно вывести из выражения для его кинетической энергии при помощи общих уравнений лагранжевой динамики.

§ 99. Приложения

Изложенные выше результаты находят себе различные простые применения. Одно из них относится к вычислению начального ускорения, получаемого наполненным водородом сферическим баллоном, который сразу освобожден от канатов. Предположим, что масса баллона составляет $^1/_{10}$ массы вытесненного им воздуха. Человек, не знающий о кажущейся массе, мог бы проделать следующие ошибочные вычисления. По закону Архимеда, полная подъемная сила равна произведению $9g$ на массу баллона; поэтому (так можно было бы подсчитать) начальное ускорение должно равняться $9g$. А в случае сферического баллона, наполненного водородом и погруженного в воду, такие же ошибочные вычисления дали бы для ускорения значение, равное по меньшей мере $1000g$.

Однако правильное начальное ускорение можно легко найти при помощи теории кажущихся масс. *Кажущаяся масса* баллона m^* составляет $0{,}1 + 0{,}5 = {}^3/_5$ массы вытесненного воздуха; поэтому в действительности ускорение равно $3g/2$. В воде оно составило бы около $2g$.

Более тонким будет применение понятия присоединенной массы, в случае когда жидкость, в которую погружена невесомая сфера, внезапно получает ускорение a. Чему равно ускорение a^* сферы относительно наблюдателя, находящегося вне жидкости? Эту задачу можно решать так. Для наблюдателя, связанного с жидкостью, ускорение a эквивалентно фиктивному гравитационному полю напряженности a. Рассуждая, как и в предыдущем случае, получим, что начальное ускорение $a^* - a$ сферы относительно наблюдателя, связанного с жидкостью, удовлетворяет уравнению $a^* - a = 2a$, т. е. $a^* = 3a$.

Такой расчет был подтвержден Т. Е. Кейвудом и автором [1]) для малых воздушных пузырьков в воде, и этот вывод существен для истолкования опытных данных относительно различных течений жидкости, подобных изображенным на фото I и II.

Укажем еще одно применение — к часам с маятником ([13], т. 3, стр. 1—141). Из-за присоединенной массы инерция сферического маятника в воздухе увеличивается примерно на 0,02%; часы с таким маятником отстают примерно на 10 *сек* в день, в зависимости от плотности воздуха (давления и температуры).

Можно было бы привести множество других приложений (см. § 103—104), но, по-видимому, целесообразнее сначала рассмотреть теоретические основы вычисления присоединенной (или «индуцированной») массы для тела произвольной формы. И, как мы увидим, это составляет замечательную главу классической лагранжевой динамики. Ее создали Кельвин [85] и Кирхгоф [81]; ей в основном посвящена гл. VI «Гидродинамики» Ламба [7][2]).

§ 100. Инерциальные лагранжевы системы

Рассмотрим динамическую систему, состоящую из твердого тела Σ и идеальной жидкости без свободных поверхностей, ограниченную снаружи и (или) изнутри телом Σ. Очевидно, что Σ имеет шесть степеней свободы, которые можно описать с помощью координат $q_1, \ldots, q_6$. Далее, если дано $\mathbf{q}(t)$, то при весьма общих

---

[1]) Birkhoff G., Caywood T. E., *J. Appl. Phys.*, **20** (1949), 646—659.

[2]) См. также работы [7*], [25*], [26*], [1*] и [9*]. — *Прим. ред.*

условиях существует один и только один потенциал скоростей (см. § 4 или [4], стр. 217, 311) $U = \dot{q}_i U^i(\mathbf{q})$, который на бесконечности стремится к нулю («регулярен»), удовлетворяет уравнению $\nabla^2 U = 0$ и на поверхности S тела Σ принимает значения $\partial U/\partial n$, определяемые движением Σ. Следовательно, кинетическая энергия жидкости определяется равенством

$$T = \frac{1}{2}\iiint \rho(\nabla U \nabla U)\,dR = \frac{1}{2}\sum_{i,\,j=1}^{6} T_{ij}(\mathbf{q})\,\dot{q}_i\dot{q}_j. \tag{2}$$

Кроме того, суммарная кинетическая энергия жидкости и твердого тела определяется аналогичным равенством, но с другими коэффициентами. Симметричная матрица

$$T_{ij}(\mathbf{q}) = \rho\iiint (\nabla U^i \cdot \nabla U^j)\,dR, \tag{2'}$$

входящая в равенство (2), называется тензором «присоединенной массы»; если учитывается и кинетическая энергия тела Σ, то получающуюся в результате матрицу называют тензором «кажущейся массы».

Динамическая система, только что определенная, неголономна и имеет бесконечное число степеней свободы, если учитывать деформацию жидкости. Тем не менее естественно рассматривать ее как обычную лагранжеву систему ([76], стр. 36) с шестью степенями свободы и считать, что конфигурация жидкости определяется ее границами, движущимися при наличии «идеальной связи» — несжимаемости. На деле такое допущение обычно принимается без доказательства ([7], гл. VI; [81], стр. 238 и [85], стр. 320). Мы докажем его в § 109.

Далее, по теореме Аванцини (§ 21, теорема 1) действие тяготения состоит просто в том, что к системе инерциальных сил без учета силы тяжести добавляется постоянная гидростатическая *подъемная сила*. Поэтому достаточно рассматривать случай $L = T$ нулевой потенциальной энергии, что соответствует $g = 0$. Этим определяется лагранжева система[1]), в которой «обобщенные силы» Q_i удовлетворяют уравнениям

$$Q_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i}. \tag{3}$$

Лагранжеву систему с нулевой потенциальной энергией можно назвать *инерциальной лагранжевой системой*; в § 101—112 мы рассмотрим тензор присоединенной (и кажущейся) массы, определяемый инерциальной лагранжевой системой (2), (3).

[1]) Точнее, частный случай лагранжевой системы. — *Прим. ред.*

§ 101. Тензор присоединенной массы

Вблизи положения $\mathbf{q}=0$ в некоторой системе отсчета удобно считать, что q_1, q_2, q_3 определяют поступательные движения тела Σ в направлениях трех осей координат соответственно, а q_4, q_5, q_6 определяют повороты (в радианах) относительно этих осей. Тогда T_{hk} (0) из формулы (2) представляют собой числа, зависящие от выбора осей координат, связанных с Σ.

При любом таком выборе осей пусть U^1, U^2, U^3 обозначают потенциалы скоростей, соответствующие переносам в направлении осей с единичной линейной скоростью, а U^4, U^5, U^6 — потенциалы скоростей при вращении тела вокруг этих осей с единичной угловой скоростью. Тогда кинетическая энергия жидкости T из формулы (2) определяется равенством

$$2T=\dot{q}_h\dot{q}_k\iiint\rho\,(\nabla U^h\cdot\nabla U^k)\,dR=\dot{q}_h\dot{q}_kT_{hk}, \tag{4}$$

где мы суммируем по повторяющимся индексам (обычное соглашение в тензорном исчислении). Как и в формуле (2), $dR=dx_1dx_2dx_3$ есть элемент объема жидкости; кроме того, поскольку $\nabla U^h\nabla U^k=\nabla U^k\nabla U^h$, очевидно, имеем $T_{hk}=T_{kh}$, т. е. тензор присоединенной массы *симметричен.*

При ускоренном движении из состояния покоя все $\dot{q}_h=0$; следовательно, уравнение (3) сводится к уравнениям простого вида:

$$Q_h=T_{hk}(0)\,\ddot{q}_k,\quad \text{если}\quad \mathbf{q}=\dot{\mathbf{q}}=0. \tag{5}$$

Отсюда следует простая интерпретация величины T_{hk}: *это есть k-компонента силы, если телу в состоянии покоя сообщают единичное ускорение в направлении h.* Кроме того, так как $T_{hk}=T_{kh}$, мы сразу получаем следующий принцип взаимности ([76], стр. 305): k-компонента силы при единичном ускорении в направлении h равна h-компоненте силы под действием единичного ускорения в направлении k.

В простом случае (5) легко проверить непосредственно, что наша система лагранжева. В силу второго тождества Грина ([4], стр. 212) справедливо равенство

$$T_{hk}=\rho\iiint\nabla U^h\nabla U^k\,dR=\rho\iint U^h\left(\frac{\partial U^k}{\partial n}\right)dS. \tag{6}$$

Но в этом случае производная $\partial U^k/\partial n$ равна (гл. I, (7)) нормальной составляющей скорости тела Σ при движении с единичной скоростью в направлении q_k. Введем теперь следующее