Г. БИРКГОФ

ГИДРОДИНАМИКА

HYDRODYNAMICS

A STUDY IN LOGIC, FACT AND SIMILITUDE

Revised edition

by

GARRETT BIRKHOFF

PRINCETON, NEW JERSEY
PRINCETON UNIVERSITY PRESS
1960

Г. БИРКГОФ

ГИДРОДИНАМИКА

МЕТОДЫ. ФАКТЫ. ПОДОБИЕ

Перевод со второго переработанного английского издания

И. Б. ПОГРЕБЫССКОГО

Под редакцией

М. И. ГУРЕВИЧА и В. А. СМИРНОВА

Предисловие

Л. И. СЕДОВА

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Москва 1963

Первое издание книги известного американского математика Г. Биркгофа, вышедшее в 1950 г., было переведено на русский язык (Издательство иностранной литературы, 1954 г.) и заслужило всеобщее признание советских ученых. За десять лет, отделяющих выход первого и второго английских изданий, в исследовании движений жидкости и газа был достигнут значительный прогресс, и второе издание «Гидродинамики» представляет собой существенно измененную книгу, содержащую много новых и важных результатов.

Автор по-новому анализирует и систематически излагает некоторые весьма интересные особенности логических посылок и математических постановок задач гидромеханики, а также устанавливает связи этих посылок и постановок с практикой и наблюдениями. На многих примерах он показывает, как опыт способствует развитию теории, требуя ее постоянного усовершенствования, и как теория, усложняя и видоизменяя свои методы, объясняет физическую сущность наблюдаемых явлений.

Книга представляет несомненный интерес не только для специалистов в области гидродинамики (научных работников и инженеров), но и для широкого круга математиков. Она вполне доступна студентам старших курсов.

Редакция литературы по математическим наукам

ПРЕДИСЛОВИЕ К ВТОРОМУ РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

Цель предлагаемой книги состоит не в решении частных задач гидромеханики и не в получении каких-либо новых конкретных выводов по существу конкретных явлений, а также не в сообщении отдельных результатов, полезных для приложений. Ее автор Г. Биркгоф, математик, известный своими работами в весьма отвлеченных областях алгебры и топологии, поставил себе целью проанализировать и систематически изложить некоторые интересные особенности логических посылок и математических постановок задач гидромеханики, а также проследить связи этих посылок и постановок с практикой и наблюдениями в природе. Кроме этого, в книге содержатся замечания о некоторых предельных переходах, применяемых в гидромеханике.

Собрание и рассмотрение так называемых парадоксов любопытно само по себе и является весьма полезным для понимания особенностей теоретической гидромеханики и ее связи с экспериментом. Разъяснение парадоксов позволяет понять смысл многих гидромеханических теорий и вскрывает важные физические особенности описываемых движений.

Так, хорошо известно, какую большую роль сыграл в гидродинамике парадокс Эйлера — Даламбера. Исследование этого парадокса способствовало установлению общих свойств возмущений, вызываемых в жидкости движением твердого тела, а также выяснению механизма влияния вязкости жидкости в зависимости от формы обтекаемого тела и ряда других эффектов.

С помощью математических абстракций мы приходим в теоретической гидродинамике к постановкам задач, содержащим помимо соотношений, выводимых из общих уравнений, еще дополнительные специальные гипотезы, позволяющие выделить те решения, которые отражают влияние физических факторов, не учитываемых принятой схемой (эффект вязкости в теории идеальной жидкости, учет кавитации в теории непрерывных потоков, учет устойчивости движения вязкой жидкости при переходе от ламинарных потоков к турбулентным и т. п.). Нам представляется, что математический анализ таких гипотез, проведенный в явной форме, заостряет внимание широких кругов специалистов, преподавателей и инженеров на идеях и методах, положенных в основу гидромеханики. Это особенно необходимо в настоящее время, когда к разработке проблем гидромеханики прилагаются усилия больших коллективов теоретиков и инженеров.

Углубленный логический анализ, привлекающий тонкие математические методы, всегда был основой развития теоретической гидромеханики. Именно поэтому русские ученые, основоположники гидромеханики, аэродинамики и газовой динамики, всегда были тесно связаны с математикой и являлись в ней видными специалистами. Напомним, что наши знаменитые ученые Н. Е. Жуковский и С. А. Чаплыгин были не только замечательными механиками, но и первоклассными математиками.

Теоретическое осмысливание различных реальных явлений связано с введением математических понятий и характеристик, для которых устанавливаются числовые методы расчета. В связи с этим теоретики всегда должны вводить схематизированные модели и процессы, с помощью которых формируются различного рода закономерности, описывающие с требуемой степенью точности свойства и события, происходящие с реальными телами.

Практики и экспериментаторы имеют дело с явлениями и эффектами в природе и в технике, которые происходят не только в соответствии с известными теоретическими представлениями, но и в соответствии с законами и с микро- или макромеханизмами, еще не открытыми или не учтенными в используемых теориях. Такое положение возникает очень часто.

Не более как пятьсот лет тому назад еще не существовало механики как науки, тогда как теперь механические расчеты являются основой для решения всех технических задач. Но еще более тысячи лет тому назад люди на практике умело использовали еще не открытые законы механики и опирались на них. Издавна при отсутствии механики как науки на практике успешно были разрешены многие довольно сложные технические задачи: по земле перемещались большие тяжести, строились сложные сооружения, было развито мореплавание и т. д. и т. п.

Нечто аналогичное происходит и в наше время, целесообразные действия практиков и экспериментаторов зачастую связаны с использованием и применением еще не осознанных и не открытых законов. Рациональная теория возникает и развивается в результате обобщения и осмысливания уже накопленного опыта, который в некоторых случаях добывается путем логической разработки существующих теорий.

Как известно, теоретическое описание может отразить действительные явления только в определенных границах и в некотором приближении. Ясное представление об этих границах и об истинном соответствии между теорией и действительностью является необходимым условием для овладения теорией и для ее правильного понимания. Столь же важно для понимания сущности вопроса хорошо представлять себе в каждом конкретном случае взаимодействие между теорией и экспериментом. В предлагаемой книге на многих гидромеханических примерах в наглядной и поучительной форме показано, как опыт ведет теорию, требуя ее постоянного усовершенствования, новых постановок задач, новых точек зрения, и, с другой стороны, как теория, усложняя и видоизменяя свои схемы, объясняет механическую сущность наблюдаемых явлений.

Автор уделяет значительное внимание применению соображений теории размерности и теории подобия к проблемам гидромеханики. Выводы и методы этих небольших по объему теорий применимы к самым разнообразным задачам и не связаны с особенностями отдельных частных случаев, а основы их крайне просты и легко доступны для понимания.

Однако крайняя простота получения соответствующих выводов с помощью краткой по своему существу (но не всегда очевидной заранее) формулировки постановки задачи нередко служит для многих источником иллюзии понимания при отсутствии глубокого и явного проникновения в суть дела. Углубленное и явное описание теоретических моделей и законов обязательно для сознательного оперирования методами подобия и размерности. Это обстоятельство объясняет то, что методы теории размерностей и подобия развились и внедрились в теорию совсем недавно, после накопления большого числа разнообразных физических моделей и множества различных постановок задач в физике и механике.

Не случайно представление о безразмерных определяющих параметрах, характеризующих режимы движения, внедрено в практику только в XX столетии. Ведь совсем недавно была осознана возможность перенесения результатов измерений в движениях жидкости (например, ртути) по цилиндрическим трубам на соответствующие аналогичные движения газа (например, воздуха). Соответствующее обоснование просто; оно теперь представляется многим тривиальным, но это было понято уже после проведения большого числа опытов, обрабатывавшихся не всегда правильно. Полное осмысливание указанных теорий помимо знаний и опытности требует также хорошей физической интуиции.

Ощущается необходимость ясным образом отделить соображения подобия и размерностей от постановки задачи, связанной с рассмотрением конкретного класса явлений по существу вопроса и не связанной непосредственно с подобием. Постановка задачи может быть различной и может быть правильной или нет в зависимости от характера и цели исследования. Для каждой постановки методы размерности дают свои выводы.

К сожалению, в учебной литературе по этим вопросам имеются лишь попутные и отрывочные замечания или же допускается кустарное, логически необоснованное и неотчетливое изложение. В результате в этой области появилось множество путаных, смутных и наукообразных сочинений.

В книге «Методы теории размерностей и теории подобия в механике», вышедшей в 1944 году[1]), автором настоящего предисловия была предпринята попытка внести некоторый порядок в рассматриваемые теории. Ряд примеров и соображений, содержащихся в этой книге, можно найти и в предлагаемой книге Биркгофа. Еще до этого в книге Бриджмена «Анализ размерностей» (2-е английское издание вышло в 1931 г.)[2]) было дано систематическое изложение теории размерности. Однако книга Бриджмена оказалась недостаточной для установления правильной точки зрения на связь между теорией размерности и теорией подобия. После ее появления неоднократно высказывалось мнение, что следствия из анализа размерностей и из теории подобия не являются эквивалентными. От этих сомнений не свободен и Биркгоф в предлагаемой книге (см. гл. IV).

В действительности, однако, этот вопрос вообще не возникает, если система определяющих параметров для выбранного класса явлений (в пределах нужной точности) уже установлена. Для этого, однако, требуются предварительные исследования существа задачи с обязательным использованием частных особенностей изучаемых явлений. В частности, к такого рода исследованиям относится и рассматриваемый в книге Биркгофа «инспекционный анализ». Установление системы определяющих параметров связано с общей схематизацией явления, с использованием различного рода разведывательных гипотез, экспериментальных данных, статистических выводов, с описанием изучаемых процессов точными или приближенными уравнениями[3]), краевыми и начальными условиями, различными огра-

---

[1]) Следующие издания вышли в 1951, 1955 и 1958 гг.

[2]) Русский перевод вышел в 1934 г.

[3]) Как известно, система определяющих параметров и критерии подобия могут быть одинаковыми, когда действительные физические связи постановки задач и уравнения, описывающие процессы, разные, причем эти уравнения можно варьировать в довольно широких пределах.

ничениями физической природы и т. п. Такое исследование по существу опирается на разнообразные физические условия и соображения, специфичные для частных классов явлений, и поэтому его естественно включить в соответствующие специальные разделы науки. Выделение системы определяющих параметров легко осуществляется попутно в процессе проникновения в механизм изучаемых явлений и является составным элементом постановки задачи.

При такой трактовке вопроса и при обычном определении физического подобия [1]) не могут возникнуть какие-либо противопоставления анализа размерностей и теории подобия. Соображения этих двух теорий могут касаться лишь общих выводов, отделенных от частных свойств и особенностей конкретных явлений, а содержание теорий в таком понимании становится полностью эквивалентным. Биркгоф в своей книге не вполне ясно и отчетливо излагает эти вопросы, что, впрочем, связано скорее с терминологией, чем с существом дела.

В механике при развитии научных теорий крайне важно вводить новые понятия, определения, системы отсчета, системы единиц измерения и т. п., используя богатый опыт, накопленный в процессе практической деятельности и общего хода исторического развития науки, а также учитывать необходимость сделать формулировки задач и результатов исследования наиболее удобными. Иначе говоря, характер методов исследования должен оправдываться существом дела. С этой точки зрения различного рода практически неинтересные, патологические или искусственные абстрактные случаи, с которыми мы на практике никогда не встречались и, по-видимому, не встретимся, должны исключаться определениями и самой постановкой задачи. В некоторых мес-

---

[1]) На практике удобно пользоваться следующим определением динамического или вообще физического подобия. Два явления подобны, если по заданным характеристикам одного можно получить характеристики другого простым пересчетом, который аналогичен переходу от одной системы единиц измерения к другой системе. Для осуществления пересчета необходимо знать «переходные масштабы». Это определение удовлетворяет практическим требованиям и сильно упрощает и сокращает общую теорию (см. [14*]).

Указанный вывод сохраняет свою силу также и в случае, когда подобие двух явлений определено в обобщенном смысле, т. е. когда переход с обычным пересчетом по известным масштабам возможен только для некоторой специальной системы характеристик, полностью определяющей явление и позволяющей легко находить любые другие характеристики, которые, однако, нельзя получить простым умножением на соответствующие масштабы при переходе от одного из двух подобных явлений к другому.

В частности, подобие, соответствующее аффинным преобразованиям координат, может быть рассмотрено с помощью анализа размерностей при применении различных единиц измерения вдоль различных осей декартовой системы координат.

тах Биркгоф рассматривает такие примеры, излагая их иногда не вполне четко (см., например, формулу (6) § 61, а также § 65).

В естественных науках поле возможных соотношений и всякого рода уравнений весьма разнообразно, однако с точки зрения возможных приложений теории размерностей и подобия это поле приложений вполне обозримо, и можно прямо сказать, что во всех правильно развиваемых теориях не встречается таких особых примеров, которые рассмотрел Биркгоф.

Соответствующее и естественное определение изучаемых физических закономерностей дает как следствие структуру соответствующих уравнений, представленных в безразмерном виде. Определяющие параметры, переменные или постоянные, выделяемые постановкой задачи, можно рассматривать как величины, в известном диапазоне не зависящие одна от другой. Определяемые величины можно рассматривать как величины, выражаемые с помощью некоторых математических операций через определяющие. Соответствующие функциональные связи между размерными величинами обладают вполне определенной структурой, обусловленной независимостью этой связи от выбора основных единиц. Эта структура связана с существованием в классе рассматриваемых явлений своих собственных характерных величин — собственных единиц измерения, не зависимых от условных единиц измерения, выбранных на основе специального соглашения.

Стандартизация и унификация единиц измерения удобна и необходима с многих хорошо известных точек зрения. Вместе с этим теория размерностей и подобия указывает, что для различных классов вполне определенных явлений выгодны свои собственные характерные единицы измерения, связанные с существенными величинами, характерными для объектов и явлений данного класса. Использование собственной системы единиц измерения часто очень выгодно, и к нему сводится описание явлений и законов в безразмерной форме — прием, плодотворный и широко внедренный в настоящее время в науке и технике.

Особенное значение имеют случаи, когда число основных характерных независимых постоянных размерных параметров мало и недостаточно для получения числа независимых безразмерных переменных величин, равного числу независимых переменных размерных величин; в этом случае возникает автомодельность явления, что вносит существенные упрощения в задачи теоретического или экспериментального исследования.

В книге Биркгофа сделана попытка привлечь к проблеме интегрирования уравнений гидромеханики методы теории групп, что позволяет обозреть с единой точки зрения свойства различных классов частных решений этих уравнений, найденных и изученных ранее разными авторами.

Со времени выхода в свет первого издания проблема применения теории групп к задачам интегрирования дифференциальных уравнений и к установлению влияния геометрической симметрии на природу тензорных функциональных связей рассматривалась в русской литературе в монографии Л. В. Овсянникова [1]) и в работе В. В. Лохина и Л. И. Седова [2]). В этих работах содержится ряд далеко идущих новых результатов, которые остались незатронутыми в предлагаемой книге.

При переводе ссылки автора на учебную литературу заменены ссылками на соответствующие книги, имеющиеся на русском языке. В конце книги помещен список дополнительной литературы.

Л. И. Седов

[1]) Овсянников Л. В., Групповые свойства дифференциальных уравнений, Изд. АН СССР, Сиб. отд., Новосибирск, 1962.

[2]) Лохин В. В., Седов Л. И., Нелинейные тензорные функции от нескольких тензорных аргументов, *Прикл. мат. и мех.*, вып. 3, 1963.

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ АВТОРА

Настоящая книга посвящена преимущественно двум специальным аспектам гидромеханики: сложным логическим соотношениям между теорией и экспериментом и применению понятия симметрии. Вторая тема с математической точки зрения относится к теории групп.

Соотношение между теорией и экспериментом рассматривается в гл. I и II на материале многочисленных «парадоксов», в которых правдоподобные рассуждения приводят к неверным результатам. В гл. III это соотношение изучается более подробно в частном случае струйных течений.

Глава IV посвящена анализу моделирования и его теоретическому обоснованию. Проводится сравнение (или противопоставление!) теории и практики, а также описывается происхождение моделирования из понятия симметрии; таким образом устанавливается связь между теми двумя важными сторонами гидромеханики, которые изучаются в этой книге.

Центральная тема остальной части книги — применение идей теории групп. В гл. V показано, что такие идеи позволяют обосновать значительное количество известных точных решений задач теории сжимаемой и вязкой жидкости. В гл. VI установлено, что, исходя из них, можно получить классическую теорию «присоединенных масс» как частный случай современной геометрической теории «однородных пространств».

Итак, общее распределение материала весьма близко к тому, что было в первом издании. Однако весь материал книги тщательно пересмотрен и во второе издание добавлен ряд интересных новых результатов, полученных за последнее десятилетие.

Глава I

ПАРАДОКСЫ НЕВЯЗКОГО ТЕЧЕНИЯ

§ 1. Теоретическая гидродинамика

Теоретическая (рациональная) гидродинамика стремится приближенно предсказать движение реальной жидкости путем решения *краевых* задач для соответствующих систем дифференциальных уравнений в частных производных. При составлении этих уравнений в качестве аксиом принимают законы движения Ньютона. Предполагается также, что рассматриваемая жидкость (обычная жидкость или газ) всюду непрерывна и что на любую часть поверхности действует вполне определенное давление или какое-либо другое внутреннее *напряжение* (сила, приходящаяся на единицу площади), которое, по крайней мере локально, является дифференцируемой функцией координат, времени и направления. Наконец, устанавливается связь этих напряжений с движением жидкости посредством введения различных параметров, характеризующих данное вещество (плотность, вязкость и т. д.), и функциональных зависимостей (закон адиабатического сжатия и т. п.). Исходя из таких допущений, математики составили системы дифференциальных уравнений для различных *идеализированных жидкостей* (несжимаемой невязкой, сжимаемой невязкой, несжимаемой вязкой и т. д.).

Для того чтобы получить вполне определенные, или корректно поставленные[1]), задачи для таких дифференциальных уравнений, необходимо еще задать соответствующие краевые условия, относящиеся либо к начальному состоянию движения, либо к движению стенок и препятствий, ограничивающих течение жидкости, либо и к тому, и к другому. Теоретическая гидродинамика включает в себя изучение краевых задач, которые получаются в результате сочетания этих краевых условий

---

[1]) Мы пользуемся ставшей в настоящее время классической терминологией Адамара, согласно которой краевая задача называется корректно поставленной, если она имеет одно и только одно решение, непрерывно зависящее от краевых условий. См. Hadamard J., Lectures on Cauchy's problem, Yale Univ. Press, 1923, стр. 32.

с дифференциальными уравнениями для идеализированных жидкостей [1]).

Математику легко убедить себя в том, что теоретическая гидродинамика в основном непогрешима. Так, Лагранж [2]) писал в 1788 г.: «Мы обязаны Эйлеру первыми общими формулами для движения жидкостей... записанными в простой и ясной символике частных производных... Благодаря этому открытию вся механика жидкостей свелась к вопросу анализа, и будь эти уравнения интегрируемыми, можно было бы в любом случае полностью определить движение жидкости под воздействием любых сил...» Многие из величайших математиков, от Ньютона и Эйлера до наших дней, штурмовали задачи теоретической гидродинамики, веря в это. И в их исследованиях, часто вдохновляемых физической интуицией, были введены некоторые из наиболее важных понятий теории уравнений в частных производных: функция Грина, вихревая линия, характеристика, область влияния, ударная волна, собственные функции, устойчивость, «корректность» задачи — таков неполный список.

Однако краевые задачи теоретической гидродинамики чрезвычайно трудны, и продвижение в этой области шло бы гораздо медленнее, если бы строгая математика не дополнялась различными *правдоподобными интуитивными гипотезами.* Наиболее плодотворными среди них были следующие.

(A) Определяя, какие физические переменные необходимо рассматривать, можно полагаться на интуицию.

(B) Эффект малых воздействий мал, а эффект бесконечно малых воздействий бесконечно мал.

(C) Симметрия воздействия обусловливает симметрию эффекта.

(D) Топологию течения можно уловить интуитивно.

(E) Операции анализа применимы без ограничений: функции, рассматриваемые в теоретической гидродинамике, можно свободно интегрировать, дифференцировать, представлять в виде рядов (Тейлора, Фурье) или интегралов (Лапласа, Фурье).

(F) Математические задачи, поставленные на основе интуитивных физических представлений, считаются корректными.

Приведенные правдоподобные предположения обычно принимаются без оговорок, как сами собой разумеющиеся. Первые две главы этой книги посвящены главным образом подробному исследованию их приемлемости.

---

[1]) Для простоты изложения мы не касаемся закона сохранения энергии и других термодинамических соображений, которые также можно привлечь (см. § 14).

[2]) Лагранж Ж. Л., Аналитическая механика, т. II, М.—Л., 1950, стр. 307.

§ 2. Гидродинамические парадоксы

На деле в ряде случаев уравнения Эйлера были проинтегрированы, но результаты расчетов резко расходились с наблюдениями, что явно противоречит мнению Лагранжа. В гидродинамике такие *несомненные противоречия* между экспериментальными данными и заключениями, основанными на правдоподобных рассуждениях, называются *парадоксами*, и в дальнейшем этот термин будет употребляться именно в таком смысле.

Эти парадоксы были предметом многих острот. Так, недавно было сказано [1]), что в девятнадцатом веке «гидродинамики разделялись на инженеров-гидравликов, которые наблюдали то, что нельзя было объяснить, и математиков, которые объясняли то, что нельзя было наблюдать». (Нам кажется, что представители обоих видов все еще встречаются.) Да и Сидней Гольдштейн заметил, что всю книгу Ламба [7] можно прочитать, не представляя себе, что вода... мокрая!

Теперь обычно заявляют, что подобные парадоксы возникают из-за отличия реальных жидкостей, имеющих малую, но конечную вязкость, от идеальных жидкостей, имеющих нулевую вязкость [2]). Из этого, по существу, следует, что утверждение Лагранжа (см. прим. 2 на стр. 16) можно подправить, поставив «Навье — Стокс» вместо «Эйлер».

Это утверждение будет критически рассмотрено в гл. II; оно, пожалуй, в принципе верно для *несжимаемого* вязкого течения. Однако, мы полагаем, что если понимать его буквально, то оно может ввести в заблуждение, поскольку явно не выделены перечисленные выше правдоподобные гипотезы и не учтен тот ущерб в строгости, который обусловлен их применением.

Тем не менее нам не известно ни одного случая, когда дедукция, строгая как физически, так и математически, привела бы к неправильному заключению, но лишь очень немногие выводы теоретической гидродинамики могут быть строго установлены. Для самых интересных из них широко использовались одна или несколько из упомянутых гипотез (A)—(F).

Это можно показать на примере уравнений Навье — Стокса. Они явно непригодны для учета релятивистских эффектов, молекулярной структуры, квантовых эффектов, равно как таких специфических явлений, как ионизация, электростатические силы, загрязнения во взвесях, конденсация и т. п., каждое из которых может вызвать серьезные осложнения, как будет

---

[1]) Hinshelwood C.; цитируем по Лайтхиллу [Lighthill M. Y., *Nature*, **178** (1956), 343]; см. также [11], т. 1, Введение.

[2]) См. [3], § 1, 14; [11], т. 1, Введение; т. 2. Введение; Hunter Rouse, Fluid Mechanics for Hydraulic Engineers, McGraw-Hill, 1938, стр. 10.

показано ниже. Стало быть, уже сразу широко используется гипотеза (А). В случае *сжимаемого* течения остается открытым даже вопрос о том, какой смысл имеет понятие «второй» вязкости (§ 22, 33).

Мы не настаиваем на том, чтобы впредь не использовать в теоретической гидродинамике гипотезы (А)—(F) — даже в чистой математике правдоподобные соображения играют очень важную роль [1]. В гидродинамике продвижение едва ли было бы возможно без широкого использования таких правдоподобных гипотез, а полная строгость редко бывает достижимой. Мы только настаиваем на том, что, прежде чем считать научно установленными заключения, основанные на правдоподобных соображениях, их надо проконтролировать *либо* с помощью строгих доказательств (как в чистой математике), *либо* с помощью эксперимента.

Напротив, мы считаем, что нужно только приветствовать открытие гидродинамических парадоксов, искренне признав неспособность существующей математики (и логики) адекватно отображать сложные и удивительные явления природы. Опыт показывает, что человеческое воображение гораздо более ограничено, чем ресурсы природы; как писал Паскаль, «воображение скорее устанет постигать, чем природа поставлять».

В связи с этим, остальная часть первой главы будет посвящена анализу некоторых парадоксов классической гидродинамики. В гл. II мы уделим внимание аналогичным (но не столь широко известным) парадоксам «современной» динамики жидкостей.

§ 3. Уравнения Эйлера

Мы начнем с рассмотрения основных уравнений для невязких жидкостей, выведенных Эйлером и Лагранжем. Пусть $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ означает вектор скорости жидкости в точке $\mathbf{x}$ в момент времени t. Пусть $\rho(\mathbf{x}, t)$ означает плотность жидкости, $\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$ — внешнее гравитационное [2] поле и $p(\mathbf{x}, t)$ — давление в жидкости.

Если принять правдоподобную гипотезу (Е) из § 1 (игнорируя молекулярную структуру вещества!), то легко показать, что закон сохранения массы эквивалентен следующему уравнению

[1] См. Пойа Д., Математика и правдоподобные рассуждения, ИЛ, М., 1957. Парадоксы возникают даже в чистой математике; см. Northrop E. P., Riddles in Mathematics, Van Nostrand, 1944.

[2] Этим термином автор пользуется в более широком смысле, чем это обычно принято, применяя его для поля массовых (или объемных) сил. — *Прим. перев.*

в частных производных:

$$\operatorname{div}(\rho\mathbf{u}) + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \text{ (уравнение неразрывности)}. \qquad (1)$$

Если обозначить «субстанциональную» производную по времени для наблюдателя, движущегося вместе с жидкостью, через $D/Dt = \partial/\partial t + \Sigma u_k \partial/\partial x_k$, то можно переписать (1) в виде

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div}\mathbf{u} = 0. \qquad (1')$$

Случаю *несжимаемости* соответствует $D\rho/Dt = 0$, и, следовательно, $\operatorname{div}\mathbf{u} = 0$.

При $\mathbf{u} = 0$, когда жидкость находится в состоянии *покоя*, напряжение в жидкости на любой элемент поверхности действует *по нормали* к нему. Это — физическое определение жидкости; экспериментально проверено, что ему удовлетворяют многие реальные вещества.

Эйлер предположил, что этот закон гидростатики применим также к движущимся жидкостям, т. е. в гидродинамике. Этот закон приближенно удовлетворяется во многих случаях движения жидкостей (исключая области вблизи границы). Например, изменение скорости на 50 *м/сек* в слое воздуха толщиной в четверть миллиметра вызывает усилие сдвига, составляющее примерно 1/2000 атмосферного давления ([3], стр. 2).

Непрерывные жидкости, удовлетворяющие гипотезе Эйлера, называются *невязкими* [1]). Как показал Коши, напряжение в невязкой жидкости должно быть одинаковым во всех направлениях (изотропным); получающаяся скалярная функция $p(\mathbf{x}, t)$ может быть названа *давлением*. Далее, закон сохранения количества движения эквивалентен следующему векторному уравнению в частных производных:

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} + \frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p = \mathbf{g} \text{ (уравнение движения)}. \qquad (2)$$

Для того чтобы получить замкнутую систему уравнений в частных производных, в которой все производные *по времени* могут быть выражены через производные *по пространственным координатам* [2]), к уравнениям (1), (2) нужно добавить еще одно соотношение. В теоретической механике однородных невязких

---

[1]) В соответствии с гипотезой (В) из § 1 воздух и воду можно рассматривать как невязкие жидкости.

[2]) Так, что начальные условия будут определять задачу Коши в обычном математическом смысле.

жидкостей обычно вводится соотношение, связывающее плотность и давление:

$$\rho = h(p) \quad \text{(уравнение состояния).} \tag{3}$$

Баротропные течения. Невязкие жидкости, удовлетворяющие условию (3), могут быть названы баротропными, а движения жидкости, удовлетворяющие уравнениям (1)—(3),— «баротропными течениями». Эти течения встречаются в (приближенно) однородных жидкостях при условиях, которые являются термодинамически обратимыми. (Под «однородной жидкостью» мы понимаем жидкость, имеющую однородное строение, например чистую воду или воздух.)

Именно такие жидкости обычно рассматриваются в акустике и в аэродинамике больших скоростей. Быстрое сжатие и расширение — типичные адиабатические процессы [1]) в том смысле, что можно пренебречь теплопроводностью. Кроме того, пренебрежение теплопроводностью логически не противоречит пренебрежению вязкостью в уравнении (2), поскольку как теплопроводность, так и вязкость представляют собой молекулярные явления.

В случае идеального газа с термодинамическим уравнением состояния $p = \rho RT$ и постоянным отношением теплоемкостей $C_p/C_v = \gamma$ элементарные рассуждения дают для адиабатического течения соотношение

$$p = k\rho^{\gamma} \tag{3a}$$

— так называемое *политропное* уравнение состояния для идеального термодинамически совершенного газа. Предельный случай $\gamma = 1$ соответствует изотермическому течению (бесконечная теплоемкость или в бесконечном изотермическом резервуаре бесконечная проводимость).

Уравнение (3а) достаточно точно для многих задач газовой динамики; для воздуха $\gamma = 1{,}4$. Однако для жидкостей уравнение (3) необходимо брать (приближенно) в виде $(p - p_v) = k\rho^{\gamma}$, где p_v есть давление паров при кавитации (см. § 42).

Соотношение вида (3) является также приемлемым для жидкостей, которые только незначительно сжимаемы (т. е. при ско-

[1]) Напомним, что Ньютон («Principia Mathematica», Книга II, отдел 8, предложение 48; русский перевод — в «Собрании трудов А. Н. Крылова», т. VII, М.—Л., 1936; см. там же, стр. 480) принимал для изотермического течения закон Бойля, что привело к неправильному выводу скорости звука. Ошибка Ньютона была исправлена Лапласом ([7], стр. 477; в русском издании стр. 596; см. также указанный том «Собрания трудов А. Н. Крылова», стр. 485, прим. 175).

ростях гораздо меньших скорости звука, особенно в обычных жидкостях). В этом случае можно просто писать

$$\rho = \rho_0 \tag{3б}$$

и говорить об *однородной несжимаемой невязкой жидкости*. Однако в этом случае уже нельзя выразить все производные по времени через производные по пространственным координатам.

§ 4. Потенциал скорости

Основные уравнения Эйлера (1) — (3) позволяют получить различные фундаментальные следствия, имеющие много важных приложений.

Самым существенным следствием является теорема Гельмгольца, справедливая для баротропного течения в консервативных гравитационных полях (т. е. при $\mathbf{g} = -\nabla G$). Эта теорема ([7], стр. 54; [1*] [1]), т. 1, стр. 149) утверждает инвариантность циркуляции $\Gamma = \oint \sum u_k \, dx_k$ по любому замкнутому контуру, движущемуся вместе с жидкостью, т. е. во всякий момент времени состоящему из одних и тех же частиц жидкости. Следовательно, если в начальный момент жидкость находится в покое (например, вытекает из неподвижного резервуара) и если контур остается все время замкнутым, то циркуляция всегда должна равняться нулю. Это значит, что должен существовать локально однозначный скалярный *потенциал скорости* $U(\mathbf{x}, t)$, т. е. такая скалярная функция точки, что

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \nabla U = \operatorname{grad} U. \tag{4}$$

Течения, обладающие таким свойством, называются (локально) *безвихревыми* [2]). Следовательно, в *односвязной* области, такой, как область вне некоторого твердого тела в пространстве или половина симметричной области вне кругового цилиндра на плоскости, скорость U должна быть однозначной функцией во всей области.

В случае баротропных течений при отсутствии внешних гравитационных сил для безвихревого движения [т. е. если выполняется уравнение (4)] можно получить интеграл уравнений движения, так называемое уравнение Бернулли

$$\int \frac{dp}{\rho} = P(t) - \frac{1}{2}\nabla U \nabla U - \frac{\partial U}{\partial t}, \quad \rho = h(p). \tag{4'}$$

---

[1]) Звездочка обозначает ссылку на дополнительную литературу. — *Прим. ред.*

[2]) В русской литературе чаще используется термин «потенциальные течения». — *Прим. перев.*

Действительно, уравнения движения (без гравитационного слагаемого) представляют собой в точности градиент соотношения (4′).

Несжимаемые течения. В случае однородных несжимаемых жидкостей можно обобщить уравнение Бернулли (4′) так, чтобы учитывался эффект гравитации. Действительно, для безвихревых несжимаемых течений градиент соотношения

$$p = P(t) - \rho_0\left\{\frac{1}{2}\nabla U\,\nabla U + \frac{\partial U}{\partial t} + G\right\} \tag{5}$$

эквивалентен уравнениям движения с гравитационным членом. Более того, в этом случае уравнение (1) сводится к виду $\operatorname{div}\mathbf{u} = 0$, откуда получаем уравнение

$$\nabla^2 U = 0. \tag{6}$$

Наконец, очевидно, что на любой непроницаемой твердой границе производная

$$\frac{\partial U}{\partial n} = F(\mathbf{x},\ t) \tag{7}$$

определяется нормальной скоростью движения этой границы.

Для однозначных во всей области функций $U(\mathbf{x})$ уравнения (6) и (7) представляют классическую задачу теории потенциала, так называемую *задачу Неймана*. Как мы увидим в § 5 и гл. VI; эта задача имеет большое значение для теоретической гидродинамики. Но прежде отметим, что здесь подразумевается выполненной гипотеза (F) из § 1: предполагается, что задача Неймана должна иметь одно и только одно однозначное решение $U(\mathbf{x},\ t)$ для разумным образом определенных границ.

Примечательно, что для строгого доказательства этого математического предположения, возникшего из гидродинамических рассмотрений, потребовалось более чем 50 лет. В настоящее время это основная теорема общей теории потенциала ([4], стр. 310—311; [2*]).

Эта теорема показывает, что если несжимаемая невязкая жидкость в начальный момент находится в состоянии покоя, то поле скоростей в любой момент времени зависит только от *мгновенной* скорости границы и не зависит от предшествующих состояний. Приведенные теоремы показывают также, что движение любой части границы мгновенно оказывает воздействие на весь объем жидкости: скорость сигнала равна бесконечности (это согласуется и с физической интуицией).

§ 5. Стационарные безвихревые течения

Случай стационарных (или установившихся) течений, когда $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x})$, очевидно, имеет особое значение. Исходя из результатов § 4, гидродинамики XIX века считали правдоподобным, что для твердого тела, проходящего с постоянной скоростью достаточно большое по сравнению с его размерами расстояние в неограниченном объеме жидкости, вязкость которой достаточно мала и которая первоначально находилась в покое, можно написать равенства:

$$U = U(\mathbf{x}), \quad p = p(\mathbf{x}), \quad \mathbf{g} = g(\mathbf{x}),$$

и т. д. — для осей координат, жестко связанных с телом, относительно которых жидкость движется с постоянной скоростью $\mathbf{a}$. Ясно, что такие правдоподобные выводы основаны на гипотезе (B) § 1.

Если исходить из этих правдоподобных заключений, то далее можно действовать следующим образом. Для стационарных течений при $U = U(\mathbf{x})$ уравнение движения (2) после однократного интегрирования по пространственным координатам становится эквивалентным уравнению [1])

$$\frac{1}{2}\nabla U\nabla U + \int \frac{dp}{\rho} + G = \frac{p_0}{\rho_0}, \quad \text{или} \quad \sum u_i\,du_i + \frac{dp}{h(p)} + dG = 0. \qquad (8)$$

Это уравнение называется уравнением Бернулли для стационарного течения; в случае несжимаемой жидкости оно принимает известный простой вид:

$$p = p_0 - \rho_0\left(\frac{1}{2}\nabla U\nabla U + G\right). \qquad (8^*)$$

Подобным образом условие того, что скорость тела относительно жидкости на бесконечности равна $-\mathbf{a}$, может быть записано в виде

$$\lim_{x\to\infty} \operatorname{grad} U = \mathbf{a} \qquad (9)$$

и для несжимаемого, и для сжимаемого течения.

Наконец, поскольку течение стационарно, то должны быть стационарны и границы течения. Отсюда условие непроницаемости (7) сводится к условию

$$\frac{\partial U}{\partial n} = 0 \quad \text{на границе.} \qquad (7^*)$$

[1]) Если справедливо соотношение (3a), то $\int dp/\rho = \gamma p/(\gamma - 1)\rho = c^2/(\gamma - 1)$.

В случае безвихревого сжимаемого течения уравнение неразрывности (1) все еще можно записать при помощи единственной неизвестной функции $U(\mathbf{x})$, *если* только пренебречь эффектом гравитации, что обычно допустимо при достаточно больших скоростях, когда становится заметной сжимаемость[1]. (Если гравитацией нельзя пренебречь, как, например, в случае атмосферных движений больших масштабов, то условие (9) не может быть выполнено, даже несмотря на то, что безвихревое течение является допустимым.)

Кинематика баротропного течения. Полагая $G = 0$ в уравнении (8), при описанных выше условиях мы можем получить равенство

$$\frac{dp}{d\rho} = c^2 = \frac{1}{h'(p)} = \frac{1}{J(\nabla U \cdot \nabla U)}, \tag{9*}$$

где J — функция, обратная функции $2p_0/\rho_0 - 2\int d\rho/h'(p)\rho^*$[2]. С другой стороны, из уравнения (1) при $\partial\rho/\partial t = 0$ следует $\rho^{-1}\operatorname{div}(\rho\mathbf{u}) = 0$, или

$$\nabla^2 U = \frac{1}{c^2}\frac{\partial U}{\partial x_j}\frac{\partial U}{\partial x_k}\frac{\partial^2 U}{\partial x_j\,\partial x_k}. \tag{10}$$

Другая форма уравнения (10) имеет вид

$$\nabla^2 U = \mathrm{M}^2 \sum \frac{u_j u_k}{q^2}\frac{\partial^2 U}{\partial x_j\,\partial x_k}, \tag{10*}$$

где локальное «число Маха» $\mathrm{M} = q/c$ есть отношение локальной скорости течения q к локальной скорости звука c, а все коэффициенты $u_j u_k/q^2$ меньше или равны 1.

Подставив в уравнение (10) выражение для $1/c^2$, взятое из формулы (9*), мы получим ([10], стр. 240) уравнение

$$\nabla^2 U = J(\nabla U \cdot \nabla U) \sum \frac{\partial U}{\partial x_j}\frac{\partial U}{\partial x_k}\frac{\partial^2 U}{\partial x_j\,\partial x_k}. \tag{11}$$

Одно-единственное уравнение в частных производных (11) вместе с краевыми условиями (9) и (7*) сводит задачу для случая стационарного *сжимаемого* течения баротропной жидкости нулевой (малой?) вязкости к другой правдоподобной краевой за-

---

[1]) В случае несжимаемости гравитационный эффект сводится к обыкновенной гидростатической подъемной силе, как показано в § 21.

[2]) При этом последнюю функцию надо рассматривать как функцию аргумента $h'(p)$. — *Прим. перев.*

даче. Если только последняя задача решена, то из уравнения (8) можно легко найти поле давления.

Таким образом, мы свели задачу стационарного течения к чисто кинематической задаче. Если дано любое математическое решение уравнений (11), (9) и (7*) и если посредством уравнения (8) определено поле давления при $G = 0$, то уравнение движения (2) удовлетворяется автоматически. Очевидно, что задача Неймана из § 4 получается как предельный случай при $c \to \infty$. Допущение (F), таким образом, позволяет получить гораздо больше, а именно, что решение можно разложить по степеням M^2 (метод Рэлея — Янцена, [15], стр. 275).

§ 6. Парадокс обратимости

Одной из фундаментальных задач гидромеханики является определение силы, действующей на твердое тело, находящееся в стационарном поступательном движении с постоянной скоростью **a** в однородной покоящейся жидкости. Если твердое тело движется параллельно некоторой плоскости симметрии, то эту силу можно разложить на лобовое сопротивление D, подъемную силу L и момент M, действующий в этой плоскости.

Лагранж мог бы заметить, пользуясь весьма простыми соображениями *обратимости,* что идеализированная краевая задача § 5 может не привести к правильному результату при определении сопротивления, испытываемого реальными твердыми телами при движении в реальных жидкостях. Основная мысль заключается в следующем (см. [1]).

Определение 1. *Обращение* течения $\mathbf{u}(\mathbf{x}; t)$ определяется как $\mathbf{v}(\mathbf{x}; t) = -\mathbf{u}(\mathbf{x}; -t)$, причем в обоих течениях давление и плотность в соответствующих точках одинаковы.

Прямой подстановкой можно показать, что обращение любого течения, удовлетворяющего уравнениям (1)—(3), также удовлетворяет уравнениям (1)—(3), правда, при обращении и краевых условий. В частности, справедлива следующая лемма.

Лемма. *Если* $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ *есть стационарное безвихревое течение вокруг твердого препятствия и* $\mathbf{u}(\infty) = \mathbf{a}$, *то таковым является и* $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = -\mathbf{u}(\mathbf{x})$ *при* $\mathbf{v}(\infty) = -\mathbf{a}$. *Кроме того, поля давления, так же как и D, L и M, одинаковы для* $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ *и* $\mathbf{v}(\mathbf{x})$.

Эта лемма находится в *качественном* противоречии с динамикой реальных жидкостей: в действительности изменение направления движущегося тела на противоположное обычно влечет обращение величин D и L (хотя и не M) [1]), а не оставляет их неизменными.

Поучительно проанализировать предыдущее противоречие подробнее. Пока не установлено, что краевая задача в § 5 корректно поставлена, нельзя делать вывод о том, что ее уравнения ошибочны. Возможно, что потребуется ввести какое-нибудь дополнительное условие. Действительно, как мы увидим в § 10, это может оказаться справедливым для *сверхзвукового* течения (т. е. если число Маха $M > 1$). Чтобы пояснить это, проведем следующее разграничение:

Определение 2. Будем называть гидродинамические теории *неполными*, если соответствующие условия определяют обтекание данного препятствия не единственным образом; *переопределенными*, если эти условия математически не совместны; *ложными*, если корректно поставленная задача дает грубо ошибочные результаты.

Теорема 1. *Всякая обратимая гидродинамическая теория в отношении расчета лобового сопротивления и подъемной силы является неполной, переопределенной или ложной.*

Дозвуковой случай. В дозвуковом случае, $M < 1$, по крайней мере для достаточно малого числа Маха недавно было показано [2]), что краевая задача, определяемая уравнениями (11), (9) и (7*) из § 5, является корректно поставленной. Поскольку эта задача эллиптического типа, ее математическое решение $U(\mathrm{x})$ должно быть *аналитическим*. Отсюда мы заключаем, что уравнения Эйлера — Лагранжа дают *ложную* теорию для стационарного дозвукового потока.

Околозвуковой случай. По поводу этого случая, когда в дозвуковом потоке имеются локальные сверхзвуковые зоны, высказано много различных и противоречивых утверждений. Были построены математические модели подобных околозвуковых течений [3]), но они, по-видимому, очень слабо отражают физическую

[1]) Классическая гидродинамика правильно предсказывает тенденцию осесимметричных препятствий подставлять потоку более широкую сторону: ср. [7], § 71, 124. (В случае тел, обладающих продольной симметрией, при обращении потока L остается неизменным, а у M изменяется знак.)

[2]) Graffi D., *J. Rat. Mech. Analysis*, **2** (1953), 99—106; Gilbarg D., там же, 233—251; Gilbarg D. and Serrin J., там же, **4** (1955), 169—175; Bers L., *Comm. Pure Appl. Math.*, **7** (1954), 441—504; Finn R. S. and Gilbarg D., там же, **10** (1957), 23—64 и *Acta Math.*, **98** (1957), 265—276. Это обобщает результат из § 4 на случай $M = 0$ (задача Неймана). [Случай малых M см. в [3*] — *Прим. ред.*]

[3]) Мизес Р., Математическая теория течений сжимаемой жидкости, ИЛ, М., 1961, § 25, п. 3.

картину. Еще более драматическим обстоятельством является то, что для некоторых профилей никакое околозвуковое течение без ударной волны невозможно. Этот парадокс околозвукового течения недавно установлен К. Моравец [1]). По терминологии теоремы 1, это означает, что задача околозвукового течения в теоретической (Эйлера — Лагранжа) гидродинамике может быть *переопределенной.*

В § 10 мы увидим, что задача сверхзвукового течения — типичная неполная задача, и примечательно, что различные разрешения парадокса обратимости в трех предыдущих случаях находятся в соответствии с общей математической теорией краевых задач эллиптического, смешанного и гиперболического типов.

§ 7. Парадокс Даламбера

Более известным и более давним, чем парадокс обратимости, является парадокс Даламбера. Согласно этому парадоксу, из допущений, сделанных в § 5, следует $D = L = 0$. Для случаев

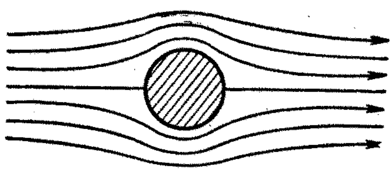

Рис. 1. Обтекание цилиндра, по Эйлеру.

кругового цилиндра (рис. 1) и сферы это следует, в силу симметрии, из явной формы потенциала скоростей:

$$U = a\left(x + \frac{x}{r^2}\right) \text{ (цилиндр)}, \tag{12а}$$

$$U = a\left(x + \frac{x}{2r^3}\right) \text{ (сфера)} \tag{12б}$$

и теоремы Бернулли (8*) при $g = 0$. Если задача корректно поставлена, то наличие четырехкратной симметрии, как в данных случаях, позволяет показать, что $D = L = 0$, исходя только из соображений обратимости ([1], стр. 248).

Вообще же парадокс Даламбера следует из принципа обратимости для любого профиля, который обладает *центральной* симметрией, т. е. для такого, который отображается в себя при

[1]) *Comm. Pure Appl. Math.*, **9** (1956), 45—68, **10** (1957), 107—131 и **11** (1958), 129—144. [См. также [4*], [5*]. — *Прим. ред.*]

отражении относительно неподвижного центра симметрии. Обтекание плоской пластинки на рис. 2, *а* дает пример подобного рода. Давления, действующие на элементы поверхности, соответствующие друг другу при центральной симметрии, равны по величине и противоположны по направлению. Следовательно, эта система сил сводится только к паре сил (см. прим. 1) на стр. 26).

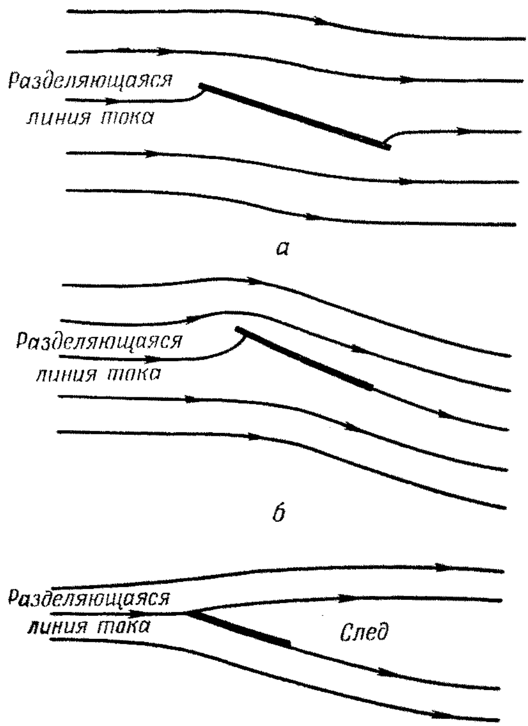

Рис. 2. Обтекание плоской пластинки, по Эйлеру (*а*), по Жуковскому (*б*) и по Гельмгольцу (*в*).

Демонстрация парадокса в общем случае дело довольно тонкое, при этом используется сложная теорема о поведении решений уравнения $\nabla^2 U = 0$ на бесконечности. А именно, пусть $U(\mathbf{x})$ возрастает на бесконечности, по крайней мере как первая степень $|\mathbf{x}| = r$. Тогда можно показать, что

$$U = \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} + \varphi(\mathbf{x}),$$

где $\varphi(\mathbf{x})$ «регулярна на бесконечности» ([4], гл. X, § 8; [2*]). Под этим мы понимаем то, что $\varphi(\mathbf{x})$ можно разложить в некоторый сходящийся ряд (аналогичный ряду по отрицательным степеням в разложении Лорана), члены которого суть произведения отрицательных степеней r и сферических гармоник, выраженных через широту и долготу. (Для таких решений уравнения $\nabla^2 U = 0$ правдоподобная гипотеза (Е) подтверждается, следовательно, строгой теоремой.)

§ 8. Теория крылового профиля

Не смущаясь приведенными выше парадоксами, ученые сумели правильно получить, по крайней мере качественно, лобовое сопротивление и подъемную силу, оставаясь в рамках уравнений движения Эйлера. Вся хитрость заключается в том, чтобы избежать употребления гипотезы (D), которую применяли Эйлер и Лагранж, а это можно сделать, используя *разрывные* и *многозначные* потенциалы. (Такие функции, правда, часто рассматриваются «практиками» как патология!)

Для определения *лобового сопротивления* можно постулировать наличие застойной *кильватерной зоны* (след, область «мертвой воды») с $U = 0$ позади препятствия, простирающегося до бесконечности, как на рис. 2, *в*. Эта зона отделена от главного течения «свободными линиями тока» с постоянным давлением, причем скорость $\mathbf{u} = \nabla U$ изменяется скачкообразно при переходе через эти линии. Эта модель будет изучена в § 39.

Теорию подъемной силы в двумерном течении можно получить, вводя многозначный потенциал вида

$$U = \frac{\Gamma\theta}{2\pi} + \sum a_k x_k + \varphi(\mathbf{x}), \tag{13}$$

где

$$\nabla^2\varphi = 0 \quad \text{и} \quad \varphi(\mathbf{x}) = O\left(\frac{1}{r^2}\right).$$

Здесь $\Gamma = \oint dU = \oint \sum u_k\, dx_k$ — циркуляция, определенная в § 4, причем интеграл берется вокруг препятствия (профиля крыла).

Вводя член $\Gamma\theta/2\pi$ в формулу (13), мы жертвуем детерминизмом, так как при этом задача Неймана из § 4 заменяется задачей, которая не является корректно поставленной. Некоторую видимость детерминизма можно еще сохранить, когда крыло имеет острую заднюю «кромку» (но не в общем случае). В этом случае является правдоподобным предположение, что «скорость конечна на задней кромке» (условие Жуковского — Чаплыгина). Это условие выделяет единственное значение циркуляции Γ и позволяет находить лобовое сопротивление и подъемную силу следующей теореме Кутта — Жуковского ([8], стр. 188).

Теорема 2. *В любом плоском течении вида* (13) *мы имеем* $D = 0$ и $L = \rho a \Gamma$, *где* $a = |\mathbf{a}|$.

В частном случае $\Gamma = 0$ мы получаем как следствие парадокс Даламбера.

Стационарное локально безвихревое плоское течение с циркуляцией можно определить как «течение Жуковского», если оно удовлетворяет условию Жуковского. Течение Жуковского для плоской пластинки схематически изображено на рис. 2, *б*; коэффициент подъемной силы $C_L = 2\pi \sin \alpha$, где α — угол атаки. Течение Жуковского для заданного профиля с острой задней кромкой представляет собой корректно поставленную краевую задачу. Ее решение в частных случаях (профиль Жуковского, профиль Кармана — Треффтца и т. д.) составляет основную главу современной теории крыла; впервые общую теорию (с приложениями) дал Мизес [1]). Ее справедливость основывается на следующей теореме чистой математики, которая позволяет нам преобразовывать элементарное течение Жуковского (12а) для единичного круга в несжимаемое течение Жуковского для произвольного профиля.

Основная теорема о конформном отображении. *Имеется одна и только одна комплексная аналитическая функция*

$$w = f(z) = kz + \sum_{0}^{\infty} c_k z^{-k}, \qquad k > 0,$$

отображающая взаимно однозначно и конформно область вне единичного круга на внешность данной односвязной области.

В последнее время этот результат был распространен на «квазиконформное» отображение (см. прим. 2) на стр. 26), которое состоит в том, что для данного числа Маха $M < 1$ имеется одно и только одно дозвуковое обтекание, по Жуковскому, для любого профиля с острой задней кромкой.

В случае хорошо обтекаемых профилей при малом угле атаки действительные потоки хорошо аппроксимируются идеальными течениями Жуковского. Хотя полагать, что лобовое сопротивление равно нулю, очевидно сверхоптимистично, тем не менее подъемная сила в действительности составляет 75—95% расчетной, а отношение подъемная сила/лобовое сопротивление может доходить до 50.

---

[1]) Mises R., *Zeits. Flugt. Motorluftschiffahrt*, 1917, стр. 157—163 и 1926, стр. 67—73 и 87—89. Относительно анализа фактических данных см. Мизес Р., Теория полета, М., ИЛ, 1949. [Формула для определения момента сил, действующих на крыло, была получена С. А. Чаплыгиным (см. Чаплыгин С. А., Соч., т. II, М.—Л., 1933). — *Прим. ред.*]

Однако условие Жуковского никоим образом не дает надежной теории подъемной силы в общем случае! Так, в трехмерном пространстве область вне самолета, очевидно, является односвязной. Следовательно, любое локально безвихревое течение в пространстве должно иметь однозначный потенциал скоростей U при нулевой подъемной силе. Если бы это было действительно так, полет был бы невозможен.

Более утонченным является следующий парадокс Чизотти[1]). Рассмотрим течение Жуковского для плоской пластинки, схематически изображенное на рис. 2, *б*. Согласно теореме Кутта — Жуковского, результирующая сила должна быть нормальной к потоку; поскольку же давление всюду нормально к пластинке, эта сила должна быть нормальной к пластинке — очевидное противоречие. Как показал Чизотти, это объясняется совсем просто: на заднюю кромку действует конечная сила вследствие бесконечного отрицательного давления (подсоса), что связано, учитывая формулу (5), с бесконечным значением скорости в этой точке. Таким образом, парадокс связан с тем, что несостоятельна гипотеза (E) из § 1, и может быть назван парадоксом особой точки.

К сожалению, экспериментальные данные не подтверждают изменения подъемной силы с изменением формы крыла, указываемого теорией Жуковского. Мы получаем здесь следующий парадокс утолщения: теоретически коэффициент C_L должен возрастать с утолщением крыла; в действительности же обычно он убывает[2]).

§ 9. Эффект Магнуса; деривация

Игрокам в гольф и теннис известно стремление вращающегося мяча уклониться от своей нормальной траектории в направлении, в котором вращается его передняя часть. Это явление называется эффектом Магнуса. Согласно Рэлею ([12], т. I, 343—346), эффект Магнуса обычно объясняют качественно следующим образом.

Локальная скорость воздуха относительно мяча из-за его вращения больше с той стороны, где вращение направлено назад, чем там, где оно направлено вперед (см. рис. 3). Следовательно, по уравнению Бернулли (3), давление с одной стороны

[1]) См. Cisotti G., *Rend. Accad. Lincei*, 5 (1927), 16—21 и 7 (1928), 17—19 и 538—543; а также Pistolesi H., там же, 12 (1930), 409—411. (Этот парадокс был известен еще Н. Е. Жуковскому, который дал в связи с этим объяснение явления подсасывающей силы; см. Жуковский Н. Е., О поддерживающих планах типа Антуанетт, Труды отд. физ. матем. научн. о-ва любителей естествознания, XV, вып. 2 (1911). — *Прим. перев.*)

[2]) См. [1], стр. 252. — *Прим. перев.*

меньше, и это дает равнодействующую в направлении, соответствующем наблюдаемому.

На основании данного объяснения очень трудно получить количественный результат, так как у нас нет какого-либо определенного способа для того, чтобы связать вращение с циркуляцией — даже в случае цилиндра [1]). Прандтль предпринял героическую попытку определить хотя бы максимум подъемной силы L, который, как он утверждал, достигается тогда, когда значение циркуляции определяется при условии, что имеется одна-единственная критическая точка [2]).

Основываясь на этом, он нашел, что максимум коэффициента C_L равен 4π. Недавно это значение было превышено [3]) — еще

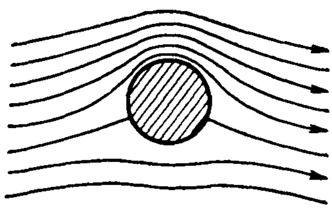

Рис. 3. Эффект Магнуса.

один факт, показывающий ненадежность нестрогих рассуждений.

Несостоятельность существующих объяснений эффекта Магнуса еще более ярко показывает следующий парадокс эффекта Магнуса.

Парадокс эффекта Магнуса. *При малых скоростях вращения направление отклонения в действительности противоположно тому, которое дает объяснение Рэлея (и которое наблюдалось Магнусом)* [4]).

Для того чтобы объяснить этот парадокс эффекта Магнуса, нужно, по-видимому, учесть турбулентность пограничного слоя—

[1]) Как показано в § 8, в случае сферы мы приходим даже к более глубокому парадоксу: вследствие односвязности циркуляция $\Gamma = 0$.

[2]) Доводы Прандтля изложены в ([3], § 27); для цилиндра радиуса c при относительной поступательной скорости a циркуляция $\Gamma = 4\pi ca$. По поводу более поздних экспериментальных данных см. [50], § 239.

[3]) Swanson W. M., Final Report on Contract DA-33-019-ORD-1434, Case Inst. Technology, December 31, 1956. При $V = \omega c = 17a$ коэффициент $C_L = 14{,}7$ и «продолжал возрастать с постоянной скоростью». Недавно, Glauert M. B. (*Proc. Roy. Soc.* **A242** (1957), 108—115) подверг вывод Прандтля критике, исходя из теоретических соображений.

[4]) См. [3], § 27 и 221; экспериментальные данные (в случае сферы) получил Маккол. Данные, приведенные в [3], § 239, показывают, что, по-видимому, аналогичная ситуация имеет место и для цилиндра.

явление, которое до сих пор не поддается математическому исследованию как краевая задача. Таким образом, при любом корректном истолковании реальной поперечной силы при малых скоростях вращения надлежит учитывать число Рейнольдса[1]).

Явление «деривации» аналогично эффекту Магнуса. Артиллеристам уже более ста лет известно, что вращающиеся снаряды имеют тенденцию отклоняться от вертикальной плоскости, в которой производится стрельба, и что такое отклонение происходит в направлении вращения головки снаряда. Однако это явление в течение многих лет понималось неправильно[2]).

Одно неверное объяснение было предложено известным математиком — Пуассоном. Он считал, что вследствие инерции ось снаряда отстает от направления касательной к траектории,

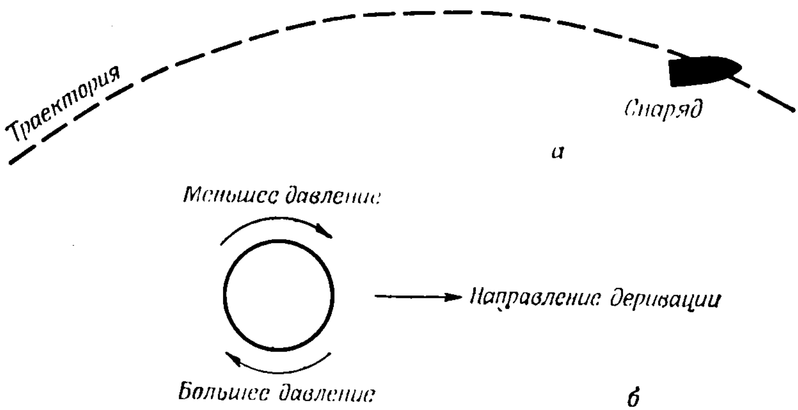

Рис. 4. Объяснение эффекта Магнуса, по Пуассону.

как схематически показано на рис. 4, *а*. Следовательно, на нижней стороне должно создаться большее давление, а значит и большее трение. В соответствии с рис. 4, *б* это должно привести к отклонению в наблюдаемом направлении. Ошибочность объяснения Пуассона становится очевидной, если применить его к вращению теннисного мяча: получилось бы направление отклонения, противоположное обычному эффекту Магнуса!

Правильное объяснение заключается в следующем. С помощью количественного исследования гироскопической устойчивости можно установить, что устойчивое положение оси снаряда (с правой винтовой нарезкой) находится справа от касательной к траектории, а не выше ее, как это утверждал Пуассон. Таким образом, деривация снаряда вызывается главным образом не-

[1]) См. Krahn E., *J. Aer. Sci.*, 23 (1956), 377—378.
[2]) Интересный исторический обзор дан в [5], гл. X.

посредственно аэродинамической поперечной силой и лишь косвенно — вращением.

Это опять-таки показывает ненадежность качественных соображений. Вероятность того, что случайное объяснение окажется правильным, равна 50%!

§ 10. Волновое лобовое сопротивление тонких крыльев

Парадокс Даламбера нельзя распространить на сверхзвуковое течение: даже без учета вязкости математические соображения приводят к существованию положительного лобового сопротивления. Ввиду парадокса обратимости это возможно только потому, что краевая задача (для стационарного движения), определяемая уравнениями Эйлера, не является корректной. Мы покажем сейчас это, начав с рассмотрения линеаризованного сверхзвукового течения (теория «тонкого крыла»).

Рассмотрим семейство независимых от времени сжимаемых течений, зависящих от параметра δ — толщины крыла. Мы предполагаем (гипотеза (E) из § 1), что потенциал скорости можно записать в виде

$$U = ax + \delta\varphi(x, y, z) + O(\delta^2). \tag{14}$$

Подставляя его в формулу (10) и делая обычные в теории возмущений допущения, мы получаем [1]) при $\delta \to 0$

$$(M^2 - 1)\varphi_{xx} = \varphi_{yy} + \varphi_{zz}, \qquad M = a/c. \tag{14*}$$

Ясно, что случаям дозвукового течения ($M < 1$), звукового течения ($M = 1$) и сверхзвукового течения ($M > 1$) отвечают уравнения в частных производных соответственно эллиптического, параболического и гиперболического типов [2]). Это простое замечание уже указывает на то, что краевая задача корректно поставлена лишь в дозвуковом случае.

В случае плоского течения $\varphi = \varphi(x, y)$ еще со времен Даламбера известно, что общее решение уравнения (14*) имеет вид

$$\varphi = F\left(x - \sqrt{M^2 - 1}\, y\right) + G\left(x + \sqrt{M^2 - 1}\, y\right), \tag{15}$$

где $F(r)$ и $G(s)$ — произвольные функции.

---

[1]) См. [6], § 141 или [10], стр. 245. Более подробное описание приложений см. в [10], гл. VIII.

[2]) Это верно также и без линеаризации, но в таком случае M будет зависеть от координат. Следовательно, возможны трансзвуковые потоки и соответствующие им дифференциальные уравнения смешанного типа (эллиптические в одних областях и гиперболические в других), как показано в § 6. [Смешанным течениям посвящена обширная литература; см., например, [7*] и [8*]. — *Прим. ред.*]

Для того чтобы определить $F(r)$ и $G(s)$, нужно использовать условие (7), которое при стационарном течении сводится к равенству $\frac{\partial U}{\partial n} = 0$ или

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = a\eta'(x) \tag{15'}$$

для «тонкого крыла», ограниченного кривой $y = \eta(x)$. Мы заменили в (15′) $\frac{\partial}{\partial n}$ на $\frac{\partial}{\partial y}$, предположив, что тангенс угла наклона $\eta'(x) \ll 1$. Действительно, такая гипотеза (или, вернее, $\eta'(x) \ll M$) является основным допущением теории тонкого крыла.

Чтобы избежать парадокса обратимости и получить корректно поставленную задачу, необходимо систему (15), (15′) дополнить некоторой добавочной гипотезой *необратимости*, выражающей интуитивно очевидный физический факт, что «волны скатываются вниз по течению». Если мы расположим тонкое крыло вдоль оси x, то последнюю гипотезу можно записать в следующем виде:

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} F(x - \sqrt{M^2 - 1}\, y), & \text{если } y < 0, \\ G(x + \sqrt{M^2 - 1}\, y), & \text{если } y > 0. \end{cases} \tag{15*}$$

С учетом результата подстановки в уравнение Бернулли (5) наша система уравнений позволяет заключить о существовании *волнового давления*, которое, в приближении теории возмущений, получается в виде $p = \rho a^2 \eta'(x)$ на верхней поверхности крыла $y = \eta(x)$ и в виде $p = \rho a^2 \tilde{\eta}'(x)$ на нижней поверхности крыла $y = \tilde{\eta}(x)$. Определив продольную составляющую давления и выполнив интегрирование, мы получим для лобового сопротивления $D = \oint p\, dy$ выражение

$$D = \rho a^2 \int (\eta'\, d\eta + \tilde{\eta}'\, d\tilde{\eta}) = \rho a^2 \int [\eta'^2 + \tilde{\eta}'^2]\, dx, \tag{16}$$

где интеграл берется по длине крыла.

Для достаточно малых углов наклона приведенные формулы вполне хорошо согласуются с экспериментом ([10], стр. 346, 350) и, очевидно, дают положительное сверхзвуковое «волновое лобовое сопротивление». Любопытно, что они согласуются с очень старой квазиэмпирической формулой Эйлера, в которую входит универсальный постоянный множитель, определяемый, по предположению, экспериментально [1]).

[1]) Относительно применения к баллистическим задачам см. [5], § 12—16.

§ 11. Тонкие тела вращения

Слишком сложно рассматривать здесь применение уравнения (14*) Прандтля — Глауэрта к сверхзвуковому обтеканию так называемых «тонких», или «удлиненных», тел произвольной формы[1]). Мы только приведем несколько примеров, иллюстрирующих общий тезис о том, что если результаты не получены математически и физически строго, то им присуща тенденция становиться ненадежными.

Относительно простую задачу представляет собой осевое обтекание твердых тел вращения (артиллерийские снаряды без рыскания). Карман и Мур[2]) первыми пришли к выводу, что наличие волнового лобового сопротивления вызывает резкий рост сопротивления при движении тонкого снаряда, когда $M = 1$, и оценили это возрастание сопротивления на основе упрощений, указанных в § 10. Более чем через 10 лет Копал распространил этот вывод на снаряды с рысканием и показал, что упрощенная теория приводит к ряду ошибочных заключений[3]). В частности, в случае конусов под углом атаки поперечная сила, подсчитанная по формулам из § 10, убывает с возрастанием M, в то время как правильное приближение по теории возмущений дает ее *увеличение* (парадокс Копала).

В настоящее время признано (см. прим. 1) на этой стр.), что простая линеаризованная теория, приведенная в § 10, даже для тонких тел приводит к неправильному значению силы. В случае обтекания сверхзвуковым потоком тонких тел вращения, квадратичные члены в уравнении Бернулли при подсчете давления будут того же порядка величины, что и линейный член[4]).

Для некоторых частных приложений простые линеаризованные уравнения из § 10 нужно видоизменять тем или иным способом[5]). Так, для крыльев конечного размаха под углом атаки нужно рассматривать сбегающие вихревые слои. Кроме того,

---

[1]) См. Ward G. N., Linearized theory of steady high-speed flow, Cambridge Univ. Press, 1955.

[2]) *Trans. Am. Soc. Mech. Eng.*, 54 (1932), 303—310. Относительно современной «линеаризованной» теории см. [10], § 8.3; или [15], гл. VIII, § 15.

[3]) Kopal Z., *Phys. Rev.*, 71 (1947), 474; [10], стр. 377; подробнее — Tables of supersonic flow around yawing cones, Mass. Inst. Technology (1947), особенно стр. XVI, XVII. Экспериментальные данные приводят Holt M. и Blackie J., *J. Aer. Sci.*, 23 (1956), 931—936.

[4]) По-видимому, впервые это показал Lighthill M. J., *Reps. Mem. Aer. Res. Comm.*, 2003 (1945); см. также Broderick J. B., *QJMAM*, 2 (1949), 98—120 и [10], стр. 307.

[5]) Ursell F. and Ward G. N., *QJMAM*, 3 (1950), 326—348; Goldstein S., Proc. Int. Math. Congress, Cambridge, 1950, т. 2, особенно стр. 288—289; Adams M. C., Sears W. R., *J. Aer. Sci.*, 20 (1953), 85—98.

в случае закругленных тел вращения, таких как сфера, линеаризованная краевая задача, определяемая посредством уравнений (14*) и (15′), дает несуществующие особенности в критических точках (т. е. на оси симметрии). Но самый существенный дефект теории «тонкого крыла» заключается в том, что она не в состоянии предсказать существование *ударных волн.*

Ударные волны легко наблюдаются в виде четких линий на мгновенных фотографиях движения снарядов, таких, как снимок, изображенный на фронтисписе. В случае конусов и других остроконечных тел при достаточно больших числах Маха эти волны «присоединены» к вершине подобно характеристикам решений линейных гиперболических дифференциальных уравнений. В других же случаях они «отходят» от вершины и оказываются при этом впереди снаряда — там, где по линеаризованной теории не должно быть никакого возмущения.

§ 12. Парадокс Эрншоу

Понятие «ударной волны» можно также вывести теоретически, отправляясь от простого парадокса, которым мы обязаны Эрншоу [1]). Наш орган слуха свидетельствует, что звук проходит большие расстояния почти без искажений и с постоянной скоростью, зависящей от температуры воздуха. Этот опытный факт делает правдоподобным предположение, что плоские звуковые волны распространяются в идеальном невязком газе, не искажаясь и не затухая. Однако это не так, что показывает парадокс Эрншоу.

Парадокс Эрншоу. *При адиабатических колебаниях газа плоские звуковые стационарные волны конечной амплитуды математически невозможны.*

Доказательство. Предположим, что форма звуковых волн неизменна и что волны распространяются с постоянной скоростью, нормальной к волновому фронту. Тогда, если мы перейдем к осям координат, движущимся вместе с волнами, то увидим, что движение жидкости не только одномерно, но и *стационарно.* Выбрав в качестве направления движения ось x, мы можем написать $\rho = \rho(x)$, $u = u(x)$ и т. д., и (без учета силы тяжести) уравнение Бернулли (8) сведется к виду $udu + dp/\rho = 0$. Кроме того, уравнение неразрывности (1) перейдет в равенство

---

[1]) Earnshaw S., *Phil. Trans.*, **150** (1860), 133—148; см. также Stokes, *Phil. Mag.*, **33** (1848), 349; Rankine W. J. M., *Phil. Trans.*, **160** (1870), 277; [12], т. 5, 573 (или *Proc. Roy. Soc.*, **A84** (1910), 274—284); [7], § 283; [6], § 51.

$\rho u = \text{const} = C$, или $u = C/\rho$. Подставляя это в предыдущее соотношение, получаем уравнение

$$-\frac{C^2\,d\rho}{\rho^3} + \frac{dp}{\rho} = 0, \text{ или } dp = \frac{C^2\,d\rho}{\rho^2}. \qquad (17)$$

Следовательно, подобное волновое движение возможно только в случае, если жидкость удовлетворяет уравнению состояния (3) частного вида:

$$p = p_0 - \frac{C^2}{\rho}. \qquad (18)$$

Но нам не известен ни один газ, для которого адиабатическое [1]) уравнение состояния имело бы такой вид.

§ 13. Возникновение ударной волны

Как и многие другие парадоксы, парадокс Эрншоу содержит в себе зерно существенной истины. При более тщательном исследовании соответствующих уравнений можно установить, что для адиабатического течения газа более плотные части волны конечной амплитуды нагоняют менее плотные и в конечном счете перегоняют их. Показывается это следующим образом.

Пусть a обозначает всю массу жидкости слева от данной точки, так что $x(a, t)$ представляет собой положение частицы a в момент времени t, а $\frac{\partial x}{\partial a}$ есть удельный объем $\sigma = \frac{1}{\rho}$. Тогда D/Dt из § 3 заменяется на $(\partial/\partial t)_a$, $(\partial x/\partial t)_a = u$ и $(\partial^2 x/\partial t^2)_a$ есть субстанциональное ускорение; здесь индекс a означает, что величина a остается постоянной. Уравнение неразрывности (1′) удовлетворяется автоматически, поскольку $D\rho/Dt = -\rho^2\partial^2 x/\partial t\,\partial a$ и $\operatorname{div} u = \rho\partial^2 x/\partial a\,\partial t$. Кроме того, можно использовать уравнение состояния (3), для того чтобы исключить p посредством соотношения

$$p = h^{-1}\left(\frac{1}{\sigma}\right) = H(\sigma) = H\frac{\partial x}{\partial a}. \qquad (19)$$

Следовательно, если не учитывать силу тяжести, то формулы (1)—(3) эквивалентны уравнению

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -H'\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial^2 x}{\partial a^2}. \qquad (20)$$

---

[1]) Действительно, если принять (18), то получим $d^2p/d\rho^2 < 0$, что противоречит второму началу термодинамики.

Пуассон открыл важный класс решений уравнения (20), задаваемый формулой

$$u = G(x - (c + u)t), \tag{20*}$$

где $G(r)$ — произвольная функция. Эти решения были названы *простыми* волнами ([6], стр. 92); они характеризуются свойством: $u = \int_{\sigma_0}^{\sigma} c(\sigma)\,d\sigma/\sigma$, где $c^2 = dp/d\rho = -\sigma^2 dp/d\sigma$ есть квадрат скорости звука, которая является функцией удельного объема σ. Как показал Адамар, любая плоская волна, только с одной стороны вступающая в жидкую среду (обычную жидкость или газ), в начальный момент находящуюся в состоянии покоя, должна быть простой волной.

Так как $u = \int c(\sigma)\,d\sigma/\sigma$, то формула (20*) дает функциональное соотношение между u и σ, а следовательно, и между u и c. Делая снова подстановку в (20*), при $p = k\rho^{\gamma}$ $(\gamma > 1)$, легко показать, что более плотные части газа нагоняют менее плотные ([6], стр. 96), причем с постоянной скоростью. Следовательно, в течение конечного промежутка времени неизбежно возникает *разрыв плотности* или «ударная волна», что находится в самом явном противоречии с гипотезой (E) из § 1.

§ 14. Термодинамика невязких жидкостей

Для того чтобы объяснить явление ударной волны, необходимо привлечь некоторые важные термодинамические понятия [1]); одних механических концепций для этого недостаточно. Так, например, необходимо рассматривать *внутреннюю энергию* жидкости $E(p, T)$ даже тогда, когда ее можно исключить из окончательных уравнений, как в случае адиабатического течения. Эта величина входит в закон сохранения энергии согласно формуле

$$dQ = dE + p\,dV. \tag{21}$$

Здесь $p\,dV$ есть дифференциал работы при отсутствии внешних сил.

Совершенный газ можно определить посредством уравнений Эйлера, термодинамического уравнения состояния $p = \rho RT$, где

[1]) Превосходное изложение термодинамики сжимаемых жидкостей см. в [10] или Липман Г. В., Рошко А., Элементы газовой динамики, М., ИЛ, 1960. (На русском яз.: Зельдович Я. Б., Теория ударных волн и введение в газодинамику, М., изд. АН СССР, 1946; Зауэр Р., Введение в газовую динамику, М., Гостехиздат, 1947. — *Прим. перев.*)

R — газовая постоянная, и формулы для внутренней энергии $E = C_V T$, где C_V — еще одна постоянная (удельная теплоемкость при постоянном объеме).

Для *изотермического* течения $T = \text{const}$ и из соотношения $p = \rho RT$ следует формула (3а) при $\gamma = 1$. В случае *адиабатического* течения предполагается, что теплота переносится только посредством конвекции (нет ни теплопроводности, ни излучения); при этом имеем $dQ = 0$ в формуле (21). Для единичной массы $\left(\text{так что } V = \frac{1}{\rho}\right)$ имеем тогда $pV = RT$ и $E = C_V T = (C_V/R)pV$. Тогда формула (21) дает в результате уравнение

$$0 = dE + p\,dV = (C_V/R)\,V\,dp + (1 + C_V/R)\,p\,dV.$$

Полагая $\gamma = (R + C_V)/C_V$, получаем соотношение $dp/p = -\gamma dV/V = \gamma d\rho/\rho$, из которого следует «политропное» уравнение состояния (3а) : $p = k\rho^{\gamma}$.

Совершенную жидкость можно определить посредством уравнений Эйлера и условия несжимаемости $V = \text{const}$ (уравнение (3б)).

Уравнения Рэнкина — Гюгонио.

Используя законы сохранения массы, количества движения и энергии, можно также найти соотношение между значениями давления, плотности и температуры p_1, ρ_1, T_1 перед ударной волной и значениями тех же величин p_2, ρ_2, T_2 за ударной волной. Например, для совершенного газа эти величины зависят только от одного параметра — отношения давлений $P = p_2/p_1$ или *интенсивности скачка* $P - 1$. Тогда получим ([10], стр. 30) следующие равенства:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{P + \beta}{\beta P + 1}, \qquad \beta = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1},$$

$$c = c_1\left[1 + \frac{(\gamma + 1)(P - 1)}{2\gamma}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Парадокс обратимости, в силу которого можно было бы поменять местами индексы 1 и 2 в предшествующих формулах и принять $P < 1$, можно избежать, если привлечь второе начало термодинамики. (В § 13 принцип, согласно которому более плотные части баротропных течений нагоняют менее плотные, приводит к такому же заключению. Это следует из неравенства $\gamma = (R + C_V)/C_V > 1$, которое в свою очередь следует из положительности величин R и C_V в силу физических соображений.)

Соотношения для косых ударных волн можно легко вывести из соотношений для нормальных скачков уплотнения, используя подвижные оси (§ 67).

§ 15. Буруны и боры

Между длинными *безвихревыми* гравитационными волнами в жидкости постоянной малой глубины и волнами сжатия в адиабатическом газе при $\gamma = 2$ существует замечательная аналогия. Длинные гравитационные волны бесконечно малой амплитуды распространяются с постоянной скоростью $c = \sqrt{gh}$ без изменения своей формы, совсем как при линеаризованном приближении сверхзвукового течения в § 10. Длинные гравитационные волны *конечной* амплитуды распространяются со скоростью $\sqrt{gh}$, которая возрастает с увеличением местной высоты волны. Следовательно, гребень всякой длинной волны на мелководье нагоняет впадину так, как это описано в § 13. Наклон фронта волны постепенно становится все круче, пока он не станет вертикальным, и волна, наконец, «обрушивается» под собственной тяжестью.

Рэлей [1]) использовал эту аналогию, чтобы качественно объяснить превращение в «боры» приливных волн при их распространении в устьях рек. Подобные «боры» получаются чаще всего в постепенно сужающихся устьях со ступенчатым дном: относительная высота приливных волн увеличивается вследствие получающейся концентрации всей энергии волны в меньшем поперечном сечении и на меньшей длине волны [равной произведению (12 часов) $\sqrt{gh}$].

Нового математического успеха удалось добиться благодаря замечанию Рябушинского (см. прим. 1) на этой стр.), который указал, что формула $c = \sqrt{g(h + y)}$, где y — локальная высота волны, соответствует выбору $\gamma = 2$ в соотношении (3а). Вскоре после этого Джеффри (см. прим. 1) на этой стр.) применил идею, аналогичную идее Рэлея при исследовании разрушения волн на отлогих отмелях. По мере того как волны переходят на мелководье, их скорость уменьшается. Из-за этого энергия волны сосредоточивается на более коротком участке, что еще больше увеличивает высоту волны и ее крутизну. Если отмель достаточно полога, гребень волны снова попадает во впадину, образуя «бурун» прибоя.

Стокер [2]) и другие авторы пытались объяснить количественно образование «бурунов» и «боров» при помощи вышеприведен-

---

[1]) *Proc. Roy. Soc.*, **A90** (1914), 324—328; [7], стр. 175—177, 182; см. также Riabouchinsky D., *Comptes Rendus*, **195** (1932), 988—989; [6], стр. 32—35. Результаты Джеффри см. Cornish V., Ocean Waves, Cambridge, 1934, стр. 154—159.

[2]) Стокер Дж., Волны на воде, М., ИЛ., 1959, гл. 10, § 7, § 10 и приведенная там литература.

ных соображений. Это значит, что они пытались рассматривать эти явления в рамках рациональной гидродинамики Лагранжа. Однако представляется сомнительным, что движение жидкости в действительном прибое и в приливных волнах является безвихревым настолько, чтобы такая модель была реалистичной. В настоящем прибое и в настоящих приливных волнах всегда имеется значительная завихренность из-за откатывания предшествующих волн («подмыв»), из-за течения всей массы жидкости и т. д. и, возможно, из-за «расслоения» (стратификации), вызываемого наличием взвешенного песка. Вследствие этого реальные буруны могут «нырять», «перекатываться» или «расплескиваться», а реальные боры могут продвигаться в виде изолированной стены воды или в виде ступенек [1]. Кажется маловероятным, чтобы безвихревые гравитационные волны давали такое разнообразие явлений.

Кроме того, следует вспомнить, что в абстрактную теорию входят *два* параметра: отношение h/λ глубины к длине волны и отношение h/R глубины к минимальному радиусу кривизны поверхности R. Как показал в 1925 г. Стройк [2], при любых *фиксированных* h и λ волны достаточно малой конечной амплитуды могут распространяться без изменения своей формы; это видимое противоречие с выводами Рэлея и Рябушинского можно назвать парадоксом длинной волны. Объяснение заключается в том, что построения Стройка относятся к случаю, когда h/R сравнимо с h/λ, в то время как выводы Рэлея применимы только к случаю $h/\lambda \ll h/R \ll 1$.

§ 16. Парадокс Ферри

Гораздо более недавний парадокс, которым мы обязаны Ферри [3], относится к сверхзвуковому обтеканию с «присоединенной» ударной волной наклоненного кругового конуса, ось которого образует угол «рысканья» δ с направлением течения. Как будет показано в § 88, из гипотезы (C), § 1, следует, что такое течение должно обладать *конической симметрией*. Поэто-

---

[1] См. Mason M., Gravity waves, 315—320, Nat. Bu. Standards Circular 521, 1952, или гл. III из работы Cornish'a, цитированной в примечании 1) на стр. 41.

[2] Struik D. J., *Rendic. Lincei*, 1 (1925), 522—527. Обсуждение парадокса длинной волны см. в [7]; Ursell F., *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **49** (1953), 685—694; Benjamin T. B., Lighthill M. J., *Proc. Roy. Soc.*, **A224** (1954), 448—460.

[3] Ferri A., *NACA, Rep.*, 1045 (1951); см. также Holt M., *QJMAM*, 7 (1954), 438—445.

му мы будем рассматривать $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\varphi, \theta)$ в сферических координатах.

Если отождествить соответствующие линии тока при центральном проектировании из вершины конуса, то они составят однопараметрическое семейство, которое схематически изображено на рис. 5. За исключением линий тока, лежащих в плоскости симметрии, для которых $\theta = 0, \pi$, все линии тока стремятся

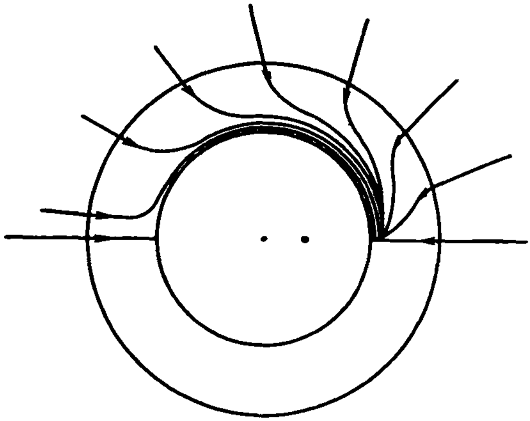

Рис. 5. Парадокс Ферри.

к предельному направлению $(\alpha - \delta, \pi)$, т. е. все они стремятся влиться в прямую линию тока, идущую по конусу и составляющую наименьший угол $\alpha - \delta$ с направлением течения. Но, в силу уравнений Рэнкина — Гюгонио, линиям тока, пересекающим «присоединенную» ударную волну под различными углами, соответствуют различные значения энтропии. Поэтому $\mathbf{u}(\varphi, \theta)$ имеет *особую точку* в $(\alpha - \delta, \pi)$, что снова нарушает гипотезу (E) из § 1. Эта особенность делает неправомерным разложение $\mathbf{u}(\varphi, \theta)$ по степеням угла рысканья δ и в ряд Фурье относительно θ. Следовательно, вычисления Копала для оценки эффектов рысканья, которые основаны на теории возмущений, использующей такие разложения [1]), не являются строгими. А следовательно, строго не обоснован и парадокс Копала (§ 11).

[1]) Stone A. H., *J. Math. Phys.* MIT, 27 (1948); 67—81. [Вне тонкого вихревого слоя вблизи конуса разложение Стоуна правильно. В [11*] оно аналитически продолжено внутрь вихревого слоя, где оно переходит в разложение Виллета [12*]. — *Прим. ред.*]

§ 17. Парадокс тройной ударной волны

В § 14 упоминалось о том, что уравнения Рэнкина — Гюгонио выводятся из законов сохранения. Эти уравнения показывают, что в случае совершенного газа отношения давлений, плотностей и температур p/p', ρ/ρ', T/T' по разные стороны от стационарной ударной волны зависят только от одного параметра (интенсивности скачка или числа Маха — см. [15], гл. IV, § 4). Кроме некоторых исключений, отмеченных в конце § 14, эти выводы подтверждаются экспериментально, причем на практике можно наблюдать ударные волны различной силы.

Не так обстоит дело с «кратными» ударными волнами. В случае двойной, «регулярно» отраженной ударной волны (см. рис. 6, *а*) и тройной ударной волны, или *Y*-волны Маха (см.

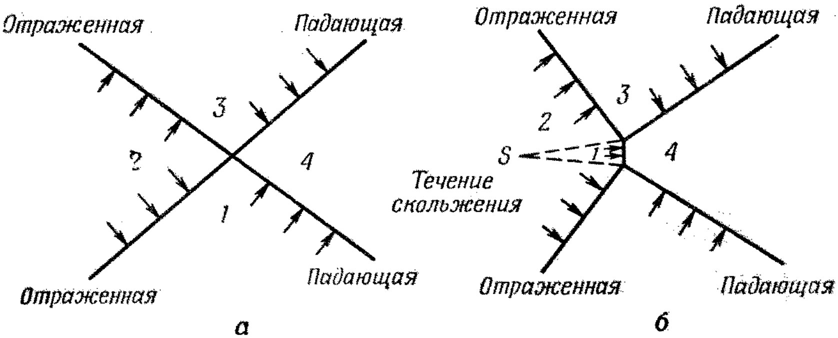

Рис. 6. Отражение ударных волн.
а — регулярное отражение; *б* — *У*-образное отражение по Маху.

рис. 6, *б*), соответствующие математические расчеты возможны, если предположить, что в каждом из получающихся при этом секторов (1, 2, 3, 4) физические переменные принимают определенные предельные значения вблизи особой точки в «вершине» ударной волны. Многие из таких расчетов также подтверждаются экспериментально, так что эта теория является весьма правдоподобной.

Однако в случае «слабых» ударных волн регулярные отражения происходят при углах падения несколько бо́льших, чем это допускается теорией, а *полученные при расчете предельные значения для тройных ударных волн значительно отличаются от* *наблюдаемых*. Это противоречие, которое можно назвать парадоксом тройной ударной волны, было, по-видимому, открыто Дж. фон Нейманом (1945 г.).

Не раз пытались разрешить этот парадокс, который, возможно, является «парадоксом особой точки», т. е. получается из-за чрезмерно упрощенной картины локального поведения вблизи особой точки. Но до сих пор не дано ни одного удовлетворительного истолкования [1]).

§ 18. Значение уравнений Эйлера

Предыдущие парадоксы показывают, что область применимости уравнений Эйлера имеет некоторые ограничения; однако эти уравнения все еще являются основным орудием практической гидромеханики. Так, они дают возможность приближенно вычислить: 1) распределение давлений на лобовой поверхности препятствий; 2) подъемную силу крыла самолета; 3) силы при движении с «кавитацией» (гл. III) и наличии струй; 4) гидродинамическое противодействие ускорению твердого тела в жидкости («присоединенная масса», см. гл. VI); 5) распространение гравитационных волн, включая сейши, приливы и отливы; 6) распространение звука (акустика); 7) распределение давления и скорости течения в сверхзвуковых соплах и 8) сверхзвуковое лобовое сопротивление.

При подобных расчетах необходимо иметь в виду описанные выше парадоксы, а также большое разнообразие течений, удовлетворяющих теории невязкого обтекания при наличии завихренности. В теоретической гидродинамике это разнообразие иногда как бы остается в тени из-за того, что слишком много внимания уделяют теоремам существования и единственности кстати сказать, при доказательстве таких теорем часто исходят из нереальных допущений. Это подчеркивается в большинстве книг по «современной гидродинамике» (например, в работах [3] и [24]), где с самого начала указывают, что возможна неоднозначность решений, а также отмечают такие удивительные экспериментальные явления, как пограничные слои и турбулентность.

Однако наличие таких обстоятельств вовсе не должно снижать значение чисто математической теории невязких жидко-

---

[1]) См. Bleakney W. and Taub A. H., *Revs Mod. Phys.*, **21** (1949), 587—605; [6], стр. 342; [15], стр. 144; Polachek H. and Seeger R., *Phys. Rev.*, **84** (1951), 922—929, а также [16] гл. 5 тех же авторов и приведенная там литература. Более новые работы Jahn R. G., *J. Fluid Mech.*, 2 (1957); 33—48 и Sternberg J., *Physics of Fluids*, **2** (1959), 179—206.

стей. Теория в состоянии указать существенные возможности, которые «здравым смыслом» были бы отвергнуты как абсурдные.

Например, теория указывает, что могут быть *крылья с пренебрежимо малым лобовым сопротивлением*. Хотя этот идеал пока еще не достигнут, он явился стимулом для многих важных работ (см. § 29).

Наконец, из парадокса обратимости следует возможность того, что область «мертвого» воздуха, или «след», может образоваться *впереди* цилиндра. Наличие такой области сделало бы возможным обтекание конечного цилиндра таким же потоком, как и известное обтекание Тейлора — Маккола (§ 85) для конического снаряда. Такое течение характеризуется тем, что на боковой поверхности конуса всюду постоянное давление. Согласно теории «следов» (гл. III), твердый конус можно было бы, не нарушая равновесия, заменить идеальным невязким воздухом при постоянном избыточном давлении. Математически это означает, что в идеальной жидкости возможно обтекание плоского диска сверхзвуковым потоком, при котором невидимый конический воздушный барьер защищает диск от давления воздуха, намного уменьшая лобовое сопротивление.

Здравый смысл и интуиция немедленно отвергают возможность подобного течения как до нелепости неустойчивого. Логическая основа здесь такая же, как и в том случае, когда отвергают возможность существования «следа» в области вверх по течению. Кажется в высшей степени правдоподобным, что наличие препятствия дает себя знать лишь в области, расположенной вниз по течению [1]).

И все же в данном случае, по-видимому, скорее ошибается здравый смысл, чем математический вывод! Снимки, сделанные в Абердинской научно-исследовательской баллистической лаборатории (см. фронтиспис), показывают, что очень тонкая игла, помещенная перед диском, действительно способна создать нечто вроде подобного «абсурдного» течения.

Ввиду этого и других примеров мы считаем, что у математиков нет оснований думать, будто в гидродинамике снижается значение дедукции (при сопоставлении ее с «физическими выводами»), *если* учитываются те гидродинамические парадоксы, которые выявились в эксперименте.

---

[1]) Те же самые интуитивные догадки были использованы в § 10, чтобы выделить более предпочтительное «простое обтекание» тонкого крыла.

Глава II

ПАРАДОКСЫ ВЯЗКОГО ТЕЧЕНИЯ

§ 19. Уравнения Навье — Стокса

Несмотря на значительную область применения уравнений Эйлера — Лагранжа, их, вообще говоря, больше не считают приемлемой основой для теоретической гидродинамики. Вместо этих уравнений используются уравнения Навье — Стокса, вывод которых мы сейчас кратко изложим.

Впервые эти уравнения были выведены Навье (1822 г.) и Пуассоном (1829 г.), применившими упрощенную молекулярную модель для газов, что привело к введению положительной *вязкости* $\mu > 0$, которая, как предполагалось, описывает молекулярную диффузию количества движения.

Однако в настоящее время общепризнано, что простые законы для межмолекулярных сил, принятые обоими учеными, безнадежно не соответствуют действительности, особенно в случае реальных жидкостей. Поэтому принципиально более предпочтительным в настоящее время считается континуальный подход Сен-Венана (1843 г.) и Стокса (1845 г.), который позволяет избежать указанных предположений [1]). Мы начнем с изложения этого континуального (или «макроскопического») подхода.

Такой подход основан на фундаментальной гипотезе, заключающейся в том, что к напряжениям давления, которые рассматривал Эйлер, нужно добавить *вязкие* напряжения, *линейно* зависящие от *скоростей деформаций*. Ниже приводится краткое резюме применяемых при этом аргументов.

Задача заключается в том, чтобы найти связь между матрицей (вязких) напряжений $P = \|p_{ij}\|$ и матрицей скоростей деформации $\| \partial u_i/\partial x_j \|$. Коши показал, что для любой среды, если считать недопустимыми бесконечно большие угловые

---

[1]) Полную библиографию см. в [7], стр. 723; исследования Стокса см. в [13], т. 1, стр. 78 и дальше; стр. 182 и дальше. Хорошее современное изложение см. Serrin J., *J. Math. Mech.*, 8 (1959), 459—470. (См. также [1*], [13*]. — *Прим. перев.*)

ускорения (гипотеза (E) из § 1), матрица напряжения должна быть симметричной: $p_{ij} = p_{ji}$. С другой стороны, матрица скорости деформации есть сумма кососимметричной составляющей

$$\frac{\| \partial u_i/\partial x_j - \partial u_j/\partial x_i \|}{2},$$

соответствующей вращению абсолютно твердого тела, и симметричной составляющей

$$S = \frac{\| \partial u_i/\partial x_j + \partial u_j/\partial x_i \|}{2}.$$

Так как при вращении твердого тела физическая деформация отсутствует, то симметричная матрица S выражает истинную скорость деформации.

При наличии изотропности главные оси матриц P и S должны совпадать (мы напоминаем известную теорему алгебры, согласно которой всякую симметричную матрицу можно свести к диагональному виду путем вращения, приведя ее к соответствующим «главным» осям координат). Далее, из наших предположений о линейности и изотропности нетрудно получить, что относительно главных осей справедливо соотношение

$$p_{ii} = p - \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} - \frac{2\mu\, \partial u_i}{\partial x_i} \tag{1}$$

при надлежащих постоянных λ и μ. Кроме того, с учетом симметрии относительно главной диагонали, можно записать равенство

$$p_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = 0, \quad \text{если} \quad i \neq j.$$

Возвращаясь к общей системе координат, мы получим следующие основные уравнения:

$$p_{ij} = p\delta_{ij} - \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} - \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \tag{1*}$$

которые будем применять ниже.

Если не вводить предположения о несжимаемости, то очень трудно получить для системы уравнений Навье — Стокса корректно поставленную краевую задачу, условия которой были бы физически состоятельными. Прежде всего часто бывает неизвестна величина λ (см. § 33). Стокс пробовал предположить, что «вторая вязкость» μ' обращается в нуль:

$$\mu' = \lambda + \frac{2}{3}\mu = 0. \tag{2}$$

Это может быть выведено из кинетической теории для одноатомных газов[1]). Можно и ошибочным способом вывести условие (2), *определив* давление p в виде $(p_{11}+p_{22}+p_{33})/3$. Ловушка состоит в том, что не известно, определяет ли это «давление» плотность согласно термодинамическому уравнению состояния $\rho=\rho(p, T)$, в котором p и ρ берутся из статических измерений. Если это так, то условие (2) имеет место ([7], стр. 718); в противном случае, мы не знаем, как связать термодинамическое давление с тензором напряжения $\| p_{ij} \|$.

§ 20. Реальные газы и жидкости

Помимо сказанного, в реальных жидкостях величины λ и μ изменяются вместе с температурой T и давлением p; например, изменения температуры имеют большое значение для смазки. В лучшем случае можно надеяться, что $\lambda(p, T)$ и $\mu(p, T)$ — однозначные функции. Для того чтобы эту зависимость учесть математически, уравнения Навье — Стокса необходимо дополнить по меньшей мере уравнением теплопроводности. Это делает краевую задачу совсем не поддающейся решению; но даже и дополненная система физически не точна, так как мы пренебрегли излучением. (Такое пренебрежение весьма правдоподобно в силу гипотезы (В) из § 1.)

Однако движение реальных жидкостей связано и с другими физическими эффектами, которые не учитывались ни Навье, ни Стоксом. Так, в реальных газах при гиперзвуковых скоростях течения важную роль играют эффект релаксации, молекулярная диссоциация и ионизация[2]). Будущий специалист по гидромеханике, которому придется иметь дело с задачами, связанными со спутниками и их возвращением, должен дополнительно к уравнениям Навье — Стокса хорошо ознакомиться с химической кинетикой.

Подобным образом бичом первых сверхзвуковых аэродинамических труб были ударные волны, возникавшие из-за конденсации водяных паров в воздухе — еще одна «скрытая переменная», которую игнорируют при постановке задач по Навье и Стоксу; см. [16, гл. 5].

Экспериментально было обнаружено, что затухание звука в жидкостях и газах — явление, которое определенно предска-

[1]) Maxwell J. C., *Phil. Trans.*, 157 (1867), 49—88; Чепмен С., Каулинг Т., Математическая теория неоднородных газов, ИЛ, М., 1961. Дюгем показал, что из второго начала термодинамики следует $\mu' \geqslant 0$.

[2]) См. Lighthill M. J., в «Surveys in Mechanics», Cambridge Univ. Press, 1956; 250—351; Хейз У. Д. и Пробстин Р. Ф., Теория гиперзвуковых течений, М., ИЛ, 1962.

зывается любой точной теорией сжимаемых вязких жидкостей,— в значительной мере зависит от молекулярных эффектов (релаксации), см. § 33.

Ввиду упомянутых выше трудностей, по-видимому, разумно ограничиться рассмотрением *несжимаемых* вязких жидкостей, но и в этом случае известны различные аномалии. Так, многие жидкости, состоящие из длинных молекулярных цепочек или содержащие глинистые взвеси, называются «неньютоновыми» — таков употребляемый в настоящее время рабочий термин для жидкостей, которые не удовлетворяют уравнениям Навье — Стокса. Сверхтекучесть жидкого гелия — еще одно явление, которое не согласуется с теорией Стокса [1]).

§ 21. Несжимаемые вязкие жидкости

Ввиду трудностей, описанных в § 20, основное внимание математиков было сосредоточено на уравнениях Навье — Стокса для несжимаемых вязких жидкостей в предположении, что величины μ и ρ можно считать примерно постоянными. Большинство специалистов считает, что *теоретическая гидродинамика*, основывающаяся на уравнениях Навье — Стокса, дает довольно точное приближение динамики *реальных* жидкостей, если число Маха M настолько мало, что можно пренебречь эффектами сжимаемости. Они уверены в том, что (перефразируя Лагранжа) «если бы уравнения Навье — Стокса были интегрируемы, то при малых числах Маха можно было бы полностью определить все движения жидкости» (ср. § 1). Для того чтобы исследовать, насколько обоснована такая уверенность, мы преобразуем сначала эти уравнения к более удобному виду.

Объединив уравнения (1*) с условием несжимаемости (формула (1′) из гл. I), мы получим уравнение

$$p_{ij} = p\delta_{ij} - \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right).$$

Если при обычном выводе уравнений движения учесть члены, содержащие величину μ, то получим вместо уравнения Эйлера (2) в гл. I следующее уравнение:

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} + \frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p = \mathbf{g} + \nu\nabla^2\mathbf{u}, \qquad \nu = \frac{\mu}{\rho}. \tag{3}$$

Вместе с уравнением

$$\operatorname{div}\mathbf{u} = 0 \tag{4}$$

[1]) См. London F., Superfluids, Wiley, 1954, стр. 6—13; Donnelly R. J., *Phys. Rev.*, 109 (1958), 1461—1463 и приведенную там литературу.